Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск X

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2012

УДК 371

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск X : в 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – Т. 1 : Теорія та методика навчання математики. – 326 с.

Збірник містить статті з різних аспектів дидактики математики і проблем її викладання у ВНЗ та школі. Значну увагу приділено питанням розвитку методичних систем навчання математики та модернізації математичної освіти в контексті орієнтирів Болонського процесу.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та педагогічних працівників.

Друкується згідно з рішенням ученої ради Криворізького металургійного факультету Національної металургійної академії України, протокол №8 від 14 березня 2012 р.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ

О. В. Амброзяк
Україна, м. Черкаси, Черкаський національний університет
ім. Б. Хмельницького
Olga27_1989@ukr.net

Будь-яке явище, будь-який процес уявляє собою єдність змісту і форми. Структуру окремих думок і їх особливих сукупностей називають формами мислення, основними з яких є поняття, судження, умовиводи.

Відомо більше 30 спроб дати визначення поняття. Великий угорський логік Б. Фогараши в підручнику «Логіка» [4] приводить 34 означення поняття. Ф. Енгельс відзначав, що поняття – це результати, в яких узагальнюються дані досвіду, підсумки деякого етапу пізнання [2, 14].

Поняття можна охарактеризувати як складну логічну і гносеологічну категорію – результат деякого етапу в розвитку знань про ті або інші об’єкти матеріального світу. Виникнувши, поняття вже саме стає об’єктом пізнання. Разом з тим поняття – одна з форм мислення і в цьому значенні воно виступає як знаряддя (засіб) пізнання.

Термін «поняття» зазвичай використовується для позначення мисленнєвого образу певного класу речей, процесів, відношень об’єктивної реальності або нашої свідомості. Поняття – одна з головних складових будь-якого навчального предмета, в тому числі і предметів математичного циклу. Повноцінне вивчення математичних понять систематизує знання учнів, сприяє більш глибокому засвоєнню предмета. Першочергова задача вчителя математики при вивченні будь-якої теми – формування понятійного апарату теми. Поняття – форма мислення, в якій виділені істотні властивості, що відокремлені від неістотних. Мати поняття про деякий об’єкт, явище, означає розуміти сутність цього об’єкта, явища. Безпосереднім вираженням розуміння є повнота, різнобічність, істотність взаємозв’язків поняття, що розглядається, з раніше засвоєними, з уже існуючою системою знань.

Природний процес утворення понять у свідомості відбувається в результаті багаторазового зіткнення з об’єктами, які є представниками цього поняття, в результаті мисленнєвих операцій аналізу, синтезу, абстрагування, порівняння, узагальнення. Поняття абстрагується від індивідуальних ознак, окремих відчуттів і уявлень. В цьому процесі психологи виділяють наступну послідовність: сприйняття – уявлення – поняття. Ці об’єкти, їх образи аналізуються, співставляються в міру збагачення досвіду. Сприймаючи один об’єкт, людина мисленно відтворює інший, відомий раніше, відбувається порівняння, виділяється спільне. Це процес від відчуттів, які спочатку не диференціюються і які не мають однозначності, до поступового усвідомлення істотних властивостей, які можуть бути виявлені вже при відсутності відчуттів, до абстрагування істотних властивостей в понятті, яке містить в собі всю сукупність об'єктів, що входять до складу поняття.

У формальній логіці прийнято розрізняти поняття двох видів: поняття про об'єкти і поняття про відношення між об'єктами.

Для реалізації виховання творчої особистості, необхідно в системі освіти реалізовувати ці два напрямки. По-перше, необхідно організувати в учнів формування як повноцінних понять, так і загальних способів розумових дій з цими поняттями (розв'язування задач). Це означає, що учні повинні бачити у виучуваних поняттях найбільш суттєві властивості і особливості та розуміти їх значення для розв'язання відповідних задач.

Вибір шляху засвоєння диктується змістом наукового поняття, умовами навчання, індивідуальними можливостями учня, його готовністю до засвоєння понять і багатьма факторами, з якими необхідно рахуватися у шкільній практиці. Вона постійно підкреслювала, що не може бути єдиного для всіх учнів шляху засвоєння понять, що орієнтовна основа дій, яка пропонується учню в якості ідеальної моделі, є відтворенням «дорослої» логіки, що відображає спосіб знакового пізнання, який не може бути просто інтеріоризований дитиною поетапно під керівництвом дорослого. Учня слід ставити в ситуацію «здобування» знання, а не засвоєння готового алгоритму [3].

Формування понять – складний психологічний процес, який починається з утворення найпростіших форм пізнання – відчуттів, та відбувається найчастіше за такою схемою: відчуття – сприйняття – уявлення – поняття. Зазвичай цей процес розділяють на дві сходинки: чуттєву, яка полягає в утворенні відчуттів, сприйняття та уявлення, логічну, яка полягає в переході від уявлення до поняття за допомогою узагальнення та абстрагування. Чуттєва сходинка в процесі формування понять відповідає першому етапові пізнання, тобто «живому спогляданню», і тому її здійснення потребує широкого застосування наочності. Процес формування понять буде ефективним, якщо він орієнтує учнів на узагальнення і абстрагування суттєвих ознак (характеристичної властивості) поняття, яке формується. Проте, формування математичних понять не завжди відбувається за наведеною вище схемою, яка починається з відчуттів.

Формування понять можливе лише за умови їх іменування, тобто за рахунок приписування їм певних імен. Тому важливо пам'ятати *принципи коректного використання імен*:

1) принцип предметності: речення говорить про предмети, імена

яких зустрічаються в цьому реченні (а не про їх імена);

2) принцип однозначності: кожен символ (термін), який використовується в якості імені, означає не більше одного об'єкта, іншими словами, кожне ім'я має не більше одного значення;

4) принцип заміни імен: речення не змінює свого значення істинності, коли одне з понять, які в нього входять, заміняється другим ім'ям, яке має те ж саме значення (тобто синонімом).

Завершальним етапом формування поняття, як правило, є його означення, проте його знання ще не гарантує засвоєння поняття. Один із аспектів формалізму в математичних знаннях полягає саме в тому, що деякі учні, знаючи означення, не розпізнають означуваний предмет в різноманітних ситуаціях, де він зустрічається. Тому методика навчання повинна попередити можливий формалізм у засвоєнні понять. Важливе місце в цій роботі займає навчання розпізнаванню об'єкта, що відповідає даному поняттю, і побудові різного роду контрприкладів.

Характерними ознаками будь-якого поняття є те, що: поняття є продукт високоорганізованої матерії; відображає матеріальний світ; постає в свідомості людини як засіб узагальнення; означає специфічно людську діяльність; формулювання поняття невіддільне від його виразу за допомогою мови, запису, символу.

Сформувати поняття про об'єкт — це значить розкрити всі істотні властивості об'єкту в їх цілісній сукупності. Діяльність учня (суб'єкта) при цьому направлена на вивчення математичного об'єкту, а продуктом цієї діяльності буде правильне поняття. Основною навчальною задачею при навчанні означенням математичних об'єктів буде формування логічної дії з розкриття структури визначення математичних об'єктів і дій, адекватних конкретному виду визначень.

Дії, за допомогою яких розв'язуватиметься основна навчальна задача, наступні: логічний аналіз структури визначень різного вигляду (виділення логічної і змістовної функцій кожного слова у означенні об'єкту, відшукання зайвих слів у визначеннях тощо); підведення конкретного математичного об'єкта під означення; приведення конкретного прикладу, об'єкту, що ілюструє приналежність його даному означенню; заміна означення об'єкту еквівалентним означенням цього об'єкту (переформулювання означення); порівняння різних означень одного і того ж об'єкту; отримання наслідків з факту, що об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням; знаходження логічних і змістовних помилок в приведених означеннях.

Для розв'язування здач на співвіднесення предмета до поняття можна разом з учнями скласти таку евристичну схему розпізнавання: вибрати зручне означення поняття або яку-небудь загальну необхідну і достатню умову; проаналізувати вибране означення (умову) і виділити в ньому всі ознаки поняття; встановити, якими логічними зв'язками пов'язані між собою ці ознаки; якщо всі зв'язки типу «і», то перевірити послідовно виконання для даного об'єкта всіх ознак, і якщо хоча б одна ознака не виконується, то об'єкт не належить до вказаного поняття; якщо ж всі ознаки виконуються, то він належить до цього поняття; якщо ж деякі ознаки пов'язані сполучником «або», то для належності об'єкта до поняття достатньо виконання хоча б одного (або тільки одного – у випадку строгого розділового змісту сполучника «або») з цих ознак.

В процесі формування у школярів понять, особливо математичних, що відрізняються від понять інших наук високим рівнем узагальнення й абстракції, у першу чергу працюють евристичні прийоми з класу загальних евристик. Однак у процесі формування цих евристичних прийомів і через них у процесі формування математичного поняття можливе використання і різних спеціальних евристик, і евристико-дидактичних конструкцій, і евристично орієнтованих систем задач.

Умовно виділимо основні чотири етапи формування геометричних понять: 1) пропедевтичний етап – підготовка до формалізації (актуалізація знань і мотивація введення поняття) – введення; 2) етап розкриття змісту поняття і створення уявлення про його обсяг, а також термінології і символіки – засвоєння; 3) етап відпрацювання навичок використання поняття при розв'язуванні найпростіших задач – закріплення; 4) етап включення поняття в систему змістовних зв'язків з іншими поняттями – застосування.

Під час реалізації етапів формування геометричних понять перевагу варто надавати задачам на дослідження, встановлення закономірностей, а також задачам, які мають вимагати не стільки знань теорії, скільки нешаблонного, оригінального, евристичного мислення.

Методика формування поняття повинна носити евристичний характер, тобто на кожному етапі учень має бути «занурений» всередину процесу і самостійно під керівництвом учителя знаходити такі методи і прийоми, що дозволяли б йому відкривати нові для себе дії, знаходити перспективні лінії в усвідомленні невідомих об'єктів, конструювати їх, будувати зв'язки сконструйованого поняття з іншими раніше вивченими поняттями і фактами і, тим самим, творчо розвиватися [1].

Організація засвоєння понять може бути реалізована в рамках різних методів навчання: пояснювально-ілюстративного, коли вчитель сам вводить нове поняття, і в рамках частково-пошукового, коли учні залучаються до пошуку нового визначення. Ці методи отримали назви відповідно абстрактно-дедуктивного та конкретно-індуктивного.

<u>Схема застосування конкретно-індуктивного методу:</u>

– аналізується емпіричний матеріал (при цьому, крім індукції, залучаються і інші логічні методи: аналіз, порівняння, абстрагування, узагальнення);
– з'ясовуються загальні ознаки поняття, які його характеризують;
– формулюється означення;
– означення закріплюється шляхом залучення прикладів і контрприкладів;
– подальше засвоєння поняття і його визначення відбувається в процесі їх застосування.

<u>Схема застосування абстрактно-дедуктивного методу:</u>

– формулюється визначення поняття;
– наводяться приклади і контрприклади;
– подальше засвоєння поняття і його визначення відбувається в процесі їх застосування.

У більшості випадків застосовується конкретно-індуктивний спосіб введення нового поняття, коли починають з розгляду конкретних прикладів і шляхом розумових операцій (аналізу, порівняння, абстрагування, узагальнення, синтезу) приводять учнів до утворення нових понять. Учні майже завжди здатні самі сформулювати означення нового поняття.

У систематичних курсах геометрії з'ясовується абстрактний характер геометричних понять (точка не має розмірів, пряма не обмежена, нескінченна і т. п.), мотивується необхідність подібного абстрагування, показується логічне будова геометрії, роль аксіом і теорем.

Організовуваний вчителем процес засвоєння поняття може бути представлений у вигляді такої послідовності етапів: підготовка до введення нового поняття, мотивація введення поняття, організація сприйняття і розуміння, застосування в стандартних і нестандартних ситуаціях.

Перший етап полягає в актуалізації раніше пройденого матеріалу, у розгляді окремих елементів, знову вводиться матеріал.

Необхідність другого етапу диктується тим, що вчитель у процесі навчання має справу не з індивідуумом і його здібностями, а з особистістю, в якої є свої інтереси, схильності, мета. Необхідно, щоб учень сам захотів зробити пропонований учителем матеріал своїм, прийняв би цілі, які поставлені вчителем. Це можна зробити за допомогою організації проблемної ситуації, в результаті розгляду якої з'являється необхідність познайомитися з новим поняттям, або за допомогою розповіді про важливість досліджуваного поняття.

Початковою сходинкою розуміння є передбачення розуміння: ще не усвідомлено те, що сприймається, але відчуття можливості усвідомлення є. Другий ступінь – неясне розуміння, коли окремі елементи структури поняття вже схоплені. На цьому етапі ще неможливо дати собі звіт, що зрозуміле, що не зрозуміле. Подальше розуміння характеризується поглибленням процесу, подоланням скутості у формулюваннях, можливістю передачі знання іншій особі, можливістю використання поняття в стандартних, а потім і в нестандартних ситуаціях. Індивідуальна свідомість проходить шлях від виявлення окремих суттєвих характеристик до з'ясування структури поняття. Ці ступені розуміння, засвоєння проходить будь-яке знання: і теореми, і правила, а не тільки поняття.

Рівні засвоєння учнями понять можна представити у вигляді такої послідовності. Учень: 1) дізнається про поняття; 2) знає формулювання означення; 3) розуміє значення кожного слова, кожної складової частини означення, відокремлює істотні властивості від неістотних; 4) може навести власні приклади об'єктів, які підходять під означення; може довести, чому деякий об'єкт підходить під означення, а інший – ні; 5) може використовувати поняття в явних ситуаціях при розв'язанні завдань; може використовувати поняття в неявних ситуаціях, при розв'язанні нестандартних завдань.

Одна з суттєвих рекомендацій психологів при засвоєнні понять полягає в необхідності варіювання несуттєвих ознак поняття (принцип варіації) як при конкретно-індуктивному, так і при абстрактно-дедуктивному методі. Відсутність необхідних варіацій часто призводить до формування неправильних уявлень про поняття.

Важливо навчати школярів відшукувати зайві слова в означенні. Корисні вправи по скороченню визначення шляхом використання терміна. Корисно давати завдання на порівняння двох однаково правильних і однаково коротких означень з точки зору того, яке з них легше перевірити (підвести конкретний випадок під означення).

Література

1. Скафа Е. И. Эвристические приемы при формировании математических понятий / Е. И. Скафа // Дидактика математики: Проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Вип. 15. – Донецьк : ТЕАН, 2001. – С. 69-80.

2. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. Переворот в науке, произведенный господином Евгением Дюрингом / Ф. Энгельс // Сочинения. Изд. второе / К. Маркс и Ф. Энгельс. – Т. 20. – М. : Политиздат, 1961. – С. 5–342.

3. Усова А. В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения / А. В. Усова. – М. : Педагогика, 1986. – 176 с.

4. Фогараши Б. Логика / Бела Фогараши. – М. : Изд. иностр. лит., 1939. – 496 с.

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТУДЕНТІВ-ФІЗИКІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

В. В. Ачкан, Ю. О. Корзун
Україна, м. Бердянськ, Бердянський державний педагогічний університет

Постановка проблеми. У контексті реформування математичної освіти, побудови особистісно орієнтованої системи математичної підготовки, важливого значення набуває впровадження компетентнісного підходу в організацію навчання. Необхідність реалізації компетентнісного підходу задекларована і у нормативних документах Міністерства освіти, науки, молоді та спорту України. У той же час залишаються не усунутими протиріччя між наявністю ґрунтовних теоретичних наукових доробок з проблем компетентнісного підходу та відсутністю шляхів його реалізації у практиці ВНЗ; між цілями й завданнями математичної освіти, спрямованими на формування системних знань, інтелектуальний розвиток, активізацію пізнавальної діяльності студентів, на формування в них ключових і математичних компетентностей та недостатнім методичним забезпеченням, відсутністю конкретних методичних рекомендацій необхідних для розв'язування цих завдань. Все це зумовлює актуальність наукового обґрунтування засобів реалізації вищезазначених змін у математичній освіті.

Важливим кроком упровадження компетентнісного підходу у навчання математики є конкретизація існуючих загальних положень на рівні навчальних курсів у середній та вищій школі.

Практикум з елементарної математики є дисципліною з вибіркової частини навчального плану для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ, що в БДПУ викладається у першому семестрі (у студентів фізиків). Зважаючи на низький конкурс, що спостерігається в останні роки на фізико-математичному факультеті, викладач має справу з ненайсильнішими учорашніми школярами з усіма витікаючими з цього наслідками: низький рівень розвитку творчих здібностей, звичка працювати за зразками, проблема мотивації навчальної діяльності. Усе вище зазначене робить актуальною проблему удосконалення методики викладання елементарної математики з позицій компетентнісного підходу.

Для формування математичної компетентності студентів-фізиків у процесі вивчення курсу елементарної математики ми працюємо над розробленою програмою усних вправ, спрямованих на розвиток логічного мислення студентів, системи прикладних задач з механіки та методичних рекомендацій щодо організації навчальних досліджень у процесі вивчення усіх змістових модулів навчальної дисципліни.

Аналіз досліджень і публікацій. Питанням впровадження компетентнісного підходу в математичну освіту присвячені роботи І. М. Аллагулової [1], Л. І. Зайцевої [3], С. А. Ракова [6], Н. Г. Ходирєвої [7], О. В. Шавальової [8] та ін. Зазначений цикл досліджень охоплює питання, пов’язані із визначенням основних математичних компетентностей та напрямів їх набуття, формуванням математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій; формуванням елементарної математичної компетентності старших дошкільників; підготовкою майбутніх учителів до формування математичних компетентностей учнів; реалізацією компетентнісного підходу в процесі математичної підготовки студентів медичних коледжів.

Мета статті. Розкрити методичні аспекти формування математичних компетентностей студентів фізиків у процесі вивчення курсу елементарної математики.

Виклад основного матеріалу. У дослідженні [6] С. А. Раковим виділені процедурна, логічна, дослідницька, технологічна та методологічна математичні компетентності вчителя. У [2] дослідженні автором виділені процедурна, логічна, дослідницька та конструктивно-графічна компетентності старшокласника. Студенти-першокурсники фактично є вчорашніми старшокласниками, тому при роботі з ними ми в першу чергу спирались на класифікацію компетентностей, наведену у [2]. Теоретичний аналіз і результати експериментального навчання у старшій та вищій школі засвідчили, що всі математичні компетентності взаємопов’язані. Відповідно у процесі вивчення будь-якого шкільного курсу чи навчальної дисципліни у ВНЗ у учнів (студентів) формуються практично всі математичні компетентності. Разом з тим для підвищення ефективності вивчення певної дисципліни доцільно при організації навчання на кожному уроці (занятті) акцентувати увагу вчителя (викладача) на формуванні тієї компетентності, на яку першочергово спрямована відповідна навчальна діяльність.

Окреслимо основні напрями набуття першокурсниками логічної, процедурної, конструктивно-графічної та дослідницької математичних компетентностей.

Напрями набуття логічної компетентності визначаються формуванням здатності першокурсника:

– використовувати логічний апарат математичних теорій (означення понять, їх наочне представлення, обсяг, властивості та ознаки, відношення між поняттями, висловлювання, логічні операції, аксіоми й теореми, доведення теорем, контрприклади, тощо) для розв'язування задач;

– обґрунтовувати правильність розв'язування задач, критично мислити та шукати логічні помилки в міркуваннях;

– міркувати дедуктивно, аналізувати, схематизувати, абстрагувати, систематизувати, спеціалізувати та узагальнювати.

Напрями набуття дослідницької компетентності визначаються формуванням здатності першокурсника:

– висувати та перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень;

– формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач;

– досліджувати математичні моделі задач;

– інтерпретувати результати, отримані формальними методами, у термінах вихідної предметної області (ситуації);

– оцінювати похибки при використанні наближених обчислень;

– систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосувань отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань і т.п.;

– аналізувати раціональність (ефективність) розв'язування задач математичними методами;

– рефлексувати та використовувати набутий досвід.

Напрями набуття процедурної компетентності визначаються формуванням здатності першокурсника:

– використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач;

– формалізувати задачі, що виникають у праці й зводяться до типових задач;

– систематизувати типові задачі; розпізнавати типову задачу або зводити задачу до типової;

– використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язування типових задач (підручники, довідники, Інтернет-ресурси);

– використовувати математичну символіку на практиці при оформленні математичних текстів.

Напрями набуття конструктивно-графічної компетентності визначаються формуванням здатності першокурсника:

– використовувати мову математики для створення математичних моделей практичних задач, зокрема виконувати побудови графіків рівнянь і нерівностей, функцій, зображень плоских та просторових геометричних фігур;

– використовувати графіки рівнянь та нерівностей, функцій, зображення плоских та просторових геометричних фігур для розв'язування задач;

– використовувати навчальні математичні пакети для побудови відповідних графіків та зображень геометричних фігур.

Для набуття першокурсниками логічної та дослідницької математичних компетентностей при вивченні елементарної математики доцільно розв'язувати зі студентами усні вправи, спрямовані на розвиток їх логічного мислення та математичного мовлення; розв'язувати з ними прикладні задачі; організовувати пошуково-дослідницьку роботу (навчальні дослідження) студентів під час вивчення кожного змістового модуля. Наведемо приклади таких завдань, що пропонуються студентам при вивченні змістового модуля рівняння та нерівності.

Розпочнемо із завдань для усного розв'язування, що сприяють набуттю першокурсниками логічної компетентності. Ці завдання виконують розвивальну функцію, можуть використовуватися з метою закріплення вмінь, навичок та з метою контролю. У той же час подібні завдання не потребують громіздких розрахунків, їх розв'язування складається з 2–3 логічних кроків, вони привчають студентів аналізувати умову завдання та враховувати властивості функцій, що входять до рівняння (нерівності), перш ніж переходити до його розв'язування. Наприклад, при вивченні курсу елементарної математики, розв'язуючи рівняння $\sqrt{x+2}+\left|x^2-4\right|=0$, студенти обґрунтовують, що корені заданого рівняння знаходяться серед коренів системи рівнянь: $\begin{cases}\sqrt{x+2}=0\\ \left|x^2-4\right|=0\end{cases}$, адже сума двох невід'ємних функцій дорівнює нулю лише тоді, коли кожна з цих функцій одночасно дорівнює нулю. Студенти легко знаходять розв'язок системи $x=-2$.

Прикладні задачі є важливими складовими професійної підготовки студентів фізики. Наведемо приклад, такої задачі з розділу механіка, яка може розв'язуватися в курсі елементарної математики при вивченні змістових модулів рівняння та перетин і функція. Скільки разів треба намотати трос на барабан, щоб силою 10 Н утримувати вантаж в 90 Н, якщо формула залежності між більшою силою F і меншою силою F_0 при рівновазі: $F=F_0\cdot 3^n$, де n – число витків на барабані.

Для набуття процедурної компетентності доцільно виділяти орієнтовні основи діяльності третього типу.

Наприклад, при вивченні змістового модуля функцій студенти розглядають тригонометричні функції. Їм пропонується орієнтовні основи, зокрема щодо парності (непарності) функцій та знаходження періоду тригометричних функцій і розв'язуються зі студентами вправи на застосування орієнтовних основ діяльності у стандартних та змінених ситуаціях. Наведемо приклади вправ першої групи (1. Укажіть парну функцію А. $y=x$ Б. $y=2^x$ В. $y=\text{tg }x$ Г. $y=\log_2 x$ Д. $y=x^2$. 2. Укажіть непарну функцію, областю значень якої є проміжок [–1; 1]) та другої групи (користуючись періодичністю, парністю та непарністю тригонометричних функцій, знайдіть $\sin 405^o$).

При вивченні змістового модуля рівняння та нерівності студенти згадують загальні методи розв'язування рівнянь (рівносильних перетворень, використання рівнянь-наслідків, використання властивостей функцій) та нерівностей (рівносильних перетворень, метод інтервалів). Їм пропонуються орієнтовні основи діяльності третього типу щодо розв'язування рівнянь та нерівностей загальними методами та орієнтовні основи діяльності щодо розв'язування рівнянь та нерівностей з певної теми (наприклад, при розв'язування показникових рівнянь доцільно навести студентам наступні орієнтири: 1) позбавляємося числових доданків у показниках степенів; 2) випробовуємо всі степені (із змінною в показнику) звести до однієї основи й виконати заміну змінної; 3) якщо не можна звести до однієї основи, то пробуємо звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння; 4) в інших випадках переносимо в один бік і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, у яких використовуються властивості відповідних функцій) та розв'язуються зі студентами вправи на застосування орієнтовних основ діяльності у стандартних та змінених ситуаціях.

Розглянувши питання використання прикладних задач у навчальній роботі, спрямованій на набуття першокурсниками математичних (перш за все логічної та дослідницької) компетентностей, зупинимося ще на одному із зазначених вище напрямів цієї роботи, а саме на питанні організації пошуково-дослідної роботи (навчальних досліджень) студентів.

До основних етапів організації навчального дослідження ми відносимо аналіз умови завдання (що включає постановку проблеми та складання плану розв'язування), реалізацію плану з відповідним обґрунтуванням проведеної роботи, висновок, вивчення знайденого розв'язання та аналіз його результатів. Як правило, проблема в навчальному дослідженні формулюється за допомогою викладача. Оскільки найчастіше формування висновку здійснюється також, в більшій чи меншій мірі, за допомогою викладача, то основна евристична діяльність першокурсника пов'язана, на наш погляд, з побудовою плану розв'язування.

Наведемо приклади аналітичного навчального дослідження студентів при вивченні змістового модуля рівняння та нерівності. В основі аналітичних навчальних досліджень лежить використання основних методів розв'язування рівнянь та нерівностей, до яких ми відносимо використання рівносильних перетворень, використання властивостей функцій та використання рівнянь-наслідків.

Приклад 1. Для кожного значення параметру a розв'язати систему $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = x+y \\ (2^x+1)\cdot 2^{y+1} = a \end{cases}$.

Аналіз умови завдання та пошук плану розв'язування. Студенти визначають шлях розв'язування, використовуючи один із загальних методів розв'язування рівнянь з параметрами або певну властивість функцій, що стоять у лівих частинах обох рівнянь системи. Використати метод рівносильних перетворень у даному випадку досить проблематично, адже, на жаль, не існує однозначного трактування ОДЗ другого рівняння системи, а отже і ОДЗ всієї системи. Тому студенти зупиняють свій вибір на методі систем-наслідків.

Реалізація плану розв'язування. Піднісши перше рівняння заданої системи до квадрату, отримуємо систему-наслідок: $\begin{cases} x^2+y^2 = (x+y)^2 \\ (2^x+1)\cdot 2^{y+1} = a \end{cases} (1)$.

Студентам пропонується звести систему (1) до сукупності систем. Вони доходять висновку, що перше рівняння може мати розв'язки лише за умови: x=0 або y=0 Отже, система (1) рівносильна сукупності систем $\begin{cases} x=0 \\ (2^x+1)\cdot 2^{y+1} = a \end{cases}$(2) або $\begin{cases} y=0 \\ (2^x+1)\cdot 2^{y+1} = a \end{cases}$(3). З системи (2) маємо $\begin{cases} x=0 \\ 2^{y+2} = a \end{cases}$(4), з системи (3) – $\begin{cases} y=0 \\ 2^{x+1} = a-2. \end{cases}$(5). Студентам пропонується дослідити, при яких значеннях a системи (4) та (5) мають розв'язки. Використовуючи властивості показникових рівнянь, вони доходять висновку, що система (4) не має розв'язків при $a\leq 0$, а при $a>0$ має єдиний розв'язок $x=0$, $y=\log_2 a-2$; система (5) не має розв'язків при $a\leq 2$, а при $a>2$ має єдиний розв'язок $x=\log_2(a-2)-1$, $y=0$.

Отже, система (1) при $a\leq 0$ не має розв'язків; при $a\in(0;2]$ має єдиний розв'язок $(0;\ \log_2 a-2)$ при $a>2$ – два розв'язки: $(0;\ \log_2 a-2)$ та $(\log_2(a-2)-1;\ 0)$. Оскільки система (1) є наслідком заданої системи, то студентам пропонується перевірити, які з розв'язків системи (1) є розв'язками заданої системи.

Підставляючи пару чисел $(0;\ \log_2 a-2)$ у перше рівняння заданої системи, маємо рівність $\sqrt{\left(\log_2 a-2\right)^2}=\log_2 a-2,$ яка справедлива лише за умови $\log_2 a–2\geq0$, тобто якщо $a\geq4$. Підставляючи пару чисел $(\log_2(a–2)–1;\ 0)$ у перше рівняння заданої системи, маємо рівність $\sqrt{(\log_2(a-2)-1)^2}=\log_2(a-2)-1,$ яка справедлива лише за умови $\log_2(a–2)–1\geq0$, тобто якщо $a\geq4$. Підстановка обидвох пар чисел у друге рівняння системи показує, що при $a\geq4$ вони задовольняють це рівняння, а при $a=4$ ці пари чисел збігаються (отримуємо розв’язок (0; 0)).

Висновок: при $a<4$ розв’язків немає; при $a=4$ єдиний розв’язок (0; 0); при $a\geq4$ два розв’язки: $\left(0;\log_2\dfrac{a}{4}\right)$; $\left(\log_2\dfrac{a-2}{2};0\right)$.

Під час розв’язування подібних систем доцільно пам’ятати: якщо виникає проблема з визначенням ОДЗ, то треба використовувати метод систем-наслідків. При цьому перевірка отриманих розв’язків системи-наслідку є обов’язковою частиною розв’язування.

Для набуття першокурсниками конструктивно-графічної компетентності при вивченні елементарної математики доцільно розв’язувати зі студентами прикладні задачі; організовувати пошуково-дослідницьку роботу (навчальні дослідження) студентів під час вивчення кожного змістового модуля; застосовувати графічний метод розв’язування завдань (зокрема організовувати графічні навчальні дослідження студентів), використовувати у процесі вивчення кожного зі змістових модулів ІКТ, пропонувати студентам самостійно складати завдання за певним орієнтиром.

Наведемо приклад навчального дослідження з використанням ІКТ.

Приклад 1. При яких значеннях параметру a рівняння $x=\log_a x$ має єдиний корінь.

Аналіз умови та пошук плану розв’язування. Треба побудувати графіки, функцій ($f(x)=x$, $g(x)=\log_a x$), що стоять у лівій та правій частині рівняння та, змінюючи значення параметру a, з’ясувати, при яких додатних значеннях параметру (адже при від’ємних значеннях a, при $a=0$ та $a=1$ не існує функція $g(x)$, а отже і задане рівняння немає коренів) графіки цих функцій перетинаються в одній точці.

Реалізація плану розв’язування. Студенти будують у ППЗ “GRAN1” графіки функцій $f(x)=x$ та $g(x)=\log_a x$. Оскільки лише графік функції $g(x)$ залежить від параметру a, то студенти, змінюючи значення a, перевіряють скільки точок перетину із графіком функції $f(x)$ він буде мати при різних додатних значеннях a (крім $a=1$).

За допомогою графіку студенти приходять до висновку, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають одну точку дотику, а отже і задане рівняння має єдиний корінь при $a \in (0;1)$. Крім того існує значення a, що не входить у цей проміжок, при якому функції $f(x)$ та $g(x)$ дотикаються, а отже рівняння також має єдиний корінь. Але це значення a за допомогою ППЗ «GRAN1» можна знайти лише приблизно. Тож, студенти вдаються до аналітичних міркувань.

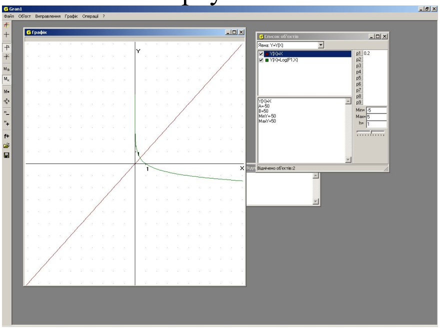


Рис. 1. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=0,2

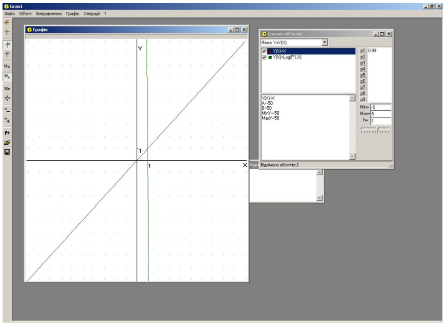


Рис. 2. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=0,99

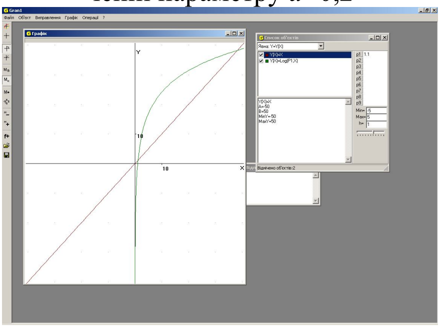


Рис. 3. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=1,1

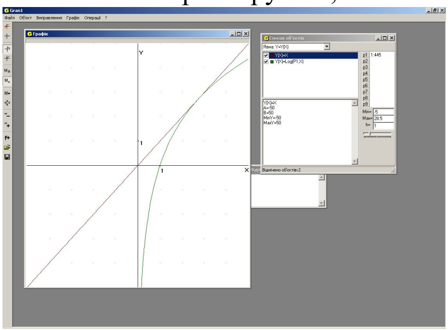


Рис. 4. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=1,445

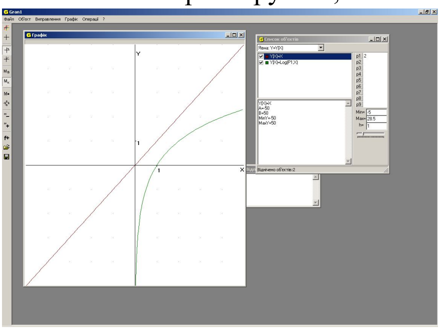


Рис. 5. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=2

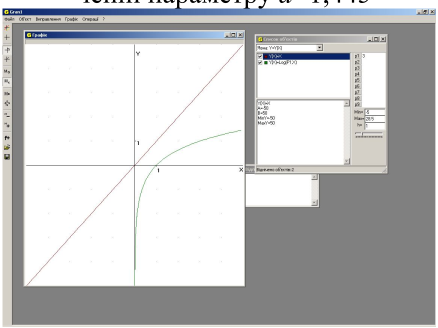


Рис. 6. Графік функцій $g(x)$ при значенні параметру a=3

Нехай x_0 – точка дотику. Тоді в цій точці відповідно рівні значення цих функцій та значення їх похідних, тобто ми маємо систему $\begin{cases} x_0 = \log_a x_0 \\ 1 = \dfrac{1}{x_0 \ln a} \end{cases}$. Розв'язуючи цю систему, маємо $x_0 = \dfrac{1}{\ln a}$;

$$\frac{1}{\ln a} = \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}; \quad \frac{1}{\ln a} = e; \quad a = e\frac{1}{e} = 1.$$

Висновок. Задане рівняння має єдиний корінь при $a \in (0;1]$.

Для формування конструктивно-графічної компетентності першокурсників у процесі навчання елементарної математики доцільно пропонувати їм завдання, що вимагають сконструювати задачу. Наприклад, при вивченні змістового модуля рівняння та нерівності після введення узагальненого поняття однорідного рівняння та розв'язування однорідних рівнянь студентам доцільно запропонувати студентам самостійно скласти однорідні тригонометричні та показникові рівняння. При вивченні змістового модуля планіметрія на практичному занятті присвяченому трикутникам доцільно запропонувати скласти задачі, що розв'язуються за допомогою теореми синусів та теореми косинусів.

Висновки. Таким чином, для набуття першокурсниками логічної, процедурної, конструктивно-графічної та дослідницької математичних компетентностей в процесі вивчення курсу елементарної математики доцільно:

– пропонувати студентам складати плани розв'язування задач та обґрунтовувати правильність їх реалізації;

– під час вивчення усіх змістових модулів курсу розв'язувати зі студентами та давати для самостійного розв'язування прикладні задачі та завдання для усного розв'язування, що стимулюють розвиток логічного мислення студентів;

– організувати навчальні дослідження (аналітичні та графічні) студентів.

Як свідчать результати експериментального навчання, таке удосконалення методики вивчення курсу елементарної математики сприяє набуттю першокурсниками не логічної, процедурної, конструктивно-графічної та дослідницької математичних компетентностей, але й формуванню в них здатностей складати плани своєї навчальної діяльності, аналізувати об'єкти, ситуації та взаємозв'язки, використовувати та оцінювати власні стратегії розв'язування пізнавальних проблем, висловлювати свою думку і т. ін., тобто сприяє набуттю ключових компетентностей.

Література

1. Аллагулова И. Н. Формирование математической компетентности старшеклассника в образовательном процессе : дис. … канд. пед. наук : 13.00.01 / Аллагулова Ирина Николаевна. – Оренбург, 2007. – 190 с.

2. Ачкан В. В. Формування математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Ачкан Віталій Валентинович. – К., 2009. – 224 с.

3. Зайцева Л. І. Формування елементарної математичної компетентності в дітей старшого дошкільного віку : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / Зайцева Лариса Іванівна. – К., 2005. – 215 с.

4. Наказ МОНУ № 612 від 13.07.2007 р. «Про затвердження Плану дій щодо забезпечення якості вищої освіти України та її інтеграції в європейське і світове освітнє співтовариство на період до 2010 р.» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.mon.gov.ua/laws/MON_612.doc

5. Семенець С. П. Елементарна математика : навчальна програма (розроблена на основі концепції розвивальної освіти) / С. П. Семенець. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. – 88 с.

6. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія / С. А. Раков. – Харків: Факт, 2005. – 360 с.

7. Ходырева Н .Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Ходырева Н. Г. – Волгоград, 2004. – 23 с.

8. Шавальова О. В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп'ютеризації навчання : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Шавальова О. В. – К., 2007. – 20 с.

МОЖЛИВІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНО-ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

С. В. Бас
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
bass.7575@mail.ru

Тим, хто викладає вищу математику не як спеціальну, а як фундаментальну дисципліну, добре відоме різноманіття рівня базової підготовки студентів і, як наслідок, необхідність «вирівнювання» групи для більш ефективного викладання. Дослідження, проведені протягом останніх п'яти років, свідчать, що 50-60% першокурсників є випускниками гуманітарних класів, близько 30% – випускники звичайних загальноосвітніх класів, і лише до 20% – випускники математичних класів. При цьому математика є профільним предметом при вступі на спеціальності економічного спрямування.

Відомо, що студент найкраще і з повною віддачею виконує ті вправи, які подобаються, відповідно ті, де отримує позитивний результат. Адже, за результатами досліджень Л. С. Виготського, В. В. Давидова, Д. Б. Ельконіна, О. М. Леонтьєва, С. Л. Рубінштейна, Н. Ф. Тализіної, І. С. Якиманської та інших, навчання стає розвивальним лише за умови орієнтації на «зону найближчого розвитку» кожного з них. Водночас зрозуміло, що ця «зона найближчого розвитку» в кожного першокурсника своя, і рівень сформованості математичної компетентності на момент початку навчання у ВНЗ теж значно різниться. Так, за результатами проведення вхідного контролю з математики згідно дидактичних матеріалами для Державної підсумкової атестації (завдання взято з другої частини), понад 70% студентів виконали менше половини запропонованих задач, причому, якщо з тестовими завданнями більшість впоралася, то завдання, в яких треба було представити розв'язання, виконали одиниці. Це свідчить, що попри задовільні результати ЗНО, ключові математичні компетенції не сформовано в більшості випускників. Чи можливо за таких умов не тільки навчити розв'язувати типові завдання з вищої математики, а й навчити «бачити» математичні моделі у навколишньому світі або професійних, економічних задачах?

Лекційно-семінарська система, започаткована з моменту створення перших університетів, до сьогодення не зазнала значних змін. Лекції, семінари, практичні та лабораторні заняття залишаються основними формами організації навчання у вищій школі. Але за умови згаданого рівня підготовки порушується один з основних принципів навчання – доступність. Отже, є необхідність удосконалення традиційних методичних систем навчання на основі рівневої та профільної диференціації з метою створення сприятливих навчальних умов для розвитку студентів з різним рівнем підготовки та різними здібностями через використання особистісно-орієнтованих технологій, поєднання та інтеграцію аудиторної та позааудиторної діяльності, розширення міжпредметних зв'язків та посилення прикладної спрямованості змісту навчання [2]. Але в повній мірі продемонструвати міжпредметні зв'язки на першому курсі досить складно, так як спеціальних знань ще практично немає. Отже, мотивація студента-першокурсника до навчання будується в основному на довірі до викладача та простих, доступних прикладах практичного застосування математичних знань. Значить, для підвищення якості навчання, а іноді і для забезпечення позитивного психологічного мікроклімату на заняттях, необхідно створювати ситуацію успіху для кожного з учасників навчального процесу. Але кожний студент, в залежності від своєї підготовки, за «успіх» вважає зовсім різний результат.

В цьому випадку створити умови для повноцінного використання аудиторного часу, а саме для сприйняття та усвідомлення лекційного матеріалу, формування предметно-математичної компетентності, можливості виконувати завдання для самостійної роботи, виникає потреба у проведенні індивідуальної роботи з першокурсниками.

При поєднанні індивідуального та групового навчання вдається найбільш повно реалізувати індивідуальні можливості студента, врахувати його особистісні якості. В кожного свій індивідуальний сплав здібностей, темпераменту, характеру, волі, мотивації, когнітивної організації, досвіду і т. ін. Ці особливості розвиваються, змінюються, піддаються корекції [1]. Значить, індивідуальні особливості навіть окремого студента неможливо у повному обсязі врахувати при організації навчальної діяльності. З іншого боку, студенти виявляються не тільки і не стільки об'єктами педагогічного впливу, скільки суб'єктами власної діяльності. Тому, говорячи про розвиток особистості в учбовій діяльності, треба, перш за все, мати на увазі його саморозвиток. Відповідно, диференційований підхід у навчанні має здійснюватись на індивідуальному рівні, коли кожний з першокурсників визначає свою власну «траєкторію» розвитку. Одним з варіантів реалізації даного підходу може бути індивідуально-орієнтована система навчання, спрямована на розв'язання основного протиріччя традиційної системи навчання, пов'язаної з груповою формою організації навчання та індивідуальним характером засвоєння знань. Індивідуально-орієнтована система навчання ґрунтується на врахуванні індивідуальних особливостей студента, а саме його базових знань, типу мислення, потенційних можливостей та можливості кожного з першокурсників працювати на аудиторному занятті в повну силу, будучи впевненим, що він не залишиться непоміченим викладачем, якщо його рівень знань нижче середнього в групі, або йому буде просто нудно, коли рівень загально запропонованих вправ нижче можливостей студента [3, 18-25].

Практично це завдання можна реалізувати, якщо умовно поділити академічну групу на три підгрупи: слабких, середнього та достатнього рівня. Пояснення нового матеріалу всі студенти отримали одночасно, потім кожна підгрупа отримує завдання, що відповідають її рівню підготовки. Причому, на мою думку, важливо, щоб усі студенти, незважаючи на те, до якої підгрупи вони будуть розподілені викладачем, розпочинали роботу з найпростіших прикладів. Це потрібно для того, щоб «не втратити» сильних та середніх за рівнем своїх знань студентів. У зв'язку з тим, що жодна тема з курсу «Вища математика для економістів» не розглядається більше, ніж одне практичне заняття, кожного разу починаємо роботу майже з нуля. Зрозуміло, що найслабша підгрупа працює під контролем та з підтримкою викладача. Власне, левова доля уваги викладача спрямована на підтримку робочого стану та складання чіткого алгоритму роботи слабкої групи. Після виконання завдання слабка підгрупа отримує подібні приклади для самостійного розв'язання, а сильна підгрупа, яка починала разом з усіма, але завдяки високому рівню базових знань, швидкості мислення та інших індивідуальних особливостей, змогла працювати набагато продуктивніше, представляє результати своєї роботи та відповідає на запитання середньої групи. Середня група теж випередила слабку, але не так далеко, як сильна підгрупа. Таким чином, «зона найближчого розвитку» розширює свої границі, студент відчуває результат зусиль, з'являється впевненість у власних силах і, найголовніше, бажання вчитися. Для ілюстрації вищесказаного запропонуємо систему вправ з теми «Числова послідовність та її границя».

1. Записати перші чотири члени послідовності, заданої загальним членом:

$$1)\ x_n = \frac{n}{n+1};\quad 2)\ x_n = -\frac{n}{n^2+1};\quad 3)\ x_n = \frac{n}{2^2};\quad 4)\ x_n = \frac{-n}{n^2+(-1)^n}.$$

2. Записати формулу загального члена послідовності, якщо відомо кілька її перших членів:

$$1)\ \frac{1}{5},\frac{2}{6},\frac{3}{7},\frac{4}{8},\frac{5}{9}\ldots;\qquad 2)\ \frac{2}{4},\frac{5}{7},\frac{10}{12},\frac{17}{19},\frac{26}{28},\ldots$$

$$3)\ \frac{1}{1\cdot 5},\frac{1}{5\cdot 9},\frac{1}{9\cdot 13},\frac{1}{13\cdot 17},\frac{1}{17\cdot 19},\ldots;\qquad 4)\ 1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\ldots$$

3. Довести, що:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+1}=2;\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{x+1}=5.$$

4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{x^4+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+4x}{6x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x}{x^6+5x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{5x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+2}{5x^4+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+7n}{(n+2)(n+3)(n+4)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0{,}5n^3+2n}{0{,}005(n^2+2)(n+3)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+7}{n^3-8}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{3n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+...+3^n}{3^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n+2}+\dfrac{n}{2}\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{4n^2+5}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2x+6}}{2x^2+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{3\sqrt[3]{n^6+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{2+n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+4n}-3\sqrt{5n-1}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{n^2-5}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+5}\right)^{7n^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-6}$.

Подальші дослідження спрямовані на створення методики застосування диференційованого навчання при викладанні вищої математики студентам економічних спеціальностей.

Література

1. Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения : Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. – М. : Директмедиа Паблишинг, 2008. – 613 с.
2. Давыдов В. В. Учебная деятельность: состояние и проблемы исследования / В. В. Давыдов // Вопросы психологии. – 1991. – №6. – С. 5-14.
3. Деркач Ю. В. Методика реалізації міжпредметних зв’язків математики та спеціальних дисциплін у навчанні студентів економічних спеціальностей : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) / Деркач Ю. В. – Сімферополь, 2009.
4. Скворцова С. О. Проектування освітніх результатів на засадах компетентнісного підходу / Скворцова С. О. // Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського. Педагогіка і психологія. – №27. – 2009. – С. 395-398.

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ПО ТЕОРИИ И МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В КАЗАХСТАНЕ

Е. Ы. Бидайбеков, Б. Р. Каскатаева
Казахстан, г. Алматы, Казахский национальный педагогический университет имени Абая
Kaskataeva@yandex.ru

Образование является одним из основных факторов социально-экономического развития общества. Оно определяет будущий облик общества, детерминирует его. Роль школы в подготовке высокообразованных людей возрастает, в связи с этим повышаются требования к выпускникам педагогических вузов. В формировании готовности к педагогической деятельности будущего учителя центральное место занимает методическая подготовка, качество которой во многом обусловлено курсом методики преподавания математики.

Обучение математике, как и всякая другая человеческая деятельность, требует своих профессионалов. Сложность постановки математического образования состоит, в частности, в том, что, для того, чтобы знать чему учить, надо, прежде всего, быть широко образованным человеком по математике.

В последние годы в ТМПМ проведены различные исследования по проблеме совершенствования научного направления по теории и методике обучения математике. Прежде всего, следует отметить использование системного анализа в теории и методике обучения математике, что позволило выделить пути совершенствования методической подготовки в рамках курса методики преподавания математики. Одним из важных результатов явилось построение методической системы обучения математике, включающей цели, содержание, методы, средства и формы обучения математике. Использование комплексного анализа дало возможности осмыслить многие категории теории и методики обучения математике. Эти исследования позволили рассмотреть с новых позиций содержание предмета методики преподавания математики, цели обучения математике в школе, методы обучения математике, т.е. во многом решить проблему совершенствования методологии математического образования. В частности, применение деятельностного подхода при формировании математических понятий позволило выделить этапы этого процесса и на этой основе разработать технологию формирования понятий.

Содержание курса «Теория и методика преподавания математики» (ТМПМ), отраженное в действующих учебных пособиях для педагогических вузов, не удовлетворяет современным требованиям.

Следует отметить, что в последнее время в теории и методике обучения математике используются идеи гуманизации и демократизации образования, осуществляется компетентностный подход, появляются новые возможности совершенствования форм обучения: проведение нетрадиционных уроков (уроки-лекции, уроки-семинары, уроки-игры и т.д.), открытие инновационных школ («Назарбаев интеллектуальная школа» физико-математического направления, школы-гимназии, школы-лицеи и т.д.). Однако результаты новых исследований в теории и методике обучения математике, например, системный анализ, деятельностный и компетентностный подходы к обучению математике, личностно-ориентированное обучение, новые технологии обучения математике, как технология развивающего обучения, личностно-ориентированная технология обучения, технология проектного обучения, блочно-модульные технологии, парацентрическая технология обучения, здоровьесберегающая технология, информационная технология и др. и новое осмысление основных категориальных понятий методики преподавания математики не нашли отражения в курсе методики преподавания математики; не определены с новых позиций ее предмет, методы обучения, цели обучения математике, методика формирования математических понятий, роли задач обучения математике, новые формы организации обучения и т.д. Кроме того, курс методики преподавания математики ориентирован, в основном, на усвоение будущим учителем математики методических знаний и умений, но не на целенаправленное развитие его творческой деятельности при решении методических задач.

Современное состояние методической подготовки будущего учителя математики в педвузах в рамках существующих учебных пособий по методике преподавания математики, с одной стороны, повышенные требования к профессиональной деятельности будущих учителей математики в условиях профильной и уровневой дифференциации, гуманитаризации математического образования, нетрадиционных форм обучения – с другой, приводят к противоречию между фактическим состоянием методической подготовки и требованиями к ней. В этой связи встает необходимость обобщить исследования в области теории и методики обучения математике и их результаты включить в курс методики преподавания математики для студентов педвузов, что позволит совершенствовать методическую подготовку учителей математики.

Решение данной задачи осуществлялось посредством следующих методов:

- изучение уровня математической подготовки учащихся в Казахстане;

– изучение психолого-дидактической и методической литературы, учебников по методике преподавания математики в Казахстане;

– логико-дидактический анализ различных тем учебников и учебных пособий по теории и методике обучения математике; обобщение опыта преподавателей педвузов Казахстана;

– изучение состояния и перспективы научного направления по теории и методике обучения математике в Казахстане.

Выяснилось, что уровень математической подготовки за последние 20 лет ощутимо снизился в силу ряда объективных и субъективных причин:

– большой отток талантливой молодежи из академической и педагогической сфер в экономическую, юридическую и гуманитарную;

– длительный период реформирования образования;

– появление большого количества вузов, что привело к распылению педагогического и научного потенциала;

– существенное уменьшение количества часов в государственных стандартах образования на изучение предмета математики;

– низкое качество школьных учебников по математике;

– отсутствие разнообразных форм оценивания математических компетенций;

– падение статуса учителя в новой системе ценностей рыночной экономики.

В то же время достигнуты определенные успехи. По данным ЮНЕСКО, по индексу развития образования для всех (ИРО) Казахстан в течение 3 лет находится в четверке лидеров среди 129 стран. Мы намного опережаем другие страны СНГ: Беларусь – 26 место, Грузия – 30, Таджикистан – 31, Кыргызстан – 42. Армения – 43, Узбекистан – 48, Украина – 53, Молдова – 59. А уже в 2010 году мы улучшили этот показатель сразу на 16 позиций, заняв 66 место. Казахстан стал первым центрально-азиатским государством – полноправным членом европейского образовательного пространства (Болонский процесс). На предстоящее десятилетие главный вектор изменений в нашей сфере деятельности задан Государственной программой развития образования Республики Казахстан на 2011–2020 годы. В Госпрограмме выделен особый раздел, посвященный повышению статуса педагога. Во-первых, существенное повышение оплаты труда с доведением ее до уровня, сопоставимого с оплатой в частном секторе. Уже с 1 сентября казахстанские учителя станут получать надбавку за квалификацию до 100% от базового должностного оклада. Во-вторых, принципиально новый подход к повышению квалификации педагогов. На базе «Назарбаев Интеллектуальных школ» мы будем разворачивать Центры педагогического мастерства. В этих школах по конкурсу отобраны лучшие учителя Казахстана, которые теперь будут на постоянной основе делиться своим опытом. Госпрограммой запланирован ввод ваучерно-модульного финансирования. Наши педагоги, получая ваучер, смогут выбирать лучшие варианты для повышения своей квалификации вплоть до зарубежных центров. В-третьих, на статус учителей огромное влияние должно оказать повышение общественного имиджа педагога. И, безусловно, очень важен такой аспект, как повышение роли учителя в управлении системой образования в целом, ее совершенствовании на государственном уровне. Поэтому с качества обучения математике и надо начинать процесс совершенствования качества всего образования. Особо ответственен этот процесс в связи с предстоящим переходом средней школы на 12-летнее обучение. Здесь планируется смена самой парадигмы образования – от «знаниевого» подхода к компетентностному подходу, то есть умению использовать знания в самых разнообразных жизненных ситуациях. Потребуется совершенно новая методология. И конечно, в реализации Госпрограммы самое главное – исходная подготовка учителей в педагогических вузах, чем мы и занимаемся.

На данном этапе разрабатываются соответствующие нормативные документы – новые ГОСО, программы, учебники и учебно-методические комплексы. Новая Госпрограмма, по отзывам международных экспертов, очень прогрессивна. В ней заложены такие механизмы и индикаторы, которые способны вывести наше образование на принципиально новые высоты.

В 2011 году состоялся I Съезд учителей математики Республики Казахстан. На съезде обсуждались актуальные вопросы модернизации математического образования в Казахстане по следующим направлениям:

- обеспечение качества математического образования;
- содержание математического образования в свете перехода на 12-летнее образование;
- проблемы подготовки педагогических кадров;
- проблемы работы с одаренными детьми;
- привлечение талантливой молодежи в сферу научной и педагогической деятельности в области математики и др.

На съезде было отмечено, что основной идеологией определения нового содержания математического образования должно стать не усложнение программы школьного курса математики, а возможности применения математики в различных сферах будущей профессиональной деятельности выпускника школы, которую он впоследствии выберет, продолжив свое образование. Этот подход, несомненно, будет способствовать повышению уровня технологической культуры в образовании, что особенно характерно для образования в высокоразвитых государствах.

Встает необходимость активного участия образовательных учреждений, представителей образовательной и научной общественности, органов управления образования в мероприятиях по реализации Государственной программой развития образования Республики Казахстан на 2011-2020 годы, обратив первостепенное внимание на решение следующих задач:

- модернизация содержания математического образования;
- определение результатов математической грамотности по уровню образования;
- совершенствование подготовки учителей математики в вузах, системы повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров;
- повышение качества учебников и УМК по математике;
- поднятие статуса и роли учителя;
- выработка направлений дальнейшей подготовки и переподготовки специалистов;
- развитие международного сотрудничества;
- профессиональное общение и обмен опытом учителей для разработки и обсуждения стратегических проблем;
- усовершенствование системы работы с одаренными детьми в рамках инновационных технологий.

Образование на современном этапе характеризуется усилением внимания к ученику, к его саморазвитию и самопознанию. Целью современного образования является полное достижение развития тех способностей личности, которые способствуют его самореализации.

Поиски усовершенствования методов преподавания находят отражение в практике работы школ. Обсуждаются и внедряются различные новые технологии, методы и приемы преподавания математики, активизирующие работу учеников, направляющие их учебную деятельность на доступное и сознательное усвоение материала.

В настоящее время разрабатываются новые государственные стандарты образования с участием профессорско-преподавательского состава Казахского национального педагогического университета (КазНПУ) имени Абая, проводится большая работа по совершенствованию подготовки учителей математики в вузах, системы повышения квалификации и переподготовки педагогических кадров. Таким образом, наши специалисты участвуют в модернизации образовательного процесса в учебных организациях всех уровней – дошкольных организациях, школах, вузах, учреждениях по повышению квалификации педагогических кадров и т.д.

На кафедре информатики и механико-математических специальностей института магистратуры и докторантуры PhD при КазНПУ имени Абая проводятся исследования по следующим направлениям методики преподавания математики:

1) Формирование методической компетентности будущих учителей математики (Б. Р. Каскатаева);

2) Разработка новых технологии обучения математике и внедрение в учебный процесс (Б. Р. Каскатаева);

3) Исторические и методические аспекты проблемы преподавания математики в Казахстане (Е. Ы. Бидайбеков, Б. Р. Каскатаева).

Профессорско-преподавательский состав кафедры на лекционных и практических занятиях спецкурсов «Инновационные методы обучения математике», «Новые технологии обучения математике» проводит следующую работу по подготовке будущих учителей математики в современных условиях:

1. Формирование ключевых компетентностей студентов на основе базовых знаний, умений и навыков, общечеловеческих и национальных ценностей с оптимальным использованием репродуктивных, продуктивных и исследовательских технологий обучения, обеспечивающих получение образовательных результатов, на основе сотрудничества преподавателя и студента.

2. Организация научно-исследовательской работы студентов по организации процесса обучения в 12-летней школе, о методах и формах реализация компетентностного подхода, в связи с переходом к 12-летней школе в 2020 году.

3. Изучение и применение традиционной и новой технологии обучения математике, как технологии развивающего, разноуровневего (уровневая дифференциация обучения), информационно-телекоммуникативного обучения, дистанционного обучения, интегративного обучения, здоровьесберегающего обучения и т.д.

На сегодняшний день, применение компетентностного подхода рассматривается как одно из оснований обновления содержания образования, поскольку в его основе лежит культура самоопределения личности (ее способность и готовность к саморазвитию и самореализации), а этот образовательный аспект сейчас стал одним из самых актуальных.

Студенты сравнивают на практических занятиях в нескольких параметрах традиционные и инновационные методы обучения, чтобы наглядно увидеть их разницу. В этой связи целесообразно шире применять такие формы работы со студентами, как учебные дискуссии, тренинги коллективно-распределительные формы работы с учебным материалом, интерактивные методы и современные технологии обучения математике.

Инновации в сфере образования направлены на формирование личности, ее способности к научно-технической и инновационной деятельности, на обновление содержания образовательного процесса.

Новые технологии обучения: 1) технология развивающего обучения; 2) личностно-ориентированная технология обучения; 3) технология проектного обучения; 4) блочно-модульные технологии, 5) парацентрическая технология обучения; 5) интеграционная технология обучения.

Внедрение нетрадиционных педагогических технологий существенно изменило образовательно-развивающий процесс, что позволяет решать многие проблемы развивающего, личностно-ориентированного обучения, дифференциации, гуманизации, демократизации, формирования индивидуальной образовательной перспективы учащихся.

Информационные технологии не только помогают организовать учебный процесс с использованием игровых методов, но и получить более сильную обратную связь.

Средства мультимедиа позволяют обеспечить наилучшую, по сравнению с другими техническими средствами обучения, реализацию принципа наглядности, в большей степени способствуют укреплению знаний и на практических занятиях – умений. Кроме того, средствам мультимедиа отводится задача обеспечения эффективной поддержки игровых форм урока, активного диалога «ученик-компьютер».

Использование ресурсов и услуг Интернета значительно расширяет возможности и преподавателя и магистранта во всех видах деятельности.

Проектная деятельность также является методом активизации учебно-познавательной активности. Этому способствует высокая самостоятельность учащихся в процессе подготовки проекта. Преподаватель, выступающий координатором, лишь направляя деятельность магистранта, который исследует выбранную тему, собирает наиболее полную информацию о ней, систематизирует, полученные данные и представляет их, используя различные технические средства, в том числе, и современные компьютерные технологии.

Метод интеграции, который способствует формированию межпредметных понятий, определяет характер межпредметных связей по фактору времени (предшествующие связи, перспективные, синхронные), позволяет осуществлять межпредметную координацию содержания учебного материала с целью его оптимизации (устранения дублирования, разночтения, хронологической несогласованности). Данный метод позволяет адаптировать содержание учебных программ к возможностям конкретных учащихся, создаёт благоприятные условия для развития личности каждого учащегося, формирования положительной мотивации учения, адекватности самооценки, максимально возможной успешности обучения.

Цели деятельности преподавателя вуза ориентированы на длительную перспективу, на создание условий для саморазвития личности магистранта и на получение качественного образования (как его научить решать проблемы, возникающие в различных ситуациях в дальнейшей практике).

Достижение этих целей означает возможности получить ожидаемые результаты в виде сформированных ключевых компетентностей выпускника вуза и освоить системы педагогических и методических умений, способов деятельности как составных частей ключевых компетентностей;

В настоящее время возрастает роль математического образования и практического применения, вырабатываемых в процессе обучения математике компетенций в условиях современного информационного потока, высокого уровня информатизации общества, математизации всех сфер деятельности человека.

Внедрение инноваций, анализ существующих в мире передовых технологий обучения математике, обмен опытом с ведущими школами методики математики, разработка эффективных учебных средств (учебно-методический комплекс, учебное пособие, электронный учебник), творческий подход к реализации поставленных задач способны вывести наше образование на принципиально новые высоты.

Литература:

1. Официальный сайт управления образования Павлодарской области [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://edupvl.kz/

2. Каскатаева Б. Р. Формирование методической компетентности будущих учителей математики : монография / Б. Р. Каскатаева. – Алматы. – 265 с.

3. Каскатаева Б. Р. Методика и технология обучения математике : учебное пособие / Б. Р. Каскатаева. – Алматы, 2011. – 303 с.

4. Бидайбеков Е. Ы. Применение педагогической и информационной технологий в формировании методической компетентности учителей математики / Е. Ы. Бидайбеков, Б. Р. Каскатаева // Доклад. Международная научная конференция: КарГУ им. Е. А. Букетова, Қарағанда: 2010.

ТЕОРЕТИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З МАТЕМАТИКИ

Н. В. Богатинська, С. В. Бойко
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
Boyko_serega@mail.ru

Однією з головних складових гармонійного розвитку особистості є розумове виховання. Математика володіє великими можливостями для розумового розвитку учнів завдяки своїй системі точних понять, умовиводів, формулювань. Завдання навчання математики полягає у розвитку мислення учнів, удосконалення умінь робити висновки та умовиводи, тобто формувати розумову культуру, яка і характеризується певним рівнем розвитку мислення, оволодінням різноманітними прийомами міркувань, прагненням набувати знання та умінням застосовувати їх в різноманітних ситуаціях.

Невід'ємною складовою розумової культури учнів є уміння узагальнювати та систематизувати набуті знання. В багатьох роботах психологів показано, що уміння узагальнювати та систематизувати – важливий компонент розумового розвитку учнів, який лежить в основі встановлення істотних загальних властивостей, взаємозв'язків досліджуваних понять і тверджень.

Аналіз психолого-педагогічної літератури свідчить про те, що вченими у різних аспектах вивчається проблема узагальнення теоретичного матеріалу на уроках математики. Це, перш за все, теоретичні дослідження психологів Л. С. Виготського, П. Я. Гальперіна, Г. С. Костюка, С. Л. Рубінштейна, В. В. Давидова, Н.Ф.Тализіної та ін. В дидактиці дана проблема висвітлена в роботах Ю. К. Бабанського, Л. В. Занкова, В. І. Лозової, В. О. Онищука, М. М. Скаткіна та ін. Для методики навчання математики особливу роль у дослідженні даної проблеми мають роботи, присвячені систематизації та узагальненню знань і умінь учнів, формуванню відповідних розумових прийомів у предметному аспекті. Зокрема, таким дослідженням присвячені роботи З. І. Слєпкань, Я. І. Грудьонова, В. П. Іржавцевої, О. В. Віхрової та ін.

Правильно організований процес систематизації та узагальнення навчального матеріалу дозволяє вчителю оцінювати знання, уміння та навички учнів, вчасно корегувати їх, бачити власні помилки, досягати поставлених цілей у навчанні. Все це в сукупності створює сприятливі умови для розвитку пізнавальних здібностей учнів та активізації їх самостійної роботи на уроках математики.

Основна мета систематизації знань та умінь полягає у виявленні досягнень та успіхів учнів, шляхів удосконалення, поглиблення знань, створенні умов для подальшої активної творчої діяльності. Така мета, в першу чергу, пов'язана з визначенням якості засвоєння учнями навчального матеріалу – рівня володіння знаннями, уміннями та навичками, передбаченими навчальною програмою. По-друге, конкретизація основної мети систематизації пов'язана з формуванням в учнів необхідності здійснювати самоконтроль та взаємоконтроль. По-третє, така мета передбачає виховання в учнів відповідальності за виконану роботу.

С. Л. Рубінштейн, досліджуючи операції мислення, висловив припущення, що, поряд з формальними емпіричними узагальненнями, які базуються на порівнянні, повинен існувати інший шлях узагальнення, що базується на аналізі через синтез [6, 134]. Спираючись на експериментальні дані, отримані при дослідженні математичних здібностей учнів, В. А. Крутецький виділив два принципово різні шляхи узагальнення математичного матеріалу. Вчений зазначає, що поряд із поступовим узагальненням математичного матеріалу на основі варіювання часткових випадків (шлях більшості учнів) існує інший шлях узагальнення, коли здібні учні без спеціальних вправ та вказівок вчителя, самостійно здійснюють узагальнення математичних об'єктів, відношень, понять на основі аналізу однієї властивості чи ознаки [4, 57].

Перший шлях – це шлях емпіричних узагальнень. За висновками В. А. Крутецького, він характерний для учнів з низьким та середнім рівнями здібностей. Другий шлях, на думку В. В. Давидова, – це шлях теоретичних узагальнень.

В залежності від типу узагальнення мислення поділяють на емпіричне та теоретичне. Характерною особливістю емпіричного мислення є те, що воно відображає тільки зовнішні зв'язки явищ, не проникаючи в їх сутність. Таким типом мислення ми користуємось в буденному житті. Теоретичне мислення відображає внутрішні зв'язки об'єктів і закони їх розвитку, які використовує науковий пошук. Тому теоретичне мислення називають ще науковим. Емпіричному мисленню властивий в основному індуктивний шлях пізнання, теоретичному – дедуктивний. Шлях емпіричного мислення – сходження від конкретного до абстрактного, теоретичного – від абстрактного до конкретного.

Проте шкільні методики навчання засновані на закономірностях емпіричних узагальнень. Теоретичне мислення формується, як правило, стихійно, далеко не у всіх учнів і не завжди раціональним шляхом.

Теоретичні узагальнення найбільш ефективні для розвитку творчого мислення учнів. Вони є основою дедуктивного шляху пізнання. Як зазначає Г. І. Щукіна, дедуктивний шлях пізнання більш ефективний та продуктивний, оскільки веде до роз'яснення сутності процесів, їх закономірностей, залучає учнів до активного наукового пізнання світу.

При розв'язанні задач на основі формальних емпіричних узагальнень в навчальному процесі учням пропонується ознайомитись з великою серією однотипних задач. Вони рухаються довгим шляхом вибору способу розв'язання задач даного типу. Якщо слідувати вимогам теоретичних узагальнень, то спочатку необхідно виділити опорну, вузлову задачу даного типу та навчити учнів розв'язувати її. Коли учні проаналізують істотні зв'язки, зазначені в умові задачі, та способи розв'язання задач даного типу, то розв'язання аналогічних задач не буде викликати особливих утруднень. Воно базуватиметься на умінні підвести умову під відомий тепер загальний спосіб дій.

Таким чином, вже під час розв'язання першої типової задачі учні засвоюють всі необхідні знання про особливості задач, способи їх розв'язання, принципи варіації неістотних ознак, вчаться складати аналогічні задачі, переносити на них засвоєний спосіб розв'язання, розпізнавати задачі певного типу. Саме так, за дослідженням В. А. Крутецького, підходять до розв'язання задач здібні до математики учні. Після першого ознайомлення з розв'язуванням задачі вони вільно розв'язували всі інші аналогічні задачі, на основі попереднього аналізу структур задач швидко знаходили їх типову схожість. Отже, однією з характерних ознак теоретичного мислення є здатність до такого аналізу, який, будучи виконаним на прикладі будь-якої події чи однієї задачі, розкриває внутрішній зв'язок, що лежить в основі часткових проявів цієї події чи цієї задачі. Завдяки аналізу учень швидко узагальнює певне коло подій та задач. Зрозуміло, що під час аналізу одного явища чи однієї задачі не можливо зробити висновок про те, що деяка ознака чи властивість є загальною, але можна зрозуміти, що вона є суттєвою: бути суттєвою – означає бути необхідною, а значить і загальною для явищ певного типу, тобто такою, що неодмінно повторюється.

У процесі теоретичного узагальнення прослідковуються реальні взаємозв'язки загального і одиничного. Якщо, проаналізувавши доведення теореми про площу паралелограма, учні виділяють його загальну ідею: перетворити фігуру в таку рівновелику їй, площу якої можна знайти, а потім застосовують цю ідею до виведення формул площ різних многокутників, то це – теоретичне узагальнення. Складання алгоритму обчислення похідної на основі її означення і самостійне застосування цього алгоритму до виведення формул похідних елементарних функцій – також теоретичне узагальнення. Так як навчання розв'язуванню типових задач передбачає оволодіння узагальненими схемами розв'язання, то вчителю слід прагнути до засвоєння цих схем всіма учнями при використанні мінімальної кількості опорних задач, тобто на основі теоретичних узагальнень.

Методична майстерність вчителя, на думку Ю. К. Бабанського, полягає в тому, щоб на прикладі однієї-двох задач досягти розуміння всіма (а не тільки здібними) учнями загального підходу до розв'язування задач даного типу, навчити їх складати алгоритми розв'язання всіх інших аналогічних задач [1, 74].

Таким чином, не кількість розглянутих задач, а підхід до їх розв'язання визначають ефективність роботи вчителя. Із всього різноманіття задач досвідчений вчитель вибирає найбільш типові, ознайомлює учнів із загальними прийомами міркувань при розв'язуванні задач певного типу, навчає складати алгоритми їх розв'язання. Такий підхід є методично оптимальним.

Не менш успішно можна формувати змістові узагальнення при вивченні теоретичного матеріалу. Але це потребує деякого його перекомпонування, об'єднання в блоки навколо основних понять, ідей, принципів, які виділяють на певному етапі вивчення теоретичного матеріалу. Зазвичай це відбувається наприкінці вивчення теми чи розділу і тільки в тому випадку, коли вчитель проводить в такому напрямку спеціальну роботу. Без допомоги вчителя учням зробити це практично непосильно, оскільки важко вибрати ту основу, навколо якої групуються інші знання. В. Н. Осинська зазначає, що в навчальній практиці спостерігаються різноманітні ситуації [5, 132]. В одному випадку вчитель викладає навчальний матеріал, не замислюючись про виділення і доведення до свідомості учнів принципів, ідей, підходів, які групують теоретичний матеріал в систему. Знання засвоюються розрізнено, об'єм інформації для запам'ятовування великий; учні втрачають інтерес до навчання; немає умов для формування теоретичних узагальнень.

В другому випадку вчитель виділяє з учнями головне на уроках узагальнення і систематизації, і тільки на останніх уроках учні дізнаються про те, що матеріал можна було б запам'ятовувати більш раціонально, відштовхуючись від загального. Теоретичні узагальнення в такому випадку не формуються, так як практично не здійснюється сходження до конкретного, тому що цей етап пройдений до здійснення узагальнення.

Існує й третій підхід. В старших класах вчитель пояснює, навколо яких ідей в темі чи розділі групується матеріал, при викладанні навчального матеріалу звертається увага на загальний принцип, головну ідею, привчає учнів застосовувати їх при засвоєнні знань. Образно порівняти зазначені підходи можна так. В перших двох випадках на «вершину знань» учні підіймаються в кінці вивчення теми. Позаду – розрізнено засвоєний матеріал, попереду нова тема. Матеріал переосмислюється з нових позицій. Але це не оптимальний метод навчання, а подвійна робота. В третьому випадку учні вже на перших уроках піднімаються на «вершину», усвідомлюють саме головне та суттєве. Попереду – теоретичний матеріал, який буде засвоюватись на основі зрозумілого принципу. В такому випадку відразу створюються об'єктивні можливості для сходження від абстрактного до конкретного, тобто реальні умови для формування теоретичного мислення.

Література

1. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1982. – 192 с.
2. Возрастная психология / под ред. Г. С. Костюка. – К. : Рад. шк., 1976. – 250 с.
3. Давыдов В. В. Виды обобщений в обучении / В. В. Давыдов. – М. : Педагогика, 1972. – 423 с.
4. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1968. – 431 с.
5. Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике : книга для учителя / В. Н. Осинская. – К. : Рад. шк., 1989. – 192 с.
6. Рубинштейн С. Л. Бытие и сознание / С. Л. Рубинштейн. – М. : Изд-во АН СССР, 1957. – 328 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

З. И. Бондаренко[α], Д. В. Клименко[β]
Украина, г. Днепропетровск, Национальный горный университет
[α] z.i.bond@mail.ru
[β] dinklim@mail.ru

Глубокое понимание и свободное владение основными положениями высшей математики является одной из основных, а в случае технического вуза, возможно, даже главной, целью её изучения. Умение решать конкретные задачи, несомненно, важно, но, в отличие от идей и понятий, методы и приёмы сравнительно быстро забываются, особенно если они не используются регулярно.

Как показали социологические исследования Л. Е. Черновой, значительная часть студентов легче воспринимает и усваивает материал в процессе общения. Проще всего организовать такое общение на практических занятиях, одной из задач которых собственно и является повторение и закрепление теоретических знаний, полученных на лекциях. Однако, прежде всего в силу высокой плотности изучаемого материала, практические занятия, в большинстве случаев, сводятся к изучению методов и приёмов решения конкретных задач. В результате студенты формально подходят к процессу решения – они просто запоминают, как решать данный тип задач. Фактически же большинство студентов не осознают, почему в задаче совершаются именно эти действия, решают задачу «шаблонно».

Практически у студентов отсутствует и мотивация к более тщательному изучению теоретических основ курса. Это в частности связано с тем, что в последние годы в вузах Украины экзамены, зачёты и модули сдаются либо письменно, либо путём компьютерного тестирования. Устный опрос по лекционному материалу осуществляется, зачастую, лишь как исключение, при спорной оценке. Данное обстоятельство и постепенный переход к мультимедийному мышлению студентов приводит также к тому, что новое поколение испытывает трудности в изложении прочитанного и услышанного, в том числе и на лекциях. Многим студентам сложно рассуждать, анализировать.

Представляется, что одним из эффективных способов смягчения остроты описанной проблемы является применение в качестве инструмента обучения специально сформулированных индивидуальных заданий, выполнение которых сочетает в себе традиционное («ручное») получение решения, а также возможности решения и визуализации в средах математических пакетов.

В качестве примера ниже приведём индивидуальное задание по теме «Исследование функций».

Заданы функции:

а) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$,

б) $y = 2 + \sqrt[3]{(x-3)^2}$.

1. Найти

- область определения и область значений функций
- точки пересечения с осями координат
- точки локального экстремума функций
- точки перегиба функций
- асимптоты функций
- период функций

2. В среде Mathcad построить графики и асимптоты заданных функций. Отметить на графике найденные аналитически точки экстремума и перегиба функций.

3. Используя полученный график, проверить область определения функций, область значений функций, четность функций, период функций.

4. Используя геометрический смысл производной, указать:

- точки, в которых первая производная равна нулю или не существует (критические точки),
- промежутки знакопостоянства первой производной:

а) промежуток, в котором первая производная положительна ($y'>0$);

б) промежуток, в котором первая производная отрицательна ($y'<0$).

- точки, в которых вторая производная равна нулю,
- промежутки знакопостоянства второй производной:

а) промежуток, в котором вторая производная положительна ($y''>0$);

б) промежуток, в котором вторая производная отрицательна ($y''<0$).

Индивидуальное задание состоит из четырех частей. Сначала студенты выполняют задание вручную, а затем полученные результаты проверяют в среде Mathcad. Первые три части содержат стандартный набор вопросов по данной теме, интерес представляет тот факт, что вычисления необходимо проверить с помощью средств Mathcad. Четвертая часть этого задания содержит вопросы, ответы на которые предполагают знания теоретического материала. Как показала практика, студенты могут знать необходимое и достаточное условия существования экстремума, но теряются, например, при вопросе: «посмотрите на график функции и укажите промежуток, на котором первая производная функции положительна». Поэтому выполнение данной части индивидуального задания требует от студентов внимательного и вдумчивого прочтения и осмысления темы о геометрическом смысле первой и второй производных функций. Вопросы в задании заставляют студентов проанализировать уже правильно построенный график функции, детально разобраться в понятиях «критическая точка», «экстремум», «геометрический смысл производной функции». При этом зачастую возникает потребность обратиться к лекционному курсу, электронный вариант которого всегда доступен (http://highmath-ngu.narod.ru).

При защите задания студенту может быть предложено построить график функции в среде пакета без её (функции) предварительного исследования, и уже по построенному графику определить основные свойства функции и её производных.

Положительным моментом процесса выполнения задания для преподавателя является организация самостоятельной работы студентов.

При выполнении задания студенты, как правило, активно общаются с однокурсниками, а при его защите вступают в непосредственный диалог с преподавателем, тем самым расширяя свои коммуникационные возможности в предметной области.

Изложенный выше подход реализован в комплексе индивидуальных заданий для студентов механико-машиностроительного факультета специальности «Автомобильное хозяйство», при этом акцент в формулировках задач делался на методах, которые используются в специальных дисциплинах.

ФІЛОСОФСЬКИЙ ТА ПЕДАГОГІЧНИЙ АСПЕКТИ НАСТУПНОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У 4-ОМУ КЛАСІ

М. Ю. Борисенко, О. М. Борисенко
Україна, м. Краматорськ, Краматорська загальноосвітня школа
І-ІІІ ступенів №25 з профільним навчанням
mabor_@mail.ru

У час постійних змін, бурхливого розвитку новітніх технологій особливого значення набуває здатність особистості навчатися впродовж всього життя.

В законах України «Про загальну середню освіту» [7], Національній доктрині та Державній національній програмі «Освіта» [5] наголошується, що одне з головних завдань, яке стоїть перед сучасною школою – це реалізація наступності між усіма ланками освітнього процесу.

Початкова школа, зберігаючи наступність із дошкільним періодом дитинства, забезпечує подальше становлення особистості дитини, її інтелектуальний, соціальний, фізичний розвиток, а також перехід на якісно новий ступінь дорослості шляхом створення комфортних умов для розкриття її потенціалу та подальшого безперервного вдосконалення.

Одним з основних принципів навчання у початковій школі є принцип наступності і перспективності.

Метою нашої розвідки є філософський та педагогічний аспекти наступності в навчанні математики у 4-ому класі.

Поняття наступності в літературі має достатньо різнобічний діапазон тлумачень.

У філософському, і в загальнонауковому контекстах наступність розглядається як об’єктивний, необхідний зв’язок між різними етапами розвитку, сутність якого полягає в тому, що «нове, змінюючи старе, зберігає в собі деякі його елементи» [15].

У педагогіці існують різні підходи до визначення наступності в навчанні. Ряд дослідників уважають її загальнопедагогічним принципом (С. М. Годник [4] та ін.), інші – загальнопедагогічною закономірністю (П. М. Олійник [10], Д. Ш. Ситдікова [14] та ін.), треті – методологічним принципом (Я. Е. Умборг [16] та ін.). Більшість сучасних дослідників розглядають наступність у навчанні як дидактичний принцип (А. М. Пишкало [12] та ін.). А. А. Киверялг [9] пише, що наступність як дидактичний принцип характеризується такими якостями: загальність, дидактичність, взаємозв’язок і взаємопроникнення з іншими принципами, наприклад, науковості, доступності, профспрямованості тощо.

У дослідженні проблеми наступності в навчанні й вихованні виокремилось кілька напрямів.

Перший із них висвітлено у дослідженнях О. Я Блауса [2], Ш. І. Ганеліна [3] та ін. і пов'язаний із вивченням ролі наступності в цілісному педагогічному процесі.

Другий напрям досліджень присвячено вивченню наступності між такими ступенями безперервної освіти, як дошкільні виховні установи та початкова школа (М. М. Костікова [8] та ін.).

Третій напрям пов'язаний із вивченням предметної наступності між різними ланками загальної освіти (Є. М. Павлютенков [11] та ін.), між загальноосвітньою та професійною школами (О. В. Батаршев [1] та ін.).

У педагогічній науці «наступність» і «перспективність» розглядаються як дві сторони одного й того ж педагогічного явища.

Наступність – це врахування того рівня розвитку дитини, з яким вона прийшла до основної ланки освіти, опора на нього.

Врахування цього принципу забезпечує органічне, природне продовження розвитку, виховання і навчання, створює умови для успішного переходу молодшого школяра в основну школу.

Це багатовимірне, багатоаспектне явище:

– закономірність психічного і фізичного розвитку дитини;

– умова реалізації безперервної освіти;

– принцип навчання та виховання;

– одна із складових компонентів теоретичних засад педагогічних систем, як концептуальний підхід до вирішення освітньо-виховних завдань тощо.

Перспективність – це визначення пріоритетних ліній підготовки учнів, що максимально враховують потреби основної ланки освіти в готовності дитини до оволодіння новою навчальною діяльністю. Цей процес забезпечує прояв творчого характеру, вільного психічного новоутворення, подальший соціальний розвиток у нових ролях з їх постійними обов`язками опанувати зміст шкільних предметів, способи діяльності тощо.

Науковці зазначають, що перехід з початкової школи до школи другого ступеня характеризується двома кризами – *природною* (перехід до підліткового віку) та *штучно створеною* (зміна умов навчання, новий соціальний статус), які впливають на шкільну мотивацію, навчальну активність, що досить часто призводить до дезадаптації дітей у 5-ому класі.

При переході від одного ступеня навчання до іншого вдосконалюються функціональні механізми психіки, типологічні властивості особистості набувають яскраво вираженої індивідуальності, формується індивідуальний стиль діяльності. Тобто наступність у становленні особистості виявляється в динаміці особистості, а саме: змін властивостей, якостей учнів у процесі навчально-пізнавальної діяльності.

Готовність дитини дошкільного віку до школи та молодшого школяра до переходу в середню ланку навчання визначають три взаємопов'язаних компоненти: фізична готовність, інтелектуальна готовність, розумовий розвиток і розвиток мовлення.

Не менш значущою є психологічна готовність учня та вчителя до тих труднощів, які неминуче виникають у період адаптації.

Однією з умовою успішної адаптації випускників початкової школи до навчання у 5-ому класі є забезпечення можливості формування в них уміння робити усвідомлений вибір. На відміну від початкової школи, де варіативність освіти задається ззовні (батьки, школа, учитель мають право вибору прийомів навчання), у підлітковому віці необхідно навчати дитину самостійно обирати факультативи, форми позакласного навчання, що буде формувати подальший вибір профілю навчання у старшій школі.

На сучасному етапі розвитку суспільства необхідно підняти п'ятикласника на новий ступінь у пізнанні світу порівняно з четвертокласником. Необхідно організувати навчальну діяльність дитини так, щоб у процесі цієї діяльності виникав ряд навчальних дій, які поступово перетворюються в цілісну пошукову діяльність. Навчання як процес здобуття знань і навчальна діяльність – різні речі. Навчальна діяльність – це діяльність самозмінювання. Якщо вчителеві вдається сформувати її в дитини, то вона звільняється від допомоги і крокує самостійно. Це означає, що школяр навчився учитися.

Основою наступності між початковою і основною ланками загальноосвітньої школи є розвиток у школярів уміння вчитися, бажання розширювати свої знання та застосовувати їх на практиці, здатність до самонавчання. Шкільний етап наступності – один з найвідповідальніших. Саме тут в учнів мають бути сформовані потреби в знаннях, бажання й уміння їх самостійно поповнювати і використовувати як дієвий засіб творчої діяльності.

Не менш важливою є психологічна та професійна готовність учителя до роботи з учнями 4-х класів. Це передбачає знання специфіки вікових та індивідуальних особливостей дітей, прогнозування труднощів, що виникають у школяра в період адаптації, прагнення надати йому своєчасну підтримку.

Вивчення математики у 5-ому класі базується на математичній підготовці, яку учні дістали в початковій школі. В цілому вона визначена тими вимогами, що зазначені в програмі для учнів на кінець четвертого року навчання.

Метою засвоєння математики у 5-ому класі є систематизація знань про розвиток числа та вироблення вмінь виконувати усно чи письмово арифметичні дії над числами, перекладаючи практичні задачі на математичною мовою, підготовка учнів до вивчення алгебри та геометрії.

Курс базується на індуктивній основі із залученням елементів дедуктивних міркувань. Теоретичний матеріал викладається на наочно-інтуїтивному рівні, математичні методи і закони формулюються у вигляді правил.

Провідною ідеєю у вивченні геометричного матеріалу є розвиток уявлень учнів про геометричні форми (їх зв'язки і властивості) і геометричні величини, формування умінь і навичок у користуванні основними креслярськими приладами.

Наступність під час вивчення геометричного матеріалу в початкових класах передбачає розгляд певного геометричного поняття в його розвитку, з опорою на попередні уявлення учнів про нього, подальший розвиток цих знань з обов'язковим врахуванням потреби в цьому понятті в перспективі – під час вивчення його в середніх та старших класах.

Вчитель початкових класів, готуючись до пояснення певного геометричного поняття, має чітко ознайомитись з програмою і підручником з математики для 5-го класу, щоб усвідомити, що учні повинні вивчити про певне геометричне поняття зараз, як це поняття розвивається в межах початкової школи і в 5-ому класі.

Вчителю початкових класів необхідно враховувати вище вказані перспективи навчання учнів в 5-ому класі. З цього погляду треба знати не лише основні напрямки розглядання навчального матеріалу, а й враховувати межі їх розвитку, тобто завершеність певної ідеї та очікувані результати.

В сучасній програмі для початкових класів і підручниках з математики основна увага приділяється вивченню арифметичного матеріалу, а елементам геометрії відводиться мало часу. Недостатність теорії з геометричного матеріалу має негативні наслідки на уроках геометрії в старших класах. Старшокласникам важко дається вивчення геометрії, вони не можуть пояснити малюнок, бо в початкових класах розвитку просторової уяви приділялось недостатньо уваги.

Розв'язання цієї проблеми ми бачимо у створенні системи геометричних задач. Це можуть бути задачі та вправи на конструювання моделей просторових тіл з паперу, з пластиліну, вправи на виготовлення каркасних моделей з лічильних паличок і пластиліну, завдання для роботи з розгортками просторових тіл, з розбірними моделями просторових тіл тощо.

Сучасні психологічні дослідження вказують на важливу роль діяльності учнів у процесі формування їхньої просторової уяви. Робота з моделями на уроках математики дасть змогу учневі не лише побачити їх, а й відчути на дотик, що дозволить краще сприйняти ці фігури, роздивитися їх особливості.

Адже, ще фізіолог І. М. Сєченов [13], розкривши механізм сприйняття форми предмета за допомогою різних органів чуття, особливо підкреслював велику пізнавальну роль рук і очей.

Велике значення має взаємодія школи і сім'ї з питань здійснення наступності між початковою та основною ланками загальноосвітньої школи. Становлення учня багато в чому залежить від учителя, від його вміння організувати відповідну роботу з батьками. Важливо, щоб стосунки батьків і педагогів вибудовувалися на партнерських засадах, оскільки успішно виховувати дітей можуть лише батьки, які поважають себе. Саме за таких умов педагог зможе пробудити у батьків інтерес до самопізнання і самовиховання. Досягти мети у взаємодії з батьками педагог зможе за умови правильно налагодженого педагогічного спілкування з ними.

Таким чином, наступність покликана забезпечити раціональне використання раніше набутих знань, умінь і навичок, дослідити особливості перехідного періоду навчання учнів 4-5 кл., створити підґрунтя для подальшого розвитку і систематизації в основній школі вмінь, здобутих у початковій ланці, удосконалити їх.

Це вказує на те, що сучасне бачення проблеми наступності має спрямовуватись на створення умов для реалізації в навчальному процесі початкової та основної школи єдиної, динамічної, перспективної системи навчання і виховання.

