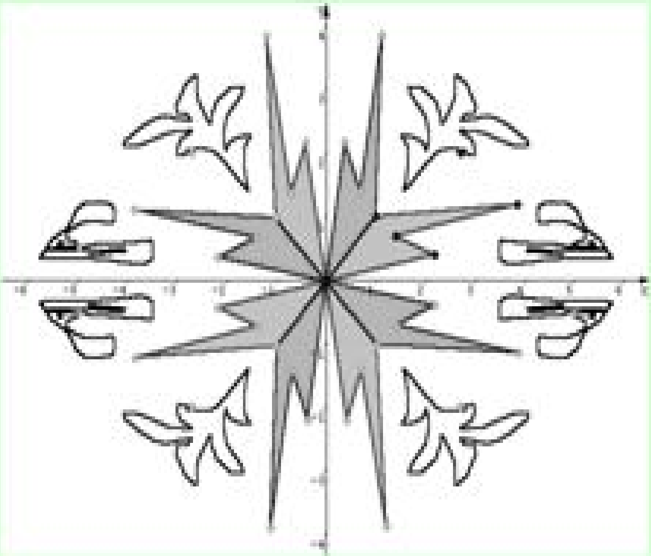
Т. Г. Крамаренко

Уроки математики з комп'ютером

Посібник для вчителів і студентів



Т. Г. Крамаренко

Уроки математики з комп'ютером

Посібник
для вчителів і студентів

За редакцією академіка АПН України,
доктора педагогічних наук, професора
М. І. Жалдака

Кривий Ріг
Видавничий дім
2008

ББК 74.262я73
К78
УДК 372.851:004

Рецензенти:

д. пед. н., проф. В. К. Буряк,
д. ф.-м. н., проф. В. М. Соловйов,
к. пед. н., доц. С. О. Семеріков

Друкується відповідно до рішення вченої ради Криворізького державного педагогічного університету від 14.02.2008, протокол № 7.

Для студентів та викладачів Криворізького державного педагогічного університету надруковано за підтримки фонду "Майбутнє Кривбасу" і народного депутата України О. Ю. Вілкула.

Крамаренко Т. Г.

К78 Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / За ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.
ISBN 978-966-2915-75-4

У посібнику подаються методичні рекомендації щодо формування особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики. Дібрано зміст навчального матеріалу, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання, пропонуються добірки завдань, для розв'язування яких застосовують педагогічні програмні засоби GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG та інші. Додається компакт-диск з бібліотекою наочностей у вигляді файлів з введеними функціями, динамічними кресленнями, про які йде мова на сторінках посібника.

Для вчителів математики загальноосвітніх шкіл, викладачів професійних навчально-виховних закладів, студентів навчальних закладів спеціальності „Педагогіка і методика середньої освіти. Математика". Може бути корисним старшокласникам, які самостійно опановують педагогічні програмні засоби навчання математики.

ББК 74.262я73

ISBN 978-966-2915-75-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Стрімкий розвиток технологій спричинює зміни у змісті та організації праці, у вимогах до рівня сформованості особистісних якостей випускників школи. Молода генерація особистостей має бути здатною забезпечити високий рівень конструкторських розробок та технологій, створити надійне наукове підґрунтя для розв'язування актуальних проблем економіки, охорони довкілля тощо. Учні найчастіше відчувають труднощі самостійно діяти в нестандартних умовах, висувати гіпотези, відстоювати власну точку зору, вільно вести діалог, творити, критично ставитися до цінностей, різноманітних відомостей, що надходять до них. Спостерігається недостатня розвиненість творчих якостей учнів. Оскільки інтелектуальний та творчий потенціал суспільства значною мірою залежить від того, чи зможе школа виховати особистість, здатну до самоствердження, самореалізації, самовдосконалення, то формування особистісних якостей школяра у навчанні є нагальною проблемою сучасної психолого-педагогічної науки та практики. Принципово важливою є орієнтація освіти на розвиток дослідництва, творчого мислення, здатностей учнів до адекватної діяльності в нових умовах.

В умовах підвищення рівня інформатизації та комп'ютеризації освіти актуальним є перехід від інформаційної, знаннєво-орієнтованої до особистісно орієнтованої парадигми освіти, де абсолютною цінністю є сама особистість в її самобутності та цілісності. Впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчання є одним з пріоритетних напрямків розвитку освіти, тому сучасна комп'ютерна освіта має стати складовою частиною становлення особистості, дати учневі внутрішній імпульс для розвитку. В основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі дидактичні системи, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення, в тому числі і за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики мають значний педагогічний потенціал, який потрібно використати для забезпечення найважливіших принципів розвиваючого навчання – профільної та рівневої диференціації, індивідуалізації навчання.

У процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики мова не повинна йти лише про вивчення певного навчального матеріалу, а перш за все про всебічний і гармонійний розвиток особистості учнів, їх творчих здібностей. Важливо враховувати і розвивати творчі компоненти мислення учнів через реалізацію проблемної ситуації чи постановку задачі, самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, що приводять до розв'язку, генерацію здогадок та гіпотез у процесі пошуку основної ідеї розв'язку та його інтерпретації.

Складність переходу до особистісно орієнтованої освіти на основі використання ІКТ пояснюється необхідністю кардинальної перебудови мислення кожного з учасників навчального процесу. На сучасному етапі вагомими є причини недостатньої розробки методів, форм та засобів раціонального поєднання інформаційного та особистісного підходів. Усунення протиріччя між педагогічним потенціалом використання засобів ІКТ для розвитку особистісних якостей учнів у процесі навчання математики і реальною педагогічною практикою є соціально значущою проблемою, що обумовлює актуальність даного посібника. Систематичне, цілеспрямоване, педагогічно доцільне, обґрунтоване використання сучасних ІКТ у навчанні математики посилює мотивацію, формує стійкий інтерес до пошукової дослідницької діяльності, сприяє ефективному формуванню особистісних якостей учня.

Посібник складається з трьох розділів. У першому розділі "Психолого-педагогічні основи формування особистісних якостей учня з використанням ІКТН" здійснено огляд науково-методичної, психолого-педагогічної і навчальної літератури, в якій розкриваються основні погляди на досліджувану проблему, розглянуто загальні засади використання ІКТ у навчальному процесі, з'ясовано можливості поєднання ІКТ у навчанні математики з проектними технологіями, навчанням у співпраці. Підсумовується розділ методичними вимогами до реалізації особистісно-орієнтованого підходу, аналізуються складники моніторингу особистісно орієнтованого навчання.

У другому розділі проаналізовано ППЗ, доступні для використання у середніх загальноосвітніх закладах. Здійснено короткий огляд послуг оновлених версій ППЗ GRAN1 і GRAN-2D, підготовлено добірки завдань для виконання як за допомогою зазначених засобів, так і для ППЗ DG, GRAN-3D та інших педагогічних програмних засобів. Пропоновані програмні продукти є вітчизняними розробками, що позитивно позначається на їх застосуванні як з боку інтерфейсу, так і стосовно відкритості розробників до взаємодії.

У третьому розділі „Система розвивальних задач та методика їх опрацювання" розглянуто питання створення та впровадження системи навчання, в основу якої закладено умови формування в учнів особистісних якостей у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики, висвітлено досвід роботи автора вчителем математики в класах з поглибленим вивчення математики. До сукупності педагогічних умов, які сприяють розвитку позитивних особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики віднесено можливість довизначення учнями з використанням ППЗ поставлених вчителем задач, а у зв'язку з цим підвищення мотивації учіння; відповідний добір змісту комп'ютерно-орієнтованого шкільного курсу математики, доцільних методів, засобів, форм організації навчання; створення середовища, сприятливого для розвитку особистості; можливості здійснення творчого спілкування між учасниками навчального процесу. Виняткове значення має самостійна постановка і розв'язування навчально-творчих задач. Розроблено добірки комп'ютерно-орієнтованих завдань з параметрами, задач практичного змісту, завдань для вивчення змістової лінії функції; добірки наочностей для уроків стереометрії, зокрема, динамічні креслення перерізів многогранників площиною. Складено добірку задач з планіметрії на побудову, дослідження і доведення, запропоновано добірку комп'ютерно-орієнтованих навчальних проектів з математики, розробку завдань для вивчення геометричних перетворень за допомогою комп'ютера, програму курсу „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики" для підготовки бакалаврів за спеціальністю „Педагогіка і методика середньої освіти. Математика".

Компакт-диск, що додається до навчально-методичного посібника, містить не лише окремі програмні продукти, але й значну кількість комп'ютерних моделей до задач з курсів алгебри і геометрії 8-11 класів, що ілюструють пропоновані педагогічні методи та прийоми комп'ютерно-орієнтованого навчання математики.