Література

1. Батаршев А. В. Теория и практика преемственности обучения в общеобразовательной и профессиональной школе : дис. …доктора пед. наук : 13.00.01 / Батаршев Анатолий Васильевич. – СПб, 1992. – 347 с.
2. Блаус А. Я. Преемственность в системе методов обучения / А. Я. Блаус. – Рига : Изд-во Риж. политехн. ин-та, 1971. – 140 с.
3. Ганелин Ш. И. Педагогические основы преемственности учебно-воспитательной работы в 4-5 классах / Ш. И. Ганелин // Сов. педагогика. – 1955. – №7. – С. 4-12.
4. Годник С. М. Преемственность воспитательно-образовательной деятельности в условиях непрерывного образования / С. М. Годник // Перспективы развития системы непрерывного образования [под ред. Гершунского Б. С.]. – М. : Педагогика, 1990. – С.148-163.
5. Державна національна програма «Освіта» (Україна XXI століт-

тя). – К. : Райдуга, 1994. – 61 с.

6. Дуранов М. Е. Педагогический подход к преемственному обучению как системе / Дуранов М. Е., Михайлов П. А. // Пути повышения эффективности обучения в школе. – Челябинск : ЧГПУ, 1977. – Вып. 11. – С. 3-11.

7. Закон України «Про загальну середню освіту» // Інформаційний збірник МО України. – 1999. – №15. – Серпень. – К. : Педагогічна преса. – С. 6-31.

8. Костикова М. Н. Психологические особенности готовности детей к школьному обучению : дис. ... канд. психол. наук : 19.00.07 / Костикова Маргарита Николаевна. – М., 1985. – 149 с.

9. Кыверялг А. А. Реализация преемственности в обучении: метод. рекомендации / А. А. Кыверялг. – Таллин : АПН СССР, 1988. – 39 с.

10. Олейник П. Н. Научные основы преемственности в системе непрерывного профессионального (сельскохозяйственного) образования : дис. … доктора пед. наук : 13.00.01 / Олейник Павел Николаевич. – К., 1993. – 390 с.

11. Павлютенков Є. М. Компетентний випускник – мета і результат діяльності школи / Павлютенков Є. М. // Гімназія на зламі століть. – К. : Летопись – XX, 1999. – С. 104-115.

12. Преемственность в обучении математике : пособие для учителей / [сб. ст., сост. А. М. Пышкало]. – М. : Просвещение, 1978. – 239 с.

13. Сеченов И. М. Рефлексы головного мозга / И. М. Сеченов. – М. : Академия наук СССР, 1961. – 100 с.

14. Ситдикова Д. Ш. Дидактические условия преемственности в формах и методах обучения в средней и высшей школе : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Ситдикова Дамира Шамсиевна. – Казань, 1985. – 151 с.

15. Советский энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. – 4-е изд. – М. : Сов. энциклопедия, 1989. – 1632 с.

16. Умборг Я. Э. Преемственность лабораторных работ в общеобразовательной и профессиональной школе (На примере преподавания разделов электричества в трудовом обучении, физике и электротехнике) : дис. … канд. пед. наук : 13.00.01 / Умборг Яак Эдуардович. – Таллин, 1984. – 179 с.

ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ СЕМАНТИЧНОЇ ГНУЧКОСТІ ЯК ОДНОГО З КРИТЕРІЇВ КРЕАТИВНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

А. О. Брюхович[α], Ю. В. Гвоздецька[β]
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький Жовтневий ліцей
[α] Alena-Brjukhovich@rambler.ru
[β] Ylichka8608@mail.ru

Постановка проблеми. Традиційні погляди в освіті на формування в учнів знань, умінь і навичок уже не задовольняють суспільство. Сучасному суспільству потрібні не просто добросовісні виконавці, котрі мають певні знання, уміння й навички, а креативні особистості. Адже лише сформована креативна особистість може успішно справитися з проблемами сьогодення. Однією з проблем освіти на сьогодні є розвиток креативності учнів, виховання вміння творчо реагувати на зміни в суспільстві.

До основних критеріїв професійної компетентності відносять такі особистісні якості, як гнучкість, здатність до адаптації і впевненість у собі, які відбивають здатність реагувати на невизначеність. Це і зумовлює актуальність розгляду питання про формування креативної особистості з позиції достатності для адаптації випускника загальноосвітньої школи до умов життя і професійної діяльності в сучасному суспільстві.

1. *Аналіз досліджень і публікацій.* В дидактиці поняття креативності містить у собі минулі, наявні й майбутні характеристики процесу, в результаті якого людина (чи група людей) створює щось нове, чого раніше не існувало. Її також можна уявити як сукупність рис, проявів, якостей, інтелектуальних умінь, дій та операцій, серед яких можна назвати: 1) пошук та формулювання пізнавальної проблеми; 2) пошук її розв'язання; 3) операції узагальнення (індукції), порівняння, аналізу; 4) акт встановлення зв'язку між різнорідними явищами; 5) вміння змінювати функції предметів та явищ, виявляти семантичну гнучкість мислення; 6) бісоціювання ідей; 7) абстрагування; 8) пошук аналогій та асоціацій; 9) подолання стереотипів мислення; 10) операція конкретизації (що передбачає інтегрування понять, дедукцію тощо); 11) оригінальність мислення; 12) продуктивність діяльності тощо.

Дж. Гілфорд виділив чотири основних параметри креативності:

1) оригінальність – спроможність продукувати віддалені асоціації, незвичні відповіді. Тести: пропонується деякий текст, випробовуваний повинен запропонувати якнайбільше назв до нього; описується кілька гіпотетичних ситуацій, випробовуваного просять перелічити всілякі їхні

наслідки;

2) семантична гнучкість – здатність виявити основну властивість об’єкта і запропонувати новий спосіб його використання. Тести: даються 5 об’єктів, але тільки за допомогою одного з них можна вирішити поставлену проблему. Наприклад, завдання таке: «Розпалити вогонь». Об’єкти: а) авторучка, б) огірок, в) кишенькові годинники, г) лампочка, д) кулька. Відповідь: кишенькові годинники, тому що для досягнення мети можна використати їхнє збільшувальне скло; даються два об’єкти, необхідно з’єднати їх так, щоб вийшов корисний третій;

3) образно-адаптивна гнучкість – спроможність змінити форму стимулу таким чином, щоб побачити в ньому нові ознаки і можливості для використання; Тест: головоломки із сірниками, у яких потрібно перемістити кілька сірників у вихідній конфігурації для одержання заданої форми; можливі один чи кілька розв’язків;

4) семантична спонтанна гнучкість – продукування різноманітних ідей в нерегламентованій ситуації. Загальний інтелект не включається в структуру креативності. Тести: випробовуваний повинен запропонувати всі можливі способи застосування звичайних речей (наприклад, цегли); випробовуваний повинен перелічити якнайбільше об’єктів, що належать до названого класу [3, 88].

Особливу увагу, на нашу думку, слід приділити семантичній гнучкості, тобто здатності бачити об’єкт під незвичним кутом зору. Саме математика значною мірою сприяє розвитку семантичної гнучкості учнів, завдяки усій своїй системі, винятковій ясності і точності своїх понять, висновків і формулювань. Навчання на уроках математики мистецтва розв’язувати задачі дає винятково сприятливу можливість для формування в учнів визначеного складу розуму. Необхідність дослідницької діяльності розвиває інтерес до закономірностей, учить бачити красу і гармонію людської думки.

Метою статті є висвітлення можливостей розвитку креативної особистості шляхом підвищення семантичної гнучкості учнів на уроках математики.

Основний зміст. Креативне навчання містить у собі ясне розуміння необхідності математичної освіти в загальній підготовці учня, у тому числі уміння оперувати з абстрактними об’єктами і бути коректним у вживанні математичних понять і символів для вираження кількісних і якісних відношень.

Семантична гнучкість не зводиться до оволодіння змістом навчального матеріалу, а визначається тим, у якій мірі цей зміст використовується в практичній діяльності школяра.

Важливими напрямками підвищення семантичної гнучкості є формування логічного мислення і мови учнів, оскільки мова і мислення знаходяться між собою в нерозривному зв'язку, а математична мова вважається зразком ясності й лаконічності. Навички правильної, точної і короткої мови, сформовані на уроках алгебри, зроблять позитивний вплив на загальну мовну культуру учнів.

Отже, можна виділити такі основні компоненти семантичної гнучкості:

- інтелектуальний розвиток учнів (логічного та алгоритмічного мислення, уяви, пам'яті, уваги, інтуїції);
- система математичних знань, навичок, вмінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти;
- потреба та здібності безперервно та цілеспрямовано розширювати та поглиблювати знання;
- достатній рівень математичної мови та математичного апарату як засобу опису та дослідження оточуючого світу та його закономірностей;
- уявлення про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності, формуванні наукового світогляду, розвитку людської цивілізації [5, 328].

Для підвищення семантичної гнучкості необхідні дві системи знань: про предметну дійсність та про зміст і послідовність дій, що забезпечують оволодіння першою системою знань. Задля досягнення цієї мети слід сформувати в учнів узагальнюючі прийоми міркувань, навчити їх методам розв'язування цілого класу задач. Дані прийоми поділяються на дві великі групи – алгоритмічного типу та евристичного типу. Перші – це прийоми розумового мислення, що повністю відповідають законам формальної логіки, наприклад алгоритми розв'язання типових задач, правило конструювання означення через родо-видові відмінності, правило-орієнтир класифікації та ін.

Формування прийомів алгоритмічного типу – необхідні, але не достатні умови розвитку семантичної гнучкості. Воно необхідне тому, що, по-перше, сприяє вдосконаленню репродуктивного мислення, і по-друге, ці прийоми служать тим фондом знань, на основі яких учень може розв'язувати нові для нього задачі, оволодівати більш складними прийомами діяльності. Воно не достатнє тому що, довготривалі вправи в розв'язуванні задач на основі алгоритмів формують установку на діяльність за готовим зразком, сковують пошук рамками вже відомих прийомів, створюють «бар'єр минулого досвіду». Тому формування таких прийомів має бути пов'язано зі спеціальним навчанням прийомів евристичного типу.

Евристичні прийоми стимулюють пошук розв'язання нових проблем, відкриття нових для учня знань, спрямовують думку на проникнення в суть змісту.

Разом з тим, креативність людини залежить не тільки від кількості придбаних нею знань, але й від їхньої якості. Придбані знання повинні бути різнонаправленими, тому що вони мають здатність орієнтувати мислення на різні підходи до розв'язування задач. Звідси особливе місце у формуванні креативної компетенції варто відвести міжпредметності в освітньому процесі. Руйнування односпрямованих зв'язків між галузями знання дозволяє сформувати здатність інтегрувати власні ідеї в загальний контекст комунікації та синтезувати нові ідеї на основі звертання до інших областей знання. Більш того, нові перспективи можуть прийти звідусіль, тому школа повинна стати місцем критичного обговорення, дискусій.

Таким чином, проблема розвитку семантичної гнучкості насамперед постає перед навчальними закладами. Саме навчально-виховний процес повинен стимулювати розвиток в учнів навичок розв'язування навчальних задач, творчої самоорганізації, потреби в оновлені знань.

Розглянемо основні принципи розвитку семантичної гнучкості:

1. Принцип системного підходу полягає в цілісному представленні креативності особистості. Цей принцип вказує на те, що формування всіх компонентів поняття відбувається одночасно. Тобто креативність при розв'язуванні математичних задач слід розглядати, як невід'ємну частину загальної творчості людини.

2. Принцип інтегративного підходу полягає у співробітництві усіх соціальних інститутів (загальноосвітніх навчальних закладів, бібліотек і т.д.) для досягнення спільної мети – розвитку креативної особистості.

3. Принцип діяльнісного підходу полягає в тому, що підвищення семантичної гнучкості базується не лише на позиції вчителя, викладача, який прагне пояснити учню правила застосування тих чи інших навичок, а й з позиції самого учня, котрий розв'язує дану задачу.

Високий рівень семантичної гнучкості сприяє:

- оволодінню конкретними знаннями, необхідними для орієнтації в сучасному світі, в інформаційних і комп'ютерних технологіях, для підготовки до майбутньої професійної діяльності, для продовження освіти у відповідних вузах;
- набуттю навичок логічного й алгоритмічного мислення (здатність аналізувати, відрізняти гіпотезу від факту, критикувати, розуміти зміст поставленої задачі, схематизувати, чітко виражати свої думки і т.п.), а також розвитку уяви й інтуїції (просторові уявлення, можливість передбачати результат);

• формуванню світогляду (розуміння взаємозв'язку математики і дійсності, знайомство з методом математики, його відмінністю від методів природничих і гуманітарних наук, з особливостями застосування математики для розв'язання наукових і прикладних задач);

• збагаченню запасу історико-наукових знань (знайомство з основними історичними віхами виникнення й розвитку математичної науки, долями великих відкриттів, іменами людей, що створювали науку).

На наш погляд, розвитку семантичної гнучкості, а взагалі й розвитку креативності можуть сприяти, наприклад, такі завдання:

- Будь-яка людина знає про існування бурштинової кімнати, але мало хто знає, що вона розміщена у нещодавно збудованій верхній частині Лувра. Деякі історики знають, що кімната має форму куба і розміщена в центрі будови піраміди, але вони не можуть її там знайти (вважається, що бурштинова кімната навіки загублена). Як знайти місцезнаходження бурштинової кімнати, знаючи деякі відомості про пірамідусховище?
- Усі великі мореплавці замовляли на свої кораблі у відомого паризького майстра Саварі – винахідника «чорної рятівної скриньки», що складалася з дерев'яного ящика у формі куба та пляшки з-під рому, яка містила записку про допомогу. Оскільки розміри капітанського містка могли бути різними, то майстер Саварі повинен був точно розраховувати співвідношення між довжиною сторони ящика та діаметром основи пляшки, щоб вона точно дотикалася до трьох сторін ящика, не хилиталася і ні в якому разі не розбилася.
- Проходячи крізь скляну, злегка зафарбовану пластинку, промінь світла втрачає 23% своєї інтенсивності. Визначте мінімальне число пластинок, крізь які повинен пройти промінь, щоб його інтенсивність на виході стала меншою або дорівнювала чверті інтенсивності на вході. Розглянути прикладну задачу можна запропонувати учням під час ознайомлення із одним найпоширеніших способів розв'язування показникових нерівностей – логарифмування обох їх частин.
- Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено в годинах) складають $r_1(t)=te^{-t}$ і $r_2(t)=t^{-2}e^{-t}$. У якого з видів ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше? Дана задача, складена на підставі необхідної і достатньої умов існування екстремумів функції, може бути застосована для повторення або закріплення знань і формування вмінь використовувати ці теореми в нових умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі. До того ж ця задача є прикладом одного з видів задач про знаходження найбільшого значення функцій.

З великою зацікавленістю учні не тільки розв'язують евристичні задачі, але й самостійно створюють відповідні завдання. Звичайно, не кожен учень здатний створити досить цікаву задачу, але практика свідчить, що така робота дуже корисна та цікава для кожного учня, і в той же час приводить до значних успіхів у зростанні інтелекту та сприяє розвитку креативності кожного з них. Всі складені учнями задачі повинні обов'язково оцінюватися вчителем та учнями з точки зору правильності ідеї, цікавості, доступності, посильності, евристичності та естетичності. Найвище задоволення вчитель відчуває, якщо учні самі пробують не тільки створити задачу, аналогічну до розв'язаної, але й узагальнити її, висловити та обґрунтувати гіпотезу, запропонувати якусь нову задачу. (Хоч задача може бути добре відома в математиці, але учні раніше з нею не зустрічалися). Цілеспрямована постановка задачі учнями відповідає високому рівню їх креативності.

Висновки. Наші дослідження показали, що розвиток семантичної гнучкості учнів на уроках математики підсилює їх внутрішню мотивацію за рахунок новизни, нетрадиційності подання навчального матеріалу, можливості самостійного розв'язування запропонованих завдань і їх творчого переосмислення в умовах, що постійно змінюються. Головною метою загальноосвітньої школи повинно стати створення середовища для спільного використання знань і формування власної думки учнів. У сучасній школі необхідний вихід за межі розуміння навчання як процесу передачі готових знань і інформації. Пріоритетну позицію повинні займати інтерактивні форми навчання, семінари, конференції, дебати, що відіграють виняткову роль у вихованні творчо мислячих людей.

Література:

1. Вейль Г. Математическое мышление / Герман Вейль. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 400 с.
2. Дункер К. Структура и динамика процессов решения задач / Карл Дункер // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухова. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – С. 256–268.
3. Матюшкин А. М. Одаренные и талантливые дети / А. М. Матюшкин, Д. А. Сиск // Вопросы психологии. – 1982. – №4. – С. 88–97.
4. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія освіти / С. А. Раков // Математика в школі, 2005. – № 5. – С. 10-13.
5. Трик Х. Е. Основные направления экспериментального изучения творчества / Х. Е. Трик // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухова. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – С. 357-362.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ СТРУКТУРИЗАЦІЇ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ У ВІДПОВІДНОСТІ ДО ВИМОГ ФАХОВИХ НАПРЯМІВ

О. В. Бугрим, М. І. Горбатов, О. С. Іванов
Україна, м. Дніпропетровськ, Національний гірничий університет
bugrim@yahoo.com

Перебудова вищої школи, яка спрямована на значне підвищення якості підготовки спеціалістів, вимагає вдосконалення традиційних та розробки нових, більш ефективних методів навчання, органічного поєднання їх у всіх формах занять студентів. Особливе значення при цьому надається раціональному вибору послідовності викладання розділів курсу вищої математики, установленню міжпредметних зв'язків відносно різних спеціальностей, пошуку методів активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів.

Методи активізації – це сукупність засобів і прийомів психолого-педагогічного впливу на студентів, що, у першу чергу, спрямовані на розвиток у них творчого самостійного мислення, активізацію пізнавальної діяльності, формування творчих навичок і вмінь нестандартного розв'язання певних професійних проблем, удосконалення навичок професійного спілкування.

Робота викладача повинна бути спрямована на покращання змісту професійної діяльності майбутніх інженерів. Впровадження рейтингової системи оцінки знань студентів передбачає постійний поетапний контроль знань впродовж семестру й усього періоду навчання. Такий контроль активізує процес навчання, спонукає студентів до більш системної роботи.

Наведемо основні методи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів при викладанні вищої математики.

<u>Лекції</u>: висвітлення проблемних питань, свідоме конспектування, відслідкування зв'язку між темою лекції та іншими спеціальними дисциплінами, участь студентів у висвітленні окремих питань, складання опорних конспектів.

<u>Практичні заняття</u>: складання довідників у процесі засвоєння курсу, розв'язання ситуаційних задач, аналіз конкретних ситуацій.

<u>Самостійна робота</u>: використання індивідуальних завдань прикладного характеру з міжпредметними зв'язками, заохочення до участі в предметних олімпіадах та конкурсах.

<u>Модульний контроль</u>: використання завдань пошукового та творчого характеру, заохочення нетривіального підходу до вирішення завдань,

висвітлення власного ставлення до проблеми.

Однією із причин низької ефективності сучасної системи освіти є відсутність професійно-пізнавального інтересу та низька вмотивованість навчання. Подолати цю проблему може компетентнісний підхід, який акцентує увагу на результатах освіти як здатності людини вирішувати проблеми професійної діяльності, поєднувати пізнавальні та практичні вміння.

Впроваджена модульно-рейтингова система навчання із часом зазнала деяке корегування на наявні умови. Прикладом такого корегування є те, що ми не тільки проводимо заплановані письмові модульні роботи, але й поширюємо цей блок усною співбесідою. Більшість студентів не можуть пояснити, як вони виконали письмові роботи, підвести під них теоретичну базу. Це, у першу чергу, обумовлено тим, що в школі учні часто вирішують задачі й приклади методом «порівняння з подібним, не зіставляючи теорію й практику. Друга причина – це недостатня кількість часу для отримання практичних навичок та відповідне закріплення розв'язанням задач прикладного характеру.

Досвід викладання математики показує, що найбільший інтерес у студентів викликають завдання, зміст яких пов'язаний зі специфікою їхньої спеціальності. Прикладні задачі відіграють суттєву роль у підготовці інженерів, вони оживляють навчальний процес, викликають зацікавленість у поглибленому вивченні математики. Одним із таких прикладних розділів курсу математики є диференціальні рівняння. Для того щоб студенти зрозуміли необхідність вивчення методів розв'язання диференціальних рівнянь, тема починається з постановки задачі, по можливості, пов'язаної з їхньою майбутньою спеціальністю. Але знайти таку задачу часто буває складно й тоді пропонується задача з курсу фізики, наприклад, задача про малі коливання математичного маятника. На жаль, ми не можемо приділити достатньо часу цьому питанню на лекціях та практичних заняттях, бо ще треба навчити студентів інтегрувати різні типи диференціальних рівнянь. Для вирішення цієї проблеми на кафедрі видано методичний посібник по прикладним задачам. Мета посібника – допомогти студентам у більш глибокому самостійному вивченні курсу диференціальних рівнянь, показати широкий спектр практичних питань, пов'язаних із цією темою, познайомити студентів з основами математичного моделювання. Для підвищення мотивації до вивчення розділу на кафедрі розроблені індивідуальні завдання, зміст яких пов'язаний із курсом теоретичної механіки, який є одним з основних для студентів інженерних спеціальностей. Для ефективності процесу проведено корегування в часі викладання диференціальних рівнянь та теоретичної механіки. Наведемо зміст одного з таких завдань.

Прямолінійний рух матеріальної точки. Матеріальна точка M маси m=1 кг рухається по горизонтальній площині. Враховуючи, що величина рівнодіючої всіх активних сил, прикладених до точки, дорівнює $F(t,x,\dot{x})$ в результаті інтегрування диференціального рівняння руху (другий закон Ньютона) $m\ddot{x} = F(t,x,\dot{x})$. Визначити

1. Закон руху точки M.
2. Час руху від початкового пункту до точки A.
3. Швидкість в точці A.

Якщо рух точки M такий, що вона не досягає точки A, то визначити:

1. Закон руху точки M.
2. Найбільше відхилення від точки O в напрямку точки A.
3. Час руху від початкового пункту до положення найбільшого відхилення від точки O в напрямку точки A.

Кожному студенту пропонується конкретна функція $F(t,x,\dot{x})$ та відповідні початкові умови.

Для вивчення математичних можливостей студентів першого курсу дуже важливою є правильна оцінка їхньої шкільної математичної підготовки. Для цього проводились так звані нульові контрольні роботи та маленькі самостійні з елементарної математики, які потім ретельно аналізувались й обговорювались в групах. З огляду на дуже незадовільний стан довузівської підготовки першокурсників, безперервно перероблялись й удосконалювались тексти таких робіт, щоб з їхнім використанням якомога швидше надолужити прогаяне. У процесі занять з вищої математики студентам неодмінно і постійно ставились запитання і з математики елементарної. Оскільки математика є предметом, у якому початкові й подальші розділи надзвичайно пов'язані між собою, то студентам пропонувались вправи, де такий зв'язок проявлявся особливо яскраво, де в одній вправі доводилось згадувати кілька формул, скажімо, з різних класів їхнього шкільного й студентського життя. Досвід показує, що наші студенти потребують термінової допомоги в найпростішому. Наприклад, майже всі вони знають, що дріб не зміниться, якщо чисельник і знаменник помножити на одне й те саме число, але жоден не знає, що при додаванні до чисельника й знаменника одного й того ж додатного числа дріб збільшується, якщо він правильний і зменшується, якщо він неправильний, практично жоден не в змозі порівняти за величиною $\sqrt{13}+\sqrt{5}$ і $\sqrt{15}+\sqrt{3}$. При розробці шляхів адаптації курсу математики до пізнавальних можливостей студентів ще враховувався і той факт, що багато корисних положень елементарної математики у свій час були непродумано вилучені із шкільного курсу (знамените правило про знак квадратного тричлена, детальний розгляд комплексних чисел, теорема

Безу з наслідками, біном Ньютона тощо). Викладачі у своїх дослідженнях змушені приділяти багато уваги неперервності курсу математики взагалі, розробляти методи впровадження розуміння цієї неперервності у свідомість студентів, доносити до них практичну користь математики, адаптувати викладання до їхніх можливостей сприйняття, пожвавлювати сам процес.

Наприклад, студентам нагадувалось, що однією з причин виникнення інтегрального числення стала необхідність знаходження об'ємів винних бочок, у плані підкреслення зв'язку між вищими й нижчими рівнями математики акцентувалась увага студентів на тому, що інтеграл, скажемо, $\int (\sqrt{x}-5)^3 dx$ не взяти без знання формули

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 ,$$

а для взяття інтеграла $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

слід згадати, що

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

як для взяття інтеграла

$$\int (\arcsin 5x + \arccos 5x)^6 dx$$

необхідно знати, що

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Тому були розроблені спеціальні «допоміжні» картки для кількахвилинних самостійних робіт або усних їхніх обговорень у порядку розминки.

Приклад такої карточки:

1. Обчислити $256^{-\frac{3}{4}} + 125^{-\frac{2}{3}} + 997^2 - 3^2$.
2. Знаючи, що $\lg 2 = 0{,}3010$, $\lg 3 = 0{,}4771$, $\lg 5 = 0{,}6990$, обчислити $\lg 125 + \lg 18$.
3. Обчислити без таблиць $tg 22^\circ 30' + \sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$.

У світлі потреб спеціальних дисциплін після вивчення ступеня наповнення математикою були розроблені структуровані практичні модулі. Ознайомлення з наявними на спеціальних кафедрах матеріалами спонукало до корективів у процесі викладання з урахуванням дуже відчутного браку часу, виділеного на аудиторні заняття. Так, скажімо, за рахунок деякого скорочення розгляду матриць підсилено вивчення систем рівнянь, викладання аналітичної геометрії рекомендовано здійснювати дещо компактніше: багато понять, рівнянь і формул у геометрії на площині й у просторі дуже схожі, тому студентів слід навчити вмінню «розширювати» формули планіметрії, наприклад, на стереометрію або «звужувати» формули стереометрії на планіметрію. Для цього часто буває достатньо просто додавати або знімати частину із третьою координатою z. Розумові напруги й зусилля студентів у запам'ятовуванні треба теж використовувати економно й раціонально з огляду на багато інших потреб і великий обсяг матеріалу, на неготовність студентів до самостійності мислення. Зекономлений час рекомендується використати для ознайомлення студентів із деякими специфічними кривими та поверхнями, а також із найуживанішими поняттями сферичної тригонометрії. Структурування практичних модулів відповідно до потреб спеціальних дисциплін спонукає до ширшого розгляду текстових задач, наближених до гірничої, геологорозвідувальної або іншої тематики. Велика увага в процесі досліджень приділялась вивченню шляхів підвищення ефективності використання до практичних потреб диференціальних рівнянь одного з «найінженерніших» розділів вищої математики. Тут є багато яскравих технічних задач, які дуже переконливо демонструють величезну користь вищої математики, зацікавлюють навіть слабо підготовлених студентів. Адаптація можливостей студентів до наявних дуже серйозних вимог при вивченні й практичному застосуванні вищої математики спонукає також до маневрування її розділами, тобто в рамках можливого коригувати черговість цих розділів з огляду на різні факультети й спеціальності. Ті ж диференціальні рівняння, наприклад, доречно розглядати відразу ж після розгляду інтегрального числення функцій однієї змінної. Числові ряди рекомендовано розглянути стисліше, щоб зекономлений час використати для практичних застосувань рядів функціональних. Це продиктовано начальною необхідністю: часто функції, які описують технічні процеси, бувають дуже «незручними» для інтегрування, їх доводиться розкладати в ряд, щоб потім його проінтегрувати й одержати результат, хоча б наближено; також і диференціальні рівняння, які описують технічні процеси, можуть бути «не підйомними» для точного їх розв'язання, їх можна розв'язати із застосуванням рядів наближено, з певною точністю. Узгодження й взаємоадаптація цих проблем – важлива складова проведених досліджень, особливо якщо врахувати ще й специфіку самої математики, тісний взаємозв'язок її розділів, коли про якесь одне поняття нічого не можна сказати без ґрунтовного посилання на інше, і все це в умовах гострого дефіциту часу. Враховано появу й рекомендовано до використання підручників і збірників задач уже третього тисячоліття. Це, наприклад, підручник «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» під редакцією Ю. К. Руданського, збірник з математичного аналізу «Вища математика у прикладах і задачах», автори О. І. Соколенко, Г. А. Новик тощо. Продумано й розроблено методику спільного застосування їх з підручниками й задачниками, які пройшли перевірку десятиліттями. В умовах впровадження методів Болонського процесу розроблені рекомендації студентам до самостійного вивчення деяких розділів вищої математики. Новітні потреби спричинили модифікацію контрольних засобів оцінки теоретичних знань та практичних навичок студентів, адаптацію учбових планів, робочих програм, методичних посібників. Були переглянуті тексти відповідних контрольних і самостійних робіт модульних та індивідуальних завдань. Наявну зараз тенденцію до виключно тестового характеру завдань ми вважаємо не зовсім правильною, тому при переробці існуючих і створенні нових текстів таких завдань ми поєднували в розумних пропорціях класичні й тестові підходи.

Для подолання труднощів, які виникають у навчальному процесі, розробляються різні методики формування пізнавальної діяльності:

- метод емоціонального стимулювання навчання;
- метод пізнавальних ігор;
- метод створення ситуації пізнавального спору;
- метод створення ситуації успіху в навчанні.

Метою подальшої роботи є створення методичного забезпечення та впровадження в навчальний процес існуючих технологій навчання та розробка нових.

Література

1. Застосування диференціальних рівнянь до розв’язання задач: методичні вказівки для студентів напряму «Комп’ютерні науки» / Т. С. Кагадій, Л. В. Карманова, О. Ф. Кібкало, В. П. Орел – Дніпропетровськ : НГУ, 2005. – 60 с.

2. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. – Львів : Бескид Біт, 2002. – 262 с.

3. Вища математика : збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2003. – 480 с.

4. Власенко К. В. Вища математика для майбутніх інженерів : навчальний посібник для студентів технічних ВНЗ / К. В. Власенко ; за ред. проф. О. І. Скафи. – Донецьк : Ноулідж, 2010. – 429 с.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ФУНДАМЕНТАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА У ВИЩІЙ ТЕХНІЧНІЙ ШКОЛІ

К. В. Власенко[α], О. О. Чумак[β]
Україна, м. Краматорськ, Донбаська державна машинобудівна академія
[α] vlasenkokv@ukr.net
[β] chumaklena@mail.ru

Актуальність. Сучасні соціально-економічні умови, зростаючі темпи розвитку науки та техніки потребують високої компетентності від випускників вищих технічних навчальних закладів (ВТНЗ). Тому особливої актуальності набуває модернізація системи вищої технічної освіти, що спрямована на розвиток високого професіоналізму фахівця, його мобільності, здатності самостійно приймати рішення. За таких умов посилюється роль математичних дисциплін як джерела системних фундаментальних знань.

Особливе значення в рамках даної роботи мають педагогічні дослідження із проблем фундаменталізації математичних дисциплін Т. В. Крилової [1], С. О. Семерікова [4], М. В. Працьовитого [3], Н. В. Рашевської [4], К. І. Словак [7] та інших.

Метою нашої розвідки є обґрунтування необхідності реалізації принципів фундаменталізації та професійної спрямованості в ході навчання курсу теорії ймовірностей і випадкових процесів (ТЙ і ВП) у вищих технічних навчальних закладах.

Виклад основного матеріалу. Курс ТЙ і ВП, що викладається у ВТНЗ, дуже віддалений від практичних застосувань і, як наслідок, сприймається студентами як дисципліна, що ніяк не пов’язана з їхньою майбутньою професійною діяльністю. Це призводить до байдужого, а підчас, і негативного ставлення до процесу навчання, та як наслідок, до низького рівня якості знань студентів. Одним із шляхів розв’язання даної проблеми ми розглядаємо впровадження принципів фундаменталізації у навчання теорії ймовірності і випадкових процесів.

Як зазначено у В. В. Лаптєва [2], «фундаментальні знання – це найбільш стабільні та універсальні загально-теоретичні знання, зміст яких відзначається максимальною узагальненістю, структурованістю, розкриває та визначає розмаїття внутрішніх та зовнішніх зв’язків даних». За С. О. Семеріковим [5], «фундаментальні знання, будучи інструментом досягнення наукових компетентностей, орієнтовані на пізнання глибинних, сутнісних зв’язків між різноманітними процесами».

Це означає, що формування фундаментальних знань у майбутніх інженерів під час навчання математичним дисциплінам сприяє виконанню основних вимог до їхньої підготовки, серед яких здатність до навчання протягом життя та роботи у швидкозмінному середовищі; сформованість навичок розв'язування прикладних задач з інженерної практики; наявність таких якостей особистості, як самостійність і оперативність у прийнятті рішень, здатність планувати свої дії, гнучкість мислення, наполегливість у розв'язанні завдань, прагнення до пошуку оптимальних рішень тощо.

Проаналізуємо шляхи реалізації вищезазначених вимог.

У своїй роботі М. В. Працьовитий [3] вказує, що «якість фундаментальної математичної підготовки студентів забезпечується сучасним змістовним наповненням, належною організацією навчально-виховного процесу, належними психолого-педагогічними передумовами навчального процесу, включаючи мотиваційні, потужним професорсько-викладацьким складом, відповідною матеріально-технічною базою і сучасними засобами навчання, залученням студентів до посильної наукової діяльності».

За думкою Н. В. Рашевської [4], «перспективним напрямом реалізації поставлених завдань є зміна методики навчання математичних дисциплін студентів технічних ВНЗ через впровадження нових засобів інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) навчання та інтеграцію різних форм навчання (зокрема, аудиторної та позааудиторної) на основі посилення ролі самостійної роботи».

В роботі С. О. Семерікова [5] зазначається, що «досягнення цілей фундаменталізації освіти можливе через організовану цілеспрямовану педагогічну діяльність учасників освітнього процесу, що забезпечує реалізацію методологічної, професійно-орієнтувальної, розвивальної, прогностичної та інтегративної функцій фундаменталізації освіти:

– насичення змісту вищої освіти системними теоретичними знаннями, фундаментальними теоріями, концепціями, ідеями (опанування методологічно важливими та інваріантними знаннями з довготривалим терміном життя, необхідними для професійної діяльності фахівця);

– домінування дослідницьких методів навчання, творчої діяльності, інтеграції ідей і методів науки, навчання й наукової творчості;

– саморозвиток студента як суб'єкта мобільної освітньої, професійної й науково-дослідної діяльності (розвиток творчої і пізнавальної активності та самостійності студентів)».

Проаналізуємо курс ТЙ і ВП з огляду на можливість його фундаменталізації.

У Донбаській державній машинобудівній академії (ДДМА) програма курсу «Теорії ймовірностей і випадкових процесів» складена в обсязі, необхідному для вивчення загальнонаукових, загальноінженерних та спеціальних дисциплін, а також для розвитку знань, умінь і навичок, необхідних для застосування ймовірнісних методів у діяльності інженера. Адже, усі процеси, що відбуваються у природі чи людському суспільстві, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того, щоб вивчити ці процеси і надалі керувати ними, необхідно з'ясувати, яку роль у досліджуваному процесі відіграє кожний фактор окремо.

Курс ТЙ і ВП складається з двох модулів: «Теорія ймовірностей та математична статистика» і «Теорія випадкових функцій» та вивчається один триместр.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових подій. Теорія випадкових процесів розглядає закономірності випадкових подій у їхній динаміці, вивчає процеси, розвиток яких наперед точно неможливо передбачити. Така невизначеність (непередбачуваність) зумовлена дією випадкових факторів на розвиток процесу.

Проаналізуємо дану дисципліну з точки зору її насиченості на прикладі робочої навчальної програми ДДМА дисципліни ТЙ і ВП для напрямів підготовки: 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.030502 «Економічна кібернетика». Програмою передбачено 144 години навчального часу, з яких 108 годин відводиться на самостійну роботу.

Модуль 1 містить наступні теми: алгебра подій та основні теореми теорії ймовірностей, випадкові величини, системи двох випадкових величин, елементи математичної статистики, статистичні оцінки, методи розрахунку об'єднаних характеристик вибірки, елементи кореляційного аналізу.

Модуль 2 складається з тем: головні поняття теорії випадкових процесів, числові характеристики, функції з випадковими параметрами, ланцюги Маркова, процеси з дискретним часом, процеси з неперервним часом, математичні основи теорії резервування, аналіз системи з двома резервними приладами.

Отже, програма курсу ТЙ і ВП має насичений зміст і передбачає засвоєння майбутніми інженерами достатньо великого за обсягом навчального матеріалу за відносно короткий термін, унаслідок чого, відбувається зниження студентської зацікавленості до навчання дисципліні.

Але формування знань, умінь і навичок студентів з курсу ТЙ і ВП є необхідною умовою для засвоєння цілого ряду спеціальних навчальних дисциплін:

1. Математичне моделювання верстатів і інструментів.
2. Тріботехніка і основи надійності.

3. Математичні основи інженерних комп’ютерних розрахунків.

4. Основи САПР.

5. Статистичне моделювання та оптимізація.

6. Математичне моделювання економічних процесів та систем.

Крім того, методи ТЙ і ВП широко застосовуються в різних технічних галузях:

- теорії надійності;
- теорії масового обслуговування;
- теоретичній фізиці;
- теорії автоматизованого управління;
- загальній теорії зв’язку тощо.

З огляду на вищевказане, у результаті вивчення курсу теорії ймовірностей і випадкових процесів студенти повинні отримати вміння:

- ✓ розв’язування ймовірнісних завдань із доведенням результату до практично прийнятного (формули, числа, графіка, якісного висновку тощо) та розвитком на основі цього логічного й алгоритмічного мислення;
- ✓ математичного моделювання і дослідження прикладних завдань (переклад реальної практичної задачі математичною мовою, вибір оптимального методу її розв’язування і дослідження, інтерпретація й оцінка отриманих результатів тощо) та формуванням на основі цього необхідної інтуїції в питаннях застосування;
- ✓ самостійного використання математичного апарату під час розв’язування завдань дисциплін, що пов’язані зі спеціальністю студента;
- ✓ оптимального вибору і застосування необхідних обчислювальних методів і засобів.

Подолання вищезазначених недоліків та формування вмінь застосування отриманих знань, умінь і навичок з ТЙ і ВП майбутніми інженерами у ході навчання загальноінженерним і спеціальним дисциплінам, на нашу думку, успішно можна проводити за допомогою реалізації вищезапропонованих шляхів фундаменталізації досліджуваного курсу.

Цей процес ми вбачаємо у наступному:

– доповнення загальнонаукових принципів навчання принципами професійно орієнтованого навчання. Цей принцип передбачає підбір такого навчального матеріалу, що буде орієнтований на наступне його застосування в загальноінженерних і спеціальних дисциплінах.

– доповнення цілей навчання метою формування математичної компетентності студентів у сфері ТВ і ВП. Це означає формування його компетенцій – таких якостей, що забезпечують здатність особистості застосовувати отримані знання із вказаної дисципліни в професійній діяльності. Очевидно, що компетентісний підхід підвищує якість освіти;

– доповнення традиційних методів навчання евристичними. Евристичне навчання виступає одним із основних методів, який уможливлює прояв студентами творчої активності в ході навчання. Формування прийомів і способів евристичної діяльності в майбутніх інженерів сприяє розвитку їхнього творчого мислення, прийомів активної пізнавальної діяльності, мотивів самого навчання та мотивації отриманих в його процесі досягнень [6];

– застосування крім традиційних форм організації навчання ТВ і ВП (лекцій, семінарів, практичних занять) інноваційних форм, зокрема проблемних лекцій, евристичних лекцій, слайд-лекцій, створення проблемних ситуацій на практичних заняттях, моделювання виробничих ситуацій тощо;

– доповнення змісту навчання системою професійно орієнтованих завдань, з метою навчання студентів математичному моделюванню. Використання таких завдань сприяє розвитку вмінь складання й аналізу ймовірнісних моделей практичних фахових завдань. Цей підхід уможливить усвідомлення студентами, що ТВ і ВП не тільки навчальна дисципліна, а і потужний інструмент для розв'язання сучасних інженерних завдань;

– використання не тільки традиційних засобів навчання: підручників, посібників, навчальних програм, а й сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). ІКТ доцільно застосовувати для графічного представлення ймовірнісного матеріалу та формування фундаментальних понять ТВ і ВП.

Отже, не викликає сумнівів, що реалізація принципів фундаменталізації та професійної спрямованості в ході навчання курсу теорії ймовірностей і випадкових процесів у вищих технічних навчальних закладах сприятиме підвищенню якості підготовки майбутніх фахівців, розвитку їхньої компетентності та професіоналізму.

Література

1. Крилова Т. В. Концепція фундаменталізації математичної освіти студентів технічних університетів / Т. В. Крилова // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» / Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова. – К., 2011. – С. 160–161.

2. Лаптев В. В. Методическая теория обучения информатике. Аспекты фундаментальной подготовки / Лаптев В. В., Рыжова Н. И., Швецкий М. В. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. – 352 с.

3. Працьовитий М. В. Якість фундаментальної математичної підго-

товки майбутнього вчителя математики в умовах педагогічного університету / М. В. Працьовитий // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» / Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова. – К., 2011. – С. 80–81.

4. Рашевська Н. В. Сучасні інформаційно-комунікаційні технології навчання вищої математики у технічному ВНЗ / Н. В. Рашевська // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія : Педагогіка. – 2011. – № 1. – С. 148–154.

5. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : монографія / С. О. Семеріков ; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Мінерал ; К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. – 340 с.

6. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология : монография / Е. И. Скафа. – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

7. Словак К. І. Активізація пізнавальної діяльності студентів економічних ВНЗ у процесі навчання вищої математики / К.І. Словак // Материалы международной научно-методической конференции «Проблемы математического образования» (ПМО – 2010) Черкассы, 24-26 ноября 2010 г. – Черкассы : Изд.отд. ЧНУ им. Б. Хмельницкого, 2010. – С. 370–371.

РОЗВИТОК ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

С. І. Ганжела
Україна, м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
s_ganzhela@ukr.net

Основним завданням розвитку інформаційного суспільства в Україні є сприяння кожній людині на засадах широкого використання сучасних ІКТ можливостей створювати інформацію і знання, користуватися та обмінюватися ними, повною мірою реалізовуючи свій потенціал [7]. Тому розвиток дослідницьких умінь учнів на уроках математики із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій відкриває широкі можливості перед вчителями і учнями для розв'язання цих завдань.

Розвиток дослідницьких умінь учнів на уроках математики передбачає побудову навчально-виховного процесу таким чином, щоб учень виступав у ролі першовідкривача, дослідника, який може творчо підійти до розв'язування задач. Багатьом учням простіше діяти як математику, відкривати самому істину, ніж заучувати готову систему тверджень і доведень без розуміння їх походження, значення і взаємних зв'язків. Основу творчого мислення спеціаліста складають його творчі здібності – якості особистості, що дає йому змогу виконувати певного виду діяльність: далекоглядність при пошуку проблем, гнучкість інтелекту, можливість перенесення досвіду, пошуку аналогій, зближення понять, оперативність механізмів пам'яті, легкість генерації ідеї і т. д. Знання творчого рівня досягаються через оволодіння евристичними й дослідницькими методами, що сприяє самостійній творчій діяльності.

Пріоритетом розвитку освіти є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, що забезпечують подальше удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві. Одним із пріоритетних напрямків досягнення цієї мети є забезпечення поступової інформатизації системи освіти, спрямованої на задоволення освітніх інформаційних і комунікаційних потреб учасників навчально-виховного процесу [9].

Сучасні інформаційно-комунікаційні технології навчання готують учнів до повноцінного життя в умовах інформаційного суспільства. Вони сприяють розкриттю, формуванню, збереженню і розвитку пізнавальних здібностей, повинні дати кожному учневі певні шанси й засоби, щоб із самого початку навчання він набув такого досвіду, коли головним стає не те, що він лише знає, а те, що він уміє [2]. ІКТ позитивно впливають на розв'язання складних та актуальних завдань навчального процесу, таких, як: розвиток творчого, інтелектуального потенціалу, самостійності та аналітичного мислення учнів.

Суттєвим внеском у розробку інформаційно-комунікаційних технологій навчання стали дослідження відомих науковців: М. І. Жалдака, В. І. Клочка, Ю. С. Рамського, Н. В. Морзе, Ю. В. Горошка, С. О. Семерікова, О. М. Гончарової, С. А. Ракова, Є. М. Смирнової-Трибульської, Ю. В. Триуса, З. С. Сейдаметової та ін.

Одним з основних напрямів розвитку освіти є впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у всі ланки освітньої системи, що забезпечить подальший вплив на ефективність процесу навчання, виховання і розвитку молоді, доступність і якість освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві, суспільстві знань, у тому числі, завдяки формуванню у них умінь самостійно навчатися, а також відхід від принципів енциклопедизму на користь розвитку критичного підходу до навчального матеріалу і навчання в цілому, формування креативного мислення і цілісного уявлення про навколишній світ [8]. Цього можна досягти, розвиваючи дослідницькі навички учнів, під час проведення уроку математики. Математика, як і будь-яка інша галузь людських знань, розвивалася від одиничних фактів, отриманих за допомогою спостереження або експерименту до певних узагальнень. Це зрозуміло, бо спочатку ми повинні відкривати теореми перш, ніж їх доводити, здогадуватися про ідеї доведення перш, ніж будувати це доведення, спочатку будувати графіки функцій за кількома точками на площині, а потім досліджувати властивості всіх функцій даного класу. Тому, якщо хочемо навчити не тільки готової математики, але і математичної діяльності, потрібно вчити не тільки «доводити», але і «здогадуватися», а процес навчання математики повинен в якійсь мірі імітувати процес математичної творчості. Тому пропонуємо спочатку застосовувати індуктивний метод навчання, при якому учні можуть висловити гіпотезу, а потім, використовувати дедуктивний метод навчання, при якому довести чи спростувати цю гіпотезу. Ці два методи, на наше глибоке переконання, можуть працювати як окремо так і разом. Використання тільки індуктивного методу навчання не зможе навчити учнів перетворенню сукупності тверджень, одержаних за допомогою експерименту або індукції, аналогії в систему тверджень, впорядкованих відношенням слідування, яка розширює вже вивчений фрагмент теорії.

Педагогічно виважене і доцільне використання в навчальному процесі сучасних інформаційно-комунікаційних технологій сприяє фундаменталізації знань, різносторонньому і ґрунтовному вивченню певної предметної галузі, формуванню знань, необхідних для обґрунтованого пояснення причинно-наслідкових зв'язків досліджуваних процесів і явищ, пізнанню законів реальної дійсності. Пояснити це можна тим, що з використанням ІКТ з учня знімається рутина проміжних дій, які можуть бути доведеними до автоматизму, але, тим не менше, на їх виконання потрібний певний час. За умови використовування ІКТ навчання дитина, образно кажучи, «бачить ліс, а не окремі дерева», що є великим кроком до узагальнення, а, отже, і фундаменталізації знань [6, 5].

Впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій створює умови для повного розкриття потенціалу учнів з урахуванням їхніх індивідуальних нахилів, здібностей, можливостей. В умовах особистісно-орієнтованого навчання математики застосування інформаційно-комунікаційних технологій є потужним і водночас зручним інструментом проведення математичного експерименту. Застосування цих технологій забезпечує появу нових якостей усвідомленості, розширює діапазон активності, розвиває творчі здібності кожного учня за рахунок нових, недосяжних раніше можливостей використання динамічних математичних моделей, здійснення швидких розрахунків, позбавлення рутинної роботи і направлення всіх сил на логічні умовиводи, дослідження, міркування, обмін думками, знаходження всіх можливих розв'язків, тобто перетворення учня із «об'єкта» навчання, коли він засвоює матеріал, переданий йому вчителем, на «суб'єкт» навчання, коли він виконує творчі завдання, вступає в діалог з іншими учнями і вчителем [3, 45].

Сучасні комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання спрямовані перш за все на цілісне сприйняття досліджуваних явищ, з'ясування їх сутності, зв'язків між окремими їх проявами, змістової сторони отримуваних формальних розв'язків, розвиток синтетичного, образного мислення поряд із логічним, аналітичним, абстрагування від технічних деталей аналізу моделей досліджуваних явищ, постановку проблем, висування гіпотез, побудову інформаційних, зокрема математичних, моделей досліджуваних процесів і явищ, матеріальну інтерпретацію отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Слід підкреслити, що при використанні ІКТ в навчальному процесі мова не повинна йти лише про вивчення певного навчального матеріалу, а перш за все про всебічній і гармонійний розвиток особистості учнів, їх творчих здібностей. При цьому проблеми інформатизації навчального процесу – складні і перш за все педагогічні проблеми [6, 7].

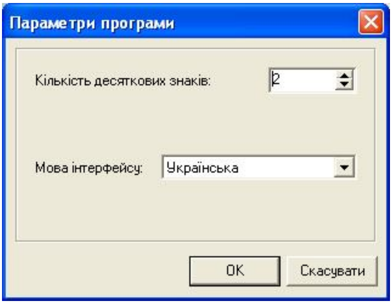
Найбільш придатними для підтримки навчання математики в середніх навчальних закладах видаються комплект програм *GRAN* (*Gran1*, *Gran-2D*, *Gran-3D*) і *Derive*. Названі програмні засоби прості у використанні, оснащені досить зручним і «люб'язним» інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів і ін.), контекстно-чутливою допомогою. Від користувача не вимагається значний обсяг спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів [5, 4].

Використовуючи сучасні інформаційні технології, процес навчання спрямовують не на засвоєння готових фактів, а на відкриття, синтез нових знань. Для досягнення мети вчитель організовує і залучає учнів до самостійного пошукового процесу, що привчає школярів до творчості, розвиває вміння та навички дослідницької діяльності. Головна дидактична задача – підтримка закономірних процесів розвитку особистості дитини, притаманних її віку. Найбільш придатними є пошукові методи навчання та ті, які спираються на самостійну пізнавальну діяльність. Серед них можна назвати метод самостійних учнівських досліджень, суть яких – в організації дослідницької діяльності [4, 51].

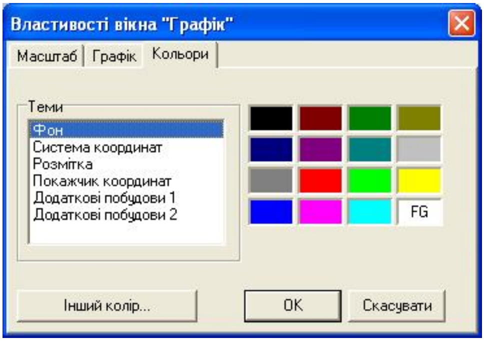
Як приклад розглянемо проведення уроку в 9 класі з теми «Системи рівнянь другого степеня». На вивчення даної теми відводиться три години. На першому уроці вчитель пояснює новий матеріал і показує учням приклади розв'язування задач, як традиційними методами так і за допомогою комп'ютера. Для учнів застосування інформаційно-комунікаційних технологій не новина, вони вже використовували їх у 7-му і 8-му класі. Другий і третій урок пропонуємо провести у комп'ютерному класі, де разом із традиційними методами використати ППЗ *Gran1*, за допомогою якого пропонується розв'язати №520 (б, г); №521 (б); №524 (в); №533 (в, г); №534 (а, б) за підручником [1].

Для розв'язування цих завдань учням спочатку необхідно встановити деякі параметри, обравши послугу *Виправлення–Налагодження параметрів програми*. У вікні *Параметри програми*, що з'явиться, здійснюється вибір мови, якою будуть відображатися всі повідомлення в програмі, а також точність обчислень, які виконуються за програмою – кількість десяткових знаків в числах, що змінюється від 0 до 6. Для виконання даних завдань можна встановити кількість десяткових знаків в числах – 2 (рис. 1 *а*).

Також можна викликати допоміжне вікно *Властивості вікна «Графік»*. Для цього потрібно скористатися послугою меню *Графік – Параметри вікна «Графік»*, і встановити масштаб, використовуючи вкладинку *Кольори*, змінити колір фону на білий. Обраний колір позначається літерами *FG* (рис. 1 *б*).



а)



б)

Рис. 1

Перш ніж здійснити побудову, вчитель пропонує учням спрогнозувати, який графік функції отримають вони після побудови, а потім з'ясувати чи здійсниться прогноз. При цьому вчитель може продемонструвати правильну побудову тільки після того як учні вже здійснили власну побудову. Таку роботу можна назвати індивідуально-фронтальною, тому що після отримання власного зображення, при необхідності, учні можуть записувати на дошці тип залежності (*явна*, *неявна* можливо й інші) і відповідну формулу. Тепер кожен учень може не тільки проконтролювати правильність власних побудов, а й висунути свій розв'язок на обговорення.

Наведемо можливі інструкції, за допомогою яких учні можуть отримати розв'язки даних вправ. Ці інструкції можна роздати найслабшим учням, а також тим хто був відсутнім на попередніх уроках. Хоча давати інструкції чи ні повинен вирішувати вчитель у кожному конкретному випадку.

№ 520. Побудуйте графік рівнянь:

б) $xy=12$;

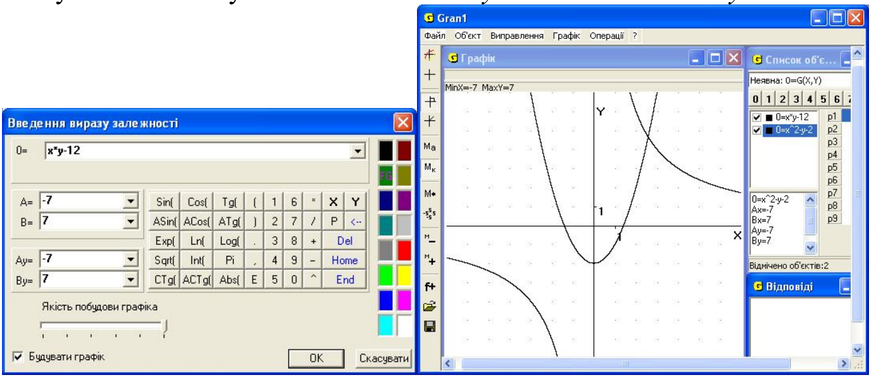
г) $x^2-y=2$.

Для побудови графіків рівнянь за допомогою ППЗ *GRAN1* можна скористатися функцією заданою як явно, так і неявно. Наприклад, для виконання завдання з № 520 можна скористатися інструкцією 1.

Інструкція 1

1. У списку *Тип залежності* вікна *Список об'єктів* потрібно вибрати *Неявна: 0=G(X,Y)*.
2. Скористатися послугою меню *Об'єкт–Створити* і у вікні *Введення виразу залежності*, що з'явиться, набрати по черзі формули, якими задаються графіки рівнянь 0=*x*y-12* (рис. 2 *а*) і 0=*x^2-y*-2.
3. Скористатися послугою меню *Графік–Побудувати* (рис. 2 *б*).

4. Щоб не захаращувати малюнок для виконання наступних завдань, «приховати» графіки щойно побудованих рівнянь, для цього за допомогою мишки слід зняти прапорець біля пункту *Будувати графік* у контекстному меню об’єкта 0= *x*y-12* і об’єкта 0=*x^2-y*-2.



а) *б*)

Рис. 2

№ 521. Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

б) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0. \end{cases}$

№ 524. Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

Для виконання завдання з № 521 можна скористатися інструкцією 2.

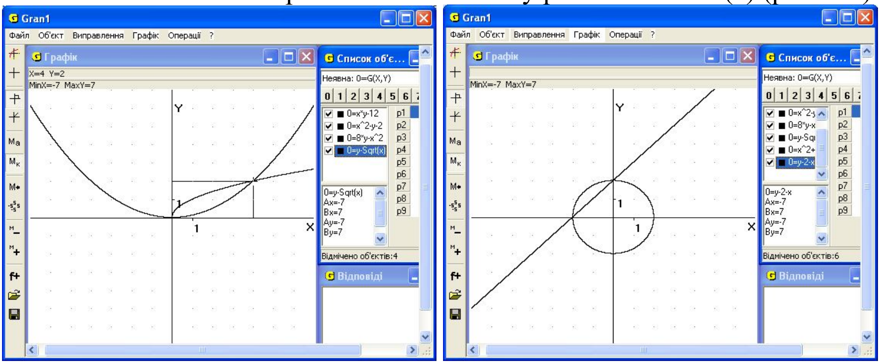
Інструкція 2

1. У списку *Тип залежності* вікна *Список об’єктів* потрібно вибрати *Неявна: 0=G(X,Y)*.
2. Скористатися послугою меню *Об’єкт–Створити* і у вікні *Введення виразу залежності*, що з’явиться, набрати по черзі формули, якими задаються графіки рівнянь *0=8*y-x^2* і *0=y-Sqrt(x)*.
3. Скористатися послугою меню *Графік–Побудувати*.
4. Побудувавши графіки залежностей *0=8*y-x^2* і *0=y-Sqrt(x)*, слід підвести вказівник «мишки» до точки перетину цих графіків рівнянь у вікні «Графік» і в лівому верхньому куті цього вікна прочитати координати x і y цієї точки. Отримаємо дві точки з координатами $x\approx0$, $y\approx0$ і $x\approx4$, $y\approx2$ (рис. 3 *а*). Графічним способом, зазвичай, знаходять наближені розв’язки. Але підставивши значення $x_1\approx0$ і $y_1\approx0$; $x_2\approx4$ і $y_2\approx2$ в дану систему рівнянь, переконуємося, що (*0*; *0*) і

(*4*; *2*) – точні розв'язки даної системи.

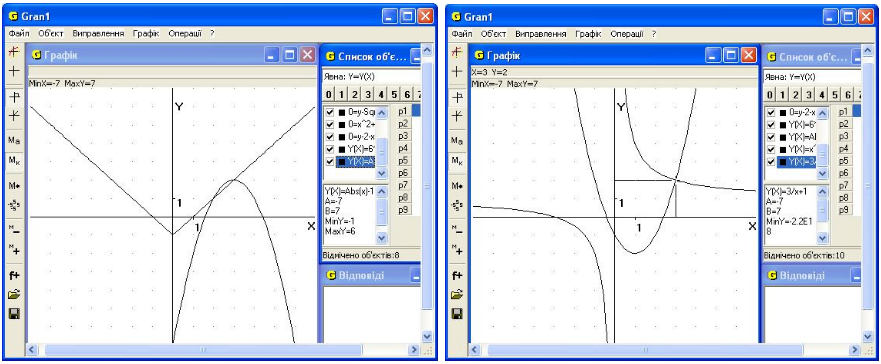
5. Щоб не захаращувати малюнок для виконання наступних завдань, «приховати» графіки щойно побудованих рівнянь, для цього за допомогою мишки слід зняти прапорець біля пункту *Будувати графік* у контекстному меню об'єкта *0=8*y-x^2* і об'єкта *0=y-Sqrt(x)*.

Аналогічно можна розв'язати й систему рівнянь № 524 (в) (рис. 3 *б*).



а) *б*)

Рис. 3



а) *б*)

Рис. 4

№ 533. Побудуйте графік рівнянь:

в) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$;

г) $x^2-y^2=0$.

№ 534. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = |x| - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1, \\ y = \dfrac{3}{x} + 1. \end{cases}$

Для побудови графіків рівнянь з № 533 (в, ґ) за допомогою ППЗ *GRAN1* можна скористатися інструкцією 1, а для розв'язку графічним способом системи рівнянь з № 534 (а) (рис. 4 *а*), (в) (рис. 4 *б*) – інструкцією 2. Тільки тепер краще у списку *Тип залежності* вікна *Список об'єктів* вибрати *Явна: Y=Y(X)*, хоча це не обов'язково.

Таким чином, з огляду на розглянуті у статті проблеми, можна зробити такі висновки:

1. Організація навчального процесу з використанням інформаційно-комунікаційних технологій навчання і правильного поєднання комп'ютерно-орієнтованого навчання з традиційними методами і засобами навчання дозволяє забезпечити більш високий рівень самостійності учнів при розв'язуванні математичних задач.
2. У процесі дослідницької роботи з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у учнів формуються пошукові та науково-дослідницькі уміння. Інформаційні технології в умовах особистісно-орієнтованого навчання математики є потужним і зручним інструментом проведення експериментів з математичними моделями, застосування яких забезпечує появу нових якостей усвідомленості, розширення діапазону особистісної активності учня.
3. Використання інформаційних технологій надає можливість спрямувати процес навчання не на засвоєння готових фактів, а на відкриття, синтез нових знань. Для досягнення мети вчитель організовує самостійну пошукову діяльність учня з використанням ІКТ, що привчає школярів до творчості, розвиває вміння та навички дослідницької діяльності. Успіх формування навичок самостійної роботи досягається не епізодичною організацією окремих видів самостійної роботи, а системою самостійних робіт, що дає можливість активізувати пізнавальну діяльність учнів на всіх етапах процесу навчання.

Література

1. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз – К. : Зодіак-ЕКО, 2008. – 256 с.

2. Ганжела С. І. Використання ППЗ "GRAN-2D" на уроках геометрії : навчально-методичний посібник./ За ред. акад. АПН України, д-ра пед. наук, проф. М. І. Жалдака / Ганжела С. І. – Кіровоград : РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2004. – 144 с.

3. Ганжела С. І. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій для формування пізнавальної самостійності / С. І. Ганжела // Наукові записки. – Випуск 93. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2011. – С. 44-48.

4. Ганжела С. І. Формування пізнавальної самостійності учнів осно-

вної школи в навчанні геометрії з використанням інформаційних технологій : дис....канд.. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) / Ганжела Сергій Іванович ; НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 2010. – 255 с.

5. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – 280 с.

6. Жалдак М. І. Використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним / М. І. Жалдак // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2011. – № 3(91). – С. 3-12.

7. Закон України «Про Основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007-2015 роки» [Електронний ресурс] // Відомості Верховної Ради України (ВВР). – 2007. – №12, ст. 102. – Режим доступу : http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=537-16.

8. Смирнова-Трибульска Є. М. Теоретико-методичні основи формування інформатичних компетентностей вчителів природничих дисциплін у галузі дистанційного навчання : автореферат дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика) / Смирнова-Трибульска Євгенія Миколаївна ; НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. – 44 с.

9. Указ Президента України № 347/2002 «Про Національну доктрину розвитку освіти» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.president.gov.ua/documents/151.html

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИЙ ПІДХІД В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ ЯК ПЕРЕДУМОВА ТВОРЧОГО РОЗВИТКУ УЧНІВ

Н. В. Данилюк , В. В. Корольський
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
vanilla00@inbox.ru

Сучасна школа заходиться в процесі активного пошуку підходів, шляхів і способів виховання молодого покоління, спрямованих на розвиток творчої особистості майбутнього фахівця, який би був готовий до професійної діяльності в умовах реального життя. Відбувається перехід від навчання для життя до навчання через усе життя. Така нова концепція потребує людини, здатної до творчого оволодіння знаннями, здатної швидко і адекватно реагувати на постійно змінюючи умови і спроможної прогнозувати хід подій.

Мета даної статті – розглянути доцільність використання диференційованого підходу як передумови творчого розвитку школярів.

Зі зміною цілей освіти широке застосування отримує концепція диференційованого навчання, яка стає основою для творчого розвитку сучасного учня. Диференційоване навчання, побудоване на врахуванні індивідуальних особливостей і потреб, повинно починатися з конкретизації цілей, задач, змісту і способів організації навчально-виховного процесу. Творча діяльність учнів стає можливою в рамках диференційованого навчання при забезпеченні певних умов розвитку творчих можливостей учнів.

Під диференціацією навчання ми розуміємо такий спосіб організації навчального процесу, який забезпечує врахування індивідуальних особливостей, які притаманні групам учнів і який сприяє подальшому творчому розвитку учнів. При цьому навчальний процес пропонується побудувати так, щоб враховувати особливості не самих груп, а кожного окремо взятого учня. Вказане неможливе без реалізації наступного:

- створення оптимальних умов для виявлення задатків, розвитку інтересів і здібностей кожного учня;
- задоволення пізнавальних потреб, вдосконалення розумової діяльності, розвиток інтересів учнів, виявлення здібностей і задатків, формування професійних якостей;
- розв’язання назрілих проблем школи шляхом створення нової методичної системи диференційованого навчання учнів, основаної на принципово новій мотиваційній схемі [3].

Диференційований підхід дозволяє розв’язати такі задачі:

- розвити здібності й інтереси учнів;

– підвищити якість знань;
– більш раціонально використовувати навчальний час;
– зацікавити всіх учнів активною, напруженою діяльністю;
– усунути розрив між фронтальними методами викладання й індивідуальним характером знань [5].

Основною задачею диференційованого підходу є виявити індивідуальність учня і зберегти її, допомогти дитині повірити у свої сили, забезпечити її максимальний розвиток і, безперечно, розвинути її творче мислення. Для організації диференційованого підходу в навчанні математики вчителю важливо знати в певній мірі можливості творчого мислення учнів. Це допоможе розробити таку методику навчання учнів, яка не буде відірвана від життя, а буде мотивованою досягненням результатів на шляху творчого пошуку.

Ми погоджуємось з В. А. Крутецьким, який у [2] пропонує структуру творчого математичного мислення учнів представити наступним чином:

– здатність до формалізованого сприйняття математичного матеріалу, схоплювання формальної структури завдань;
– здатність до логічного мислення у сфері кількісних і якісних відношень, числової і знакової символіки, здатність мислити математичними символами;
– здатність до вдосконалення процесу математичних міркувань і системи відповідних дій;
– здатність мислити згорнутими структурами;
– гнучкість мисленнєвих процесів у математичній діяльності;
– прагнення до ясності, простоти, економічності і раціональності розв'язання;
– переключення з прямої на зворотну думку;
– математична пам'ять (узагальнена пам'ять на математичні відношення, типові характеристики, схеми міркувань і доведень, методи розв'язання завдань і принципи переходу до них);
– математична спрямованість розуму.

Погоджуючись з розглянутою структурою творчого мислення в процесі навчання математики, ми вважаємо, що у межах аудиторного і позааудиторного навчання потрібно дотримуватись принципу вільного вибору особистісно-орієнтованих вчителем рівнів завдань для самостійного виконання учнями.

Нами розроблена тематично спрямована система завдань різного рівня складності при вивченні математики в основній школі. Для прикладу розглянемо варіант різного рівня завдань при вивченні алгебри у 8-х класах.

Тема: «Квадратична функція» (8 клас).

Середній рівень

1. Дана функція $y=x^2+4x+3$. Потрібно:

а) знайти значення x при $y=8$;

б) побудувати графік заданої функції;

в) вказати область значень і проміжків зростання функції, використовуючи побудований графік;

2. Розв'язати нерівність $y\leq 8$.

Достатній рівень

1. Знайти нулі функції: $y=\dfrac{10x^2-13x-3}{2x^2+x-3}$

2. Дана функція $y=3x^2-x+5$. Потрібно:

а) побудувати графік функції;

б) знайти область значень і проміжки зростання та спадання заданої функції, використовуючи побудований графік;

в) порівняти значення функції на кінцях відрізка [1; 2].

3. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-10x+20}<0$.

Високий рівень

1. Знайти область значень і проміжки зростання та спадання функції $y=x^2-6x+9$, не будуючи її графік.

2. При яких значеннях a графік функції $y=x^2-6ax+6a$ не перетинає вісь абсцис?

3. Побудувати графік функції $y=5x^2-10x+7$ за допомогою шаблона параболи $y=x^2$, попередньо виділивши квадрат двочлена.

4. Розкласти тричлен $y=x^2-2(a+1)x+41$ на множники.

Для розв'язання кожного рівня необхідно використовувати різні знання і вміння, тому детальніше розглянемо, що саме потрібно для успішного розв'язання завдань.

Середній рівень вимагає від учня вміння розв'язувати зведені квадратні рівняння за допомогою формул коренів або використовуючи теорему Вієта. Також учень повинен вміти будувати графік квадратичної функції, в даному випадку достатньо знайти лише координати вершини і знати, що перетин з віссю Oy буде в точці c. Учень повинен вміти характеризувати функцію за її графіком, мати уявлення про зміст поняття «зростання» функції, вміти розв'язувати квадратні нерівності. Тобто, середній рівень орієнтований на типові завдання репродуктивного характеру, які за програмою повинен виконувати кожен учень без жодного виключення.

Щоб виконати завдання *достатнього рівня*, учень повинен вже вміти виконувати дії на знаходження нулів функції, вміти не лише будувати графік квадратичної функції, але й виконувати над ним елементарні перетворення. Стосовно знаходження проміжків зростання та спадання функції і області її значень, то завдання залишається тим самим, лише дещо ускладнюється вигляд функції. Це не означає, що завдання набуває вигляду середнього рівня, адже потрібно враховувати і той факт, що збільшилась кількість завдань і основною метою даного завдання є реалізація самостійного дослідження функції учнем. І в результаті такого дослідження робиться висновок про проміжки на яких функція зростає і спадає. Тобто, достатній рівень вже орієнтований на завдання, які вимагають від учня застосування засвоєних знань в нетиповій ситуації. А самі завдання вже є комбінованими задачами, які вимагають використання елементів тих знань, які вже були засвоєні на середньому рівні.

Завдання *високого рівня* вимагають від учня відмінних знань з попередніх двох рівнів, і при цьому він повинен добре володіти теоретичним матеріалом. Вправи, запропоновані для розв'язування на цьому рівні, вимагають засвоєними учнями зміст означень нуля функції, функції, що зростає на проміжку, та функції, що спадає на проміжку, і вмінь учнів виконувати дії для знаходження нулів функції, проміжків зростання та спадання функції не за готовим графіком функції, а аналітичним способом (за означенням). У завданні з параметром потрібно перейти на більш високий рівень – потрібно провести дослідження, а саме: визначити, як змінюються корені при зміні даних задачі, а далі визначити, якими мають бути ці дані, щоб корені рівняння в підсумку задовольняли умові. Таким чином, констатуємо високий рівень процесу пошуку розв'язання задачі. Тут учень виходить на невідомий для себе спосіб розв'язання, відкриває нові знання. Діяльність учня відмежовується від типових завдань і набуває гнучкого пошукового характеру [1].

Розвиток творчих здібностей не обмежується лише опануванням чогось нового. В будь-якому напрямку розвиток творчості буде мати місце, якщо проявляється власний задум учнів, ставляться нові задачі і самостійно розв'язуються за допомогою отриманих знань.

Тому важливі спеціальні творчі вправи до уроків математики:

1. *Складання власних задач, їх розв'язування.*

Доцільно пропонувати учням складати і розв'язувати свої задачі. Самостійно придумана і розв'язана задача запам'ятовується краще і надовго.

2. *Математичні диктанти* складає найчастіше всього вчитель, але можна запропонувати *скласти* їх *учням*.

Це творча робота. Можна поєднувати новий і раніше вивчений матеріал, але дещо ускладнений. Такий вид роботи розвиває увагу, кмітливість, забезпечує ґрунтовне знання навчального матеріалу, активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів.

3. *Розв'язування творчих задач*.

Творчі задачі є «відкритими», а отже мають багато способів розв'язання. Після розв'язування таких задач пропонується контрольна відповідь. Під час розв'язування творчих задач учні вчаться не боятися зробити помилку, тому що кожна їх відповідь - правильна. Це дає змогу наповнити урок математики радістю від успіху й учнівськими перемогами.

4. *Пошук цікавих математичних загадок і логічних задач*.

Усе починається з першого уроку, на якому пропонуються учням цікаві для даної вікової групи задачі, загадки тощо. Учні також згадують відомі їм загадки. До наступних уроків з розгадування загадок готуються вже самі. На уроці учні пропонують їх один одному, а найцікавіші з них беруть участь у конкурсі загадок;

5. «*Інтерв'ю*».

Обирається учень на роль журналіста і кілька учнів на ролі тих, у яких буде братися інтерв'ю за запитаннями, що стосується певної теми. Такий прийом можна використати як на етапі закріплення і повторення матеріалу, так і на етапі «відкриття» учнями нових знань (в цьому разі ті, хто дають інтерв'ю, та журналіст заздалегідь готуються до нього, добираючи запитання та відповіді на них [5].

На нашу думку, пошук методів розв'язування задач різного рівня складності дає певні можливості щодо розвитку творчих здібностей підростаючого покоління, що є необхідною умовою їх успішного життя в майбутньому.

Література

1. Акимова М. К. Психофизиологические особенности индивидуальности школьников / М. К. Акимова, В.Т. Козлова. – М. : Академия, 2002. – 160 с. – (Высшее образование)
2. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Институт практической психологии ; Воронеж : МОДЕК, 1998. – 416 с. – (Психологи отечества).
3. Плигин А. А. Личностно-ориентированная образование: история и практика / А. А. Плигин. – М. : Профит Стайл, 2007. – 432 с.
4. Шаталов В. Ф. Куда и как исчезли тройки / В. Ф. Шаталов. – М .: Педагогика, 1979. – 136 с.
5. Якиманская И. С. Дифференцированное обучение: «внутренние» и «внешние» формы / Якиманская И. С. // Директор школы. – 1995. – №3. – С. 39–45.

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТАТИСТИЧНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ЗАДАННЯ ЙМОВІРНОСТІ ЗА МІЗЕСОМ

М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, І. М. Біляй
Україна, м. Київ, Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

1. Вступ. В переважній більшості посібників з теорії ймовірностей, де згадується *теорема Бернуллі* (закон великих чисел для відносних частот), стверджується, що ця теорема є простим наслідком *теореми Чебишева* – загального закону великих чисел для послідовності попарно незалежних випадкових величин $X_i(e),\ i \in N$:

$$\widetilde{P}(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(e) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i]| \geq \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

за умови $D[X_i] \leq c,\ i \in N$, а тому

$$\widetilde{P}(|P_n^*(A) - p| \geq \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)\,, \tag{1}$$

де $P_n^*(A)$ – статистична ймовірність (відносна частота) події A, а $p=P(A)$ – ймовірність цієї події. При цьому обґрунтовують, що $P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(e)$, де X_i – індикатор події A_i – здійснення події A в i-му випробуванні (з довільних n послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з ймовірнісною моделлю (Ω, S, P), для якої подія $A \in S$ і $p=P(A)$).

Разом з тим, майже ніколи не кажуть:

- на якому просторі $\widetilde{\Omega}$ визначено функції $X_i(e)$, для яких $P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(e)$;
- стосовно якої ймовірності ці функції $X_i(e)$ є попарно незалежними випадковими величинами;
- до якого простору подій $\widetilde{S}$ належать події $A_i,\ i \in N$;
- стосовно якої ймовірності $\widetilde{P}$ можна стверджувати, що $\widetilde{P}(A_i) = p = P(A)$, $i \in N$, а $\widetilde{P}(|P_n^*(A) - p| \geq \varepsilon) \to 0$, коли $n \to \infty$.

У деяких посібниках (наприклад [1]–[3]) про все це кажуть, але досить схематично. Зокрема, сказане не виключає, що шукана ймовірнісна модель $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ насправді залежить від n, тобто $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P}) = (\widetilde{\Omega}_n, \widetilde{S}_n, \widetilde{P}_n)$.

Виникає питання: «*Чи існує ймовірнісний простір* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$*, не залежний від n, стосовно якого є правильним твердження (1), а* $P_n^*(A) = Y_n(e)$*,* $e \in \widetilde{\Omega}$*, є випадковою величиною, що набуває значень* $\dfrac{m}{n}$ *тоді й тільки тоді, коли подія A відбувається m разів в n послідовних незалежних випробуваннях, тобто коли* $e \in B_{n,m}$*, причому* $B_{n,m} \in \widetilde{S}$ *і* $\widetilde{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$*, де* $B_{n,m}$ *– подія, яка полягає в тому, що подія A відбувається m разів в серії із n послідовних незалежних випробувань?*»

Побудуємо такий простір $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ і за його допомогою з'ясуємо, коли можна використовувати спосіб задання ймовірності, запропонований Р. Мізесом: $P(A) = \lim\limits_{i\to\infty} P_i^*(A)$, де $P_i^*(A)$ – спостережене значення статистичної ймовірності за результатами серії із *i* послідовних випробувань [3, с. 218]. Ця побудова ґрунтується на тому, що кожній послідовності з нулів та одиниць відповідає єдине дійсне число відрізка [0; 1]. Використання цієї ідеї проілюстровано у роботі [3, с. 223], проте в даній статті міркування є дещо загальнішими.

2. Побудова простору $\widetilde{\Omega}$ елементарних подій. Розглянемо довільну фіксовану випадкову подію *A* з певного простору випадкових подій *S*. Припустимо, що на основі цього простору *S* утворено послідовність ймовірнісних просторів (Ω, *S*, P_i), $i \in N$, причому $P_i(A) \in [\alpha; \beta] \subset (0;1)$, $i \in N$.

Отже, подія *A* пов'язана немовби з одним і тим самим стохастичним експериментом *ε*, тільки ймовірнісні моделі цього експерименту можуть відрізнятися (а можуть і не відрізнятися) ймовірностями P_i, визначеними на одному і тому самому просторі подій *S*.

За допомогою даного експерименту *ε* утворимо новий експеримент *ε*(*a*), де довільне випробування, пов'язане з експериментом *ε*(*a*), складається із зчисленної кількості послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з експериментом *ε*, і фіксацією того, відбулася подія *A* у кожному з цих випробувань чи ні. Елементарні події, пов'язані з експериментом *ε*(*a*), можуть мати вигляд нескінченних послідовностей з нулів та одиниць: $e=(e_1, e_2, ..., e_n, ...)$, де $e_i=1$, коли подія *A* відбувається в *i*-му випробуванні, і $e_i=0$ в іншому разі. Отже, простір $\widetilde{\Omega}$ елементарних подій, пов'язаних з експериментом *ε*(*a*), може мати вигляд $\widetilde{\Omega} = \{e = (e_1, e_2, ..., e_n, ...) : e_i \in \{0;1\}, i \in N\}$.

Встановимо відповідність між елементарними подіями *e* простору $\widetilde{\Omega}$ і точками числового піввідрізка [0; 1) за допомогою функції

$f(e)=f(e_1, e_2, ..., e_n, ...)=0,\ e_1e_2 \dots e_n \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$, тобто значення $f(e)$ – це нескінченний двійковий дріб $\forall e=(e_1, e_2, ..., e_n, ...) \in \widetilde{\Omega}$.

Домовимося вважати, що коли подія A не відбувається в k-му випробуванні (тобто $e_k=0$), а в усіх наступних відбувається (тобто $e_i=1$, коли $i>k$), то це рівносильне тому, що подія A відбувається в k-му випробуванні (тобто $e_k=1$) і не відбувається в усіх наступних (тобто $e_i=0$, коли $i>k$). Така домовленість обумовлена тим, що $\frac{0}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=\frac{1}{2^k}+\frac{0}{2^{k+1}}+\dots+\frac{0}{2^n}+\dots$. Фактично ми домовляємося замінювати кожну послідовність вигляду $(e_1, ..., e_{k-1}, 0, 1, ..., 1, ...)$ на послідовність $(e_1, ..., e_{k-1}, 1, 0, ..., 0, ...)$. Тоді за допомогою функції $f(e_1, e_2, ..., e_n, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ встановлюється взаємно однозначне відображення простору $\widetilde{\Omega}$ на піввідрізок [0; 1), а тому можна вважати, що $\widetilde{\Omega}=[0;1)$. За такою домовленістю кожне випробування, пов'язане з експериментом $\varepsilon(a)$, полягає у випадковому виборі числа x з піввідрізка [0; 1) і фіксації двійкових розрядів e_i, $i \in N$, цього числа. Значення кожного i-го розряду означає, відбулася ($e_i=1$) чи ні ($e_i=0$) подія A у i-му випробуванні із зчисленної кількості послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з експериментом ε.

3. Побудова простору подій $\widetilde{S}$. Природно вважати, що простір подій $\widetilde{S}$ містить кожну подію A_k, яка полягає у тому, що $e_k=1$, тобто у k-му випробуванні, пов'язаному з експериментом ε, подія A відбувається. Зрозуміло, що $A_k=\{e=(e_1, e_2, ..., e_n, ...) \in \widetilde{\Omega} : e_k=1\}$, $k=1, 2, ..., n, ...$

Подивимося уважніше на події A_k для кожного $k \in N$.

Подію A_1 – здійснення події A у першому випробуванні можна тлумачити так, що у випадково вибраної точки $e=0,e_1e_2....e_n...$ з піввідрізка [0; 1) $e_1=1$, а тому $e \in \left[\frac{1}{2};1\right)$. Аналогічно подія $\overline{A_1}$ полягає у тому, що $e_1=0$, тобто $e \in \left[0;\frac{1}{2}\right)$. Проміжки $\Delta_0^1=\left[0;\frac{1}{2}\right)$ і $\Delta_1^1=\left[\frac{1}{2};1\right)$ позначають $\Delta_{e_1}^1$, $e_1 \in \{0;1\}$, і називають *піввідрізками першого рангу*. Таким чином, $A_1=\Delta_1^1$, $\overline{A_1}=\Delta_0^1$, $\Delta_0^1 \bigcup \Delta_1^1=[0;1)=\Delta_0^0$ (рис. 1).

Кожен з двох піввідрізків $\Delta_{e_1}^1$ першого рангу своєю серединою поділяється на два *піввідрізки другого рангу* $\Delta^1_{e_1 e_2}$, $e_2 \in \{0;1\}$. Тому є 4=2^2 піввідрізки другого рангу: $\Delta^2_{00} = \left[0;\frac{1}{4}\right)$, $\Delta^2_{01} = \left[\frac{1}{4};\frac{2}{4}\right)$, $\Delta^2_{10} = \left[\frac{2}{4};\frac{3}{4}\right)$ і $\Delta^2_{11} = \left[\frac{3}{4};1\right)$ (рис. 2).

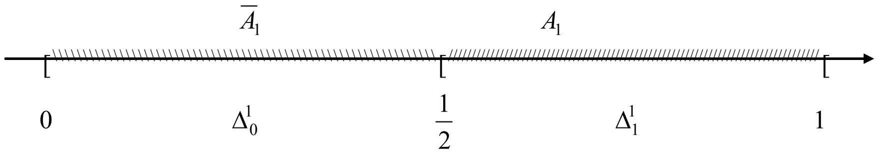


Рис. 1

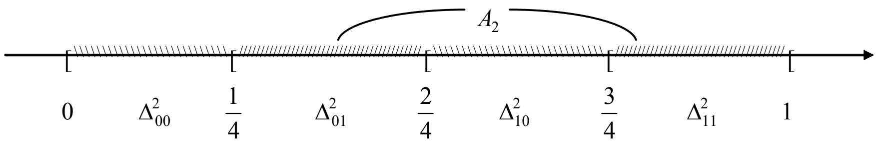


Рис. 2

Таким чином, $A_2 = \Delta^2_{01} \bigcup \Delta^2_{11}$, $\Delta^1_0 = \Delta^2_{00} \bigcup \Delta^2_{01}$, $\Delta^1_1 = \Delta^2_{10} \bigcup \Delta^2_{11}$ і $\bigcup\limits_{e_1=0}^{1}\bigcup\limits_{e_2=0}^{1} \Delta^2_{e_1 e_2} = \bigcup\limits_{e_1=0}^{1} \Delta^1_{e_1} = [0;1)$.

Припустимо, що введено поняття *піввідрізків* $\Delta^k_{e_1 e_2 \ldots e_k}$ *k-го рангу*, де $e_i \in \{0;1\}$ $\forall i \in \overline{1,k}$, кількість яких дорівнює 2^k, причому подія $A_k = \bigcup\limits_{e_1=0}^{1} \ldots \bigcup\limits_{e_{k-1}=0}^{1} \Delta^k_{e_1 \ldots e_{k-1} 1}$, $\Delta^{k-1}_{e_1 \ldots e_{k-1}} = \bigcup\limits_{e_k=0}^{1} \Delta^k_{e_1 \ldots e_{k-1} e_k} = \Delta^k_{e_1 \ldots e_{k-1} 0} \bigcup \Delta^k_{e_1 \ldots e_{k-1} 1}$ і $\bigcup\limits_{e_1=0}^{1}\bigcup\limits_{e_2=0}^{1} \ldots \bigcup\limits_{e_k=0}^{1} \Delta_{e_1 e_2 \ldots e_k} = [0,1)$. Тоді середина кожного піввідрізка $\Delta^k_{e_1 e_2 \ldots e_k}$ *k*-го рангу поділяє його на два *піввідрізки* (*k*+1)-*го рангу*: $\Delta^{k+1}_{e_1 e_2 \ldots e_k e_{k+1}}$, $e_{k+1} \in \{0;1\}$. При цьому в числі $e=0,e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$ цифра $e_{k+1}=1$ тоді й тільки тоді, коли $e \in \bigcup\limits_{e_1=0}^{1}\bigcup\limits_{e_2=0}^{1} \ldots \bigcup\limits_{e_k=0}^{1} \Delta^{k+1}_{e_1 e_2 \ldots e_k 1}$, тобто $A_{k+1} = \bigcup\limits_{e_1=0}^{1} \ldots \bigcup\limits_{e_k=0}^{1} \Delta^{k+1}_{e_1 \ldots e_k 1}$.

Окрім цього $\Delta^k_{e_1 \ldots e_k} = \Delta^{k+1}_{e_1 \ldots e_k 0} \bigcup \Delta^{k+1}_{e_1 \ldots e_k 1}$ і $\bigcup\limits_{e_1=0}^{1}\bigcup\limits_{e_2=0}^{1} \ldots \bigcup\limits_{e_k=0}^{1} \bigcup\limits_{e_{k+1}=0}^{1} \Delta^{k+1}_{e_1 e_2 \ldots e_k e_{k+1}} = [0;1)$, а кількість піввідрізків (*k*+1)-го рангу дорівнює 2^{k+1}.

Таким чином, за принципом математичної індукції можна вважати, що для довільного натурального числа n визначено 2^n піввідрізків $\Delta^n_{e_1 e_2 \ldots e_n}$ n-го рангу, де $e_i \in \{0;1\}$ $\forall i \in \overline{1,n}$, причому

$$\Delta^n_{e_1 \ldots e_n} = \Delta^{n+1}_{e_1 \ldots e_n 0} \bigcup \Delta^{n+1}_{e_1 \ldots e_n 1}, \ e_i \in \{0;1\}, \ i \in \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\bigcup_{e_1=0}^{1} \ldots \bigcup_{e_n=0}^{1} \Delta^n_{e_1 \ldots e_n} = [0;1) \quad \forall n \in N, \tag{3}$$

$$A_n = \bigcup_{e_1=0}^{1} \ldots \bigcup_{e_{n-1}=0}^{1} \Delta^n_{e_1 \ldots e_{n-1} 1} \text{ – «подія } A \text{ відбувається у } n\text{-му випробуванні».} \tag{4}$$

Для n=1 умова (4) набуває вигляду $A_1 = \Delta^1_1$.

З наведених міркувань випливає, що до подій простору $\widetilde{S}$ доцільно віднести кожен піввідрізок $\Delta^n_{e_1 e_2 \ldots e_n}$, де n=0, 1, 2, …, а $\Delta^0_{e_0} = [0;1)$. Легко бачити, що два різні піввідрізки $\Delta^n_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ і $\Delta^m_{b_1 b_2 \ldots b_m}$ або не перетинаються, або один з них є частиною іншого з них. Тому сукупність цих піввідрізків породжує мінімальну алгебру, тобто мінімальне кільце з одиницею I=[0; 1) [4, с. 242], [5, с. 38-42]. Елементами цієї алгебри є усілякі скінченні об'єднання піввідрізків (однакових чи різних рангів), що попарно не перетинаються. Враховуючи, що кінці піввідрізків $\Delta^n_{e_1 e_2 \ldots e_n}$, $n \in N$, – числа $\frac{i}{2^n}$, i=1, 2, ..., 2^{n-1}, $n \in N$, утворюють множину, скрізь щільну на відрізку [0; 1], дістанемо, що кожен інтервал $(\alpha;\beta) \subset [0;1)$ є об'єднанням зчисленної кількості піввідрізків $\Delta^{n_i}_{e_1 e_2 \ldots e_{n_i}}$, $i \in N$, які попарно не перетинаються. Тому простір подій $\widetilde{S}$ повинен містити усі такі інтервали.