Посібник призначений для вчителів математики, студентів, які навчаються за спеціальністю „Педагогіка і методика середньої освіти. Математика". Може бути корисним учням 8-11 класів, які самостійно навчаються використовувати ППЗ.

Додаткові відомості щодо розглянутих у посібнику програмних засобів можна отримати за адресою: Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, вул. Пирогова, 9, м. Київ-30, 01601.

Додатково про посібник можна прочитати на сайті www.kramarenko.com.ua. Відгуки та пропозиції просимо надсилати на адресу tgkramarenko@mail.ru.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ГМТ – геометричне місце точок.
ЕОМ – електронна обчислювальна машина.
ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології.
ІКЗН – інформаційно-комунікаційні засоби навчання.
ІКТН – інформаційно-комунікаційні технології навчання.
КОМСН – комп'ютерно-орієнтована методична система навчання.
МСН – методична система навчання.
НІТ– нові інформаційні технології.
НІТН – нові інформаційні технології навчання.
ПМ – програмний модуль.
ПМК – програмно-методичний комплекс.
ППЗ – педагогічний програмний засіб.
ПЗНП – програмні засоби навчального призначення.
СКМ – системи комп'ютерної математики.
ТМСН – традиційна методична система навчання.
DG – ППЗ „Динамічна геометрія на площині".
GRAN1 – ППЗ для аналізу функціональних залежностей, скорочено від „графічний аналізатор".
GRAN-2D – ППЗ „Динамічна геометрія на площині", „2" вказує на розмірність простору.
GRAN-3D – ППЗ „Геометрія в просторі".

Розділ 1
ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ ОСОБИСТІСНИХ ЯКОСТЕЙ УЧНЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ІКТН

1.1. Деякі аспекти проблеми формування творчої особистості

Необхідність формування творчої особистості школяра, розвиток потенційних можливостей, особистісних якостей кожного учня, підготовка його до плідної продуктивної праці викликана зростанням соціальної ролі особистості гуманного та демократичного суспільства, динамізмом, притаманним сучасній цивілізації, інтелектуалізацією праці, швидкою зміною техніки та технології у всьому світі. На виконання цих важливих завдань вчителів націлюють основні документи про освіту – Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [25], Національна доктрина розвитку освіти [74], Державна національна програма "Освіта" (Україна XXI століття) [24].

Особистість – це соціально зумовлена система психічних якостей індивіда, що визначається залученістю людини до конкретних суспільних, культурних, історичних відносин [16,353]. Особистість формується і виявляється у процесі свідомої діяльності і спілкування. Найголовнішою ознакою творчої особистості є наявність творчих здібностей, які розглядаються як індивідуально-психологічні якості особистості, що пов'язані зі створенням нового, оригінального продукту, з пошуком нових засобів діяльності. Особистісна якість людини є стійкою, відносно самостійною її властивістю, психофізіологічним новоутворенням, що визначає характерне для людини мислення і поведінку. За С.У. Гончаренком [19, *135*] ͘кожна із здібностей особистості, як стійка індивідуальна психічна властивість людини, є внутрішньою умовою її успішної діяльності, становить складну синтетичну якість людини, в якій поєднуються окремі психічні властивості (спостережливість, особливості пам'яті, уяви, мислення).

Якості особистості за К.К. Платоновим [79, *37*] *визначатимемо як узагальнені властивості особистості, що складають чотири основні підструктури динамічної функціональної структури особистості (спрямованість, досвід, особливості психічних процесів, біопсихічні властивості) і дві на них накладені – характер і здібності.* Індивідуальні якості формуються на основі індивідних особливостей, типу нервової системи, темпераменту.

Л.С. Виготський [17], Г.С. Костюк [44], С.Л. Рубінштейн [92], розглядають процес формування особистості як результат поєднання трьох факторів – біологічного (задатків), психічного (внутрішнє "Я" людини, її воля тощо), соціального (соціальне середовище і виховання). Таке методологічне підґрунтя визначає системно-діяльнісний підхід як до вивчення особистості, так і до формування її особистісних якостей. У підструктурі якостей, що визначають спрямованість особистості, головним є соціальний фактор; у підструктурі досвіду соціального значно більше, ніж біологічного. Зовнішні причини діють крізь внутрішні умови, які формуються в результаті зовнішніх впливів і сприяють виникненню протиріч – рушійної сили розвитку. Серед зовнішніх умов виокремлюють освітнє середовище як мікросередовище, в якому відбувається

͘ Тільки особистість може творити особистість. *К.С. Ушинський* навчання і виховання підлітків. Вчителеві важливо розуміти діалектичний характер розвитку учня і, висуваючи нові вимоги й завдання, допомагати йому усвідомлювати суперечності, знаходити способи їх подолання. Тобто, забезпечувати умови для здійснення “саморуху” особистості у процесі становлення.

Питання, пов’язані з формуванням творчої особистості учня, досліджували В.І. Андрєєв [1], А.Н. Лук [61], С.О. Сисоєва [93], О.І.Скафа [94-96], З.І. Слєпкань [97] та ін.[*] Психологічні аспекти творчості, проблеми формування творчих здібностей у навчанні, мотивів творчої діяльності висвітлювалися в працях Л.С. Виготського [17], Г.С. Костюка [44], В.А. Крутецького [54], В.О. Моляко [71], С.Л. Рубінштейна [92], М.Л. Смульсон [69], А.В. Хуторського [114]. Важливі питання теорії особистісно орієнтованого навчання розробляли Л.В. Кондрашова [78], А.В. Хуторський [114] та ін. Доцільні і важливі положення для вирішення визначеної проблеми знайшли відображення в працях таких педагогів, методистів як В.Г. Бевз [18], М.І.Бурда [7-8], В.К. Буряк [9], Є.Ф. Вінниченко [13], М.І. Жалдак [27], Н.І. Зеленкова [36], А.М. Капіносов [37], В.П. Кисільова [39], І.В. Лов’янова [59], С.М. Лук’янова [62], Н.В. Морзе [72-73], Г.О. Михалін [32], [70], С.А. Раков [87], Н.А. Тарасенкова [104], І.О. Теплицький [105], Т.М.Хмара [122], О.С. Чашечнікова [115-116], М.І.Шкіль [122-123] та ін.

В.О. Моляко [71] вважає однією з основних якостей творчої особистості прагнення до оригінальності, заперечення звичного. Серед характерних якостей виокремлює високий рівень знань, умінь аналізувати явища, порівнювати їх, стійкий інтерес до певної роботи, порівняно швидке і легке засвоєння знань у цій галузі, систематичність і самостійність у роботі.

На думку В. І. Андрєєва [2, *58*], для творчої особистості характерна стійка, високого рівня спрямованість на творчість, мотиваційно-творча активність, що проявляється в органічній єдності з високим рівнем творчих здібностей, які дозволяють їй досягти прогресивних, соціально та особистісно значущих результатів в одній або кількох видах діяльності. Творчі здібності особистості автором визначені як синтез властивостей особистості, що характеризують ступінь їх відповідності вимогам певного виду навчально-творчої діяльності і обумовлюють їх результативність. В.І. Андрєєв виокремлює блоки якостей: *мотиваційно-творча активність і спрямованість, інтелектуально-логічні, інтелектуально-евристичні та інтуїтивні здібності, світоглядні властивості, моральні властивості, здібності до самоуправління в навчально-творчій діяльності, комунікативно-творчі здібності, естетичні, індивідуальні особливості.*

Для аналізу структури творчої особистості С.О. Сисоєва [93] послуговується терміном „творчі можливості”, яким об’єднує здібності, певні мотиви і риси характеру, що мають вирішальне значення для успішної творчої діяльності. Творчі можливості утворюють сукупність творчих якостей особистості, деякі з них (творчі уміння, індивідуальні особливості психічних процесів) мають двояку природу. З одного боку, вони природжені, а з іншого – визначаються умовами розвитку і виховання, зокрема, освітнім середовищем. Творча особистість за С.О. Сисоєвою – це особистість, що має внутрішні передумови (особистісні утворення, специфіка когнітивної сфери, нейрофізіологічні задатки), які забезпечують її творчу активність (не стимульовану зовні пошукову та