Враховуючи, що кожна точка x_0 є перерізом зчисленної кількості піввідрізків $\Delta^{k_i}_{e_1 e_2 \ldots e_{k_j}}$, дістанемо, що $\widetilde{S}$ мусить містити кожну одноелементну множину $\{x_0\}$, якщо $x_0 \in [0;1)$. Таким чином, простір подій $\widetilde{S}$ повинен містити будь-яку борелівську множину $A \subset [0;1)$, і тому $\widetilde{S}$ можна вважати σ-алгеброю борелівських підмножин піввідрізка [0; 1).

4. Визначення ймовірнісної міри $\widetilde{P}$ на просторі подій $\widetilde{S}$. За умовою, накладеною у пункті 2, кожне випробування експерименту $\varepsilon(a)$ є зчисленною послідовністю випробувань, пов'язаних з експериментом ε, причому результатом i-го випробування є число e_i=1 – «подія A відбудеться в i-му випробуванні» (з ймовірністю $P_i(A)$=p_i), або e_i=0 – «подія A не відбудеться в i-му випробуванні» (з ймовірністю $P_i(\overline{A}) = 1 - p_i$). Це означає, що

$$\widetilde{P}(A_1)=P_1(A)=\widetilde{P}(\Delta_1^1)=p_1\text{, а }\widetilde{P}(\overline{A}_1)=P_1(\overline{A})=\widetilde{P}(\Delta_0^1)=1-p_1,$$

$$\widetilde{P}(A_2)=P_2(A)=\widetilde{P}(\Delta_{01}^2\cup\Delta_{11}^2)=p_2\text{ і }\widetilde{P}(\overline{A}_2)=P_2(\overline{A})=\widetilde{P}(\Delta_{00}^2\cup\Delta_{10}^2)=1-p_2.$$

Вважаючи події A_i, $i\in N$, незалежними (відносно міри $\widetilde{P}$), маємо

$$\widetilde{P}(A_1A_2)=\widetilde{P}(\Delta_{11}^2)=\widetilde{P}(A_1)\widetilde{P}(A_2)=p_1p_2,$$

$$\widetilde{P}(\overline{A}_1A_2)=\widetilde{P}(\Delta_{01}^2)=\widetilde{P}(\overline{A}_1)\widetilde{P}(A_2)=(1-p_1)p_2,\ \widetilde{P}(A_1\overline{A}_2)=\widetilde{P}(\Delta_{10}^2)=p_1(1-p_2),$$

$$\widetilde{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\widetilde{P}(\Delta_{00}^2)=(1-p_1)(1-p_2).$$

Це означає, що $\widetilde{P}(\Delta_{e_1e_2}^2)=p_2\widetilde{P}(\Delta_{e_1}^1)$, коли e_2=1, і $\widetilde{P}(\Delta_{e_1e_2}^2)=(1-p_2)\widetilde{P}(\Delta_{e_1}^1)$, коли e_2=0, а тому $\widetilde{P}(\bigcup_{e_1=0}^{1}\bigcup_{e_2=0}^{1}\Delta_{e_1e_2}^2)=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\widetilde{P}(\Delta_{e_1e_2}^2)=\sum_{e_1=0}^{1}((1-p_2)\widetilde{P}(\Delta_{e_1}^1)+p_2\widetilde{P}(\Delta_{e_1}^1))=\sum_{e_1=0}^{1}\widetilde{P}(\Delta_{e_1}^1)=1$.

Аналогічно переконуємося, що $\widetilde{P}(A_n)=P_n(A)=p_n$, $\widetilde{P}(\Delta_{e_1e_2\ldots e_n}^n)=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\quad\forall n\in N$, де α_i=p_i, коли e_i=1, і α_i=(1–p_i), коли e_i=0, $i\in\overline{1,n}$, причому $\widetilde{P}(\bigcup_{e_1=0}^{1}\ldots\bigcup_{e_n=0}^{1}\Delta_{e_1\ldots e_n}^n)=\sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\ldots\sum_{e_n=0}^{1}\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_n}^n)=1\quad\forall n\in N$.

Оскільки сукупність піввідрізків $\Delta_{e_1\ldots e_n}^n$, n=0, 1, 2, … , породжує алгебру підмножин піввідрізка $\Omega=[0;1)=\Delta_0^0$, кожна з яких є об'єднанням скінченної кількості таких піввідрізків, що попарно не перетинаються, то міра $\widetilde{P}$ продовжується на цю алгебру природним чином: $\widetilde{P}(\bigcup_{i=1}^{m}\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i})=\sum_{i=1}^{m}\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i})$, якщо піввідрізки $\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i}$, $i\in\overline{1,m}$, попарно не перетинаються.

Перевіримо, чи є міра $\widetilde{P}$ σ-адитивною на введеній алгебрі. Для цього припустимо, що $\Delta_{e_1\ldots e_k}^k=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i}$, причому піввідрізки $\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i}$ попарно не перетинаються. Тоді зрозуміло, що $\bigcup_{i=1}^{m}\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i}\subset\Delta_{e_1\ldots e_k}^k$ і $\widetilde{P}\bigcup_{i=1}^{m}\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i}=\sum_{i=1}^{m}\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i})\le\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_k}^k)\quad\forall m\in N$, а тому $\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_{n_i}}^{n_i})\le\widetilde{P}(\Delta_{e_1\ldots e_k}^k)$.

З іншого боку $\forall \varepsilon > 0$ кожен піввідрізок $\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}$ можна доповнити зліва і справа досить малими піввідрізками з даної алгебри так, що дістанемо піввідрізок $[a_i; b_i)$, для якого $\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}} \subset (a_i; b_i)$ і $\widetilde{P}([a_i; b_i) \setminus \Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) \le \frac{\varepsilon}{2^i}$, причому сукупність інтервалів $(a_i; b_i)$, $i \in N$, покриває замикання піввідрізка $\Delta^k_{e_1 \ldots e_k}$, тобто $\Delta^k_{e_1 \ldots e_k} \subset \overline{\Delta}^k_{e_1 \ldots e_k} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i; b_i)$. Тоді за критеріями компактної множини [4, с. 48-51] існує скінченне підпокриття множини $\overline{\Delta}^k_{e_1 \ldots e_k}$, тобто існують $[a_i; b_i)$, $i=i_j$, $j \in \overline{1,m}$, для яких $\Delta^k_{e_1 \ldots e_k} \subset \overline{\Delta}^k_{e_1 \ldots e_k} \subset \bigcup_{\substack{i=i_j \\ 1 \le j \le m}} (a_i; b_i) \subset \bigcup_{\substack{i=i_j \\ 1 \le j \le m}} [a_i; b_i)$. При цьому

$$\widetilde{P}(\Delta^k_{e_1 \ldots e_k}) \le \sum_{\substack{i=i_j \\ 1 \le j \le m}} \widetilde{P}([a_i; b_i)) = \sum_{\substack{i=i_j \\ 1 \le j \le m}} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=i_j \\ 1 \le j \le m}} \widetilde{P}([a_{i_j}; b_{i_j}) \setminus \Delta^{n_{i_j}}_{e_1 \ldots e_{n_{i_j}}}) \le \sum_{i=1}^{i_m} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) + \varepsilon .$$

Отже, $\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) \le \widetilde{P}(\Delta^k_{e_1 \ldots e_k}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) + \varepsilon$, а оскільки $\varepsilon>0$ – довільне, то $\widetilde{P}(\Delta^k_{e_1 \ldots e_k}) = \widetilde{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \ldots e_{n_i}})$.

Таким чином, ймовірнісна міра $\widetilde{P}$ визначена і є σ-адитивною на сукупності усіляких піввідрізків $\Delta^n_{e_1 \ldots e_n}$, $n \in N$, що породжують мінімальну алгебру. Здійснюючи лебегове продовження цієї міри [5, с. 255], дістанемо, що ймовірність $\widetilde{P}$ визначена на просторі подій $\widetilde{S}$, що є борелівською σ-алгеброю підмножин проміжку [0; 1).

Побудову ймовірнісного простору $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ завершено.

Для того, щоб уявити розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на подіях простору $\widetilde{S}$, побудуємо за допомогою GRAN1 кілька інтервальних розподілів ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1 \ldots e_n}$, $n \in N$, вважаючи, що $p_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Якщо n=1, то маємо таблицю 1.

Таблиця 1

$\Delta^1_{e_1}$	$\Delta^1_0=\left[0;\frac{1}{2}\right)$	$\Delta^1_1=\left[\frac{1}{2};1\right)$
$\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1})$	$1-p_1$	p_1

Цей розподіл визначає функцію $F_1(x)$

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 2(1-p_1)x, & \text{коли } 0<x\le\frac{1}{2},\\ 2p_1(x-1)+1, & \text{коли } \frac{1}{2}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1,\end{cases}$$

графік якої зображено на рис. 3.

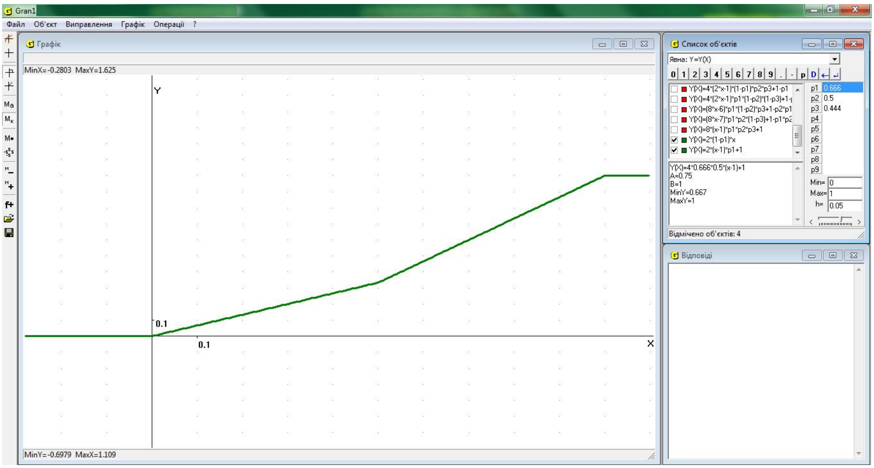


Рис. 3

Функція $F_1(x)$ є наближенням функції $F(x)$ розподілу ймовірності $\widetilde{P}$ на проміжку [0; 1).

Якщо n=2, то маємо таблицю 2.

Таблиця 2

$\Delta^2_{e_1e_2}$	$\Delta^2_{00}=\left[0;\frac{1}{4}\right)$	$\Delta^2_{01}=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	$\Delta^2_{10}=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$	$\Delta^2_{11}=\left[\frac{3}{4};1\right)$
$\widetilde{P}(\Delta^2_{e_1e_2})$	$(1-p_1)(1-p_2)$	$(1-p_1)p_2$	$p_1(1-p_2)$	p_1p_2

Цей розподіл визначає функцію $F_2(x)$:

$$F_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 4(1-p_1)(1-p_2)x, & \text{коли } 0<x\le\dfrac{1}{4},\\ 2p_2(1-p_1)(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{1}{2},\\ (p_1p_2-p_1)(3-4x)+1-p_1p_2, & \text{коли } \dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{3}{4},\\ 4p_1p_2(x-1)+1, & \text{коли } \dfrac{3}{4}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1,\end{cases}$$

графік якої зображено на рис. 4.

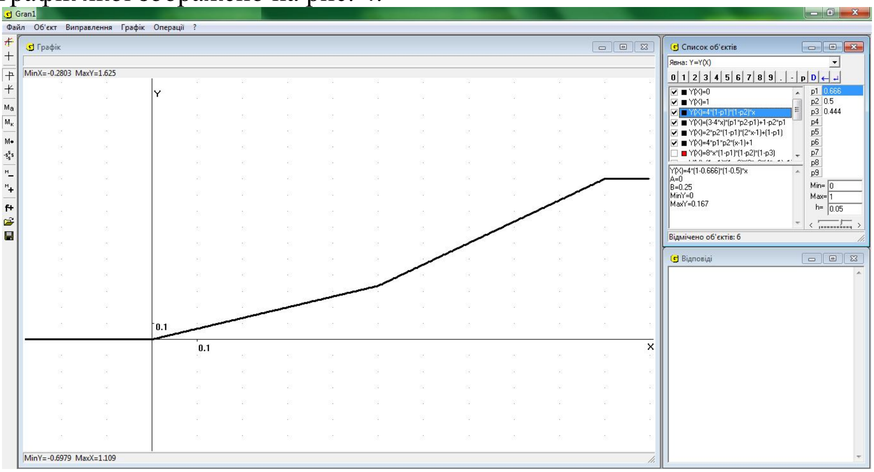


Рис. 4

Функція $F_2(x)$ є наближенням функції $F(x)$, точнішим ніж $F_1(x)$. Якщо n=3, то маємо таблицю 3.

Таблиця 3

$\Delta^3_{e_1e_2e_3}$	$\Delta^3_{000}=\left[0;\frac{1}{8}\right)$	$\Delta^3_{001}=\left[\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$	$\Delta^3_{010}=\left[\frac{1}{4};\frac{3}{8}\right)$	$\Delta^3_{011}=\left[\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right)$
$\widetilde{P}(\Delta^3_{e_1e_2e_3})$	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	$(1-p_1)p_2p_3$
	$\Delta^3_{100}=\left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$	$\Delta^3_{101}=\left[\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right)$	$\Delta^3_{110}=\left[\frac{3}{4};\frac{7}{8}\right)$	$\Delta^3_{111}=\left[\frac{7}{8};1\right)$
	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	$p_1(1-p_2)p_3$	$p_1p_2(1-p_3)$	$p_1p_2p_3$

Цей розподіл визначає функцію $F_3(x)$:

$$F_3(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 8(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)x, & \text{коли } 0<x\le\dfrac{1}{8},\\ 2(1-p_1)(1-p_2)p_3(4x-1)+(1-p_1)(1-p_2), & \text{коли } \dfrac{1}{8}<x\le\dfrac{1}{4},\\ (1-p_1)p_2(1-p_3)(8x-3)+(1-p_1)(1-p_2p_3), & \text{коли } \dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{3}{8},\\ 4(1-p_1)p_2p_3(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \dfrac{3}{8}<x\le\dfrac{1}{2},\\ 4p_1(1-p_2)(1-p_3)(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{5}{8},\\ 2p_1(1-p_2)p_3(4x-3)+1-p_1p_2, & \text{коли } \dfrac{5}{8}<x\le\dfrac{3}{4},\\ p_1p_2(1-p_3)(8x-7)+1-p_1p_2p_3, & \text{коли } \dfrac{3}{4}<x\le\dfrac{7}{8},\\ 8p_1p_2p_3(x-1)+1, & \text{коли } \dfrac{7}{8}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1, \end{cases}$$

графік якої зображено на рис. 5.

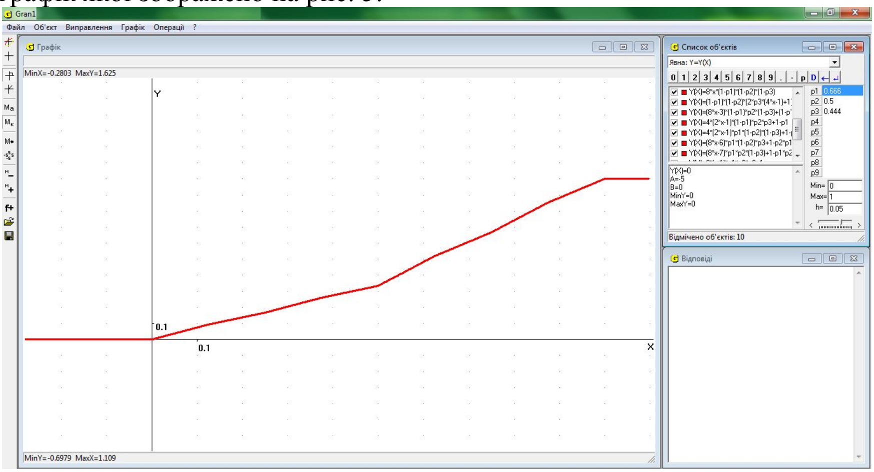


Рис. 5

Функція $F_3(x)$ є наближенням функції $F(x)$, точнішим ніж $F_2(x)$.

5. Узагальнений закон великих чисел для статистичних ймовірностей. Для побудованого простору $(\widetilde{\Omega},\widetilde{S},\widetilde{P})$ індикатори подій A_k (позначимо їх $X_k(e)$, $e\in\widetilde{\Omega}$), $k\in N$, є попарно незалежними випадковими величинами, причому $M[X_k]=p_k$, а $D[X_k]=p_k(1-p_k)<\dfrac{1}{4}$. Тому за нерівністю Чебишова

$$\widetilde{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}\to 0\ \ (n\to\infty)\ \ \forall\varepsilon>0 \qquad (5)$$

Функція $Y_n(e)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(e)$ набуває значень $\dfrac{m}{n}$ тоді і тільки тоді, коли $e\in B_{nm}=\{e=0,e_1e_2\ldots e_n\ldots\in\widetilde{\Omega}$: серед чисел e_i, $1\leq i\leq n$, існує лише m рівних 1$\}$, $0\leq m\leq n$, $n\in N$. Отже, $Y_n(e)$ можна вважати «випадковою відносною частотою події A» і позначати $P_n^*(A,e)$.

Таким чином, *якщо для кожного k-го випробування (з довільної зчисленної серії незалежних випробувань) подія A відбувається в k-му випробуванні з ймовірністю* $p_k\in[\alpha;\beta]\subset(0;1)$, $k\in N$, *то для всіх досить великих n переважна більшість (стосовно міри* $\widetilde{P}$*) значень «випадкової відносної частоти події A» як завгодно мало відрізняється від чисел* $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$.

У цьому і полягає узагальнений закон великих чисел для відносних частот. У випадку $p_k=p\in(0;1)$, $k\in N$, з узагальненого закону дістаємо ***звичайний закон великих чисел для відносних частот***: *якщо у кожному випробуванні подія A відбувається з ймовірністю* $p=P(A)$, *то для всіх досить великих n переважна більшість (стосовно міри* $\widetilde{P}$*) можливих значень «випадкової відносної частоти події A» як завгодно мало відрізняється від числа p=P(A).*

6. Задання ймовірності за Мізесом. Зауважимо, що на практиці здебільшого мають справу з випадковими подіями A, ймовірності яких $p=P(A)$ невідомі, а тому у звичайному законі великих чисел невідома ймовірнісна міра $\widetilde{P}$ і невідомо, чим її можна замінити, щоб оцінити, чи насправді переважна більшість можливих значень відносної частоти події A як завгодно мало відрізняється від певного числа p, яке можна вважати ймовірністю події A. Тому звичайний *закон великих чисел для відносних частот є неконструктивною теоремою*.

Натомість узагальнений закон великих чисел для відносних частот є конструктивною теоремою, оскільки за результатами (реальними) n послідовних незалежних випробувань можна визначити відносні частоти події A: $p_n = \frac{m_n}{n}$, де m_n – кількість здійснень події A у n послідовних випробуваннях, $n \in N$. За одержаними числами p_i, $1 \le i \le n$, визначається міра $\widetilde{P}_n$, для якої $\widetilde{P}(A_i) = \widetilde{P}_n(A_i) = p_i$, $1 \le i \le n$, і для цієї міри є правильною нерівність (5).

У роботі [6] доведено: *для того, щоб існувало число p, для якого* $\widetilde{P}_n(|P_n^* - p| \ge \varepsilon) \to 0$, ($n \to \infty$), *необхідно й досить, щоб* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \to p$ *при* ($n \to \infty$).

Наведемо це доведення, замінивши $\widetilde{P}_n$ на $\widetilde{P}$.

Припустимо, що існує число $p \in (0;1)$, для якого $\widetilde{P}(|P_n^*(A,e) - p| \ge \varepsilon) \to 0$ ($n \to \infty$), коли $\varepsilon \in (0;1)$ – довільне фіксоване число. Тоді, враховуючи (5), покладемо $A_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{e \in \widetilde{\Omega} : |P_n^*(A,e) - p| \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$, $B_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{e \in \widetilde{\Omega} : |P_n^*(A,e) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i | \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$ і дістанемо, що для досить великих n маємо: $\widetilde{P}(\widetilde{\Omega} \setminus (A_{\frac{\varepsilon}{2}} + B_{\frac{\varepsilon}{2}})) \ge 1 - \varepsilon > 0$, а тому множина $\Omega \setminus \left(A_{\frac{\varepsilon}{2}} \bigcup B_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)$ непорожня. На цій множині виконуються нерівності $|P_n^*(A,e) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|P_n^*(A,e) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i | < \frac{\varepsilon}{2}$, а тому й нерівність

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right| \le \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - P_n^*(A,e)\right| + |P_n^*(A,e) - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

коли n – досить велике. Це і означає, що $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \to p$, коли $n \to \infty$. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \to p$ при $n \to \infty$, а $\varepsilon \in (0;1)$ – довільне фіксоване. Число $n_0(\varepsilon)$ виберемо таким чином, щоб $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$. Тоді для всіх $e \in \widetilde{\Omega} \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}$ маємо:

$$|P_n^*(A,e)-p|\le|P_n^*(A,e)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i|+|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i-p|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ ,$$

коли $n>n_0(\varepsilon)$. Отже, нерівність $|P_n^*(A,e)-p|\ge\varepsilon$ виконується хіба що на множині $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Тому, враховуючи (5), маємо

$$\widetilde{P}(|P_n^*(A,e)-p|\ge\varepsilon)\le\widetilde{P}(|P_n^*(A,e)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i|\ge\frac{\varepsilon}{2})\to 0\ \ (n\to\infty)$$

Достатність доведено.

Зауважимо тепер, що коли p_n – відносна частота події A, визначена за результатами n послідовних незалежних випробувань і $n\in N$, причому m_n – кількість здійснень події A в цих n випробуваннях, то $p_{n+1}=\dfrac{m_{n+1}}{n+1}$ і $m_{n+1}=m_n+1$ або $m_{n+1}=m_n$. Тому

$$|p_{n+1}-p_n|=\left|\frac{m_{n+1}}{n+1}-\frac{m_n}{n}\right|=\left|\frac{n(m_{n+1}-m_n)-m_n}{n(n+1)}\right|\le\frac{|m_{n+1}-m_n|}{n}+\frac{m_n}{n(n+1)}\le\frac{2}{n}$$

$\forall n\in N$. Звідси, за відомою тауберовою теоремою Г. Харді [7, с. 405] випливає, що, з умови $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\to p$ випливає умова $p_n\to p$, коли $n\to\infty$.

Таким чином за вказаних умов, накладених на p_n, $n\in N$, маємо: *для того щоб існувало число* $p\in(0;1)$, *для якого* $\widetilde{P}(|P_n^*-p|\ge\varepsilon)\to 0$, *коли* $n\to\infty$, $\forall\varepsilon>0$, *необхідно і досить, щоб* $p_n\to p$ *при* $n\to\infty$.

Отже, узагальнений закон великих чисел для відносних частот дає підстави вважати, що одним із можливих способів задання ймовірності може бути відоме *означення Р. Мізеса*: $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m_n}{n}$, за умови існування цієї границі, де m_n – кількість здійснень події A у перших n випробуваннях з нескінченної серії послідовних незалежних випробувань.

7. Межі застосувань ймовірності Мізеса. Припустимо, що коли експеримент ε задано, простір Ω визначено і простір подій S породжується двома взаємно протилежними подіями $A\subset\Omega$ і $\overline{A}\subset\Omega$, то ймовірність P на цьому просторі можна задати рівністю $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n^*(A)$, де $P_n^*(A)$, $n\in N$ – відносна частота події A, визначена за результатами перших n послідовних випробувань, пов'язаних з даним експериментом ε.

Так задану ймовірність P назвемо *ймовірністю Мізеса*. Цю ймовірність можна поширити на випадок, коли простір подій S породжується скінченною кількістю попарно несумісних подій A_1, A_2, ..., A_n, $n\ge 2$, для яких $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Отже, теоретично ймовірність Мізеса напевно можна застосовувати для побудови ймовірнісних моделей (Ω, S, P), коли простір Ω елементарних подій є скінченною множиною.

Виникає питання: «*Чи можна застосовувати ймовірність Мізеса, коли простір* Ω *елементарних подій є нескінченною множиною*?»

Щоб відповісти на це питання, вважатимемо, що простір $\Omega=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ – зчисленний, простір подій S породжується подіями $E_i=\{x_i\}$, $i \in N$, а в зчисленній серії послідовних випробувань отримано такі результати:

- x_1 є результатом випробувань з номерами $n_i^{(1)}$, де $n_i^{(1)}$ – перший номер з i-ої послідовної четвірки номерів, тобто $n_i^{(1)} \in \{1,5,9,13,...,1+4(i-1),...\}$;
- x_2 є результатом перших 16 випробувань, якщо номери цих випробувань відмінні від номерів 1, 5, 9 і 13 (у випробуваннях з цими номерами результат був x_1); у кожних наступних 16 випробуваннях x_2 є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є, наприклад, першим номером з відповідної шістнадцятки номерів, відмінним від номерів випробувань, в яких результатом було x_1 (такі перші номери утворять множину $\{18, 34, 50, ..., 16i+2, ...\}$);
- x_3 є результатом перших 64 випробувань, якщо їх номери відмінні від номерів випробувань, у яких результатами були x_1 або x_2; у кожних наступних 64 випробуваннях x_3 є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є першим з цих 64 номерів, відмінним від номерів випробувань, в яких відбулися x_1 або x_2 (такі перші номери утворюють множину $\{67, 131, ..., 64i+3, ...\}$);
- взагалі x_k є результатом перших 4^k випробувань, якщо їх номери відмінні від номерів випробувань, у яких результатами були x_i, $i \in \overline{1,(k-1)}$; у кожних наступних 4^k випробуваннях x_k є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є першим з цих 4^k номерів, відмінним від номерів випробувань, в яких результатами були x_i, $i \in \overline{1,(k-1)}$.

Таким чином, встановлено відповідність між результатами випробувань x_k і номерами випробувань $n_i^{(k)}$, $i \in N$, у яких ці результати з'явилися. З цієї відповідності випливає, що для кожного фіксованого $i \in N$ і будь-якого номера випробувань $n>2\cdot 4^i$ існує єдиний номер $m\geq 2$ такий, що $4^i\cdot m<n\leq(m+1)\cdot 4^i$.

У відповідних n випробуваннях результат x_k з'явиться у перших 4^i випробуваннях $n_1<4^i$ разів, а в наступних $n–4^i$ випробуваннях або $(m–1)$ разів, або m разів (у кожній серії з 4^i випробувань x_i з'явиться лише один раз). Отже, абсолютна частота результату x_i (події $\{x_i\}$) дорівнює $k_n(i)$, причому $n_1+m–1\le k_n(i)\le n_1+m$. Тому відносна частота $P_n^*(x_i)=\frac{k_n(i)}{n}$ задовольняє нерівність $\frac{n_1+m-1}{(m+1)4^i}\le P_n^*(x_i)\le\frac{n_1+m}{m\cdot 4^i}$.

Звідси і з нерівності $m\cdot 4^i<n\le(m+1)\cdot 4^i$ випливає, що коли $n\to\infty$, то і $m\to\infty$, а тому $P_n^*(x_i)\to\frac{1}{4^i}$, коли $n\to\infty$, для кожного $i\in N$.

Таким чином, для зчисленного простору $\Omega=\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ і найширшого простору подій S побудовано зчисленну серію послідовних випробувань таку, що для будь-яких перших n таких випробувань визначено відносну частоту $P_n^*(x_i)\ \ \forall i\in N$, а тому визначено ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), $n\in N$, причому $P_n^*(\{x_i\})\to\frac{1}{4^i}$, коли $n\to\infty$, $\forall i\in N$.

Оскільки $P_n^*(x_i)\to\frac{1}{4^i}$, коли $n\to\infty$, $\forall i\in N$, то ймовірність Мізеса $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n^*(A)$ визначена для будь-якої скінченної множини (події) $A\subset\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ та протилежної до неї події $\overline{A}$:

$$P(A)=\sum_{x_i\in A}\lim_{n\to\infty}P_n^*(x_i)\text{, а } P(\overline{A})=1-P(A).$$

Отже, ймовірність Мізеса визначена на сукупності S_0, що складається з усіляких скінченних подій $A\subset\Omega$, та протилежних до них подій $\overline{A}$.

Зрозуміло, що сукупність S_0 не є σ-алгеброю, оскільки $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_{2k}\}\notin S_0$, а $\{x_{2k}\}\in S_0\ \ \forall k\in N$.

Переконаємося, що S_0 є алгеброю. Перші дві умови алгебри очевидні: $\Omega\in S_0$ і $\overline{A}\in S_0\ \ \forall A\in S_0$.

Щоб перевірити третю умову, візьмемо довільні множини $A\in S_0$ і $B\in S_0$. Тоді можливі два випадки:

1) обидві множини A і B скінченні;
2) принаймні одна з множин A або B – нескінченна.

У випадку 1) множина $A\cup B$ скінченна і тому $A\cup B\in S_0$.

У випадку 2) існує номер *m*, для якого $A \bigcup B \supset \{x_m, x_{m+1}, ..., x_n, ...\}$ і тому $A \bigcup B$ є доповненням до деякої скінченної множини, внаслідок чого $A \bigcup B \in S_0$.

Таким чином, ймовірність Мізеса визначена на алгебрі S_0, що не є σ-алгеброю, і ця ймовірність не є σ-адитивною на S_0, оскільки

$$P(\Omega) = 1 \neq \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Підкреслимо також, що для множини $\{x_2, x_4, ..., x_{2k}, ...\}$, що є подією простору *S*, для кожного *n* існує $P_n^*(\{x_2, x_4, ..., x_{2k}, ...\})$, проте ймовірність Мізеса не існує, тобто послідовність $P_n^*(\{x_2, x_4, ..., x_{2k}, ...\})$ є розбіжною.

Справді, за умовою у перших 4^k випробуваннях елементарна подія x_1 з'явиться 4^{k-1} разів, елементарна подія x_2 – 4^{k-2}–1+16–4=4^{k-2}+11, а елементарна подія x_k з'явиться

$(4^k–4^{k-1})–(4^k–4^{k-1}):4–(4^k–4^{k-1}):16–...–(4^k–4^{k-1}): 4^{k-1}=2\cdot 4^{k-1}+1$ разів.

Враховуючи це, маємо:

$$P_{4^{2m}}(\{x_2, x_4, x_6, ...\}) \geq \frac{4^{2m-2} + 11}{4^{2m}} + \frac{2 \cdot 4^{2m-1} + 1}{4^{2m}} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{2},$$

$$P_{4^{2m}}(\{x_1, x_3, x_5, ...\}) \leq 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16},$$

$$P_{4^{2m+1}}(\{x_1, x_3, x_5, ...\}) \geq \frac{4^{2m}}{4^{2m+1}} + \frac{2 \cdot 4^{2m} + 1}{4^{2m+1}} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

$$P_{4^{2m+1}}(\{x_2, x_4, x_6, ...\}) \leq 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Тому $\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n(\{x_2, x_4, x_6, ...\}) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$, а $\underline{\lim_{n\to\infty}} P_n(\{x_2, x_4, x_6, ...\}) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, що свідчить про розбіжність послідовності $P_n(\{x_2, x_4, x_6, ...\})$ і про неіснування ймовірності Мізеса для події $\{x_2, x_4, x_6, ...\}$, а також і події $\{x_1, x_3, x_5, ...\}$.

Отже, навіть теоретичні застосування ймовірності Мізеса обмежуються лише алгебрами подій, причому, взагалі кажучи, існування ймовірності Мізеса для кожної події $\{x_k\}$, $k \in N$, не гарантує існування такої ймовірності для кожної зчисленної події $A \subset \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$. Саме тому означення ймовірності за Мізесом не може бути логічною основою для побудови стрункої і потужної теорії ймовірностей, якою є сучасна теорія ймовірностей, що ґрунтується на аксіомах А.М. Колмогорова.

8. Висновки. Зрозуміло, що означення Р. Мізеса, як і переважна більшість інших означень ймовірності, є суто теоретичним, оскільки на практиці неможливо напевно стверджувати, що спостережені відносні частоти p_n^* даної події A дійсно збігаються (чи не збігаються) до певного числа p. Відповідні висновки завжди гіпотетичні. Саме тому за допомогою усіх ймовірнісних моделей, що використовуються на практиці, можна робити лише наближені висновки щодо частоти здійснення реальних випадкових подій. Лише на практиці вирішується, наскільки ефективною є застосована модель і ця ефективність перевіряється саме за допомогою статистичних ймовірностей (відносних частот) досліджуваних реальних подій. Враховуючи це, у процесі навчання теорії ймовірностей і учнів середніх шкіл, і майбутніх вчителів, і студентів усіх інших спеціальностей треба систематично звертати увагу на статистичну ймовірність, без якої на практиці неможливо побудувати ефективну ймовірнісну модель для будь-якого реального стохастичного експерименту.

Література

1. Гихман И. И. Теория вероятностей / Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. – К. : Вища школа, 1979. – 408 с.
2. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика / Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. – Полтава : Довкілля-К, 2009. – 500 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / Феллер В. – М. : Мир, 1984. –528 с.
4. Жалдак М. І. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних / Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
5. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н., Фомин С. В. – М. : Наука, 1972. – 496 с.
6. Жалдак М. І. Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування / Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, 2007. – Випуск 5 (12). – С. 3-9.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Фихтенгольц Г. М. – М. : Наука, 1966. – 800 с.

ФОРМУВАННЯ САМОКОНТРОЛЮ ЯК РИСИ ОСОБИСТОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н. М. Захарченко[α], Т. І. Жиленко[β]
Україна, м. Суми, Сумський державний університет
[α] zacharchenkon@mail.ru
[β] zhylenko@phe.sumdu.edu.ua

Математика, що визнана універсальною мовою науки, елементом загальної людської культури, водночас є могутнім засобом розвитку особистості. Вона сприяє розвитку навичок логічного мислення, просторового уявлення, таких рис характеру, як уміння ставити перед собою проблемне завдання, цілеспрямованість у досягненні мети, віри у свої можливості, впевненість у правильності виконаного завдання. Але розвиток усіх цих якостей характеру неможливий без наявності ще однієї **найважливішої риси – риси самоконтролю**, яка є основою формування творчої, соціально зрілої особистості студента.

Розвиток технічного прогресу веде до збільшення об’єму наукової інформації. У вищих навчальних закладах з’являються нові дисципліни. Це приводить до зменшення годин, що відводяться на практичні заняття з фундаментальних дисциплін, збільшення частки самостійної роботи студентів і, як наслідок, до скорочення часу для тренувальних робіт за поточними темами та їх перевірки. У результаті таких змін студенти не мають можливості своєчасно усунути прогалини у поточних знаннях, що приводить до зниження якості освіти.

Повне розуміння студентом навчального матеріалу відбувається не під час первинного сприйняття матеріалу, а при самостійному відпрацюванні теоретичних понять та при самостійному розв’язуванні практичних завдань і задач прикладного змісту. При цьому необхідний постійний (поточний) контроль виконання.

Виникає протиріччя: студент повинен працювати самостійно, тобто без сторонньої допомоги, але без помилок, тобто під постійним контролем. Постійний контроль з боку викладача розвиває у студента звичку до безвідповідальності: його помилки знаходить викладач, а не він сам. Зміни у проведенні контролю мають бути пов’язані зі зростанням ролі самоконтролю та самооцінки. Необхідно дати студенту можливість не тільки засвоювати зміст навчального матеріалу, але і самостійно контролювати, оцінювати і коригувати свою пізнавальну діяльність. Традиційні методи контролю цього дати не можуть, що призводить до неможливості організувати ефективне продуктивне самостійне навчання.

У залежності від цілей дослідження сутність самоконтролю розкривається різними авторами неоднозначно: як якість особистості (А. С. Лінда, В. А. Крутецький), як мислення (К. П. Мальцева), компонент навчальної діяльності (Л. В. Ітельсон, Т. І. Гавакова, М. П. Маланюк), один із засобів регулювання своєї діяльності (Н. І. Куншинов, А. С. Лінда, Г. М. Сосніна).

З нашої точки зору найбільш прийнятне розуміння самоконтролю як засобу керування самостійною навчальною діяльністю, виявлення і виправлення допущених помилок, усунення причин, що породили їх, самовдосконалення способів діяльності (А. С. Лінда). При цьому його функцією є самоврядування людиною своєї діяльності і поведінки. У ході самоконтролю індивід здійснює розумові і практичні дії по порівнянню, самооцінці, коригуванню й удосконаленню виконуваної роботи.

При вивченні вищої математики роль самоконтролю нерідко трактують дуже вузько, а саме, як самостійне виправлення допущених помилок. Проте це лише одна з притаманних йому властивостей. При виконанні математичних завдань самоконтроль охоплює всі етапи діяльності студента: від аналізу умови завдання до завершального аналізу і перевірки результату. Його спрямованість – усвідомлення структури своєї діяльності, попередження появи помилок, контроль за діями, корекція отриманих проміжних і остаточних результатів. Основною ж функцією самоконтролю є самоуправління людини своєю діяльністю та поведінкою.

Значимість ролі контролю (самоконтролю) і оцінки (самооцінки) в структурі навчальної діяльності обумовлюється тим, що вона розкриває внутрішній механізм переходу зовнішнього у внутрішнє, інтерпсихічного в інтрапсихічне (Л. С. Виготський), тобто дій контролю й оцінки викладача у дії самоконтролю і самооцінки студента. При цьому психологічна концепція Л. С. Виготського, відповідно до якої будь-яка психічна функція з'являється на сцені життя двічі, проходячи шлях від інтерпсихічної, зовнішньої, здійснюваної в спілкуванні з іншими людьми, до інтрапсихічної – до внутрішнього, свого, тобто концепція інтеріоризації, дозволяє інтерпретувати формування власного внутрішнього контролю, точніше, самоконтролю як поетапний перехід. Цей перехід готується питаннями викладача, фіксацією найбільш важливого, основного. Викладач ніби створює загальну програму такого контролю, що і є основою самоконтролю.

П. П. Блонським були відмічені чотири стадії прояву самоконтролю стосовно до засвоєння матеріалу. Перша стадія характеризується відсутністю всякого самоконтролю. Студент, який знаходиться на цій стадії, не засвоїв матеріал і не може відповідно нічого контролювати. Друга стадія – повний самоконтроль. На цій стадії учень перевіряє повноту і правильність репродукції засвоєного матеріалу. Третя стадія характеризується П. П. Блонським як стадія вибіркового самоконтролю, при якому учень контролює, перевіряє тільки головне. На четвертій стадії видимий самоконтроль відсутній, він здійснюється ніби на основі минулого досвіду, на основі якихось незначних деталей, прикмет [1].

Головним психологічним механізмом самоконтролю прийнято вважати внутрішню увагу і внутрішню мову, тому що саме вони служать засобом реалізації знань, умінь і навичок, необхідних для його здійснення. Внутрішній мові приділяється роль «пускового механізму» самоконтролю і «гальмівного механізму» виконання неправильних дій. Завдяки цим механізмам відбувається пригадування і відтворення знань, необхідних для виявлення і виправлення помилок, вибір відповідних розумових дій. До того ж у момент розумових утруднень можливий перехід від внутрішньої мови до голосної, що дозволяє викладачеві спостерігати і направляти мисленнєвий (розумовий) пошук розв'язку математичної задачі студентами.

Під час внутрішнього контролю студент здійснює розумові й практичні дії по порівнянню, зіставленню, самооцінці, коригуванню й удосконаленню своєї роботи. При розв'язуванні задач самоконтроль охоплює всі етапи діяльності студента від аналізу умови до завершального аналізу й перевірки результату. Дія самоконтролю направлена на осмислення структури своєї діяльності, на передбачення появи помилок, на контроль за своїми діями та корекцію поетапних й остаточних результатів.

Завдяки навичкам самоконтролю формується й розвивається довільна увага, важливість якої немає сенсу доводити. У свою чергу, внутрішня увага та внутрішня мова є «пусковим механізмом» самоконтролю.

У залежності від мети та виду діяльності в математиці застосовують три напрямки самоконтролю: попередній, коригувальний (поточний) та підсумковий (заключний).

Попередній самоконтроль направлений на уявлення та осмислення майбутньої роботи, вибір необхідних дій, уявну актуалізацію загальної схеми розв'язування задачі. Його здійснення є показником ступеня розвитку у студентів уміння планувати, готовності обґрунтовувати життєздатність складеної програми дій. Такий контроль доречний на початку вивчення модуля чи теми.

Коригувальний самоконтроль – це самоконтроль за ходом розв'язування завдання. Найчастіше – це аналіз та оцінка послідовності виконуваних дій, їх змісту, відповідність до плану, перевірка правильності висновків окремих операцій, прогнозування результату.

Поточний самоконтроль – це самоконтроль у ході проведення практичних занять, виконання індивідуальних домашніх робіт. Виконуючи окремий крок розв'язку, дію, операцію, студент співвідносить їх з уявним або реальним, або з попереднім досвідом, зразком, еталоном.

Підсумковий самоконтроль спрямований на перевірку кінцевого результату та осмислення ходу розв'язування. Він проводиться на етапі завершального аналізу розв'язання і передбачає реалізацію всіх типів контролю. Такий вид самоконтролю допоможе студентам при підготовці до заліків та іспитів.

За китайською мудрістю: «скажи мені – і я забуду; покажи мені – і я запам'ятаю; залучи мене – і я навчусь». Головна ідея цього висловлювання – «залучи мене» – підсилюється результатами психолого-фізіологічних досліджень, у яких доведено: тільки те що пройшло через власну моторну чи мислительну діяльність, формує на раціонально-почуттєвому рівні певний досвід індивіда, тобто знання.

Зрозуміло, що залучення студента до контролюючої діяльності є основою переходу до саморегульованого навчання. Згідно з дослідженнями психологів, у юнацькому віці у них гостро постає проблема самоствердження. Реалізація цієї проблеми передбачає активне залучення юнаків до контролюючої діяльності шляхом взаємо- і самоконтролю.

Юнацький вік більш сенситивний до самоконтролю, ніж до взаємоконтролю, тому зупинимось на необхідних умовах для його здійснення:

– спрямованість студентів на перевірку своїх дій, включаючи мобілізацію вольових і емоційних ресурсів;

– оволодіння студентами прийомами контролю;

– наявність зразка для виконання дій;

– знання критеріїв оцінки виконуваної роботи.

Самооцінка – це процес здійснення індивідом власної діяльності на різних етапах здійснювання її. Найважливіша функція самооцінки – регулятивна. Вона фіксує відповідність або невідповідність результатів засвоєння навчальній ситуації. З формування самооцінки студенти здобувають уміння достатньо точно визначати наявність або відсутність у себе загального способу розв'язування певного типу задач [2].

Розрізняють два основні види самооцінки: ретроспективну і прогностичну.

Ретроспективна самооцінка – це оцінка результатів діяльності, яких досягнуто за бінарним критерієм: «добре – погано», « задовільно – незадовільно».

Прогностична самооцінка – це оцінка студентом своїх власних можливостей на предмет спроможності впоратись з навчальним завданням, що пропонується для виконання. В цьому випадку студент повинен співвіднести умови задачі з власним досвідом. А така самооцінка вже повинна спиратися на рефлексію, як здатність співвідносити з ситуацією власні можливості.

Від самооцінки студента залежить його більша або менша впевненість у собі, ставлення до власних помилок і складностей навчальної роботи, рівень домагань особистості студента в цілому. Так, студенти перших курсів з об'єктивною самооцінкою відрізняються активністю, прагненням до успіху, проявом максимальної самостійності. Студенти з низькою самооцінкою, навпаки проявляють невпевненість у собі, бояться викладача, більше слухають, ніж висловлюються в ситуації обговорювання навчального матеріалу, завжди очікують невдачі у власній навчальній діяльності.

Проблему самооцінки студентом свого рівня досягнень допомагають розв'язати технічні засоби контролю навчання. Призначення їх у сучасному навчанні – посилити і індивідуалізувати контролюючу функцію, забезпечити оперативну обробку і оцінку результатів навчання, допомогти виявити і відкоригувати недоліки навчання.

Дієвість тестових технологій для самоконтролю полягає у наступному:

- можливість оперативного одержання інформації про рівень засвоєння знань та вмінь;
- візуальність динаміки засвоєння навчального курсу;
- можливість своєчасно виявити напрям для коригування знань та вмінь;
- підвищити мотивацію студентів за рахунок більш повної інформації про власні досягнення.

У таких контролюючих програмах використовується багато видів тестів. Найпоширенішими з них є завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання з записом короткої відповіді, завдання на відповідність, завдання на складання логічних пар та інші.

Самостійний пошук відповідей, відпрацювання власних прийомів пошуку помилок сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу, звільняють студента від суб'єктивізму викладача. Скориставшись технічними засобами при самоконтролі студент витрачає на перевірку правильності виконання навчального завдання з будь-якого предмету всього декілька секунд, що допомагає йому вибрати оптимальну для нього швидкість навчання, яку не стримують викладачі, що перевіряють. Як наслідок, зростає групова продуктивність всіх видів і форм навчання.

Наведений вище короткий аналіз функцій самоконтролю та самооцінки доводить необхідність розвитку цієї риси характеру у студентів, які вивчають вищу математику. На жаль, їх, як правило, не вчать методів, прийомів, форм самоконтролю та самооцінки, що в результаті приводить до несформованості у особистості розвинених форм рефлексії своєї діяльності та поведінки, без якої неможливе повноцінне входження людини у життя суспільства.

Для того щоб сформувати у студентів уміння проводити самооцінку своїх дій необхідно:

– включати студентів у контрольно-оцінну та коригувальну діяльність;

– послідовно і систематично навчати їх раціональних методів, прийомів та форм самоконтролю;

– навчати студентів формуванню правильних і раціональних етапів контролю;

– ознайомлювати їх із змінами вимог до норм і критеріїв оцінки;

– акцентувати увагу студентів на внутрішньому контролі умінь та навичок;

– на основі вище названого формувати стійку потребу та навички самооцінки, самоконтролю та розвинених форм рефлексії.

Самоконтроль та самооцінювання є елементами цілісної системи контролю. Ідеалізований варіант дії такої системи – управлінські (зовнішній контроль) функції викладача, поступово вичерпуючись (потреба у зовнішньому контролі поступово зменшується), переводять навчання у план саморегульованого протікання, тобто самоконтролю, самоуправління, самоосвіти. Ідеальна модель властива лише математику-досліднику, ми ж формуємо особистість, яка звикла перевіряти і контролювати свої вчинки, що дуже важливо для студентів технічних спеціальностей, яких ми навчаємо.

Література

1. Блонский П. П. Память и мышление / П. П. Блонский. – СПб. : Питер, 2001. – 288 с.

2. Власова О. І. Педагогічна психологія / О. І. Власова. – К. : Либідь, 2005. – 400 с.

ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

О. М. Івлієва
Україна, м. Ізмаїл, Ізмаїльський державний гуманітарний університет
sanishivl@mail.ru

На сучасному етапі розвитку вітчизняної вищої школи та її інтеграції в європейський освітній простір проблема діагностики навчальних досягнень студентів у закладі вищої освіти набуває особливої актуальності. Це пояснюється тим, що значення педагогічної діагностики у вищому навчальному закладі в зв'язку з переходом на кредитно-модульну систему навчання істотно змінилося.

Сучасна педагогічна наука має чимало теоретичних і практичних надбань стосовно педагогічного діагностування навчальних досягнень студентів. Однак, питання особливостей проведення тестових діагностичних процедур для з'ясування рівня навчальних досягнень студентів – майбутніх вчителів інформатики, на нашу думку, розглянуто недостатньо. Тому метою статті є розкриття особливостей проведення діагностики навчальних досягнень студентів в умовах кредитно-модульної системи навчання, а також виокремлення певних проблем, пов'язаних із застосуванням тестового виду контролю. Завданнями нашого дослідження є з'ясування особливостей використання критеріально-орієнтованих тестів з математичних дисциплін, орієнтованих на вивчення рівня навчальних досягнень студентів – майбутніх вчителів інформатики.

У системі сучасних підходів до розробки тестових діагностичних методик все частіше пріоритетність надається критеріально-орієнтованому тестуванню. Цей напрямок теорії вимірювання знань пов'язаний з доробками А. Анастазі, Р. Ебеля, Дж. Макла, Е. Стоунса, Х. Уельса, Р. Фріке, Дж. Ханта та ін. Ця методика зорієнтована на порівняння одержаних результатів у підготовці майбутнього фахівця з мінімізованими необхідними вимогами, досягнення яких забезпечує потрібний рівень професійної підготовки. Дослідники визнають більший динамізм та потенційні можливості групи методик,орієнтованих на критерій, в оцінці не лише кількісної сторони рівня підготовки спеціаліста, але й аналізу фахової підготовки у якісному плані. Означені переваги критеріально-орієнтованої групи методик є особливо цінними в тому плані, що надають можливість внесення коректив в організацію підготовки майбутнього спеціаліста, усунення прогалин у його знаннях, уміннях та навичках за рахунок оперативної адаптації до індивідуальних особливостей студента.

Створення тестів в межах критеріально-орієнтованого підходу ґрунтується на визнанні планомірного характеру навчання, його протіканні у відповідності з заздалегідь сформульованими цілями. За точку відліку у визначенні успішності в таких тестах приймається не характеристика виконання завдань усіма учнями, а конкретна галузь змісту навчальної діяльності. Це дозволяє, як зауважує А. Анастазі, здійснювати інтерпретацію з акцентом на те, «що індивід може зробити і що він робить, а не те, як він виглядає на тлі інших» [1, 93].

Теоретичне підґрунтя застосування критеріально-орієнтованих тестів у навчанні складають роботи В. П. Беспалька, в яких висвітлено питання про класифікацію рівнів навчання (засвоєння) залежно від характеру діяльності, що виконується [2].

Як свідчить аналіз педагогічної літератури, проблема тестової перевірки знань у вищий школі, на відміну від загальноосвітньої, одержала свій розвиток саме з інформатизацією освіти, з впровадженням інформаційних технологій навчання. Склався й певний досвід застосування критеріально-орієнтованих тестів у навчальному процесі ВНЗ України (див., наприклад, [5]).

Рішенням Вченої Ради Ізмаїльського державного гуманітарного університету семестрові екзамени зимової сесії 2011/12 навчального року проводилися у формі комп'ютерного тестування. Автором було складено декілька тестів з навчальних дисциплін, зокрема, з математичного аналізу (I та III семестр вивчення) і теорії ймовірностей та математичної статистики.

Введення підсумкового тестування потребувало певних змін у викладанні: студентів необхідно готувати до такого іспиту вже в процесі навчання, і тому, паралельно з підготовкою підсумкового тестового іспиту, проводився тестовий контроль знань відповідних тем.

Однією з основних вимог критеріально-орієнтованого тестування є включення до тестів завдань, різних за ступенем складності [2, 94]. Особливості тестових програм, складених спеціалістами кафедри інформатики Ізмаїльського державного гуманітарного університету О. В. Коваленком, В. А. Мізюк та Т. М. Щьоголєвою, передбачали використання завдань з вибором однієї правильної відповіді з чотирьох запропонованих (одноваріантний вибір), з вибором декількох правильних відповідей з чотирьох запропонованих (поліваріантний вибір), тест з відкритою відповіддю, яка представлена числом та завдання на вибір короткої відповіді так/ні. Аналіз запропонованих видів тестових завдань дозволяє стверджувати, що тим самим забезпечені основні потреби з вибору як форми відповіді студента, так і можливостей використання питань різного ступеню складності.

Традиційно у педагогіці ступінь складності визначалася на основі рівня самостійної активної діяльності, що призводить до розв'язання висунутих задач (В. П. Беспалько, П. Я. Гальперін, Н. Ф. Тализіна, Т. І. Шамова та ін.). Взявши за основу шкалу рівнів засвоєння В. П. Беспалька, ми конструювали завдання трьох рівнів складності.

Так, в основі відображальної діяльності студента лежать репродуктивні процеси – розпізнавання об'єктів, що вивчаються, відтворення інформації про самі об'єкти, їх властивості та особливості. Умовно цей рівень можна назвати «рівень репродукції», а знання – «знання-знайомства» та «знання-копії» [2, 7]. Виконання завдань цього рівня не вимагало розгорнутих суджень, широких пояснень, складних навичок. Як правило, завдання І рівня передбачали відтворення означень, властивостей математичних об'єктів, застосування елементарних алгоритмів, правил розрахунків, наприклад:

Зв'язок між поняттями ***події*** *та* ***випробуванням*** *є наступним (оберіть вірну відповідь)*

1) *Подія – результат випробування*
2) *Випробування – результат події*
3) *Зв'язку між цими поняттями немає*
4) *Подія – вид випробування*

Інтерпретувальна діяльність студента спрямована на те, щоб глибше проникнути у суть явища, пояснити його, осмислити з різних точок зору. На цьому рівні діяльність є продуктивною, яку можна характеризувати через ступінь оволодіння уміннями застосовувати засвоєну інформацію у практичній сфері для розв'язання деякого класу задач, зокрема на основі використання зразка. В. П. Беспалько зазначає, що в цьому разі «діяльність здійснюється шляхом запуску заздалегідь засвоєних програм діяльності» [2, с. 7], називаючи знання цього рівня «знаннями-вміннями». Завдання другого рівня вимагали вмінь, інтерпретації, порівняння, узагальнення, застосування теоретичних знань у стандартних ситуаціях. Прикладом завдань другого рівня може бути:

Скільки елементів містить наступна множина: $\{\{x\},x,\{x,\{x\}\}\}$?

Творча активність студентів була спрямована на створення нових продуктів діяльності. В. П. Беспалько вважає, що на цьому рівні відбувається явище переносу знань і вмінь, тобто, діяльність студента набуває гнучкого і пошукового характеру. Вчений називає цей рівень «трансформацією» [2, 8]. Найбільш характерна риса творчої діяльності – вироблення принципово відмінних від засвоєних програм розв'язань і дій. Завдання третього рівня складності вимагала від студентів творчого підходу до розв'язання, наприклад:

На факультеті вчаться студенти, що мають домашній персональ-

ний комп'ютер і студенти, що не мають домашнього персонального комп'ютера. Нехай А – множина усіх студентів факультету; В – множина студентів факультету, що мають домашній персональний комп'ютер. Тоді різницею А\В цих множин буде:

1) множина студентів факультету, що не мають домашнього персонального комп'ютера

2) множина усіх студентів факультету

3) множина студентів факультету, що мають домашній персональний комп'ютер

4) порожня множина

Відтак, робота зі студентами організовувалася таким чином, щоб була представлена можливість перевірки рівня сформованості всіх видів діяльності - від репродуктивної до діяльності продуктивної.

Після проведення процедури тестування логічним є дослідження якості тестів, оскільки «лише підготовлений певним чином комплекс завдань дає змогу з використанням певних діагностичних методів правильно оцінити рівень знань і вмінь суб'єктів навчання» [2, 5]. У ході аналізу якості тестів потрібно було встановити їх основні характеристики - валідність, об'єктивність, надійність та точність [1].

Тест називається валідним, якщо він вимірює те, для вимірювання чого він призначений [4]. Для тестів вимірювання навчальних досягнень на перший план висувається вимога валідності за змістом. Валідність за змістом закладалася у тести вже при виборі завдань. Тести складалися відповідно до діючих навчальних програм підготовки фахівців.

Валідність за однозначністю визначається за допомогою співставлення результатів з зовнішнім критерієм.

У рамках дослідження було проведено порівняння результатів тестування з результатами роботи студентів протягом семестру. Дослідженню підлягали тести з математичного аналізу (І семестр) і теорії ймовірностей та математичної статистики (V семестр), складені для перевірки навчальних досягнень студентів – майбутніх вчителів інформатики. Критерієм валідності виступав коефіцієнт кореляції r_{xy}, де

x - кількість балів за результатами поточного контролю, що включав оцінку роботи студента на практичних заняттях, виконання поточних та модульних контрольних робіт, самостійну роботу;

y – результат тестування -- кількість балів, набраних при виконанні тестів.

Коефіцієнт кореляції – характеристика ступеня лінійного взаємозв'язку між двома співзалежними ознаками. Чим ближче значення r до ±1, тим щільніший зв'язок. Знак «+» вказує на прямий зв'язок. При r=0 зв'язок відсутній.

Отримане значення коефіцієнта кореляції r_{xy} =0,76 свідчить про те, що зв'язок між показниками є прямий, тісний. Деяка віддаленість від 1 обумовлена тим фактом, що залежність між x та y є більш складною, ніж лінійна.

Надійність – відносна стабільність, стійкість, узгодженість результатів тестування в первинному і повторному його використанні з одними і тими самими досліджуваними. Дослідження виконання цієї характеристики планується на початку наступного семестру.

Тест вважається об'єктивним, якщо вплив суб'єктивних дій тих, хто проводить тестування є мінімальним. Мінімізація впливу суб'єктивних чинників забезпечується стандартизацією умов проведення тестування, оцінювання та аналізування результатів. Стандартизація умов тестування була забезпечена наступними факторами: об'єктивністю проведення тестування; об'єктивністю обробки даних; об'єктивністю інтерпретації результатів.

Аналогічно визначалися характеристики тестів з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Отже, складені і застосовані тести з математичних дисциплін для перевірки навчальних досягнень майбутніх вчителів інформатики вивчають сформованість як репродуктивної, так і продуктивної та творчої складових професійно орієнтованих знань з предметів математичного циклу. Проведене дослідження якості тестів дозволяє стверджувати, що розроблені тести є валідними, об'єктивними, надійними та точними, а, значить, якісно вимірюють досліджувану якість і можуть бути використаними у подальшій роботі.

Література

1. Анастази А. Психологическое тестирование / Анна Анастази, Сьюзен Урбина. – 7-е изд. – СПб. : Питер, 2007. – 688 с.
2. Беспалько В. П. Критерии для оценки знаний учащихся и пути оптимизации процесса обучения / Беспалько В. П. // Теория поэтапного формирования умственных действий и управление процессом учения. – М., 1967. – С. 3-23.
3. Булах І. Є. Створюємо якісний тест : навчальний посібник / І. Є. Булах, М. Р. Мруга. – К. : Майстер-клас, 2006. – 160 с.
4. Ингекамп К. Педагогическая диагностика / К. Ингекамп.–- М.: Педагогика, 1991. – 239 с.
5. Лузик Э. В. Разработка и внедрение критериально-ориентированых тестов достижений по учебным дисциплинам, формирующим общенаучную подготовку в инженерном вузе : учебно-методическое пособие / Лузик Э. В. – К. : КМУГА, 1996. – 27 с.

О РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Н. Ю. Иохвидович, А. В. Лысянская
Украина, г. Харьков, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
iamnytskyi@mail.ru

Вопросу о решении геометрических задач на построение в методике преподавания математики всегда уделялось и уделяется достаточно внимания: он разбирается в стабильных учебниках, имеется также множество методических руководств, где преподаватель может найти нужные ему справки и указания. Иначе обстоит дело с вопросом о решении геометрических задач на вычисление. Этот вопрос до настоящего времени остается недостаточно разработанным, а навыки учащихся в решении геометрических задач на вычисление слабы: учащиеся, не вырабатывая определенного метода подхода к решению таких задач, смотрят на каждую задачу как на загадку; учащийся должен «сообразить», как решать каждую задачу, поэтому большинство, несмотря на усилия найти ход решения задачи, сделать это без помощи преподавателя или лучших учащихся не может. Проблемность ситуации состоит в том, что одна и та же задача может иметь множество решений, различающихся принципиальными подходами. Но, с другой стороны, из сложившейся ситуации можно извлечь определенную методическую выгоду. Так, на примере решения одной задачи можно изложить почти всю планиметрию.

Задача. В трапеции диагонали длиной 6 см и 8 см взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

Способ 1.

Сделаем дополнительные построения: проведем $DK \| AC$ и продолжим сторону BC вправо до пересечения с прямой DK (рис. 1).

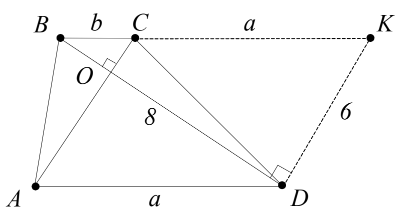


Рис. 1

Так как $ACKD$ – параллелограмм, то $DK = 6$ см. $BD \perp DK$, поскольку $BD \perp AC$. Следовательно, ΔBDK – прямоугольный и по теореме Пифагора $BK = \sqrt{BD^2 + DK^2}$, $BK = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см).

Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, т.е. $\frac{BC + AD}{2} = \frac{BC + CK}{2} = \frac{BK}{2} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ 2

(похожий на способ 1).

Проведем $CE \| BD$ до пересечения с продолжением основания AD (рис. 2).

$DE=BC$, поскольку $DBCE$ – параллелограмм. Длину отрезка AE вычислим по теореме Пифагора из прямоугольного ΔACE

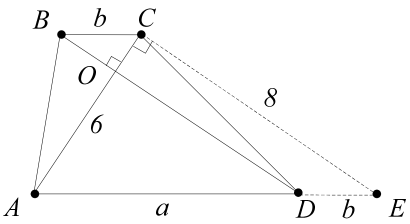


Рис. 2

($CE \parallel BD$, но $BD \perp AC$, следовательно, $CE \perp AC$): $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}$;

$AE=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (см).

Длина средней линии $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{AE}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ 3.

Пусть MN – средняя линия трапеции (рис. 3).

Проведем $MK \parallel BD$ и соединим точки N и K. NK – средняя линия ΔACD, следовательно, $NK=\dfrac{1}{2}AC \Rightarrow NK=3$ (см). MK – средняя линия ΔABD, следовательно, $MK=\dfrac{1}{2}BD \Rightarrow MK=4$ (см).

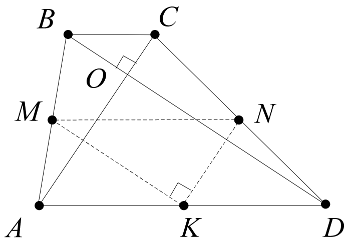


Рис. 3

$\angle MKN=\angle AOD$ как углы с соответственно параллельными сторонами. ΔMNK – прямоугольный. $MN=\sqrt{MK^2+NK^2}$;

$MN=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ 4.

Соединим середины сторон трапеции (рис. 4). Легко доказать, что $MPNQ$ – параллелограмм с прямым углом, т.е. прямоугольник со сторонами 3 см і 4 см.

Его диагонали $MN=PQ=5$ (см) (египетский треугольник).

Ответ: 5 см.

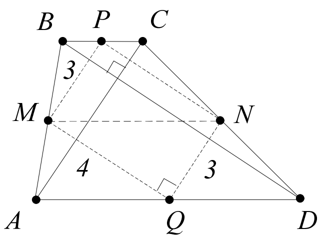


Рис. 4

Способ 5.

Продлим сторону CA на расстояние $AM=CO$ (рис. 5). Через точку M проведем $MN||AD$, где N – точка пересечения прямой MN и диагонали BD. В ΔMON $\angle O = 90^\circ$, OM=6 (см), ON=8 (см). По теореме Пифагора MN=10 (см).

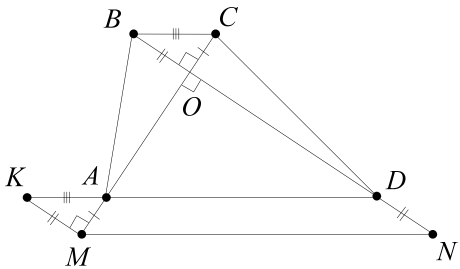


Рис. 5

Проведем $MK||ND$ и продлим AD до пересечения с MK. $\Delta MAK=\Delta BOC$ (по двум катетам), следовательно, $AK=BC$. Полученный четырехугольник $MKDN$ – параллелограмм, в котором $DK=MN$ =10 (см). Но $DK=AD+BC$. Таким образом, средняя линия равна 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 6.

Продолжим диагональ CA за точку A на отрезок $AM=OC$, а диагональ BD – за точку B на отрезок $DN=BO$ (рис. 6). Получим прямоугольный ΔMON с катетами 6 см и 8 см, откуда гипотенуза MN=10 см.

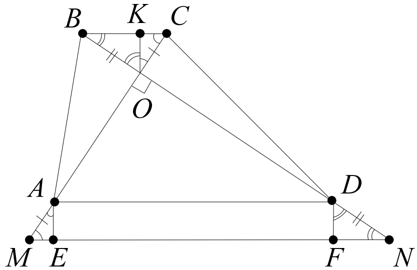


Рис. 6

Проведем $AE \perp MN$, $DF \perp MN$, $OK \perp BC$. $\Delta AEM=\Delta OKC$, $\Delta DFN=\Delta OKB$ по двум углам и стороной между ними. Следовательно, $ME=KC$ и $FN=BK$, т.е. $MN=AD+BC$=10 (см) и средняя линия равна 5 см.

Ответ: 5 см.

Способ 7.

Пусть $OC=x$, $BO=y$; тогда $AO=6–x$, $DO=8–y$ (рис. 7). Из подобия ΔBOC и ΔAOD имеем: $\dfrac{x}{6-x}=\dfrac{y}{8-y}$;

$8x–xy=6y–xy$; $8x=6y$; $y=\dfrac{4}{3}x$.

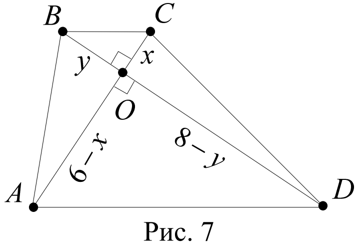


Рис. 7

ΔBOC – прямоугольный, следовательно, $BC=\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{9}x^2}=\sqrt{\frac{25}{9}x^2}=\frac{5}{3}x$.

Из того же подобия ΔBOC и ΔAOD $\frac{BC}{AD}=\frac{OC}{AO}$; $\frac{\frac{5}{3}x}{AD}=\frac{x}{6-x}$, откуда $AD=\frac{5}{3}(6-x)=10-\frac{5}{3}x$.

Тогда средняя линия $\frac{AD+BC}{2}=\frac{\frac{5}{3}x+10-\frac{5}{3}x}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ 8 (похожий на способ 7).

Продлим диагонали CA и BD на отрезки $AM=OC$ и $DN=BO$ (рис. 8). В прямоугольном ΔMON гипотенуза $MN=10$ (см). Воспользовавшись предыдущими выкладками, и, учитывая, что $\Delta AOD \sim \Delta MON$,

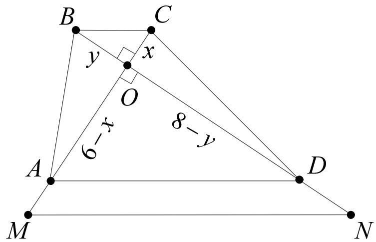


Рис. 8

$AD=\frac{3}{4}MN=\frac{3}{4}\cdot 10=7{,}5$ (см),

$BC=\frac{5}{3}x$. Поскольку $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, $\frac{BC}{AD}=\frac{OC}{AO}$; $\frac{\frac{5}{3}x}{7{,}5}=\frac{x}{6-x}$; $x=1{,}5$ (см).

$BC=\frac{5}{3}x=\frac{5}{3}\cdot 1{,}5=2{,}5$ (см) и средняя линия равна $\frac{AD+BC}{2}=\frac{7{,}5+2{,}5}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ 9 (тригонометрический).

Помня, что $y=\frac{4}{3}x$ (рис. 9), в прямоугольном треугольнике BOC $tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{4}{3}x}{x}=\frac{4}{3}$. Воспользовавшись

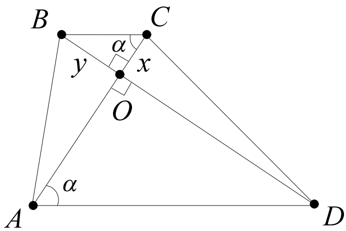


Рис. 9

формулой $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, найдем cos α: $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Из ΔBOC: $\cos\alpha=\dfrac{OC}{BC}$; $BC=\dfrac{OC}{\cos\alpha}=\dfrac{x\cdot 5}{3}=\dfrac{5}{3}x$.

Из ΔAOD: $\cos\alpha=\dfrac{AO}{AD}$; $AD=\dfrac{6-x}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5\cdot(6-x)}{3}=\dfrac{5}{3}(6-x)$.

Средняя линия $\dfrac{AD+BC}{2}=\dfrac{\frac{5}{3}(6-x)+\frac{5}{3}x}{2}=\dfrac{10-\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}x}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

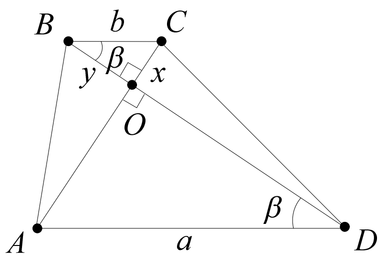


Рис. 10

<u>Способ 10</u> (тригонометрический).

Поскольку $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (рис. 10), $y=\dfrac{4}{3}x$; $\dfrac{x}{6-x}=\dfrac{b}{a}$, $ax=6b-bx$, $(a+b)x=6b$, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{3b}{x}=\dfrac{3}{\sin\beta}$.

$tg\beta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{\frac{4}{3}x}=\dfrac{3}{4}$, а $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, т.к. прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 имеет гипотенузу 5. Таким образом, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{3}{\sin\beta}=\dfrac{3}{\frac{3}{5}}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

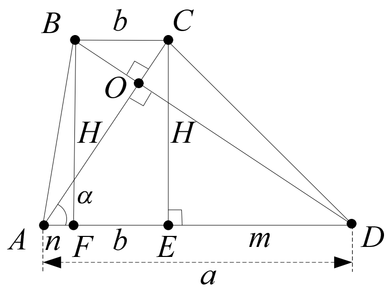


Рис. 11

<u>Способ 11.</u>

Проведем высоты трапеции $BF=CE=H$ (рис. 11).

В ΔACE $AE=\sqrt{6^2-H^2}$; в ΔDBF $FD=\sqrt{8^2-H^2}$. $AE+FD=$ $=\sqrt{36-H^2}+\sqrt{64-H^2}=$ $=n+b+m+b=a+b.$ Средняя линия

$$\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{36-H^2}+\sqrt{64-H^2}}{2}.$$ Из ΔACE $tg\alpha=\frac{CE}{AE}=\frac{H}{\sqrt{36-H^2}}$.

Но, как уже было сказано, $tg\alpha=\frac{4}{3}$. Следовательно, $\frac{H}{\sqrt{36-H^2}}=\frac{4}{3}$;

$3H=4\sqrt{36-H^2}$; $9H^2=16\cdot 36-16H^2$; $25H^2=16\cdot 36$; $H^2=\frac{16\cdot 36}{25}$;

$H=\frac{4\cdot 6}{5}=4{,}8$. Таким образом, $\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{36-4{,}8^2}+\sqrt{64-4{,}8^2}}{2}=\frac{3{,}6+6{,}4}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

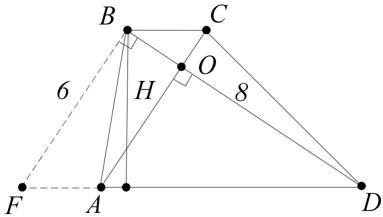


Рис. 12

Способ 12.

Поскольку диагонали трапеции перпендикулярны, то $S_{\text{трап}}=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$;

$S_{\text{трап}}=\frac{1}{2}6\cdot 8=24$ (см^2).

Кроме того, $S_{\text{трап}}=\frac{a+b}{2}\cdot H$.

Высоту H можно рассматривать и как высоту прямоугольного треугольника FBD (рис. 12) с катетами 6 см и 8 см и гипотенузой $\sqrt{6^2+8^2}=10$ (см). Площадь этого треугольника $S_{FBD}=\frac{1}{2}FD\cdot H=\frac{1}{2}FB\cdot BD$, $S_{FBD}=\frac{1}{2}10\cdot H=\frac{1}{2}6\cdot 8$, откуда H=4,8 (см), следовательно, $\frac{a+b}{2}=\frac{S_{\text{трап}}}{H}=\frac{24}{4{,}8}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

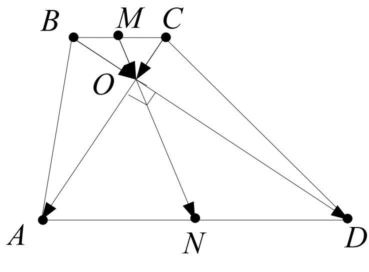


Рис. 13

Способ 13 (векторный метод).

Пусть точки M и N – середины сторон BC и AD (рис. 13). Можно доказать, что $ON=k\ MO$, т.е. векторы коллинеарны и точки M, O и N лежат на одной прямой.

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}\right),\ \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right).$$

Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}\right),$$

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\cdot\cos 90^\circ+\overrightarrow{DD}^2\right).$$

Учитывая, что $\cos 90^\circ=0$, $MN^2=\frac{1}{4}\left(6^2+8^2\right)=25$, MN=5 (см).

При решении задачи четвертым способом было показано, что длина MN равна длине средней линии трапеции.

Ответ: 5 см

Способ 14 (векторный метод).

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=$

$\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$,

т.е. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)^2$,

$\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\cos 0^\circ+\overrightarrow{BC}^2=$

$=\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\cdot\cos 90^\circ+\overrightarrow{BD}^2$.

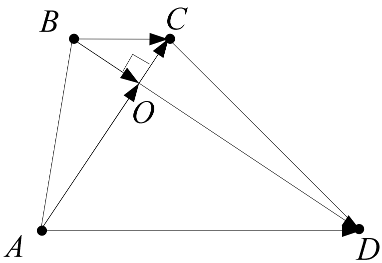


Рис. 14

$\left(AD+BC\right)^2=AC^2+BD^2$; $\left(AD+BC\right)^2=6^2+8^2=100$;

AD+BC=10 (см).

Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, т.е. $\frac{AD+BC}{2}=5$ (см).

Ответ: 5 см.

Литература

1. Болтянский В. Г. Как учить поиску решения задач / В. Г. Болтянский, Я. И. Груденов // Математика в школе. – 1988. – №1. – С. 8-14.

2. Александров А. Д. Геометрия / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаева. – М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит, 1990. – 672 с.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОНЯТІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ

А. М. Капіносов, О. В. Смолінська
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
xmalesyax@mail.ru

Понятійна компетентність – *знання* понятійного апарату у предметній області, структури і форми дедуктивних теорій; *уміння* відтворювати означення, формулювати факти та їх обґрунтовувати; *уявлення* про їх походження та їх модельні інтерпретації (приклади).

Напрями набуття понятійної компетентності:

■ володіти і використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, визначення понять, наочний смисл, обсяг, властивості, межі понять, відношення між поняттями; висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми, доведення теорем, контрприклади до теорем тощо);

■ будувати, вдосконалювати та використовувати на практиці власну систему математичних уявлень на основі понятійного апарату дедуктивних теорій;

■ відтворювати дедуктивні доведення теорем та доведення правильності процедур розв'язань типових задач;

■ проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв'язування задач та шукати логічні помилки у невірних дедуктивних міркуваннях;

■ використовувати математичну та логічну символіку на практиці при оформленні математичних текстів.

Учні демонструють понятійну компетентність в математиці, якщо можуть пояснити те, що вони спроможні розпізнати, конструювати приклади об'єктів, що охоплюються поняттям (належать обсягу поняття) та приклади об'єктів, що не охоплюються поняттям (не належать обсягу поняття); встановлюють та застосовують закони (тобто справедливі твердження, що узагальнюють відношення між поняттями в умовній формі (якщо…, то…)); знають і застосовують факти та визначення; порівнюють, протиставляють та об'єднують поняття і закони з метою розширення понять та поширення законів; розпізнають, інтерпретують та застосовують позначення, символіку та терміни для представлення понять; інтерпретують допущення і відношення понять у математичних постановках.

Понятійна компетентність відображає здатність учнів мислити у математичних постановках (умовах), що включає коректне використання визначень понять, відношень між ними та їх інтерпретації. Учні демонструють дану компетентність, якщо вони наводять приклади, загальні або специфічні, а також вміють маніпулювати головними ідеями стосовно понять у різних формах [2].

Доцільно обговорювати критерії математичної компетентності у термінах запровадженої в Україні 12-бальної шкали оцінювання, яка передбачає визначення навчальних досягнень учнів за такими рівнями: базовий, достатній, дорий, творчий. Для понятійної компетентності ці рівні можна інтерпретувати *рівнями засвоєння понять*.

1. Концептуалізація поняття – засвоєння концептуальних ідей, що лежать в основі поняття, наприклад, типових ситуацій, в яких його доцільно використовувати.

2. Властивості поняття – засвоєння основних властивостей поняття.

3. Застосування поняття – вміння «бачити» поняття в типових ситуаціях.

4. Систематизація поняття – узагальнення поняття, зв’язок з іншими поняттями, межі поняття.

Можна виділити наступні рівні застосування понять і систем понять [1].

1. Поняття вважається засвоєним на рівні відтворення, якщо учень може описати (відтворити) його з усіма суттєвими ознаками і сформулювати правило розпізнавання.

2. Поняття вважається засвоєним на рівні розпізнавання, якщо учень може виділити його з запропонованої ситуації, задачі, тексту.

3. Поняття вважається засвоєним на рівні застосування, якщо учень може його розпізнати, зв’язати з іншими, розкласифікувати сукупність об’єктів у зв’язку з відомими поняттями. На цьому рівні засвоєння поняття можливе виділення трьох підрівнів: встановлення зв’язків поняття, що перевіряється з іншими в ситуаціях і задачах аналогічним навчальним (діяльність за зразком), в ситуаціях, що вимагають знаходження нових зв’язків і в ситуаціях, що вимагають «підвести» реальні об’єкти під відомі поняття.

Система понять (тезаурус) вважається засвоєною на рівні відтворення, якщо учень може відтворити, побудувати розповідь про сутність системи в цілому чи окремих її частин.

Система понять вважається засвоєною на рівні застосування, якщо учень користуючись системою, розв’язує різні задачі. При цьому можна виділити три підрівня: застосування тезауруса в ситуаціях аналогічних навчальним (передбачається діяльність за зразком); в ситуаціях, що вимагають перебудови зв’язків між поняттями тезауруса (перенос отриманих закономірностей в нові умови), і в ситуаціях, що вимагають добудови тезауруса (перенос вивчених закономірностей в нові умови); і, нарешті, в ситуаціях, що вимагають добудови тезауруса новими поняттями (діяльність по формуванні нових понять, що вимагає залучення невідомої інформації з підручника, від учителя та інших джерел інформації).

Встановлено, що для засвоєння понять обов'язкові такі дії:

1) підведення під поняття;

2) вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання об'єкта;

3) виведення наслідків про належність або неналежність предмета до поняття.

Ці дії носять загально пізнавальний характер, тобто необхідні при засвоєнні будь-яких понять. Істотними компонентами при оволодінні поняттями, слідує вважати:

1) засвоєння визначеної системи знань про поняття;

2) оволодіння спеціальною операційною системою дій (підведення під поняття, вибір необхідних й достатніх ознак для розпізнавання об'єкта, виведення наслідків);

3) встановлення системи понять та їх родо-видових відношень всередині системи, взаємозв'язок їх ознак;

4) розкриття генезису понять.

Засвоєння понять можна узагальнити у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

Етапи процесу засвоєння понять

Етап	Зміст етапу	Рівень знань	Показники засвоєння
1	Усвідомлення змісту наукового поняття і змісту дій, виконуваних на основі нього, формування орієнтувальної основи предметних дій	впізнавальний	різного роду уміння впізнавати математичні предмети (понятійні об'єкти; теоретичні положення, що відповідають виконанню дії; правильно виконані елементарні операції, записи, що відповідають правильному виконанню дій)
2	Репродуктивне застосування змісту понять для виконання дій і розв'язування задач за зразком	репродуктивне розуміння	уміння, навики виконувати предметні дії
3	Конструктивно-репродуктивне (частково-репродуктивне) застосування змісту понять	конструктивне (логічне, аналітичне) розуміння	уміння виконувати різного роду види діяльності на основі змісту

Етап	Зміст етапу	Рівень знань	Показники засвоєння
4	Продуктивне застосування змісту понять з елементами евристики у нестандартних умовах	евристичне (продуктивне) розуміння	уміння виконувати діяльності з елементами евристики

Підводячи підсумки, можна сказати, що понятійна компетентність є невід'ємною і важливою складовою математичної компетентності учнів і потребує детального вивчення, а також подальшої розробки технології її формування.

Література

1. Батурина Г. И. Методика составления проверочных материалов / Батурина Г. И., Высоцкая С. И., Григорьева З. Г. // Качество знаний учащихся и пути его совершенствования / Под ред. М. Н. Скаткина, В. В. Краевского. – М. : Просвещение, 1978. – С. 115-127.

2. Хуторской А. В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций [Электронный ресурс] / А. В. Хуторской // Эйдос. – 2005. – Режим доступа : http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm.

МОДИФІКАЦІЯ КАНТОРІВСЬКОГО КОНСТРУКТИВНОГО ПІДХОДУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ДИДАКТИЧНА ДОЦІЛЬНІСТЬ

В. К. Кірман
Україна, м. Дніпропетровськ, Дніпропетровський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
v_kirman@mail.ru

Теорія дійсних чисел утворює фундамент, на якому базується курс математичного аналізу, як для класичних, так і педагогічних університетів. Класичний підхід, що ґрунтується на теорії дедекіндових перерізів [3; 8], у сучасних курсах, як правило, замінюється формальною теорією нескінчених десяткових дробів [4] або аксіоматичним підходом [5]. Спостереження свідчать про те, що більша частина тих, хто уперше вивчає основи аналізу з великими труднощами сприймають навчальний матеріал, побудований на конструктивній базі, крім того конструктивний виклад матеріалу займає велику кількість часу по відношенню до аксіоматичного. У той же час, початкове ознайомлення з теорією дійсних чисел на основі аксіоматичного підходу, як обґрунтовано у дослідженні Г. О. Михаліна [6], є недоцільним для студентів математичних та педагогічних спеціальностей, також деякі аксіоми (наприклад, повноти) не є очевидними і викликають відчуття штучності. Проти аксіоматичного підходу також виступають аргументи, пов'язані з тим, що на початку вивчення основ математичного аналізу неможливо обґрунтувати категоричність системи аксіом дійсних чисел. Очевидно, що вирішення вище визначених проблем можна шукати з одного боку в удосконаленні системи наступності при вивченні математичного аналізу, а з іншого в удосконаленні логіко-структурних схем викладу теорії дійсних чисел на основі конструктивного підходу.

Ґрунтовно питання наступності при вивченні математичного аналізу досліджуються М. В. Босовським [2], на прикладі теорії границь їм виокремлено етапи формування складних понять аналізу. Теоретичною базою для таких досліджень стали роботи Н. А. Тарасенкової [7], у яких з позицій семіотичного підходу будується теорія формування понять у математиці. Питання навчання студентів-математиків педагогічних університетів конструктивному визначенню дійсних чисел ретельно вивчаються у роботах Г. О. Михаліна [6], значна увага в яких приділяється мотиваційному аспекту, що пов'язаний з професійною діяльністю і майбутньому. Математична коректність логіко-структурних схем викладу матеріалу на основі конструктивних підходів до побудови дійсних чисел досліджена в класичній роботі І. В. Арнольда [1]. У цій роботі як найбільш природний до сприйняття виділяється підхід Г. Кантора до визначення дійсних чисел, побудований на теорії фундаментальних послідовностей раціональних чисел, при цьому концентрується увага на певних технічних труднощах, що з ним пов'язані. Канторівський підхід має велике пропедевтичне значення, як явний приклад поповнення метричного простору. На сьогоднішній день підхід Г. Кантора до побудови дійсних чисел практично не застосовується при вивченні основ аналізу в основному через те, що початкове введення фундаментальних послідовностей є неприродним для тих, хто лише вперше ознайомлюється з поняттями аналізу. Таким чином, існує проблема ефективного та доступного ознайомлення з теорією дійсних чисел, один із шляхів її вирішення – виклад матеріалу на основі теорії фундаментальних послідовностей достатньо не досліджений і не висвітлений в науковій та методичній літературі.

Мета статті – побудувати послідовну схему навчання теорії дійсних чисел на основі теорії фундаментальних послідовностей раціональних чисел, теоретично обґрунтувати її дидактичну доцільність.

Згідно підходу Г. Кантора кожне дійсне число ототожнюється з деякою фундаментальною послідовністю раціональних чисел. Дві такі послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ вважаються еквівалентними, якщо для будь-якого додатного ε існує натуральне число n_0 таке, що для будь-якого натурального $n \geq n_0$ виконується нерівність $|x_n - y_n| < \varepsilon$. Тут ε можна вважати раціональними. Клас еквівалентності, що визначається фундаментальною послідовністю $\{x_n\}$ позначаємо $[x_n]$. З кожним таким класом і ототожнюється дійсне число. На класах еквівалентності вводяться звичайні арифметичні операції та доводиться їх коректність. Якщо $x=[x_n]$ та $y=[y_n]$, то

$$x+y=[x_n+y_n],$$
$$x-y=[x_n-y_n],$$
$$x \cdot y=[x_n \cdot y_n].$$

Стосовно операції ділення, то в якості *представника* (з класу еквівалентності) дільника обираємо лише такі послідовності $\{y_n\}$, що існує $\varepsilon>0$ таке, що $|y_n|>\varepsilon$ для будь-якого натурального n. Тоді

$$x:y=[x_n:y_n].$$

З кожним раціональним числом можна ототожнити стаціонарну раціональну послідовність, що складена з тих самих чисел. Після доведення коректності операцій можна довести, що дійсні числа з такими операціями утворюють структуру поля (доведення асоціативності, комутативності, дистрибутивності операцій, існування єдиного оберненого та протилежного елементів).

Наступним етапом стає введення відношення порядку на множині дійсних чисел. Згідно [1] число $a=[a_n]$ більше числа $b=[b_n]$, якщо існує додатне (раціональне) δ таке, що $a_n-b_n>\delta$, для усіх номерів n, що більші за деяке натуральне n_1. Тут також необхідно доводити, що відношення «<» на множині дійсних чисел утворюють лінійний порядок. У тій самій роботі І. В. Арнольда [1] будуються схеми, в яких вводиться та доводиться коректність операції добування коренів, піднесення до степеня з дійсним показником, добування логарифмів. При такому підході далі можливо вже розвивати теорію границь для послідовностей дійсних чисел. Запропоновану вище схему викладу матеріалу будемо далі називати базовою канторівською схемою К0.

Дидактичні недоліки К0 майже очевидні. Звернемо увагу на переваги. Перш за все, К0 дає динамічну інтерпретацію дійсного числа. Тобто, дійсне число розуміється як ідеальний нескінчений процес вимірювання або уточнення. По-друге, так само динамічну інтерпретацію можна далі застосовувати при визначенні елементарних функцій, та, по-третє, схема К0 має пропедевтичний характер для вивчення понять загальної топології. Щодо недоліків, то до головних можна віднести: 1) штучність поняття фундаментальності послідовностей для тих, хто вперше почав вивчати аналіз; 2) ряд технічних труднощів знов таки для тієї ж категорії осіб; 3) необхідність спеціальних обмежень, наприклад, при означенні ділення; 4) неочевидність при визначенні відношення порядку.

Усіх вище визначених недоліків можна запобігти, якщо побудувати процес викладання, модернізувавши незначно схему К0. У програмі математичного аналізу після вивчення основ теорії множин, натуральних, цілих, раціональних чисел пропонується розглянути блок *LQ*, присвячений теорії границь, але на множині раціональних чисел. Тут можна вести розмову про послідовності чисел, збіжних або розбіжних у полі раціональних чисел. Саме у блоці *LQ* без проблем формулюються та доводяться основні теореми про границі послідовності: про єдність границі, про обмеженість збіжної послідовності, властивості нескінченно малих, арифметичні властивості границь, теореми про граничний перехід у нерівностях. Частково можна також розглядати теорію підпослідовностей. Значну кількість технічних прикладів на обчислення границь можна також розглядати в цьому блоці. Тут також можна вивчати теореми Тьопліца, Штурма і т.п. Формальне вивчення границь у полі раціональних чисел повинно супроводжуватися неформальним обговоренням, в якому кожного разу підкреслюється, що зі зростанням номеру члени збіжної послідовності (а розглядаються лише збіжні в полі раціональних чисел) *практично* не відрізняються один від одного. Так поступово формується поняття фундаментальності послідовності. Тепер при формальному введенні воно перестає носити штучний характер. Важливий момент – наведення прикладів фундаментальних послідовностей, які не є збіжними в полі раціональних чисел. Такі приклади на цьому етапі є дуже нетривіальними. Важливий пропедевтичний характер для наступного блоку може мати доведення того факту, що якщо послідовність раціональних чисел обмежена та монотонна, то вона є фундаментальною. Доведення такого твердження можна пропонувати провести самостійно або в режимі консультацій.