---

[*] Талант – крапля здібностей і море праці. *Григір Тютюнник*

перетворюючу діяльність), і яка внаслідок впливу зовнішніх факторів набула необхідних для актуалізації творчого потенціалу людини додаткових мотивів, особистісних утворень, здібностей, що сприяють досягненню творчих результатів в одному чи кількох видах творчої діяльності [93, *120*]. Творчі якості самі по собі не гарантують творчих здобутків. Для їх досягнення необхідний „двигун”, який запустив би в роботу механізм мислення, необхідні бажання і воля, потрібна „мотиваційна основа”. С.О. Сисоєвою виділено 64 творчі якості і згруповано їх у *чотири підсистеми (спрямованості, характерологічних особливостей, творчих умінь, індивідуальних особливостей психічних процесів)* [93,*129*]. Автор акцентує увагу на важливості такої якості, як „позитивне уявлення учня про себе, бажання пізнати себе”, оскільки навіть обдарована дитина, яка має занижену самооцінку, може не реалізувати своїх здібностей.·

З.І. Слєпкань розглядає проблему всебічного розвитку особистості в контексті розвивального навчання математики [97]. Якості особистості об’єднано у сім блоків: *мотивація на творчість, самоорганізація, інтелектуальні можливості (аналітико-синтетична діяльність), інтелектуальні (інтуїтивні уміння), індивідуальні властивості, комунікативні здібності, риси характеру* [97,*203*]. Судячи з виділених блоків, автором не протиставляються інтелектуальні і творчі якості особистості. Отже, одним з варіантів діагностики рівня сформованості творчих якостей учня може бути тест на перевірку рівня сформованості знань, умінь, навичок, що містить завдання високого рівня. Наприклад, з поміткою „м” за посібниками для підсумкової атестації (9-ий, 11-ий клас) [35].

Важко не погодитися з думкою А.В. Хуторського [114], що саме особистість учня в динаміці його розвитку може бути цільовим чинником вибудовування системи його навчання на основі відповідної методичної системи. Автор вважає, що передбачуваним може бути образ учня, як плановий результат його взаємодії з навколишнім освітнім середовищем [114,*50*]. У разі визначення мінімального набору особистісних якостей учня, відповідних його передбачуваному образу, це дозволить цілеспрямовано конструювати освітні програми, вибирати оптимальні педагогічні технології, добирати навчальний матеріал, який сприятиме створенню учнями навчальної продукції.

Міркування А.В.Хуторського про передбачуваний збірний образ школяра як мету реформування освіти, на наш погляд, не суперечить висловлюванням О.М. Пєхоти [76,*34*] і З.І. Слєпкань [97,*217*] стосовно конкретного учня: „Особистісно орієнтована освіта – це не формування особистості із заданими наперед властивостями, а створення сприятливих умов для повноцінного виявлення та розвитку особистісних функцій учня”. Автори посібника [76] подають коротку характеристику педагогічної технології „формування творчої особистості”. Якщо попередньо визначити рівні сформованості особистісних якостей учнів, то, впроваджуючи зазначену технологію навчання, можна забезпечувати індивідуалізацію та диференціацію навчання.

А.В. Хуторський акцентує увагу на важливій ролі рефлексивної діяль-

---

· Людина – це дріб. Чисельник – … достоїнства людини, знаменник – це самооцінка. Збільшити свій чисельник – свої достоїнства – людина мало спроможна, але кожен може зменшити свій знаменник – свою завищену самооцінку, і цим зменшенням наблизитися до досконалості. *Л.М. Толстой* ності учня, в ході якої ним формулюються отримані результати, перевизначаються цілі подальшої роботи, корегується власний освітній шлях, самоцінюється приріст в знаннях з предмету, зміни в особистісних якостях, в умінні усвідомлювати себе [114, *433*]. Учень виконує наступні види діяльності: 1) пізнання об’єктів навколишнього світу і наявних знань про нього, 2) створення учнем особистісного продукту навчання як еквіваленту власного навчального приросту, 3) самоорганізація попередніх видів діяльності – пізнання і творення. Кожному виду діяльності відповідає певна група якостей: *1) когнітивні (пізнавальні)* якості*;* *2) креативні (творчі)* якості учня забезпечують умови створення ним творчого продукту в загальноосвітньому процесі; *3) організаційно-діяльнісні (методологічні)*.

Автором [114, *426]* подаються рекомендації щодо діагностики особистісних якостей учнів. Рівні сформованості якостей визначаються на основі порівняння результатів їх на початку і в кінці навчального року (місяця, семестру, вивчення курсу). За допомогою методики, що включає спостереження, тестування, аналіз навчальної продукції учнів, вчитель оцінюватиме рівень розвитку якостей за параметрами, згрупованими у певні блоки. Для діагностування рівнів сформованості окремих якостей учня, необхідно визначити діапазон з проміжним рівнем елементів. Пропонується ввести три основні рівні для оцінки прояву якостей: 1) високий, коли позитивні зміни особистісної якості учня протягом навчального року визнаються як максимально можливі для нього; 2) середній – зміни відбулися, але учень потенційно був здатний до більшого; 3) низький – зміни не відбулися. У діагностиці особистісних якостей поряд з тестуванням А.В. Хуторський значну роль відводить самооцінці та оцінці учня вчителем на основі навчальних ситуацій, тобто герменевтичному підходу.