Звернемо увагу, що під час вивчення питань блоку *LQ* в курсі алгебри удосконалюються навички, пов'язані з елементарною теорією множин, зокрема достатньо уваги приділяється роботі з бінарними відношеннями, достатньо ретельно розбирається відношення еквівалентності, тому реалізація основних ідей К0 повинна сприйматись позитивно. Отже, наступним у модернізації К0 стає реалізація блоку *TR* – побудови теорії дійсного числа за схемою Г. Кантора. Після визначення дійсного числа як класу еквівалентності краще одразу перейти до визначення та вивчення відношень порядку. На нашу думку, краще працювати з альтернативним означенням, а саме: кажемо, що число $a=[a_n]$ менше за число $b=[b_n]$, тобто $a<b$, якщо існують такі раціональні r та s, що $r<s$ і такі, що існує натуральне число n_0, що для будь-якого натурального $n>n_0$ виконуються нерівності $a_n<r$ та $b_n>s$.

Наступним кроком у *TR* стає вивчення арифметичних операцій. Доведення коректності для додавання, віднімання, множення не викликає проблем. При визначенні ділення краще спочатку визначити поняття оберненого числа. Доведення існування і єдиності стає нескладною задачею (існування просто тривіальною), при цьому не треба ніяких обмежень, які робились для представників дільника, треба просто працювати з ненульовими числами.

Окремими задачами можуть розглядатись задачі на доведення властивостей відношень порядку, які пов'язані з арифметичними операціями. До *TR* доцільно включити доведення всюди щільності множин раціональних та ірраціональних чисел.

Завершувати блок *TR* повинні факти та задачі на їх опрацювання, які традиційно розглядаються при конструктивному підході. Це теорема про існування точної верхньої та точної нижньої межі, теорема Кантора про вкладені відрізки, принцип Архімеда, теорема Бореля-Лебега тощо. Тут також можна вводити поняття кореня довільного степеня та степеня з раціональним показником.

Після *TR* є усі можливості розгортати традиційну теорію границь для послідовностей дійсних чисел, активна пропедевтика якої вже проведена у блоці *LQ*. Таким чином, у блоці, присвяченому теорії границь на множині дійсних чисел *LR* значно скорочується час на опрацювання відповідних понять та навичок.

Таким чином, схема *LQ→TR→LR* не містить тих недоліків, які притаманні схемі К0 і бере від К0 усі переваги. Звернемо увагу, що можливо будувати інші модернізації К0 в залежності від рівня підготовленості студентів. Перша очевидна трансформація ланцюжка *LQ→TR→LR* пов'язана з тим, що розглядаються в означенні фундаментальних послідовностей не довільні раціональні ε, а числа вигляду $\frac{1}{10^n}$. Таку ж теоретичну конструкцію можна розглядати без блоку *LQ*. Вона є більш наочною, ніж схема К0. Останню конструкцію, в свою чергу, можна модернізувати, якщо розглядати послідовності з такою властивістю: існує деяке натуральне m, що для будь-якого натурального n $\left|x_{n+1}-x_n\right|<\frac{1}{10^{n-m}}$. Для таких послідовностей неважко ввести поняття еквівалентності, а далі будувати теорію, подібну *TR*.

Зрозуміло, що усі запропоновані схеми не будуть реалізовані ефективно, якщо буде відсутність наступність у викладанні математики в середній та вищий школі, зокрема, якщо у середній школі не буде сформовано інтуїтивне наочне означення дійсного числа та поняття границі. Задача активної пропедевтики цих понять лежить не тільки на курсах математики (алгебри та геометрії), але, що не менш важливо, усього комплексу природничих та технологічних дисциплін. Дійсно, саме там формується емпірична база, пов'язана з процесами вимірювання та обчислення, що стає підґрунтям для формування складного абстрактного поняття дійсного числа.

Висновки. Проведений аналіз показує, що, по-перше, для студентів математичних спеціальностей вивчення визначення дійсних чисел краще проводити за конструктивними, а не аксіоматичними схемами, по-друге, інтуїтивному динамічному розумінню поняття дійсного числа відповідає схема на основі фундаментальних послідовностей раціональних чисел, по-третє, таку схему можливо реалізувати ефективно, якщо при викладі матеріалу спочатку будувати теорію границь для поля раціональних чисел. Можливі й інші модифікації запропонованих схем, ефективність яких необхідно дослідити шляхом проведення педагогічних експериментів.

Література

1. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика / И. В. Арнольд. – М. : Учпедгиз, 1938. – 480 с.

2. Босовський М. В. Наступність у вивченні теорії границь у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах / М. В. Босовський // Дидак-

тика математики: Проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк, 2005. – Вип. 24 : Праці Міжнародної науково-методичної конференції «Евристичне навчання математики». – С. 127–131.

3. Дедекинд Р. Лекции по теории чисел / Р. Дедекинд ; пер. с нем. А. И. Каменецкий, Б. И. Сегал. – Казань : Изд-во Импер. ун-та, 1905. – 196 с.

4. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении / А. Я. Дороговцев. – К. : Факт, 2004. – 560 с.

5. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1 / В. А. Зорич. – М. : ФАЗИС, 1997. – 554 с.

6. Михалін Г. О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу : дис. … докт. пед. наук : 13.00.04 / Михалін Г. О. ; НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 2004. – 413 с.

7. Тарасенкова Н. А. Поняття як об’єкти засвоєння / Н. А. Тарасенкова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Вип. 16. – Донецьк : ТЕАН, 2001. – С. 69–80.

8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956. – 440 с.

9. Хинчин А. Я. Педагогические статьи /А. Я. Хинчин ; [под ред. Б. В. Гнеденко]. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1963. – 204 с.

АСОЦІАЦІЇ У НАВЧАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

М. А. Кислова
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький інститут Кременчуцького університету економіки, інформаційних технологій та управління

Навчання – специфічний процес пізнання, який керується викладачем. В процесі навчання виділяють: *викладання* – діяльність викладача, що включає подання матеріалу студентам, організацію навчально-пізнавальної діяльності, перевірку засвоєння знань; навчання – свідому пізнавальну діяльність студента під керівництвом викладача, спрямована на засвоєння знань, формування вмінь та навичок [1].

Пізнавальна діяльність – це єдність сприйняття матеріалу, теоретичного мислення та практичної діяльності [1]. Педагогічний процес – це спеціально організована взаємодія викладачів та студентів, що направлена на розв'язання розвиваючих та освітніх задач [1]. Ефективність педагогічного процесу залежить від умов, в яких він проходить. Ці умови залежать від багатьох факторів – і від соціально-економічних умов в країні, і від дії суб'єктивних факторів (особистості викладача, що веде навчання, дій керівників органів освіти і т.п.).

Для ефективної організації педагогічного процесу велике значення мають закономірності відповідності форм та методів навчання віковим особливостям та можливостям студентів.

Сутність педагогічної закономірності полягає в тому, що результати навчання та виховання залежать від характеру діяльності, в яку на тому чи іншому етапі включається студент. Закономірності педагогічного процесу знаходять своє відображення в основних положеннях, що визначають його загальну організацію, зміст, форми і методи, тобто в принципах.

Можливості вдосконалення методики роботи викладача суттєво залежать від його вміння цілеспрямовано керувати навчальною діяльністю студентів, активізуючи її. Проводити таке керування викладач може, спираючись на психолого-педагогічні знання, тобто на систему закономірностей, що концентрує в собі відомості з психології та дидактики та відповідну методику застосування даної системи при вивченні вищої математики.

В цих закономірностях розкриваються взаємозв'язки між внутрішніми процесами, що відбуваються в свідомості студентів, та зовнішніми, дидактичними умовами, в яких проходить навчальна діяльність. До зовнішніх умов відносяться зміст завдань, їх послідовність, засоби організації занять, до внутрішніх – розумова діяльність, процеси запам'ятовування, сприйняття і т.д.

Оскільки в закономірностях відображаються взаємозв'язки між внутрішніми процесами навчальної діяльності студентів і зовнішніми, дидактичними умовами, то, спираючись на ці закономірності, викладач може шляхом зміни зовнішніх умов координувати внутрішні процеси, що проходять в свідомості студентів.

Таким чином, у викладача виникає можливість цілеспрямовано керувати розумовою діяльністю студентів.

В системі розвитку психолого-педагогічних закономірностей використовують поняття асоціації, уведене Аристотелем. Він поділяв асоціації на чотири види – за схожістю, контрастом, суміжністю у просторі, у часі. Поняття асоціації уявлень вперше ввів Дж. Локк.

Ідея про те, що уявлення та ідеї викликаються первинними відчуттями та асоціаціями, належить Д. Гартлі, для якого основою навчальності є пам'ять, що виступає загальною функціональною властивістю нервової системи. Причини утворення асоціацій, уявлень та ідей розглядались Дж. Ст. Міллем. На його думку, уявлення, ідеї є копіями відчуттів. Причинами асоціацій ідей є швидкість асоціативних відчуттів та повторення асоціацій. Асоціативна психологія розглядала і мислення як своєрідну репродуктивну функцію пам'яті. Основним законом репродуктивного мислення є закон зміцнення сили асоціацій в залежності від частоти їх повторення. Підкреслення асоціаністами значущості частоти повторення для утворення і зміцнення асоціацій зумовило виникнення такого основного принципу засвоєння навчального матеріалу, як багаторазове механічне повторення. Експериментально доведені Г. Еббінгаузом основні закономірності запам'ятовування ще більше підсилили роль пам'яті у навчальному процесі.

Основними означеннями теорії асоціацій є такі:

Асоціацією називається такий зв'язок двох процесів P_1 і P_2, що протікають в свідомості, при якому перший процес веде за собою виникнення другого. Позначення: $(P_1; P_2)$, де P_1 – перший елемент асоціації, P_2 – другий.

Асоціація називається *узагальненою*, якщо компоненти її членів варіюються в залежності від умови задачі, що розв'язується, і ці варіації впливають на результат. (Такі компоненти членів асоціації називаються суттєвими).

Асоціація називається *константною*, якщо її суттєві компоненти завжди незмінні, змінюватись в ній можуть лише несуттєві компоненти, тобто ті, які не впливають на результат задачі [2].

При вивченні вищої математики студент повинен навчитись не просто відтворювати знання в незмінному вигляді, а й вміло застосовувати ці знання на практиці, при цьому швидко, миттєво видозмінювати свої висновки в залежності від умови задачі. При цьому студент може не згадувати відповідні означення та теореми, але повинен вміти діяти в повній відповідності з ними. Так, при вивченні нового поняття студенти виконують вправи «на розпізнавання»:

Приклад: при розв'язуванні яких інтегралів необхідно інтегрувати частинами?

$$\int xe^{x}dx\,;\ \int \sin^{3}x\cos xdx\,;\ \int x^{2}\cos xdx\,;\int e^{x^{3}}x^{2}dx\,;\ \int \frac{\ln x}{x^{2}}\partial x\,;$$

$$\int \frac{\ln^{5}x}{x}\partial x\,;\ \int \operatorname{arc}tgx\partial x\,;\ \int \frac{\operatorname{arc}tgx}{x^{2}+1}\partial x\,.$$

Пізніше, при розв'язуванні самостійної або контрольної роботи, студенти самостійно розпізнають типи інтегралів без яких-небудь міркувань, але за вимогою викладача легко обґрунтовують розв'язок.

Поява кожної узагальненої асоціації еквівалентна одному або декільком умовиводам. Вміння та навички розв'язування задач є певна система асоціацій, переважно узагальнених. Крім того, помилковою узагальненою асоціацією є така асоціація, при наявності якої студент невірно розв'язує окремі задачі даного типу, або не здогадується застосувати до них відомий йому спосіб розв'язування. Константна асоціація також буває помилковою, але тільки в тих випадках, коли вона виникає замість узагальненої.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$.

Студенти дають відповідь «1», користуючись першою визначною границею. Але насправді $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2}{\pi}$. Причина даної помилки наступна: розв'язування великої кількості однотипних прикладів з даної теми підряд, відсутність необхідності зробити вибір, що зумовлює виникнення константної асоціації.

Стимулюючою ланкою є проміжний розумовий процес, який вводиться між двома іншими процесами, що проходять в свідомості студента, допомагаючи йому встановлювати зв'язки між ними, поглиблювати розуміння та активізувати розумову діяльність.

В якості ланок, що стимулюють, можуть виступати такі процеси:

1) згадування, застосування в процесі ознайомлення з матеріалом (або за ходом виконання завдань) означень, теорем, законів, різних правил, в тому числі і мнемонічних правил, які і призначені для найкращого

запам'ятовування тих чи інших фактів;

2) споглядання, уявлення наглядних образів (моделей, графіків, рисунків, діаграм);

3) довільна діяльність з ними;

4) оперування знаками та символами (введення стрілок та інших позначок, підкреслення записів і т.д.);

5) довільні розмірковування, дії, що поглиблюють розуміння.

Асоціація (P_1; P_2) утворюється, якщо процеси P_1 і P_2, що протікають в нашій свідомості, виникають в ході діяльності та повторюються або безпосередньо один за одним, або з участю стимулюючої ланки М. Якщо ця ланка в майбутньому зберігається, то утворюються дві асоціації (P_1; М), (М; P_2).

Зокрема, П. Я. Шеварьовим було доведено, що міра усвідомлення деякого поняття, що вивчається, знижується, якщо в процесі діяльності студенти дотримуються трьох умов:

1) студент виконує завдання одного типу;

2) в них незмінно повторюється деяка особливість;

3) її усвідомлення необов'язкове для здобуття правильного результату.

Таким чином, у студента може сформуватися помилкова асоціація, яка і призводить до появи того або іншого типу помилок під час розв'язування задач і вправ.

Опираючись на ці результати, можна теоретично прогнозувати масові помилки студентів і вживати заходи щодо попередження цих помилок.

Практика свідчить, що кількість помилок залежить здебільшого від характеру системи вправ, які пропонуються студентам для виконання. Зміни цієї системи (в одних випадках незначні, в інших – істотні) дозволяють досягати різкого поліпшення у формуванні умінь і навичок студентів з вищої математики і попередження ряду характерних помилок.

Здійснюючи психологічний і дидактичний аналіз помилок студентів при навчанні вищої математики, можна з'ясувати, які умови і причини забезпечують правильне виконання студентами навчальних завдань, які причини і чинники спричиняють чи можуть спричинити помилкові виконання завдань. Студенти виконують деяке завдання з помилками або зовсім його не виконують в тому випадку, коли відсутня хоча б одна умова або причина, яка забезпечує правильне його виконання. Помилкова дія можлива лише у двох випадках:

1) коли в студента не повністю актуалізується правильний ланцюг асоціацій, тобто відсутня якась ланка, яка є необхідною при виконанні завдання;

2) коли в студента актуалізується помилкова асоціація.

Для виправлення помилкових дій студентів у першому випадку слід перевірити склад і міцність усіх ланок правильної асоціації, знайти відсутню ланку та за допомогою спеціальної системи вправ викорінити помилку. Для цього викладачу необхідно вміти чітко виділяти істотні й неістотні ознаки поняття, що вивчається.

У другому випадку від викладача вимагається виявити помилкову асоціацію, яка актуалізувалася в мисленні студента, провести діагностику появи помилки такого роду, вказати шляхи усунення і заміни правильною асоціацією.

Відомо, що допущена студентом помилка має деяку стійкість і для її усунення слід докласти зусилля. Тому найбільш важливою є робота викладача стосовно попередження помилок – продумана методика подання навчального матеріалу, правильно дібрана система вправ, прямі вказівки, які попереджують можливі неправильні дії студентів.

Досвід навчання вищої математики в вищих навчальних закладах підтверджує висновок, що в систему вправ доцільно включати такі приклади, в яких студенти допускають помилки, однак не після, а під час вивчення нової теми. Ці помилки відразу аналізуються. Студенти після такого аналізу стають більш уважними і негативний вплив закономірностей П. Я. Шеварьова послаблюється, оскільки перестає виконуватися третя умова. Тому ймовірність помилок після виконання таких вправ зменшується. Ось чому вважається за доцільне включення до системи вправ усних завдань типу «Знайти помилку».

Практика доводить, що якщо деяка істотна ознака поняття, що вивчається, особливість, характерна для окремих задач даного типу, не відображена в системі вправ або у способах розв’язування задач, що розглядаються, то в студента може зародитися помилкова асоціація. Тому доцільним вважається етап виділення істотних і неістотних ознак під час вивчення кожного нового поняття.

Для формування узагальненої асоціації необхідно тим менше вправ, чим більше студент розвинутий та збагачений знаннями, вміннями та навичками, що відносяться до даної області науки. Для збереження та зміцнення узагальнених асоціацій найефективнішим є неконцентроване повторення.

Приклад. При вивченні теми «Безпосереднє інтегрування» викладачі стикаються з таким утрудненням: доки вивчаються окремі невеликі теми даного розділу, студенти більш менш вільно виконують вправи відповідних типів, а трохи згодом, коли починають розв’язувати задачі різних типів з усього розділу, студенти розв’язують їх набагато гірше, ніж раніше, часто помиляються. Як це можна пояснити? Виконуючи завдання одного типу, студенти звикають застосовувати одну й ту ж формулу (підстановку, прийом), але не привчаються до їх вибору, не вловлюють всі особливості та розбіжності між зовнішньо схожими вправами різних типів. В результаті виникають помилкові узагальнені асоціації, створюється лише ілюзія гарного засвоєння матеріалу, а пізніше виникає необхідність перенавчання студентів. Для того, щоб уникнути цього, викладач може розосередити частину завдань на наступні заняття. При цьому загальна кількість завдань на застосування кожної формули залишається незмінною. Ці завдання розподіляють лише на більш довгий проміжок часу, протягом якого студенти не лише застосовують формули, що вивчають, а й здійснюють їх вибір, тобто кожного разу аналізують та порівнюють завдання.

Література

1. Ягупов В. В. Педагогіка : навч. посібник / В. В. Ягупов. – К. : Либідь, 2002. – 560 с.

2. Власова О. І. Педагогічна психологія : навчальний посібник / О. І. Власова. – К. : Либідь, 2005. – 400 с.

3. Вітвицька С. С. Основи педагогіки вищої школи : методичний посібник / С. С. Вітвицька. – К. : Центр навч. літератури, 2003. – 316 с.

4. Вознюк Н. М. Етико-педагогічні основи формування особистості : навчальний посібник / Н. М. Вознюк. – К. : Центр навч. літератури, 2005. – 196 с.

5. Волкова Н. П. Педагогіка : навчальний посібник / Н. П. Волкова. – К. : Академія, 2003. – 576 с.

ЯК ПОЗНАЙОМИТИ СТУДЕНТІВ ІЗ СУЧАСНИМИ ПОНЯТТЯМИ СИНЕРГЕТИКИ

І. І. Ковтун
Україна, м. Київ, Національний університет біоресурсів
і природокористування України
ira@otblesk.com

В курсі вищої математики розглядаються поняття: послідовності; границі і нескінченно малої величини; вектора і векторної функції; диференційовності і неперервності функції; криволінійного інтеграла [2; 3]. При цьому, встановлюючи зв'язок між поняттями, накладалися певні умови, нехтування якими не давало відповіді на певні питання. Перераховані вище поняття є класичними. Покажемо, як пов'язані ці поняття з такими сучасними поняттями, як множина Жюліа; аттрактор; множина Мандельброта; фрактал (див., наприклад, [1]).

Аттрактори і множина Жюліа. Розглянемо *поняття послідовності* [2]. Що нового можна отримати? В 1918 році молодий французький математик Гастон Моріс Жюліа (1893–1978) після поранення лікувався у госпіталі. Часу було багато і він зацікавився такою проблемою: якою є поведінка точки $z_0(x_0; y_0)$ комплексної площини під дією квадратичного перетворення, що має вигляд послідовності

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad c - const, \quad c = (p;q). \tag{1}$$

Це перетворення можна записати також у вигляді

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p, y_{n+1} = 2x_n y_n + q.$$

Точку z_0 і сталу c вибираємо довільно. Застосуємо перетворення (1) до деякого вибраного наперед числа c і деякої вибраної початкової точки z_0. Маємо, що

$$z_1 = z_0^2 + c, \;\; z_2 = z_1^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c,$$

$$z_3 = z_2^2 + c = ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c, \ldots$$

Отримали послідовність, яка описує поведінку точки z_0. При цьому можуть бути такі випадки: точка z_0 прямує до фіксованої точки площини; точка z_0 прямує до нескінченності: точка z_0 не набуває певного значення, а рухається по деякій лінії.

При цьому у першому випадку послідовність має границю, у другому і третьому випадках границі не має.

Для процесу (1) вводять поняття точки *притягування,* яка називається **аттрактором.** Це може бути скінчений або нескінчений аттрактор. Границя поділу між скінченими та нескінченим аттрактором називається **множиною Жюліа**.

Очевидно, що така поведінка послідовності суттєво залежить від вибраного значення *c*.

Нехай, наприклад, стала c=0. Тоді є два аттрактори **скінчений і нескінчений.**

Границею між цими аттракторами – множиною Жюліа є коло радіуса одиниця: $x^2+y^2=1$.

Якщо c=1,25, то границя стає деякою *порізаною* лінією. Будь-яка незначна зміна *c* спричиняє різні зміни у вигляді множини Жюліа.

При певних значеннях *c* множина Жюліа розпадається на окремі незв'язні множини – *пил Фату*. Важливо знати, коли множина Жюліа залишається зв'язною. Відповідь на це питання дає наступна теорема, яка отримала назву за прізвищами математиків, що досліджували цю проблему. Це – теорема Жюліа-Фату. Наведемо її.

Теорема Жюліа-Фату. Якщо послідовність 0, c, c^2+c, $(c^2+c)^2+c$, ... обмежена, то множина Жюліа зв'язна.

Фрактали Якщо розглядати різні значення параметра *c*, що визначає множину Жюліа, і зафарбувати чорним ті значення *c*, при яких ця множина зв'язна, то побудуємо так звану **множину Мандельброта.** Цю множину Бенуа Мандельброт знайшов в 1975 р., побудувавши її на комп'ютері, і ввів термін **фрактал** (від латинського fractus – порізаний, дробовий). **Фрактали** – це структури , що мають дві ознаки: *порізаність та самоподібність* (будь-яка частина подібна цілому).

Самоподібний (пропорційний) ріст живої природи, який починається в одній точці простору і розповсюджується по всім напрямам, описується векторним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(\vec{M},\vec{N})$, де $\vec{M}$ – вектор експансії, $\vec{N}$ – вектор зовнішніх сил.

Розглянемо *поняття неперервності і диференційовності функції і їх зв'язок.*

Для дослідження неперервності функції важливими є теореми К. Вейєрштрасса, які пов'язують поняття неперервності функції з її диференційованістю [2]. К. Вейєрштрасс навів цікаву функцію, яку назвали функцією Вейєрштрасса. Ця функція представлена у вигляді нескінченої суми тригонометричних функцій: $W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, a<1, b>1, ab>1. Або $W(x)=a\cos(b\pi x)+a^2\cos(b^2\pi x)+a^3\cos(b^3\pi x)+...$

Ця функція є неперервною для всіх значень $x \in R$, як сума неперервних тригонометричних функцій $\cos(b^n \pi x)$. Функція $W(x)$ цікава тим, що *не має похідної в жодній точці*. Якщо побудувати графік цієї функції, то він має безліч гострих кутів, тобто має ламану структуру. При цьому форма графіка функції залишається незмінною при розтягу в *b* вздовж осі абсцис і в $1/a$ разів вздовж осі ординат.

Якщо побудувати на комп'ютері, наприклад, функцію $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}5)^n \cos(4^n \pi x)$ на відрізку [0; 1], а потім взяти деяку частину графіка, наприклад, при $x \in [0{,}4; 0{,}6]$ і збільшити її в 4 рази, то отримаємо графік такий же, як основний графік, $x \in [0{,}3750;\ 0{,}66250]$. Цю операцію можна продовжувати. Тобто функція Вейєрштрасса *самоподібна:* кожен наступний графік є збільшена копія частини попереднього. Графіки співпадають, хоча масштаби у них різні.

Функція Вейєрштрасса самоподібна у лінійному класичному сенсі. Нескінченно мала частина функції генерує форму цілого. Таку функцію називають **фрактальною.**

Ситуація з фрактальною функцією аналогічна ситуації з геномом людини чи тварини, коли клітина містить усю інформацію про весь організм.

Зауважимо, що підійшовши до нового поняття, К. Вейєрштрасс вирішив не досліджувати незвичайну, «некрасиву функцію» (із естетичних понять). Свого часу Гаусс також відмовився друкувати і оприлюднювати роботу, в якій були ним отримані основи неевклідової геометрії, відомої в наш час, як геометрія Лобачевського.

Дробовий порядок диференціювання функції. Вимірювання довжини кривої здійснюється із використанням криволінійних інтегралів.

Шведський математик Нільс Фабіан Хельге фон Кох (1970-1924) шукав довжину лінії, яку отримували наступним чином. Сторони рівностороннього трикутника ділимо на три частини. Середню частину кожної сторони відкидаємо і будуємо рівносторонні трикутники, сторони яких дорівнюють довжині відкинутої частини. Отримуємо так звану «зірку Давида». Операцію продовжуємо далі. Виникає питання: як обчислити довжину отриманої лінії і взагалі будь-якої лінії, якщо мала частина її повторює всю функцію?

Це не просто цікава задача, яка не має здавалось би практичного значення.

Так, в середині XX століття військово-морське відомство Великої Британії дало завдання англійському фізику Річардсону виміряти довжину берегової лінії Великої Британії. Річардсон (як це застосовують при обчисленні довжини кривої лінії) замінив криву ламаною $L(\delta)$, яка складалася із відрізків δ, вершини яких знаходилися на березі. Узбережжя Англії сильно порізане, тобто відрізкам кривих відповідали функції, графіки яких нагадували графік функції Вейєрштраса, тобто недиференційовні функції.

Для обчислення довжини кривої, що описується функцією $f(x)$, застосовують криволінійний інтеграл [3] $L=\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx$, який дістаємо, якщо замінити криву вписаною ламаною з довжиною відрізків δ. Функція $f(x)$ вважається диференційовною в кожній точці відрізка $[a; b]$. При зменшенні δ довжина ламаної прямує до довжини кривої. Але довжина ламаної, якою замінили довжину узбережжя, не прямувала до довжини L узбережжя, а прямувала до нескінченності, тобто формулу для обчислення довжини кривої, що описується функцією $f(x)$: $L=\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx$, застосовувати не можна

Річардсон знайшов іншу формулу для обчислення довжини кривої, а саме, у вигляді $L(\delta)=C\delta^{1-D}$, де C – стала, $D>1$ – стала. В конкретному випадку узбережжя Англії стала $D\approx1{,}24$. Тоді ясно, що $L(\delta)=C\delta^{-0{,}24}\to\infty$ при $\delta\to0$.

В загальному випадку у формулі $L(\delta)=C\delta^{1-D}$ величина D характеризує міру ламаності, *міру фрактальності.*

Міра d-вимірної множини наближено дорівнює $N(\delta)$ елементарних d-кубів (при $d=2$ це квадрати, при $d=1$ – відрізки). Якщо вимірювати множину більшою мірою (відрізок квадратами), то міра дорівнює нулю. Якщо вимірювати множину меншою мірою (квадрат відрізками), то міра дорівнює нескінченності.

Таким чином, *фрактал має дробову вимірність*. Тобто фрактал – це «товста лінія», у неї є товщина.

Відомі математики Фелікс Хаусдорф (1868-1942) та Абрам Самойлович Безикович (1891-1970) знайшли дробову вимірність

$$d=\lim_{\delta\to0}\frac{N(\delta)}{\ln(1/\delta)}.$$

Отже, *фрактал можна визначити як множину*, *вимірність Хаусдорфа-Безиковича якої більше топологічної вимірності.* А саме, для фрактальної лінії вимірність $D>1$, для фрактальної поверхні вимірність $D>2$.

Зазначимо, що для фракталів характерною властивістю є розповсюдженість їх у природі: берегові лінії, гірські хребти, хмари, гілки розлогих дерев, кровоносні судини і нейрони, полум’я свічки, потоки гірських річок тощо. Поширеність фрактальних структур пояснюється їх різномасштабністю і самоподібністю: різні масштаби, однакові закони побудови.

Особливістю фрактальних структур є балансування їх на межі між Космосом і Хаосом. Виникнення хаосу можливе і в детермінованих системах, що описуються диференціальними рівняннями: поведінка в майбутньому визначається сучасним положенням – так званий детермінований хаос. Можливе і наро*дження детермінованих систем із дисипативних систем.*

Останнім часом створюється нова геометрія, так звана фрактальна геометрія. Це – геометрія хаосу, який породжує порядок і геометрія порядку, що породжує хаос.

Література

1. Волошин А. В. Математика и искусство / Волошин А. В. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2000. – 399 с.

2. Суліма І. М. Вища математика. Частина перша. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія / Суліма І. М., Ковтун І. І., Радчик І. А. – К. : Видав. НАУ, 2005. – 216 с.

3. Суліма І. М. Вища математика. Частина друга. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Суліма І. М., Ковтун І. І., Яковенко В. М. – К. : Видав. НАУ, 2003. – 297 с.

СТАН ТА ПРОБЛЕМИ ВПРОВАДЖЕННЯ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ В ШКОЛАХ УКРАЇНИ

Т. В. Колчук
Україна, м. Київ, Національний педагогічний університет
ім. М. П. Драгоманова
TanyaKolchuk@rambler.ru

Постановка проблеми. В умовах інформатизації суспільства все частіше виникають нові підходи до організації процесу дистанційного навчання, який передбачає ефективне використання інформаційно-комунікаційних технологій, мобільних Інтернет-пристроїв, електронних освітніх ресурсів. У Концепції науково-педагогічного проекту «Дистанційне навчання учнів» зазначається: «за експертними оцінками в Україні до 50 000 учнів потребують навчання за дистанційною формою» [1, 1]. Питання широкого використання дистанційної форми навчання постає в періоди карантинів, для дітей з обмеженими фізичними можливостями, при підготовці до написання науково-дослідницьких робіт та предметних олімпіад тощо.

Програмою «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» на 2006-2010 роки [2] передбачено виконання комплексу завдань, серед яких: оснащення навчальних закладів сучасним комп’ютерним та телекомунікаційним обладнанням; впровадження інформаційних та комунікаційних технологій у навчальний процес і проведення наукових досліджень, забезпечення доступу до національних і світових інформаційних ресурсів; залучення мережевих технічних ресурсів для забезпечення підключення наукових установ та навчальних закладів до Інтернет; розвиток технологій дистанційного навчання і використання їх для запровадження в Україні системи навчання протягом усього життя.

Сьогодні в областях активно розробляються сайти навчальних закладів на порталі http://klasnaocinka.com.ua, на якому кожен вчитель може безкоштовно або за невелику плату створити свої дистанційні курси з різних навчальних предметів.

Тому актуальними є організація та проведення дослідження способів ефективної побудови навчального середовища та застосування у навчальному процесі дистанційної форми навчання в середніх загальноосвітніх навчальних закладах [1, 3].

Аналіз досліджень і публікацій. Характеризуючи стан дистанційного навчання в Україні, необхідно зазначити, що в цьому напрямі можна спостерігати позитивну динаміку. Про це свідчить створення його структурних підрозділів в різних навчальних закладах, розробка проектів нормативно-правової бази функціонування дистанційної освіти; розробка й апробація засобів навчально-методичного забезпечення дистанційної освіти; розробка механізму узгодження координованих дій вищих навчальних закладів і установ у межах експериментальної роботи щодо розгортання і створення системи дистанційної освіти в Україні; розробка проектів щодо стандартів на системи, методи і засоби дистанційної освіти в Україні; проведення експериментальної роботи з оцінювання організації дистанційної освіти і засобів навчально-методичного забезпечення; розробка, використання і розповсюдження дистанційних курсів; організація і здійснення навчального процесу за дистанційною формою; організація дистанційного тестування відповідно до міжнародних вимог і стандартів; підготовка фахівців у галузі дистанційної освіти: тьюторів, викладачів, адміністраторів, розробників курсів тощо. Фахівцями Українського центру дистанційної освіти розроблено концепцію розвитку дистанційної освіти України, визначено основні задачі і напрямки її реалізації; запропонована організаційна структура системи [3].

Однак, організації дієвої системи дистанційного навчання в Україні заважає низка об’єктивних факторів, а саме: недорозвинута мережа Internet, недостатня кількість комп’ютерних класів в школах, з яких більшість не відповідають сучасним вимогам. Серед суб’єктивних причин можна назвати недостатню кількість фахівців у цій сфері та відсутність досвіду такого навчання у вчителів.

Теоретико-методологічну основу дистанційного навчання становлять праці провідних зарубіжних і українських вчених. Методичні та дидактичні проблеми і перспективи використання інформаційних технологій у навчанні розкрито у роботах М. І. Жалдака, А. П. Єршова, Г. О. Атанова, В. П. Беспалька, В. М. Глушкова, В. І. Клочка, О. І. Скафи, В. І. Монахова; загальні аспекти дистанційного навчання розкрито у роботах П. В. Дмитренка, О. М. Довгялло, В. В. Олійника, Є. С. Полат; психолого-педагогічні аспекти і технології створення електронного навчального курсу на основі інформаційно-комунікаційних технологій − В. М. Кухаренка, Н. В. Морзе, Т. О. Олійник, А. Т. Петренко, Н. Г. Сиротенко, Ю. В. Триуса.

В концепції проекту «Дистанційне навчання учнів» [1, 1] визначено, що впровадження дистанційного навчання в Україні ускладнюється наступними причинами:

− варіативність і швидка змінюваність засобів навчання і навчальних середовищ, що використовуються у дистанційному навчанні;

− мобільність як відносно місця навчання, так і відносно методів, середовищ, засобів, програм і цілей;

− високий темп змін та розвитку систем дистанційного навчання;

− протиріччя високої варіативності і мобільності навчання з необхідністю забезпечення взаємної погодженості різних етапів навчання і порівнянності результатів;

− сучасні тенденції до істотної індивідуалізації у навчанні.

Постановка завдання. Потреба використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання та недостатня якість розроблених електронних навчальних курсів визначили вибір теми нашого дослідження. Мета дослідження конкретизувалася в завданні розробити та апробувати електронний курс «Геометрія, 7 клас» [4] для дистанційно-очної форми навчання.

Основний матеріал. Розробляючи та апробуючи даний електронний курс розширюємо арсенал засобів, форм і методів взаємодії вчителя і учнів, учнів між собою та учнів і вчителів з програмним забезпеченням. Для цього розміщуємо в дистанційному курсі: теоретичний матеріал за діючим підручником з геометрії [5], завдання практичного характеру до тем, які містять різного роду підказки і поради (зокрема, надсилання відповіді файлом, відповідь у режимах on-line чи off-line); завдання дослідницького характеру для розвитку креативності учнів реалізації власних прийомів і методів у навчальній практиці; електронні наочності як зручний інструмент проведення експериментів в педагогічному програмному засобі GRAN-2D; презентації для посилення внутрішньої мотивації учнів при навчанні геометрії; матеріали для контролю знань учнів (різноманітні тести, кросворди, самостійні та контрольні роботи); предметний покажчик, який об'єднано з словником, навчально-творчі проекти.

Як показало наше дослідження, система підтримки дистанційного навчання Moodle є зручним програмним засобом для створення та підтримки навчального процесу в умовах поєднання очного і дистанційного навчання, оскільки має ряд інструментів, використання яких забезпечує управління навчальними ресурсами, надає можливість проведення курсу. Структурування навчального матеріалу використовується як при вивченні нового матеріалу, так і для організації практичної роботи, для активізації самостійної роботи учнів. Використання багатьох різноманітних інструментів, доступних в системі, дозволило розробити гнучкі, насичені за змістом, мультимедійні, цікаві за формою навчальні матеріали електронних курсів, ефективні з точки зору проведення навчального процесу, що дозволяють підтримувати практично всі етапи навчання.

Структуровані за показниками якості електронного засобу навчання, наведені в статті В. В. Шконди і А. В. Кальянова [6, 394], матеріали електронного навчального курсу «Геометрія, 7 клас» подано у табл. 1.

Висновки. Впровадження в навчальний процес електронних засобів навчального призначення з геометрії дозволяє оптимізувати навчальний процес, сприяє виробленню внутрішньої мотивації в учнів та підвищенню їх інтересу до навчання. В результаті вивчення курсу геометрії в школі з використанням запропонованої дистанційної підтримки учні оволодівають всіма знаннями, уміннями і навичками, передбаченими навчальною програмою з геометрії та мають можливість подолати просторові й часові обмеження в навчальному процесі, реалізувати як індивідуальне, так і групове (спільне) навчання в найрізноманітніших формах.

Таблиця 1

Показники оцінки якості електронного засобу навчання	**Елементи електронного навчального курсу «Геометрія, 7 клас»**
змістовні	Начальна програма з геометрії для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів.
	Навчальний матеріал параграфів чинного підручника, які відповідають навчальній програмі з геометрії для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів.
	Календарно-тематичне планування, розроблене авторами підручника з геометрії.
дидактичні	Майже перед вивченням кожного нового геометричного факту пропонуються проблемні запитання для проведення власного дослідження та відкриття даного факту.
	Забезпечено можливість роботи з науковою літературою, доступною у мережі Інтернет, що може стати основою для закріплення, поглиблення і розширення фундаментальних знань учня, а також усвідомлення шляхів їх практичного застосування.
	Відбувається залучення учнів до самостійного активного оволодіння геометрією через виконання комп'ютерних експериментів динамічній геометрії GRAN-2D.
методичні	Уроки, що розміщені в послідовності, потребують повного їх проходження, оскільки вони вимагають безперервного їх виконання.
	Велика кількість зображувальної та символічної наочності, класифікаційні схеми. Значну кількість рисунків для курсу виконано з використанням педагогічного програмного засобу GRAN-2D.

Показники оцінки якості електронного засобу навчання	**Елементи електронного навчального курсу «Геометрія, 7 клас»**
	Предметний покажчик, що об'єднаний зі словником, в якому уточнено багато геометричних термінів.
	Виконання навчально-творчих проектів сприяє індивідуальній або груповій роботі, вдома або в класі.
	Вправи, що пов'язані із майбутньою професійною діяльністю.
	Регулярне надання учню зворотного зв'язку (проведення форумів, чатів).
	Тести в режимі навчання чи самоконтролю дають змогу отримувати практично «покроковий» зворотній зв'язок – відомості про правильне розуміння матеріалу, який засвоюється.
	Кросворди, створені в Microsoft Excel для активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів та як одна з форм контролю їх знань.
	Мультимедійні презентації, що містять цікаві історичні відомості з теми.
дизайн-ергономічні	Має сприятливі кольори інтерфейсу, в навчальних матеріалах в міру використовуються можливості гіпертексту та виділення іншим кольором чи шрифтом.
техніко-технологічні	Курс розміщений в мережі Інтернет на основі каналу цілодобового доступу.
	Курс розбито на 21 модуль, що відповідають відповідним параграфам підручника.
	Практичні і дослідницькі завдання для тренування і закріплення знань, умінь і навичок
	Підсумковий чи проміжний контроль здійснюється за допомогою виконання різного типу завдань, самостійних і контрольних робіт, розв'язування кросвордів.

Література

1. Концепція науково-педагогічного проекту «Дистанційне навчання учнів» [Електронний ресурс]. – 2009. // Режим доступу : http://mon.gov.ua/index.php/ua/pro-ministerstvo/normativno-pravova-

baza/normativno-pravova-baza-diyalnosti-ministerstva/nakazi/4989-nakaz-mon-n-1231-vid-2912009.

2. Державна програма «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» на 2006-2010 рр. [Електронний ресурс] // Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/laws/KMU_1153.doc.

3. Майборода О. В. Дистанційне навчання як пріоритетний напрямок вищої освіти [Електронний ресурс] / Майборода О.В. // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2011. – №5 (25). – Режим доступу до журналу: http://www.journal.iitta.gov.ua.

4. Електронний посібник «Геометрія, 7 клас» [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко, Т. В. Колчук. – 2010. – Режим доступу: http://www.kdpu.edu.ua/moodle

5. Бевз Г. П. Геометрія [підручник для 7 класу] / Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. – К. : Вежа, 2007. – 208 с.

6. Шконда В. В. Методичні підходи до оцінки якості електронного навчання / В. В. Шконда, А. В. Кальянов / Теорія та методика електронного навчання : збірник наукових праць. Випуск ІІ. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2011. – С. 393-397.

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

І. В. Кривенок
м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
Inna161200@yandex.ru

Джерело й ціль математики – у практиці
С. Л. Соболєв

Життя протягом останніх років переконливо доводить, що в період зміни суспільних умов, переходу до ринкових відносин в економіці, на виробництві суспільство має бути зацікавленим у тому, щоб рівень економічної освіти пересічного громадянина давав йому змогу аналізувати випадкові фактори, оцінювати гіпотези, прогнозувати розвиток життєвих ситуацій і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісний характер.

Тому доповнення змісту шкільної математичної освіти ймовірнісно-статистичною змістовою лінією є дуже своєчасним, важливим кроком до створення умов для розвитку одного зі спеціальних і соціально важливих типів мислення – ймовірнісно-статистичного, необхідно сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення та нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві. Доцільність введення розділів теорії ймовірностей та математичної статистики в курс шкільної математики дискутувався ще на початку 1950-х років. «Методи математичного аналізу вже не можуть задовільно описати реальні процеси, і відчувається величезна необхідність у досить повній теоретико-імовірнісній освіті», – вважав Б. В. Гнеденко [1].

Прихильниками вивчення в школі питань теорії ймовірностей і математичної статистики стали такі відомі математики, як І. Г. Журбенко, Б. В. Гнеденко, А. М. Колмогоров, А. І. Маркушевич, А. В. Скороход, А. Я. Хінчин, М. І. Ядренко та інші, які виступали одночасно і популяризаторами цього аспекту шкільної математичної освіти.

В Україні продовжували активне дослідження питань вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики у шкільному курсі математики провідні науковці і педагоги сучасності: Я. С. Бродський, Ю. І. Волков, М. І. Жалдак, З. І. Слєпкань, Г. О. Михалін.

З’явилися нові підручники з математики, які містять розділи теорії ймовірностей і математичної статистики. Публікується багато статей, в яких значну увагу приділено методиці вивчення елементів схоластики. Але досить рідко розглядаються питання добору і методики розв'язування прикладних задач теорії ймовірностей. А саме такі задачі викликають зацікавленість учнів, розв'язуються з більшою активністю і помітно підвищують інтерес до навчання. «У математиці потрібно цінувати те, що сприяє розвитку суміжних дисциплін і практичній діяльності», – говорив свого часу П. Л. Чебишов [1].

Проблема реалізації прикладної спрямованості завжди була і є в полі зору методистів, науковців, авторів підручників. Теоретичне обґрунтування її існування та шляхів розв'язування проведено в роботах О. Д. Александрова, О. М. Астряба, Г. П. Бевза, Б. В. Гнеденка, О. С. Дубинчук, Ю. М. Колягіна, В. В. Пікана, З. І. Слєпкань, І. Ф. Тесленка, В. В. Фірсова та ін. Зокрема, були сформульовані загальні принципи, які забезпечують шкільному курсу математики прикладну спрямованість (В. В. Фірсов), розроблені шляхи розв'язування завдань навчання учнів застосовувати математичні знання на практиці (О. М. Астряб, Г. П. Бевз, О. С. Дубинчук, З. І. Слєпкань, І. Ф. Тесленко), визначені умови реалізації прикладної спрямованості математики в школі (Ю. М. Колягін, В. В. Пікан) [2].

Вперше визначення поняття «Прикладна спрямованість шкільного курсу математики» було дане радянським педагогом-математиком В. В. Фірсовим. Потім воно удосконалювалося іншими дослідниками. У нашому розумінні суть прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в здійсненні цілеспрямованих змістовних і методологічних зв'язків математики з практикою, що передбачає введення в шкільну математику таких специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних задач математичними методами. Під прикладними задачами ми розуміємо задачі, які виникають за межами математики, але вирішення яких вимагає використання математичного апарату [3].

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується порізному, а саме: 1) задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну; 2) задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці; 3) сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми.

Прикладна задача повинна відповідати таким вимогам: а) питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється в житті; б) розв'язок задачі демонструє практичне застосування математичних ідей у різних галузях; в) зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес; г) дані та шукані величини задачі мають бути реальними, узятими з життя.

Радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є математичне моделювання, а найбільш ефективним засобом – прикладні задачі, розв'язання яких потребує глибоких знань не лише математики, але і інших наук [3].

Є різні підходи до визначення математичного моделювання. Більш глибоко і детально про них сказано в дослідженні Л. Л. Панченко [4]. У нашому розумінні математичне моделювання – процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту або явищу деякого математичного об'єкту, який називається математичною моделлю. Математичне моделювання широко використовується в наукових дослідженнях, вивченні, управлінні, практичної діяльності. Йдеться про використання математичного моделювання як методу у вивченні учнів математиці з метою підсилити її прикладну спрямованість (навчити застосовувати математику в нестандартних ситуаціях).

Математичне моделювання як процес складається з декількох етапів:

1. Попередній аналіз об'єкта дослідження з метою визначення головних параметрів, істотних і неістотних зв'язків, головних характеристик, законів, які властиві явища або об'єкту;
2. Побудова математичної моделі;
3. Реалізація математичної моделі математичними методами;
4. Вибір (або розробка) алгоритму для реалізації математичної моделі за допомогою комп'ютера;
5. Створення або вибір програм, які «перекладають» модель і алгоритм на доступну комп'ютеру мову;
6. Проведення обчислювального експерименту;
7. Аналіз отриманих результатів і перенесення їх на об'єкт, який досліджується [4].

Прикладну орієнтацію шкільного курсу математики можна здійснити різними шляхами: наповненням навчального процесу практичними задачами (добірки задач на безпосереднє вимірювання, обчислення та побудову таблиць, діаграм, графіків, планів місцевості тощо); наближенням текстів традиційних абстрактних задач, що є в шкільних підручниках, за допомогою додаткових запитань до потреб і інтересів учнів; завданнями на складання різних адекватних задач за однією математичною моделлю тощо [5].

Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування знань з теорії ймовірностей в техніці, економіці, медицині, біології та інших суміжних науках; в професійній діяльності, в народному господарстві та побуті. Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей включає в себе його політехнічну спрямованість, в тому числі, реалізацію міжпредметних зв'язків, використання електронно-обчислювальної техніки і забезпечення «комп'ютерної грамотності», формування ймовірнісно-статистичного мислення і діяльності [6].

Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей передбачає оволодіння старшокласниками математичними методами пізнання об'єктивної реальності навколишнього світу, одним з яких є побудова дискретної ймовірнісної моделі задачі. У процесі навчання теорії ймовірностей слід виділяти найважливіші компоненти розв'язування прикладних задач, які зводяться в основному до таких трьох етапів: 1) перехід від реальної ситуації до рівняння, нерівності, графічного зображення тощо (побудова математичної (ймовірнісної) моделі реальної ситуації); 2) розв'язування рівняння, нерівності і т.д. (дослідження математико-статистичними методами і засобами побудованої моделі); 3) співставлення отриманого розв'язку з реальною ситуацією (інтерпретація знайденого розв'язку) [6].

Цінність стохастичних задач визначається не стільки тим математичним апаратом, який використовується при їх розв'язуванні, скільки можливостями продемонструвати процес застосування математики, зокрема теорії ймовірностей, для розв'язання прикладних задач. Ці задачі повинні знайомити учнів з реальними застосуваннями стохастичних ідей і методів, а також служити для організації специфічної імовірнісно-статистичної діяльності [6].

Під час продовження навчання статистики у старшій школі важливою залишається проблема мотивації необхідності, доцільність збагачувати себе статистичними знаннями, вміннями. Мотивація має ґрунтуватися на переконанні учнів у тому, що найкраще рішення у будь-якій життєвій ситуації можна прийняти лише тоді, коли є необхідна інформація. Учень має розуміти, що якою б справою не займалась людина, вона часто-густо змушена приймати рішення з урахуванням багатьох обставин, не маючи повної і точної інформації. Будь-яку інформацію слід використати якомога повніше. Статистичний аналіз допомагає здобувати інформацію із наявних даних і оцінювати якість цієї інформації [7].

Варто регулярно наводити учням приклади, близькі до їхнього життя, де чітко прослідковується неабияка роль наявності необхідної інформації.

Задачі прикладного характеру у навчанні математики позитивно впливають на ставлення учнів до вивчення математики, підвищують мотивацію учіння. Участь стохастичної проблематики в математичній та загальній освіті стає більш всесторонньою. Такі задачі:

• сприяють засвоєнню не тільки методів прикладної математики, але й перш за все методів і принципів опису реальних життєвих ситуацій на математичній мові;

• учать раціонально вибирати адекватний математичний апарат для розв’язування прикладних задач;

• підводять до математичного «відкриття», формують пізнавальні потреби, вказують на необхідність розширення знань, виховують стійкий пізнавальний інтерес;

• демонструють відмінності в характері двох світів – світу математики і реальних ситуацій – в яких проходять три етапи розв’язування прикладної задачі;

• дають можливість підсилити міжпредметні зв’язки за допомогою застосування стохастичних методів в різних областях знань і практики [6].

Отже, застосування прикладних задач створює також належні умови для активізації навчального процесу, викликає зацікавленість учнів під час аналізу змісту прикладної задачі та пошуку відповідних математичних формул, виразів, рівнянь (тобто математичних моделей). Крім того, є можливість опановувати техніку обчислень без учнівських нарікань на «нудність» тривалих розрахунків.

Література

1. Задорожня Т. М. Використання прикладних задач при вивчення теорії ймовірностей / Т. М. Задорожня // Математика в школі. – 2005. – № 10. – С. 35–38.
2. Прус А. В. Загальні питання прикладної спрямованості шкільного курсу математики / А. В. Прус // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Вип. 22. – Донецьк : ТЕАН, 2004. – С. 92.
3. Швец В. А. О прикладной направленности школьного курса математики / В. А. Швец // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Донецьк : ТЕАН, 2007. – Вип. 30. – С. 135–142.
4. Панченко Л. Л. Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – К., 2006. – 260 с.
5. Лук’янова С. М. Роль прикладної спрямованості в навчанні математики учнів 5–6 класів / С. М. Лук’янова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Донецьк : ТЕАН, 2007. – Вип. 28. – С. 222–227.
6. Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики : [посібник для спецкурсу] / О. В. Авраменко, Л. І. Лутченко, В. В. Ретунська та ін. – Кіровоград : КДПУ, 2009. – 200 с.
7. Сенчевський В. О. Перші кроки в теорію ймовірностей/ В. О. Сенчевський. – Харків : Основа, 2008. – 124, [4] с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 11 (71)).

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ПРОФЕСІЙНОГО САМОВИЗНАЧЕННЯ ОСОБИСТОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

І. В. Лов'янова[α], М. Л. Йолкіна[β]
м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
[α] lira7-1-8@mail.ru
[β] marina.elkina.90@mail.ru

Школа XXI століття – це школа, в якій повинні реалізовуватись нові ідеї щодо організації освіти. У реформуванні середньої освіти в Україні в даний момент найактуальнішою проблемою є впровадження профільного навчання. Профілізація освіти передбачає посилення підготовки старшокласників в області прикладних знань за обраним профілем, формування у них первинних елементів професійно-важливих якостей. Така форма освіти старшокласників дозволяє їм отримати за обраним профілем більш глибокі, різносторонні теоретичні і прикладні знання, уміння і міцні практичні навички дослідницького характеру, підготувати себе до успішного продовження освіти у середньому (вищому) професійному навчальному закладі.

Нова школа має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів, для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності [4, 65]. Багато дослідників (Є. Клімов, Н. Пряжников, С. Чистяков та інші) вважають, що кожний із вікових етапів має специфічні особливості щодо вирішення зазначеної задачі. Так наприклад, для учнів 1-8 класів основною роботою можна вважати формування «загальної готовності» до професійного самовизначення. Для учнів 9-11 класів цю роботу треба спрямувати на допомогу у виборі конкретної спеціальності та професії.

Мета даної статті: розглянути деякі особливості вивчення математики на профільному рівні (на прикладі теми: «Похідна та її застосування»), з огляду на проблему професійного самовизначення особистості учнів.

На думку вітчизняних учених А. Вихруща, О. Зайцева, Д. Закатнова, Є. Павлютенкова, В. Сидоренка, Т. Туранова, Д. Тхоржевського, Б. Федоришина, М. Янцура – це процес самопізнання та об'єктивної оцінки школярами власних індивідуальних особливостей, зіставлення своїх професійно важливих якостей і можливостей з вимогами, необхідними для оволодіння конкретною професією [3, 6-7].

У структурі професійної орієнтації, В. Чебишева виділяє чотири основні компоненти:

1) повідомлення учням знань про професії, що цікавлять їх;

2) глибоке і всебічне вивчення школярів;

3) професійні консультації;

4) допомога учням в оволодінні вибраною професією.

Особливу роль у старшому шкільному віці відіграє ставлення до своїх здібностей. Останні активно співставляються з вимогами тієї професії, яку вибирають. Але щоб виявити наявність тих чи інших здібностей у старшокласників, необхідно попередньо виділити сферу переважних інтересів, тому що здібності реалізуються саме там.

У реформуванні середньої освіти в Україні в наш час актуальною проблемою є впровадження профільного навчання. Профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно-орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у створенні власної освітньої програми.

Профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення.

Профільне навчання математики потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена наявністю більш розвинених мотивів учнів профільних класів та шкіл до навчання порівняно із загальноосвітніми навчальним закладами [5].

У психології і педагогіці виявлена і добре вивчена залежність вибору професії від спрямованості навчальних і трудових інтересів учнів, від успішності основних видів їх повсякденної діяльності. Так, наприклад, в дослідженні В. Ярошенко [7] наявність цієї залежності підтвердилася в 56% випадків (було вивчено 4450 учнів 5-11 класів). Розглядаючи питання профорієнтації учнів, Л. Кондратьєва відзначає, що «*одночасний розвиток пізнавальних і професійних інтересів є принципово важливим моментом, оскільки у психології інтерес все більше розглядається не як деяка відособлена, незалежна освіта, а як одна з найважливіших характеристик цілісності особи, що визначає її відносини і дії*» [2, 154]. Ф. Парсонс [6] виділив три основні чинники успішності вибору професії: 1) правильна самооцінка схильностей, здібностей, інтересів, устремлінь, можливостей і обмежень; 2) знання того, що потрібне для успішної діяльності в кожній з вибираних професій; 3)уміння співвіднести результати самооцінки зі знаннями вимог професій.

Отже, *об'єктом профорієнтаційної діяльності є процес професійного самовизначення людини*, тому важливо в першу чергу сформулювати групу принципів, якими керуються (або повинні керуватися) дівчата і хлопці, вибираючи собі професію і місце в соціальній структурі суспільства.

Математика є універсальною мовою, яка широко застосовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі різко зростає її значення в розвитку суспільства. Велике значення має математика і в розвитку особистості, в становленні світогляду, розвитку мислення й інших якостей. Ці дві обставини й визначають роль математики в системі шкільної освіти. Головним завданням вивчення математики є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних у повсякденному житті, а також достатніх для вивчення суміжних дисциплін і продовження освіти. Поряд із вирішенням головного завдання, оволодінням конкретними обов'язковими математичними знаннями, профільне навчання математики передбачає формування стійкого інтересу учнів до предмета, виявлення й розвиток їхніх математичних здібностей, підготовку до навчання у вищому навчальному закладі. Навчання математики повинно мати розвивальний характер і прикладну спрямованість. Пріоритетними в організації навчання математики мають бути активні методи навчання й сучасні технології. Необхідним є застосування інформаційних технологій навчання.

Реалізація профільного навчання математики має здійснюватись з урахуванням його мети, його особливостей змісту й форми порівняно з навчанням математики в загальноосвітніх класах. Профільна диференціація навчання математики повинна забезпечити необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки молоді, який визначається замовленням суспільства й можливостями учнів цього віку, задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальних і математичних видів діяльності учнів, що характерні для цього профілю.

Завдання профільної диференціації навчання математики:

- забезпечити необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки молоді, який визначається замовленням суспільства й можливостями учнів даного віку;
- задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальних і математичних видів діяльності учнів, що характерні для даного профілю;
- формувати засобами математики професійні нахили учнів.

Профільна диференціація навчання математики у межах базового компоненту в профільній школі реалізується створенням трьох курсів математики:

- для *загальнокультурного напрямку* (професійний, філологічний, суспільно-історичний, спортивний та інші профілі) – курс А;

- для *прикладного напрямку* (технічний, технологічний, природничий, економічний, екологічний та інші профілі) – курс В;

- для *теоретичного напрямку* (фізико-математичний, інформатика, хіміко-біологічний та інші профілі) – курс С.

З метою створення необхідних умов для більш певної реалізації освітньої, розвивальної та виховної складових навчання математики, врахування інтересів, здібностей, потреб та можливостей учнів, у профільних фізико-математичних та математичних класах у повному обсязі має бути використаний потужний потенціал варіативної складової навчального плану, яка передбачає вивчення спецкурсів за вибором (елективних курсів). Ці курси, як правило, складаються з невеликих за змістом навчальних модулів, враховують різноманіття інтересів і можливостей учнів, поглиблюють та розширюють основний курс математики у відповідності до обраного профілю навчання. З одного боку, елективні курси покликані допомогти учневі переконатися в правильності професійного вибору, сприяти формуванню у старшокласників професійно важливих якостей особистості, мотивувати їхнє самовиховання та вибір професії, з іншого – слугувати розвитку в школярів прикладних математичних знань та умінь у тих сферах діяльності, знайомити учнів з основами майбутніх професійних знань [1, 26].

Провідним принципом, який визначає структуру навчання математики за математичним і фізико-математичним профілями, має стати моделювання у навчальному процесі елементів діяльності фахівця-математика. Реалізація цього принципу, певною мірою може бути забезпечена:

- системою факультативних та елективних курсів, орієнтованих на різні типи мислення, формування критичного стилю мислення – необхідної риси професіонала-математика;
- організацією самостійної дослідницької роботи учнів;
- організацією (у межах варіативного компонента навчального плану) професійно-орієнтованої практики старшокласників.

Вибір фізико-математичного або математичного профілю навчання з необхідністю передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов’язаної з нею. Незважаючи на це, мотиваційний етап навчального процесу в таких класах не можна ігнорувати. Одним зі способів мотивації, які доцільно використовувати у математичних та фізико-математичних класах, є створення проблемної ситуації. Така ситуація може бути досить складною, вимагати серйозних математичних знань та значних зусиль для її розв’язання. При спробі знайти спосіб вирішення проблеми, учні стикаються з недостатністю наявних у них математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією. Розвитку стійких пізнавальних математичних інтересів сприятимуть дібрані в системі різноманітні складні задачі з достатнім евристичним навантаженням, а також пов'язаний з темою історичний матеріал, наприклад, навчання математичного моделювання може здійснюватися не тільки на уроках математики, а й у процесі навчання усіх природничих предметів [1, 28-29].

Міцні знання, уміння й навички учні набувають у процесі активної пізнавальної діяльності, важливим збудником якої є інтерес. Щоб підтримати цей інтерес використовують різні форми зацікавленості: презентації, дидактичні і сюжетні ігри, задачі у віршах, задачі-жарти, ребуси, ігрові і цікаві ситуації. Наведемо приклад уроку з теми «Похідна та її застосування», метою якого є формування пізнавального інтересу у старшокласників.

Урок-практикум

Тема: «Дослідження функції за допомогою похідної»

Мета уроку:

1. *Визначити рівень засвоєння* учнями комплексних знань та вмінь з дослідження функції та виявити прогалини в знаннях з теми у відповідності з вимогами до математичної підготовки учнів.

2. *Розвивати*: навички самоконтролю при виконанні самостійної роботи, формувати вміння узагальнювати, абстрагувати та конкретизувати знання під час дослідження функцій.

3. *Формувати* вміння проводити дослідження за допомогою комп'ютерних програм.

Опитування:

За графіком похідної деякої функції (рис. 1) вкажіть інтервали, на яких функція монотонно зростає, спадає, має максимум, має мінімум.

Рис. 1. Графік похідної деякої функції

2. Закінчити твердження: «Якщо на відрізку [-2; 0] похідна …, то на то на цьому відрізку функція y….»; результати занести до таблиці 1:

Таблиця 1

Властивості функції

то y якщо	Моно-тонно зростає	Має мак-симум у внутрішній точці	Має міні-мум у вну-трішній точці	Постійна	Монотон-но спадає

3. На рис. 2 зображено графік похідної функції $y = f(x)$. Скільки точок максимуму має ця функція?

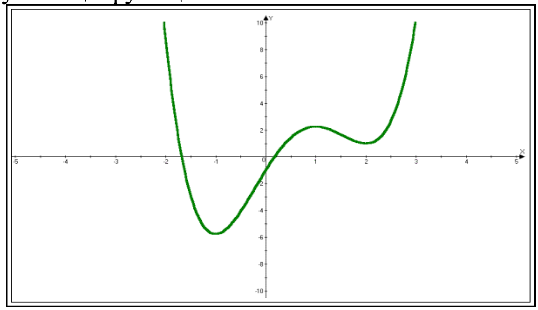


Рис. 2. Графік похідної функції $y = f(x)$

4. Похідна функції $y = f(x)$ дорівнює $(x+1)(x-2)$. Точками мінімуму функції є точки:

а) $x = -1$ в) $x= -1$, $x = 2$ д) $x= -2$

б) $x = 2$ г) $x= 1$, $x = 2$

Інструкція до виконання завдання практичної роботи

Урок проводиться в комп’ютерному класі. За комп’ютери спочатку сідають 10-12 учнів, інші – за парти. В міру виконання завдань діти міняються робочими місцями. Робота проводиться за індивідуальними завданнями з використанням комп’ютерних програм. Завдання мають 4 рівня складності: середній, вище середнього, високий, творчий.

Роботи, виконані тільки з використанням моделі «Дослідження функції за допомогою похідної», оцінюється у 5-6 балів, завдання складності 1-го рівня у 7-8 балів, творче завдання та завдання 2 – 3-го рівнів – 9-12 балів.

Індивідуальні завдання для міні-дослідницької роботи

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1. $f(x) = (x+1)^2(x-2)$ 3. $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2-x}$ 5. $f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$

2. $f(x) = (x+2)^2(x-2)$ 4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ 6. $f(x) = 4x^2\sqrt{1-4x}$

Готуємо по 6 карток до кожного з варіантів:

- 1, 2 варіант – завдання середнього рівня
- 3, 4 варіант – завдання рівня вище середнього
- 5, 6 варіант – завдання високого рівня

Творче завдання

Знайдіть функцію в таблиці 2, виходячи з її «візитки»: область визначення, корені, точки розриву, проміжки зростання та спадання.

Таблиця 2

Функції для творчого завдання

$f(x)=\frac{1}{4}x^4$	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$	$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$f(x)=(x^2-1)^2$	$f(x)=x(1-x)$	$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

Всі практичні етапи уроку учні можуть виконувати за допомогою двох діючих комп'ютерних програм: програмно-методичного комплексу GRIF або програмного забезпечення Master Function 2.0. За допомогою цих програм учні мають можливість самостійно виконувати та аналізувати завдання. Для цього учневі необхідно запустити програму та в робочому вікні ввести (задати комп'ютеру) необхідну функцію (рис. 3). При цьому учень може самостійно задавати колір, розмір, товщину лінії та точність побудови графіка. Задавши всі необхідні дані функції, від учень має лише дати програмі команду «Додати функцію», після чого на екрані з'являється графік заданої функції. Особливістю таких програм є те, що вони орієнтуються не лише на побудову графіка, а й на знаходження значення похідної та диференціала заданої функції. Для цього на панелі управління програми є такі команди як «F'» та «$\int dx$». Ми можемо знайти не лише першу похідну функції, а й другу похідну та побудувати її графік (рис. 4).

Заданих функцій та побудованих графіків може бути безліч, при цьому вони відрізнятимуться один від одного кольором, а натиснувши на конкретний графік, можна побачити всі дії, які над ним виконувались, та їх результати (рис. 5).

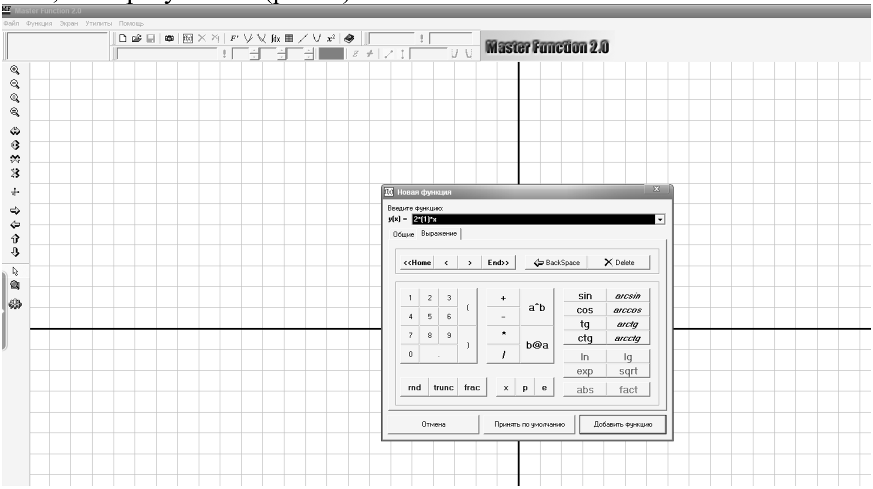


Рис. 3. Уведення до вікна програми даних для функції

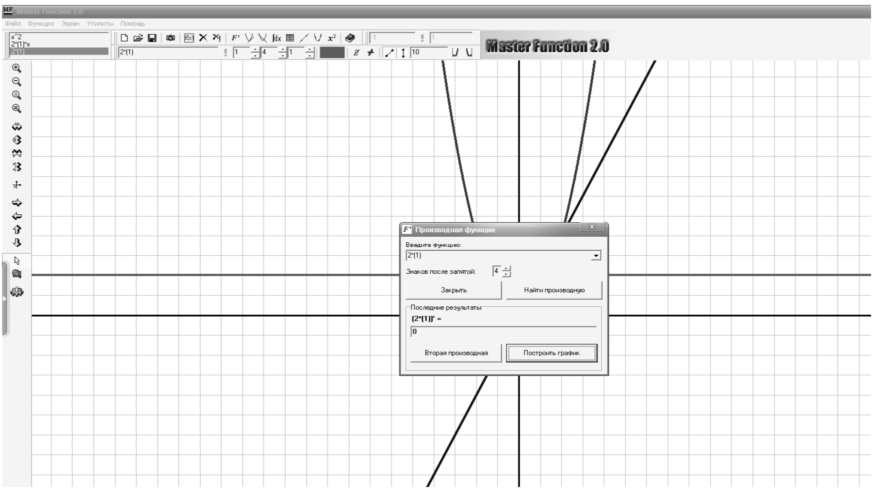


Рис. 4. Знаходження першої та другої похідної функції та побудова їх графіків

Висновки. В сучасних умовах інформаційної насиченості змісту навчання та швидкоплинної зміни технологій опрацювання інформації методи і форми роботи з учнями на уроках математики мають бути спрямовані на формування пізнавального інтересу до процесу засвоєння знань, сприяти розвиткові мислення учнів. Залучення сучасних інформаційно-комунікаційних технологій якнайкраще сприяє розв'язанню поставлених завдань.

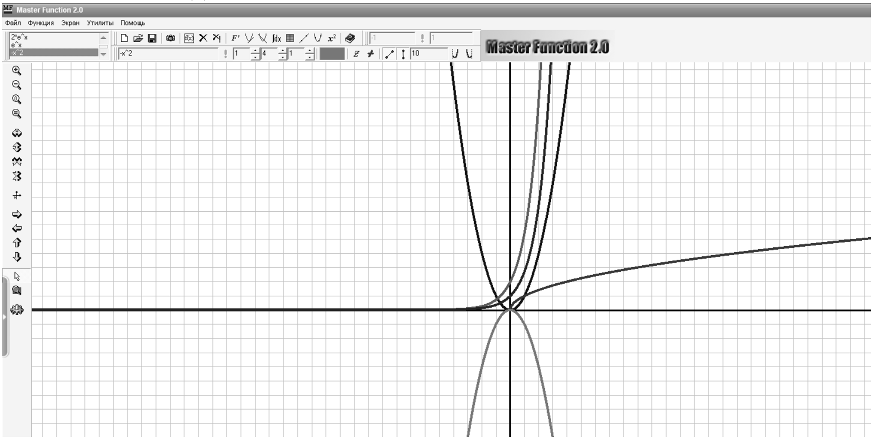


Рис. 5. Робота з декількома функціями та їх графіками

Література

1. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики / М. І. Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 29.
2. Захаров Н. Н. Профессиональная ориентация школьников / Н. Н. Захаров. – М. : Просвещение, 1988. – 270 с.
3. Зінченко В. П. Теорія і практика розбудови системи професійної орієнтації в сучасних умовах / В. П. Зінченко, М. С. Янцур // Оновлення змісту і методи психології освіти та професійної орієнтації. – 1998. – Вип. 4. – С. 4-15.
4. Матізин Т. Новій державі – нову школу / Т. Матізин // Рідна школа. – 2000. – № 2. – С. 65-66.
5. Про затвердження нової редакції Концепції профільного навчання у старшій школі Наказ МОН № 854 від 11.09.09 року [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://osvita.ua/legisttion/Ser_osv/4827
6. Хавир П. А. Психология профессионального самоопределения в ранней юности / П. А. Хавир. – М. : Просвещение, 1981. – 96 с.
7. Ярошенко В. В. Школа и профессиональное самоопределение учащихся / В. В. Ярошенко. – К. : Рад. школа, 1983. – 112 с.

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» НА РІВНІ СТАНДАРТУ

І. В. Лов'янова[α], С. Е. Федосєєв[β]
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
[α] lira7-1-8@mail.ru
[β] fedoseev_st@mail.ru

Актуальним напрямом перспективного розвитку загальноосвітньої школи є впровадження профільного навчання. Нові підходи до профілізації освіти закладені в Концепції профільного навчання у старшій школі. Національна доктрина розвитку освіти визначає профілізацію як один із шляхів забезпечення рівного доступу до якісної освіти кожному учневі. Профілізація має на меті допомогти реалізувати принципи особистісно-орієнтованого навчання, ефективно готувати випускників до засвоєння програм вищих навчальних закладів, створює умови для диференціації змісту навчання, розширює можливості свідомого вибору професії, сприяє рівному доступу до здобуття освіти відповідно до індивідуальних нахилів, здібностей і потреб. Реалізація цієї мети не можлива без застосування на заняттях сучасних інноваційних технологій, зокрема *технологій інтерактивного навчання*.

Мета даної статті: розглянути методичні аспекти застосування інтерактивних навчальних технологій при вивченні математики на рівні стандарту (на прикладі теми «Похідна та її застосування).

Загальним теоретичним питанням профілізації навчального процесу у старшій школі присвячені праці Г. О. Балла, Н. М. Бібік, О. І. Бугайова, М. І. Бурди, М. П. Гузика, В. І. Кизенка, О. К. Корсакової, В. М. Мадзігона, Н. Г. Ничкало, Н. І. Шиян. Проблемі впровадження інтерактивних технологій на сучасних уроках присвячені дослідження К. О. Баханова, О. Л. Глотова, К. Ф. Нор, О. М. Пєхоти, Л. В. Пироженко, О. І. Пометун, Г. П. П'ятакової, Г. А. Цукерман, О. Г. Ярошенко та ін. Інтерактивні технології на уроках математики розглядаються у працях Л. П. Ампілогової, Ж. Л. Бранопольської, В. В. Ковінчука, Л. Б. Новицької, Т. М. Паламар та ін.

Під **інтерактивними технологіями** розуміємо технології, що включають в себе чітко спланований результат навчання, використання окремих інтерактивних *форм, методів* та *прийомів*, що забезпечують активний характер взаємодії учасників навчального процесу на засадах співпраці та співтворчості.

Інтерактивне навчання має конкретні та прогнозовані цілі. Одна з таких цілей – створення комфортних умов навчання, тобто умов, за яких учень відчуває свою успішність, свою інтелектуальну спроможність, що робить продуктивним сам процес навчання, активізує пізнавальну діяльність учнів, підвищує емоційний рівень засвоєння знань. В залежності від мети уроку та форм організації навчальної діяльності учнів інтерактивні технології можна розподілити на чотири групи: 1) інтерактивні технології кооперативного навчання; 2) інтерактивні технології колективно-групового навчання; 3) технології ситуативного моделювання; 4) технології опрацювання дискусійних питань [5]. На уроках математики у старшій школі доцільно застосовувати наступні інтерактивні технології (в залежності від типу, мети, завдань уроку): акваріум, карусель, робота в парах, ротаційні трійки, два – чотири – всі разом, ажурна пилка, навчаючи – учусь, мікрофон, незакінчені речення, мозковий штурм, асоціативний кущ, займи позицію, робота в малих групах.

У психолого-педагогічній і методичній літературі розглядають також і таку форму заняття як інтерактивний урок. Однією з найпоширеніших структур інтерактивного уроку є так звана *схема Колба* [2], яка представлена такими етапами:

1. Мотивація й оголошення нової теми – 10% часу від загальної тривалості уроку.

2. Закріплення (повторення) пройденого – 20% часу від загальної тривалості уроку.

3. Вивчення нового матеріалу – 50% часу від загальної тривалості уроку.

4. Оцінювання – 10% часу від загальної тривалості уроку.

5. Підведення підсумків уроку (дебрифінг, рефлексія) – 10% часу від загальної тривалості уроку [2, 16].

У профільній школі сьогодні математика вивчається на одному з трьох рівнів: рівень стандарту, академічний рівень, профільний рівень. Зміст програми навчання математики на рівні стандарту спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов’язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Одне з центральних місць у шкільному курсі алгебри і початків аналізу займає тема *«Похідна та її застосування»*. Похідною як елементом математичного апарату широко послуговуються в різних науках. В алгебрі її здебільшого застосовують для дослідження функцій та побудови їх графіків, у геометрії – для знаходження рівняння дотичної, для розв’язування геометричних задач на найбільше та найменше значення (задачі на оптимізацію). У «Програмі з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту» [1, 9] зазначається, що важливим завершенням функціональної лінії курсу «Математика» є розгляд понять похідної та інтегралу, які є необхідним інструментом дослідження руху. Основні ідеї математичного аналізу виглядають досить простими і наочними, якщо викладати їх на тому інтуїтивному рівні, на якому вони виникли історично і який цілком задовольняє потреби загальноосвітньої підготовки учнів. Під час проведення уроків вчителям не варто захоплюватися формально-логічною строгістю доведень та відводити багато часу суто технічним питанням і конструкціям. Більше уваги слід приділити змістовній стороні ідей і понять, їх геометричному і фізичному тлумаченню.

Вивчення теми «Похідна та її застосування» повинно мати яскраво виражену прикладну спрямованість. При цьому для вивчення суміжних предметів важлива не стільки техніка диференціювання функцій, скільки використання основних понять, фактів і методів для моделювання процесів, що досліджують у цих дисциплінах. Вивчення цієї теми, відповідна система вправ мають бути орієнтованими на формування найпростіших навичок математичного моделювання засобами диференціального числення.

Навчальний процес у старшій школі при вивченні матеріалу на рівні стандарту потребує і робить можливим використання специфічних форм, методів, технологій навчання. Одними з таких сучасних технологій є *застосування інтерактивних методів* навчання математики, які покликані розвинути навички групової комунікації учнів, залучити їх до пізнавально-самостійної діяльності, підвищити мотивацію та пізнавальний інтерес до вивчення математики, зрештою, активізувати пізнавальну діяльність учнів.

Вивчення теми «Похідна та її застосування» на рівні стандарту із застосуванням інтерактивних навчальних технологій вчителеві варто розпочати з розв'язування задачі про знаходження середньої та миттєвої швидкостей нерівномірного руху. Ця задача приводить до понять границі і похідної функції в точці. Поняття границі спочатку доцільно вводити на наочно-інтуїтивному рівні, а потім уточнювати за допомогою наближених обчислень. Узагальнення поняття швидкості перебігу процесу підводить до поняття швидкості зміни функції в точці, тобто до її похідної.

Під час формування поняття похідної вчителеві слід намагатися підібрати такі інтерактивні методи навчання, які б сприяли формуванню розуміння того, що похідна моделює не тільки швидкість механічного руху, а й швидкість зміни з часом будь-якого процесу (швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування, швидкість наповнення посудини рідиною, силу змінного струму тощо). Для досягнення цієї мети доцільне застосування інтерактивної технології «ажурна пилка», адже вона дає можливість вивчити значну кількість інформації за короткий проміжок часу шляхом об'єднання учнів у домашні і експертні групи.

Під час проведення уроків з теми вчителеві варто акцентувати увагу учнів на геометричних, фізичних тлумаченнях понять і не зловживати технікою диференціювання. Більш того, питання про похідну складеної функції можна розглянути лише для функцій виду $y=f(kx+b)$, чого цілком достатньо для навчання на рівні стандарту (що і роблять автори підручника [4]).

Одним із важливих застосувань похідної є її використання для дослідження функцій і побудови їхніх графіків. Вивчати цю частину навчального матеріалу можна застосовуючи інтерактивні технології роботи в малих групах або парну роботу. На основі ознак монотонності функцій і достатніх умов екстремуму варто розглянути алгоритми знаходження проміжків зростання, спадання, сталості функцій, а також точок екстремуму. Спочатку ці алгоритми застосовуються до функцій, диференційованих в області їх визначення. Далі такі алгоритми розглядаються для функцій, диференційованих в усіх точках області визначення за винятком скінченного числа точок, у яких функція неперервна. Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції за допомогою похідної застосовується у прикладних задачах на основі методу математичного моделювання.

За нині діючою програмою з математики (рівень стандарту) на вивчення теми «Похідна та її застосування» відводиться 14 годин.

Наведемо орієнтовний план вивчення цієї теми із застосуванням інтерактивних навчальних технологій, опускаючи програмні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів та мету уроку (таблиця 1).

Розглянемо детальніше особливості застосування інтерактивної технології роботи в малих групах «*Спільний проект*». Відомо, що в основі проектної технології лежить розвиток в учнів пізнавальних навичок, уміння самому конструювати свої знання та орієнтуватися в інформаційному просторі, розвиток критичного мислення, формування навичок мислення високого рівня. Крім того проектна технологія сприяє навичкам групової комунікації, стимулює пізнавальний інтерес і пізнавальну самостійність, що тим самим сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів. Діти, враховуючи свої інтереси, разом з учителем виконують власний проект, розв'язуючи певну дослідницьку задачу. Тим самим учні залучаються до діяльності, близької до діяльності вченого.

Нами розроблено проект «Пані Похідна» (рис. 1) для учнів, які вивчають математику на рівні стандарту. Даний проект покликаний зацікавити учнів, щоб вивчення даної теми було більш усвідомленим, показати багатогранність застосування поняття похідної.

Таблиця 1

План вивчення теми «Похідна та її застосування» за рівнем стандарту із використанням інтерактивних технологій

<table>
<tr><th>№</th><th>Тема уроку</th><th colspan="2">Інтерактивні технології</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Границя функції в точці</td><td colspan="2">Ажурна пилка</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Задачі, що приводять до поняття похідної</td><td colspan="2">Ротаційні (змінювані) трійки</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст</td><td colspan="2">Робота в парах, ажурна пилка</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Правила обчислення похідних</td><td colspan="2">Робота в малих групах (коло ідей)</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Похідні деяких елементарних функцій (таблиця похідних)</td><td colspan="2" rowspan="2">Акваріум</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Похідна складеної функції</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Розв’язування задач</td><td colspan="2">Карусель</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Достатня умова зростання (спадання) функції</td><td>Мікрофон, незакінчені речення</td><td rowspan="7">Робота в малих групах (спільний проект)</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Критичні точки функції. Точки екстремуму</td><td rowspan="2">Два – чотири – всі разом</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Критичні точки функції. Точки екстремуму</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>Застосування похідної до дослідження функцій</td><td rowspan="2">Мозковий штурм, парна робота</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків функцій</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Найбільше та найменше значення функції на відрізку</td><td rowspan="2">Асоціативний кущ, ротаційні трійки</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Контрольна робота</td></tr>
</table>

Завдання проекту: формування компетентностей у сфері самостійної пізнавальної діяльності; розвиток уміння бачити проблему і намітити шляхи її вирішення; формування навичок публічного виступу; формування інформаційної та комунікативної компетентності учнів; розвиток критичного мислення, вміння аналізувати, формулювати проблему, вказувати шляхи її розв’язання; розвиток уміння спостерігати і аналізувати, виділяти суттєві ознаки і на їх основі робити висновки; розширення знань учнів з теми «Похідна та її застосування»; формування компетентності учнів у сфері практичної діяльності.

Даний проект має тісні міжпредметні зв’язки з інформатикою, геометрією, фізикою, економікою та технікою. Проект передбачає вирішення учнями ключового, тематичних і змістовних питань.

Рис. 1. Деякі слайди з презентації вчителя до проекту «Пані Похідна»

Ключове питання: Як загнати швидкість в кут?

Тематичні питання: 1. Чи можна керувати швидкістю процесів? 2. Що побачить фізик у похідній? 3. Геометрія і похідна теж пов'язані? 4. Чи давно похідна допомагає математикам і фізикам? 5. Який зв'язок економіки і похідної? 6. Чи можна побудувати довільний графік? 7. Чи є майбутнє у похідної?

Змістові питання: 1. Звідки прийшли границі? 2. Що таке миттєва швидкість? 3. Які правила знаходження похідних ви знаєте? 4. Чи можна досліджувати функцію, не знаючи її графік? 5. Коли найбільше більше максимуму? 6. Як допомагає похідна в техніці? 8. Як похідна допомагає спростити обчислення? 9. Як застосовують похідну економісти?

На нашу думку, застосування інтерактивної технології «Спільний проект» якнайкраще сприяє тому, що в учнів формується уявлення про математику як елемент їхньої загальної культури, про роль математики (зокрема похідної) для прогресу людства. Саме застосування проектної технології дає учням можливість глибоко і повно ознайомитися із розвитком похідної в історичному аспекті, працюючи по групах як в урочний, так і у позакласний час. До того ж сьогодні метод проектів є одним з найефективніших засобів активізації пізнавальної діяльності, тому що він створює умови для творчої самореалізації учнів, розвиває пізнавальну самостійність, інтерес, підвищує мотивацію навчання.

Наведемо фрагмент уроку з теми «Задачі, що приводять до поняття похідної» (рівень стандарту) із застосуванням інтерактивної технології «Ротаційні трійки». Учитель об'єднує учнів у трійки, розміщуючи трійки так, щоб кожна з них бачила трійку справа й трійку зліва. Разом усі трійки мають утворити коло. Далі школярі розраховуються від 0 до 2. Учні з номером 1 з кожним наступним завданням переходять до наступної трійки за годинниковою стрілкою, а учні з номером 2 переходять через дві трійки проти годинникової стрілки. Учні з номером 0 залишаються на місці і є постійними членами трійки. Результатом буде повністю нова трійка. Кожна трійка розв'язує однакові завдання.

1-е завдання (нульова ротація)

Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x=2–3t$, де x – координата точки, t – час. Якою є швидкість руху точки? В якому напрямі координатної прямої рухається точка?

2-е завдання (перша ротація)

Матеріальна точка, рухаючись прямолінійно і рівномірно, в момент часу $t=1$ мала координату $x=3$, а в момент часу $t=3$ – координату $x=7$. Якою є швидкість її руху?

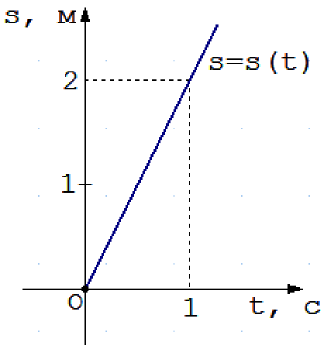


Рис. 2.

3-е завдання (друга ротація)

Який вигляд має графік закону рівномірного руху матеріальної точки вздовж координатної прямої?

4-е завдання (третя ротація)

На рис. 2 зображено залежність шляху s, пройденого матеріальною точкою, від часу t. Якою є швидкість руху точки?

5-е завдання (четверта ротація)

Точка рухається вздовж координатної прямої за законом $x=3t^2$, де x – координата точки, t – час. Якою є середня швидкість руху точки на проміжку [1; 3]?

6-е завдання (п'ята ротація)

Маса солі, що розчинилася у воді за проміжок часу $[0; t]$ дорівнює $m(t)$. Що треба розуміти під:

а) середньою швидкістю розчинення солі за проміжок часу [1; 2];

б) швидкість розчинення у момент часу $t=1$?

На закінчення варто зауважити, що використання інтерактивних технологій при вивченні математики на рівні стандарту – не самоціль.

Це лише спосіб створення умов, за яких учні залучаються до навчально-пізнавальної діяльності; це засіб, який найкраще сприяє співробітництву, порозумінню, доброзичливості, надає можливість дійсно реалізувати особистісно-орієнтоване навчання. Уміле поєднання традиційних та інтерактивних методів викладання математики сприяє досягнень високого рівня знань учнів та виробленню вміння застосовувати їх на практиці.

Література

1. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання / [упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна]. – Харків : Ранок, 2011. – 384 с.
2. Касьяненко В. В. Інтерактивні методи навчання та їх переваги / В. В. Касьяненко // Фізика в школах України. – 2009. – №2. – С. 13-16.
3. Концепція профільного навчання в старшій школі (нова редакція), затверджена наказом МОН України №854 від 11.09.2009 р. // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2009. – №28-29. – С. 57-64.
4. Математика. 11 клас. Рівень стандарту / [Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К.]. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
5. Пометун О. І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання : [наук. метод. посібн.] / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко; за ред. О. І. Пометун. – К. : А. С. К., 2004. – 192 с.

КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ ТА КОНТРПРИКЛАДИ В МАТЕМАТИЦІ

О. В. Мартиненко, О. М. Бойко
Україна, м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
імені А. С. Макаренка
Boyko.Olya@mail.ru

Фундаментальною особливістю світу, в якому ми живемо, є постійні та прискорені зміни. Це світ інформації, яка швидко збільшується і при тому постійно застаріває. Це світ, в якому ідеї постійно піддаються структурним змінам, все новим перевіркам та переосмисленню, світ, в якому власне мислення слід увесь час адаптувати до мислення інших, де слід поважати потяг до ясності, точності та ретельності, де навички інтелектуальної праці слід постійно підвищувати і вдосконалювати. Сам спосіб життя в сучасному інформаційному суспільстві спонукає розвиток критичного мислення як актуальну освітню проблему. [7]

Термін «критичне мислення», який поширюється в практиці навчальних закладів різних країн світу з кінця XX століття, пройшов складний шлях свого становлення. Одне із прийнятих визначень терміну «критичне мислення» в Україні наводиться, наприклад, в «Концепції громадянської освіти та виховання в Україні», яка подана у проекті «Освіта для демократії в Україні»: критичне мислення – здатність особистості долати в собі схильність до однозначно-догматичного сприйняття світу, вміння аналізувати ту чи іншу проблему з різних боків, користуватися інформацією з різних джерел, відрізняючи об'єктивний факт від суб'єктивної думки про нього, логічний умовивід від упередженого припущення чи забобону. Це вміння людини адекватно визначати причини й передумови наявних в її житті проблем, готовність докладати зусиль для їх практичного (а не лише риторичного) подолання.

Слід зазначити, що наразі не існує єдиного загальновживаного визначення даного терміну, наведене вище визначення є лише одним із багатьох. Словосполучення «критичне мислення» як сформований термін почали активно вживати лише у 70 роках XX століття. Та це поняття знаходить місце ще у працях таких мислителів, як Платон, Аристотель, Фома Аквінський, Дж. Міль, Б. Рассел, К. Поппер та інших.

Проте, загальновизнаним фундатором сучасних традицій у дослідженні критичного мислення, за словами А. Фішера, є Дж. Дьюї [6, 3].

Не залишився осторонь формування даного поняття й І. Лакатос. На його переконання, поняття критицизму, контрприкладу, наслідку, істини і доведення нероздільні; коли вони змінюються, то початкова зміна відбувається в понятті критицизму, за якою слідує зміна інших понять.

Розвиток критичного мислення тісно пов'язаний з побудовою контрприкладів. У [5] І. Лакатос звертає увагу на критику контрприкладами того чи іншого поняття, яка веде до його збагачення, розширення або уточнення; він вчить учнів знаходити контрприклади, які заперечують правильність даного означення. На його думку, контрприклади є критикою, оскільки критицизм дозволяє піддавати критиці контрприкладами більш глибокі знання, які раніше вважалися «недоторканими». За В. О. Далінгером, уміння знаходити контрприклади є однією з важливих якостей критичного мислення [1, 47].

У дослідженнях [3; 8] виділяються наступні якості критичного мислення:

– ясність, прозорість, точність, правильність;
– доречність, зосередженість на справі;
– логічність, послідовність, узгодженість;
– глибина, повнота і оригінальність;
– краса і досконалість;
– доведеність та аргументованість.

Критичне мислення приходить на допомогу, коли проблема не вирішується, коли необхідно виділити фундаментальні основи прийнятого рішення, і саме критичне мислення допомагає виявити в ньому помилки та внутрішні протиріччя [4, 215].

Так, К. Вейєрштрасс, Г. Кантор, Л. Кронекер, Б. Рассел піддали жорсткій критиці поняття, які використовувалися. Вони почали перебудову математики на базі строгих означень: наочність відкидалася, а натомість вимагалася строга логіка. При такому підході до побудови тверджень зростала ймовірність отримання достовірних результатів, причому надійною гарантією їх істинності було (і залишається на сьогодні) додержання чотирьох основних логічних законів: тотожності, суперечності, виключення третього та достовірної підстави.

Зосередимо увагу на так званому законі виключення третього, який має сенс тільки за умови додержання законів тотожності та несуперечності і може бути сформульований так: у процесі міркувань потрібно доводити справу до певного стверджувального або заперечувального висловлення, у цьому разі істинним виявляється одне з двох тверджень, що заперечують одне одного. Згідно з цим законом ми маємо змогу ефективно доводити хибність загальностверджувального висловлювання за допомогою частиннозаперечувального, тобто так званого контрприкладу.

Класичним контрприкладом в історії математичного аналізу є побудована Б. Больцано функція, неперервна на всій дійсній прямій і недиференційовна в жодній точці. Але його праця залишилася невідомою для широкого загалу, і вперше такий приклад опублікував К. Вейєрштрасс у 1872 році. Дана функція є контрприкладом до гіпотези про те, що диференційовність функції є природним наслідком її неперервності. Цю проблему також досліджував М. І. Лобачевський, яким було доведено, що існування похідної не випливає логічно із неперервності функції. Інакше кажучи, було побудовано контрприклад, який заперечував поширені переконання серед значної кількості вчених про те, що таких функцій не існує.

Критичне ставлення до загальновживаних означень та тверджень спонукало до розвитку деякі важливі як для теорії, так і для практики галузі сучасної науки.

У 1904 році Х. фон Кох також побудував приклад неперервної функції на всій дійсній прямій і недиференційовної в жодній точці, яка в сучасній математиці називається кривою Коха. Відмітимо той факт, що ця крива знайшла практичне застосування при проектуванні антенних пристроїв: Н. Коеном на її основі було побудовано фрактальну антенну, що широко використовується у мобільних пристроях.

У математиці найчастіше використовуються наступні чотири формули:

1) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$;
2) $\forall x(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)})$;
3) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$;
4) $\exists x(A(x) \wedge \overline{B(x)})$.

Перше та друге судження заперечують контрприкладами, а третє та четверте – доводяться прикладами. Зауважимо, що приклади і контрприклади – це об'єкти однієї природи і стратегія їх пошуку не залежить від змісту судження, а диктується його структурою.

Приклади, за допомогою яких перевіряється правомірність даних тверджень, називають контрприкладами. Їх застосовують тоді, коли потрібно переконатися або переконати когось у хибності деякого загального висловлювання або для виявлення, осмислення та усунення помилок у хибних твердженнях.

Зокрема, І. Лакатос виділяє три види контрприкладів:

– локальні, але не глобальні (контрприклади для доведення (леми), але не для основної «здогадки»);
– локальні і глобальні контрприклади (контрприклади і для доведення, і для основної «здогадки»);
– глобальні, але не локальні контрприклади (проти основної «здогадки», але не доведення).

Наведення контрприкладів різного виду проблематизує початкову «здогадку» (припущення) і доведення, в результаті чого відбувається постійне уточнення та переформулювання системи знань, які знаходяться в процесі постійної трансформації (перетворення). У результаті побудови контрприкладів до того чи іншого поняття відбувається його збагачення. Даний механізм отримав назву процесу збагачення знання на основі контрприкладів; його покладено в основу методу доведень і заперечень, запропонованого І. Лакатосом [5].

Метод доведення і заперечень (метод доведень і спростувань) об'єднує в собі метод решти (на основі глобального контрприкладу слід відкинути основну «здогадку»), метод усунення «монстрів» (відкидання контрприкладів), метод включення (інкорпорації) лем (тут важливі глобальні і локальні контрприклади). Він характеризується більш тісною взаємодією доведення і спростування (побудова контрприкладів).

І. Лакатос аналізує історію математики XIX–XX століття з точки зору відношення доведень (математики) і аналізу доведень (логіки). Він зазначає, що відбувається поступовий перехід від наївної віри в абсолютність математичного доведення, як деякого уявного експерименту, до усвідомлення важливості аналізу доведення під тиском різного роду контрприкладів.

Залежно від обставин та поставленої мети певні приклади можна розглядати як контрприклади і навпаки.

Так функцію $f(x)$, задану формулою $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0;1]$, можна вважати прикладом неперервної на проміжку (0; 1) функції. І цю ж саму функцію можна розглядати як контрприклад до наступного твердження: якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку, то на цьому проміжку вона обмежена.

Існує тісний взаємозв'язок між розвитком критичного мислення та побудовою контрприкладів. До основних характеристик критичного мислення відносяться: 1) інтерпретація (категоризація, розшифровка значень, тлумачення значень); 2) аналіз (перевірка ідей, визначення аргументів, аналіз аргументів); 3) оцінювання (тверджень, аргументів); 4) логічність (перевірка доказів, порівняння альтернатив, побудова висновків); 5) пояснення (визначення результатів, обґрунтування процедур, представлення аргументів); 6) саморегуляція (самооцінка, самокорекція).

Аналогічні етапи виділяють і у процесі побудови контрприкладів, а саме: 1) етап висунення гіпотези; 2) етап збору матеріалу, накопичення знань; 3) етап інкубації, «дозрівання» побудови контрприкладу; 4) етап інсайту (раптового розуміння того, у який саме спосіб можна розв'язати задачу або проблему); 5) етап доведення побудованого контрприкладу.

Останній етап є важливим при доведенні правильності побудованого контрприкладу до того чи іншого означення або твердження. Наприклад, в теорії диференціального числення це привело до уточнення деяких понять математичного аналізу і поклало початок розгляду «проблеми означення» у математиці.

Поняття контрприкладу широко використовується у наукових дослідженнях, математичних припущеннях, визначенні коректності означення та істинності твердження, доведенні теорем.

На нашу думку, побудова прикладів і контрприкладів у математиці є одним із засобів розвитку критичного мислення. Уміння знаходити приклади, які ілюструють поняття чи доводять твердження, або контрприклади, які заперечують припущення, є його важливими якостями. З іншого боку, контрприклади займають чільне місце у становленні та розвитку фундаментальних понять математики, і побудова контрприкладів дозволяє розкрити зміст математичних понять, поглибити їх розуміння, встановити зв'язки між ними.

Література

1. Далингер В. А. Примеры и контрпримеры как средство развития критического мышления учащихся в процессе обучения математике / В. А. Далингер // Математика и информатика: наука и образование : ежегодник : межвуз. сб. наук. тр. / Омск. гос. пед. ун-т. – Омск, 2009. – Вып. 8. – С. 87-94.
2. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики математики / Н. Вірченко. – К., 2003. – 282 с.
3. Кун Т. Структура наукових революцій / Томас Кун. – К. : Port-Royal, 2001. – 367 с.
4. Халперн Д. Психология критического мышления / Дайана Халперн. – 4-е междунар изд. – СПб. : Питер, 2000. – 512 с. – (Мастера психологии)
5. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / И. Лакатос. – М. : Наука, 1967. – 152 с.
6. Fisher A. Critical Thinking : an introduction / Alec Fisher. – Cambridge : Cambridge University Press, 2001. – 249 p.
7. Paul R.W. Critical Thinking: What Every Person Needs to Survive In A Rapidly Changing World / Richard W. Paul. – Santa Rose : Foundation for Critical Thinking, 1992. – 673 p.
8. Paul R.W. Critical Thinking: How to Prepare Students for a Rapidly Changing World / Richard W. Paul. – Santa Rose : Foundation for Critical Thinking, 1995. – 572 p.

«ДІРКИ» В ТЕСТАХ ЗІ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ШЛЯХИ ЇХ УСУНЕННЯ

В. М. Михалевич[α], М. В. Чухно[β]
Україна, м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет
[α] vmykhal@gmail.com
[β] chuhno.mv@gmail.com

Комп'ютер реально стає сьогодні незамінним помічником вчителя та учня в опануванні інформаційними потоками, допомагає моделювати та ілюструвати процеси, явища, об'єкти та події. Вчителі зазначають, що учні часто випереджають багатьох освітян у використанні комп'ютерів і телекомунікаційних технологій, а їм їх важливо «доганяти». Особливо важливим є те, що, сучасні комп'ютерні технології в поєднанні з новітніми освітніми технологіями стають ефективними засобами розвитку мислення учнів і вчителів [1].

Педагогічна задача будь-якого сучасного навчального закладу полягає в тому, щоб сформована група студентів досягла високого рівня розвитку предметних компетентностей [2]. Для діагностики рівня сформованості компетентностей потрібно здійснювати різноманітні види контролю.

Під час оцінювання якості навчання велике значення має, хто саме оцінює роботу студента та за якими критеріями. Традиційна система оцінювання за чотирьохбальною шкалою є суб'єктивною і в значній мірі залежить від психологічних особливостей викладача. Також відомо, що під час проведення лекційних та практичних занять між суб'єктами навчання виникають міжособистісні зв'язки, які тією чи іншою мірою, впливають на оцінювання рівня сформованості предметної компетентності студента. Тому схожі відповіді різних студентів одним викладачем оцінюється по різному, так само як одна й та ж відповідь одного студента різними викладачами може бути віднесена до різних рівнів компетентностей.

Тести надають можливість дати оцінку рівня певної компетентності індивіда відповідно до поставленої мети перевірки, забезпечують можливість отримання кількісної оцінки на основі квантифікації якісних параметрів особистості і зручність математичної обробки, вони є відносно оперативним способом оцінки великої кількості невідомих осіб; сприяють об'єктивності оцінок, що не залежать від суб'єктивних установок особи, яка проводить дослідження; забезпечують порівнянність інформації, отриманої різними дослідниками на різних випробуваних [3].

Очевидно, що на сьогоднішній день перевірка рівня сформованості компетентностей студента за допомогою традиційних форм рубіжного контролю у вигляді контрольних робіт, письмових та усних колоквіумів та іспитів надає можливість краще дізнатись про рівень предметної компетентності у порівнянні з використанням тестів.

У той же час контроль за допомогою тестів, особливо їх комп'ютеризованої форми [6], має значні переваги, які полягають, зокрема, у заощадженні часу викладача та забезпеченні можливості студентів самостійно навчатись та оцінювати свій рівень набутих компетентностей.

За характером відповідей на питання тести поділяють на відкриті (вимагають самостійного формулювання відповіді) та закриті (містять готові варіанти відповідей) [4, 243-246]. Як правило, перевага тестів у швидкості перевірки стосується тільки закритих тестів. Проте, виграючи у швидкості перевірки ми втрачаємо певні можливості, зокрема формування в студентів культури математичної мови (письмової або усної). Крім того, характерною вадою закритих тестів з вищої математики є наявність у них так званих «дірок».

Метою статті є введення та розкриття поняття «*дірок*» *у тестах* з вищої математики та визначення шляхів подолання пов'язаних із цим недоліків.

Перш ніж ввести поняття «дірок» у тестах проаналізуємо тести із звичайних диференціальних рівнянь, розміщених на сайті одного із університетів [5]

Завдання 1.

$y' = 2xy^2$

Варіанти відповідей

1. $\dfrac{1}{x^2+C}$; 2. $-\dfrac{1}{x^2+C}$; 3. $-\dfrac{1}{x^2}$

Студент, який не знайомий із методами розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, але має сформовані практичні компетентності щодо знаходження похідних та виконання елементарних перетворень, тобто володіє практичними компетентностями, які були набуті на заняттях під час вивчення попереднього матеріалу, легко може дати правильні відповіді на запитання приблизно за той самий час (і навіть швидше) через перевірку, які із виразів є загальним або частинним розв'язками вихідного диференціального рівняння. До того ж, під час знаходження загального розв'язку можна відкинути вирази, які не утримують довільної сталої. А під час знаходження частинного розв'язку можна відкинути вирази, які не задовольняють початкові умови. Очевидно, що третій варіант відповіді не задовольняє умові $y(0) = 1$, а перший варіант відповіді не задовольняє умові $y'(0)=1$.

Тут доречно згадати про певний зв'язок проблеми, якої ми торкаємось, із знаменитою проблемою розв'язання-перевірки (проблема Кука-Левіна).

Завдання 2.

$$y' = y(x)^2 - \frac{2}{x^2}$$

Варіанти відповідей

1. $\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}$; 2. $3\frac{x^2}{C - x^3}$; 3. $\frac{1}{x}$.

Відповідь для завдання №2 може бути отримана у вигляді $y = -\frac{1 + 2Cx^3}{\left(-1 + Cx^3\right)x}$. Перетворення його до вигляду, що заданий у варіанті відповіді потребує додаткового часу, що, звичайно є ознакою недостаньої ефективності даного завдання для виміру сформованих у студентів компетентностей розв'язування ДР, оскільки потребує більше додаткового часу для виконання дій, не пов'язаних безпосередньо із компетентностями що діагностуються.

Диференціальне рівняння у завданні № 2 є окремим випадком рівняння Рікатті, яке у відповідності до сучасних програм для технічних ВНЗ для багатьох спеціальностей бакалаврських напрямів не входить до типових задач і є завданням підвищеної складності. Тому дане завдання можна пропонувати для розв'язання, наприклад, за наявності доступу до довідника з розв'язування загальних диференціальних рівнянь.

Завдання 3.

$$yy'' = y'^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Варіанти відповідей

1. $y = e^{(-x)}$, 2. $y = e^x$, 3. $y = -e^x$

Відповідь легко визначити, не розв'язуючи диференціальне рівняння. Відповідь 3 не задовольняє умові $y(0)=1$, а відповідь 1 – умові $y'(0)=1$. Залишається відповідь 2.

Завдання 4.

Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Варіанти відповідей

1. $y = 3^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$;

2. $y = 3^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

Розв'язання вказаної типової задачі можна подати у вигляді шести простих завдань, що виконуються студентами послідовно:

1. Розпізнати математичний вираз, тобто, визначити, до якого класу відноситься дане рівняння.
2. Спираючись на вивчені поняття, зрозуміти, що потрібно скласти характеристичне рівняння.
3. Застосовуючи відповідне правило, скласти це рівняння.
4. Розв'язати характеристичне рівняння, тобто правильно знайти шукані корені: $\alpha \pm \beta \cdot i$.
5. Пригадати структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.
6. Правильно записати розв'язок ДР, наприклад, у вигляді $y_{ci}(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)\right)$ за умови комплексних коренів характеристичного рівняння.

Студент може правильно виконати перші п'ять етапів, але припуститись помилки на 6-му етапі, наприклад, якщо переплутає місця α та β в структурі розв'язку. Отже студент, який знає 5 етапів із шести, фактично отримує неправильну відповідь та нуль балів за дане завдання в тестах?! До того ж, слід зауважити, що під час використання подібних закритих тестів як засобу навчання студент, як правило, не отримує відповідь, на якому саме етапі розв'язання диференціального рівняння він припустився помилки.

Подібні недоліки, в тій або в іншій мірі, характерні практично для всіх варіантів тестів з диференціальних рівнянь, з якими мали змогу ознайомитися автори. Такі недоліки фактично є "дірками". Програмісти під дірками, зазвичай розуміють уразливість в програмному забезпеченні, що надає можливість знайдення не передбаченого розробниками ПЗ способу отримання несанкціонованого доступу до чого-небудь, тобто руйнуванню системи захисту.

Пропонується наступне означення.

Дірки у тестах – це недосконалість тестів, що надає можливість отримати правильні відповіді за відсутності необхідного рівня предметних компетентностей для вимірювання яких і призначено дані тести.

Отже, проаналізовані приклади тестів, призначених для вимірювання рівня математичних компетентностей із розв'язування звичайних ДР, внаслідок наявності в них «дірок», свого прямого призначення фактично не виконують.

Очевидно, також, що можливі заходи щодо усунення зазначених недоліків (наприклад, збільшення варіантів відповідей) висувають додаткові вимоги до складання тестів, що ускладнює і без того складне та відповідальне завдання. До того ж залишається один із головних недоліків закритих тестів, який полягає у відсутності етапу самостійного написання розв’язку завдання, що є загальновідомим недоліком такої форми контролю та навчання.

Задача викладача полягає в забезпеченні умов формування в студентів необхідного рівня предметної компетентності під час розв’язування диференціальних рівнянь та об’єктивної діагностики рівня їх сформованості. І чим більш чутливий інструмент ми матимемо для цього, – тим краще. Підвищити ефективність проведення роботи зі створення такого інструменту можна поєднанням закритих та відкритих тестів за умови залучення педагогічних програмних засобів до генерування тестів та перевірки відповідей. Формулювання вимог до таких засобів і є однією з наших подальших задач. Одна з головних вимог – такі програми мають створюватися в середовищі, яке підтримує символьні обчислення, тобто має деякі властивості штучного інтелекту.

Серед основних переваг використання системи символьної математики Maple та їй подібних можна відзначити такі:

1. Програмне середовище системи надає можливість не тільки накопичувати банк статичних завдань, але й математичні моделі та відповідні процедури для генерування різноманітних задач.
2. Система надає можливість створити унікальну автоматизовану перевірку відповідей на тестові завдання.
3. Сама система Maple є засобом навчання не лише під час проведення практичних чи лабораторних робіт, але й під час самого тестування.

Тестові завдання можуть включати якісно інший тип, що передбачає використання для здобуття розв’язків системи символьної математики.

Висновок. Використання систем символьної математики відкриває нові перспективи в створенні та використанні тестових завдань з математики. Вводиться поняття «дірки у тестах» та запропоноване його означення. Проаналізовані недоліки різних варіантів закритих тестів з розділу «Звичайні диференціальні рівняння» для студентів технічних спеціальностей. Визначені шляхи створення відкритих тестів із забезпеченням їх автоматизованої перевірки в середовищі систем символьної математики.

Література

1. Морзе Н. В. Комп’ютерні технології розвитку учнів та вчителів : [Електронний ресурс] / Н. В. Морзе, Н. П. Дементієвськаю – Режим доступу: http://www.ime.edu-ua.net/em1/content/06mnvtpd.html

2. Клименко Л. П. Діагностика на службі методики [Електронний ресурс] / Клименко Л. П. – Режим доступу : http://festival21.org/stati-i-

publikacii/diagnostika-na-sluzhbi-metodiki/

3. Рыжик В. И. Интернет-тесты готовности к продолжению математического образования / В. Рыжик // Компьютерные инструменты в образовании. – 2002. – № 2. – С. 9–16.

4. Галузяк В. М. Педагогіка : навч. посіб. для студентів вищих педагогічних навч. закл. / Галузяк В. М., Сметанський М. І., Шахов В. І. : Вінниця, 2007 – 400 с.

5. Вища математика (розділ «Диференціальні рівняння») : електронний навчально-методичний комплекс (ЕНМК) для студентів технічних спеціальностей / Губаль Г. М. – Луцьк : ЛНТУ, 2009. – 186 с. – Режим доступу : http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2009/09-055/test7.html

6. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителями математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. – Харків, 2005.

ВИКОРИСТАННЯ САПР «КОМПАС 3D LT» ДЛЯ НАВЧАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

О. О. Мосіюк
Україна, м. Житомир, Житомирський державний університет
імені Івана Франка
Xandr_Mos@meta.ua

Геометричне моделювання є важливою складовою математичної освіти, оскільки заняття ним розвиває у суб'єктів навчання уяву, уявлення, наочно-образне мислення. Моделюють на уроках геометрії в різних проявах: побудова зображення геометричних фігур, виготовлення моделей з картону або дроту, комп'ютерне графічне моделювання тощо. З огляду на масове розповсюдження комп'ютерної техніки, розглянемо детально останній варіант.

Сучасні системи машинної графіки дозволяють реалізувати динамічний перехід від площинних побудов до просторових і навпаки. Таким чином, досягається розуміння взаємозв'язку між стереометрією і планіметрією, відбувається взаємна інтеграція різних предметів: геометрії, інформатики, креслення тощо.

Наведемо приклад моделювання тривимірних об'єктів за допомогою системи автоматизованого проектування (САПР) «КОМПАС 3D LT». Ця програма дозволяє моделювати тривимірні об'єкти, виконувати геометричні побудови в будь-якій вибраній площині, а результат інтерпретувати просторово, і, що важливо, не вимагає значних ресурсів комп'ютера.

Для прикладу, створимо модель малого зірчастого додекаедра, який відноситься до зірчастих багатогранників Кеплера-Пуансо. Алгоритм побудови аналогічний тому, який описаний у книзі М. Веннінджера «Моделі багатогранників» [1]. Відповідно йому створимо спочатку додекаедр, а потім на гранях якого, як на основах, будемо розміщувати правильні п'ятикутні піраміди із бічними гранями, що є рівнобедреними трикутниками з кутами 72°, 72° і 36°.

Виконаємо перший етап. Покроковий алгоритм побудови додекаедра описаний в статті «Твердотільне моделювання тіл Платона» [2]. Його суть полягає в наступному.

1. Розміщуємо площини, в яких будуть розміщені вершини додекаедра.

2. В кожній з площин зображаємо п'ятикутники, два з яких є грані додекаедра, два інших – побудовані перерізи.

3. Будуємо тіло, яке повністю вміщує фігуру.

4. За допомогою спеціально введених площин висікаємо додекаедр.

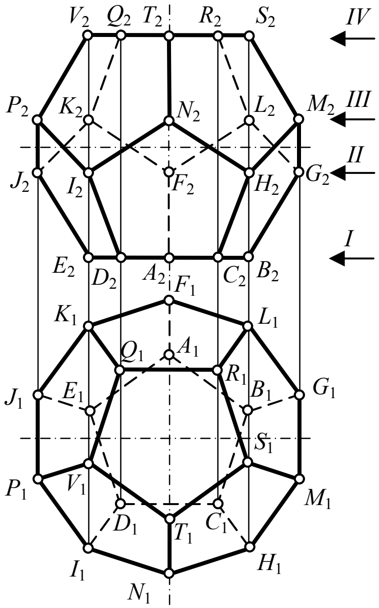


Рис. 1

Спростимо алгоритм побудови базових площин. Для цього використовуватимемо ортогональне проекціювання за методом Монжа, за умови, що дві довільно вибрані протилежні грані тіла будуть паралельні до горизонтальної площини. Виконаємо перерізи додекаедр площинами, які будуть паралельні горизонтальній площині проекцій, і проходитимуть, наприклад, через точки F і K. Таким чином всі вершини додекаедра лежатимуть у чотирьох площинах – дві грані і два перерізи (рис. 1).

Зайдемо відстані від початку координат до першої і другої базових площин (рис. 1); до третьої і четвертої площини відстані будуть аналогічні. Розв'яжемо наступну стереометричну задачу: *Обчислити висоту правильної п'ятикутної піраміди, якщо відомо її бічне ребро і сторона основи* (рис. 2).

Бічне ребро рівне радіусу описаної навколо додекаедра сфери, а сторона основи – залежить від площини, до якої шукаємо відстань і буде рівна або ребру додекаедра, або діагоналі його грані.

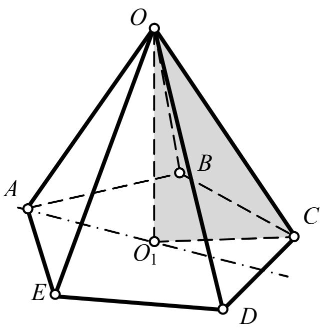


Рис. 2

Далі слід використати трикутник OCO_1($\angle O_1$=90°). Тоді, за теоремою Піфагора $OO_1 = \sqrt{OC^2 - O_1C^2}$, де OC – радіус описаної навколо додекаедра сфери, а O_1C – радіус описаного навколо п'ятикутника кола. Для обчислення відстані до другої базової площини слід брати за основу піраміди п'ятикутник *FGHIJ,* а бічне ребро залишити тим самим. Розрахунки слід проводити з точністю до шостого знака після коми, оскільки саме така точність взята за основу в програмі «КОМПАС 3D LT».

Створюватимемо додекаедр із довжиною бічного ребра 50 *мм*. Для цього використаємо наступні значення: радіус описаної сфери навколо додекаедра – 70,0629269 *мм*; радіус кола описаного навколо п’ятикутника грані 42,5325404 *мм*; діагональ грані додекаедра – 80,601699 *мм*; радіус кола описаного навколо п’ятикутника зі стороною рівною діагоналі грані – 68,819096 *мм*. Спираючись на ці дані обчислюємо відстані до першої та другої базових площин – 55,67581821 *мм* і 13,1437302 *мм* відповідно.

Виконаємо побудову чотирьох базових площин, в яких будуть розміщені всі вершини додекаедра. Спочатку створимо файл моделі (команда «Файл» → «Создать» → «Деталь» або комбінація клавіш **Ctrl+N** – оскільки інтерфейс САПР «КОМПАС 3D LT» описаний російською мовою, то всі команди будуть описуватися мовою оригіналу). Вибираємо команду «Смещенная плоскость»; в «дереві моделі» вибираємо площину *xOy*; в полі «Расстояние» вводимо відстань від центра до першої базової площини і визначаємо напрям «Обратное направление» та натискаємо кнопку «Создать об’єкт» (комбінація клавіш **Ctrl+Enter**). Цим буде створено першу базову площину; не виходячи з команди «Смещенная плоскость», змінюємо напрям та натискаємо знову ж кнопку «Создать об’єкт» – утвориться четверта базова площина. Ввівши значення відстані до другої базової площини і повторивши дії, отримаємо другу і третю базові площини. Результат повинен бути аналогічним до рис. 3.

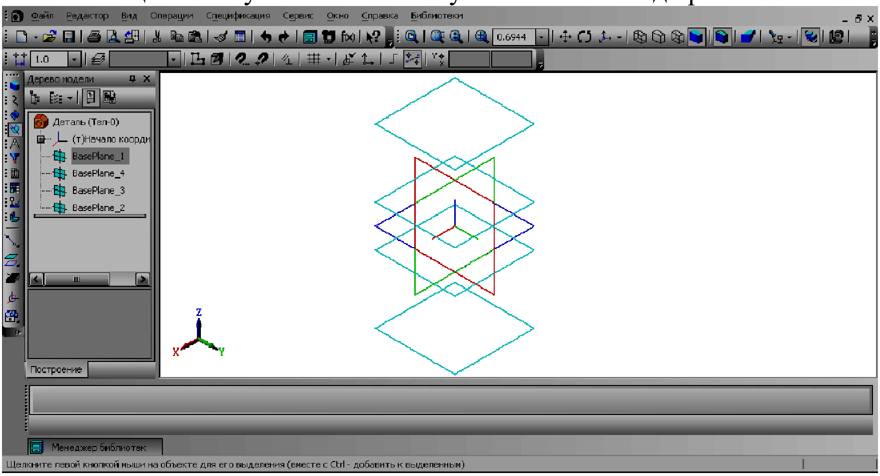


Рис. 3

Виділяємо першу базову площину (в робочому полі моделі – найнижча площина) та натискаємо кнопку «Эскиз». Таким чином переходимо в режим створення зображення в першій базовій площині. Зобразимо п’ятикутник, який відповідає грані створюваного тіла, тобто зі стороною 50 *мм*. Для цього проведемо коло з центром у початку локальної системи координат і радіусом рівним 42,5325404 *мм* (команда «Окружность» панелі «Геометрия», для виконання якої вводимо значення радіуса і використовуємо для накреслення тип ліній «Вспомагательная»). Далі йде команда «Многоугольник» з такими параметрами: кількість вершин – 5, відмітка «По вписаной окружности», центр з координатами (0;0), тип ліній – «Основная». Збільшуємо образ п’ятикутника до тих пір, поки одна з вершин не буде розміщена на колі (бажано, щоб була увімкнута прив’язка «Точка на кривой», що спростить саму побудову). Рисунок повинен бути схожим на рис. 4.

Завершуємо роботу з ескізом, вимкнувши кнопку «Эскиз». Після цього отримаємо наступне зображення вікна деталі (рис. 5). Виділимо четверту базову площину і знову перейдемо в режим редагування, натиснувши кнопку «Эскиз». Скористаємося командою «Спроецировать объект» та спроектуємо вже побудований п’ятикутник у площину, в якій виконуємо побудову. Завершимо роботу з командою. Після цього виділяємо створений об’єкт та командою «Вращение» панели «Редактирования» виконуємо поворот на 180° (в процесі виконання команди може виникнути запит програми на зняття обмежень – дозволяємо). Результат повинен бути таким, як на рис. 6.

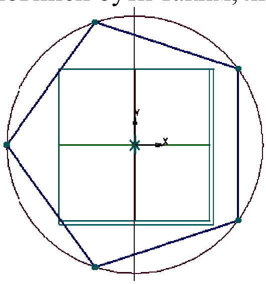


Рис. 4

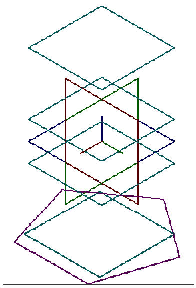


Рис. 5

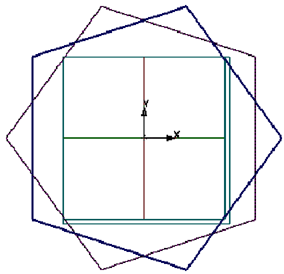


Рис. 6

Аналогічні побудови слід провести в другій і третій базових площинах, з тією відмінністю, що в них слід будувати п’ятикутники із стороною рівною діагоналі додекаедра – 80,901699 мм, а отже слід будувати коло з радіусом 68,8119096 мм. Після виконання всіх побудов маємо отримати рис. 7.

Наступним етапом буде створення тіла, яке за розмірами перевищуватиме додекаедр. Для цього, попередньо виділивши площину *xOy* та перейшовши в режим створення ескізу, створимо в ній прямокутник (при побудові слід використовувати тип лінії «Основная»), котрий буде більшим за кожний побудований п’ятикутник (рис. 8а). Виділивши ескіз з прямокутником (рис. 8б), застосовуємо операцію «Выдавливание» з наступними параметрами: поле «Направление» – двостороннє, «Первое направление» – до вказаної поверхні (вказуємо базову площину № 4 (рис. 1)), «Второе направление» – параметри аналогічні, а з тією різницею, що вказуємо базову площину № 1 (рис. 9). Натискаємо сполучення клавіш Ctrl+Enter і отримуємо наступний об’єкт (рис. 10).

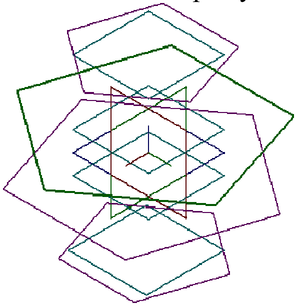


Рис. 7

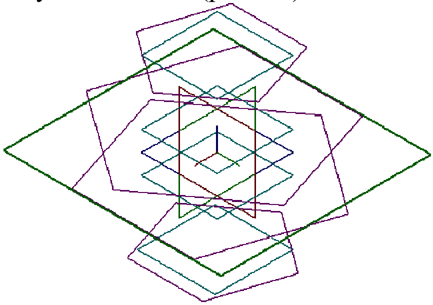


Рис. 8а

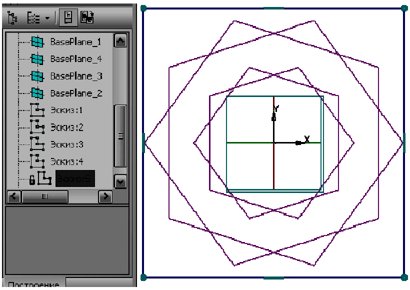


Рис. 8б

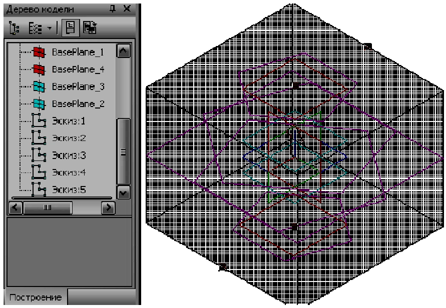


Рис. 9

Тепер перейдемо до етапу, коли з утвореного паралелепіпеда, за допомогою площин, висікатимемо додекаедр. Проаналізувавши вже проведену побудову, можна дійти висновку, що дві грані шуканого тіла розміщені у двох площинах паралельних до *xOy*, отже слід провести ще десять площин, в яких будуть розміщуватися інші грані додекаедра.

Скористаємося командою «Плоскость через три вершины» панелі «Вспомогательная геометрия» і побудуємо десть площин, які проходять через точки всіх базових площин. Після побудови площин, командою «Сечение поверхностью» відсікаємо непотрібні «куски» паралелепіпеда. Після всіх операцій результат повинен бути таким, як на рис. 11.

Переходимо до побудови пірамід на кожній з граней додекаедра. Застосуємо суто *геометричне (побудовне) моделювання*. Спочатку побудуємо апофему бічної грані, а потім і висоту самої піраміди, основа якої є грань вже побудованого тіла, а бічна грань – рівнобедрений трикутник із кутами 72°, 72° і 36°. Сумістимо грань піраміди і грань додекаедра у четвертій базовій площині. Виділимо її курсором і перейдемо в режим редагування ескізу. Побудуємо бічну грань правильної п'ятикутної піраміди в натуральну величину, а саме трикутник з кутами 72°, 72°, 36°. Оскільки внутрішній кут п'ятикутника рівний 108°, то зовнішній – 72°. Отже, вибравши довільну сторону п'ятикутника за основу шуканого рівнобедреного трикутника, досить провести дві прямі, як продовження не суміжних сторін, із визначеною основою. Відмічаємо точки: перетину прямих, середину основи і центр п'ятикутника (рис. 12). Відстань від центра п'ятикутника до середини ребра є радіус вписаного в п'ятикутник кола, а відстань від середини ребра до вершини рівнобедреного трикутника – висотою бічної грані шуканої піраміди. Завершуємо роботу з ескізом.

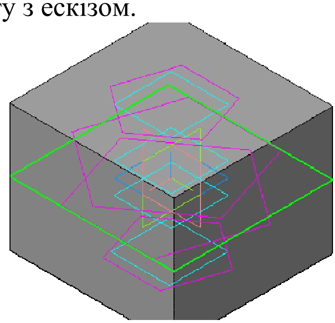


Рис. 10

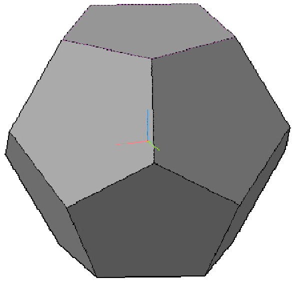


Рис. 11

Через довільну (вже побудовану точку) проведемо площину перпендикулярну до вибраного ребра (панель «Вспомогательная геометрия» кнопка «Плоскость через вершину перпендикулярно ребру»).

Вибираємо щойно побудовану площину, переходимо в режим редагування ескізу і проектуємо в даний ескіз три вже побудовані точки (команда «Спроецировать объект» панелі «Геометрия»). В цьому ескізі будуватимемо висоту шуканої піраміди. Побудуємо *прямокутний трикутник за катетом (радіус вписаного в основу кола) і гіпотенузою (висота бічної грані)*. У такому випадку слід провести через центр п'ятикутника пряму, яка буде перпендикулярною до площини грані додекаедра, і коло з центром у середині ребра та радіусом, рівним висоті бічної грані (рис. 13). Відмічаємо точку перетину кола із прямою (лише ту, яка лежить поза додекаедром). Всі побудови виконуються допоміжними лініями. Важливо зняти розмір цієї висоти піраміди і зберегти, оскільки її числове значення дозволить спростити наступні побудови (в даному випадку висота п'ятикутної піраміди 68,819096 *мм*). Завершимо роботу з ескізом.

Перейдемо до створення самої піраміди. Далі виберемо точку, яку побудували на останньому кроці, і проведемо через неї площину паралельну до площини грані. Створимо ескіз в останній площині, який буде складатися лише з однієї точки. Для цього спроектуємо центр грані додекаедра у площину паралельну до грані, і завершимо роботу з ескізом.

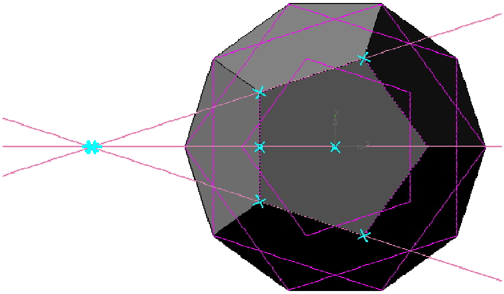


Рис. 12

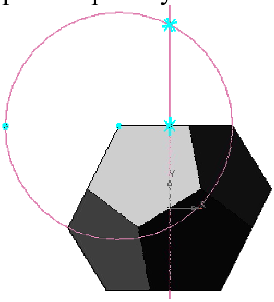


Рис. 13

У панелі «Редактирование детали» виберемо команду «Операция по сечениям» і виберемо ті ескізи, в яких розміщений п’ятикутник і точка. Натискаємо кнопку «Создать». Для того, щоб не виникало проблем з неправильною топологією створюваного тіла (якщо така ситуація виникає, то програма повідомляє про це і не дозволяє створювати новий об’єкт), виберемо закладку «Результат операції», коли ж задаються параметри об’єкта під час виконання команди «Операция по сечениям», та встановлюємо позначку «Новое тело». Після виконання всіх операцій результат повинен бути, як на рис. 14.

Продовжимо створення решти пірамід. Виділимо довільну грань додекаедра, перейдемо в режим редагування ескізу (кнопка «Эскиз» панелі інструментів), спроекціюємо виділену грань у ескіз, завершимо роботу. Проведемо площину, паралельну до вже вибраної грані, на відстані,що дорівнює висоті піраміди, яку добудовуємо. Виберемо щойно створену площину та створимо на ній ескіз з точкою у початку координат. Після проведених операцій за допомогою команди «Операция по сечениям» і з відповідною позначкою «Новое тело» створимо за двома ескізами ще одну п’ятикутну піраміду (рис. 15). І так на решті гранях додекаедра. Після всіх виконаних операцій повинно утворитися тіло наступної форми (рис. 16).

Таким чином, у результаті створення малого зірчастого додекаедра в першу чергу було проаналізовано геометричну будову тіла, виділено основні етапи побудови; стереометричну задачу розділено на дві задачі – задачу на побудову в площині, щоб визначити базові елементи побудови тих чи інших частин фігури та просторову задачу; продемонстровано взаємозв’язок площинних і просторових побудов.

Фактично, при моделюванні поєднуються знання з різних розділів науки – нарисної і евклідової геометрії, інформатики, теорії багатогранників тощо. Слід наголосити також на тому, що в реалізації такого підходу до вивчення геометрії закладається емоційний компонент навчання, що стимулює студентів і учнів до вивчення предмету «Геометрія».

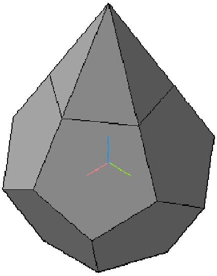


Рис. 14

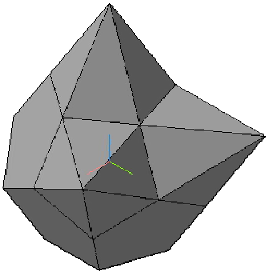


Рис. 15

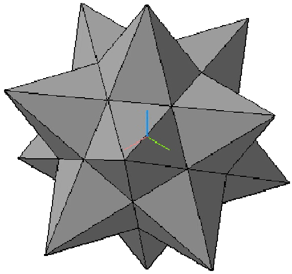


Рис. 16

Література

1. Веннинджер М. Модели многогранников / М. Веннинджер. – М. : Мир, 1974. – 236 с.
2. Талалай П. Твердотельное моделирование тел Платона [Электронный ресурс] / Павел Талалай. – 14 с. – Режим доступа : http://edu.ascon.ru/source/articles/modelirovanie_tel_platona.pdf

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ПРИАЗОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

О. А. Мукосеенко
Украина, г. Мариуполь, Приазовский государственный технический университет
mukoseenko@mail.ru

Сегодня много внимания уделяется использованию компьютерных технологий в образовании.

Мустафа Кос [5] считает, что внедрение компьютерных технологий в образование включает в себя не только навыки работы с компьютером, но и состоит из процесса, в котором учащиеся анализируют и решают задачи из различных областей знаний. Внедрение компьютерных технологий в образование означает использование компьютерного программного обеспечения в качестве инструмента для обучения предмету. Таким образом, компьютеры являются лучшим средством для поддержки целей обучения.

Основными направлениями использования компьютерных технологий при изучении курса высшей математики в международной практике являются:

1) проведение лабораторного практикума с использованием систем компьютерной математики;

2) использование мультимедийных систем.

Тан Джин [6] считает, что решение математических задач с помощью систем компьютерной математики обладает рядом достоинств:

1) графические компоненты систем компьютерной математики являются замечательными инструментами для визуализации сложных понятий;

2) использование систем компьютерной математики позволяет сосредоточиться на понимании материала, а не на вычислениях.

Мехриар Нурифшар [7] добавляет:

3) исчезает страх, связанный с неумением проводить точные расчёты;

4) время, затраченное на изучение математических правил, существенно сокращается.

Э. Аслаксен [8] считает, что использование систем компьютерной математики в обучении может коренным образом изменить методы обучения математике путем введения более экспериментального, лабораторного подхода. Он утверждает, что системы компьютерной математики помогают классической и прикладной математике стать ближе друг к другу.

Но системы компьютерной математики имеют и свои недостатки.

Э. Аслаксен выделяет следующие:

1) никакая система компьютерной математики не умеет делать абсолютно всё;

2) компьютерная неграмотность персонала;

3) почти полное отсутствие понятной справочной литературы;

4) различные системы компьютерной математики используют различный синтаксис и различные алгоритмы;

5) возможность использования студентами систем компьютерной математики на экзамене;

6) стоимость лицензионного программного обеспечения.

М. Кос [5] утверждает, что хотя многие ссылаются на оборудование, программное обеспечение, время как наиболее общие барьеры на пути внедрения компьютерных технологий, устранение этих барьеров не обязательно способствует плавному переходу к использованию компьютерных технологий учителями. У них нет необходимой подготовки и опыта использования компьютерных технологий во время их профессионального обучения. Даже те, кто обладает компьютерной грамотностью ещё со школьных лет, не чувствуют себя полностью комфортно с сегодняшними технологиями. Многие учителя говорят, что попытки интеграции технологий не только отнимают у них много времени, но и приводят к разочарованию, так как выявляется их недостаточная подготовка.

Раду Байрак [9] сообщает, что по данным исследований Национального центра образования (NCES, 2000), в США почти 70% учителей не чувствую себя хорошо подготовленным к использованию компьютеров и Интернет в своей профессиональной деятельности. Тому есть несколько причин:

1) при профессиональном обучении учителя обычно получают лишь базовые знания о том, как они должны работать с компьютерами и программным обеспечением, а не информацию о том, как внедрить технологии или как оценить их преимущества. Учителя говорят, что, даже имея достаточные навыки работы с компьютерами, они не имеют педагогических знаний о способах использования компьютеров в преподавании;

2) неуверенность в собственных силах. Согласно результатам исследования, более половины студентов ведущих педагогических вузов не готовы использовать компьютеры в своей профессиональной дея-

тельности.

Э. Алаксен пришёл к выводу, что оптимальным при изучении курса высшей математики является использование компьютеров во время лекций для демонстрации конечных результатов, полученных с их помощью. Этот подход позволяет различным сотрудникам использовать различные системы компьютерной математики на практических занятиях.

Но у систем компьютерной математики есть и ряд противников. Танер Буюкороглу [10] рассказал об эксперименте, проведённом им в Турции. При изучении темы «Пределы» студентов разделили на две группы: одна изучала тему с использование компьютеров, а другая – без использования. После этого в обеих группах была проведена контрольная работа, результаты которой в обеих группах практически ничем не отличались. Автор эксперимента сделали вывод, что использование систем компьютерной математики при изучении математики не влияет на успеваемость студентов, следовательно, использовать их нецелесообразно.

Вторым направлением использования компьютеров являются **мультимедийные системы**, которые дают возможность включить различные стили обучения, такие как визуальный и звуковой, чтение и запись. Они наиболее эффективны, если студент не имеет возможности посещать занятия.

Ф. Алмекдади [11] считает, что мультимедийные технологии оказывают значительное влияние на всех этапах обучения:

1) положительно влияют на отношение студентов к изучению дисциплин;

2) делают обучение личностно-ориентированным, поощряют обучение в сотрудничестве, и могут имитировать взаимодействие учителя и ученика.

Им был поставлен эксперимент по внедрению мультимедийного программного обеспечения для изучения свойств геометрических фигур в обучение в школах. Успеваемость в экспериментальных классах оказалась значительно выше (на 20%), по сравнению с классами, где занятия проводились классическим способом (без использования компьютеров). Кроме того, Ф. Алмекдади пришёл к выводу, что использование компьютеров при изучении математики создает здоровую атмосферу в учебном процессе, так как предоставляет ученикам возможность моделировать различные ситуации.

М. Нурифшар [7], создатель одной из мультимедийных систем сообщает, что после внедрения системы в обучение, успеваемость возросла с 65% до 90%. Однако, как утверждает М. Нурифшар, мультимедийная система не должна рассматриваться в качестве замены традиционных методов обучения, так как обыкновенный учитель, который использует руки и мимику, изменение интонации и устанавливает зрительный контакт со студентами в течение лекции, по-прежнему остаётся эффективнее любой мультимедийной системы [1].

При изучении курса высшей математики в Приазовском государственном техническом университете используют:

1) платформу Moodle, в которой разработан курс высшей математики (рис. 1). Благодаря этому, у студентов есть возможность прочитать и скачать программу курса, лекции, методические указания для изучения различных разделов курса, индивидуальные домашние задания и пройти тестирование по выбранной теме [2].

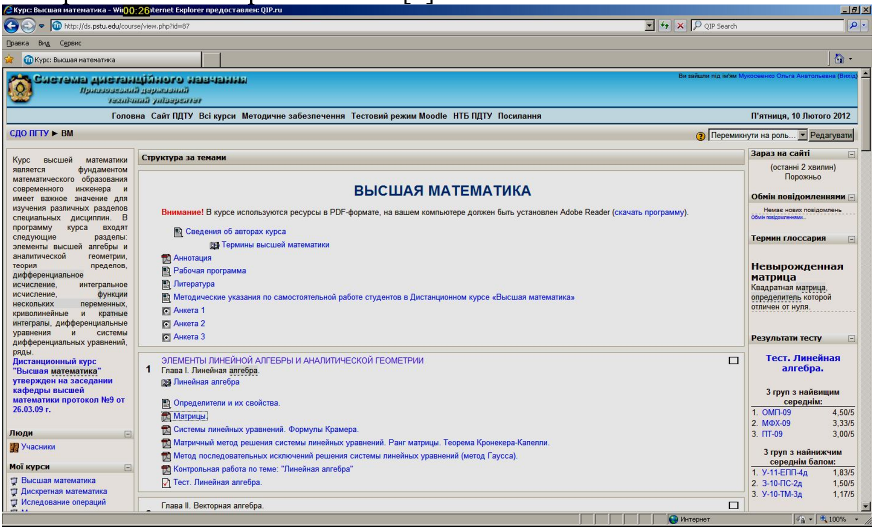


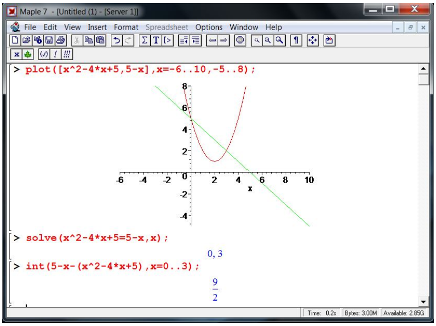
Рис. 1

2) системы компьютерной математики. Для проведения лабораторного практикума по решению задач по высшей математике на компьютере были выбраны системы компьютерной математики: Maple, Mathcad и Gran1.

Maple является Windows-приложением (рис. 2), позволяющее решать задачи начиная с элементарной математики и заканчивая специальными математическими разделами. Maple содержит мощную справочную систему [3, 3].

Mathcad – одна из самых простых и популярных систем компьютерной математики (рис. 3). Формулы здесь выглядят также, как на бумаге, что существенно облегчает освоение системы [4, 9].

GRAN1 – это математический пакет, разработанный под руководством М. И. Жалдака (рис. 4).



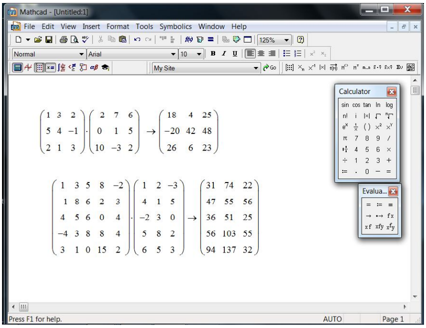
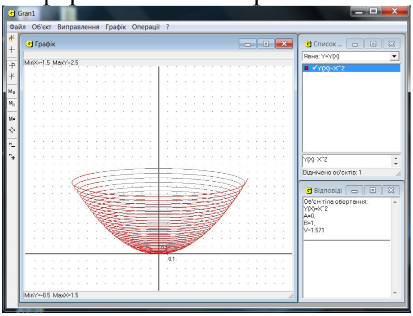


Рис. 2 Рис. 3

Несомненным достоинством пакета является то, что он был разработан на украинском языке. Благодаря прекрасной справочной системе, даже те, кто впервые знакомится с этим программным средством, могут решить любую задачу.

Недостаток системы – ограниченное количество классов задач, которое можно решить с её помощью и во многих случаях невозможность получения точного ответа.

3) разработанный автором тренажёр для запоминания формул «Математические пазлы». Тренажёр содержит 60 пазлов, начиная от таблицы умножения и заканчивая высшей математикой. Он позволяет в игровой форме очень быстро запомнить математические формулы (рис. 5).



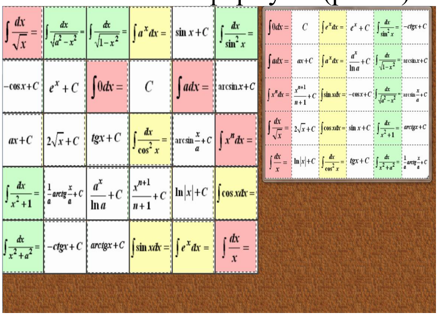


Рис. 5 Рис. 6

Использование компьютерных технологий при изучении курса высшей математики в Приазовском государственном техническом университете вызвало интерес к изучению математики и значительно активизировало познавательную деятельность студентов.

Литература

1. Мукосеенко О. А. Международные тенденции математического образования / О. А. Мукосеенко // Новые научные тенденции : матер. XV Междунар. научно-практ. конф. по философским, филологическим, юридическим, педагогическим, экономическим, психологическим, социологическим и политическим наукам. – Горловка, 2011. – С. 105–107.

2. Мукосєєнко О. А. Використання комп’ютерних технологій при вивченні курсу вищої математики / О. А. Мукосєєнко // Тези доповідей учасників Міжнародної науково-технічної конференції «Фізико-математичні дослідження та інформаційні технології в управлінні, науці, освіті та виробництві». – Маріуполь, 2011. – С. 58.

3. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: MAPLE 8 / О. А. Сдвижков. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с. – (Библиотека студента).

4. Плис А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов : учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 656 с.

5. Koç M. Implications of Learning Theories for Effective Technology Integration and Pre-service Teacher Training: A Critical Literature Review / Mustafa Koç // Journal of TURKISH SCIENCE EDUCATION. – 2005. – Volume 2, Issue 1, May. – P. 2–18.

6. Jing T. The popularization of China’s higher education and its influence on university mathematics education / Tang Jing // Educational Studies in Mathematics. – 2007. – Vol. 66. – №1, Sep. – P. 77-82.

7. Nooriafshar M. The Use of Innovative Teaching Methods for 'Maximising' the Enjoyment from Learning Mathematical Concepts [Electronic resource] / Mehryar Nooriafshar. – 11 p. – Mode of access : http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/nooriafsharm1.pdf

8. Aslaksen H. Some Thoughts About the Use of Computer Algebra Systems in University Teaching [Electronic resource] / Helmer Aslaksen. – 3 p. – Mode of access : http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/papers/cas.pdf

9. Bairac R. Some methods for composing mathematical problems [Electronic resource] / Radu Bairac. – 7 p. – Mode of access : http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bairac.pdf

10. Büyükköroglu T. The Effect of Computers on Teaching The Limit [Electronic resource] / Taner Büyükköroglu, Serkan Ali Düzce, Nezahat Çetin, Nevin Mahir, Ali Deniz, Mehmet Üreyen. – 12 p. – Mode of access : http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/buyukkoroglu.pdf

11. Farouq Almeqdadi The Effect of Using The Geometer’s Sketchpad (GSP) on Jordanian Students’ Understanding Some Geometrical Concepts [Electronic resource] / Farouq Almeqdadi. – 14 p. – Mode of access : http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/almeqdadi.pdf

ГЕОМЕТРИЯ И ГРАФИКА САМОЗАМЫКАЮЩИХСЯ И САМОРАЗМЫКАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

А. Б. Нифанин[1], Д. И. Ткач[2]
[1] Украина, г. Днепропетровск, Днепропетровский индустриальный колледж
[2] Украина, г. Днепропетровск, Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
tkachdi@gmail.com

Постановка задачи. Произвести дальнейшее исследование описанных ранее [2–5] самоорганизующихся систем, элементами которых являются результаты последовательных итераций фрактального расширения квадрата и свастики, с целью выявления новых систем и описания их позиционных и метрических свойств.

К числу выдающихся научных достижений конца XX века относится фрактальная геометрия Б. Мандельброта, наиболее адекватно (по сравнению с эвклидовой геометрией) описывающая структуру естественных объектов и визуализирующая те нелинейные процессы и явления, которые описываются теорией хаоса и синергетикой. В отличие от геометрии Эвклида, основанной на формальной логике Аристотеля, геометрия Б. Мандельброта основана на диалектика Гераклита Эфесского как теории развития, а также единства и борьбы противоположностей, описывающей динамику реальных процессов и явлений. Его знаменитое выражение «всё течет, всё изменяется…» более точно звучит как «всё течет и движется, и ничего не пребывает» [1]. И действительно, классический процесс фрактальных преобразований, являясь итерационным, непрерывен в своём развитии и в стремлении к дробномерному пределу при уменьшении получаемых фигур, самоподобных друг другу и исходной фигуре. Другими словами, этот процесс протекает от большего к меньшему, моделируя своим развитием природу естественных объектов, процесов и явлений. Поэтому он естественен и, как любой естественный процесс развития или движения, реверсивен, то есть, может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. Так из малого жёлудя, проходя все стадии вегетационного (читай, итерационного) развития, вырастает могучий дуб. Направления «туда» и «обратно» противоположны, но они образуют гераклитово единство и пребывают в постоянной «борьбе».

Фрактальная геометрия Б. Мандельброта описала естественную природу в направлении её развития «туда», т.е. от большего к меньшему. Но проследить обратный процесс от меньшего к большему, т.е., восстановить по результату энной итерации фигуры всю исходную фигуру так же невозможно, как невозможно по ветке 3-го порядка восстановить всё дерево.

В связи с этим возникло желание рассмотреть обратный процесс фрактальных преобразований от меньшего к большему, названный фрактальным расширением [2–5]. В качестве исходной «меньшей» была принята наиболее технологичная геометрическая фигура – квадрат. Идея такого расширения возникла в процессе прагматичного рассуждения по поводу недолговечности асфальтовых дорожных покрытий [2], которые, как протяженные термодинамические системы, работающие в условиях знакопеременных температур, растрескиваются на отдельные, неправильной формы участки. То есть, непрерывное целое распадается на его дискретные, разделённые швами, и поэтому взаимно не связанные части. Но искусственность покрытия и неизбежность его трещинообразования определили поиск возможности замены сплошного покрытия на сборное, но состоящее из конгруэнтных комбинаторных элементов такой формы, которая обеспечивала бы их замковые соединения, придающие всему покрытию синергетические свойства самоорганизации. Такой поиск увенчался теоретическим успехом, подкреплённым 4-мя патентами Украины на формы элементов дорожного покрытия.

Графо-аналитическое исследование процесса фрактального расширения квадрата [3], привело к определению его количественных характеристик, описываемых рекуррентной формулой ряда Фибоначчи 2-го порядка. Изучение этого ряда привело к раскрытию роли численного ряда Люка и выделению группы «люковых» квадратных уравнений, раскрывающих природу золотых логарифмов.

Дальнейшее исследование конструктивных свойств фрактальных фигур 3-ей и 4-ой итераций, привело к выводу, что имеющиеся у них лакуны структурируются фигурами второй итерации и, тем самым, своеобразно моделируют естественный процесс роста клеточных структур живой природы [4], метрической основой которого является группа золотых иррациональностей.

В работе [5] был рассмотрен итерационный процесс фрактального расширения швов между комбинаторными элементами плотной упаковки плоскости за счет соответствующего фрактального сокращения этих элементов до уровня ширины швов. В результате возникли свастикообразные элементы, также вступающие в замковые соединения и плотно упаковывающие плоскость и было показано, что этот процесс описывается рекуррентной формулой ряда целых чисел. Отсюда следует, что любые операции с целыми числами опосредованно индуцируют соответствующие операции со структурами фрактального расширения свастик.

Так как полученные в перечисленных работах результаты являются эксклюзивными, то естественен интерес к дальнейшему поиску новых фрактальных структур и графо-аналитическому описанию их свойств.

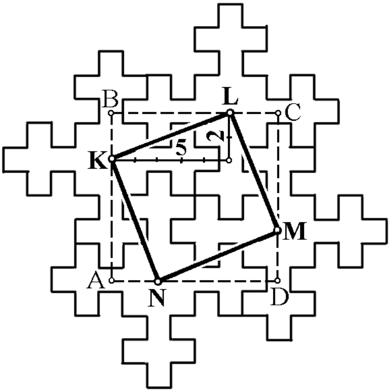


Рис. 1

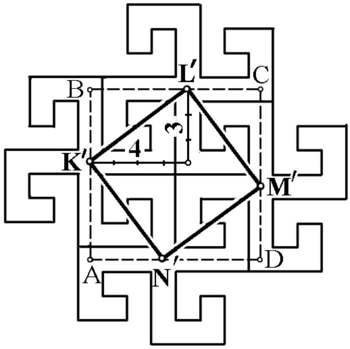


Рис. 2

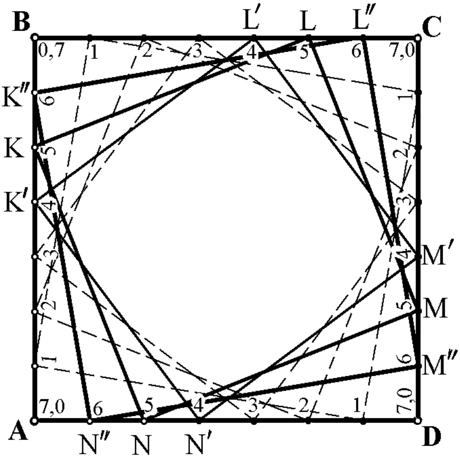


Рис. 3

Если обратиться к сравнению квадратов KMNL и K′M′N′L′, вершины которых соединяют соответственно центры крестовых и свастиковых элементов в их системах, то видно, что они вписываются в одинаковые габаритные квадраты размером 7×7 модульных единиц, равных длине стороны исходного квадрата, однако их вершины по разному делят стороны габарита. В первом случае (рис. 1) они делят эти стороны в отношении 2:5, а во втором (рис. 2) – в отношении 3:4. Значения чисел этих отношений определяют длины катетов прямоугольных треугольников, гипотенузы которых соединяют центры соответствующих фрактальных фигур. При этом суммы этих чисел в обоих случаях равны 7. В связи с этим возникает вопрос: если габаритный квадрат 7×7 для различных фрактальных структур неизменен, а вершины вписанных в него квадратов являются центрами соответствующих фрактальных фигур, то какие новые фрактальные структуры можно ожидать при иных расположениях этих центров?

На рис. 3 изображен габаритный квадрат 7×7 и в него вписаны квадраты NKLM и N′K′L′M′, взятые с рис. 1 и 2, вершины которых разбивают его стороны в пропорциях соответственно 2 к 5 и 3 к 4. Остаётся 2 варианта новых пропорций: 6 к 1 и 7 к 0.

Комбинации 6 к 1 и 7 к 0 означают, что большие катеты отсекаемых от габарита треугольников равны соответственно 6 и 7 единиц, а малые – 1 и 0. Этим параметрам соответствуют свастиковые структуры, представленные на рис. 4 и 5.

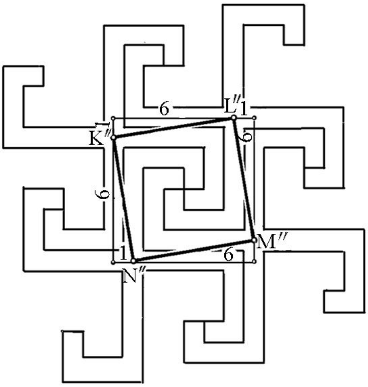


Рис. 4

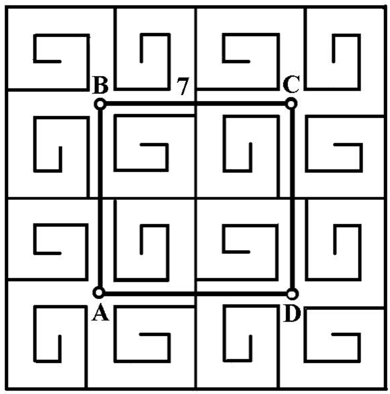


Рис. 5

Так как эти структуры выполнены из фигур не начальных итераций, то для определения метрических характеристик процессов их получения необходимо произвести их фрактальные преобразования не в сторону «туда», а в сторону «обратно», т.е., к их началу (рис. 6, 7).

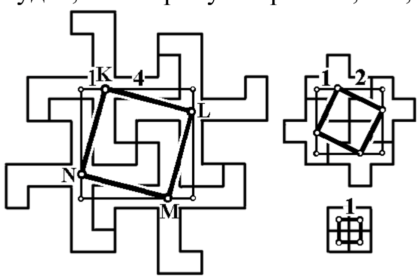


Рис. 6

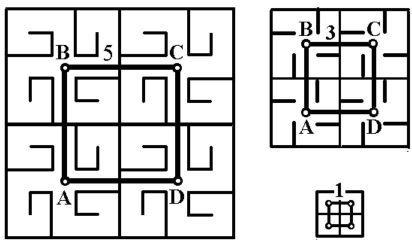


Рис. 7

На рис. 6 показаны 3 обратные итерации, соответствующие отношениям катетов 1 к 4, 1 к 2 и 0 к 1, большие из которых своей длиной равны четным числам («четные итерации»).

На рис.7 показаны 3 обратные итерации, соответствующие сторонам габаритного квадрата ABCD длинами соответственно в 5, 3 и 1 единицу, образующие ряд нечетных чисел («нечетные итерации»).

Полученные из анализа построений на рис. 4–7 числовые значения могут экстраполироваться в сторону развития итерационного процесса и результаты такой экстраполяции сводятся в таблицы 1 и 2.

Таблица 1

Метрические характеристики «четных итераций» свастиковых систем

№ итерации	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$K_б$ – катет большой	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$K_м$ – катет малый	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n – число клеток	1	5	17	37	65	101	145	197	257

Таблица 2

Метрические характеристики «нечетных итераций» свастиковых систем

№ итерации	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$K_б$ – катет большой	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$K_м$ – катет малый	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n – число клеток	1	9	25	49	81	121	169	225	289

Из сравнительного анализ метрических характеристик этих таблиц видно, что длины больших катетов в «четных итерациях» образуют ряд четных чисел, а длины больших катетов в «нечетных итерациях», – ряд нечетных чисел. Получается, что они «разбили» класс целых чисел на два подкласса: четных чисел и нечетных чисел. Очевидно, поэтому образование обоих рядов подчиняется общему закону, который описывается рекуррентной формулой ряда целых чисел [5]:

$$K_{б(n)}=2K_{б(n-1)}-K_{б(n-2)} \qquad (1)$$

Согласно этой формуле ряд четных чисел, соответствующий таблице 1 и рис. 4 и 6, выглядит следующим образом:

$-n$, … –16, –14, –12, –10, –8, –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…, n, (2)

а таблице 2 и рис.5 и 7 следующим образом:

$-n$, …, –17,–15,–13,–11,–9, –7,–5,–3,–1, 0, 1, 3, 5, 7, 9,11,13,15,17,…, n. (3)

Эти ряды характеризуют не только количественные, но и качественные (позиционные) характеристики структур соответствующих систем свастиковых элементов.

На рис. 1, 2, 4 и 6 представлены системы взаимосвязанных замковыми соединениями крестовых и свастиковых элементов, которые открыты к бесконечному развитию и усложнению своей структуры. Очевидно, что открытость таких систем обеспечивается синергетизмом или самоорганизацией их структур, возникающей благодаря взаимодействию их взаимосвязанных элементов. Такие системы, благодаря внутренним связям, прочны и надёжны, так как, будучи сборными, работают как монолитные. При этом их прочность определяется не только и не столько прочностью их материала, сколько способностью перераспределять нагрузку на один элемент между всеми элементами, которые с ним связаны. А характер замковых связей между ними определяется своеобразием фрактальной формы этих элементов, которая становится инструментом управления прочностью всей открытой или самозамыкающейся системы.

Отличительной позиционной особенностью свастиковых систем «нечетных итераций» (рис. 5, 7) является самозамкнутость каждого из их элементов в себе и отсутствие замковых соединений между ними в рамках габаритных квадратов. Такие системы являются разомкнутыми, элементы которых присутствуют в их системе «сами по себе», подобно плиткам современного мощения тротуаров, которые нуждаются в бордюрах. Такие системы являются слабыми и неустойчивыми, так как не способны, из-за отсутствия взаимосвязей между их элементами, оказывать достаточное сопротивление внешним воздействиям.

Отсюда следует предположение, что с позиций фрактальной геометрии и синергетики все геометрические фигуры как элементы возможных систем можно разделить, в зависимости от конструктивных особенностей их формы, на два класса: открытые к замковым взаимосвязям между собой типа фигур различных чётных итераций фрактальных расширений квадрата в крестовые и свастиковые структуры, и самозамкнутые, не способные ко вступлению в замковые связи между собой типа таких выпуклых фигур, как треугольники, квадраты, шестиугольники, призмы и т.д., которые в лучшем случае могут быть комбинаторными элементами плотной упаковки плоскости.

Если выпуклые геометрические фигуры хорошо изучены евклидовой геометрией, то фигуры, порождаемые процессами фрактального расширения этих выпуклых фигур, только начинают изучаться на примере исследования процесса фрактального расширения квадрата и полученные результаты открывают новые теоретические положения и широкие практические приложения. Достаточно сказать, что этот процесс является «золотосодержащим», так как описывается степенным рядом Фибоначчи второго порядка, служит основой изучения степенных рядов золотой пропорции и рядов золотых иррациональностей, выходит на обоснование золотых логарифмов по основанию 1,618, описывает естественные процессы роста клеточных структур живой природы и может служить основой конструирования принципиально новых инженерных объектов, сооружений и устройств типа сборных синергетических покрытий земной поверхности, работающих как монолитные, быстровозводимых безфундаментных большепролетных оболочек, наплавных мостов, молов и плавучих островов, воздухоплавательных аппаратов типа дирижаблей и многое другое. Все эти предположения основываются на возможности использования синергетического эффекта самоорганизации между пневматическими элементами третьей итерации фрактального расширения квадрата, изготовленными из высокопрочной синтетической плёнки, накачанными воздухом или лёгким газом и взаимосвязанными между собой замковыми соединениями.

Поэтому теорию фрактального расширения можно считать новым направлением развития фрактальной геометрии.

Выводы:

1. В результате произведенных исследований описаны две новые системы свастиковых элементов с принципиально различными свойствами. Системы свастик «четных итераций» в силу синергетизма взаимосвязей между ними явились самозамыкающимися и открытыми для дальнейшего развития, а системы свастик «нечетных итераций» оказались замкнутыми в себе, не обладающими синергетизмом взаимосвязей и поэтому саморазмыкающимися.

2. Полученные результаты имеют большое как теоретическое, так и практическое значение.

Литература

1. Гераклит Эфесский – Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ru.wikipedia.org/wiki/Гераклит_Эфесский

2. Ткач Д. И. Геометрия трещиноустойчивых и самозамыкающихся структур дорожных покрытий / Ткач Д. И., Нифанин А. Б. // Системные технологии. – 2006. – №3 (44). – С. 121-127.

3. Нифанин А. Б. Графо-аналитическая интерпретация степенного ряда золотой пропорции и золотые логарифмы / Нифанин А. Б., Ткач Д. И. // Наукові нотатки. – 2008. – Випуск №22, частина 1. – С. 242-248.

4. Нифанин А. Б. Геометро-графическое исследование процесса фрактального расширения квадрата / Нифанин А. Б., Ткач Д. И. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики». Випуск VIII, том 1. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2010. – С. 131-139.

5. Ткач Д. І. Побудова і дослідження «люкових» ступеневих рядів золотої пропорції / Ткач Д. І., Ніфанін О. Б. // Прикладна геометрія та інженерна графіка: випуск 80. – К., 2008. – С. 112-116.

ПРИКЛАДНИЙ АСПЕКТ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ФАХІВЦІВ-МАТЕМАТИКІВ

О. Г. Онуфрієнко
Україна, м. Бердянськ, Бердянський державний педагогічний університет
onufrienko15@yandex.ua

Постановка проблеми. Значну роль у підготовці фахівців освітнього напряму «Математика» відіграє процес вивчення спеціальних математичних дисциплін, оскільки застосовувати сучасні методи досліджень та новітні інформаційні технології у різноманітних сферах людської діяльності вдається лише тим фахівцям, які мають фундаментальну математичну підготовку та відповідні навички творчої розумової діяльності.

Студенти повинні переконатися в тому, що математика – це не тільки інструмент кількісних розрахунків та засіб побудови і дослідження математичних моделей реальних процесів, а й метод чіткого визначення різних понять, логічного мислення, виявлення об'єктивних закономірностей.

При дослідженні реальних процесів і явищ, що є описаними системами диференціальних рівнянь, виникає практична необхідність не тільки у знаходженні їх розв'язку, а й у виявленні різних властивостей цих розв'язків. Оскільки проблема знаходження розв'язків у загальному випадку є невирішеною, то виникає питання про вивчення тих або інших властивостей наближених розв'язків цих диференціальних рівнянь за непрямими їх ознаками та властивостями відповідних диференціальних рівнянь. Це питання розглядається в якісній теорії диференціальних рівнянь, одним з основних розділів якої є теорія стійкості розв'язків або теорія стійкості руху. Необхідність вивчення властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь при практичному застосуванні пояснює важливість вивчення теорії стійкості розв'язків. Саме цим обумовлюється введення в навчальний процес варіативного курсу «Вибрані питання теорії стійкості» для магістрів математичних спеціальностей та необхідність впровадження в методику викладання прикладних аспектів цієї теорії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останні десятиліття теорія диференціальних рівнянь розвивалася надзвичайно швидко під впливом сил, що діють як зсередини, так і ззовні. Внутрішні сили зумовлювали розвиток і поглиблення топологічних і аналітичних методів, створених на початку століття О. Ляпуновим, А. Пуанкаре, І. Бендіксоном і деякими іншими авторами. Силою, що діє ззовні, був розвиток техніки, зокрема техніки зв'язку, теорії сервомеханізмів, автоматичного управління та електроніки.

У своїх дослідженнях О. Ляпунов, А. Пуанкаре та інші автори виходили з потреб астрономії, але ті методи, які були ними розвинені, знайшли своє відображення і в інших галузях науки. Саме в їх роботах було закладено теоретичні основи теорії стійкості. Сучасні їх послідовники розширили теоретичні межі основних питань стійкості та визначили нові напрями їх застосування. Серед вітчизняних вчених відмітимо внесок А. Мартинюка, Ю. Митропольского, Ю. Міхліна, А. Самойленка, В. Стороженка, Д. Хусаїнова.

Введення у навчальний процес варіативного курсу «Вибрані питання теорії стійкості» для магістрів математичних спеціальностей дозволяє залучити студентів до активної наукової діяльності. Таким чином, організація навчально-виховного процесу у вищих навчальних закладах сприяє такому розвитку студентів, яке пов'язане з бажанням одержати ґрунтовні знання з обраної спеціальності, з умінням вдосконалювати свої здібності та навички, з прийняттям активної участі у наукових дослідженнях.

Метою статті є виявлення науково-методичних засад втілення у навчальний процес підготовки майбутніх фахівців-математиків прикладних аспектів основних питань теорії стійкості; наукове обґрунтування окремих положень теорії стійкості; показ ролі наукових методів дослідження у вирішенні задач теорії і практики.

Питання про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь виникло з практики і було викликане необхідністю зробити вірні висновки про реальні процеси, виходячи з їх «спрощених» схем. Неминучість таких спрощень породжена самою сутністю реальних процесів, які виникають під дією необмеженої кількості різних факторів. Відкидаючи багато з цих факторів, як несуттєві, ми і приходимо до ідеалізації початкового процесу. За такою ідеалізацією можливо отримати вірне представлення про реальний процес лише тоді, коли вплив не врахованих факторів незначний, а саме коли ідеалізований процес стійкий.

Встановленням критеріїв, за якими стає можливим судити, чи буде розглянутий процес стійким або нестійким, займається теорія стійкості. Досліджувані в цій теорії процеси описуються звичайними диференціальними рівняннями. Відносно розв'язків цих рівнянь ми і введемо основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим [1].

Розв'язок $x=\varphi(t)$ $(0\leq t\leq\infty)$ системи рівнянь $\dfrac{dx}{dt}=F(t,x)$ (1) називається **стійким за Ляпуновим**, якщо для довільного $\varepsilon>0$ і t_0 знайдеться таке $\delta(\varepsilon,\ t_0)>0$, що для всякого іншого розв'язку $x=\psi(t)$ з нерівності

$\|\varphi(t_0)-\psi(t_0)\|<\delta$ (2) слідує нерівність $\|\varphi(t)-\psi(t)\|<\varepsilon$, (3) яка виконується при $\forall t \geq t_0$.

Розв'язок $x=\varphi(t)$ називається **рівномірно стійким** по t_0, коли δ не залежить від t_0.

Розв'язок $x=\varphi(t)\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ називається **асимптотично стійким за Ляпуновим**, коли він є стійким, і крім того, існує таке δ_0, що для всякого розв'язку $\psi(t)$ рівняння (1), для якого справджується нерівність $\|\varphi(t_0)-\psi(t_0)\|<\delta$, виконується рівність: $\lim\limits_{t\to\infty}\|\varphi(t)-\psi(t)\|=0$.

Розв'язок $x=\varphi(t)$ називається **нестійким**, коли він не є стійким.

Таким чином, для нестійкості розв'язку достатньо, щоб існувало фіксоване число $\varepsilon>0$, таке, що для всякого, як завгодно малого $\delta>0$ знайдеться розв'язок системи (1), для якого справджується нерівність (2) і для якого в деякий момент часу $t_\delta>t_0$ нерівність (3) обертається в рівність.

Дослідження стійкості за методом функцій Ляпунова дозволяє розглядати стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь. Але О. Ляпуновим вперше було зроблено висновок, що за першим наближенням неможливо зробити вірний висновок про стійкість тривіального розв'язку системи. Тому він розробив спеціальні способи розв'язання задачі стійкості. Всі ці способи він поділив на дві категорії: відносячи до першої категорії ті способи, які зводяться до визначення загального або частинного розв'язку розглянутих диференціальних рівнянь. Сукупність всіх способів першої категорії Ляпунов назвав першим методом. До другої віднiс ті способи розв'язання задачі стійкості, які не потребують знаходження частинних, або загальних розв'язків диференціальних рівнянь, а зводяться до знаходження деяких функцій від t, x, які мають спеціальні властивості. Сукупність способів другої категорії Ляпунов назвав другим методом. Другий метод Ляпунова є нині основним з методів розв'язання задач на стійкість.

В теорії стійкості вивчається поведінка функцій вздовж траєкторії розв'язку розглядуваної системи диференціальних рівнянь з тим, щоб на основі такого вивчення зробити висновок про стійкість чи нестійкість траєкторій. Такі функції називають функціями Ляпунова.

В подальшому нам прийдеться мати справу з функціями Ляпунова, заданими в деякому околі початку координат фазового простору.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=f(\vec{x}) \qquad (4)$$

де $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – вектор змінних; $f(\vec{x})=\left(f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}),....,f_n(\vec{x})\right)^T$ – вектор правих частин; t – змінна часу.

Вважатимемо розв'язки системи (4) траєкторіями руху деякої динамічної системи, що змінює стан з часом.

Система (4) називається автономною (стаціонарною), оскільки вектор правих частин не залежить від часу. Таким чином, рівняння (4) є математичною моделлю автономної динамічної системи (АДС).

З огляду на представлену фізичну інтерпретацію, вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ називатимемо **вектором фазових змінних**, простір R^n фазових змінних x_1, x_2, ..., x_n – фазовим простором, графік розв'язання системи (4) у фазовому просторі з заданим на ньому параметром t – фазовою траєкторією, а схематичне зображення сімейства фазових траєкторій – фазовим портретом.

Серед фазових траєкторій динамічної системи, крім точок спокою, виділяють траєкторії, що відповідають періодичним розв'язкам системи (4). Такі траєкторії називають *циклами.* Цикли характеризуються тим, що розв'язок системи (4) пройшовши через будь-яку точку циклу у фазовому просторі, повертатиметься до неї через визначені проміжки часу нескінченну кількість разів.

Задачі дослідження на стійкість зручно ілюструвати на фазовій площині двох змінних.

Продемонструємо практичну реалізацію наведеної методики при розв'язуванні задач на стійкість.

Приклад 1. Дослідити на стійкість частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданій початковій умові, використовуючи означення стійкості та нестійкості за Ляпуновим: $y'+\dfrac{y}{x}=1+2\ln x$, $\varphi(1)=1$.

Розв'язування: загальним розв'язком задачі є функція $y=x\ln x+C/x$. Використовуючи початкову умову, знаходимо довільну сталу: $C=1$. Отже, частинний розв'язок має вигляд: $y=\varphi(x)=x\ln x+1/x$.

Для дослідження його на стійкість оберемо будь-який інший розв'язок $y=f(x)$ заданого диференціального рівняння з початковими умовами (x_0, y_0), які достатньо мало відрізняються від заданих початкових умов. Тоді C майже не буде відрізнятися від 1 та $f(x)=x\ln x+C/x$.

$\left|f(x)-\varphi(x)\right|=\left|\dfrac{C}{x}-\dfrac{1}{x}\right|\to 0$ при $x\to+\infty$, тобто модуль вказаної різниці можливо зробити меншим за будь-яке наперед задане $\varepsilon>0$, що, згідно з означенням, є стійкістю цього розв'язку. Крім того, оскільки модуль даної різниці прямує до нуля при будь-якому C, то частинний *розв'язок асимптотично стійкий* у цілому.

Приклад 2. $y' = \dfrac{e^{2x}y}{1+e^{2x}}$, $\varphi(0)=2$.

Розв'язування: загальним розв'язком диференціального рівняння з відокремлюючимися змінними є функція $y = f(x) = C\sqrt{1+e^{2x}}$.

За початкової умови $C=2$ та $\varphi(x) = 2\sqrt{1+e^{2x}}$ маємо $\left|f(x)-\varphi(x)\right| = \left|C-2\right|\sqrt{1+e^{2x}}$.

Якщо $x \to +\infty$, то модуль цієї різниці прямує до нескінченності та більше наперед заданого $\varepsilon>0$, яке б не було $\delta>0$, тобто даний *розв'язок не стійкий*.

Приклад 3. Дослідити нульовий розв'язок даної системи на стійкість за першим наближенням за допомогою функції Ляпунова $v=4x^2+3y^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y^5 \end{cases}$$

Розв'язування: запишемо систему за першим наближенням та її характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12 = 0 .$$

Оскільки $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}i$, то загальний розв'язок є лінійною комбінацією $\sin 2\sqrt{3}t$ та $\cos 2\sqrt{3}t$, та нульовий розв'язок лінійної системи стійкий (не асимптотично).

Повна похідна функції Ляпунова $v\geq 0$ згідно системи має вигляд $\dot{v} = 8x\dot{x} + 6y\dot{y} = -2(4x^4 + 3y^6) \leq 0$.

Вона визначена від'ємно та, згідно теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість, нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким.

З метою активізації пізнавальної діяльності магістрантів та залучення їх до проведення реального чисельного експерименту з використанням сучасних комп'ютерних технологій їм пропонується розв'язати прикладну задачу, що була розв'язана у роботі [3]. В ній розглядається метод дослідження стійкості форм нелінійних коливань ортотропних пластин складної форми, на які діє інтенсивне періодичне динамічне навантаження, при різних способах їх закріплення. Розроблений метод базується на застосуванні методу *R*-функцій, варіаційних методів та «технічного критерію стійкості». На базі створеного програмного забезпечення визначено зони стійкості/нестійкості форм нелінійних коливань ортотропних пластин складної форми при різних способах їх закріплення, проведено дослідження траєкторії отриманих розв'язків.

Для аналізу отриманих результатів розглянемо траєкторії конкретних розв'язків. Проведемо дослідження для зафіксованих значень параметрів системи, причому розглянемо їх значення як із області стійкості, так і із області нестійкості.

Дослідимо поведінку системи при наступних значеннях параметрів: пластина виготовлена з матеріалу (1), III – тип закріплення, ω=0.9, F=0.4, $y_1(0)$=0.5, $y_1'(0)$=0, $y_2(0)$=0.005, $y_2'(0)$=0.

Як бачимо, для обраних параметрів значення потрапляють в область нестійкості, що і підтверджується графічним зображенням на рис. 1, 2.

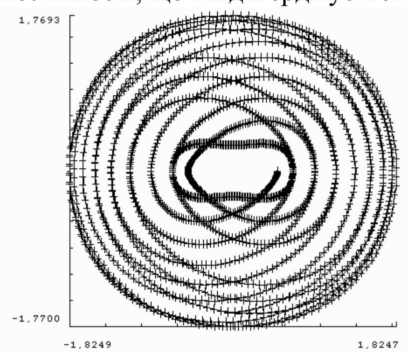


Рис. 1. Траєкторія руху на фазовій площині (y_1, y_1')

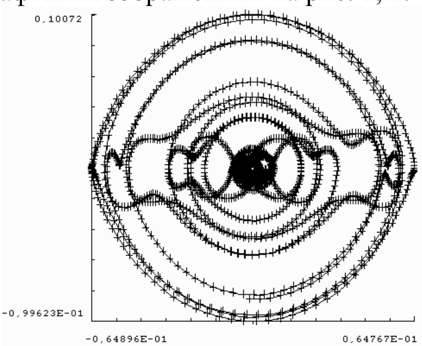


Рис. 2. Поведінка варіацій на фазовій площині (y_2, y_2')

Розглянемо поведінку системи при наступних значеннях параметрів: пластина виготовлена з матеріалу (2), II – тип закріплення, ω=0.8, F=0.4, $y_1(0)$=0.5, $y_1'(0)$=0, $y_2(0)$=0.005, $y_2'(0)$=0. Як бачимо, для обраних параметрів значення потрапляють в область стійкості, що і підтверджується графічним зображенням на рис. 3, 4.

Дослідження динамічної поведінки механічних систем і питання, пов'язані з динамічною втратою їх стійкості, відносяться до ряду актуальних проблем. Ці питання виникають при проектуванні багатьох сучасних конструкцій, які працюють під дією інтенсивних динамічних і, зокрема, періодичних навантажень. За останній час в цьому напрямку було розроблено багато нових підходів, одним з яких є „технічний критерій стійкості", запропонований в роботах [1; 2] і використаний для дослідження динамічної стійкості форм коливань пружних нелінійних систем.

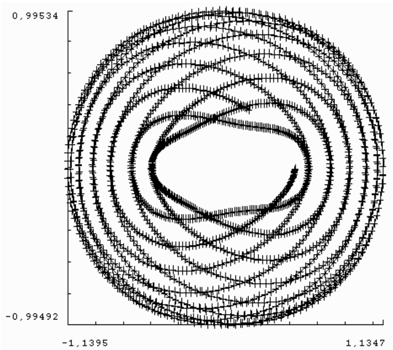


Рис. 3. Траєкторія руху на фазовій площині (y_1, y_1')

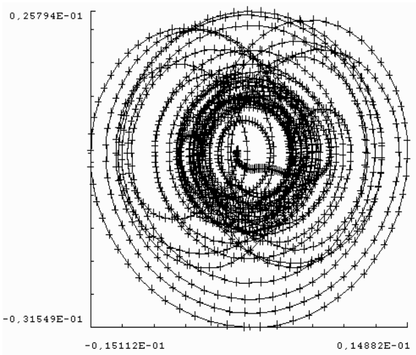


Рис. 4. Поведінка варіацій на фазовій площині (y_2, y_2')

Висновки. Таким чином, у роботі виділено науково-методичні засади втілення у навчальний процес прикладних аспектів деяких питань теорії стійкості; науково обґрунтовано окремі положення теорії стійкості; продемонстровано на реальному чисельному експерименті роль наукових методів дослідження у вирішенні задач теорії і практики.

Перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Викладені теоретичні та методичні аспекти надають можливість розробки методичної системи навчання певних дисциплін вільного вибору студентів, що сприятиме формуванню та розвитку високого рівня підготовки фахівців-математиків.

Література

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / Ляпунов А. М. – М. ; Л. : ОНТИ, 1935. – 386с.

2. Мартынюк А. А. Устойчивость движения сложных систем / А. А. Мартынюк. – К. : Наук. думка, 1975. – 352 с.

3. Онуфриенко О. Г. Исследование нелинейных колебаний ортотропных пластин сложной формы с помощью метода R- функций : дис. на соискание ученой степени кандидата техн. наук : 01.02.04 / Онуфриенко Ольга Григорьевна. – Харьков, 2005. – 199 с.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ КУРСА МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИТ-СПЕЦИАЛИСТОВ (НА ПРИМЕРЕ ЛИНЕЙНОЙ И ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ)

В. В. Петров, Д. С. Кобелянская
Украина, г. Кривой Рог, Криворожский национальный университет

Широкое проникновение информационных и цифровых технологий в научно-техническую практику, в инженерное дело, в быт современного человека идет с нарастанием и приводит к необратимым изменениям в социуме. Этот процесс приводит к необходимости массового перепрофилирования образования на новые инженерно-технические ИТ-специальности. Профессиональная подготовка по новым специальностям в вузах, колледжах и техникумах сопряжена с рядом трудностей.

Во-первых, с недостаточным уровнем методической разработки и опытом преподавания новых учебных дисциплин.

Во-вторых, к уровню математической культуры учащихся и студентов предъявляются относительно высокие требования. В то же время, как отмечают преподаватели высшей школы, допущено снижение математической культуры выпускников средних учебных заведений. Несмотря на то, что опыт постановки курса информатики в средней школе составляет чуть больше четверти века, тем не менее, знания выпускниками основ информатики и вычислительной техники нельзя признать достаточными.