Між підходами в оцінюванні сформованості особистісних якостей учнів В.І. Андрєєвим [2], С.О. Сисоєвою [93] і В.А. Хуторським [114] є відмінності. У двох перших авторів визначення рівнів сформованості особистісних якостей учня, на наш погляд, трактується як “відхилення від норми” (підсумкового рівня розвитку). У А.В.Хуторського формування якості визначається як „наближення учня в індивідуальному темпі від початкового (мінімального) рівня до норми”.

С.А.Раков [87] вважає за можливе формувати в учнів якості, пов’язані з продукуванням ідей, формулюванням гіпотез, конструюванням версій, закономірностей, креслень, якщо навчання математики здійснювати дослідницьким методом, використовуючи при цьому ППЗ DG, GRAN. Автор досліджує проблеми формування у вчителів математики математичних компетентностей і компетентностей з ІКТ.

О.І.Скафою [96] досліджувалися питання формування творчої особистості учня у процесі використання загальних і спеціальних евристик. На основі проведених досліджень, автор робить висновок, що застосування у навчанні математики акцентованих програм, програм із запізнілою корекцією та зчеплених (“Евристико-дидактичні конструкції”) допомагає розвивати особистість учня [94, *19*].

В.П. Кисільовою [39] розкрито сутність поняття ”готовність ліцеїста до організації та проведення науково-дослідницької діяльності”, визначено його зміст, рівні, критерії та показники, досліджено особливості організації навчально-виховної роботи у профільному природничо-науковому ліцеї та висвітлено її вплив на формування творчої особистості учня.

Є.Ф. Вінниченко [13] пропонує систему творчих математичних завдань для формування окремих компонентів творчих здібностей старшокласників у навчанні інформатики, для виконання яких часто застосовують ППЗ GRAN.

С.М. Лук'яновою [62] досліджувалася проблема розвитку в учнів у процесі розв'язування текстових задач арифметичними способами гнучкості мислення, раціональності, критичності, здатності до оціночних суджень, здібності до узагальнення і згортання розумових операцій.

І.О.Теплицький пропонує добірку задач комп'ютерного моделювання, спрямованих на розвиток творчого мислення учнів, та методику їх опрацювання [105]. Дослідник виділяє за Дж. Гілфордом такі *ознаки творчого мислення як оригінальність, пластичність, рухливість, семантичну спонтанну гнучкість,* відмічає принципову відмінність між двома типами мислительних операцій – *конвергенцією* (сходженням) *і дивергенцією* (розходженням) [105, *24*]. Метод моделювання, спрямований на розв'язування задач із нечітко сформульованою умовою, створює реальну основу для розвитку творчого (продуктивного) мислення учнів. Завдяки впровадженню ІКТ можна перекласти на комп'ютер частину рутинних обчислень і вивільнити резерви для творчого розвитку особистості. Автор пропонує читачеві подискутувати: творчі здібності особистості в навчанні створюються чи вивільняються? [106, *226*].

О.С. Чашечніковою розглядаються питання класифікації творчих здібностей особистості [115]. Автором розроблена система компонентів творчого мислення, що можуть діагностуватися у процесі навчання математики [116], сформульовані критерії дослідження для кожної з підкомпонентів. Наприклад, *дивергентне мислення* О.С.Чашечнікова характеризує якостями, які дозволяють виявити розбіжності і сформулювати проблему – швидкістю, гнучкістю, оригінальністю, широтою, продуктивністю, узагальненістю, варіативністю.

У навчанні математики вчителю доцільно враховувати запропоновану В.А. Крутецьким [54] *загальну характеристику математичних здібностей* учня: здатність до формалізації математичного матеріалу, абстрагування, узагальнення, уміння вичленовувати головне, відволікатися від неістотного, бачити загальне у зовні різному, схильність до логічного мислення, до скорочення процесу міркувань через мислення згорнутими структурами; гнучкість мислення, математичну пам'ять, що включає пам'ять на узагальнення, формалізовані структури, логічні схеми; здібність до просторової уяви, яка тісно пов'язана з вивченням геометрії.