В-третьих, физико-математические дисциплины издавна составляли фундамент инженерного образования, и ориентированы были на обслуживание электромеханических и технологических дисциплин, которые для ИТ-специалистов менее важны, чем для классических инженерных специальностей. Для ИТ-специальностей более важными являются прикладные разделы современной абстрактной алгебры. Соответствующий материал достаточно прост и легок в усвоении. Он является простым и доступным обобщением важнейших арифметико-алгебраических понятий школьного курса математики, рассматриваемых и основательно изучаемых в основной школе в базовых курсах математики и информатики. Поэтому профессиональное образование ИТ-специалистов можно начинать в рамках адаптационных курсов, обычно читаемых в большинстве вузов в первом-втором семестрах. Уже в этих курсах можно начать изучение абстрактных понятий двоичной булевой алгебры и ознакомить студентов с основными методами, которые необходимы в их будущей профессиональной деятельности. Прежде всего, проектирование простейших цифровых автоматов таких, как полусумматор, полный и многоразрядный сумматор и др.

Тем не менее, на практике эта возможность реализуется исключительно редко только потому, что курсы, ориентированные на систематизацию и повторение материала школьных дисциплин, ведут специалисты методических кафедр с неукоснительным разделением математики и информатики. Поэтому такое повторение оказывается малоэффективным для профессиональной подготовки студентов ИТ-специальностей.

Преподаватели старшего поколения, ведущие традиционный курс математики, недостаточно учитывают потребности и запросы ИТ-специальностей из-за психологических трудностей в изложении программного материала. Традиционное чтение классических курсов (высшей математики, математического анализа, алгебры и геометрии) малоэффективно из-за слабой связи и недостаточной профессиональной ориентации на ИТ-специальность.

Линейная алгебра, представленная в классических учебниках А. И. Мальцева, И. М. Гельфанда, А. И. Кострикина и др., построена для случая числовых полей нулевой характеристики, таких как Q – поле рациональных чисел, R – поле действительных чисел и C – поле комплексных чисел. Поля конечной характеристики (важный случай для профильной подготовки студентов ИТ-специальности) практически не рассматриваются в классическом курсе линейной алгебры. В связи с этим преподаватели курсов дискретной математики, теории кодирования, криптографии вынуждены читать упущенный материал курса линейной алгебры для случая полей конечной характеристики. Это не способствует продуктивному и комфортному для студентов усвоению указанных выше профильных дисциплин. Две элементарные трудности, совмещенные во времени, оказываются непреодолимым препятствием для большой части студентов.

Эти проблемы образовательной практики должны решаться в каждом учебном заведении по-своему с учетом особенностей учебного вуза и уровня подготовки студентов.

Хотелось бы обратить внимание на то, что естественные науки, такие как физика, информатика и математика, имеют один и тот же объект изучения – природу, технику и реальные процессы. Раздельное изучение этих дисциплин в школе и в высшем учебном заведении не способствует повышению качества усвоения.

В учебном процессе недостает интегрирующего звена, которое смогло бы эффективно объединить элементы полученных знаний этих наук, вывести личностное знание на качественно новый уровень.

Традиционный стиль раздельного обучения и усвоение фундаментальных знаний различных физико-математических дисциплин приводит ученика в тупик. Для большей интенсификации усвоения знаний целое было разделено на части, а возврат к целостным представлениям оказался за пределами учебного процесса. Таким образом, герменевтический круг оказался разорванным. Это не позволяет ученику создать целостный образ об изучаемом предмете. Поэтому задача современной методики преподавания и преподавателей-практиков при постановке курса высшей алгебры должна состоять в том, чтобы соединить разрозненные элементы знаний физико-математических в единое целое при переходе на новый этап обучения. Постановку профильных математических курсов для студентов ИТ-специальности необходимо подчинить концепции четырех «и»: интеграция, индивидуализация, информатизация, интеллектуализация учебного процесса. Из четырех пунктов концепции информатизация учебного процесса практически решена на нужном уровне. Этого нельзя сказать про интеграцию и интеллектуализацию обучения в вузе.

Не менее важным является реализация принципов наглядности, доступности и абстрактности знаний [1]. Принцип наглядности обязывает преподавателя или автора учебника опираться на хорошо знакомые и понятные образы, доступные абитуриентам и студентам младших курсов. Использование ассоциаций и аналогий позволяет облегчить начальное понимание переноса и адаптации известных элементов знаний в новые области, что достигается простой модификацией их и выбором подходящей терминологии.

Принцип абстрактности предполагает перевод знаний на новый более высокий уровень абстрагирования, главной целью которого является расширение и изменение сферы применения новых знаний. В школьном курсе математики учащиеся были ознакомлены с большей частью алгебраических систем. Например, многие из них овладели алгеброй натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел. Кроме того, им хорошо известна алгебра многочленов от одной и нескольких переменных. Все это есть множества с операциями, часть из которых образует полугруппу, группу, кольцо, область целостности, поле и т.д. Итак, объекты в школе усвоены, но не оформлены в понятийном аппарате – они не названы своими именами. Эта работа должна и может быть выполнена в самом начале обучения профессионала. Без этого этапа обучать многим ИТ-дисциплинам весьма проблематично. В результате следует обеспечить ознакомительный уровень усвоения – формальное знание определений, узнавание и различение объектов.

Наиболее отработанным (с методической точки зрения) и усвоенным материалом школьного курса математики является решение системы линейных алгебраических уравнений с двумя, реже с тремя, неизвестными. Эта задача – основная задача линейной алгебры. Исключение переменных – это базовый алгоритм решения систем линейных уравнений. Так как при исполнении алгоритма используются свойства коэффициентов – элементов числовых полей Q и R, то алгоритм распространяется и работает, с незначительными изменениями, для случая нечисловых полей. Для ИТ-специальностей наибольший интерес после классического случая представляют системы уравнений с коэффициентами при неизвестных из поля конечной характеристики [3]. Например, процедура исключения неизвестных применима для полей характеристики два и используется для решения систем линейных логических уравнений. Такие задания появились в едином государственном экзамене по информатике в России (начиная с 2009 года), в то же время ни один учебник информатики этих вопросов не затрагивает и не освещает. В Украине, у учеников средней школы нет потребности учиться решать такие задачи из-за отсутствия их задач в контрольно-экзаменационных материалах по информатике.

Задача решения систем линейных логических уравнений (систем над булевым полем $< B, \oplus, \wedge >$, где над $B := \{0; 1\}$ – булево множество или алфавит; $\oplus$ – логическая операция «исключающее ИЛИ», $\wedge$ – логическое и арифметическое сложение) часто встречается при разработке логических схем, блоков, узлов и устройств ЭВМ. Используется так же при тестировании логических блоков и устройств и реализации симметрических булевых функций для арифметики. В школьном курсе информатики некоторые авторы пытаются разработать линию построения цифровых автоматов, принимающих интеллектуальные решения. Первопроходцем этого направления был украинский учитель В. Н. Касаткин, автор первых учебных пособий по кибернетике.

Рассмотрим, как можно в курсе математики или информатики для студентов ИТ-специальностей вводить элементы современной абстрактной алгебры. Рассмотрим тему алгебро-логических уравнений и их систем над булевым полем. Решим уравнение $AX\oplus B = 0$, где переменные A и B $\in \{0;1\}$. Уравнение задано в конечном множестве, поэтому для его решения можно задать простой перебор.

A	B	$AX\oplus B = 0$	
0	0	$0X\oplus 0 = 0$	$X\in\{0;1\}$
0	1	$0X\oplus 1 = 0$	$X\in\varnothing$
1	0	$1X\oplus 0 = 0$	$X = 1$
1	1	$1X\oplus 1 = 0$	$X = 0$

Не менее просто организовать решение квадратных уравнений вида $AX^2\oplus BX\oplus C = 0$, где A, B, C – булевы переменные принимающие значения {0;1}, при этом также $A \neq 0 \Rightarrow A = 1$. Учитывая, что $A \neq 0 \Rightarrow A = 1$, квадратное уравнений можно переписать в виде $X^2 \oplus BX \oplus C = 0$. Для решения уравнения используем метод таблиц.

B	C	$X^2 \oplus BX \oplus C = 0$	
0	0	$X^2 \oplus 0X \oplus 0 = 0$	$X = 0$
0	1	$X^2 \oplus 0X \oplus 1 = 0$	$X = 1$
1	0	$X^2 \oplus 1X \oplus 0 = 0$	$X \in \{0;1\}$
1	1	$X^2 \oplus 1X \oplus 1 = 0$	$X \in \varnothing$

При нахождении решений системы уравнений в булевом поле используем известный из классической алгебры метод исключения – метод Гаусса. На булевом множестве этот метод становиться наиболее удобным. Рассмотрим на конкретном примере.

$$\begin{cases} 1X_1 \oplus 1X_2 \oplus 0X_3 = 1 \\ 0X_1 \oplus 1X_2 \oplus 1X_3 = 0 \\ 1X_1 \oplus 0X_2 \oplus 1X_3 = 1 \end{cases}$$

Запишем коэффициенты системы в матрицу вида.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим первую строку матрицы к третьей, для того чтобы исключить первую переменную в третьем уравнении системы. Во втором уравнении системы соответствующий коэффициент равен 0 – его исключать не приходится. При сложении строк коэффициентов используем операцию сложения по модулю два и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

В полученной матрице образовались две одинаковых строчки, что дает право нам говорить о том, что переменная X_3 данной системы принадлежит булевому множеству {0; 1}. Следовательно, решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} X_1 = 1 \oplus X_3 \\ X_2 = X_3 \end{cases}$$

Булево множество < B, ⊕, ∧, 1> – это простейшая алгебраическая система – алгебра Жегалкина, < B, ⊕ > и < B \ {0}, ∧ > простейшие двухэлементная аддитивная и одноэлементная мультипликативная группы (обе они циклические, а следовательно абелевы). Эти алгебраические системы широко используются при проектировании, анализе и синтезе логических схем – цифровых автоматов, а именно для построения полусумматоров, полных сумматоров (состоит из двух полусумматоров), для минимизации булевых функций и т.п. Успешное применение булевой алгебры отмечается так же и в области криптографии и при создании помехоустойчивых устройств [2].

Сегодня существуют математические пакеты, которые позволяют решать многие задачи абстрактной булевой алгебры и алгебр над конечными полями в автоматическом режиме, например, такие пакеты, как Mathcad, Sage, GAP и другие. Использование указанных пакетов в учебном процессе значительно упрощает решения многих задач связанных с логическими функциями, с решением логических уравнений и систем – тех задач, которые широко представлены в курсах профессиональной подготовки ИТ-специалистов на старших курсах.

На наш взгляд, методическая работа в данном направлении должна вестись интенсивно. Наиболее насущной является связь абстрактной алгебры с объектно-ориентированным программированием, с криптографией, с цифровой техникой. Задач много и каждая требует неотложного решения, так как этого требует практика подготовки ИТ-специалистов и все возрастающие требования к профессионализму выпускников этих специальностей.

Литература

1. Вечтомов Е. М. Метод Гаусса как теоретический метод в линейной алгебре / Е. М. Вечтомов, Е. М. Ковязина // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. – 2000. – Вып. 2. – С. 95–99.
2. Закревский А. Д. Логические уравнения с приложениями в автоматизированном проектировании и управлении / А. Д. Закревский // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №4. – С. 173–184.
3. Закревский А. Д. Эффективные методы нахождения кратчайших решений систем линейных логических уравнений / А. Д. Закревский // Проблемы управления. – 2003. – №4. – С. 16–22.

ОСОБИСТІСНО-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

О. М. Потапова
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
remania@list.ru

У зв'язку із значними економічними та соціальними перетвореннями, стрімким ростом технічного прогресу, що відбувається на сучасному етапі розвитку суспільства, все більше відчутною стає нестача у висококваліфікованих, ініціативних та професійно компетентних інженерних кадрах. Конкурентоспроможність молодих спеціалістів на ринку праці на теперішній час визначається не тільки обсягом отриманих професійних знань та набутих навичок, але й особистісними характеристиками: самостійність, впевненість, відповідальність, мобільність в прийняті рішень, уміння жити і працювати в нових умовах, готовність до самоосвіти та самовдосконалення. Тому підготовці спеціалістів технічного профілю зараз приділяється значна увага з боку уряду, діячів освіти і науки. У зв'язку з цим, актуальною є задача вищої освіти в пошуку та впровадженні у навчально-виховний процес таких методів та засобів нових педагогічних технологій навчання, які б дозволили максимально реалізуватися потенційним здібностям кожного студента. Для вирішення цієї проблеми важливим є використання в навчальному процесі новітніх особистісно-орієнтованих технологій. Проголошення в Національній доктрині розвитку освіти України особистісної орієнтації як одного з пріоритетів державної політики в розвитку освіти вимагає великої роботи з формування змісту освіти, адекватного меті, та виявлення способів його засвоєння з урахуванням унікальності й неповторності кожної особистості.

Однією з вагомих складових загальної професійної підготовки інженерів є їх математична підготовка. Математика як точна наука, процес вивчення і усвідомлення якої нерозривно пов'язаний з інтенсивною розумовою діяльністю, необхідністю постійно аналізувати, порівнювати різні поняття, систематизувати, узагальнювати і робити висновки, має великі можливості щодо розвитку раціональних якостей мислення, розвитку творчих здібностей та інтелектуальних вмінь студентів, тобто набуває особистісного характеру. До того ж слід говорити не тільки про знання математичних методів, але й про розвиток здібностей, що забезпечують їх застосування для розв'язання професійних задач, сприяють формуванню світоглядної позиції, пов'язаною з науковою та інженерною творчістю, формуванню професійної компетентності майбутнього фахівця.

Ураховуючи вимоги сьогодення і перспективи розвитку вищої освіти, навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей має вийти на новий якісний рівень, а саме застосування у начальному процесі особистісно-орієнтованих технологій.

Питанням математичної підготовки студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів (ВНЗ) присвячено роботи В. І. Клочка, Т. В. Крилової, Л. Д. Кудрявцева, Г. О. Михаліна, В. Г. Моторіної, О. І. Скафи, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкової, М. І. Шкіля та ін. Проблеми створення і впровадження у ВНЗ методичних систем навчання математики досліджували Т. В. Крилова, Г. І. Білянін, Н. В. Ванжа, Г. Я. Дутка, О. М. Кондратьєва, Г. О. Михалін, В. Т. Петрова, Г. С. Пастушок, В. Г. Скатецький, О. І. Скафа, В. І. Шавальова, О. Г. Фомкіна та інші. Теорія і практика професійної спрямованості навчання вищої математики відображені в роботах Т. В. Крилової, Г. О. Михаліна, Л. І. Нічуговської, В. Т. Петрова, В. Г. Скатецького та ін. Питання використання програмних педагогічних засобів у процесі навчання математики порушується в роботах М. І. Жалдака, С. А. Ракова, В. П. Гороха, Ю. В.Горошка, О. Б. Жильцова, Т. О. Олійник, І. М. Забари, Т. В. Зайцевої, Є. М. Смирнової та ін. Проблему реалізації евристичних ідей в процесі вивчення математики досліджували такі вчені і методисти, як Г. Д. Балк, Г. П. Бевз, К. В. Власенко, Д. Пойа, З. І. Слепкань, О. І. Скафа та ін. Вони одностайні в тому, щоб зміст та структура побудови математичної дисципліни, а також методи, форми і засоби організації навчання математики сприяли міцному засвоєнню знань, формуванню навичок і вмінь, способів творчої діяльності, ціннісних орієнтирів, необхідних для виконання науково-навчальних завдань, інтелектуальному розвитку особистості. Проте вирішення цієї проблеми при викладанні вищої математики у технічних ВНЗ ы сьогодні залишається актуальною.

У науково-педагогічній літературі проблема особистісно-орієнтованої освіти знайшла відображення у працях І. Д. Беха, Є. В. Бондаревської, В. С. Лутая, С. І. Подмазіна, В. В. Сєрікова, С. О. Сисоєвої, І. С. Якиманської та інших. Діяльнісного підходу до формування особистості дотримувалися Б. Г. Ананьєв, Л. С. Виготський, О. М. Леонтьєв, В. М. Мясіщев, Л. І. Божовіч та інші.

Мета статті – розкрити необхідність особистісно-орієнтованого підходу у процесі навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей на сучасному етапі.

Вища математика є фундаментальною дисципліною у ВТНЗ, яку студенти починають вивчати з першого семестру. Початок навчання у

ВНЗ є особливим і складним періодом у житті кожного студента (перехід до лекційно-практичної системи навчання, збільшення часу на самостійну роботу, новизна та складність навчального матеріалу). Як свідчить досвід, не всі студенти-першокурсники успішно оволодівають знаннями і причиною цього є:

- різний рівень шкільної математичної підготовки;
- різний рівень загального інтелектуального розвитку, зокрема пам'яті, мислення, уваги, ерудованості, володіння логічними операціями;
- недостатньо сформовані у студентів певних груп загальнонавчальні уміння: уміння працювати з науковою математичною літературою, готовність до сприймання великої кількості інформації, здатність навчатися самостійно, уміння контролювати та оцінювати себе, керувати своєю пізнавальною діяльністю, уміння творчо застосовувати отримані знання для розв'язання практичних задач, уміння правильно розподіляти свій робочий час для самостійної підготовки.

Зупинимось детальніше на останньому пункті, а саме на необхідності формування у студентів загальнонавчальних умінь. Формування таких умінь починається у школі, а подальшого розвитку вони набувають, коли випускник середньої школи продовжує навчання, щоб придбати спеціальну освіту.

Уміння – це заснована на знаннях і навичках готовність людини успішно виконувати певну діяльність. Уміння формується шляхом вправ і дає можливість виконання дій (розумових і практичних) не тільки в звичних, але і в змінених умовах [7].

У дослідженнях педагогів та психологів дається наукова інтерпретація видів загальнонавчальних умінь у шкільній практиці, але вона є актуальною, дієвою і при вивченні фундаментальних дисциплін у ВНЗ. Загальнонавчальні уміння, якими можуть користуватися студенти під час розв'язання широкого кола задач не лише у межах одного предмета, О. В. Усова називає уміннями «широкого перенесення», виділяючи такі групи загальнонавчальних умінь, як практичні уміння, оціночні уміння, уміння здійснювати самоконтроль, організаційні тощо [8].

Заслуговує на увагу класифікація загальнонавчальних умінь Г. К. Селевка: уміння і навички оцінки та осмислення, уміння і навички організації, уміння і навички мислительної діяльності та уміння і навички сприйняття інформації [2].

У методичній літературі виділяють такі основні групи загальнонавчальних умінь: загальноінтелектуальні, загальноінформаціїні, загальнокомунікативні, загальноорганізаційні.

Як зазначає С. Ф. Клепко, сучасний світ вимагає високого рівня технологічних умінь майже для будь-якої кар'єри. На думку міжнародної спільноти, визнаються необхідними для роботи у XXI ст. перелік наступних умінь: основні уміння (читання, письмо, арифметика, слухання і мовлення); мислительні уміння (творче міркування, розв'язування проблем, доведення, мета пізнання і системне мислення); інформаційні уміння (набуття і оцінювання інформації, її організовування і підтримка, інтерпретація і повідомлення, обробка на комп'ютері); технологічні уміння; уміння управляти ресурсами; міжособистісні уміння (формування команди, навчання, ведення переговорів і лідерство); особисті уміння (відповідальність за себе, почуття власної гідності і чесності) [2, 136].

Формування загальнонавчальних умінь студентів технічних спеціальностей у процесі вивчення вищої математики дозволить швидко адаптуватися до умов навчання у ВНЗ, сприятиме успішному та ефективному навчанню, а в подальшому, формуванню професійної компетентності майбутнього фахівця.

Формування вище зазначених умінь набуває особистісної значущості для студента, у наслідок чого, виникає необхідність індивідуального підходу до кожного студента, розробки індивідуальних стратегій навчання та диференційованих завдань. Тому актуальною є задача застосування особистісно-орієнтованого підходу у процесі навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей.

За визначенням І. С. Якиманської, особистісно зорієнтоване навчання – це навчання, яке визначає студента головною діючою фігурою всього освітнього процесу, його самобутність, самоцінність, суб'єктивний досвід якого спочатку розкривається, а потім узгоджується зі змістом освіти [5]. Як зазначає О. Є. Волянська, особистісно-орієнтована освіта – це не формування особистості з наперед визначеними властивостями, а забезпечення сприятливих умов для повноцінного виявлення і розвитку особистісних функцій студента [2].

З урахуванням вище зазначеного, у своїх дослідженнях Л. М. Глушкова стверджує, що якісна математична підготовка студентів технічних ВНЗ можлива лише при побудові методичної системи навчання вищої математики, що включає грамотне використання усієї сукупності методів, форм, прийомів професійно спрямованих особистісно-орієнтованих технологій [6]. Належність педагогічних технологій до особистісно-зорієнтованих визначається сучасними науковцями за їх можливостями зробити студента суб'єктом навчального процесу, показниками чого виступають: наявність мотивації навчання, сприятливість і комфортність освітнього середовища для досягнення мети, використання ефективних форм та методів роботи, контрольованість процесу навчання та його індивідуалізація, діалогічність, дієво-творчий характер, свобода для самостійного прийняття рішень [3]. До таких технологій відносимо модульно-рейтингове, проблемне, евристичне, розвиваюче, диференційоване навчання, інформаційно-комунікаційні технології навчання.

У цьому зв'язку виявлені суперечності серед яких, в контексті даного дослідження, важливо відмітити наступні:

– між здійсненням освітнього процесу з однієї сторони як «передачі досвіду викладача» та з другої сторони – особистісно-орієнтованою парадигмою освіти, що передбачає створення умов для самовдосконалення, самовиявлення, самореалізації студента;

– між потребою в індивідуальному підході з урахуванням особистості студента та малоефективною практикою викладання вищої математики у технічних ВНЗ, яка зорієнтована на середній рівень знань і здібностей студентів та має репродуктивний характер;

– між гуманістичним характером сучасної професійної підготовки та суб'єкт-об'єктною формою стосунків на рівні викладач-студент;

– між важливою роллю курсу «Вища математика» у формуванні професійної компетентності майбутніх інженерів та недостатньою мотивацією студентів до його вивчення;

– між прагненням викладачів до впровадження особистісно-орієнтованого підходу у процесі навчання вищої математики та недостатній розробленості відповідного методичного забезпечення.

Дані суперечності визначають проблему дослідження, тобто якою повинна бути методична системи навчання вищої математики студентів технічних спеціальностей на основі особистісно-орієнтованого підходу та її практична реалізація у процесі навчання в технічному ВНЗ.

Як відмічає Н. Д. Островська, педагогічними умовами реалізації особистісно-орієнтованого підходу при вивченні дисципліни є наступні: створення особистісно-орієнтованого середовища; забезпечення внутрішньої професійно-значущої мотивації вивчення дисципліни; урізноманітнення навчальних форм занять; створення ситуацій успіху; врахування індивідуальних особливостей студентів; при використанні у процесі навчання вищої математики модульних, проблемних, евристичних та комп'ютерних технологій, орієнтованих на творче, кероване самонавчання кожного студента, необхідно врахувати потенціал і вхідний рівень математичної підготовки; професійна спрямованість навчання вищої математики; проведення педагогічного моніторингу, що дозволяє оперативно здійснювати діагностику, управління та корекцію індивідуальних освітніх траєкторій у студентів технічних спеціальностей. знання та уміння викладача застосувати новітні особистісно-орієнтовані технології до організації навчально-пізнавальної діяльності студентів технічних спеціальностей в процесі навчання вищої математики, обираючи у конкретних умовах саме той вид навчання, який найкраще забезпечить засвоєння знань, формування умінь і навичок за мінімальних затрат зусиль і часу [4].

Висновки. Таким чином знання методичних основ особистісно-орієнтованих технологій навчання в ВТНЗ, уміле їх використання у поєднанні з традиційними формами навчання у процесі вивчення вищої математики студентів технічних спеціальностей сприятиме їх успішному та ефективному навчанню, формуванню соціально активної, самостійної, ініціативної, творчої особистості майбутнього фахівця.

Література

1. Бондаревская Е. В. Гуманистическая парадигма личностно-ориентированного образования / Е. В. Бондаревская // Педагогика. – 1997. –№ 4. –С. 11–17.
2. Волянська О. Є. Особистісно-орієнтоване навчання при підготовці вчителів математики на заочному відділенні педуніверситету / О. Є. Волянська // Дидактика математики. – Донецьк, 2005. – Вип. 24. – С. 65-68.
3. Гузій Н. В. Особистісно-орієнтовані технології дидаскалогічної підготовки майбутнього педагога : метод. посібник / Н. В. Гузій. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – 45 с.
4. Островська Н.Д. Особистісно-орієнтований підхід у навчанні дисциплін гуманітарного циклу студентів агротехнічного інституту : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.04 / Островська Н.Д. ; Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка. – Тернопіль, 2007. – 20 с.
5. Якиманская И. С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения / Якиманская И. С. // Вопросы психологии. – 1995. – № 2. – С. 37-38.
6. Глушкова Л. М. Реализация индивидуального подхода при разноуровневом проблемно-модульном обучении математики в технических вузах / Л. М. Глушкова // Вестник Башкирского университета. – Уфа : БГУ. – 2007. – Т. 12. – №4. – С. 211-215.
7. Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей : монографія / Співаковський О. В. – Херсон: Айлант, 2003. – 244 с.
8. Усова А. В. Формирование у учащихся учебных умений / Усова А. В., Бобров А. А. // Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология». № 7. – М. : Знание, 1987. – 80 с.

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHPIPER У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Н. В. Рашевська, С. В. Цимбал
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
nvr1701@gmail.com

Сучасний випускник вищого технічного навчального закладу повинен бути конкурентоспроможним як на вітчизняному, так і світовому ринках праці. Тому однією із головних задач системи вищої технічної освіти є орієнтація студента на мобільність у навчанні.

Треба зазначити, що математична підготовка за таких умов відіграє особливу роль у підготовці майбутніх інженерів: опанування математичних дисциплін надає студентам технічних ВНЗ можливість ефективно застосовувати набуті знання на практиці, чітко розуміючи, де застосовувати той чи інший математичний метод при розв'язанні професійних задач, адекватно сприймати зміст наукової і спеціальної літератури, в якій використовується відповідний математичний апарат, впроваджувати нові технології у виробництво і швидко пристосовуватися до науково-технічних змін.

Як зазначено в проекті Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки, метою Національної стратегії розвитку освіти є: підвищення доступності якісної, конкурентоспроможної освіти для громадян України відповідно до вимог інноваційного розвитку суспільства, економіки, кожного громадянина; забезпечення особистісного розвитку людини згідно з її індивідуальними задатками, здібностями, потребами на основі навчання упродовж життя. А пріоритетом розвитку освіти є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), що забезпечують удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до діяльності в інформаційному суспільстві [1].

Формування гармонійної особистості, що вміє адекватно поєднувати сучасні технічні засоби з процесом навчання, необхідно розпочинати із середньої школи. Тому, однією із задач шкільної математичної підготовки повинно стати впровадження у навчальний процес мобільних інформаційно-комунікаційних технологій навчання (ІКТ), зокрема систем комп'ютерної математики.

Проблемі використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення дисциплін фізико-математичного профілю в сучасні середній та вищій школах присвячено роботи В. Ю. Бикова, Ю. В. Горошка, А. М. Гуржія, М. І. Жалдака та його школи, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, Ю В. Триуса.

Метою статті є розгляд питання використання систем комп’ютерної математики в процесі навчання шкільної та вищої математики.

С. А. Раков [2] зазначає, що мобільні інформаційно-комунікаційні технології та освіта мають потужний і взаємовпливовий зв’язок, що визначає технологічний, соціальний та культурний фактор розвитку сучасного суспільства. Однією із основних складових такого суспільства є компетентнісний підхід та формування математичної компетентності учня як майбутнього студента технічного університету.

Математична компетентність – це спроможність бачити та застосовувати математику у реальному житті для розв’язування індивідуально і соціально значущих задач, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [2]. Серед основних складових математичної компетентності, науковець виділяє: *процедурну компетентність* – уміння розв’язувати типові математичні задачі; *логічну компетентність* – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень; *технологічну компетентність* – володіння сучасними математичними пакетами; *дослідницьку компетентність* – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами; *методологічну компетентність* – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв’язування індивідуально і суспільно значущих задач.

Формуванню математичної компетентності учнів, а пізніше і студентів, сприяє впровадження у процес навчання систем комп’ютерної математики (СКМ).

Однією із нових систем комп’ютерної математики є мобільна система комп’ютерної алгебри та динамічної геометрії MathPiper.

MathPiper – це математико-орієнтоване середовище, що складається з набору програм, використання яких надає можливість:

1) автоматично виконувати широкий діапазон числового та символьного обчислень математичних об’єктів;

2) забезпечують інтерфейс користувача, що надає можливість використовувати алгоритми обчислення, створювати та керувати математичними об’єктами за допомогою маніпуляторів;

3) створювати алгоритми покрокових команд для вирішення математичних задач.

Як було зазначено, MathPiper поєднує в собі можливості системи комп’ютерної алгебри Yacas та динамічної геометрії GeoGebra, що надає можливість використовувати MathPiper як графічний калькулятор для створення графічних об’єктів чи обчислень за допомогою програм, написаних мовою Java.

Використовуючи MathPiper як мобільну СКМ для підтримки процесу навчання математики в школі та вищої математики в технічному ВНЗ, можна:

– проводити числові (враховуючи й дії з комплексними числами) та аналітичні (як з функціями однієї так і багатьох змінних) обчислення, в яких використовуються як стандартні функції MathPiper, так і бібліотеки утиліт для того, щоб «крок за кроком» розв’язувати задачі за відомими обчислювальними моделями;

– візуалізувати аналітичні залежності (як за допомогою вікна GeoGebra, так і за допомогою створених програм);

– за допомогою створених шаблонів демонструвати побудову плоских кривих та поверхонь другого порядку;

– зберігати, імпортувати файли з отриманими обчисленнями;

– одночасно обчислювати та графічно зображати отриманий результат;

– демонструвати відомі математичні факти через використання обчислювальних або геометричних моделей, зокрема через їх візуалізацію;

– проводити експерименти у деякій предметній галузі для відкриття нових фактів (insight) (можливо, особисто нових, а не нових в цілому), або виявлення регулярності певних явищ, або з метою концептуалізації (conceptualization) нового поняття [2];

– документувати отримані обчислення, створюючи базу даних.

Розпочинати знайомство з СКМ, на нашу думку, доцільно з 7-го класу із уведенням до програми такого предмету як геометрія. Демонстрація викладачем основних геометричних понять на уроці, можливість самостійної побудови об’єкту сприятиме не тільки усвідомленню геометричних понять, а й зацікавить учня предметом.

Розглянемо на прикладі, як можна на уроці з геометрії використовувати мобільну систему комп’ютерної математики MathPiper, зокрема систему динамічної геометрії GeoGebra.

Задача 1. Побудувати трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.

Розв’язання: Визначимо відрізки a, b та m_c. Виберемо на полотні точку A та за допомогою наступних команд виконаємо побудову:

– команда Відрізок[A, a] побудує відрізок a;

– команда Коло[A, 2* m_c] та Коло[A, b] побудує два кола з центром у точці A та радіусами m_c та b;

– команда Перетин[] визначить точки перетину двох кіл, одну з яких ми обираємо для побудови шуканого трикутника;

– команда Відрізок[] надає можливість побудувати відрізки AB_1 та CB_1;

– команда Відобразити[] відображає трикутник AB_1C відносно подвоєної медіани (рис. 1).

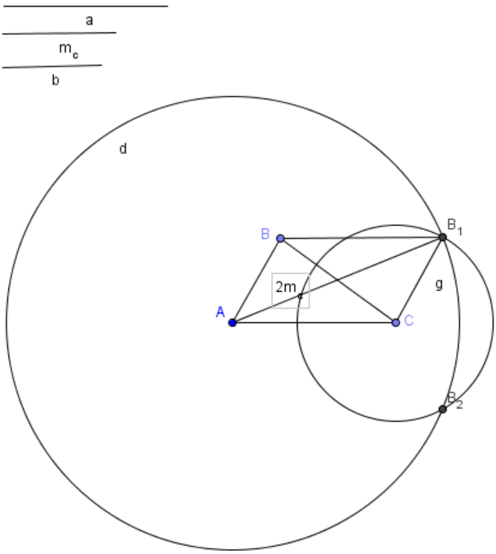
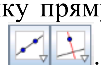


Рис. 1. Побудова трикутника за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони

Отриманий трикутник ABC є шуканим. Впевнитися в цьому можливо, якщо виконати числові обчислення заданих та отриманих відрізків. Змінюючи довжини заданих сторін трикутника та його медіані, учні самостійно «відкривають» для себе знання про відношення сторін у трикутнику.

Задача 2. Побудувати трикутник ABC за кутом A, висотою h_a, та медіаною m_a.

<u>*Розв'язання*</u>: Побудуємо деяку пряму l та серединний перпендикуляр a за допомогою інструментів . Далі будуємо коло з центром в точці H_1 та радіусом h_a (). Точку перетину кола та перпендикуляру позначаємо як A. З цієї точки, як центра кола будуємо ще одне коло радіуса m_a. Точку перетину другого кола з довільною прямою l позначимо M_1. Отримаємо базовий трикутник AM_1H_1 (рис. 2).

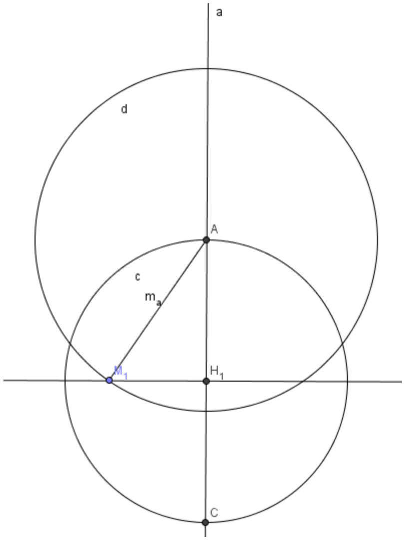


Рис. 2. Побудови базового трикутника AM_1H_1

Подовжимо медіану AM_1 як відрізок AD, що дорівнює $2m_a$. Проведемо перпендикулярну пряму b до відрізка AD в точці M_1. Відкладемо кут $M_1A(90 - \alpha)$ за допомогою інструменту . Проведемо промінь з точки A по заданому куту до перетину з прямою b, що надасть можливість визначити точку O – центр кола. Побудуємо коло, що проходить через центр O та точку D.

Визначимо точку перетину C кола з прямою l (), побудуємо відрізок CM_1 та рівний йому відрізок M_1B за допомогою команди Відрізок [M_1, CM_1]. Аналогічним чином будуємо відрізки AB та AC (рис. 3). Зробивши невидимими допоміжні лінії при побудові, отримаємо шуканий трикутник ABC (рис. 4).

Набуті під час навчання у школі вміння користуватися СКМ MathPiper надасть можливість студенту технічного університету використовувати мобільну СКМ не тільки під час вивчення вищої математики, але й інших предметів, таких як опір матеріалів, теоретична механіка та нарисна геометрія. Використання мобільної СКМ MathPiper у процесі навчанні математики лежить у руслі конструктивного підходу – підходу, який пропонує залучати учня та студента до активного процесу конструювання своїх математичних уявлень та знань, а також підводить учня до самостійного відкриття математики.

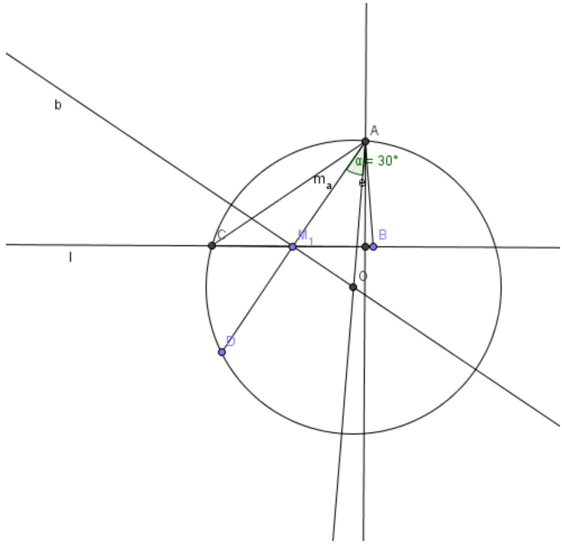


Рис. 3. Побудова трикутника за кутом *A*, висотою h_a, та медіаною m_a.

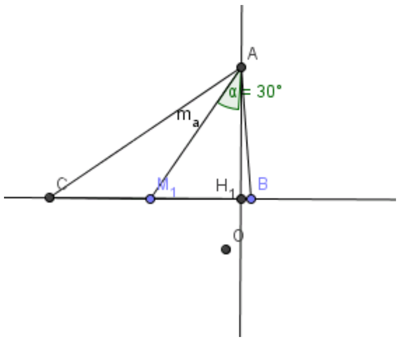


Рис. 4. Побудова трикутника *ABC*

Література

1. Проект Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://iitzo.gov.ua/files/proekt_rozvitku_osviti_2012_2021_.doc
2. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Раков Сергій Анатолійович ; Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди. – Харків, 2005. – 526 с.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

О. В. Семеніхіна[α], М. Г. Друшляк[β]
Україна, м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
ім. А. С. Макаренка
[α] sele_n@mail.ru
[β] marydru@mail.ru

Компетентне виконання певної дії передбачає розуміння людиною того, що вона робить та чому, і, якщо знання та вміння одержані через просте дублювання, то вони не розвинуть у людини готовність до самостійного усвідомлення умови і пошуку методів вирішення проблем у нетиповій ситуації, тобто не сформують компетентність. Знання та вміння без їх осмислення лише заповнюють процес навчання і не затримуються як якісне надбання особистості. Це зумовлює екстенсивний шлях освіти, тому однією з основних задач сучасної вищої школи є формування саме компетентностей, причому не тільки в професійній, а і в будь-якій іншій діяльності.

З цих позицій оволодіння професією ототожнюється із розумінням того, які завдання має навчитися розв'язувати людина під час професійної підготовки, тобто якими компетентностями має оволодіти. Причому зацікавленість у якісному формуванні професійних компетентностей під час підготовки висококваліфікованого спеціаліста будь-якого профілю є не тільки у того, хто навчає, а і у того, хто навчається. Це і напрацювання вмінь самостійно та творчо міркувати, осмислювати і доцільно використовувати одержану інформацію, і навчатися протягом усього життя.

Аналіз сучасних науково-методичних досліджень з приводу уточнення компетентностей майбутнього вчителя виявляє акценти в сторону обов'язкового набуття компетентностей у сфері використання інформаційних технологій. Згадані вміння можна інтерпретувати як «інформатичну» компетентність, яка для майбутнього вчителя складається не лише з вміння користуватися можливостями офісних програм (текстові редактори, табличні процесори, програми презентацій), а і демонструвати обізнаність у шляхах використання спеціалізованих професійних середовищ.

Викладачами кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка формування професійних (зокрема, інформатичних) компетентностей у студентів здійснюється різними методами і формами, серед яких особливе місце займає самостійне виконання індивідуальних завдань з використанням пакетів математичного спрямування.

Самостійна робота є самоосвітньою роботою студентів, яка спирається на власне бажання і серед іншого включає вивчення інформаційних джерел (представлених як в друкованому, так і в електронному вигляді), участь у студентській науково-дослідній роботі, використання у власних дослідженнях комп'ютерних програм тощо.

Використання засобів ІКТ, як показують науково-методичні дослідження, дозволяє більш тісно та наочно врахувати міжпредметні зв'язки і продемонструвати шляхи поєднання суто математичних прийомів чи методів із швидкою їх практичною реалізацією. Використання здійснюється як для виконання прямих трудомістких обчислень, так і для демонстрації процесів, пряме спостереження за якими неможливе або утруднене. Така демонстрація і наступний аналіз здійснюються шляхом створення спеціальних алгоритмічних структур, результати роботи яких залежать від певних параметрів, після зміни яких студент досліджує проблему, систематизує і узагальнює свої знання. Індивідуальна робота при цьому носить дослідницький характер.

Так, були розроблені методичні рекомендації з розв'язування різних прикладних задач математичних курсів у віртуальній математичній лабораторії MAPLE. Її використання сприяє не тільки якісному засвоєнню математичних понять та методів, а і формує навички використання інформаційних технологій, тобто інформативну компетентність.

Для демонстрації згаданих ідей наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Прикладом математичної моделі економічного процесу, що приводить до поняття власного вектора і власного значення матриці, є лінійна модель обміну або модель міжнародної торгівлі.

Нехай маємо n країн $S_1, S_2, ..., S_n$, національний дохід кожної з яких дорівнює $x_1, x_2, ..., x_n$. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} долю національного доходу, яку країна S_i витрачає на закупку товарів у країни S_j. Вважатимемо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто $a_{1j}+a_{2j}+...+a_{nj}=1$, $j=1, 2, ..., n$. Матриця $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається структурною матрицею торгівлі. Для кожної країни S_i, $i=1, 2, ..., n$ виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі складає $p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n$. Виручка торгівлі кожної країни повинна бути не менше її національного доходу $p_i \geq x_i$, $i=1, 2, ..., n$. Але оскільки всі країни не можуть отримувати прибуток, то нерівність $p_i \geq x_i$ приймає вигляд

$p_i = x_i$. Вводячи вектор **X**=(x_1, x_2, ..., x_n), отримуємо матричне рівняння **AX=X**, тобто задача звелася до знаходження власного вектора матриці **A**, що відповідає власному значенню, рівному 1 [1].

Задача. За допомогою середовища Maple знайти національні доходи трьох країн для збалансованої торгівлі, якщо структурна матриця торгівлі має вигляд $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання представлено через алгоритм знаходження власних значень матриці і як команду **eigenvects** програми (визначення власних значень матриці, їх кратності та відповідних власних векторів).

```
> with(linalg):
>A:=matrix(3,3,[1/3,1/4,1/2,1/3,1/4,1/2,1/3,1/4,0]):
> cp:=det(A-lambda);
```

$$cp := \frac{7}{24}\lambda + \frac{7}{12}\lambda^2 - \lambda^3$$

```
> evalf(solve(cp,lambda),3);
```

$$0.,\ 0.905,\ -0.321$$

```
> evalf(eigenvects(A),3);
```

$$[0.905, 1., \{[1.55, 1.55, 1.]\}], [-0.321, 1., \{[-0.550, -0.550, 1.]\}],$$
$$[0., 1., \{[1., -1.33, 0.]\}]$$

Власному значенню, яке наближено дорівнює 1, відповідає власний вектор **X**=(1,55; 1,55; 1), тобто збалансованість торгівлі трьох країн досягається при співвідношенні національних доходів $\frac{3}{2}:\frac{3}{2}:1$ або 3:3:2.

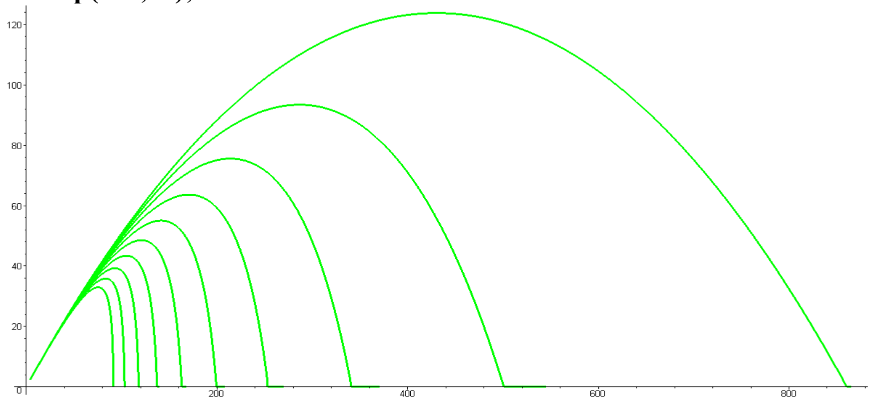
Приклад 2. Велика кількість задач фізики, демонстрація фізичних процесів чи явищ може бути реалізована в середовищі MAPLE з великим степенем наочності та деталізації.

Задача. Змоделювати політ тіла, кинутого з початковою швидкістю *v* під кутом *a* до горизонту з урахуванням опору повітря.

Модель траєкторії представлена процедурою з параметрами *v* і *a*. Приклад моделює політ для тіла, кинутого під кутом 30^{o} до горизонту з різними опорами повітря від 0 до 0.04 через 0.005.

```
> p:=proc(v,a);
> n:=200; with(plots); s:=array(0..9);
> for i from 0 to 9 do s[i]:=0.005*i od;
> for j from 0 to 9 do
> k:=s[j]; aa:=array(1..n); Aa:=array(1..n);
> vx:=evalf(v*sin(2*Pi*a/180),3);
```

```
> vy:=evalf(v*cos(2*Pi*a/180),3);
> g:=9.8; tp:=evalf(2*vy/g,3); kt:=tp/n; y:=0; x:=0;
> for i from 1 to n do
> vy:=vy-g*kt; vo:=evalf(sqrt(vx^2+vy^2),3); v1:=vo*(1-k);
> vx:=v1*vx/vo; vy:=vy*v1/vo;
> x:=x+vx*kt; y:=y+vy*kt; yy:=y+vy*kt;
> if yy<0 then y:=0 fi;
> aa[i]:=[x,y]; ll:=convert(aa,list); ss:=op(1..i,ll);
> tr[j]:=listplot([ss],color=green); od; od;
> AA:=convert(tr,list); display(AA); end;
> p(100,30);
```



При такому дослідженні студент може на власний розсуд змінювати значення всіх параметрів і досліджувати змодельований процес.

Приклад 3. Часто трапляються випадки, коли методи досліджень чи розв'язування є важливими, але не завжди наочними чи зрозумілими і поки не змоделюєш наочний приклад, метод не піддається. Серед таких методів, як показує досвід, яскравим представником можна вважати метод статистичних випробувань або метод Монте-Карло.

Сприйняття цього методу буде більш свідомим, якщо запропонувати побудову моделі геометричного тлумачення обчислення площі фігури або об'єму тіла через рівномірно розподілені точки на заданій області в комп'ютерному середовищі з можливістю програмування процесу.

Задача. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy$ методом Монте-Карло.

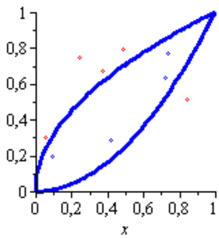
Приклад обрахунків для демонстрації методу (визначення кількості точок, які попали в задану область, обчислення значення інтеграла для різної кількості кинутих точок і графічна ілюстрація методу (n – загальна кількість точок, K – кількість точок, які попали в область, T_m_k – значення інтегралу за методом Монте-Карло) наведено нижче.

```
> f:=x+y : y1:=x^2: y2:=sqrt(x):
> I_2:=int(int(f,y=y1..y2),x=0..1);
```

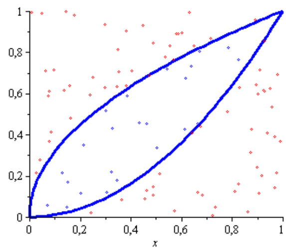
$$I\_2 := \frac{3}{10}$$

```
> obl:=plot({y1,y2},x=0..1,color=blue,thickness=3):
> k:=0: S:=0:
> for p from 1 to 3 do
> n:=10^p:
> for i from 1 to n do
> x[i]:=rand()/1e12:
> y[i]:=rand()/1e12:
> if y[i]>subs(x=x[i],y1) and y[i]<subs(x=x[i],y2)
 then k:=k+1: S:=S+subs(x=x[i],y=y[i],f):
 q[i]:=pointplot({[x[i], y[i]]},color=blue):
 else q[i]:=pointplot({[x[i], y[i]]},color=red):
>fi:
>od:
> K:=k;
> T_m_k:=S/n;
> display(obl, convert(q,list));
> od;
```

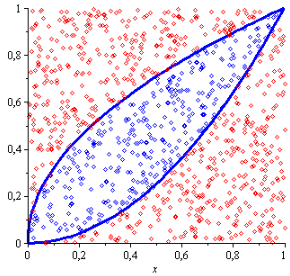
$n := 10 \quad K := 6 \quad T\_m\_k := 0.4926727323$



$n := 100 \quad K := 41 \quad T\_m\_k := 0.4068992411$



$n := 1000 \quad K := 342 \quad T\_m\_k := 0.3202104427$



Очевидно, що із збільшенням кількості кинутих точок значення площі наближається до точного значення 0,3.

Наведені приклади задач не обмежують одну навчальну дисципліну, завдання охоплюють різні розділи математики і суміжних дисциплін. Це дає змогу не тільки познайомити студентів зі спеціалізованими програмними середовищами, а і сформувати майбутні професійні компетентності шляхом розв'язування прикладних задач з використанням різних програмних засобів.

Наш досвід підтверджує, що організована таким чином самостійна робота є засобом глибокого та міцного засвоєння математичних знань, вмінь та навичок і сприяє формуванню інформатичних компетентностей особистості. Такі підходи в навчанні є основою для формування потреби в постійному поповненні своїх знань, засобом активізації навчальної діяльності студентів та готовності до самоосвіти.

Разом з цим організація самостійної роботи не завжди вирішує проблему формування всіх компетентностей фахівця, але використання такої форми навчання сприяє комплексному формуванню професійних компетентностей майбутнього вчителя математики.

Література

1. Васильева Е. Г. Применение линейной алгебры в экономике / Е. Г. Васильева, Л. И. Инхеева, М. Д. Улымжиев. – Улан-Удэ : Издательство ВСГТУ, 2004. – 18 с.

ПРОЦЕДУРНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ: ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЇЇ ДОСЯГНЕННЯ УЧНЯМИ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ

О. О. Середа
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
lenuhasereda@mail.ru

Аналіз процесів, які відбуваються в освітній сфері і в суспільстві, свідчать про актуальність проблеми запровадження компетентнісного підходу до навчання усіх навчальних дисциплін. Система математичних знань посідає особливе місце у загальнолюдській системі знань, виконуючи роль мови науки. Отже, набуття учнями математичних компетентностей є однією з найважливіших складових життєвих компетентностей.

Уводячи поняття математичної компетентності, С. А. Раков означив її як «уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [1, 2-8].

Виділяють такі предметно-галузеві математичні компетентності: процедурна, логічна, технологічна, дослідницька, методологічна.

Мета даної статті полягає у висвітленні теоретичних аспектів стосовно процедурної компетентності та охарактеризувати критерії оцінювання її досягнення учнями на уроках алгебри.

С. А. Раков трактує *процедурну компетентність* як уміння розв'язувати типові математичні задачі [1, 2-8]. Напрями її набуття:

– використовувати на практиці алгоритми розв'язання типових задач;

– вміти відтворювати контекст задач, що виникають в індивідуальній та соціальній практиці і які зводяться до типових;

– уміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміти розпізнавати типову задачу або зводити її до типової;

– уміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язань типових задач (підручники, довідники, Інтернет-ресурси).

Наявність процедурної компетентності демонструється в математиці спроможністю:

- обирати та коректно застосовувати процедури;
- перевіряти або встановлювати правильність процедури на конк-

ретних моделях або за допомогою символьних методів;
- застосовувати числові алгоритми у математиці для ефективного розв'язування задач у стандартних умовах;
- читати та будувати графіки та таблиці;
- виконувати геометричні побудови;
- виконувати дії не обчислювального характеру, такі як упорядкування та округлення чисел.

Впровадження компетентнісно орієнтованого підходу в освіті сприяло виникненню проблеми, пов'язаної з оцінюванням освітніх результатів учнів, яку не можна ототожнювати з традиційною системою показників успішності. Переорієнтація школи на формування ключових компетентностей має супроводжуватися змінами не тільки освітньої стратегії та технологій, але й способів оцінки результатів навчання.

Ступінь набуття процедурної компетентності може диференціюватись від нижчого – концептуального рівня – розуміння застосувань процедур для розв'язування типових задач у типових умовах до вищого, які спираються на концептуальне розуміння різних форм представлення даних і вміють застосовувати їх як інструмент для того, щоб сконструювати об'єкт або отримати результат у потрібній формі: числовій формі, у формі графіка або таблиці, діаграми тощо. Процедурна компетентність, як правило, відбиваються в здатності пов'язувати алгоритмічний процес із заданою проблемною ситуацією, виконувати обраний алгоритм коректно, поєднувати (інтерпретувати) отримані результати з контекстом вихідної задачі. Процедурна компетентність включає в себе спроможність осмислювати ситуацію, аргументуючи, чому конкретна процедура дозволяє розв'язувати дану конкретну задачу.

Посилаючись на структуру процедурної компетентності, загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів та шкалу рівневих критеріальних завдань і задач ми здійснимо спробу сформувати критерії оцінювання рівня сформованості процедурної компетентності в учнів на уроках алгебри. Для більшої наочності подамо дані критерії у вигляді таблиці.

Рівні навчальних досягнень	**Бали**	**Загальні критерії оцінювання процедурних компетентностей учнів**
I. Початковий	1	Учень може розпізнати тип задачі.
	2	Учень має нечіткі уявлення про шлях розв'язання задачі, виявляє здатність елементарно викласти думку.
	3	Учень відтворює менш як половину алгоритму розв'язку типової задачі; з допомогою вчителя

Рівні навчальних досягнень	Бали	Загальні критерії оцінювання процедурних компетентностей учнів
		виконує елементарні дії.
II. Середній	4	Учень з допомогою вчителя відтворює основний алгоритм розв'язання типової задачі, може повторити за зразком певну операцію, дію.
	5	Учень уміє систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових.
	6	Учень уміє розпізнавати типову задачу або зводити її до типової. Алгоритм розв'язання задачі правильний, але недостатньо аргументований. З допомогою вчителя здатний аналізувати, порівнювати, узагальнювати та робити висновки. Вміє застосовувати знання при виконанні завдань за зразком.
III. Достатній	7	Учень правильно, логічно відтворює алгоритм розв'язку задачі, уміє обирати та коректно застосовувати процедури, наводити окремі власні приклади на підтвердження певних думок, застосовує вивчений матеріал у стандартних ситуаціях, частково контролює власні навчальні дії.
	8	Знання учня є достатньо повними, уміє застосовувати числові алгоритми у математиці для ефективного розв'язування задач у стандартних умовах. Відповідь його повна, логічна, обґрунтована, хоч і з деякими неточностями.
	9	Учень досить добре використовувати на практиці алгоритми розв'язання типових задач, уміє аналізувати і систематизувати інформацію, використовує загальновідомі докази у власній аргументації.
IV. Високий	10	Учень вміє переносити задачу практичного характеру на математичну мову, визначити тип задачі та окреслити алгоритм її розв'язання. При цьому він може припускатися незначних огріхів в аргументації думки тощо.
	11	Учень вміє відтворювати контекст задач, що виникають в індивідуальній та соціальній практиці і які зводяться до типових, аргументовано використовує їх у різних ситуаціях, уміє знаходити інформацію та аналізувати її, ставити і розв'язувати проблеми.

Рівні навчальних досягнень	Бали	Загальні критерії оцінювання процедурних компетентностей учнів
	12	Учень легко переносить знання алгоритмів і процедур на практичну діяльність, може використовувати їх у стандартних та нестандартних ситуаціях. Уміє використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язань нетипових задач (підручники, довідники, Інтернет-ресурси), приймати рішення.

Отже, в даній статті ми окресли основні теоретичні відомості стосовно процедурної компетентності висвітлили її структуру, напрями набуття та здійснили спробу сформулювати критерії оцінювання сформованості в учнів процедурної компетентності на уроках алгебри.

Література

1. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / Раков С. А. // Математика в школі. – 2005. – №5. – С. 2-8.

ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Г. І. Скороход
Україна, м. Дніпропетровськ, Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара
gskorokhod@yahoo.com

Нестандартною звемо задачу, метод розв'язання якої є невідомим тому, хто має її розв'язати. Задача ж, метод розв'язання якої йому відомим, є для нього стандартною.

Одним з головних завдань навчання професії є опанування студентом якомога більшою за кількістю системою задач, стандартних для цієї професії. При цьому задачі вже вивчених дисциплін стають стандартними підзадачами, за допомогою яких розв'язуються нові (і тому, поки що, нестандартні для студента) задачі. Акцент робиться на тому, щоб довести вміння розв'язувати стандартні задачі до рівня навичок. Набагато менше уваги приділяється саме методам розв'язання задач, узагальненню методів, аналізу зв'язку метода з типами задач, які він дозволяє вирішувати. Метод – це систематизована ідея, тобто послідовність операцій, котрі треба виконати для одержання розв'язку задачі, або для переходу до розв'язання інших, більш простих задач (можливо, і однієї задачі). Тип задачі ми визначаємо як сукупність особливостей даної задачі, суттєвих для її розв'язання; тип характеризується як об'єктом задачі, так і її вимогою по відношенню до цього об'єкту . При цьому одна сукупність особливостей може бути суттєвою для одного методу, інша – для іншого.

При розв'язанні задачі перш за все треба зробити аналіз її особливостей, визначити тип задачі, і вже за типом підбирати метод розв'язку. Таким чином, при розв'язанні задачі метод є похідною від типу задачі, кожному типу пасує один або кілька методів. З іншої сторони, кожному методу відповідає один або кілька типів задач.

У більшості літератури розглядаються типи задач та методи їх розв'язання. Значно менше досліджень присвячено загальним методам розв'язання задач різних типів, зокрема [1-4]. У цій роботі розглядаємо основні методи та пов'язані з ними типи задач.

Нижче наведений перелік методів розв'язання математичних задач, для частини методів вказані у якомога більш загальному вигляді типи задач, для розв'язання яких застосовується цей метод, та приклади задач з різних розділів математики. Підкреслимо, що багато з наведених методів застосовуються для розв'язання не тільки суто математичних задач, і тому вони мають право на підвищену увагу з боку широкого кола науковців. А викладачам, на наш погляд, доцільно було б після опису конкретного методу розв'язання конкретної задачі подати і тип задачі, і метод в більш загальному вигляді. Це дозволило б паралельно з освоєнням методів розв'язання задач різних дисциплін, опановувати й загальні методи розв'язання задач, а також зв'язки між конкретними методами та загальними [4].

1. **Метод:** зведення розв'язання вихідної нестандартної задачі до розв'язання кількох стандартних задач.

Окремий випадок: коли розв'язання нестандартної задачі зводиться до розв'язання *однієї* стандартної задачі і під час переходу до неї немає проміжних задач.

Приклади цього окремого випадку**:** 1) транспортна задача з дисбалансом зводиться до задачі з правильним балансом; 2) у процесі розв'язанні в квадратурах звичайні диференційні рівняння першого порядку одного типу зводяться до рівнянь іншого типу, і, зрештою, до рівняння з відокремленими змінними, яке є окремим випадком рівняння в повних диференціалах.

2. **Метод:** розбиття умови задачі на частини і створення для кожної з них власної математичної моделі (геометрична фігура чи рівняння), тоді розв'язок вихідної задачі визначається або як перетин таких фігур (метод геометричних місць), або як розв'язок системи таких рівнянь (метод складання системи рівнянь).

Типи задач: один з головних математичних методів розв'язання задач різних типів, як математичних, так і ні [2].

3. **Метод:** перехід до більш загальної задачі [2]: 1) шляхом заміни числового значення параметра буквеним; 2) шляхом відкидання однієї або кількох частин умови вихідної задачі. При цьому розв'язок більш загальної задачі має бути неоднозначним і розв'язок вихідної задачі одержується з нього з врахуванням відкинутих умов.

Приклад: розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь: спочатку відкидаються початкові умови та одержується загальний розв'язок рівняння (тобто замість одного розв'язку одержується нескінчена множина розв'язків), потім із загального розв'язку виділяється частинний розв'язок, який відповідає заданим початковим умовам.

4. **Метод:** перехід до розгляду задачі за граничних значень одного або кількох параметрів з умови задачі та використання результатів аналізу одержаних окремих задач для розв'язання вихідної задачі [2].

5. **Метод:** суперпозиція (лінійна комбінація) окремих розв'язків вихідної задачі для одержання її загального розв'язку [2].

Приклади: 1) суперпозиція окремих розв'язків у задачах планіметрії, інтерполяції; 2) суперпозиція частинних розв'язків звичайних диференційних лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами для одержання загального розв'язку; 3) суперпозиція рухів у теорії лінійних коливань.

6. **Метод:** рекурсія [2].

7. **Метод:** пошук розв'язку у формі з невизначеними елементами (параметрами, функціями).

Приклади: 1) метод Бернуллі та метод варіації довільної сталої для розв'язання звичайних диференційних лінійних неоднорідних рівнянь першого порядку; 2) розвинення функції в ряд; 3) інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів; 4) метод невизначених коефіцієнтів для інтегрування правильних дробів.

8. **Метод:** перебір усіх варіантів. Варіанти, за визначенням, ізольовані один від одного.

9. **Метод** спроб та помилок. Від перебору всіх варіантів відрізняється тим, що множина всіх варіантів заздалегідь не задана і навіть не відома.

Окремий випадок: підбір одного або кількох розв'язків задачі та перехід до задачі знаходження інших розв'язків, або доказ того, що інших немає.

10. **Метод:** спрямований перебір варіантів, за якого кожен крок перебору наближає до шуканого розв'язку.

Приклад: у лінійному програмуванні цілеспрямований перебір використовується у симплекс-методі та методі розв'язання транспортної задачі.

11. **Метод:** покрокове наближення до всього результату.

Приклади: метод половинного поділу, метод дотичних, метод січних для наближеного обчислення ізольованого кореня функції;

12. **Метод:** послідовне обчислення нових компонент багатокомпонентного результату.

Приклади: метод інтегрування частинами; методи цілочислового програмування.

13. **Метод:** звуження області пошуку розв'язку: 1) поділ області пошуку навпіл, коли немає критерію для більшого звуження; 2) інші способи звуження області пошуку.

14. **Метод:** переформулювання задачі – перехід до задачі, яка має той самий розв'язок, але іншу форму представлення:

1) переформулювання тією ж мовою:

приклад: перехід від рівняння до рівносильного; зміна форми представлення окремих елементів задачі ($2=1+1$, $1=a^0$, $1=a:a$, $0=2-2$ тощо);

2) перехід з однієї мови на іншу:

типи задач: 1) для розв'язання нематематичних задач – метод математичного моделювання; 2) для розв'язання математичних задач: перехід від алгебричної мови до геометричної; перехід від геометричної мови до алгебричної.

15. **Метод:** розв'язування від початку до кінця (від умови задачі до її розв'язку).

Типи задач: традиційний шлях розв'язання нематематичних задач методом математичного моделювання: складання системи рівнянь, кожне з яких моделює одну з частин умови задачі й розв'язання цієї системи.

16. **Метод:** розв'язування від кінця до початку [2].

Тип задачі: послідовність операцій, за якої перша операція застосовується до невідомого, а кожна наступна – до результату попередньої операції. Розв'язок одержується в результаті виконання послідовності зворотних операцій, починаючи з результату кінцевої операції і завершуючи шуканими значеннями невідомого.

Приклади: 1) динамічне програмування; 2) рівняння відповідної структури.

Тип задачі: геометричні задачі на побудову (припускаємо, що задача розв'язана, креслимо шукану фігуру і вивчаємо її, намагаючись знайти залежності між її елементами) [2].

17. **Метод:** зближення початку і кінця (тобто умови задачі та її розв'язку) [2].

18. **Метод:** індукція [1]: 1) повна індукція; 2) неповна індукція;

19. **Метод математичної індукції**. Метод індуктивний за формою і дедуктивний за суттю, як і кожен математичний метод доведення.

Тип задачі: довести справедливість нескінченої послідовності тверджень, які відрізняються одне від одного лише значенням натурального параметра.

Хоча тип задачі лише один, але відповідних тверджень багато, тому метод широко застосовується.

20. **Метод:** індуктивний спуск [3].

21. **Метод:** аналогія:

1) подібність.

Приклад: попередня побудова фігури, подібної до шуканої) при розв'язанні геометричних задач на побудову ;

2) споріднена задача як основа для розв'язання вихідної.

Приклади споріднених задач: 1) задача з граничними значеннями деяких параметрів вихідної задачі; 2) допоміжна фігура при розв'язання геометричних задач на побудову; 3) подібна фігура як один з видів спорідненої фігури; 4) задача, в постановці якої змінені одно або кілька умов;

3) ізоморфізм (повна аналогія) [1].

22. **Метод:** контрприклад.

Тип задачі: спростування загального твердження.

23. **Метод:** доказ від супротивного. Дуже широко застосовується для доказу теорем та тверджень.

24. **Метод:** використання симетрії, яку має об'єкт задачі.

25. **Метод:** розгляд найгіршого випадку.

26. **Метод:** розгляд найкращого випадку.

27. **Метод:** інверсія.

28. **Метод:** встановлення відповідності між елементами двох множин.

Тип задачі: підрахунок або оцінка кількості елементів деякої множини.

Метод: принцип Діріхле. Може розглядатися як окремий випадок методу встановлення відповідності між елементами двох множин.

29. **Метод:** знаходження та використання інваріанту послідовності операцій (чи полуінваріанту – величини, яка змінюється тільки в одну сторону, тобто зростає або зменшується [3]). Інваріанти можуть бути як кількісні, так і якісні.

Типи задач: 1) дана послідовність операцій, зокрема, перетворень об'єкту, треба обчислити або оцінити результат цієї послідовності (метод: знайти інваріант послідовності операцій, який допомагає відповісти на запитання задачі); 2) обчислити або оцінити об'єкт (метод: знайти таке перетворення об'єкту, при якому шукана величина є інваріантом та в перетвореному об'єкті вона може бути обчислена).

Приклади інваріантів: парність (непарність), довжина лінії, площина, періодичність (чергування), ознаки подільності, остачі від ділення, розкраска тощо.

30. **Метод**: групування елементів постановки задачі та обробка цих груп. Це може допомогти розв'язати задачу, або звести її до підзадач.

Типи задач: розв'язання рівнянь та нерівностей.

31. **Метод**: організація спеціального пошагового процесу, зупинка якого свідчить про розв'язання задачі [3].

32. **Метод**: підрахунок величини A двома способами. Варіанти: 1) рівняння A_1=A_2 може допомогти у розв'язанні задачі (A_1, A_2 – результати підрахунків); 2) нерівність $A_1 \neq A_2$ приводить до протиріччя; 3) порівняння через третю величину a : коли $A_1 > a$, $A_2 < a$, маємо протиріччя, коли $A_1 \geq a$, $A_2 \leq a$, одержуємо A_1=A_2. Можна трактувати як частин-

ний випадок методу порівняння двох об'єктів через третій.

33. **Метод**: порівняння двох об'єктів через третій. Можна трактувати як узагальнення методу підрахунку величини двома способами.

Приклади: 1) $a=b$, $c=b \rightarrow a=c$; 2) $a||b$, $c||b \rightarrow a||c$;

3) $y=f(x)$, $y=g(x) \rightarrow f(x)=g(x)$.

Операції в операндах можуть бути різними:

4) якщо прямі a та b паралельні одній площині, то вони перпендикулярні між собою;

5) якщо пряма a перпендикулярна площині S, а пряма b паралельна прямій a, то пряма b перпендикулярна площині S.

34. **Метод**: порівняння елементів двох множин через їхній зв'язок з елементами їх спільної частини. Можна трактувати як частинний випадок методу порівняння двох об'єктів через третій.

Приклади: 1) в стереометрії елементи, які лежать у різних площинах, пов'язуються між собою через відрізок, що належить прямій перетину цих площин.

35. **Метод**: зниження вимірності задачі.

Тип задач: задачі, в яких результат не залежить від величини деякого параметра і може бути легко одержаний при меншому (найменшому) значенні цього параметру.

Граничний випадок: перехід від неперервної моделі до дискретної.

36. **Метод**: збільшення вимірності задачі.

Тип задач: задачі, в яких результат не залежить від величини деякого параметра і може бути легко одержаний при більшому (найбільшому) значенні цього параметру.

Граничний випадок: перехід від дискретної моделі до неперервної.

37. **Метод**: введення допоміжного елементу. Допомагає: 1) встановити зв'язки між елементами об'єкту задачі, 2) звести задачу до підзадач.

Приклади: 1) заміна змінної; 2) проведення ліній, площин тощо.

38. **Метод**: дроблення величини та граничний перехід.

Типи задач: інтегральне числення.

39. **Метод**: відщеплення простих випадків [3].

В опис методу треба ввести також поле «результат застосування», в якому вказується, до чого приводить застосування методу. Цим результатом має бути наступний метод і, кінець кінцем, зведення до розв'язання стандартних задач.

Хоча наведений перелік охоплює не всі методи, але можна стверджувати, що кількість методів у загальному формулюванні, які не увійшли до цього переліку, невелика. Складання достатньо повного переліку загальних методів розв'язання задач, типів задач, які розв'язуються кожним з цих методів, прикладів та результатів застосування ще потребує свого вирішення.

Література

1. Пойя, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойя. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1957. – 536 с.

2. Пойя, Д. Математическое открытие / Д. Пойя. – М. : Наука, 1970. – 452 с.

3. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. – Изд. второе, перераб. – М. : МЦНМО, 2001. – 96 с.

4. Скороход Г. І. Методика викладання фахових дисциплін у вищій школі : посіб. для магістрів за спеціальністю «Прикладна математика» / Г. І. Скороход, В. Д. Ламзюк. – Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2009. – 64 с.

МОЖЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ЗАСОБАМИ МОБІЛЬНОГО МАТЕМАТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

К. І. Словак
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
slovak_kat@mail.ru

Навчальна діяльність студентів вищих навчальних закладів передбачає розвиток самостійності, творчого підходу до розв'язування навчальних завдань, уміння самостійно приймати рішення. Таким чином, у вищій школі студенти повинні отримати навички самоосвіти шляхом залучення до активної самостійної навчальної діяльності, основною формою якої є самостійна робота студентів.

Тривалий час проблему самостійної роботи розглядали в рамках процесу навчання в школі. Стосовно навчального процесу у ВНЗ різні аспекти організації й проведення самостійної роботи почали висвітлювати наприкінці 60-х – початку 70-х рр. минулого століття.

Важливу роль самостійної роботи в навчальному процесі науковці усвідомлювали давно. Так, А. Дістервег зазначав: «... науки, знання не слід повідомляти учню, але його потрібно підвести до того, щоб він сам їх знаходив, самостійно ними оволодівав» [1].

Поняття «самостійна робота» є багатогранним, тому цілком природно, що воно не отримало єдиного тлумачення в педагогічній літературі, а дослідники, котрі вивчали проблему самостійної роботи студентів, порізному тлумачать це поняття. Зокрема, самостійну роботу визначають як форму організації, як метод, засіб навчання, різновид навчальної діяльності; розглядають, з одного боку, як вид діяльності, що стимулює активність, самостійність, пізнавальний інтерес, є основою самоосвіти, поштовхом до подальшого підвищення кваліфікації, а з іншого – як систему заходів чи педагогічних умов, що забезпечують керівництво самостійною діяльністю студентів.

Проблемі пошуку шляхів ефективної організації самостійної роботи студентів присвячено багато досліджень як вітчизняних, так і зарубіжних науковців. Відповідно до сучасного стану інформатизації освіти визначальна роль у питанні підтримки та організації самостійної роботи студентів відводиться інформаційно-комунікаційним технологіям (ІКТ). Свідченням даного факту є результати досліджень В. Ю. Бикова, Н. В. Морзе, С. О. Семерікова, М. А. Умрик, Н. В. Буркіної та інших науковців.

Інноваційним засобом ІКТ навчання математичних дисциплін, що надає можливість різнопланової організації самостійної роботи студентів з математики є *мобільні математичні середовища* (ММС). Докладна характеристика основних складових та структури ММС подана в роботах [2; 3].

Розглянемо детальніше засоби мобільного математичного середовища «Вища математика», розроблені для підтримки самостійної роботи студентів з вищої математики [4].

Індивідуальні домашні завдання до кожного змістового модуля (рис. 1), у вигляді робочих аркушів ММС. Вони включають приклади розв’язання типових завдань за темою модуля та задач для самостійного опрацювання трьох рівнів: для відпрацювання навичок «ручного» розв’язування; комп’ютерно-орієнтовані задачі, витрати часу на «ручне» розв’язання яких перевищують час на створення та дослідження моделі (зокрема, задачі з економічним змістом); дослідницькі завдання. Слід зазначити, що завдання першого рівня повністю аналогічні до завдань, що розглядаються на практичних заняттях. Це спонукає студентів до більш продуктивної праці в аудиторії та усвідомленого засвоєння знань.

Приклади розв’язування завдань з кожного модуля в традиційному вигляді та за допомогою ММС (рис. 2). Особливості компонування завдань, детальні пояснення кожного кроку розв’язання та застосування засобів ІКТ сприяє активізації самостійної роботи студентів.

Якість формування навичок розв’язування навчальних завдань безпосередньо пов’язана з якісною, детальною перевіркою домашньої роботи студентів, що потребує додаткових витрат часу на практичних заняттях. Більшість викладачів, контролюючи виконання домашніх завдань, перевіряє лише правильність відповіді і якщо в аудиторії знайдеться хоча б 2–3 студенти, які отримали правильні відповіді, то покрокову перевірку, здебільшого, не виконують. Проте, для ефективної самостійної роботи у студента повинна бути можливість не тільки перевірити кінцевий результат будь-яких обчислень, а і кожен крок виконання завдання. Крім того, процес засвоєння знань та вмінь є індивідуальним для кожного студента. Одному для формування певних практичних навичок достатньо лише прикладів, розв’язаних викладачем на лекційному занятті, іншому потрібно розв’язати досить велику кількість навчальних завдань самостійно з можливістю здійснення детальної перевірки. Для реалізації цього були розроблені *програми-тренажери,* з покроковою деталізацією етапів розв’язання математичної задачі, що надають можливість студентам здійснити детальну перевірку кожного кроку виконання завдання.

slovak_kat | Показать/скрыть | Главная | Опубликованное | Журнал | Настройки | Справка | Сообщить о проблеме | Выход

MMC

Мобільне математичне середовище SAGE

Блокнот
Версия 4.7.1.rc1

M_6_ІДЗ_24

последние изменения внесены January 26, 2012 11:57 AM пользователем slovak_kat

Сохранить | Сохранить и выйти | Выйти без сохранения

Файл... | Действие | Данные... | sage | Typeset

Печать | Рабочий лист | Редактировать | Текст | История работы | Совместная работа | Опубликовать

M_6_ІДЗ_24

Індивідуальне домашнє завдання до модуля №6

Тема: "Інтегральне числення функції однієї змінної"

Приклади розв'язування та вказівки

Знайти невизначені інтеграли . В завданнях П1-П4 результати інтегрування перевірити диференціюванням в **Sage**.

П1

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$$

Розв'язання:

Поділивши чисельник підінтегралбної функції на знаменник та використавши другу та третю властивості інтегрування, а такоє таблицю основних невизначених інтегралів отримаємо

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-\frac{1}{4}}dx - 2\int x^{\frac{15}{4}}dx + \int x^{\frac{5}{12}}dx = 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{8}{19}x^{\frac{19}{4}} + \frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + C$$

Sage

```
diff(4*x^(3/4)-(8/19)*x^(19/4)+(12/17)*x^(17/12),x)
```

$$-2\,x^{\left(\frac{15}{4}\right)} + x^{\left(\frac{5}{12}\right)} + 3\,\frac{1}{x^{\left(\frac{1}{4}\right)}}$$

....

Завдання для самостійної роботи

....

П25

Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$ 2) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$

....

Рис. 1

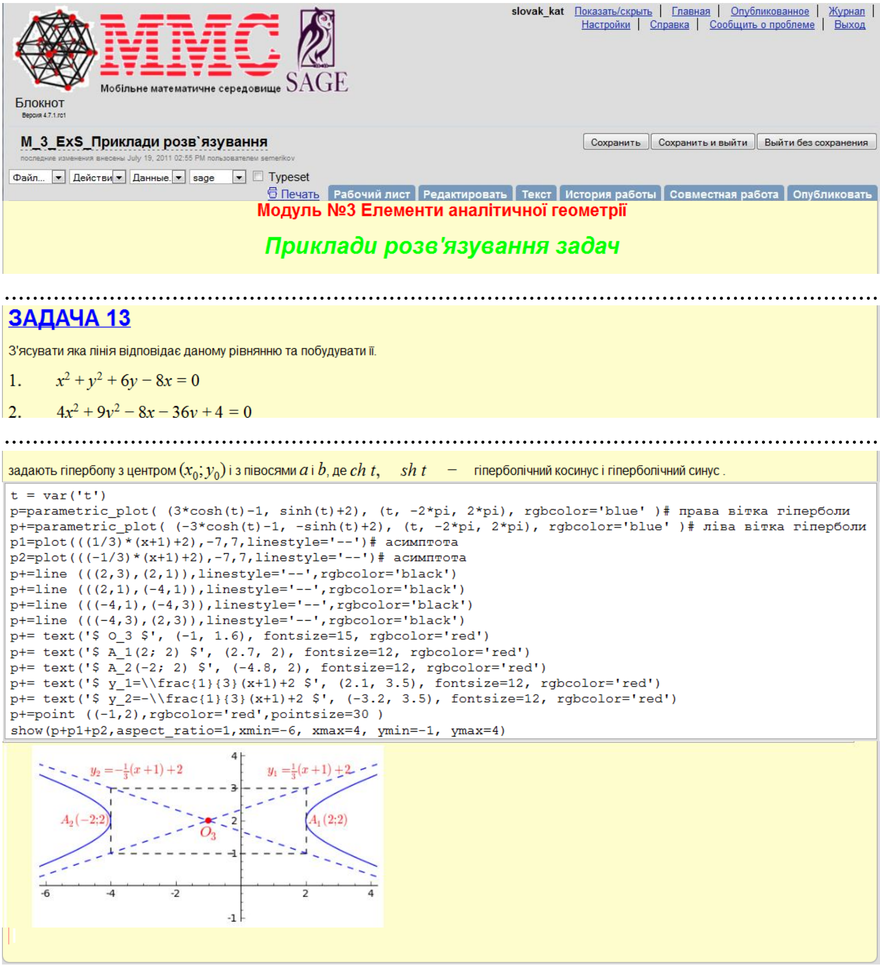


Рис. 2

Так, під час вивчення теми «Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса» (однієї з найскладніших тем модуля «Елементи лінійної алгебри») студентам пропонується скористатися тренажером, інтерфейс якого зображений на рис. 3. Наприклад, потрібно розв’язати наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ -7x_1 - 8x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Система лінійних рівнянь [[3, 2, 3, 11], [1, 4, 5, 13], [-7, -8, -1, 5]]

Розширена матриця: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 13 \\ -7 & -8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Коефіцієнти розширеної матриці запишемо в наступну розрахункову таблицю:

3	2	3	11
1	4	5	13
-7	-8	-1	5

....

Додати попередньо домножений на число -1, рядок 1 до рядка 2

1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
0	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{28}{3}$
-7	-8	-1	5

Рядок 2, поділити на число $\frac{10}{3}$

1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
0	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{14}{5}$
-7	-8	-1	5

....

1	0	0	1
0	1	0	-2
0	0	1	4

Рис. 3 Інтерфейс тренажера з теми «Метод Жордана-Гаусса»

Для цього в поле «Система лінійних рівнянь» потрібно через кому ввести коефіцієнти розширеної матриці системи, згруповані по рядках, у квадратних дужках.

При роботі з цією програмою-тренажером у студентів з'являється можливість: перевірити кінцевий результат обчислень, порівняти розв'язувальні таблиці, отримати рекомендацію щодо виконання необхідних дій над рядками тощо.

Таким чином, застосування програм-тренажерів у самостійній навчальній діяльності студентів надає можливість відстежити та перевірити кожен крок розв'язання навчального завдання, порівняти результати, отримані програмою та самим студентом, а також враховувати психолого-педагогічні особливості студентів, забезпечуючи тим самим диференціацію та індивідуалізацію процесу навчання.

Навчальні експертні системи (НЕС), що надають викладачеві можливість організувати автоматизований контроль та корекцію результатів навчальної діяльності студентів, проводити тренування та підготовку до модульного чи підсумкового контролю.

Навчальну діяльність студентів при роботі з експертними системами можна поділити на два види. Перший вид діяльності полягає у використанні готових проблемно-орієнтованих експертних систем як інформаційно-довідкових систем, у яких зберігаються знання про предметну галузь. Так, наприклад, під час виконання індивідуального домашнього завдання за змістовим модулем «Диференціальні рівняння» студентам пропонується використати Web-НЕС «Визначення типу диференціального рівняння» (рис. 4).

Розроблена експертна система надає можливість:

– визначити тип диференціального рівняння (якщо рівняння не є диференціальним, то з'являється відповідне повідомлення);

– повторити процедуру визначення типу рівняння з початку (у разі помилкового вибору відповіді) за допомогою кнопки «До початку»;

– продемонструвати правило, за яким було зроблено висновок, а також відповіді, що їх увів студент на поставлені питання за допомогою кнопки «Пояснити?»;

– показати, яке правило на даний момент випробовується та яку відповідь потрібно ввести, щоб визначення типу рівняння здійснювалося саме за цим правилом, за допомогою кнопки «Чому питаємо?».

Другий вид діяльності передбачає заповнення знаннями власної експертної системи за обраною темою курсу вищої математики. При цьому студенту доводиться активно користуватися необхідною літературою – довідниками, підручниками, енциклопедіями, звертатися до баз знань з допомогою мереж зв'язку тощо.

Рис. 4. Інтерфейс Web-НЕС з теми «Диференціальні рівняння»

Під час заповнення власної таблиці для генерації експертної системи студент користується правилами логіки висловлень та своїми знаннями теоретичного матеріалу. Слід зазначити, що завдання такого типу вимагають від студентів умінь: аналізувати матеріал, що вивчається, порівнювати, вибирати спільні якості понять, перелічувати загальні властивості, визначати обсяг понять, структурувати навчальний матеріал, узагальнювати, систематизувати тощо. Застосування у навчанні вищої математики таких видів завдань надає можливість для ґрунтовної підготовки студентів до модульного чи підсумкового контролю.

Навчально-консультативний форум, що надає можливість для спілкування всім користувачам різних інсталяцій ММС «Вища математика», дистанційного консультування, а також обміну досвідом розв'язування задач засобами ММС (рис. 5). Використання навчально-консультативного форуму при організації самостійної роботи студентів дозволяє реалізувати рефлексивний контроль у вигляді діалогу між студентами і викладачем, при цьому студенти почувають себе розкутіше перед викладачем (оскільки фізично учасники діалогу знаходяться в різних місцях), що сприяє подоланню психологічного бар'єру побоювання викладача та надає можливість забезпечити індивідуалізацію навчання на високому рівні.

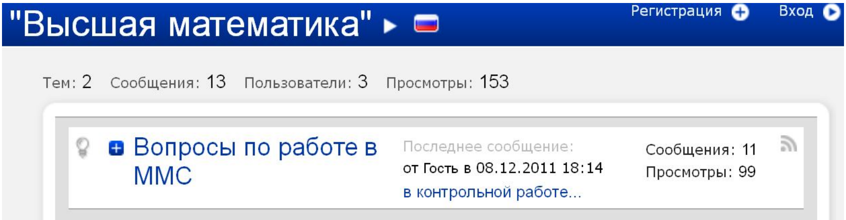


Рис. 5. Навчально-консультативний форум ММС «Вища математика»

Таким чином, організація самостійної роботи з використанням ММС «Вища математика» надає можливість організувати зворотній зв'язок між користувачами ММС та впливає на: розвиток пізнавальної активності (комп'ютерні моделі; практичні завдання, зокрема задачі з економічним змістом; лекційні матеріали); формування навичок самостійної роботи (тренажери, НЕС); узагальнення та систематизацію знань (НЕС, задачі з економічним змістом, комп'ютерні моделі).

Література

1. Дистервег А. Руководство к образованию немецких учителей [Элек-тронный ресурс] / Дистервег Адольф. – Режим доступа : http://jorigami.narod.ru/PP_corner/Classics/Diesterweg/Diesterweg_Rukov_k_obraz_nem_uchitel.htm
1. Семеріков С. О. Теорія та методика застосування мобільних математичних середовищ у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей [Електронний ресурс] / Семеріков Сергій Олексійович, Словак Катерина Іванівна // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2011. – №1(21). – Режим доступу до журналу : http://journal.iitta.gov.ua
2. Словак К. І. Мобільне математичне середовище як новий засіб підвищення ефективності навчальної діяльності студентів з вищої математики / К. І. Словак // Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах : зб. наук. праць за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції молодих науковців, 17–18 лютого 2011 р. – Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний ун-т, 2011. – С. 73–76.
3. Мобільне математичне середовище «Вища математика» [Електронний ресурс] / [К. І. Словак]. – 2011. – Режим доступу : http://korpus21.dyndns.org:8000/

МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА СТУДЕНТОВ ФИЗМАТА ПО ПРОБЛЕМЕ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

Е. Л. Старовойтова
Беларусь, г. Могилев, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
stelle@tut.by

Одной из характерных особенностей развития человеческой культуры в 21 веке является широкое проникновение математической мысли в самые различные сферы интеллектуальной деятельности. Особая роль при этом отводится современной школе, призванной сформировать математические знания и подготовить учащихся к применению этих знаний в практической деятельности. Это означает, что содержание курса математики и его направленность на профессиональную деятельность является залогом успешного разрешения призвания ученика, что, в свою очередь, является важным фактором ориентации на будущую специальность. Все это актуализирует проблему прикладной направленности обучения математике, которая нашла свое отражение во многих научных исследованиях (В. А. Далингер, Г. В. Дорофеев, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Н. А. Терешин, В. В. Фирсов, И. М. Шапиро, Е. Н. Эрентраут и др.). Авторы выявляют педагогическую сущность прикладной направленности школьного курса математики, рассматривают отдельные методические вопросы данной проблемы и на конкретном материале показывают пути их осуществления.

Разработка проблемы прикладной направленности обучения в педагогической и методической науке, прежде всего, направлена на разрешение таких задач, как создание оптимальных условий образования, воспитания и развития учащихся, выявление резервов преимущества предметной структуры обучения; формирование прочных систематизированных знаний основ наук. Для взаимного укрепления основ наук, изучаемых в школе, важно использовать один учебный предмет в качестве инструмента для решения вопросов и задач в другом учебном предмете, охватывать взаимосвязи в современной предметной структуре, углубленно и разносторонне раскрывать отдельные звенья.

Богатым арсеналом эффективных средств, необходимых для разрешения данной проблемы, является решение прикладных задач. Особую значимость приобретают прикладные задачи, построенные на межпредметной основе. Реальный процесс обучения математике показывает, что в практике обучения широко применяются занятия межпредметного содержания: интегрированные уроки, интегрированные факультативные курсы, но эти формы обучения, построенные на основе системы межпредметных задач, практически отсутствуют. Нами исследуются межпредметные задачи с биологическим содержанием, реализующие свой ориентационный потенциал в условиях прикладной направленности обучения математике в школе.

Проведенный нами анализ научной и методической литературы по проблеме прикладной направленности обучения позволяет говорить о том, что методика использования системы межпредметных задач, в том числе, и с биологическим содержанием, ориентированной на реализацию прикладной направленности обучения математике, к настоящему времени не разработана. Имеет место противоречие между высоким уровнем прикладной направленности обучения математике и использованием целостной системы межпредметных задач с биологическим содержанием для ее реализации в процессе межпредметной урочной и внеклассной работы в школе.

Прикладная направленность обучения математике в школе определяет общую стратегию содержания и курса методики преподавания математики в вузе. Нами предлагается модель совершенствования методической подготовки студентов физико-математического факультета по проблеме реализации ориентационного потенциала межпредметных задач для осуществления прикладной направленности обучения математике учащихся 7-9 классов, рассматриваемой в контексте их профессиональной подготовки.

Современная педагогическая и методическая наука все чаще обращается к идеям педагогического моделирования, наиболее выразительным проявлением которого является разработка общей идеи создания педагогических систем, процессов и ситуаций и основных путей их использования. Познание интересующих нас качеств объекта через модели осуществляется посредством моделирования. Оно позволяет целостно изучить процесс до его осуществления, увидеть не только элементы, но и связи между ними, рассмотреть ситуацию с разных сторон.

При разработке модели методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в школе мы: *во-первых*, исходили из целей и задач современного математического образования в 7-9 классах и учитывали цели, задачи и особенности школьного этапа профориентационной работы, конкретизируя их применительно к решению проблемы ориентации учащихся 7-9 классов на выбор направления обучения средствами предмета «математика»; *во-вторых*, основывались на личностном и деятельностном подходах, теории развития познавательного интереса и ассоциативной теории умственной деятельности, использовали ряд дидактических принципов, обеспечивающих отбор содержания обучения и организацию процесса обучения; опирались на психолого-педагогические и возрастные особенности учащихся подросткового возраста; *в-третьих*, учитывали требования, предъявляемые к содержанию межпредметных задач, учитывали роль задач в обучении математике и методические основы обучения учащихся их решению.

Разработанная нами модель методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в 7-9 классах обосновывается целью, задачами, принципами и функциями этой модели, отражает дидактическое обеспечение и организацию деятельности учителя и учащихся на разных этапах обучения решению межпредметных задач, результат обучения. Использование предлагаемой модели методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в 7-9 классах предполагает учет критериев, показателей и уровней сформированности ориентаций учащихся на выбор химико-биологического направления обучения в старших (10-11) классах лицеев и гимназий.

Целевой компонент модели включает в себя следующие взаимосвязанные и взаимно дополняемые цели: 1) способствовать осознанному выбору учащимися 7-9 классов химико-биологического направления обучения средствами учебного предмета «математика» через решение межпредметных задач на уроках математики и во внеурочной деятельности; 2) формировать математические знания и умения при решении межпредметных задач (образовательная цель); 3) развивать мышление, стимулировать мотивацию и интерес учащихся к математике (развивающая цель); формировать представления о связи математики с другими предметными областями, показывать значимость математических знаний и их востребованность в различных сферах человеческой деятельности, формировать умения самостоятельно приобретать знания и грамотно ими распоряжаться (воспитательная цель).

В соответствии с указанной целью исследования сформулированы следующие задачи: 1) создать положительную мотивацию у учащихся 7-9 классов к выбору химико-биологического направления обучения; 2) разработать дидактическое обеспечение для ориентации учащихся 7-9 классов на выбор химико-биологического направления обучения, основой которого являются межпредметные задачи, реализующие свой ориентационный потенциал на стандартных и интегрированных (с химией и биологией) уроках математики, через содержание межпредметной внеклассной работы «Математика в организме человека» (с мультимедийной поддержкой); 3) выявить и реализовать формы и методы учебной и внеучебной деятельности, способствующие ориентации учащихся 7-9 классов на выбор химико-биологического направления обучения; 4) обеспечить направленность методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач на виды деятельности химико-биологического направления обучения, наиболее востребованных в Республике Беларусь и в Могилевском регионе, в частности.

Содержание данной модели методики базируется на основополагающих принципах – гуманизации, вариативности, индивидуализации и дифференциации, связи теории с практикой, профессиональной направленности, межпредметных связей, наглядности, доступности, активности, профильной направленности, преемственности и непрерывности. Суть этих принципов раскрыта в педагогике и методике обучения математике, их содержание конкретизировано нами применительно к проблеме исследования.

Модель методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в 7-9 классах реализует следующие функции: 1) диагностическую, которая предполагает выявление образовательных запросов обучающихся, изучение их индивидуально-психологических особенностей, мониторинга эффективности применяемого содержания межпредметного характера, методов, средств и форм ориентационной работы и фиксации уровня сформированности ориентаций учащихся; 2) обучающую, которая заключается в формировании у обучающихся комплексных знаний, умений и навыков по математике, химии и биологии с целью их применения в деятельности, максимально приближенной к профессиональной; 3) стимулирующе-мотивационную, которая обеспечивает формирование ориентаций учащихся на химико-биологическое направление обучения, стимулирование познавательного интереса и положительной мотивации школьников к изучению математики и процессу познания в целом; 4) воспитывающую и развивающую, которая предполагают создание условий для формирования у обучающихся адекватной самооценки, ответственности за свои поступки, устремленности, волевого саморегулирования и других социально ценностных способностей и черт характера.

Содержание представленной модели методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике учащихся 7-9 классов раскрывается в математическом материале межпредметного характера через комплекс межпредметных задач. По содержанию межпредметные задачи, входящие в комплекс, отражают специфику основных предметов химико-биологического направления обучения – химию и биологию, и показывают возможность применения математических знаний в различных регионально значимых областях профессиональной деятельности в рамках указанного направления.

На практическом уровне ориентационный потенциал межпредметных задач раскрывается в процессе применения межпредметных связей через создание и разрешение личностных профессионально значимых для учащихся ситуаций, что необходимо требует применения соответствующих форм организации учебной и внеучебной деятельности при обучении математике. Поэтому реализация ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях предлагаемой модели осуществляется по двум направлениям: включение учащихся в личностно значимую для них ситуацию посредством содержания межпредметных задач и их решения на уроках математики и использование таких задач как основного элемента содержания различных видов межпредметной внеурочной деятельности.

Применение модели методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в 7-9 классах осуществляется с помощью комплекса межпредметных задач, решаемых на стандартных уроках математики, интегрированных уроках математики с химией (биологией); межпредметной внеклассной работе «Математика в организме человека». Указанное дидактическое обеспечение для формирования ориентаций учащихся 7-9 классов на выбор химико-биологического направления обучения носит ориентационный характер и имеет мультимедийное сопровождение.

Организовать работу по подготовке будущих учителей к применению предлагаемой нами модели методики реализации ориентационного потенциала межпредметных задач в условиях прикладной направленности обучения математике в 7-9 классах мы предлагаем в курсе методики преподавания математики следующим образом: III курс (*V* семестр) – теоретическая подготовка студентов по исследуемой проблеме: рассмотрение вопросов прикладной направленности обучения математике в школе при конкретизации вопросов общей методики преподавания математики; Ш курс (*VI* семестр) – теоретическая подготовка студентов: обзор литературы по основным направлениям реализации прикладной направленности школьного курса математики и обучения математике; практическая подготовка: написание рефератов по указанной проблеме и составление плана индивидуальных творческих проектов, определение заданий; IV курс (*VII* семестр) – выполнение творческих индивидуальных заданий по проблеме использования задач при обучении математике и при проведении профориентационной работы с учащимися в ходе практических занятий по методике преподавания математики, лабораторных занятий в школе, на занятиях учебно-исследовательских групп; IV курс (*VIII* семестр) – выполнение заданий по проблеме использования межпредметных связей в процессе обучения математике в школе в ходе занятий учебно-исследовательского практикума по методике преподавания математики, педагогической практики, на занятиях учебно-исследовательских групп, при написании курсовых работ. Выполнение творческих проектов по теме «Математика в профессиях»; V курс (*IX* семестр) – выполнение заданий по использованию межпредметных задач как средства ориентации учащихся 7-9 классов на выбор направления обучения при проведении экспериментальной работы во время педпрактики; на занятиях учебно-исследовательских групп, при подготовке дипломных работ; V курс (*X* семестр) – написание и защита дипломных работ по проблеме реализации ориентационной составляющей прикладной направленности преподавания математики в 7-9 классах. Выполнение всех заданий предполагает посещение уроков в школе, работу с учениками и учителями, предварительное обсуждение заданий на занятиях, отчет о выполненных заданиях на последующих занятиях.

Мы решаем поставленную проблему не изолированно от других проблем методической подготовки студентов, а включаем отдельные задания составным элементом каждой изучаемой темы. Анализ психолого-педагогической и методической литературы по указанной проблеме и собранные в ходе исследования материалы дали возможность подготовить для студентов физико-математического факультета ряд методических пособий, рекомендаций и указаний, в которых содержится как теоретический, так и практический материал выделенной проблемы и задания, способствующие выработке у студентов физико-математического факультета необходимых навыков проведения подобной работы в школе. Проводимая нами работа позволяет отразить возможности современной математики как науки с широчайшей областью практических применений. Совершенствование процесса обучения этой учебной дисциплине в школе требует изыскания новых средств и времени для того, чтобы показать школьнику разнообразие изучаемой теории. Подготовка будущего учителя в процессе изучения курса методики преподавания математики позволяет отразить один из аспектов проблемы осуществления прикладной направленности обучения – реализацию ориентационного потенциала межпредметных задач с биологическим содержанием.

ПЕДАГОГІЧНА ТЕХНОЛОГІЯ ВИКЛАДАННЯ ТА ВИВЧЕННЯ СИСТЕМНОЇ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ЯК ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Д. І. Ткач
Україна, м. Дніпропетровськ, Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
tkachdi@gmail.com

Постановка завдання. Довести до педагогічного загалу кафедр геометро-графічних дисциплін вищих навчальних закладів взагалі, а архітектурно-художніх зокрема, простоту і природність системного розуміння сенсу оборотних зображень, які витікають з системного розуміння природи як існуючих, так і уявних об'єктів, що зображуються, а також запропонувати зміст педагогічної технології викладання та вивчення системної нарисної геометрії як фундаментальної науки [1].

Така постановка завдання витікає з усвідомлення стану геометро-графічної грамотності випускників середніх шкіл, які не вивчали креслення, а евклідову геометрію вивчали як науку, яка досліджує переважно метричні, а не позиційні властивості геометричних об'єктів. При цьому елементарна геометрія, яка потенційно є системною, не визначає свої об'єкти як системи точок і ліній, взаємопов'язаних зв'язками та відносинами, які Евклід описав у 5 групах своїх аксіом, про що учні також не мають уяви. Серед шкільних природничих наук тільки дисципліна «Природознавство» тлумачить навколишнє природне середовище як складну систему взаємопов'язаних об'єктів, процесів і явищ природного і штучного походження. Однак ця думка не підкріплюється при викладанні фізики і хімії і в результаті випускники шкіл не мають світоглядних уявлень про системність всього сущого, про те, що не існує нічого найпростішого, що все має складові частини, які інтегруються в єдине ціле завдяки природним зв'язкам та відносинам у природних об'єктах і штучним зв'язкам у штучних об'єктів. А такі уявлення є необхідною умовою для початку плинності думки про те, з яких елементів складається об'єкт дослідження, як вони взаємопов'язані між собою і чому він функціонує так, а не інакше. Таке спрямування мислення є початком формування його конструктивно-композиційного, тобто професійного складу, без якого неможлива плідна діяльність фахівця зі створення будь-яких штучних систем.

У зв'язку з цим у викладачів геометро-графічних дисциплін виникає складна педагогічна проблема: як надати першокурсникам, які не мають відповідної довузівської підготовки, необхідних знань з теорії оборотних зображень і практичних умінь грамотного виконання навчальних креслень? Адже треба спочатку відновити на вузівському рівні їх уяву про позиційні і метричні властивості геометричних об'єктів і сформувати його системне розуміння, а тільки потім починати описувати ті зображальні властивості його оборотного зображення, які містять однозначну інформацію про ці властивості. Перша частина цієї послідовності засвоєння – це шкільна пропедевтика, а друга – вузівська педагогіка. Але перша частина у діючої програмі дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка» для студентів технічних спеціальностей ВНЗ України [2] (при підготовці бакалаврів) взагалі не позначена для викладання і засвоєння, а друга починається з безпосереднього викладання матеріалу традиційної нарисної геометрії, яка у «Програмі..» позначається як «одна з *фундаментальних* загальнотехнічних дисциплін, покладених в основу інженерної освіти» [2, 6], а у підручнику [3], написаному у відповідності з цією програмою, вона позначається як «розділ геометрії, в якому просторові фігури (оригінали) вивчають за допомогою зображень їхніх графічних моделей на площині рисунка» [3, 6]. З точки зору здорового глузду це визначення незрозуміле тому, що неможливо зобразити будь-яку «просторову фігуру» без розуміння її структури і знання тих її геометричних властивостей, які підлягають геометро-графічному моделюванню у вигляді зображення, по якому нібито слід вивчати зображені фігури. Адже зображення мають штучне походження як інтелектуальні інформаційні продукти, які кодують точками і лініями ту позиційну і метричну інформацію о відповідних властивостях «просторових фігур», що описуються евклідовою геометрією і тому відомі авторам цих зображень. Таким чином, первинним є об'єкт, а вторинним – його оборотне зображення, а не навпаки. Якщо об'єкт існує, то його геометричні властивості можна дослідити безпосередньо і графічно закодувати інформацію про них, а якщо об'єкт не існує, але повинен існувати, то в якості «натури» для зображення треба людині зуміти у своєї свідомості сформувати його «думкообраз» як геометричну модель, яка графічно моделюється у вигляді того чи іншого оборотного зображення.

У наведеному визначенні мова йде про те, що нарисна геометрія є «розділом геометрії», але не йдеться якої з них. Адже будь-яка геометрія є наукою про геометричні властивості певного простору через аксіоматичний опис відповідних властивостей однорідних об'єктів, що є елементами цього простору. До числа таких властивостей відносяться особливості розташування об'єктів як у просторі, так і між собою, їх метричні характеристики, а також особливості їх геометричної форми як результату відповідної матеріалізації структури цього простору.

Наприклад, евклідова геометрія описує позиційні і метричні властивості дійсної форми об'єктів реального простору через аксіоматичний опис відповідних властивостей ідеальної форми думкообразів як їх геометричних моделей, а нарисна, яка зображує евклідову, повинна аксіоматично описувати відповідні зображальні властивості проекційних рисунків як умовних форм реального або уявного об'єкта, локалізованих у картинному просторі. Однак традиційна нарисна геометрія, яка викладається у всіх технічних ВНЗ, не містить своєї аксіоматики, що є парадоксальним, адже тому, що вона «зображує» евклідову, то потенційно її містить як своєрідну зображально-логічну модель. Ця модель знаходить свою реалізацію у запропонований концепції системної нарисної геометрії [1], яка не є розділом евклідової або будь-якої іншої геометрії тому, що вона є геометрією того картинного простору, елементами якого є конкретні проекційні зображення.

Звідсіля витікає, що системна нарисна геометрія є самостійною фундаментальною синтетичної наукою, яка аксіоматично досліджує зображальні властивості різних видів проекційних зображень, що одержуються відповідними апаратами проекціювання і містять однозначну інформацію про позиційні та метричні властивості дійсної форми об'єктів, які зображуються з метою її практичного застосування у різних галузях науки, техніки і мистецтва.

Ця обставина актуалізує важливість системної концепції теорії оборотних зображень тому, що вона логічна і природна, а її впровадження у навчальний процес спроможне зняти у студентів синдром нерозуміння і підвищити рівень їх геометро-графічної грамотності впритул до креативного.

У зв'язку з цим пропонується наступна *концепція* педагогічної технології викладання та вивчення системної нарисної геометрії як фундаментальної навчальної дисципліни на основі досвіту її впровадження у навчальний процес по її навчанню студентів архітектурних і дизайнерських спеціальностей.

Мета концепції: На основі розробленої педагогічної системи (рис. 1) прийомів і методів цілеспрямованого впливу на студентську аудиторію створити сприятливі умови для розвитку професійного конструктивно-композиційного мислення на ґрунті системного розуміння теорії оборотних зображень і придбання необхідних навичок і умінь їх практичного створення.

Педагогічно-виховні принципи:

1. Студент поступає у вищій навчальний заклад навчати*ся*, тобто, *навчати себе* у режимі самоосвіти за допомогою викладачів, книжок и всіх тих сприятливих умов, які для цього надає йому ВНЗ.

2. Поняття «успішність» студенту слід розуміти як важливу рису характеру, яка дозволяє йому *встигати* робити справу у час, що відведений для неї.

3. Думка повинна бути плинною, струмковою, тексти від запитань до відповідей поки не досягне результату як краплі річки знань, що впадає у море його інтелекту.

4. Подібно до того, як слова є вербальними моделями думок, так зображення є графічними моделями думкообразів. Течія імагінативної (уявної) думки викликає рух руки з пером, яка створює зображення.

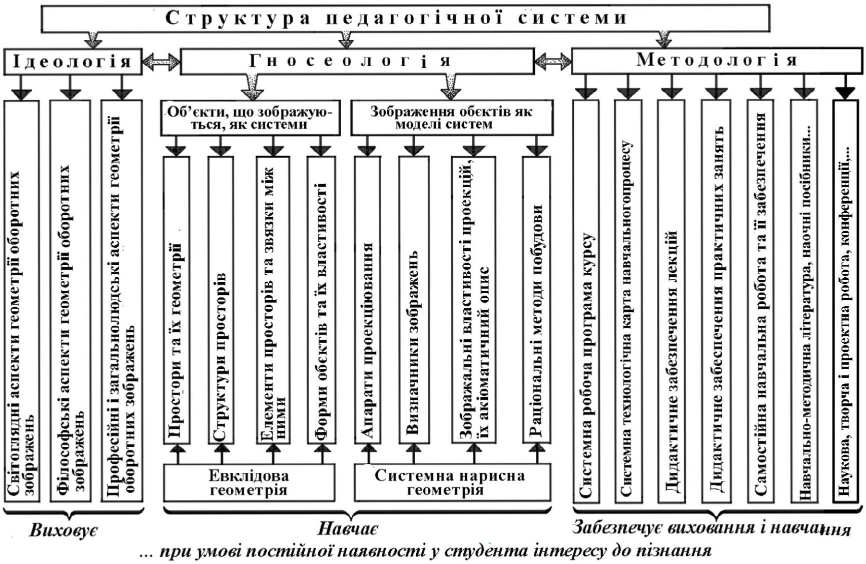


Рис. 1

Сумлінне засвоєння студентами цих педагогіко-виховних принципів на рівні психологічної установки сприяє якісному перетворенню їх образу мислення від обивательського до творчого.

Перший принцип знімає синдром утриманства і спрямовує студента до самоспостереження і самопізнання, які розкривають в ньому нові здібності і пробуджують пізнавальний інтерес до предмету дослідження.

Другий принцип відпрацьовує спроможність студента встигати робити необхідні справи у відведений для цього час, що є невід'ємною рисою ділової людини.

Третій принцип (за відсутністю викладання логіки у школі) виховує у студента спроможність аналізувати умову завдання чи ситуації, робити логічні висновки з цього аналізу і одержувати необхідні результати.

Четвертий принцип відпрацьовує у студента спроможність до експериментуванню у думках з поняттями про елементи евклідового простору і зв'язки між ними, в наслідок чого у свідомості виникає думкообраз, інформація про позиційні і метричні властивості якого безпосередньо кодуються відповідною графічною конструкцією на папері у вигляді оборотного зображення.

Природне незадоволення кризовим становищем в вищий освіті взагалі, а у геометро-графічній окремо спрямувало думку на створення педагогічної системи, яка пропонується (див. рис. 1). Її створення почалося з усвідомлення філософської істини про загальний взаємозв'язок всіх явищ, об'єктів і процесів у світі, про системний устрій всього сущого незалежно від його походження. Тому процес одержання зображення як штучної знакової системи є неможливим без попереднього інформаційного супроводу про природу об'єкту, що зображується, про психологічні особливості його сприйняття і про об'єктивне знання його структури.

Зміст цього супроводу має світоглядну спрямованість і розподіляється між предметною ідеологією і гносеологією у складі педагогічної системи. Він не має безпосереднього відношення до системної нарисної геометрії, але є необхідною преамбулою до її розуміння і засвоєння тому, що виступає як своєрідна компенсація недоодержаної у середній школі інформації, тому підлягає переважно самостійному засвоєнню студентами.

Ідеологічна підсистема скрадається з наступних розділів:

1. *Світоглядні аспекти геометрії оборотних зображень*. Все, що сприймається зорове чи в думках і потенційно може бути зображеним, існує об'єктивно і незалежно від свідомості людини, завдяки сонячної енергії. Поділяється на природне і штучне. Існує у просторі і часі, є просторовою системою, має зміст, дійсну форму і функцію.

2. *Філософські аспекти геометрії оборотних зображень.* Розвиток людської цивілізації зобов'язаний по великому рахунку зображальній діяльності людини тому, що все штучне, як матеріальне, так і духовне, зроблено людиною з матеріалу природи по їх зображенням, що містять однозначну інформацію про позиційні і метричні властивості їх дійсної форми. Зображення це інтелектуальний продукт, рівень досконалості якого визначає рівень інтелекту його автора.

3. *Професійні і загальнолюдські аспекти теорії оборотних зображень.* Людська спільнота по професійній спрямованості поділяється на тих, хто зображує те, чого немає, але повинно бути, і тих, хто по цим зображенням створює у просторі те, що зображено. Від перших залежить якість цього зображення, від других – якість реалізації у просторі зображеного об'єкта. А рівень цієї якості залежить від рівня культури їх виконавчої майстерності.

Гносеологічна підсистема складається з двох розділів**.** Перший присвячений евклідовому розумінню об'єкта як системи, другий – розумінню його зображення як системи.

1. *Простори та їх геометрії.* Геометрія є наукою про геометричні властивості того чи іншого простору через аксіоматичний опис його однорідних елементів. *Реальний* фізичний простір є предметом дослідження різних наук і в локальних масштабах описується *геометрією Евкліда*, а у глобальних – *геометрією М. І. Лобачевського*. Враховуючи його існування у часі, А. Ейнштейн і Б. Міньковський визначили його як 4-хвимірний *«простір подій».* Останні дослідження реального простору через пізнання його елементів прийшли до висновку про його фрактальну природу, які описується *фрактальною геометрією Б. Мандельброта.*

Чуттєве сприйняття об'єктів реального світу створює у свідомості людини *перцептуальний простір*, у якому локалізовані чуттєві образи об'єктів навколишнього світу (зорові, слухові, тактильні, смакові тощо).

Результати осмислення чуттєвих вражень і образів формують у свідомості людини *концептуальний простір* знань.

Результати графічного моделювання результатів чуттєвого сприйняття і пізнання реальних чи уявних об'єктів локалізуються у *картинному просторі*, який описується *системною нарисною геометрією*.

2. *Структури просторів.* Кожний простір як система має свою структуру як сталу сукупність зв'язків та відношень між його елементами, яка інтегрує їх у єдине ціле.

Реальний простір має реальну структуру взаємосполучень і взаємодій між його реальними елементами.

Перцептуальний простір має структуру взаємосполучених чуттєвих вражень і образів.

Концептуальний простір має евклідову структуру тих зв'язків та відношень між його елементами, які описуються аксіоматикою евклідової геометрії.

Картинний простір, як концептуальна модель евклідового, має структуру концептуальних моделей зв'язків та відношень між елементами картини, які моделюють елементи евклідового простору.

3. *Елементи просторів та зв'язки між ними.* У реальному просторі реальні елементи зв'язуються реальними зв'язками та відношеннями, які абстрактно описуються аксіоматикою евклідової геометрії.

Евклідів простір містить в якості елементів *поняття* точки, лінії і площини, які можуть сполучатися зв'язками та відносинами взаємної належності, тотожності, рівності, конгруентності, перетину, перпендикулярності, паралельності, симетричності, подібності тощо.

Картинний простір у якості елементів містить *графічні моделі* елементів евклідового простору, які сполучаються графічними моделями зв'язків та відношень між елементами евклідового простору.

4. *Форми об'єктів та їх властивості.* Вважаючи форму об'єкту як результат матеріалізації структури простору його існування, можна сказати, що у реальному просторі об'єкт має одну і єдину реальну або дійсну форму, у візуальному – безліч зорових перспективних форм, у концептуальному – одну ідеальну форму і у картинному – декілька умовних форм у вигляді відповідних зображень.

Зображення об'єктів як моделі систем.

1. *Апарати проекціювання.* Є штучними концептуальними конструкціями для одержання оборотних зображень, структури яких визначаються накладеними умовами. Налічується понад 12 видів.

2. *Визначники зображень.* Незмінні графічні конструкції, які створюють у картині всі умови для безпосередньої і незалежної побудови і перетворення оборотних зображень. Кожен апарат проекціювання породжує свій визначник зображень.

3. *Зображальні властивості проекцій.* Кожен апарат проекціювання породжує свій вид оборотних проекцій, предметом дослідження яких є їх зображальні властивості, які однозначно кодують на рисунку інформацію про позиційні та метричні властивості об'єкту, що зображений.

4. *Раціональні методи побудови і перетворення оборотних зображень.* Засновані на використанні визначників зображень, містять мінімальну кількість простих графічних операцій і не потребують виконання рутинних операцій замірювання і відкладання точкових рядів тощо.

Методична підсистема складається з **7** розділів:

1. *Робоча програма курсу системної нарисної геометрії* (авторська) для студентів архітектурних та дизайнерських спеціальностей.

2. *Технологічна карта навчального процесу з системної нарисної геометрії* у першому і другому семестрах 1 курсу.

3. *Дидактичне забезпечення лекцій.* Здійснюється у вигляді роздавальних дидактичних бланків з теоретичною частиною і накресленими графічними умовами завдань на аркушах паперу формату А3.

4. *Дидактичне забезпечення практичних задач.* Здійснюється у вигляді роздавальних дидактичних бланків з готовими умовами завдань по варіантах.

5. *Дидактичне забезпечення самостійної роботи студентів* у вигляді виконання ними розрахунково-графічних робіт по варіантах у відповідності з розробленими для того методичними вказівками.

6. *Навчально-методична література, наочні посібники…*

7. *Наукова, творча, проектна робота студентів*, участь в наукових конференціях.

Цілеспрямоване впровадження змісту всіх підсистем педагогічної системи навчання студентів архітекторів і дизайнерів системній нарисній геометрії знімає поріг її нерозуміння, сприяє прискореному засвоєнню навчального матеріалу, пробуджує пізнавальний інтерес до геометро-графічних досліджень і їх застосуванні у курсових проектах у науко-дослідній роботі. Адже ідеологія виховує, гносеологія навчає, а методологія і виховує і навчає. І все це при умові постійного інтересу студента до пізнання.

Тому як системна нарисна геометрія створена задля цілеспрямованого навчально-виховного впливу на студентську молодь, то вона передбачає зворотній зв'язок з нею. При наявності такого зв'язку у склад дидактики сприйняття студентами цієї науки повинні входити принципи *зацікавленості, сумлінності, самостійності, систематичності і послідовності засвоєння навчального матеріалу, а також «атомарної чесності»* [4] по відношенню до графічної роботи, що виконується.

Висновки: 1. Глобальний кризовий стан геометро-графічної грамотності випускників середніх шкіл, які стають студентами перших курсів як технічних, так і творчих ВНЗ, викликає необхідність прийняття радикальних рішень як на рівні керівних і законодавчих органів освіти нашої країни, так і на рівні педагогічного загалу геометро-графічних кафедр ВНЗ.

2. Запропонована у даній роботі педагогічна технологія викладання та вивчення системної нарисної геометрії є спробою перетворення допрофесійного мислення першокурсників у зачатки професійного, конструктивно-композиційного, впровадження якої у навчальний процес кафедр нарисної геометрії творчих ВНЗ є педагогічно доцільним.

3. Системна нарисна геометрія за своїм змістом є фундаментальною математичною дисципліною і тому потребує офіційного затвердження у цьому статусі з відповідним збільшенням навчального часу на її засвоєння.

Література

1. Ткач Д. И. Системная начертательная геометрия : монография / Д. И. Ткач. – Днепропетровск : Издательство ПГАСА, 2011.

2. Програма дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка». – К., 1994.

3. Нарисна геометрія : підручник для студентів вищих навчальних закладів / Михайленко В. Є., Євстіфеєв М. Ф., Ковальов С. М., Кащенко О. В. – К. : Вища школа, 2004.

4. Куринский В. А. Автодидактика. – М. : Автодидакт, 1994.

ЗАСТОСУВАННЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ «ГЕОМЕТРІЯ ПЛОЩИНИ»

Л. Ф. Троян
Україна, м. Вінниця, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського
tlf_vin@mail.ru

Характерною рисою сучасного суспільства є проникнення в галузі людської діяльності математичних методів. Знання стає точним лише тоді, коли можна надати йому математичного обґрунтування, тобто побудувати відповідну математичну модель. Універсальність математики полягає в тому, що одна її структура може описати різноманітні мало пов'язані між собою явища реального світу: «Філософія написана в грандіозній книзі Всесвіт, яка відкрита для нашого пильного погляду. Але розуміти цю книгу може лише той, хто навчився розуміти її мову і знаки, якими вона викладена. Написана ж вона мовою математики…», – Галілео Галілей [1, 237–238].

На нашу думку, сформувати систему знань, спираючись лише на одну навчальну дисципліну, неможливо. Система природничих знань передбачає структурний взаємозв'язок між поняттями окремих наук (дисциплін), між загальнодидактичними закономірностями та фактичним матеріалом. Майбутні вчителі математики повинні вміти продемонструвати учням необхідність вивчення математики, а майбутні вчителі фізики повинні навчитися розкривати учням нове фізичне поняття повністю в усіх його зв'язках і відношеннях. Для цього необхідно залучити відомості різних галузей знань (наприклад, фізичних) під час вивчення математичних дисциплін студентами спеціальностей «Математика» та «Фізика», та сформувати у них вміння аналізувати об'єкти реальної дійсності.

Дослідження проблеми впровадження міжпредметних зв'язків (МПЗ) під час вивчення навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» у процесі підготовки майбутніх учителів математики та фізики у педагогічній науці практично не проводилися. Лише у навчальному підручнику Б. В. Гриньова та І. К. Кириченка та в навчальному посібнику В. П. Яківця, В. Н. Боровика, Л. В. Вавриковича зроблені спроби встановити МПЗ між векторною алгеброю, геометрією та фізикою. Задачі на використання методу координат у фізиці запропоновані лише в збірниках задач з аналітичної геометрії Д. В. Клєтєніка та О. А. Дадаяна, О. С. Масалової.

Метод координат на площині є одним із найважливіших методів розв'язання багатьох практичних задач дійсності. На це потрібно звернути увагу під час викладання змістових модулів «Метод координат на площині» та «Лінії 2-го порядку».

У процесі вивчення студентами вказаних вище змістових модулів викладач може використовувати різні прийоми та засоби реалізації МПЗ. В умовах кредитно-трансферної системи найбільш вдалим засобом упровадження є самостійна робота [4]. Для забезпечення професійної підготовки майбутніх вчителів математики та фізики ми розробили позааудиторні самостійні роботи, які включають різноманітні задачі прикладного характеру. Умовно ми поділили ці задачі на три типи.

Математичні задачі часто виникають в процесі розв'язування важливих питань фізики, хімії, економіки, біології тощо. Адже, недарма кажуть, що математика це «слуга» наук. Універсальність математики допомагає розв'язувати низку фізичних задач. Наведемо приклади задач, запропоновані студентам для самостійної роботи під час вивчення змістового модуля «Метод координат на площині». Це задачі, які ми умовно віднесли до першого типу. Для розв'язання цих задач студенти повинні пригадати навчальний матеріал із фізики, що вивчався у школі, та вміти знаходити координати точки, що ділить відрізок у заданому відношенні, вміти складати рівняння прямої та кола.

Задача 1. Визначте координати центра мас P однорідної пластинки $ABCDEFGH$ (рис. 1), якщо $|AH|=10$ см, $|AB|=7$ см, $|CD|=4$ см, $|DE|=4$ см, $|FG|=1$ см. (Вказівка. Розбийте фігуру на три прямокутника і знайти їх центри мас – M_1, M_2, M_3. Центром мас пластинки $ABCDEFGH$ є центр мас трикутника $M_1M_2M_3$.)

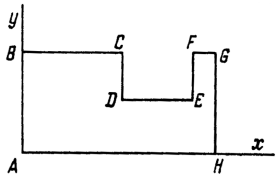


Рис. 1

Задача 2. Частинка α рухається прямолінійно з точки $A(5;4)$ в точку $B(-2;7)$. Визначте кут, який утворюють траєкторії руху частинок α та β, за умови, що частинка β проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{n}(2;1)$.

Задача 3. В якому напрямку повинен пройти промінь світла від джерела $A(4;5)$, щоб, відбившись від площини дзеркала, що співпадає з віссю Ox, він потрапив у точку $B(1;3)$, якщо кут падіння променя дорівнює куту відбивання (рис. 2)?

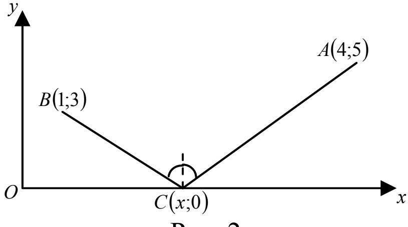


Рис. 2

Задача 4. Під дією деякої сили матеріальна точка M рухалась по колу $(x-5)^2+(y-3)^2=25$. Дія сили припинилась у мить, коли точка M співпала з точкою $A(2;1)$. Складіть рівняння траєкторії подальшого руху точки. (Вказівка. Лінійна швидкість матеріальної точки, що рухається по колу, направлена по дотичній до кола. Тому відірвавшись від кола в точці A, матеріальна точка продовжить свій рух по прямій, яка дотикається кола в точці відриву.)

Для розв'язування деяких фізичних задач часто доводиться застосовувати не лише метод координат, але й геометричні властивості деяких кривих 2-го порядку. Ці задачі ми відносимо до другого типу.

Задача 1. (*Задача про транспортний центр*) Задані три точки: $A(1;3)$, $B(4;3)$, $C(1;-5)$. Знайти четверту точку, відстань від якої до точок A, B, C була б однакова.

Задача 2. Перерізом дзеркала автомобільної фари є парабола. Діаметр дзеркала 20 см, глибина 10 см. Знайдіть параметр дзеркала.

Задача 3. Точки кріплення кінців стального тросу розташовані на однаковій висоті на відстані 20 см. Величина прогину тросу на відстані 2м від точки кріплення одного з кінців дорівнює 14,4 см. Визначте величину прогину троса в середині між точками кріплення, якщо трос має форму параболи.

Задача 4. Меридіан Землі – еліпс, ексцентриситет якого дорівнює 0,08. Відстань від центру Землі до екватора 6371 км. Визначте, на скільки кілометрів відстань від центру Землі до екватора більша відстані від центру Землі до полюса.

Однак розв'язування математичних задач може здійснюватися з використанням природничих знань, зокрема з застосуванням відомих законів фізики та проведенням фізичних досліджень. Фізична інтерпретація математичної задачі може підказати шляхи розв'язання складних геометричних задач: «Фізика не тільки дає нам (математикам) привід для розв'язування проблем; вона ще допомагає нам знайти для цього засоби. Це відбувається в двоякий спосіб. По-перше, вона дає нам передчуття розв'язку, а по-друге, підказує нам хід міркувань», - Анрі Пуанкаре [2, 167].

Фізичну інтерпретацію математичній задачі можна надати, пригадавши, що деякі геометричні фігури володіють фізичними властивостями, наприклад, оптичними. Такими фігурами є лінії 2-го порядку еліпс, гіпербола, парабола. Для демонстрації оптичних властивостей цих кривих ми пропонуємо студентам переглянути мініатюри, які є візуалізаціями математичних сюжетів, на сайті http://www.etudes.ru/. Крім того, ці властивості можуть бути використані під час розв'язування деяких геометричних задач. При цьому варто пам'ятати про відкриття, зроблене ще Героном Александрійським: світло розповсюджується від однієї точки до іншої, обираючи найкоротший шлях, тобто рухаючись по прямій.

Відкриття Герона є одним з прикладів використання принципу мінімуму у фізиці та взаємозв'язку геометрії та фізики.

Розглянемо кілька геометричних задач, для розв'язування яких можна застосувати фізичну інтерпретацію. Ці задачі ми відносимо до задач третього типу.

Задача 1. На прямій m: $2x–y–5=0$ знайти таку точку P, щоб сума відстаней від неї до точок $A(–7;1)$, $B(–5;5)$ була б найменшою.

Отже, розв'яжемо цю задачу використавши оптичну інтерпретацію. Як було зазначено раніше, світло розповсюджується рухаючись по прямій. Якщо ж на шляху променя зустрічається деяка перепона, наприклад дзеркало, то він може відбитися від нього і продовжити свій рух по прямій, але вже змінивши свій напрям. Отже, найкоротший шлях від точки A до точки P і від P до B допоможе знайти промінь світла. Для цього розташуємо дзеркало перпендикулярно до площини рисунка так, щоб воно співпало з прямою m. В точці A розташуємо джерело світло. Направимо промінь світла з точки A так, щоб після відбивання від дзеркала m, він пройшов через точку B. Кут α падіння променя дорівнює куту відбивання β від дзеркала m. Промінь світла, обираючи найкоротший шлях, визначає положення точки P на прямій m (рис. 3). Відбитий промінь світла PB виходить не з самого джерела A, а з уявного джерела A'. Точка A' симетрична точці A відносно прямої m і лежить на продовженні відбитого променя PB. Відрізок $A'B$ перетинає пряму m в шуканій точці P.

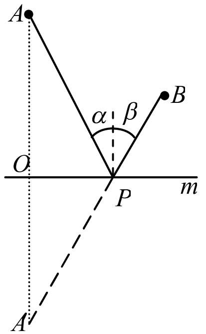


Рис. 3

Задача 2. На площині задані точка $P(1;1)$ і дві прямі m: $2x+y–1=0$ та l: $x–y+1=0$. Знайти на прямих m і l такі точки A і B, відповідно, щоб периметр трикутника ΔABP був найменшим.

Цю задачу також можна розв'язати, використовуючи оптичну інтерпретацію. Уявимо, що через прямі m та l проходять два дзеркала, перпендикулярно до площини рисунка. В точці P знаходиться джерело світла. Промінь світла вийшов з точки P і потрапив на дзеркало m (в точку A), відбився від нього і потрапив на дзеркало l (в точку B), відбившись від якого, повернувся в точку P (рис. 4).

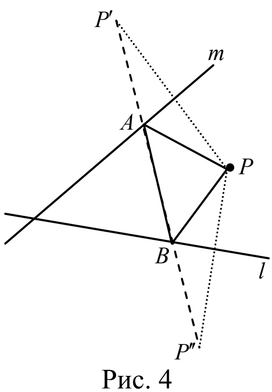


Рис. 4

Промінь світла, обираючи найкоротший шлях, описує шуканий трикутник ΔABP найменшого периметру. Щоб побудувати точки A і B, знайдемо зображення точки P в дзеркалі l та m. Образом точки P в дзеркалі m є точка P', яка симетрична відносно дзеркала і лежить на продовженні променя відбитого від дзеркала. Образом точки P в дзеркалі l є точка P'', яка симетрична відносно дзеркала і лежить на продовженні променя, який впав на дзеркало. Відрізок $P'P''$перетинає прямі m та l в шуканих точках.

Задача 3. Проведемо з довільної точки P, що лежить поза еліпсом (гіперболою), дві дотичні. Нехай вони дотикаються еліпса (гіперболи) в точках X та Y (рис. 5). Довести, що кути F_1PX і F_2PX рівні (F_1 и F_2 – фокуси еліпса (гіперболи). [3, 15-16]

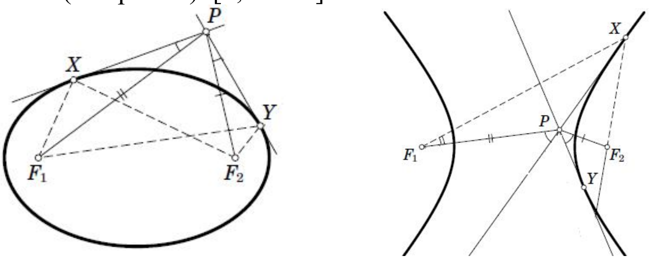


Рис. 5

Задача 4. Доведіть, що будь-які гіпербола та еліпс, фокуси яких співпадають, ортогональні (рис. 6) [3, 14].

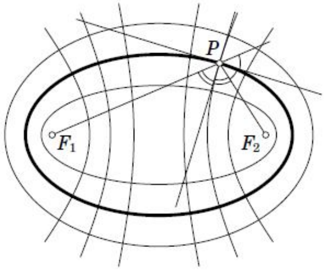


Рис. 6

На нашу думку, розв’язування студентами запропонованих задач допоможе сформувати у них внутрішній мотив вивчення змістового модуля, активізувати їхню інтелектуальну сферу, усвідомити на скільки взаємопов’язані математичні та природничі дисципліни.

Ми вважаємо, що міжпредметні задачі з розроблених самостійних робіт доцільно включати у посібники з аналітичної геометрії та вищої математики для студентів фізико-математичних і технічних спеціальностей. Досвід показує, що це сприяє формуванню у студентів математичного кругозору, уявлень про універсальність математики, формуванню цілісної картини світу та їхнього розвитку як фахівців, а також допомагає підготовити їх до використання МПЗ у майбутній професійній діяльності.

Література

1. Галилей Г. Пробирных дел мастер / Галилео Галилей ; пер. Ю. А. Данилова. – М. : Наука, 1987. – 272 с.
2. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М. : Наука, 1975. – 464 с.
3. Акопян А. В. Геометрические свойства кривых второго порядка : для учащихся старших классов / А. В. Акопян, А. А. Заславский. – М. : Издательство МЦНМО, 2007. – 136 с.
4. Троян Л. Ф. Деякі теоретичні аспекти реалізації міжпредметних зв'язків у навчально-виховному процесі / Л. Ф. Троян // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр. – Випуск 24 / Редкол. : І. А. Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця : Планер, 2010. – С. 526-531.

ПРО ТЕОРЕМУ ПІФАГОРА ТА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ

І. А. Алєка
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет

Піфагора, одного з найвидатніших давньогрецьких вчених, якого по праву вважають творцем теоретичної математики, ореолом слави увінчала його теорема. Причина популярності цієї теореми полягає в її величезній красі, чудовій простоті та всебічному застосуванні. Краса її полягає в чіткому представленні різними формами зв'язку: геометричному, арифметичному, числовому та ін..

Теорема має досить просте формулювання: у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Аналітично вона записується рівнянням: $c^2 = a^2 + b^2$, де c, a і b – відповідно, довжини гіпотенузи і катетів прямокутного трикутника. Числове представлення теореми визначають піфагорові трійки чисел. Всебічне її застосування характеризується великою кількістю реалізацій.

З історії математики відомо, що теорема Піфагора зустрічається в «єгипетському трикутнику», побудованому на папірусі часів фараона Аменехмета Першого (XX ст. до н. є.), у вавилонських табличках епохи царя Хаммурапі (XVIII ст. до н. е.), в давньоіндійському трактаті «Сульва сутра» («Правила вірьовки» VIII–V ст. до н. е.), у найдавнішому китайському трактаті «Чжоу – бі суань цзинь» (XV–VI ст. до н. е.) та ін. Не зважаючи на це, логічних доведень цього твердження там не було. Перше доведення йому зробив Піфагор у VI ст. до н. е. [1].

Між іншим, від доведення, зробленого особисто Піфагором, до наших днів не залишилося ніяких слідів. Вперше теорема Піфагора була сформульована і доведена в праці «Начала», написаній давньогрецьким математиком Евклідом у III ст. до н. е. При цьому, як стверджують дослідники, довів її там особисто Евклід.

Про теорему Піфагора існує чимало легенд. Так, грецький математик Прокл у V ст. н. е. в коментарях до книги «Начала» писав: «Якщо послухати тих, хто любить повторювати стародавні легенди, то потрібно сказати, що ця теорема належить Піфагору; говорять, що він на честь цього відкриття приніс у жертву бика». [3, 89]. А більш щедрі говоруни одного бика перетворили у цілу сотню.

Незважаючи на те, що поняття крові вступало в протиріччя з уставом піфагорійської школи, ця легенда надзвичайно міцно закріпила назву теореми. А тепер, коли існує більше 500 доведень цієї теореми різними авторами, неможливо навіть уявити собі відокремлення її від Піфагора.

Теорема Піфагора привела піфагорійців до сенсаційного відкриття – існування несумірних відрізків. Раніше Піфагор і його учні вважали, що всі відрізки сумірні, а тому їх відношення можна виразити раціональними числами. Очевидно, що несумірність між сторонами квадрата і його діагоналлю спочатку була встановлена шляхом пропорційного співвідношення, або вимірювання, а потім вже була і строго доведена.

Згідно прийнятого статуту піфагорійці всі свої відкриття мали тримати у найстрогішій таємниці. Легенда говорить, що піфагорієць Гіппас розкрив «недостойним» таємницю про несумірні відрізки, і таким чином порушив присягу. За такий вчинок боги його покарали. Він загинув на кораблі, який потонув під час шторму на морі.

Доведенням від супротивного було встановлено, що число $\sqrt{2}$, яке є довжиною гіпотенузи у рівнобедреному прямокутному трикутнику з катетами, рівними одиниці виміру довжини, не є раціональним. Піфагорійці також довели, що існує безліч нераціональних чисел і назвали їх ірраціональними.

Відкриття ірраціональних чисел створило першу кризу в існуючій давньогрецькій математиці. Піфагорійці не могли виконувати арифметичні дії над ірраціональними числами і тому їм довелось перебудувати свою філософію у поглядах на число. Вони визнали, що не числа, а геометричні об'єкти є величинами загальної природи і почали будувати математику не на арифметичній, а на геометричній основі. Так виникла геометрична алгебра, яка дала можливість розв'язувати задачі за допомогою циркуля та лінійки і допомогла подолати кризу в давньогрецькій математиці.

Теорія несумірних відрізків (ірраціональних чисел) послідовно була описана в 10-тій книзі праці «Начала». Для її обґрунтування використовувалась розроблена Евдоксом в IV ст. до н. е. теорія відношень, а також метод вичерпування при вимірюванні площ і об'ємів фігур.

Відомо, що теорія ірраціональних чисел і метод вичерпування сприяли розвитку математичного аналізу в XVII–XIX століттях. Звідси випливає, що теорема Піфагора зробила поштовх до великих відкриттів.

Деякі елементи з розглянутої історії корисно повідомляти учням на уроках геометрії там, де вивчається теорема Піфагора або розв'язуються задачі з її використанням, для розширення їх математичного кругозору.

В різних розділах математики є задачі, які містять елементи, пов'язані з теоремою Піфагора, що і спонукає її використання. Часто такі елементи визначаються в процесі розв'язування задач. Твердження теореми можна використовувати в задачах на обчислення, доведення і дослідження, для виключення допоміжних величин і т. д. [2].

Розглянемо приклади ефективного використання теореми Піфагора в навчальному процесі.

Приклад 1. Дано правильний ΔABC. Із точки K, яка лежить всередині трикутника, проведено перпендикуляри до його сторін: $KM \perp AB$, $KN \perp BC$, $KP \perp AC$.

Довести, що

$AM^2 + BN^2 + CP^2 = MB^2 + NC^2 + PA^2$, $AM+BN+CP=MB+NC+PA$.

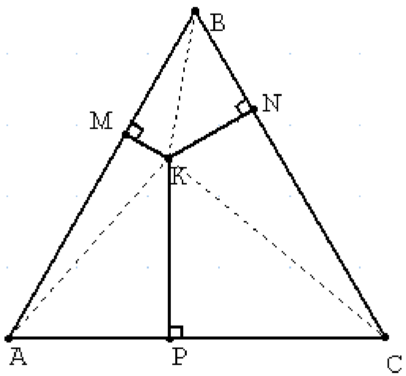


Рис. 1

Розв'язання.

З'єднаємо точку K з вершинами ΔABC. Одержимо 6 прямокутних трикутників з прямими кутами при вершинах M, N і P (рис. 1).

Застосуємо теорему Піфагора до кожного із одержаних трикутників і запишемо:

$$AM^2 = AK^2 - KM^2,$$
$$MB^2 = BK^2 - KM^2,$$
$$BN^2 = BK^2 - KN^2,$$
$$NC^2 = CK^2 - KN^2,$$
$$CP^2 = CK^2 - KP^2,\ PA^2 = AK^2 - KP^2.$$

Підставимо одержані вирази у ліву і праву частини першої рівності:

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = \left(AK^2 - KM^2\right) + \left(BK^2 - KN^2\right) + \left(CK^2 - KP^2\right),$$
$$MB^2 + NC^2 + PA^2 = \left(BK^2 - KM^2\right) + \left(CK^2 - KN^2\right) + \left(AK^2 - KP^2\right).$$

Праві частини одержаних рівностей рівні, тому рівні й ліві. Позначимо сторону даного правильного трикутника через a, і запишемо ліву частину першої рівності так:

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = (a - MB)^2 + (a - NC)^2 + (a - PA)^2 =$$
$$= 3a^2 - 2a(MB + NC + PA) + MB^2 + NC^2 + PA^2.$$

Звідси маємо: $MB + NC + PA = \dfrac{3}{2}a$.

Після аналогічного запису правої частини першої рівності, одержимо: $AM + BN + CP = \dfrac{3}{2}a$.

Отже, має місце і друга рівність:

$$AM+BN+CP=MB+NC+PA.$$

Твердження задачі доведено.

Приклад 2. У трикутнику ABC кут при вершині A дорівнює 45°, а висота BK ділить основу AC на відрізки AK=20 см і KC=15 см. Знайти бічні сторони AB і BC трикутника (рис. 2).

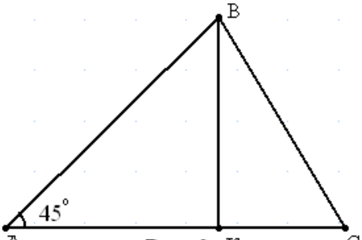


Рис. 2.

Розв'язання.

У трикутнику ABK: $\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$, тому він прямокутний і рівнобедрений: $AK=BK=20$ см. За теоремою Піфагора: $AB^2 = AK^2 + BK^2$, звідки $AB = 20\sqrt{2}$ см.

Із ΔBKC, у якому $\angle K = 90°$, згідно теореми Піфагора, знаходимо:

$$BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = 25 \text{ см}.$$

Відповідь: $20\sqrt{2}$ см і 25 см.

Приклад 3. Діагоналі трьох бічних граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини d_1, d_2, d_3. Визначити діагональ паралелепіпеда.

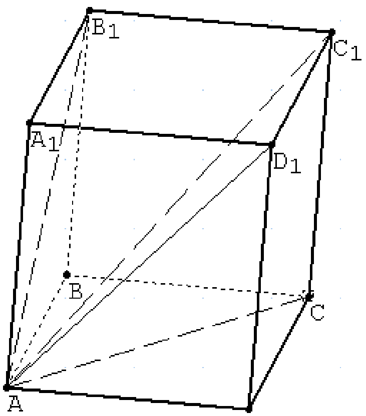


Рис. 3.

Розв'язання.

Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі трьох бічних граней $AC=d_1$, $AB_1=d_2$, $AD_1=d_3$, а його діагональ $AC_1=d$ (рис. 3).

Позначимо три бічних ребра цього паралелепіпеда через: $a=AB$, $b=AD$, $c=AA_1$. Оскільки всі грані є прямокутниками, то діагоналі розбивають їх на прямокутні трикутники. Із прямокутних трикутників: ABC, ABB_1, ADD_1 за теоремою Піфагора відповідно знаходимо: $d_1^2 = a^2 + b^2$, $d_2^2 = b^2 + c^2$, $d_3^2 = a^2 + c^2$.

Згідно з теоремою Піфагора із ΔACC_1 $(\angle C = 90°)$, знаходимо:

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$, де $AC_1=d$, $AC^2 = d_1^2 = a^2 + b^2$ і $CC_1=c$, тому $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Виключаючи із одержаних чотирьох рівностей введені позначення ребер: a, b і c, одержуємо:

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)}.$$

Відповідь: $d = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)}$.

Приклад 4. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і їх довжини дорівнюють 2 см, 4 см і 16 см. Знайти площу поверхні піраміди.

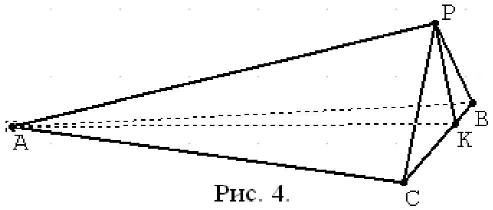


Рис. 4.

Розв'язання.

Нехай у піраміді $PABC$ бічні ребра $AP \perp BP \perp CP$ і AP=16 см, CP=4 см, BP=2 см. Площа поверхні піраміди дорівнює сумі площ всіх її граней. Бічні грані являють собою прямокутні трикутники (рис. 4). Площі їх дорівнюють напівдобуткам катетів:

$$S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} PA \cdot CP = 32 \text{ см}^2,$$

$$S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} AP \cdot BP = 16 \text{ см}^2,$$

$$S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} BP \cdot CP = 4 \text{ см}^2.$$

Із ΔPBC $(\angle P = 90°)$, за теоремою Піфагора, маємо:

$$BC = \sqrt{BP^2 + CP^2} = 2\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

Побудуємо $PK \perp BC$. Відрізок $AK \perp BC$ згідно теореми про три перпендикуляри. Для ΔPBC запишемо $BK \div BP = BP \div BC$, звідки $BK = \dfrac{BP^2}{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ см. Далі за теоремою Піфагора знаходимо у прямокутних трикутниках PBK $(\angle K = 90°)$ і AKP $(\angle P = 90°)$ наступні сторони:

$$PK = \sqrt{BP^2 - BK^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ см і } AK = \sqrt{AP^2 + PK^2} = \frac{36}{\sqrt{5}} \text{ см}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 36 \text{ см}^2.$$

Площа поверхні піраміди:

$$S = 32 \text{ см}^2 + 16 \text{ см}^2 + 4 \text{ см}^2 + 36 \text{ см}^2 = 88 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 88 см^2.

Із розглянутих прикладів слідує, що у загальноосвітній школі теорема Піфагора, разом із відомими історичними фактами про неї, використовується при обчисленні і доведенні різних геометричних тверджень, в задачах різної складності як у планіметрії, так і у стереометрії. Тому вміння доцільно і вірно застосовувати дану теорему є невід'ємною необхідною навичкою, яку має опанувати кожен учень. Наведені нами приклади можуть бути не лише практичною складовою навчального матеріалу, а й моделями реальних життєвих ситуацій, для розв'язання яких необхідні знання і вміння з даної теми. Доцільне застосування теореми Піфагора, у більшості випадків, вимагає від учнів ґрунтовного аналізу вихідних умов завдання й властивостей різноманітних геометричних об'єктів. Адже в більшості, наприклад, стереометричних задач, застосування теореми ускладнюється у зв'язку з трудністю встановлення прямого кута у трикутнику, тобто вірного визначення елементів прямокутного трикутника. Таким чином, за для правильного визначення елементів прямокутного трикутника і застосування до них теореми Піфагора, учні мають оперувати лише теоретичними відомостями, значною мірою використовувати абстрактне мислення, а не спиратися суто на зорову інтерпретацію. Отже, теорема не лише розвиває просторове мислення учнів, а й спонукає їх до розвитку й використання логічного, алгоритмічного мислення.

Вивчення цієї теореми збагачує знання учнів, розвиває їх розумові здібності, розширює світогляд, підвищує інтерес до математики.

Література

1. Даан-Дальмедико А. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер [пер. с франц. А. А. Бряндинской]. – М. : Мир, 1986. – 432 с.

2. Антоненко М. І. Розв'язування геометричних задач / Микола Іларіонович Антоненко. – К. : Рад. шк., 1991. – 128 с.

3. Глейзер Г. И. История математики в школе, VII-VIII классы : пособие для учителей / Герш Исакович Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.

ВИКОРИСТАННЯ ЦІКАВИХ ЛІНІЙ І ТОЧОК ТРИКУТНИКА В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

А. Ю. Білоус
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет

Трикутник в геометрії є одним із найпростіших фігур, які характеризуються великою кількістю важливих властивостей. В елементарній математиці вони визначають цілий розділ, який називається «геометрією трикутника». Цей розділ має і свою історію.

Найбільш детально і теоретично обґрунтовано властивості трикутників, разом із деякими лініями і точками в них, вивчалися починаючи з V ст. до н. е. в Стародавній Греції. Там у школі Піфагора розв'язувалися задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки. Велика кількість цих задач була пов'язана з використанням властивостей медіан, бісектрис і висот трикутників, доведених логічним шляхом.

Лише в III ст. до н. е. Евклід, підсумовуючи результати досліджень своїх попередників, у праці «Начала» довів, що три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – центрі вписаного кола. Там же він доводить, що серединні перпендикуляри, проведені до трьох сторін трикутника, перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола цього трикутника.

Про перетин трьох перпендикулярів трикутника в одній точці було вперше доведено у II ст. до н. е. Архімедом. Він назвав цю точку ортоцентром, від грецького слова «ортос», що означає прямий, або правильний. Ним же було доведено, що і три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром ваги цього трикутника, або його барицентром.

Менелай Олександрійський, який жив у I ст. до н. е., в третій книзі «Сферики» довів теорему: Якщо на сторонах BC, CA і AB трикутника ABC взяти три точки A_1, B_1 і C_1 так, що задовольняється співвідношення $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, то ці три точки лежать на одній прямій. В даній теоремі йде мова про цікаві точки на сторонах трикутника.

У XVII ст. італійський інженер і геометр Джованні Чева довів теорему, в якій теорема Менелая є окремим її випадком. В ній також розглядається три цікаві прямі в трикутнику, які перетинаються в одній точці. В цей же період були знайдені цікаві точки в трикутнику вченими Е. Торрічеллі і П. Ферма. Вони названі іменами цих вчених.

Більш ефективно цікаві точки і лінії в трикутнику вивчалися вченими у XVIII та XIX століттях. Леонард Ейлер знайшов пряму, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан і центр описаного кола в трикутнику (її названо «прямою Ейлера»), а також дев'ять цікавих точок трикутника. Німецький математик Карл Фейєрбах побудував коло, що проходить через дев'ять цікавих точок трикутника і довів, що його центр лежить на прямій Ейлера.

Цікаві точки трикутника були відкриті французькими математиками Анрі Брокером, Емілем Лемуаном, які носять їх імена. Навіть французький імператор Наполеон Бонапарт довів, що центри правильних трикутників, побудованих на сторонах довільного трикутника є вершинами правильного трикутника. Вони теж є цікавими точками трикутника.

Виявили в своїх наукових працях цікаві лінії і точки трикутника математики Роберт Сімсон, Жан Понселер, Шарль Бріаншон і ін.

Властивості медіан, бісектрис, висот трикутника та точок їх перетину, а також центри вписаних і описаних кіл вивчаються в загальноосвітніх школах на уроках геометрії. Вони досить ефективно застосовуються до розв'язування задач. Властивості інших цікавих ліній і точок рекомендуються використовувати на гурткових та факультативних заняттях для розширення математичних знань учнів. Розглянемо деякі із задач, які містять цікаві елементи трикутника.

Задача 1. Дано дві прямі l_1 і l_2, які перетинаються в точці A, та точку Q поза ними. За допомогою циркуля і лінійки провести через точку Q пряму l так, щоб вона відсікала трикутник ABC з даним периметром $2p$.

Розв'язання

Для того, щоб провести пряму l через точку Q, потрібно визначити ще одну точку, яка їй належить – B або C.

Аналіз: Припустимо, що пряму l побудовано так, що утворився ΔABC з периметром $2p=KL$ (рис. 1). Знайдемо положення точок B і C на прямих l_1 і l_2.

Побудуємо бісектриси кутів M_1AM_2, M_1BC і M_2BC. Згідно властивості бісектрис кутів, одержуємо точку O в їх перетині.

Перпендикуляри, опущені з точки O до сторін кутів: OM, OM_1 і OM_2, рівні між собою. Тому коло з центром у точці O і радіусом OM дотикається до прямих l, l_1 і l_2. Із рівності трикутників OMB і OM_1B випливає: $BM=BM_1$, а з рівності трикутників OMC і OM_2C випливає: $CM=CM_2$. Нарешті, рівність трикутників AOM_1 і AOM_2, утворює рівність відрізків: $AM_1 = AM_2 = \frac{1}{2}KL = p$. Аналіз закінчено.

Побудова:

1) Поділимо даний відрізок KL навпіл, одержимо $KR=p$;

2) Відкладаємо відрізки $AM_1= AM_2=p$ на прямих l_1 і l_2;

3) Побудуємо точку $O = OM_1 \cap OM_2$, де $OM_1 \perp l_1$ і $OM_2 \perp l_2$;

4) Будуємо коло (O, OM_1);

5) Через точку Q проводимо дотичну l до кола (O, OM_1); $l \cap l_1 = B$ і $l \cap l_2 = C$;

6) ΔABC – шуканий трикутник.

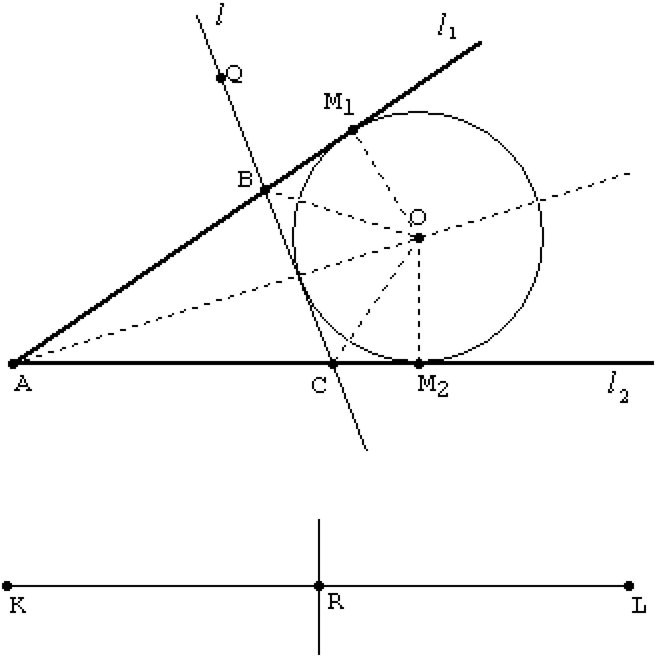


Рис. 1

При розв'язанні задачі використані властивості бісектрис кутів і перпендикулярів у трикутниках.

Задача 2. Довести, що проекції основи висоти трикутника на бічні сторони його і на дві інші висоти цього ж трикутника лежать на одній прямій.

Розв'язання

Дано ΔABC і висота $BB_1 \perp AC$. Побудуємо висоти $AA_1 \perp BC$ і $CC_1 \perp AB$, та знайдемо проекцію точки B_1, як основи висоти BB_1, на сторони AB і BC та висоти AA_1 і CC_1. O – точка перетину висот. Проекціями будуть точки M, N, P, Q – як основи перпендикулярів, опущених з точки $\hat{A}_1$ на відповідно вказані сторони і висоти трикутника (рис. 2). Доведемо, що точки M, N, P, Q лежать на одній прямій. Трикутники MNB_1 і A_1C_1C подібні, бо $\angle MB_1N = \angle C_1CA_1$ (з відповідно паралельними сторонами) і має місце відношення $\frac{MB_1}{C_1C} = \frac{NB_1}{A_1C} = \frac{AB_1}{AC}$ (Оскільки $\Delta AMB_1 \infty \Delta AC_1C$ та $\Delta ANB_1 \infty \Delta AA_1C$). Звідси слідує, що $MN \parallel C_1A_1$. Аналогічно знаходимо, що $PQ||C_1A_1$.

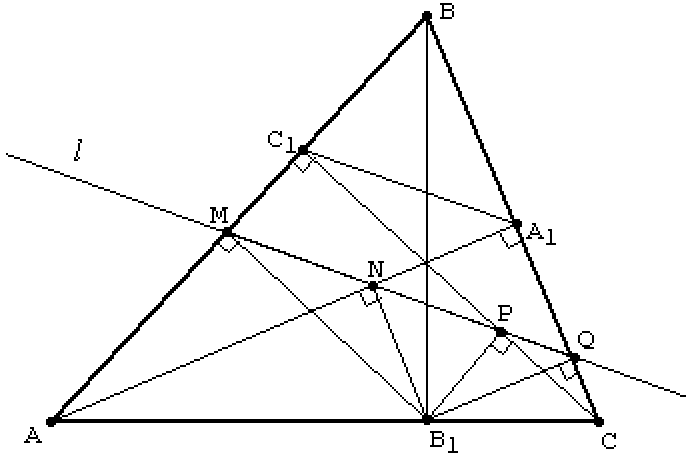


Рис. 2

Із подібності трикутників OC_1A_1 і B_1MQ, слідує: $MQ||C_1A_1$. Оскільки, через одну точку можна провести лише одну паралельну пряму до іншої прямої, то маємо в даному трикутнику чотири точки M, N, P, Q, які лежать на одній прямій l. Знайдені точки відносяться до цікавих точок трикутника.

Задача 3. Чотири прямі при перетині утворюють чотири трикутника. Довести, що описані навколо цих трикутників кола перетинаються в одній точці.

Розв'язання

Нехай дано пряму (DE), яку перетинають прямі (AB), (BC) і (AC) у точках $D = (DE) \cap (AB)$, $F = (DE) \cap (BC)$, $E = (DE) \cap (AC)$ та утворюють чотири трикутника ABC, DBF, ADE і CFE (рис. 3).

Опишемо кола (O_1, O_1A) і (O_2, O_2C) навколо трикутників ABC і CFE. Позначимо через P точку перетину цих кіл, відмінну від C. Покажемо, що коло описане навколо трикутника BDF пройде через точку P.

Відомо, що у чотирикутника, вписаного в коло сума протилежних кутів дорівнює 180°. Оскільки коло (O_3, O_3D) повинне пройти через чотири точки B, D, F і P, то ці точки можна розглядати, як вершини вписаного чотирикутника.

Розглянемо суму двох протилежних кутів цього вписаного чотирикутника:

$$\angle BPF + \angle BDF = (\angle BPC + \angle CPF) + \angle BDF = ((180° - \angle BAC) + \angle CEF) +$$
$$+\angle BDF = ((180° - (180° - \angle DAE) + \angle AED)) + \angle ADE = (\angle DAE + \angle AED) +$$
$$+\angle ADE = (180° - \angle ADE) + \angle ADE = 180°$$

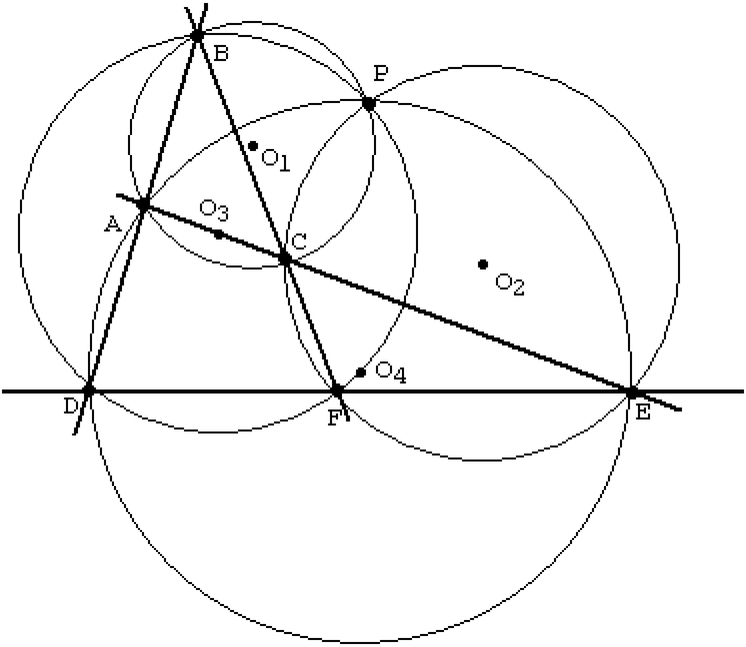


Рис. 3

В перетвореннях враховано, що вписані кути, які спираються на одну і ту ж дугу рівні, суміжні кути утворюють розгорнутий кут і сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°. Отже, коло (O_3, O_3D) проходить через точку P.

Аналогічно доводиться проходження кола (O_4, O_4E), описаного навколо трикутника ADE, через точку P. Точка P відноситься до цікавих точок трикутників.

Задача 4. Дано ΔABC координатами своїх сторін: $A(5; –4)$; $B(–1; 2)$; $C(5; 2)$. Знайти довжину медіани AA_1 і координати барицентра M (рис. 4).

Розв'язання

Використаємо властивості медіан:

1) Медіана ділить сторону трикутника навпіл.
2) Три медіани трикутника перетинаються в одній точці – барицентрі трикутника, яка ділить кожну з них у відношенні 2:1, почи-

наючи від вершини.

3) Точка A_1 – середина відрізка BC. Координати її знаходимо за формулами поділу відрізка навпіл $A_1(2; 2)$.
4) Довжину медіани знаходимо за формулою відстані між двома точками: $AA_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
5) Барицентр – M, знаходимо за формулою поділу відрізка AA_1 у відношенні $\lambda = \dfrac{AM}{MA_1} = \dfrac{2}{1} = 2$. $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = 3$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = 0$;

Отже, $M(3; 0)$.

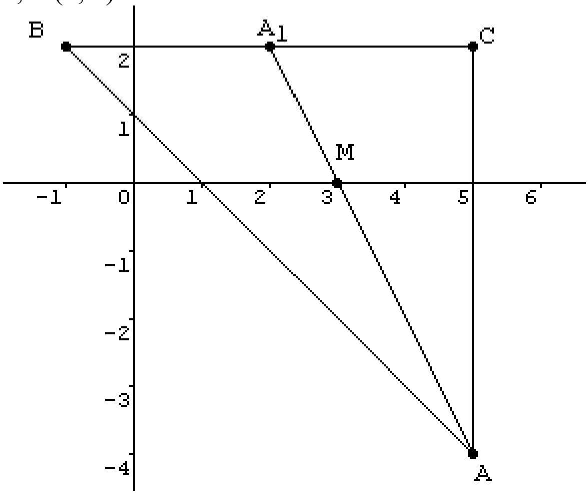


Рис. 4

Відповідь: $AA_1 = 3\sqrt{5}$, $M(3; 0)$.

Вивчення цікавих ліній і точок у трикутнику сприяє розширенню світогляду, розвитку логічного мислення, збагаченню знань з геометрії.

Література

1. Гейзер Г. И. История математики в школе, VII–VIII классы : [пособие для учит.] / Г. И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – 272 с.

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ

П. І. Ульшин, А. Б. Паюк
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
Hanna_Pauk@mail.ru

До задач на побудову відносяться такі, що розв'язуються за допомогою креслярських інструментів, частіше – циркулем і лінійкою.

Виникнення і розвиток таких задач переносить нас в далеке минуле. Постановка їх тісно пов'язана з практичною діяльністю людини. Вона вимагала виконувати зображення різних споруд, ділянок землі, іригаційних каналів тощо. Такі зображення мали форму певних геометричних фігур.

Із давньоєгипетських папірусів відомо, що елементарні задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки люди могли розв'язувати ще в XX ст. до н.е. До них відносяться:

– поділ відрізка навпіл і на *n* рівних частин;
– відкладання кута, рівного даному, поділ його навпіл;
– побудова трикутника за даними його сторонами,
– проведення прямої, паралельної до даної, через точку поза нею і ін.

Проте всі ці задачі тоді розв'язувалися емпірично, за правилами, знайденими експериментальним шляхом.

Ера теоретичної математики почалася з VI ст. до н.е. З'явилася можливість всі математичні твердження доводити логічним шляхом. Найбільшого розквіту розв'язування задач на побудову набуло в школі Піфагора (V ст. до н.е.). Піфагорійці надавали особливого значення інструментам: циркулеві і лінійці. Вони вважали, що ці інструменти дані людям від бога. Для розв'язування ними будь-яких задач треба лише розробити потрібні методи. Вони розробили ряд методів: метод геометричних місць точок, методи перетворення площини (паралельного перенесення, центральної і осьової симетрій, повороту і подібності), алгебричний метод тощо.

Продуктивність піфагорійців у створенні геометричних задачі на побудову була надзвичайно великою. Крім великої кількості цікаво розв'язаних задач, ними ще були сформульовані так задачі: про трисекцію кута, про подвоєння куба і про квадратуру круга, – які не піддавались їм розв'язуванню циркулем і лінійкою. Пізніше ці задачі стали класичними. Їх пробували розв'язувати вчені в різних століттях і лише у 1882 році німецький математик Ф. Лінденман довів, що коренями рівнянь, якими визначаються ці задачі, є трансцендентні числа, які неможливо представити відрізками, побудованими за допомогою циркуля і лінійки. Отже, стало відомо, що не всі задачі можна розв'язувати такими інструментами.

У IV ст. до н.е. в школі давньогрецького вченого Платона була розроблена схема розв'язування задач на побудову в чотири етапи: *Аналіз–Побудова–Доведення–Дослідження*. Ця схема застосовується до розв'язування складних задач на побудову і в наш час.

Аналіз – це логічні міркування, при яких відшукується спосіб розв'язування задачі. *Побудова* – це створення алгоритму для розв'язування задачі. *Доведення* – це логічні міркування, при яких встановлюється, що задачу розв'язано вірно. *Дослідження* – це визначення умов, при яких задача має розв'язки, і встановлюється їхня кількість.

При розв'язуванні простих задач з ціллю економії часу можна зменшити кількість етапів. Наприклад, якщо в умові задачі не вимагається проводити «*дослідження*», то і не потрібно виконувати цей етап. При цьому елементи, дані в задачі, слід брати такими, щоб задача мала розв'язок. Якщо алгоритм побудови складається лише з відомих елементарних задач, то «*доведення*» робити не потрібно. «*Аналіз*» можна не робити, якщо в умові задачі зрозумілий зв'язок між елементами даними в задачі і тими, які потрібні для побудови. Зроблений рисунок без алгоритму не дає підстави говорити, що задачу розв'язано. Отже, «*побудова*» – це обов'язковий етап, який завжди повинен бути присутнім при розв'язані задачі на побудову.

Згідно програми з курсу геометрії загальноосвітньої школи задачі на побудову вивчаються окремими темами із 7-го по 9-й класи. Спочатку розв'язуються основні задачі на побудову, потім задачі на метод геометричних місць точок, далі йдуть задачі на методи геометричних перетворень площини.

Учням слід розуміти, що розв'язування задач на побудову полягає не стільки у побудові зображення фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити і у відповідному доведенні. Отже, задача вважається розв'язаною, якщо знайдено алгоритм її розв'язування і доведено, що побудована фігура задовольняє поставленим умовам.

Ефективність розв'язування задачі на побудову визначається найменшою затратою часу на цей процес. Для цього важливо правильно вибрати метод, який дозволяє одержати результат з найменшою кількістю елементарних побудов.

Розглянемо приклади розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки.

Задача 1. Дано (O; R) – коло з центром у точці O і радіусом R, а також точку A поза ним. Провести через точку A січну l так, щоб відрізок AM, від точки A до кола, дорівнював хорді MN.

<u>Розв'язання</u>

Побудуємо коло (O; R) і точку A, які дано в умові задачі.

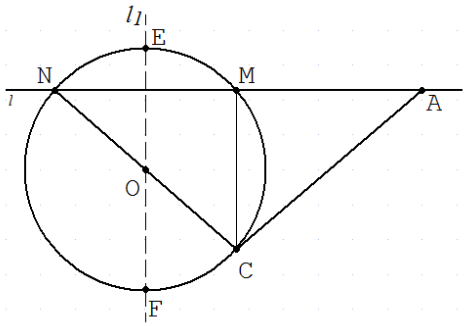


Рис. 1

<u>Аналіз</u>. Припустимо, що задачу розв'язано і пряму l побудовано. Будуємо рис. 1 так, щоб виконувалася умова: $AM=MN$. Для встановлення зв'язку між елементами, заданими в умові задачі, і тими, які треба знайти, проведемо пряму: (NO) ∩= C. Сполучимо точку C відрізками з точками M і A. Утворилися два трикутника CMN і CMA, які рівні, бо прямокутні і з відповідно рівними катетами. Тому $AC = CN$.

Аналіз закінчено.

<u>Побудова</u>: 1) Через точку O проведемо пряму l_1 $\cap l_1 \cap (O;R) = E,F$.

2) Відрізок EF – діаметр кола;

3) Будуємо точку: $C = (A, EF) \cap (O; R)$;

4) Проводимо промінь: $[CO) \cap (O;R) = N$;

5) Будуємо пряму $l = (AN)$, яка є січною: $l \cap (O; R)=M, N$ і шуканою.

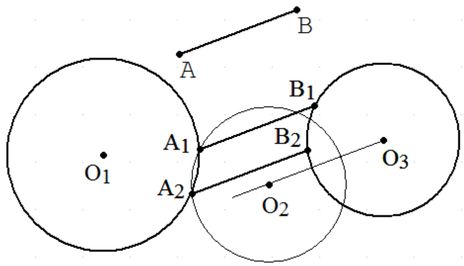


Рис. 2

Задача 2. Дано два різні кола ($O_1 O_1$; $R_1 R_1$) і ($O_2 O_1$; R_2) і відрізок AB поза ними. За допомогою паралельного перенесення відрізок AB розмістити так, щоб його кінці A і B розташувалися відповідно на першому і другому колах.

<u>Розв'язання</u>

Оскільки в задачі вимагається виконати паралельне перенесення, то виконаємо паралельне перенесення кола ($O_2 O_1$; R_2) до відрізка AB на відстань, рівну його довжині.

<u>Побудова</u>:

1) Будуємо промінь $[O_2; O_3) \parallel AB$ і відкладаємо на ньому відрізок $O_2O_3=AB$;

2) Будуємо коло $(O_3; R_2) \cap (O_1; R_1) = A_1; A_2$.

3) Виконаємо переміщення кола $(O_3; R_2)$ до суміщення з колом $(O_2; R_2)$. При цьому: $O_3 \to O_2$, $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$.

4) Оскільки при паралельному перенесені фігури всі точки її рухаються в одному і тому ж напрямі і на одну і ту ж відстань, то відрізки A_1B_1 і A_2B_2 є шуканими.

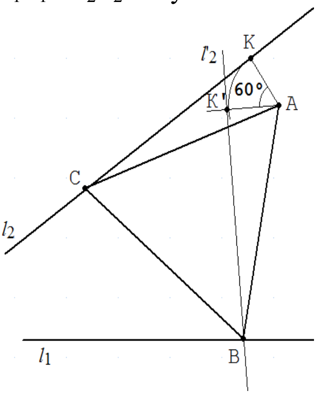


Рис. 3

Задача 3. Дано дві прямі l_1 і l_2 та точку A між ними. Побудувати рівносторонній трикутник ABC так, щоб $B \in l_1$ *і* $C \in l_2$.

Розв'язання

Оскільки у рівносторонньому трикутнику всі кути по 60°, то потрібно застосувати метод повороту на 60° навколо точки A однієї з прямих.

Побудова:

1) Виконаємо поворот $R_A^{60^\circ}(l_2) = l_2^{'}$;

2) $l_2^{'} \cap l_1 = B$;

3) Зворотній поворот: $R_A^{-60^\circ}(l_2^{'}) = l_2$; при якому $K'B = KC$, або $AB = AC$;

4) ΔABC – шуканий трикутник.

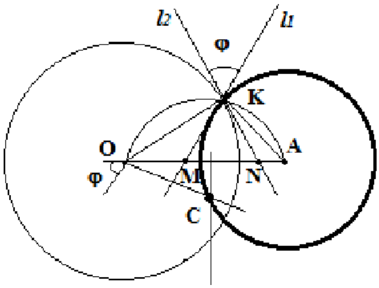


Рис. 4

Задача 4. Дано коло $(O; R)$ з центром в точці O і радіусом R та точка A поза ним. Побудувати коло з центром у точці A так, щоб воно перетинало дане коло під даним кутом φ.

Розв'язання

Кутом між двома колами називається кут між дотичними, проведеними до кожного із цих кіл через точку їх перетину.

Аналіз: Припустимо, що задачу розв'язано і коло $(A; AK)$ побудоване, де K – точка перетину його з даним колом $(O; R)$ і виконується умова, що $\angle(l_1 l_2) = \varphi$ – дотичні до кіл, проведені через точку K.

Позначимо точки:

$M = l_1 \cap AO$ і $M = l_2 \cap AO$.

Згідно умови задачі $\angle MKN = \varphi$. Побудуємо відрізки $OK \perp l_2$ і $AK \perp l_1$.

Розглянемо:

$$\angle OKA = \angle OKM + \angle MNK + \angle NKA = 90^\circ - \varphi + \varphi + 90^\circ - \varphi = 180^\circ - \varphi .$$

Отже, точка *K* є перетином двох геометричних місць точок: даного кола і дуги кола, із точок якої відрізок *OA* видно під кутом $\psi = 180^\circ - \varphi$, $\left(ГМТ_{OA}^{\psi} \right)$. Аналіз закінчено.

Побудова:

1) Будуємо відрізок *OA*;

2) Виконаємо побудову $ГМТ_{OA}^{\psi}$ – дуга *AKO* кола (*C;CA*), з якої видно відрізок *OA* під кутом *ψ=180°– φ;*

3) $ГМТ_{OA}^{\psi} \cap (O;R) = K$;

4) Коло (*A;AK*) – шукане.

Зауваження. У розглянутих задачах використовувалися різні методи розв'язування, причому, у першій і четвертій задачах доведення окремих співвідношень зроблено в аналізах, а всі побудови містили елементарні твердження.

Висновок. Розв'язування задач на побудову розвиває в учнів логічне і алгоритмічне мислення, вміння користуватися креслярськими інструментами, розширює їх кругозір у поглядах на розвиток математики, збагачує їх загальну культуру.

Література

1. Атанасян Л. С. Геометрия. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

2. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / Андрій Григорович Конфорович. – К. : Радянська школа, 1981. – 189 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ WEB-СЕРВІСУ WOLFRAMALPHA

Л. О. Флегантов
Україна, м. Полтава, Полтавська державна аграрна академія
leonid.flegantov@gmail.com

Загальна схема дослідження функції однієї змінної є одним з найбільш важливих прикладних алгоритмів в курсі вищої математики. Відносна складність і значний обсяг обчислень, що виконуються при дослідженні функцій, в умовах скорочення загальної кількості годин, відведених на вивчення вищої математики та зміни їх співвідношення на користь самостійної роботи студентів (СРС), не дозволяють студентам, працюючи в аудиторії під керівництвом викладача, у відведений час розв'язати достатню кількість вправ на застосування загальної схеми дослідження функцій. Це не дає можливості систематично дослідити достатню кількість різноманітних функцій, охопити основні важливі частинні випадки, зокрема, розглянути окремо практично важливі приклади функцій з виробничим змістом. Протягом аудиторного навчання студенти не мають можливості розглянути навіть всі типові приклади, й обговорити з викладачем їх можливу практичну інтерпретацію, що є вкрай важливим для формування майбутнього фахівця певної предметної галузі.

Мета статті: розглянути використання можливостей онлайнового процесора знань (*computational knowledge engine*) WolframAlpha (WA) при вивченні математичних дисциплін на прикладі дослідження функцій однієї змінної.

WA – це Інтернет-додаток, який через web-інтерфейс реалізує, серед іншого, потужні алгоритми символьних та чисельних розрахунків системи комп'ютерної математики (СКМ) Mathematica. Ця система має переваги перед іншими СКМ, серед яких: вільний доступ, доступність, гнучкість, мобільність, зручність у користуванні, інтуїтивний інтерфейс, можливість використання текстових запитів, які інтелектуально обробляються системою тощо. Одним з можливих застосувань web-сервісу WA при вивченні математичних дисциплін є його виростання для розв'язання наступного завдання: дослідити дану функцію і за результатами дослідження побудувати її графік.

Web-сервіс WA надає користувачам зручний доступ як зі стаціонарного комп'ютера, ноутбука або нетбука, так і з мобільних пристроїв. Це одна з його суттєвих переваг порівняно з іншими математичними web-сервісами. Процедура використання web-сервісу WA для виконання математичних розрахунків полягає в наступному. Для початку роботи користувач, маючи підключення до мережі Інтернет, повинен завантажити у браузері web-сторінку доступу до системи WA за адресою wolframalpha.com (або wolframalpharu.com).

Можна запропонувати два варіанти схеми дослідження функцій однієї змінної з використанням web-сервісу WolframAlpha:

класичний – орієнтований на вивчення і опрацювання загальноприйнятого алгоритму загальної схеми дослідження функцій;

прикладний – для використання при вивченні інших дисциплін, що вивчаються після дисципліни вища математика, і використовують математичні методи дослідження функцій, зокрема, при вирішенні завдань професійного спрямування, а також розрахований на фахівців і дослідників, що застосовують математичні методи у певній предметній галузі, й орієнтовані на практичні застосування.

Перший (класичний) варіант полягає у послідовному виконанні всіх етапів класичної схеми дослідження функції з фіксуванням всіх проміжних результатів та їх обов'язковим обговоренням (під час аудиторних занять під керівництвом викладача). При цьому web-сервіс WA виступає у якості допоміжного інструменту, якій бере на себе виконання рутинних обчислень, що не стосуються даної навчальної теми. Завдяки цьому, виникає можливість зекономити навчальний час і розглянути набагато більшу кількість достатньо складних прикладів, у тому числі й прикладного змісту.

Схема дослідження функції $f(x)$ з використанням web-сервісу WA (перший (класичний) варіант):

I. *Перший етап* (*аналіз*). Мета: знайти характерні області, точки та лінії (асимптоти), що визначають загальний вигляд графіка функції (без застосування похідної). Завдання:

1. Знайти область визначення функції $f(x)$, точки її розриву. Використовується запит domain $f(x)$. Для дробово-раціональних функцій також можна скористатися запитом real roots of $q(x)$, де $q(x)$ – знаменник раціонального дробу, або $q(x)$!=0.

2. Знайти множину значень функції $f(x)$. Використовується запит range $f(x)$.

3. Знайти точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю Ox (нулі функції $f(x)$). Використовуються запити real roots of $f(x)$ або real solve $f(x)$.

4. Знайти точку перетину графіка функції f(x) з віссю Oy. Використовується запит solve $f(x)$, $x = 0$.

5. Знайти асимптоти графіка функції $f(x)$.

Використовується запит asymptotes $f(x)$. Щоб знайти окремо вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти, використовуються запити vertical asymptotes $f(x)$, horisontal asymptotes $f(x)$ та oblique asymptotes $f(x)$. Крім того, на запит asymptotes $f(x)$ web-сервіс WA виводить також поліноміальні та параболічні асимптоти графіка функції (якщо вони є).

Горизонтальні асимптоти можна знайти також, обчисливши границі функції $f(x)$ на нескінченності. Використовуються запити виду: lim $f(x)$ $x\to -\infty$ та lim $f(x)$ $x\to +\infty$. Замість символу ∞ при введенні запиту можна використовувати «infinity» або «oo»

Похилі асимптоти можна знайти також покроково, використавши рівняння похилої асимптоти: $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$. Використовуються запити: для відшукання k: lim $f(x)$ $x\to\infty$, для відшукання b: $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ $x\to +\infty$ (замість k підставити його значення, знайдене на попередньому кроці).

7. Уточнити поведінку функції $f(x)$ біля її вертикальних асимптоти. Для цього: обчислити односторонні границі функції $f(x)$ в усіх точках її розриву (п. 1). Використовуються запити lim $f(x)$ $x\to a$^– (лівостороння границя) та lim $f(x)$ $x\to a$^+ (правостороння границя).

8. Знайти координати точок перетину графіка функції $f(x)$ з її асимптотами (крім вертикальних).

Щоб знайти абсциси точок перетину графіка функції $f(x)$ та її асимтоти $g(x)$, використовується запит: real roots of $f(x) = g(x)$.

Щоб знайти ординати знайдених точок перетину $x=a, b, c, \ldots$ використовується запит: $f(x)$ where $x = a, b, c, \ldots$

II. *Другий етап* (аналіз). Мета: знайти критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів та екстремальні значення функції, кутові точки графіка функції (застосування похідної першого порядку). Завдання:

9. Знайти критичні точки першого роду (де похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує). Знаходимо похідну функції $f(x)$. Використовується запит: d/dx $f(x)$. Далі знаходимо дійсні нулі похідної. Використовується запит: real roots of $f(x)$. Дві попередні дії можна об’єднати в одну: real roots of d/dx $f(x)$. Знаходимо точки розриву похідної $f'(x)$, що належать області визначення функції $f(x)$: domain $f'(x)$.

10. Визначити інтервали монотонності функції $f(x)$. Для цього знаходимо інтервали знакосталості похідної $f'(x)$. Використовуються запити: solve $f'(x)> 0$ та solve $f'(x) < 0$.

11. Зробити висновок щодо точок екстремуму функції $f(x)$ за результатами п. п. 8 та 9. Використовується перша достатня ознака існування екстремуму функції однієї змінної.

12. Розрахувати екстремальні значення функції $f(x)$ в точках екстре-

муму $x = x1, x2, x3, \ldots$ (п. 10). Використовується запит: $f(x)$, where $x = x1, x2, x3, \ldots$ Розрахунок перевірити, використовуючи запит extrema $f(x)$ або запити maximize $f(x)$ та minimize $f(x)$. Окремо перевірити розрахунок кутових точок графіка функції (де похідна не існує). Використовується запит: corners $f(x)$.

III. *Третій етап* (аналіз). Мета: Знайти критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину (застосування похідної другого порядку). Завдання:

13. Знайти критичні точки другого роду функції $f(x)$(нулі її другої похідної). Знаходимо другу похідну f''(x) функції $f(x)$, запит: d2/dx^2 $f(x)$ або d2/dx2 $f(x)$. Далі знаходимо дійсні нулі другої похідної, використовується запит: real roots of $f''(x)$.

14. Визначити інтервали опуклості функції $f(x)$. Для цього: знаходимо інтервали знакосталості другої похідної $f''(x)$. Використовуються запити: solve $f''(x)$ >0 та solve $f''(x)$<0.

15. Зробити висновок щодо точок перегину функції $f(x)$ за результатами п. п. 12 та 13. Використовується достатня ознака існування точок перегину.

16. Розрахувати значення функції $f(x)$ в точках перегину (п. 14). Використовується запит: $f(x)$, where x =…. Розрахунок перевірити, використовуючи запит inflection points $f(x)$.

IV. Четвертий етап (синтез). Мета: побудова графіка функції за результатами проведеного дослідження (п. п. 1–15). Завдання:

17. Використовуючи результати п. п. 1–15 побудувати графік функції $f(x)$. Це завдання, особливо для потреб СРС, вимагає подальшої деталізації у вигляді окремих завдань:

17.1. накреслити систему координат (з урахуванням (п. 1 і 2);
17.2. позначити на вісі абсцис точки разриву функції (п. 1);
17.3. точки перетину графіка функції з віссю абсцис (п. 3) та з віссю ординат (п. 4);
17.4. накреслити вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти (п. 5);
17.5. позначити на кресленні за допомогою умовних позначок характер поведінки функції біля вертикальних асимптот (наприклад, стрілками) (п. 6);
17.6. позначити точки перетину графіка функції з її асимптотами (п. 7);
17.7. позначити на кресленні точки екстремуму, кутові точки (пп. 10, 11);
17.8. та точки перегину (п. п. 14, 15);

17.9. накреслити графік функції з урахуванням всіх позначок і точок, нанесених на креслення.

18. Перевірити візуально правильність побудови графіка функції (п. 16). Використовується запит: plot $f(x)$ $x=a..b$, де $[a, b]$ відрізок, що містить усі характерні точки функції, або asymptotes $f(x)$.

19. Проаналізувати геометричні властивості побудованого графіка (симетрія відносно вісі ординат та початку відліку системи координат та ін.) і сформулювати висновки щодо властивостей парності-непарності та періодичності даної функції $f(x)$.

Другий (прикладний) варіант алгоритму дослідження функцій однієї змінної з використанням web-сервісу WolframAlpha грунтується на використанні узагальнених запитів WA, які у першому варіанті рекомендовані лише, як засобі самоконсультацій та самоперевірки для студентів. Ці узагальнені запити дають змогу швидко виконати всі основні етапи дослідження функції, одержати необхідні числові результати, і зосередити всю увагу на формулюванні теоретичних та практичних висновків за результатами дослідження функції.

Схема дослідження функцій $f(x)$ з використанням web-сервісу WA (другий (прикладний) варіант):

I. Перший етап (аналіз). Мета: побудувати графік функції та вивчити її властивості: знайти характерні області, точки та лінії (асимптоти), що визначають загальний вигляд графіка функції. Завдання:

1. Побудувати графік функції $f(x)$, знайти його асимптоти. Запити: plot $f(x)$ та asymptotes $f(x)$.
2. Візуально оцінити: область визначення, множину значень функції.
3. Знайти на кресленні графіка точки розриву, асимптоти (по видах), точки перетину графіка функції з осями координат та асимптотами, точки екстремуму і кутові точки, точки перегину графіка функції, проміжки зростання та спадання функції, проміжки опуклості та угнутості графіка функції.
4. Оцінити геометричні властивості графіка функції $f(x)$ і сформулювати попередні висновки щодо властивостей парності-непарності та періодичності функції $f(x)$.
5. Знайти область визначення функції $f(x)$, точки її розриву. Запит: domain $f(x)$.
6. Знайти множину значень функції $f(x)$, запит: range $f(x)$.
7. Знайти точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю Ox (нулі функції $f(x)$) (якщо є, п. 3). Запити: real roots of $f(x)$ або real solve $f(x)$.
8. Знайти точку перетину графіка функції $f(x)$ з віссю Oy (якщо є, п. 3), запит: solve $f(x)$, $x = 0$.

9. Знайти координати точок перетину графіка функції $f(x)$ з її асимптотами $f(x)$ (якщо є, п. 3). Запит виду: $y = f(x)$, $y = g(x)$.

II. *Другий етап* (аналіз). Мета: знайти точки екстремумів та екстремальні значення функції, кутові точки графіка функції, інтервали зростання та спадання функції. Завдання:

10. Знайти координати точок екстремуму (якщо є, п. 3). Запит: extrema $f(x)$ або окремі запити maximize $f(x)$ та minimize $f(x)$.

11. Знайти координати кутових точок графіка функції (якщо є, п. 3). Запит: corners $f(x)$.

12. Знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ з урахуванням результатів п. п. 5, 10, 11 (творчий підхід). Або спочатку знайти похідну $f'(x)$, запит: d/dx $f(x)$, а потім інтервали монотонності функції $f(x)$, запити: solve $f'(x)$ >0 та solve $f'(x)$ <0 (формальний підхід).

III. *Третій етап* (аналіз). Мета: Знайти точки перегину графіка функції та значення функції в точках перегину, інтервали опуклості та угнутості графіка функції. Завдання:

13. Знайти точки перегину. Запит: inflection points $f(x)$.

14. Знайти інтервали опуклості та угнутості з урахуванням результатів п. п. 5, 13 (творчий підхід). Або спочатку знайти другу похідну $f''(x)$, запит: d^2/dx^2 $f(x)$ або d2/dx2 $f(x)$, а потім інтервали опуклості функції $f(x)$, запити: solve $f''(x)$ >0 та solve $f''(x)$ <0 (формальний підхід).

IV. Четвертий *етап* (синтез). Мета: описати властивості функції і сформулювати їх прикладну інтерпретацію.

Реалізація даного алгоритму засобами web-сервісу WA дозволяє швидко і безпомилково вивчати властивості доволі складних для дослідження функцій. Прикладом може бути, зокрема, подана нижче функція, яка є досить складною для точного дослідження методами диференціального числення:

$$y = \frac{5x^7 + 4x^6 - 3}{\left(3 + 2x - x^2\right)x^4}$$

Її графік, побудований в результаті дослідження за пропонованою схемою, має 11 основних характерних елементів, кожен з яких підлягає розрахунку (рис. 1).

Навчальні приклади такого рівня звичайно розраховані на студентів, які мають досить високий рівень базової математичної підготовки з елементарної математики. Використання web-сервісу WA певною мірою знімає це обмеження, нівелюючи технічну складність виконання завдання, і таким чином відкриває, для більшості студентів можливість зосередити увагу на засвоєнні загальної схеми дослідження функції, навчитися застосовувати її алгоритм до будь-яких функцій, без обмеження рівня складності. Завдяки цьому, при вивченні загальної схеми дослідження функції з використанням web-сервісу WA можна з однаковим успіхом розглядати поряд з простими навчальними прикладами, функції досить складного виду з реальним виробничим змістом.

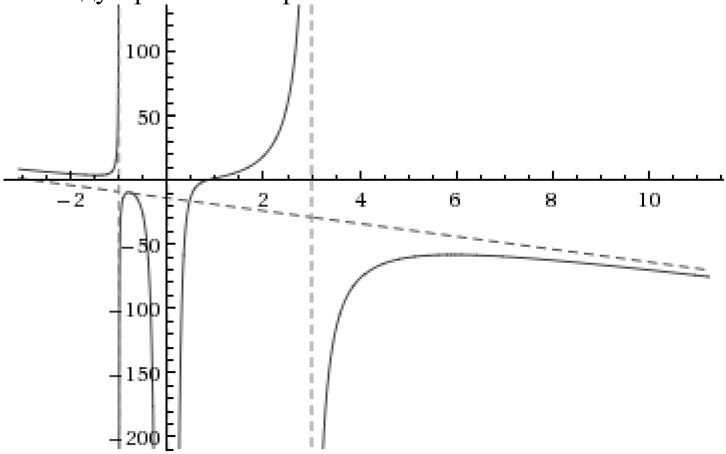


Рис. 1.

Запропонована у даній статті методика дослідження функцій однієї змінної за допомогою web-сервісу WA передбачає використання WA як допоміжного засобу, що дозволяє значно зекономити навчальний час, відкинувши більшу частину рутинної, переважно обчислювальної, роботи без шкоди для результатів навчання. Завдяки такому підходу студенти мають можливість зосередитися на математичній постановці задачі, загальному алгоритмі дослідження функції, змістовній прикладній інтерпретації кожного з її проміжних етапів, а також кінцевих результатів дослідження. При цьому, використання системи WA не підміняє традиційної навчальної активності студентів, а лише оптимізує її, надаючи можливість самостійно покроково контролювати і перевіряти свої розрахунки, терміново і вчасно одержувати авторитетну консультацію, бути впевненим у правильності власних математичних викладок і міркувань. Внаслідок цього зростає зацікавленість студентів до вивчення математики, створюється сприятливий емоційний фон, формується позитивне ставлення до вивчення дисципліни, розвивається їх самостійність, здатність до самостійного вирішення математичних проблем, у тому числі прикладного змісту. Якісні й кількісні показники успішності студентів, реальний рівень їх знань покращуються.

Одним з найбільш суттєвих позитивних моментів використання системи WA є те, що її свідоме цілеспрямоване використання передбачає обов'язкове володіння математичною символікою та термінологією, постійно спирається на відповідні математичні знання, вміння та навички студентів, усвідомлення і розуміння ними відповідних математичних понять, фактів, алгоритмів, а також їх математичного й практичного змісту. Таким чином, використання web-сервісу WA у навчанні математичних дисциплін сприяє формуванню й поглибленню знань, умінь та навичок з математики на теоретичному, практичному і прикладному рівні. А отже створює необхідні передумови для свідомого практичного використання математичних знань у сфері майбутньої фахової діяльності студентів.

Додаткові відомості щодо використання web-сервісу WolframAlpha при вивченні окремих питань вищої математики та інших математичних дисциплін та виконанні математичних розрахунків можна знайти в Інтернет-блозі автора за адресою http://wolframalpha-ru.blogspot.com та http://wolframalpha-ua.blogspot.com.

РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ ШКОЛЯРІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

О. С. Чашечникова
Україна, м. Суми, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
chash-olga@yandex.ru

Аналіз сучасного стану навчання математики свідчить, що існує протиріччя між декларуванням спрямованості на розвиток творчого мислення всіх учнів і реальним станом. Спостереження за навчальною та позакласною діяльністю з математики школярів основної й старшої школи, анкетування учнів та вчителів математики, бесіди з учителями, шкільними психологами, анкетування та тестування студентів-першокурсників Сумського національного аграрного університету (СНАУ), Української Академії банківської справи НБУ (УАБС НБУ), результати вступних іспитів з математики УАБС НБУ (вступники – представники всіх регіонів України та АР Крим; СНАУ, СумДПУ імені А. С. Макаренка, Сумського машинобудівного коледжу, олімпіад з математики міського та обласного рівнів свідчить: найбільш вдало розв'язують нестандартні завдання учні (випускники) саме тих шкіл, в яких традиційно в процесі навчання математики увага спрямована не лише на розширення обсягу теоретичних питань із предмета, навичок та вмінь, що мають засвоїти школярі, а й на розвиток їхнього творчого мислення. Зокрема, прагнення озброїти школярів готовими алгоритмами, заданими зразками виконання завдань (така тенденція особливо стала поширюватися після введення ЗНО) пригнічує в учнів здатність до творчості, стає причиною шкідливого автоматизму. Зростання прагматизму сучасних старшокласників впливає на визначення ними корисності вивчення конкретного матеріалу, для деяких з них вже нецікавими є оригінальні завдання, нестандартні методи розв'язування. Дані нашого дослідження виявили значий відсоток учнів з потенційними можливостями до вивчення математики, хто свідомо обрав навчання в класі нематематичного профілю, керуючись небажанням працювати наполегливо і систематично. Поза увагою залишаються учні, нестандартність і оригінальність мислення яких не можуть виявитися при навчання математики через недостатньо високий рівень знань з предмета.

Через обмеженість часу на вивчення математики у класах нематематичних профілів учителеві об'єктивно бракує можливості систематично використовувати проблемно-пошуковий, евристичний, дослідницький методи навчання, ознайомлювати учнів із різноманітними методами розв'язування задач, спонукати їх до пошуку різних способів. Недостатньо використовуються можливості ознайомлення із застосуваннями математичного апарату до майбутньої професійної діяльності згідно з обраним профілем навчання, мало пропонується прикладних задач, слабо спрацьовують міжпредметні зв'язки. Унаслідок цього зменшується зацікавленість учнів класів нематематичних профілів у вивченні математики, знижується рівень їхньої інтелектуальної активності.

У класах математичного профілю нерідко відбувається спрямованість на результат, який можна легко побачити, неадекватне збільшення навантаження, постійне вимагання перемог від учнів, безперервне змагання, що не сприяє створенню творчої атмосфери. Зарегламентованість навчання виражена в жорстких вимогах до оформлення письмових робіт, термінів їх виконання, форм подання відповідей, у розповсюдженості завдань у тестовій формі.

Аналіз стану проблеми продемонстрував, що процес формування й розвитку творчого мислення учнів у ході навчання математики не має цілеспрямованого, систематичного характеру, не враховується специфіка навчання різних груп учнів. Слід не лише спиратися на творче мислення учнів для підвищення їх рівня навченості з предмета, але й підпорядковувати формування системи знань і вмінь з математики меті розвитку творчого мислення.

Проаналізувавши різнопланові наукові позиції щодо сутності творчості, творчих здібностей, творчого мислення, творчу діяльність у навчанні математики трактуємо як найвищий рівень навчально-пізнавальної діяльності, як сферу виявлення й розвитку творчого мислення, вихід за межі вже поставлених завдань, пошук нових сфер реалізації власного потенціалу, нове усвідомлення й оцінювання власної діяльності та її результатів. У практиці навчання математики труднощі організації творчої навчально-пізнавальної діяльності всіх учнів часто пов'язані з тим, що завдання творчого характеру в підручниках водночас є завданнями підвищеного рівня складності. Уточнення дефініції поняття «творче завдання» надає змогу розширити коло завдань, які можна вважати творчими. Терміном «*умовно-творчі завдання*» [6] нами номіновані завдання, тексти яких достатньо переформулювати, щоб додати елемент творчості до навчального процесу. Нестандартність умов, вимог і підходів може бути як суб'єктивною, так і об'єктивною, тому нами запропоновано *авторську схему визначення нестандартності завдань* (нестандартні умови і вимоги завдань; відсутність на даному етапі відповідної бази знань і вмінь, необхідність нестандартного застосування наявної інтелектуальної бази). *Інтелектуальну базу учня* характеризуємо системою дієвих засвоєних знань та набутих умінь із математики, загальнонавчальних умінь, специфічних систем знань і вмінь з інших предметів, досвід їх використання.

Ефективна реалізація особистісно орієнтованої системи навчання математики передбачає урахування психолого-педагогічних засад диференційованого навчання та формування й розвитку творчого мислення, яка формально вимагає виокремлення занадто великої кількості типологічних груп. На практиці це неможливо і непотрібно. Важливо з метою підвищення ефективності розвитку творчого мислення учнів усіх груп у процесі навчання математики пропонувати широкий спектр різноманітних форм подання матеріалу, можливих форм запису (використання різноманітних знаково-символьних засобів грунтовно досліджені Н. А. Тарасенковою [2]), демонструвати різноманітність методів, підходів, стилів. Для оптимізації навчально-пізнавальної діяльності виділяємо завдання, що вимагають обов'язкового дотримання правил оформлення, і такі, виконання яких припускає «*експрес-розв'язання*».

Одним із головних принципів навчання має бути принцип заміни установки неуспіху на установку успіху, тому вводимо поняття *установки на творчий підхід* у навчанні математики (один з якісних показників творчого мислення – спрямованість учня діяти поза відомими алгоритмами для створення суб'єктивно нового продукту).

Необхідність враховувати зовнішній вияв творчого мислення для діагностування його розвитку в процесі навчально-пізнавальної діяльності учнів слід акцентувати увагу на можливостях використання того навчального матеріалу, що не виходить за межі відповідної програми, обґрунтовує доцільність введення авторської системи характеристик творчого мислення та показників їх розвитку.

Розвинене творче мислення учнів сприяє підвищенню успішності навчання математики, натомість формування якісної системи знань і вмінь із математики має бути підпорядкованим меті формування та розвитку творчого мислення, тому творчість у навчанні математики як обов'язковий компонент передбачає оперування якісною базою знань і вмінь із предмета. Збагачення інтелектуальної бази, її вдосконалення, не зменшуючи прагнення до пізнання, стає стимулом до творчості. Слід використовувати можливості навчання математики для розвитку творчої особистості учнів незалежно від обраного ними профілю навчання. Для оптимального використання можливостей розвитку творчого мислення в умовах масової школи необхідно застосовувати не лише спеціально організовані заходи щодо розвитку творчого мислення школярів, але й усі ресурси так званого «звичайного» навчального процесу.

Нвчально-пізнавальна діяльність, спрямована на розвиток творчої особистості учня, має формувати *готовність до творчості*. У контексті навчання математики назване терміносполучення ми трактуємо як достатньо високий рівень сформованості інтелектуальної бази з предмета, комплексу відповідних здібностей (як загальних, так і спеціальних), сформованість якостей особистості, які сприяють творчій діяльності, тому доповнюємо систему дидактичних принципів у контексті дослідження *принципом установки на надзавдання* та *принципом максимальної опори на наявні надбання учнів у інтелектуальній і творчій сферах*.

Система формування й розвитку творчого мислення учнів має включати рівноправні та взаємопов'язані компоненти: методичну систему формування якісної інтелектуальної бази учня з математики й систему створення творчого середовища в процесі навчання математики. Нами запропоновано *концептуальну модель системи формування та розвитку творчого мислення* учнів в умовах диференційованого навчання математики, творче середовище трактується як система взаємопов'язаних і взаємообумовлених блоків (змістовий; мотиваційно-стимулювальний; особистісний; організаційний; операційно-діяльнісний) [3].

Упровадження методичної системи навчання математики має бути спрямоване на формування математичної культури всіх учнів. Серед її складових виокремлено математичну грамотність, знання математичних методів і вміння їх застосовувати, озброєння навичками математичного моделювання. Дефініція поняття «математична грамотність» нами доповнена вимогою сформованості грамотної математичної мови, обчислювальної та графічної культури.

Визначення критеріїв оцінювання ефективності вивчення конкретних тем із математики з позиції розвитку творчого мислення учнів сприяє більш чіткому визначенню розвиваючих цілей і завдань кожного конкретного уроку, а тим самим – доцільному вибору виду уроку даного типу, продуманості його ефективної структури, визначенню системи методів і засобів навчання, добору доцільних систем вправ. Цілеспрямованість дій вчителя сприяє формуванню цілеспрямованості свідомої навчально-пізнавальної діяльності учня, виробляє в нього здатність до рефлексії в процесі самостійної діяльності.

Для підвищення спрямованості систем завдань із математики на розвиток творчого мислення школярів, розроблено підходи до створення завдань на розвиток оперативності мислення, на подолання стереотипів, на розвиток інтелектуальної компетентності. Крім того, використано систему завдань випереджального характеру. Можна спрямувати на розвиток творчого мислення і виконання тестових завдань. Розглядаючи тести як один із засобів оперативного контролю рівня навченості, рівня розвитку учнів, вводимо поняття «*тести-індикатори*» [4] – тести з математики, для яких надано правильні відповіді в різних формах представлення, що вимагає не лише вибрати одну відповідь, але й спонукає учнів до дослідження правильності інших варіантів.

Залежно від організації навчально-пізнавального процесу та ролі в ньому учня однаковий зміст і обсяг навчального матеріалу може зумовлювати як різний тип мислення, так і різні його рівні. Формуванню творчого мислення учнів у ході навчання математики сприяє диференційоване перекладання завдання пошуку нових відомостей та їх опрацьовування на учня, реалізація диференційованого підходу в процесі введення нового матеріалу через побудову логіко-структурних схем теоретичного матеріалу, поступове заповнення комірок у структурі, урізноманітнення форм подання та запису нового матеріалу. Підвищенню інтелектуальної самостійності учня сприяє необхідність по-новому структурувати навчальний матеріал в ході актуалізації знань і вмінь. Побудову змісту навчання на інваріантній основі нами реалізовано через урізноманітнення спецкурсів відповідно до обраного профілю навчання [3].

Зазначено, що розвиток творчого мислення учнів з математики не потребує виходу за межі відповідних навчальних програм. Розвиткові творчого мислення учнів сприяє посилення уваги доведенню теорем, розв'язуванню завдань на доведення (використання різних схем опрацьовування, лаконічних рисунків-схем доведення), на побудову, на дослідження, спонукання учнів до самостійного пошуку завдань. Щоб залучити до цієї роботи школярів, які відрізняються вихідним рівнем математичної підготовки та розвитку творчого мислення, запропоновано: системи завдань, рівень складності яких поступово підвищується завдяки варіативності умови; диференційовану допомогу учням у ході розв'язування завдань творчого характеру, диференційований підхід до оформлення завдань, використання *експрес-розв'язань* (фіксуються основні етапи, без пояснень) сприяє розв'язуванню нестандартних завдань в умовах домінування інтуїтивних аспектів над логічними. Системи вправ представлені як структурно-логічні схеми, що розкривають внутрітемні взаємозв'язки, сприяють розвитку інтелектуальної активності та творчої ініціативи. Відбувається підготовка учня до сприймання логіко-структурних схем теоретичного матеріалу, самостійної їх побудови.

Творче мислення передбачає самостійність суб'єкта, зменшення потреби учнів в отриманні зовнішньої допомоги в процесі розв'язування. Згідно з *принципом когнітивної візуалізації* (М. А. Чошанов [7]) ефективність засвоєння підвищується, якщо наочність виконує не лише ілюстративну, але й когнітивну функцію. На цьому принципі ґрунтовані: *мінімізація* (*лаконізація*) *ілюстрацій* (виробляється спроможність виділяти на рисунку не лише задані та шукані елементи, але й оперувати важливими в контексті задачі взаємозв'язками між ними); прийом «*кадрів-етапів*» (у ході подання для самостійного опрацьовування учнями розв'язання завдань ілюструюься рисунками не лише кінцеві результати, але й проміжні ланки розв'язування), що реалізовані нами у [3; 5]. Даний прийом доцільно використовувати і за допомогою програмних засобів (зокрема *Gran*1, *Gran*-2*D*, *Gran*-3*D*, *Eureka*, *Derive*), й у друкованих посібниках. Також на вищезгаданому принципі ґрунтується використання завдань на уявних моделях. Вироблення уміння учнів не лише застосовувати, але й створювати моделі – один із важливих кроків формування творчого мислення. Цьому ж сприяє доцільне поєднання традиційних і нових інформаційних технологій.

За Н. О. Менчинською [1] будь-яка якість мислення потребує для свого формування постановку спеціальних завдань, що вимагають її використання. З огляду на це для розвитку якостей творчого мислення пропонуємо систематичне використання завдань на усні обчислення, «прикидки», оптимізацію оперативності мислення, подолання стереотипів, формування оперативності та легкості переходу від одного поняття до іншого, зміщення акцентів, на кмітливість, прогнозування, розвиток уяви та інтуїції. Для врахування особливостей різних груп учнів запам'ятовування матеріалу організовуємо як на логічній основі, так і на основі його творчого трансформування, через використання асоціацій, метафор. Установленню міжасоціативних зв'язків сприяє не лише ілюстрація вчителем математики міжпредметних зв'язків, але й виконання учнями дослідницьких завдань на знаходження застосувань певних відомостей в інших галузях, проведення інтегрованих уроків. Створенню творчого середовища сприяють: навчання учнів в умовах організації *динамічних диференційованих груп*, залучення учнів до *систематичної роботи у творчих групах*, створення передумов для творчої діяльності з математики через *пропонування довгострокових творчих домашніх завдань*. Для підвищення ефективності розвитку творчого мислення учнів доцільним є проведення поряд з традиційними *олімпіад з математики для учнів класів нематематичних профілів окремо*, що потребує зміщення акцентів на завдання, виконання яких надає змогу застосовувати оригінальні, нестандартні підходи. Нами проводилися такі олімпіади на базі СНАУ, УАБС, Центру науково-технічної творчості молоді м. Суми, а в цьому році планується проведення математичних змагань на базі Севастопольського інституту банківської справи УАБС НБУ.

Часто робота з розвитку творчого мислення в ході навчання математики зазнає уповільнення, оскільки вчитель змушений планувати значну кількість часу для виконання рутинної роботи. Запропонована нами комп'ютерна програма «Консультант-тренажер» (авторське свідоцтво

35866–№36047; заяв. 29.09.2010) спрямована на інтенсифікацію навчання математики з метою надання можливості вчителеві використовувати звільнений час для розв'язування завдань творчого характеру.

Висновок. Розвиток творчого мислення є відтермінованим результатом навчання математики, що може проявитися іноді через достатньо тривалий термін, надбанням на все життя, що спрацьовує не лише у навчально-пізнавальній діяльності з математики. Поштовх до творчої діяльності, отриманий у процесі навчання математики, позитивно впливає й на творчу діяльність у ході засвоєння інших предметів.

Література

1. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника / Н. А. Менчинская ; [избр. труды]. – М. : Педагогика, 1989. – 224 с.
2. Тарасенкова Н. А. Теоретико-методичні основи використання знаково-символьних засобів у навчанні математики учнів основної школи : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Тарасенкова Н. А. – Черкаси, 2003. – 630 с.
3. Чашечникова О. С. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики : монографія / О. С. Чашечникова. – Суми, 2011. – 412 с.
4. Чашечникова О. С. Тести : можливості подолання протиріччя між вимогою об'єктивності оцінки знань учнів та необхідністю врахування їх індивідуальних особливостей / О. С. Чашечникова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 21. – Донецьк : ТЕАН, 2004. – С. 99–105.
5. Чашечникова О. С. Функції та їх графіки. Побудова графіків функцій та рівнянь, аналітичний вираз яких містить тригонометричні функції / О. С. Чашечникова, Л. Г.Чашечнікова, О. В. Мартиненко. – [2-е вид., доповнене]. – Рівне : Волинські обереги, 2009. – 72 с.
6. Чашечникова О. С. Використання умовно-евристичних завдань з метою підвищення ефективності навчання математики учнів та студентів / О. С. Чашечникова, Чухрай, О. М. Нестеренко, О. О. Степаненко : матеріали Всеукр. наук.-практ. конференції «Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів в процесі вивчення математичних дисциплін». − Ялта : РВВ КГУ, 2007. – С. 133–135.
7. Чошанов М. А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения / Чошанов М. А. – М. : Народное образование, 1996. – 160 с.

ПОЯСНЕННЯ ЯК СПЕЦИФІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ЛЕКЦІЙНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Л. О. Черних
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
laracher@pochta.ru

Лекція у вищій школі залишається провідною формою організації навчального процесу. Її мета – формування орієнтовної основи для подальшого засвоєння студентами навчального матеріалу. Лекції з дисциплін вищої математики повинні сприяти також якісному первинному засвоєнню системи математичних знань.

Проблема сприйняття та усвідомлення навчального математичного матеріалу з перших етапів його пред'явлення на лекції – актуальна проблема сучасної вищої школи. Розкриття сутності, зв'язків та відношень, практичного застосування нових знань відбувається в процесі пояснення викладачем означень математичних понять, доведення теорем, побудови алгоритмів розв'язання задач.

В сучасній психолого-педагогічній літературі дидактичне пояснення трактується по-різному: як окремий метод навчання; як етап уроку (лекції); як окрема дія викладача або студента; як діяльність викладача, пов'язана з передачею нових знань та способів дій. Всі ці трактовки пояснення відображають лише один напрям впливу - від викладача до студента. Ця позиція потребує істотного уточнення, яке б враховувало активність студента.

Мета даної статті – розкрити характеристику пояснення як специфічної діяльності на лекціях з математичних дисциплін та визначити основні напрямки його удосконалення.

Будь-яка людська діяльність, зокрема, навчання, є, перш за все, предметною і характеризується взаємодією (та взаємним змінюванням) суб'єкта та об'єкта діяльності в певних умовах протікання, направленістю, використаними засобами та способами. Відмінність окремих діяльностей за їх предметами дозволяє виділити пояснення як специфічну діяльність викладача, зокрема, викладача математики. Основним мотивом пояснення слід вважати таке (інколи мінімальне) роз'яснення навчального матеріалу та створення таких умов, за яких даний навчальний матеріал з нейтрального для студентів об'єкта перетворюється на об'єкт «для них», тобто на предмет їх пізнавальної діяльності. Таким чином, продуктом пояснення як специфічної діяльності слід вважати суб'єктивний (для студентів) образ навчального матеріалу, що стає предметом їх власної пізнавальної діяльності. Тому предметом пояснення (як діяльності) є ідеалізований образ навчального матеріалу, що містить його сутність, викликає у студентів інтерес і спонукає їх до подальшого самостійного вивчення.

Таке розуміння предмета пояснення та його продукту дозволяє не тільки виділити його як специфічну діяльність, але й намітити основні напрямки його удосконалення. Щоб зазначити та конкретизувати ці напрямки удосконалення дидактичного пояснення, розглянемо змістовну сторону цієї діяльності (дії, операції, структуру), функції та умови протікання.

Основними одиницями змісту людської діяльності виступають дії. Під дією розуміють процес, підпорядкований свідомій меті, тобто, підпорядкований уявленню про результат, якого прагне людина, що виконує дію. Наведемо приклади деяких дій, які здійснює викладач в процесі пояснення навчального математичного матеріалу:

- викладач ставить питання до студентів з метою виявлення їх попередніх знань і досвіду, необхідних для засвоєння та розуміння нового матеріалу;
- викладач наводить конкретні приклади поняття, підкреслюючи в кожному з них спільне; мета – підвести студентів до формулювання нового означення;
- викладач повідомляє певні додаткові відомості про новий матеріал: пояснює походження терміна, надає історичну довідку, розповідає про практичне застосування; мета – вплинути на мотиваційну сферу студента, тобто викликати інтерес та бажання розібратися в сутності нового матеріалу;
- викладач демонструє на дошці рисунки, наводить приклади та контрприклади нового поняття; мета – допомогти студентам побачити істотні ознаки нового поняття на фоні певних неістотних;
- викладач звертається до студентів з певними вимогами: виконати рисунок, сформулювати означення, прочитати теорему, провести частину доведення за аналогією та ін.; мета – з'ясувати рівень розуміння студентами викладеного матеріалу.

Кожна дія викладача в процесі пояснення направлена в кінцевому результаті на студента, на його пізнавальну діяльність Дії викладача викликають відповідні дії студентів: студенти слухають, пригадують, аналізують, співставляють, роблять висновки, дають відповіді на питання, виконують побудови, конспектують та ін. Навчальний матеріал, «оброблений» викладачем, виступає посередником в процесі взаємодії викладача і студента під час пояснення.

Реальний процес пояснення не можна звести до простої суми дій.

Пояснення існує як окрема дія або як ланцюг дій, в якому кожна наступна дія визначається характером та результативністю попередніх дій. Якщо пояснення направлене на безпосередню мету – розкрити сутність, наприклад, деякого факту, то воно виступає як дія. Якщо ж воно має самостійний спонукальний мотив – перетворити сприйнятий навчальний матеріал у предмет подальшого вивчення, то пояснення стає діяльністю й може здійснюватися через певні дії, підпорядковані конкретним цілям.

Будемо розглядати пояснення як діяльність викладача, яка здійснюється певними засобами через систему певних дій, підпорядкованих свідомим цілям і направлених на відповідну діяльність студентів. Суб'єктивне виділення мети (усвідомлення суб'єктом очікуваного результату) в педагогічному процесі виступає з двох сторін – з позиції викладача і з позиції студента. Зовні це виглядає так: викладач висуває перед собою певні цілі і, як правило, пропонує студентам «готову» мету, зрозуміло, змінену, відмінну від своєї. Процес же прийняття студентом цієї мети, тобто сам процес цілеутворення для студента, виступає в навчальній діяльності не так явно, як в інших видах діяльності. Психологи вважають, що основною формою цілепокладання в навчальній діяльності є прийняття студентом завдань, перетворених в навчальні задачі. Свідомість учіння визначається тим, яке структурне місце в діяльності студента займає пред'явлений йому зміст. В свою чергу, щоб зміст, який сприймається, був усвідомлений, необхідно, щоб цей зміст займав у діяльності суб'єкта структурне місце безпосередньої мети дії.

Спільна діяльність викладача і студентів в процесі пояснення нового матеріалу на лекції з математики з організаційної точки зору повинна складатися з трьох етапів: підготовчого, основного та заключного. Перший, підготовчий етап включає мотивацію, зв'язок з попереднім матеріалом, повідомлення теми лекції. На цьому етапі студенти усвідомлюють, для чого слід вивчати дану тему і що саме буде вивчатися. Студентам під керівництвом викладача необхідно з'ясувати, чи готові вони до вивчення нової теми, що треба повторити, що уточнити. Слід відмітити, що мотивації, як правило, відводять місце на першому етапі пояснення. Це не обов'язково. Інколи слова викладача про необхідність вивчення даного матеріалу звучать більш переконливо, коли матеріал, хоча б в загальних рисах, усвідомлений студентами. Тоді більш детальне, можливо, повторне пояснення стає найбільш ефективним; до того ж економиться час на першому етапі пояснення (який іноді невиправдано затягують).

Зупинимось детальніше на такій складовій підготовчого етапу пояснення, як повідомлення теми лекції та її обґрунтування. Ця дія викладача має важливе значення для активізації студентів. Щоб правильно поставити та обґрунтувати тему лекції, слід виявити логічний зв'язок нової теми з попередніми. Цього можна досягти такими прийомами:

- спираючись на відомі студентам факти, підвести їх до висновку, розкриттям якого є зміст нової теми;
- спонукати студентів до такого співставлення відомих їм явищ та фактів, щоб в результаті у них виникло питання, відповідь на яке дає новий навчальний матеріал;
- організувати самостійну практичну роботу студентів, в результаті якої вони можуть зробити попередні емпіричні висновки та зацікавитися теоретичним їх обґрунтуванням;
- здійснювати постановку теми лекції на основі певної математичної задачі, практичне значення якої відоме студентам з досвіду.

Питання про постановку теми лекції має істотне значення і з точки зору антиципації (попереднє передбачення наступного змісту). Відомо, що під час формулювання теми у студентів виникають певні припущення, щодо змісту майбутнього пояснення. Ці первинні уявлення мають вплив на засвоєння нових знань. Незначні відхилення в припущеннях студентів від змісту нового матеріалу викликають у них критичне ставлення до своїх первинних уявлень та мають позитивне значення, оскільки активізують процес засвоєння. Припущення, які значно розходяться зі змістом нової теми, можуть викликати різні емоційні переживання, що знижують ефективність засвоєння (розчарування, незадоволення) та уяву, що уводить в бік від теми лекції. Саме тому постановка теми лекції повинна бути повною і зрозумілою студентам з точки зору їх особистого досвіду та знань. Щоб досягти цього, викладачу слід в постановку теми включати не тільки її формулювання, але й формулювання цілей майбутньої діяльності. У звичайному, широко розповсюдженому розумінні, мета – усвідомлене передбачення майбутнього результату дії. Цінним в цьому відношенні є сучасний погляд на мету як складне утворення, яке містить у собі у згорнутому вигляді весь образ дії по створенню предмету.

Другий етап пояснення – основний – полягає для викладача у пред'явленні нової інформації, розкритті сутності нового змісту, встановленні зв'язків (всередині нової теми, з раніше вивченим матеріалом, з іншими фізико-математичними дисциплінами), в організації діяльності студентів, направленої на сприйняття та усвідомлення істотних сторін навчального матеріалу, на оволодіння новими діями та операціями. Результатом (продуктом) перших двох етапів пояснення повинен стати створений у студентів суб'єктивний образ навчального матеріалу. Такий образ має бути цілісним та містити у взаємозв'язку істотні елементи нового змісту.

На заключному етапі пояснення слід підвести підсумки спільної роботи на засвоєння нового змісту. Зрозуміло, що дії контролю супроводжують весь процес пояснення; викладачу необхідно постійно орієнтуватися в тому, як сприймають і усвідомлюють студенти пояснення протягом всієї лекції, починаючи з підготовчого етапу і закінчуючи підведенням підсумків. Відсутність заключного етапу перетворює пояснення на випадкову, нерегульовану сукупність дій; при цьому втрачається мета діяльності та відсутнє уявлення про її досягнення. Відмітимо, що заключний етап пояснення ані за змістом, ані за часом не збігається з підведенням підсумків засвоєння теми. На цьому етапі пояснення відбувається первинне оцінювання того, як сприймається та усвідомлюється студентами зміст нового теоретичного матеріалу. Даний етап, що є заключним для пояснення, в той самий час служить перехідним від пояснення до інших форм і видів діяльності, зокрема, до організації спільної діяльності викладача і студентів в процесі розв'язування задач як під час лекції, так і на практичних заняттях.

Ми розглянули змістовну сторону пояснення та обґрунтували доцільність такої його організації, яка передбачає трьохетапну його реалізацію. Важливе значення для розкриття сутності пояснення на лекціях з математичних дисциплін має питання про функції пояснення. Зрозуміло, що вивчення пояснення не можна звести тільки до описання функцій цієї діяльності, але знання та розуміння функцій, тобто зовнішніх проявів властивостей пояснення в системі певних відношень, допоможе викладачу зрозуміти і саму сутність даної діяльності, і її завдання, і шляхи її удосконалення.

Назвемо основні функції дидактичного пояснення.

Освітня функція. Основною функцією пояснення завжди вважалась передача нових знань (передача соціального досвіду). Вона збереглася за поясненням до нашого часу, оскільки є соціально обумовленою: головна соціальна функція освіти – передача досвіду, накопиченого попередніми поколіннями. Цей досвід являє собою діяльність, втілену у знаннях, уміннях, творчості та ставленні до світу. Знання є інструментом будь-якої діяльності. І викладач математики під час пояснення озброює студентів перш за все математичними знаннями. Сучасне розуміння освітньої функції пояснення дозволяє розкрити одну з характерних особливостей пояснення в сучасній вищій школі – передаються не тільки знання, передається соціальний досвід в усіх його загальних елементах, куди входять, крім знань, уміння і навики (як досвід здійснення відомих способів діяльності), досвід творчої, пошукової діяльності, пов'язаної з розв'язанням нових проблем, та система емоційно-вольової та естетичної вихованості (як досвід ставлення до світу, до інших людей).

Освітня функція пояснення проявляється в науковості пред'явленої інформації, включенні в неї додаткових знань для забезпечення засвоєння, у зв'язку з життям, у проникненні в сутність матеріалу. При поясненні відбувається логіко-дидактичне розкриття сутності фактів, що вивчаються на лекції. Функція, що полягає у розкритті сутності та закономірних зв'язків між явищами, притаманна і науковому поясненню; таким чином, вона є спільною для дидактичного пояснення та пояснення в науці.

Основною рисою дидактичного пояснення, яка відрізняє його від інших форм, способів, шляхів передачі студентам знань (в широкому розумінні), є особлива організація, особлива побудова діяльності викладача, при якій ці знання стають особистим здобутком студента. Процес пізнання матеріалу, який пояснюється, найбільш ефективний та економний, оскільки цей матеріал має бути представлений студентам у найбільш доцільному для засвоєння вигляді.

Підфункцією освітньої функції пояснення є його комунікативна функція. Ця функція відповідає необхідності педагогічного спілкування викладача і студентів в процесі пояснення. Поза спілкуванням пояснення взагалі неможливе. Комунікативна функція проявляється у наявності (або відсутності) контакту з аудиторією: увага, дисципліна студентів під час пояснення, виконання вимог викладача, зворотні дії студентів, напруження в процесі слухання, інтерес, активність сприйняття.

<u>Виховна функція.</u> Будь-який акт навчання має виховний вплив. Але щоб виховання під час пояснення йшло в позитивному руслі та повному обсязі, викладачу слід будувати пояснення таким чином, щоб воно, стикаючись з емоційно-вольовою сферою студента, закріплювало її, підсилювало, сприяло її формуванню. Предметний зміст, що пропонується студентам під час пояснення, сам по собі може не мати підґрунтя для емоційного впливу (саме це ми часто маємо при вивчені більшості математичних понять і теорем). Але якщо пояснення лягає на підготовлений інтерес до математики, то мотиви, що збуджують цей інтерес, впливають і на засвоєння окремих питань навчального матеріалу.

З іншого боку, зміст математичного матеріалу сам по собі має значні виховні можливості. Навчання математики передбачає розвиток уяви, абстрактного, логічного, алгоритмічного мислення, вимірювальних навиків, які широко застосовуються в майбутній практичній діяльності студентів. При поясненні математичного матеріалу можливе використання багатьох відомостей з історії науки, особливо вітчизняної, що має велике виховне значення. Зміст навчальних математичних дисциплін містить багатий матеріал для формування наукового світогляду студентів. Активність та свідомість оволодіння основами наукового світогляду залежить як від змісту, так і від методів навчання, від того, наскільки цілеспрямовано та систематично вони підводять студентів до світоглядних висновків. У зв'язку з цим особливе значення в процесі вивчення математики у вищій школі набуває світоглядне положення про практику, яка породжує теорію, служить середовищем для її застосування і є критерієм істини теоретичних побудов.

Поширена думка, що вивчення математики сприяє лише розумовому розвитку людини і не зачіпає духовних, морально-етичних компонентів людської особистості. З цим не можна погодитись. Математична наука в процесі свого розвитку накопичила величезний запас загальнолюдських, загальнокультурних цінностей. Зокрема, вивчення геометрії дозволяє зрозуміти красу та закономірності навколишнього світу, розвинути естетичний смак, художньо-графічну культуру тощо. Розвиток моральності передбачає формування вміння доводити твердження, відстоювати свою думку, обґрунтовувати свої висновки. Уже в процесі пояснення нового матеріалу викладач повинен враховувати ці можливості.

<u>Розвиваюча функція.</u> Пояснення – важливий засіб розвитку якостей мислення, що необхідні освіченій людині для повноцінного функціонування у сучасному суспільстві (зокрема, логічного, евристичного, алгоритмічного, графічного мислення). З одного боку, пояснення викладача є для студентів зразком послідовних, несуперечливих, обґрунтованих міркувань. З іншого боку, пояснення повинно будуватись так, щоб спонукати студентів до розв'язання різноманітних пізнавальних навчальних задач; їх розв'язування є основним засобом розвитку мислення студентів. Підкреслимо, що можливості для розвитку розумових, творчих здібностей студентів закладені уже в процесі пояснення, тобто на першому етапі знайомства студентів з новим матеріалом. Викладачу слід максимально використовувати ці можливості, не переносячи повністю вирішення проблеми розумового розвитку студентів на наступні етапи навчання.

Урахування та реалізація основних функцій пояснення (освітньої, виховної, розвиваючої) дозволяє викладачу підвищити ефективність цієї діяльності, підсилити взаємодію із студентами, вплинути на їх розумовий розвиток, емоційно-вольову сферу.

Підсумовуючи, зазначимо, що дидактичне пояснення як специфічна діяльність характеризується своїм предметом і продуктом. Суб'єктом її у вищій школі є викладач, об'єктом – особистість студента (сукупність інтелекту, світогляду, моральних та емоційно-вольових якостей). Основним продуктом такої діяльності виступає образ навчального матеріалу (суб'єктивний для студента), що стає для нього предметом подальшого вивчення. Спостереження за реальним процесом навчання студентів вищої математики виявляють таке протиріччя: з одного боку, пояснення – один з основних видів діяльності викладача вищої школи, без пояснення не можна обійтися при вивченні математичних дисциплін; з іншого боку, традиційні форми пояснення часто бувають малоефективними, недостатньо активізують пізнавальну діяльність учнів, не сприяють реалізації основних функцій пояснення. Уточнення психолого-педагогічної характеристики пояснення як специфічної діяльності викладача математики дозволяє з'ясувати важливі напрямки його удосконалення. Подальша розробка даного дослідження потребує вивчення можливостей підсилення взаємодії викладача і студентів з урахуванням рівня самостійності студентів в процесі пояснення.

Література

1. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – М. : Смысл ; Академия, 2005. – 352 с. – (Классическая учебная книга).
2. Яценко А. И. Целеполагание и идеалы / Александр Иванович Яценко. – К. : Наукова думка, 1977. – 275 с.
3. Болюбаш Я. Я. Організація навчального процесу у вищих закладах освіти : навч. посібник для слухачів закладів підвищення кваліфікації системи вищої освіти. – К. : КОМПАС, 1997. – 64 с.
4. Смирнов С. Д. Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности / С. Д. Смирнов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Академия, 2005. – 400 с.
5. Арыдин В. М. Учебная деятельность студентов / В. М. Арыдин, Г. А. Атанов. – Донецк : ЕАИ-пресс, 2000. – 77 с.

ПРО ПОНЯТТЯ МОДУЛЯ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Л. О. Черних [α], А. Г. Бурда [β]
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
[α] laracher@pochta.ru
[β] Sasori_88@mail.ru

Поняттям модуля оперують в різних розділах математики, хоча інколи під різними назвами – абсолютне значення, норма та ін. Всі вони є, по суті, узагальненням поняття абсолютної величини дійсного або комплексного числа.

Вважають, що термін «модуль» запропонував Р. Котс, учень І. Ньютона. Г. В. Лейбніц теж використовував це поняття, яке називав модулем і позначав: mol x. Загальноприйняте позначення абсолютної величини введено в 1841 р. К. Вейерштрассом. У 1903 р. Х. А. Лоренц використовував цю ж символіку для довжини вектора. Для комплексних чисел поняття модуля ввели О. Л. Коші і Ж. Р. Арган на початку XIX століття.

Вивчення поняття модуля в шкільному курсі математики та в курсах вищої математики сприяє формуванню в учнів та студентів розвитку логічного, алгоритмічного, наочно-образного мислення.

Мета статті – розглянути різні трактовки поняття модуля в математичних курсах вищої школи та ШКМ; дослідити можливості розвитку алгоритмічного мислення учнів при вивченні модуля числа.

В курсах вищої школи поняттям модуля оперують в математичному аналізі (модуль дійсного числа, модуль комплексного числа), в геометрії (модуль вектора, модуль сімейства кривих), в алгебрі (модуль елемента упорядкованого поля, модуль автоморфізму). Взагалі, модуль – це числова характеристика деякого математичного об'єкта.

Зазвичай значення модуля – невід'ємне дійсне число (елемент множини $\Re_0^+$), що має деякі характеристичні властивості, які обумовлені властивостями множини A розглядуваних об'єктів. При цьому функція A виявляється морфізмом деякої структури в A на одну з (алгебраїчних) структур в $\Re_0^+$, серед яких найважливіші – це порядок, адитивність та мультиплікативність. У більш абстрактних ситуаціях замість $\Re_0^+$ використовують упорядковані півкільця (міра, маса, ємкість та ін.). Нарешті, терміном «модуль» позначають числові характеристики і інших об'єктів: модуль плоскої області, модуль кільця, модуль ріманової поверхні, модуль неперервності та ін.

Теоретичною основою поняття модуля дійсного числа, яке вивчається в шкільному курсі математики, є поняття модуля елемента упорядкованого поля, яке розглядається в курсі вищої алгебри. Там вводять таке означення:

Модулем (абсолютною величиною, абсолютним значенням) елемента a упорядкованого поля називається такий елемент упорядкованого поля, який позначається $|a|$ і визначається за таким правилом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq \theta, \\ -a, \text{ якщо } (-a) > \theta. \end{cases}$$

Потрібно зазначити, що під a розуміють елемент довільної природи, хай тільки він належить деякому упорядкованому полю. Взагалі кажучи, знаходження модуля числа (елемента числового поля) – це унарна алгебраїчна операція, яка кожному елементу деякої числової системи ставить у відповідність цілком певний елемент цієї ж системи. В курсі абстрактної алгебри доводять загальні властивості модуля елемента будь-якого упорядкованого поля. Якщо $\boldsymbol{P} = \langle P;\oplus,\otimes \rangle$ – упорядковане поле, то:

1. $(\forall a \in P)[|a| = |-a|]$;
2. $(\forall a \in P)[|a| \oplus a \geq \theta]$;
3. $(\forall a, b \in P)[|a \oplus b| \leq |a| \oplus |b|]$;
4. $(\forall a, b \in P)[|a \otimes b| = |a| \otimes |b|]$.

В курсі математичного аналізу широко використовується як поняття модуля дійсного числа, так і поняття модуля комплексного числа. Оскільки поле комплексних чисел упорядкувати, взагалі кажучи, неможна, то введене в курсі алгебри означення модуля елемента упорядкованого поля неможна формально перенести в цю числову систему. При вивченні функцій комплексної змінної детально розглядають алгебраїчну, тригонометричну, показникову форми комплексного числа. Ідея модуля комплексного числа з'являється при переході від алгебраїчної до тригонометричної форми запису комплексних чисел.

Формуючи у студентів поняття «модуль комплексного числа», доцільно провести аналогію з поняттям «модуль дійсного числа». З геометричної точки зору, модуль дійсного числа – це відстань від початку відліку до точки, яка відповідає цьому числу на числовій прямій. Аналогічно, модуль комплексного числа – це відстань від початку координат до точки, яка відповідає цьому числу на координатній площині. Важливо підкреслити, що це твердження є більш загальним, оскільки кожне дійсне число є комплексним. Тепер всі дійсні числа зображуються точками координатної площини, які лежать на вісі OX, саме тому вона називається дійсною віссю.

В шкільному курсі математики поняття модуля нерозривно пов'язане з введенням поняття від'ємного числа. Виникає ряд суперечок про правильність пояснення ролі, значення, «особливого змісту» від'ємного числа. Один з прикладів пояснення – зміна висоти польоту чи стрибки температури. Такі пояснення інколи суперечать інтуїтивним уявленням і досвіду учнів. Наприклад, якщо висота змінилась з 20 м до 17 м, то сказати, що вона змінилась на (–3) метри неможна, оскільки (–3 м) – це три метри нижче рівня моря. Дане протиріччя розглядається в статті Ю. В. Покорного та К. П. Лазарєва [4]. Автори пропонують змінити схему вивчення від'ємних чисел. В процесі пояснення даного поняття можна користуватись, наприклад, годинником, оскільки учні часто чують фрази типу: «без чверті друга; без п'яти перша» і розуміють інтуїтивно, що вони значать. Автори даної статті пропонують таке означення:

«Якщо a – число арифметичне, то запис (вираз) «$+a$» називається додатнім числом, а запис «$–a$» називається від'ємним числом. Для нового числа $c=+a$ або $c=–a$ вихідне число a називається абсолютною величиною (модулем) c, а відповідний знак «+» або «–» називається знаком нового числа c»[4, 28].

В даному означенні одразу вводять і поняття «модуль числа» і поняття «знак числа». На нашу думку, таке означення може спричинити хибні уявлення учнів про те, що таке від'ємні числа.

В більшості сучасних підручників та навчальних посібників з математики [1], [2], [5] поняття модуля числа вводиться на основі його геометричного змісту:

Відстань від початку координат до точки з координатою a називають *модулем числа a.* Позначають його $|a|$. Використовуючи координатну пряму, розглядають конкретні приклади на знаходження модулів різних чисел і формулюють висновок*:* модулем додатного числа є саме це число; модулем нуля є нуль; модулем від'ємного числа є протилежне йому число. Символічною мовою цей висновок традиційно записують так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0, \\ 0, \text{ якщо } a = 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Слід звернути особливу увагу на цей запис (нетрадиційне використання фігурної дужки в математичному записі) та його значення для подальшого вивчення поняття модуля числа. Сутність даної схеми буде основою для побудови алгоритмів розв'язання багатьох видів рівнянь та нерівностей з модулем, побудови графіків функцій, що містять знак модуля.

Процедура знаходження модулів конкретних чисел є нескладною для більшості учнів. Інша справа, коли вміння знаходити модуль числа є складовою частиною іншого, комплексного вміння, наприклад, виконання дій над числами з різними знакам: 17+(–8), –9+57, –23–56 і т.п.

Для обґрунтування правил додавання від'ємних чисел та чисел з різними знаками доцільне використання геометричних інтерпретацій (зображення чисел точками координатної прямої; рух по координатній прямій вправо та вліво при додаванні та відніманні). Для формулювання, запам'ятовування та використання відповідних правил (наприклад додавання від'ємних чисел) застосовується поняття «модуль числа». При цьому поняття модуль числа виконує «технічну функцію»: коли відповідні дії доведені до автоматизму, термін «модуль числа» в міркуваннях учнів відсутній.

Подальшому розвитку поняття «модуль числа» сприяють задачі на розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, на побудову графіків функцій, що містять знак модуля. Найперші труднощі і недоліки в засвоєнні поняття модуля виявляються саме тоді, коли під знаком модуля стоїть не конкретне число, а вираз, що містить змінну. Навчання учнів розв'язанню рівнянь із знаком модуля слід розпочинати з найпростіших випадків $|x|=3$, $|x|=0$, $|x|=-5$.

Рівняння $|x|=3$ цілком природно розв'язати усно, поставивши учням питання: «Модуль якого числа (чисел) дорівнює 3?». Таке питання, як правило, не викликає в учнів забруднень. Необхідність підготувати учнів до розв'язання більш складних рівнянь з модулем вимагає застосування ще одного способу розв'язання – на основі раніше зазначеної схеми:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Отже за схемою, якщо $x>0$, то модуль числа дорівнює самому цьому числу, тобто $x=3$; якщо $x<0$, то модуль числа дорівнює числу йому протилежному, тобто $-x=3$, отже $x=-3$.

Аналогічно, поставивши перед учнями питання: «Модуль якого числа дорівнює 0?», усно розв'яжемо дане рівняння. Воно має єдиний розв'язок: $x=0$.

Розв'язуючи разом з учнями рівняння $|x|=-5$, особливу їх увагу звертаємо на те, що модуль будь-якого числа є числом невід'ємним, тому дане рівняння розв'язків не має.

Аналогічно, щоб навчити учнів розв'язувати нерівності з модулем, слід розпочати з найпростіших:

a) $|x| < 3, |x| \le 3;$

b) $|x| > 3, |x| \ge 3;$

c) $|x| < 0, |x| \le 0;$

d) $|x| > 0, |x| \ge 0;$

e) $|x| < -4, |x| \le -4;$

f) $|x| > -5, |x| \ge -5.$

Шестикласники такі нерівності розв'язують на основі геометричного трактування поняття модуля числа. Особливу увагу тут приділяємо розв’язанню нерівностей d)–f).

В шкільному курсі алгебри 7–9 класів поняття модуля застосовують на етапі узагальнення та систематизації знань учнів з інших тем. Якщо рівняння містить один модуль, то застосовується ідея розв’язання за раніше зазначеною схемою. Рівняння, що містить декілька модулів дає можливість залучити учнів до побудови спеціальних алгоритмів розв’язання відповідних задач.

Курс алгебри та початків аналізу 10 класу профільної школи містить значну частину навчального матеріалу, пов’язаного з темою «Модуль». Методика вивчення відповідного матеріалу повинна бути направлена на систематизацію та узагальнення поняття модуля числа та сприяти формуванню в учнів прийомів алгоритмічної діяльності.

Для систематизації знань учнів з методів розв’язання рівнянь та нерівностей з модулем можна скористатися таблицею, яка запропонована в підручнику Є. П. Неліна [3].

<table>
<tr><td>За означенням:</td><td colspan="2">$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0; \\ 0, \text{ при } a = 0; \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>За геометричним змістом</td><td>$|a|$ – відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a.</td><td>$|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$
$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -g(x); \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$
$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a; \\ f(x) > a. \end{array}\right.$
$|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a; \\ f(x) < a. \end{cases}$ (де a>0)</td></tr>
<tr><td>За загальною схемою</td><td colspan="2">1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти розв’язки на кожному з проміжків; перевірити, чи входить ці розв’язки у розглянутий проміжок.</td></tr>
<tr><td>З використанням спеціальних співвідношень</td><td colspan="2">1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geq 0,\ |u| = -u \Leftrightarrow u \leq 0.$
2. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2.$
3. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2 \Rightarrow |u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0.$</td></tr>
</table>

	4. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$.
	5. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0, \\ v \leq 0. \end{cases}$.
	6. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$.
	7. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = \lvert u - v\rvert \Leftrightarrow uv \leq 0.$

Доцільно пропонувати учням таку схему тільки після того, коли вони використовували відповідні методи при розв'язанні конкретних рівнянь та нерівностей. В подальшому вона допоможе обирати доцільний метод розв'язання.

Наприкінці зазначимо, що поняття модуля – одне з важливих математичних понять, яке широко застосовується як у вищій математиці, так і в ШКМ. В процесі введення, систематизації та узагальнення поняття модуля числа в шкільному курсі математики відбувається поглиблення знань і умінь учнів з різних розділів математики. Використовуючи алгебраїчний та геометричний зміст цього поняття, можна здійснювати алгоритмічний підхід при розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, при побудові графіків функцій, що містять знак модуля.

Література

1. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова ; ред. В. В. Ясінський ; Інститут доуніверситетської підготовки та професійної орієнтації НТУУ «КПІ». – К. : Факт, 2006. – 252 с. – (На допомогу абітурієнту)
2. Бевз Г. П. Математика : 6 кл. : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закл./ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2006. – 304 с.
3. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.
4. Покорный Ю. В. О модулях и знаках чисел / Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев // Математика в школе. – 2000. – № 3. – С. 24–30.
5. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. / З. І. Слепкань. – К. : Зодіак–ЕКО, 2000. – 512 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

М. В. Шмигевський
Україна, м. Київ, Київський національний університет технологій та дизайну

Інтегральне числення є потужним математичним апаратом, який широко застосовується в економічному аналізі. Важливою задачею економічного аналізу є вивчення зв'язків економічних величин, які подано в інтегральному вигляді. Такі зв'язки досліджуються за допомогою методів інтегрального числення. В економіці дуже часто треба знайти: обсяг продукції, вироблений за певний проміжок часу; приріст капіталу за відомими інвестиціями; середні значення таких економічних функцій, як витрати виробництва, валовий доход (виторг, виручка), прибуток (чистий доход). Усі ці економічні показники можна визначити за допомогою методів інтегрального числення.

Для визначення ступеня нерівності доходів у макроекономічній науці ефективно використовують ***криву Лоренца***, яка названа на честь американського економіста і математика Макса Лоренца (1876–1959). Із цією кривою тісно пов'язаний такий вимірювач нерівності доходів, як коефіцієнт Джині (***індекс Джині***). Цей коефіцієнт названо на честь італійського економіста, статистика і демографа Коррадо Джині (1884–1965). При обчисленні індексу Джині використовують визначений інтеграл та основні методи його знаходження.

Широке застосування має визначений інтеграл у сфері фінансів. Особливо в задачах визначення початкового вкладу S_0 через кінцевий вклад S_t за відомої процентної ставки p. Визначення початкового вкладу через кінцевий вклад називається ***дисконтуванням.*** У різноманітних економічних задачах використовують формули дисконтованих сум для випадків використання простих, складних і неперервних відсотків. Поняття інтеграла застосовується саме у випадку неперервних відсотків.

Методи інтегрального числення широко використовуються не лише для аналізу взаємодії окремих економічних факторів, але і в складних моделях економіки, зокрема – в моделях економічної динаміки. Інтегральне числення – це не лише апарат, що дозволяє досліджувати економічні моделі, але є водночас необхідною складовою для їх побудови.

Важливим напрямом застосування інтегрального числення в економіці є введення з його допомогою понять ***надлишку споживача*** і ***надлишку виробника***. Ці показники застосовуються для аналізу попиту і споживання, прогнозів цінової політики.

Методами інтегрального числення можна розв’язати й такі задачі: максимізація прибутку стосовно часу, вибір фірмою оптимальної стратегії розвитку, задачі з використанням виробничих функцій Кобба-Дугласа тощо.

Свідоме володіння вищевказаним матеріалом є необхідною умовою для фахової підготовки економістів сучасного рівня. Математичний інструментарій сприяє кращому використанню економічних знань при дослідженні та застосуванні різноманітних економіко-математичних моделей. Глибоке розуміння методології використання математики в економічних дослідженнях є основою для оволодіння ринковими механізмами господарювання і поліпшує підготовку з проблем інвестицій, ризику і прогнозу. Без ґрунтовної математичної підготовки неможливо кваліфіковано оцінити діяльність банків і страхових компаній; підвищити надійність операцій на страховому, фінансовому та інвестиційному ринках; спрогнозувати розвиток суспільно-економічних явищ і процесів.

Тому вельми важливою частиною освіти студентів економічного профілю є блок економічної математики. Складовими цього блоку є наступні розділи: аналіз ризиків; актуарна математика; економічна статистика; сплайни в економетриці; оптимальне керування економічними системами та ін.

Ефективне викладання вищенаведених дисциплін вимагає нових технологій викладання, які передбачають: підготовку лекційних курсів у презентаційній формі (підготовку слайдів, підготовку роздаткового матеріалу); розробку навчальних посібників в електронній формі; розробку збірників задач і вправ в електронному вигляді; розробку комп’ютерного комплексу контролю знань; розробку системи тестів і навчальних курсів під розроблений інструментарій; групу з впровадження Internet-технологій.

Знаходження капіталу за відомими інвестиціями

Розглянемо задачу визначення капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення) – це загальні інвестиції, які надходять в економіку за певний проміжок часу (зазвичай за рік), із відрахуванням інвестицій на відшкодування основних фондів (витраченого капіталу). Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на обсяг чистих інвестицій.

Позначимо капітал, який залежить від часу t, через $K=K(t)$, а обсяг чистих інвестицій – через $I=I(t)$. Тоді описане вище можна подати у вигляді рівності

$$I(t)=K'(t),$$

тобто чисті інвестиції $I(t)$ – це похідна від капіталу $K(t)$ за часом t.

Часто в економічних дослідженнях доводиться знаходити приріст капіталу за проміжок часу від $t=a$ до $t=b$, де $b>a>0$, тобто $\Delta K=K(b)-K(a)$. Оскільки $K=K(t)$ є первісною для функції $I(t)$, то, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, яка пов'язує первісну з визначеним інтегралом, можна записати

$$\Delta K(a;\, b)=K(b)-K(a)=\int_a^b I(t)dt\ .$$

Крива Лоренца. Індекс Джині

Проблема розподілу доходів у ринковій економіці є однією із ключових, оскільки принципи розподілу передбачають механізм вирішення низки як економічних, так і соціальних проблем. Система розподілу визначає можливості отримання доходу від володіння певними ресурсами, систему стимулів до праці, поділ людей на класи і соціальні групи, вирішення проблеми бідності та ін. У командній економіці існували зрівняльний розподіл прибутків і доходів та система перерозподілу соціальних благ через суспільні фонди споживання. Така система розподільних відносин дозволяла створити для більшості членів суспільства однакові умови матеріального добробуту, але не створювала стимулів до зростання виробництва, оскільки не передбачала достатньої диференціації і доходів, і суспільства.

Формування доходів у ринковій економіці відбувається на основі таких принципів:

1. Усі доходи формуються відповідно до вкладу праці, природних ресурсів, капіталу і підприємницьких здібностей у виробництво товарів та послуг. Це означає, що розподіл носить факторний характер, є функціонально-виробничим, а основними факторними доходами виступають заробітна плата, рента, відсоток і прибуток.

2. Дохід від факторів виробництва пропорційний кількості і якості вкладених ресурсів. На цьому заснований принцип соціальної справедливості в розподілі. Він означає, що кожний учасник має право примножувати своє багатство, збільшуючи при цьому свій вклад у підвищення ефективності виробництва. Принцип соціальної справедливості фіксує не походження доходів, а ступінь рівності і відповідно нерівності розподілу. Цей принцип прямо пов'язаний із функціонально-виробничим розподілом, бо рівність або нерівність залежать від того, за рахунок чого і за яких обставин ці доходи присвоюються.

3. Нерівномірність у розповіді ресурсів веде до значної нерівності в доходах. Високий ступінь нерівномірності може створювати низку соціально-економічних проблем: підривати стимули, загострювати соціальну несправедливість, погіршувати можливості для розвитку суспільства.

4. Для нормального функціонування економіки необхідна державна політика перерозподілу доходів через бюджет.

5. У зв'язку із функціонування недосконалої конкуренції у сучасній ринковій економіці розмір доходу може не відображати вкладу факторів виробництва у випуск готової продукції. Це пов'язується, наприклад, із монопольним становищем підприємств, можливістю отримати спадщину, виграти гроші у лотерею, рекетом.

Аналіз цих принципів показує, що ринкова економіка не гарантує кожному члену суспільства певний визначений рівень доходів, вони визначаються вкладом певного фактора у виробництво. Усі учасники ринкової економіки із самого початку не однакові за своїми потенціальними можливостями. Вони розрізняються за: володінням власністю; здібностями, рівнем освіти і кваліфікації; фінансовими можливостями; умовами виробництва; ступенем ризикованості, вдачею; станом здоров'я тощо. Ця нерівномірність, з одного боку, породжує економічні стимули, а з іншого – примножує нерівномірність у майбутньому. Проблема нерівномірності характерна як для країн з низьким рівнем розвитку, так і для найрозвинутіших країн.

Для визначення ступеня нерівності доходів у макроекономічній науці використовують кілька понять, одне з яких – крива Лоренца (рис. 1). ***Крива Лоренца*** *– графік, на якому по горизонтальній осі відкладено відсоток населення від найбідніших верств до найбагатших, а по вертикальній – відсоток одержуваного ними доходу.* Ця крива характеризує ступінь рівномірності чи нерівномірності в розподілі доходу. Чим більше відхилення кривої Лоренца від бісектриси, тим більша нерівномірність у розподілі доходів.

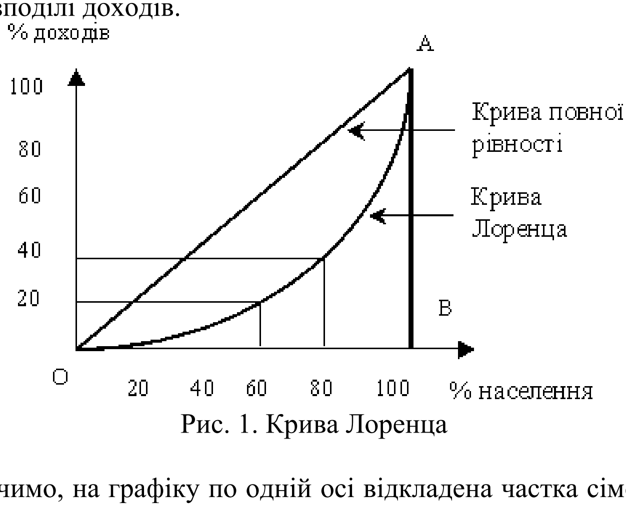


Рис. 1. Крива Лоренца

Як бачимо, на графіку по одній осі відкладена частка сімей з різними доходами, а по іншій – частка доходу. Якщо уявити, що доходи розподіляються рівномірно, то це означатиме, що існує абсолютна рівність, за якої, наприклад, 20% сімей одержують 20% доходу, 40% сімей – 40% доходу, 80% сімей – 80% доходу і т.д. Такий розподіл на графіку показує бісектриса ОА. Її називають ***лінією повної* (*абсолютної*) *рівності* *(line of perfect equality).***

Реальний розподіл, як показують результати його аналізу в багатьох країнах, відбувається таким чином, що **більша частина** сукупного доходу розподіляється на користь **меншої частини** сімей. Його відображає на графіку ***крива Лоренца.*** Чим далі ця крива відхиляється від бісектриси, тим більший ступінь нерівності в розподілі доходів.

Крива Лоренца є графіком функції $L=f(x)$, де L – відсоток сукупного доходу, який припадає на k% населення (відлік відсотків населення проводиться від найбідніших верств до найбагатших). Кожна точка, що належить кривій Лоренца, відповідає твердженню типу: «на 20% найбіднішого населення припадає лише 3% сукупного доходу» (зрозуміло, що значення відсотків доходу залежить від соціальної політики кожної держави).

Криві Лоренца застосовують для опису розподілів не лише доходів, але й прибуткового податку, майна домогосподарств, частки ринку для фірм в даній галузі, природних ресурсів, що належать різним державам тощо. Зустріти криву Лоренца можна й поза межами економічної науки, зокрема, в теорії ймовірностей.

Із кривою Лоренца пов'язаний інший вимірювач нерівності доходів, а саме коефіцієнт Джині. ***Коефіцієнт Джині** дорівнює відношенню площі фігури, що утворюється між кривою Лоренца та лінією повної рівності ОА, до площі трикутника ОАВ, що утворюється лінією повної рівності ОА та координатними осями*, тобто

$$K_d = \frac{S_L}{S_{\Delta OAB}},$$

де K_d – коефіцієнт Джині; S_L – площа фігури, що утворена між кривою Лоренца та лінією повної рівності ОА; $S_{\Delta OAB}$ – площа трикутника ОАВ, що утворений лінією повної рівності ОА та координатними осями.

Коефіцієнт Джині коливається в межах від нуля до одиниці: $0 \le K_d \le 1$. Зокрема, у випадку абсолютної рівності крива Лоренца збігається з прямою ОА, тому площа $S_L=0$. Тоді й коефіцієнт Джині $K_d=0$. У випадку абсолютної нерівності, коли всі доходи суспільства зосереджені у власності одного індивіда, чисельник дорівнюватиме знаменнику: $S_L=S_{\Delta OAB}$. Тоді коефіцієнт Джині $K_d=1$.

Чим більший коефіцієнт Джині, тим більший ступінь нерівномірності. На сьогодні **коефіцієнт Джині в Україні складає 0,359.**

Із метою зменшення нерівності в розподілі доходів держава здійснює примусове переміщення ресурсів, яке призводить до зменшення добробуту одних і підвищення добробуту інших членів суспільства, тобто фактично до перерозподілу доходів за допомогою податкової системи та трансфертів.

Складність ринкової економіки полягає в тому, що пропорція між «споживанням» і «заощадженням» доходів визначає величини сукупних розходів і сукупних заощаджень у суспільстві. Тому мистецтво регулювання ринкової економіки полягає в умінні визначити домінуючий фактор у даній ринковій ситуації. І деколи виявляється, що таким фактором є пропорція, в якій рядовий отримувач доходів вирішує розділити свій доход між споживанням і заощадженням.

У сучасній економічній теорії поряд із кривою Лоренца та коефіцієнтом Джині для аналізу нерівномірності в розподілі доходів використовують так звані *децильні* та *квантильні* коефіцієнти. Це відношення багатства 10 або 20% найбідніших членів суспільства до такої ж кількості найбагатших. Так, у США співвідношення доходів 20% бідних до 20% багатих складає 1:6, у Франції – 1:10, у Японії і Німеччині – 1:3, у скандинавських країнах – 1:2,5. У Росії співвідношення доходів 10% бідних до 10% багатих складає 1:15,5. **В Україні за різними оцінками цей показник коливається в межах від 1:10 до 1:100.**

Оскільки доходи виступають у грошовій формі, їх реальні розміри мають оцінюватись, виходячи із купівельної спроможності грошей, які безпосередньо надходять у розпорядження їх власника. Тому розрізняють номінальні та реальні доходи.

Номінальні доходи характеризують рівень грошових доходів незалежно від розмірів оподаткування та зміни цін на товари та послуги.

Реальні доходи – це доходи з урахуванням роздрібних цін і тарифів на товари та послуги, розміру податків та обов'язкових платежів. Щоб розрахувати реальні доходи, необхідно від номінальних доходів відняти податки та обов'язкові платежі в бюджет. Це буде величина кінцевих доходів, які, в свою чергу, слід скоригувати на рівень цін:

$$I_{р.д.} = \frac{I_{к.д.}}{I_{ц.}} \cdot 100\% ,$$

де $I_{р.д.}$ – індекс реального доходу; $I_{к.д.}$ – індекс кінцевого доходу; $I_{ц.}$ – індекс цін.

Індекс – це зміна будь-якого показника за певний термін часу, що виражена у відсотках.

Якщо реальні доходи населення зменшуються у зв'язку з інфляцією, то державі слід проводити політику індексації доходів, яка сприяє утриманню доходів на попередньому рівні. Індексація доходів – це показник перерахування величини грошового вмісту доходів, вкладень, цінних паперів, заощаджень залежно від рівня інфляції. Її здійснюють держава, банки, страхові компанії, акціонерні товариства та ін. Індексація доходів проводиться з метою компенсувати подорожчання споживчого кошика і виражається у підвищенні доходів населення. Індексація вкладів означає зміну розміру процентних ставок, індексація податків – зміну їх розмірів залежно від зміни цін, розмірів зарплати тощо.

У розвинених країнах індексація проводиться, якщо рівень цін зростає більше, як на 5% в рік. Індексація, як правило, стосується тих категорій населення, які отримують доходи із державного бюджету. В Україні вона стосується лише найменш оплачуваних категорій населення, що отримують доходи із бюджету.

Із кривою Лоренца пов'язаний не лише коефіцієнт Джині, але й індекс Робін Гуда. ***Індекс Робін Гуда (Robin Hood index),*** також відомий як ***індекс Гувера (Hoover index)***, – це ще один показник нерівності за доходам, який має зв'язок із кривою Лоренца. Індекс Робін Гуда дорівнює тій частці доходу суспільства, яку необхідно перерозподілити для досягнення рівності. Графічно його можна зобразити як найдовший вертикальний відрізок, що сполучає фактичну криву Лоренца з лінією повної рівності (бісектрисою першого квадранту).

Індекс Робін Гуда широко застосовується в оцінках забезпеченості населених районів лікарями загальної практики. При таких оцінках крива Лоренца буде наповнюватися не доходами, а питомим числом лікарів на місцевість чи групу людей. Отже, індекс Робін Гуда показує, яку частину лікарів слід перенаправити в інші райони для підтримки рівної забезпеченості медичним персоналом на всій досліджуваній території населених районів.

Застосування в задачах максимізації прибутку

Розглянемо застосування визначеного інтеграла в задачах максимізації прибутку стосовно часу. Нехай $R(t)$ – доход, $P(t)$ – прибуток, $C(t)$ – загальні витрати, що змінюються з часом, тобто залежать від часу t.

Тоді з економічних міркувань можна записати

$$P(t)=R(t)-C(t).$$

Із математичних міркувань можна стверджувати, що екстремум функції прибутку $P(t)$ можливий у момент часу, коли похідна функції прибутку дорівнює нулю, тобто $P'(t)=0$. Отримаємо, що

$$R'(t)-C'(t)=0 \text{ або } R'(t)=C'(t).$$

Нехай у момент часу $t=T$ виконується рівність $R'(t)=C'(t)$. Це означає, що в момент часу $t=T$ швидкість зміни доходу і швидкість зміни загальних витрат збігаються. Якщо, окрім цього, друга похідна $P''(t)<0$, то точка $t=T$ є точкою максимуму функції прибутку $P(t)$.

Максимальне значення прибутку знаходимо за формулою

$$P(T)=\int_0^T P'(t)dt=\int_0^T \left(R'(t)-C'(t)\right)dt .$$

Геометрично максимальному значенню прибутку відповідає площа заштрихованої фігури (рис. 2).

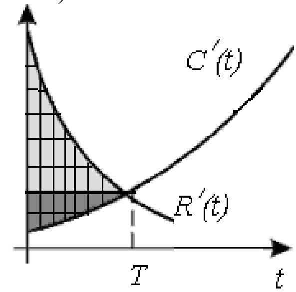


Рис. 2.

Застосування у фінансових задачах

Визначений інтеграл має широке застосування у фінансових задачах. Фінансові ресурси, матеріальну основу яких складають гроші, мають, як відомо, тимчасову цінність. Тимчасова цінність фінансових ресурсів може розглядатися у двох аспектах.

Перший аспект пов'язаний із купівельною спроможністю грошей. Грошові кошти в даний момент і через певний проміжок часу при рівній номінальній вартості мають абсолютно різну купівельну спроможність.

Так, наприклад, 1000 грн. через певний час при рівні інфляції 60% будуть мати купівельну спроможність всього лише 400 грн. При сучасному стані економіки і рівні інфляції грошові кошти, не вкладені в інвестиційну діяльність або на зберігання в банк, дуже швидко знецінюються.

Другий аспект пов'язаний з обігом грошових коштів як капіталу і отриманням доходів від цього обороту. Гроші повинні як можна швидше робити нові гроші.

У будь-якому випадку кваліфікований економіст повинен вміти визначати, скільки буде коштувати нинішня сума через певний період, і вміти оцінювати майбутні доходи вже в теперішній час.

Наші автори

Алєка Ігор Андрійович, студент магістратури фізико-математичного факультету Криворізького національного університету (*проблеми методики викладання математики в середніх та вищих учбових закладах*)

Амброзяк Ольга Валеріївна, аспірантка Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (*використання евристичних конструкцій у навчальному процесі, моделювання евристичної діяльності учнів, специфіка формування геометричних понять засобами ІКТ*)

Ачкан Віталій Валентинович, к. пед. н., доцент кафедри дидактики природничо-наукових дисциплін та інформаційних технологій у навчанні Бердянського державного педагогічного університету (*теоретико-методичні основи реалізації компетентного підходу у середній та вищій школі*)

Бас Світлана Віталіївна, старший викладач Криворізького національного університету (*формування предметно-математичної компетентності у студентів економічних спеціальностей*)

Бідайбеков Єсен Икласович, д. пед. н., професор, завідувач кафедри інформатики та механіко-математичних спеціальностей, Казахського національного педагогічного університету імені Абая (*теорія та методика навчання інформатики, інформатизація освіти*)

Білоус Анна Юріївна, студент Криворізького національного університету

Біляй Іванна Михайлівна, асистент кафедри інформаційних технологій і програмування Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Богатинська Наталія Володимирівна, доцент кафедри математики та методики її викладання Криворізького національного університету (*актуальні проблеми методики навчання математики*)

Бойко Ольга Михайлівна, викладач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (*методика вищої школи*)

Бойко Сергій Вікторович, студент магістратури Криворізького національного університету (*узагальнення та систематизація знань при вивченні математики*)

Бондаренко Зоя Іванівна, старший викладач Національного гірничого університету (*впровадження інноваційних технологій у навчальний процес*)

Борисенко Маргарита Юріївна, вчитель математики та інформатики Краматорської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №25 з профільним навчанням (*забезпечення наступності в навчанні математики учнів 4-5 класів загальноосвітньої школи*)

Борисенко Ольга Миколаївна, вчитель початкових класів Краматорської загальноосвітної школи I-III ступенів №25 з профільним навчанням

Брюхович Альона Олегівна, вчитель математики Криворізького Жовтневого ліцею (*інтегроване навчання математики*)

Бугрим Ольга Володимирівна, к. ф.-м. н., доцент, доцент Національного гірничого університету (*математика, механіка*)

Бурда Анна Геннадіївна, студентка магістратури Криворізького національного університету (*методика навчання математики*)

Власенко Катерина Володимирівна, д. пед. н., професор, професор кафедри вищої математики Донбаської державної машинобудівної академії (*теоретико-методичні засади навчання вищої математики майбутніх інженерів-машинобудівників з використанням інформаційних технологій*)

Ганжела Сергій Іванович, к. пед. н., старший викладач кафедри інформатики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (*впровадження сучасних ІКТ при вивченні математики; теорія та методика навчання (інформатика*))

Гвоздецька Юлія Василівна, вчитель математики Криворізького Жовтневого ліцею (*інтегроване навчання математики*)

Горбатов Микола Іванович, старший викладач Національного гірничого університету (*математика, механіка*)

Данилюк Надія Вікторівна, студентка магістратури Криворізького національного університету (*методика навчання математики*)

Друшляк Марина Григорівна, викладач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (*комп'ютерна математика, теорія груп*)

Жалдак Мирослав Іванович, д. пед. н., професор, дійсний член НАПН України, завідувач кафедри теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (*теорія і методика навчання (інформатика, математика*)*, ІКТ в освіті*)

Жиленко Тетяна Іванівна, к. ф.-м. н., асистент Сумського державного університету

Захарченко Надія Миколаївна, старший викладач Сумського державного університету

Іванов Олексій Сергійович, к. т. н., асистент Національного гірничого університету (*математика, механіка*)

Івлієва Ольга Михайлівна, к. пед. н., доцент кафедри інформатики Ізмаїльського державного гуманітарного університету (*методика викладання математичних дисциплін; професійна готовність вчителя; критеріально-орієнтоване тестування*)

Іохвідович Нона Юзефівна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (*впровадження методики проблемного навчання при викладанні курсу вищої математики*)

Йолкіна Марина Леонідівна, студентка магістратури фізико-математичного факультету Криворізького національного університету (*вивчення проблеми формування професійної спрямованості особистості старшокласників на уроках алгебри та початків аналізу в 11 класі*)

Капіносов Анатолій Миколайович, к. пед. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її викладання Криворізького національного університету

Каскатаєва Бахиткуль Рахімжанівна, д. пед. н., доцент, професор Казахського національного педагогічного університету імені Абая (*теорія і методика викладання математики*)

Кислова Марія Алімівна, старший викладач Криворізького інституту Кременчуцького університету економіки, інформаційних технологій та управління

Кірман Вадим Кімович, к. пед. н., доцент кафедри природничої освіти Дніпропетровського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (*поглиблене навчання математики, наукові засади популяризації математичних знань*)

Клименко Діна Володимирівна, асистент Національного гірничого університету (*методика викладання вищої математики*)

Кобелянська Дар'я Сергіївна, студентка 3 курсу спеціальності «Інформатика» Криворізького національного університету (*математична інформатика*)

Ковтун Ірина Іванівна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики Національного університету біоресурсів і природокористування України (*методика викладання математики*)

Колчук Тетяна Василівна, аспірантка Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (*дистанційне навчання геометрії*)

Корзун Юлія Олександрівна, магістрант інституту фізико-математичної та технологічної освіти Бердянського державного педагогічного університету (*реалізація компетентнісного підходу у вищій школі*)

Корольський Володимир Вікторович, к. т. н., професор, завідувач кафедри математики Криворізького національного університету (*самостійна робота студентів при вивченні математичних дисциплін*)

Кривенок Інна Вікторівна, студентка IV курсу фізико-математичного факультету Криворізького національного університету (*теорія ймовірностей і математична статистика*)

Лисянська Ганна Володимирівна, асистент Харківського національного університету будівництва та архітектури (*впровадження методики проблемного навчання при викладанні курсу вищої математики*)

Лов'янова Ірина Василівна, к. пед. н., доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Криворізького національного університету (*розвиток творчої особистості випускника профільної школи у процесі навчання математики*)

Мартиненко Олена Вікторівна, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (*теорія ортогональних рядів Фур'є-Якобі; методика вищої школи*)

Михалевич Володимир Маркусович, д. т. н., професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету (*математичне моделювання накопичення пошкоджень в матеріалах та граничного стану при нестаціонарних процесах непружного деформування, інформаційні технології викладання математично спрямованих дисциплін на основі системи символьної математики Maple*)

Михалін Геннадій Олександрович, д. пед. н., професор, професор Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Мосіюк Олександр Олександрович, асистент кафедри математики Житомирського державного університету імені Івана Франка (*математика, методика навчання геометрії та креслення, інформаційні технології в освіті, комп'ютерна графіка*)

Мукосєєнко Ольга Анатоліївна, асистент кафедри вищої математики Приазовського державного технічного університету (*міжнародні тенденції викладання вищої математики, використання модульно-рейтингової технології при вивченні вищої математики; використання систем комп'ютерної математики при вивченні курсу вищої математики, курсу шкільної математики та інформатики*)

Нифанін Олексій Борисович, викладач математики Дніпропетровського індустріального коледжу (*золоті ірраціональності, фрактальне розширення геометричних фігур, теорія і практика оборотних зображень*)

Онуфрієнко Ольга Григорівна, к. т. н., доцент Бердянського державного педагогічного університету (*функціональний аналіз, теорія міри та інтеграла, варіаційне числення, вибранні питання теорії стійкості*)

Паюк Ганна Борисівна, студентка фізико математичного факультету Криворізького національного університету (*проблеми, які виникають при викладанні математики в середній та старшій школі, зокрема дослідження подання задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки*)

Петров Володимир Володимирович, старший викладач кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького національного університету (*математична інформатика, комп'ютерна математика*)

Потапова Олександра Миколаївна, старший викладач кафедри інженерної математики Криворізького національного університету (*теорія та методика викладання вищої математики у вищих технічних навчальних закладах*)

Рашевська Наталя Василівна, к. пед. н., доцент кафедри інженерної математики Криворізького національного університету (*підтримка процесу навчання вищої математики засобами мобільних ІКТ*)

Семенихіна Олена Володимирівна, к. пед. н., доцент, завідувач кафедри інформатики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (*комп'ютерна математика*)

Середа Олена Олександрівна, студент Криворізького національного університету

Скороход Георгій Ісаакович, к. т. н., старший науковий співробітник, доцент Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (*прикладна математика, педагогіка, дидактика*)

Словак Катерина Іванівна, к. пед. н., доцент кафедри вищої математики Криворізького національного університету (*використання ІКТ у навчанні математики*)

Смолінська Олеся Володимирівна, студентка 5 курсу фізико-математичного факультету Криворізького національного університету (*методика вивчення математики*)

Старовойтова Олена Леонідівна, к. пед. н., доцент кафедри методики викладання математики Могильовського державного університету імені А. О. Кулешова (*прикладна спрямованість навчання математики в школі; вдосконалення методичної підготовки майбутніх вчителів математики*)

Ткач Дмитро Іванович, к. т. н., доцент, завідувач кафедри нарисної геометрії та графіки Придніпровської державної академії будівництва та архітектури (*золота пропорція, золоті лінії і поверхні, третій вимір плоских фігур, енергія форми, кіноперспективні поверхні, синергетика, хаос, фрактали*)

Троян Людмила Францівна, асистент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (*професійна підготовка майбутніх учителів математики та інформатики; викладання математичних дисциплін у вищій школі*)

Ульшин Петро Іванович, доцент Криворізького національного університету

Федосєєв Станіслав Ешмуратович, магістрант кафедри математики та методики її навчання Криворізького національного університету (*методика навчання математики, соціоніка*)

Флегантов Леонід Олексійович, к. ф.-м. н., доцент, професор кафедри вищої математики та логіки Полтавської державної аграрної академії (*викладання математики, веб-технології в навчанні*)

Цимбал Світлана Володимирівна, викладач кафедри інженерної математики Криворізького національного університету (*застосування інтерактивних особистісно-орієнтованих технологій на уроках математики*)

Чашечникова Ольга Серафимівна, д. пед. н., професор кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка (*методика навчання математики*)

Черних Лариса Олександрівна, к. пед. н., доцент, доцент кафедри математики Криворізького національного університету (*методика вивчення алгебри і теорії чисел у ВНЗ*)

Чумак Олена Олександрівна, асистент кафедри вищої математики Донбаської державної машинобудівної академії (*формування інтенсивної навчальної діяльності майбутніх інженерів у ході навчання теорії ймовірностей і випадкових процесів*)

Чухно Михайло Васильович, аспірант Вінницького національного технічного університету

Шмигевський Микола Васильович, к. ф.-м. н., доцент, доцент Київського національного університету технологій та дизайну (*теорія ймовірностей та математична статистика, історія та методологія математики*)

Зміст

Наукове видання

Теорія та методика навчання
математики, фізики, інформатики

Випуск X

В 3-х томах
Том 1

Підп. до друку 15.03.12
Папір офсетний №1
Ум. друк. арк. 15,9

Формат 80×84 1/16
Зам. №3-1503
Наклад 300 прим.

Жовтнева друкарня
50014, м. Кривий Ріг, вул. Електрична, 5
Тел. (0564) 407-29-02

E-mail: semerikov@gmail.com