Оволодіння учнями знаннями, успішність у багатьох видах теоретичної та практичної діяльності нерозривно пов'язані з вільним оперуванням просторовими образами, що передбачає вміння за плоским зображенням відтворити просторові форми і характеристики реального технічного об'єкту, вміння уявити його в динаміці, у взаємозв'язках з іншими об'єктами. З проблемами нерозвиненої просторової уяви в найбільшій мірі учні стикаються при вивченні аксіом, введенні поняття паралельності (перпендикулярності) прямих, прямих і площин [18].

І.С.Якиманська розглядає просторове мислення як різновид образного мислення, як важливу грань інтелектуального розвитку школяра, що відіграє значну роль в оволодінні знаннями основ наук [127, *11*]. Автором проаналізовано структуру просторового мислення, виявлено та обґрунтовано раціональні шляхи його формування. Виокремлюється три типи оперування просторовими образами, створеними на наочній графічній основі: 1) зміни стосуються в основному просторового положення; 2) образ під впливом задачі перетворюється в основному за структурою; 3) перетворення образу виконуються тривало і з повтореннями. Відповідно до трьох типів оперування образами виділяють три типи розвитку просторового мислення (низький, середній, високий) [127, *121*]. Показник позитивно корелюється з широтою оперування просторовим образом, повнотою образу, динамічністю, узагальненістю, зворотністю.

За висловленням О.Д.Александрова, геометрія у своїй сутності є "поєднанням живої уяви і строгої логіки, в якому вони взаємно організовують і спрямовують одна одну". *Основні завдання навчання геометрії – розвивати в учнів три якості: просторову уяву, практичне розуміння та логічне мислення* [1,*56*]. Найкраще розвивають просторову уяву позиційні задачі геометрії. У методиці навчання стереометрії значну увагу проблемі формування просторової уяви приділено в працях Г.П. Бевза [6], В.М. Литвиненка [57] та ін. Автори здебільшого виокремлюють такі типи вправ, що лежать в основі розвитку просторової уяви: вправи на вміння читати і виконувати зображення та на оперування просторовими образами.

Для розвитку образного мислення школярів М.І. Жалдак та О.В. Вітюк пропонують використовувати у навчальному процесі ППЗ GRAN-3D. У посібнику [30] подаються добірки комп'ютерно-орієнтованих завдань для вивчення геометрії в 11-му класі.

Пізнавальну самостійність Т.І. Шамова [119] визначає як властивість особистості, С.В. Каяліна [38] та Н.І. Зеленкова [36] як специфічну інтегративну якісну характеристику особистості. Трактуватимемо *пізнавальну самостійність як особистісну якість людини, що виявляється в її прагненні до пізнавальної діяльності й умінні ефективно здійснювати цю діяльність самостійно.* Виділяють два провідні компоненти пізнавальної самостійності – мотиваційний та операційний, що є структурно невіддільними, взаємодіють між собою і впливають один на одного. Мотиваційний компонент є системою пізнавальних мотивів, що визначає чуттєві, вольові та інтелектуальні зусилля школярів, спрямовані на досягнення мети пізнавальної діяльності. Операційний компонент включає способи поведінки, що характеризуються здатністю до самостійного оволодіння системою провідних знань, засобами і способами пізнання. Н.І. Зеленкова зазначає, що необхідними і достатніми складниками *пізнавальної самостійності є особистісні компоненти* (свідоме ставлення до навчально-пізнавальної діяльності, пізнавальні інтереси, готовність до пізнавальної діяльності, досвід цієї діяльності, емоційно-вольовий); *діяльнісні компоненти* (мотиваційно-цільовий, змістовний, процесуальний, операційний, комунікативний) та компоненти *зовнішніх проявів* (потяг до досягнення результатів, інтерес до предмета, стабільність в роботі, оволодіння способами роботи, настроєність на співпрацю і діалог).

Для визначення рівня сформованості пізнавальної самостійності використовуються критерії, що відображають зміст та стійкість мотивації учня, ступінь сформованості його знань, умінь та навичок, позитивне ставлення до навчальної діяльності. Найчастіше виділяють три *рівні* пізнавальної самостійності: *початковий (наслідувально-пасивний), середній (активно-пошуковий), високий (інтенсивно-творчий).* С.В. Каяліна виділяє 16 рівнів пізнавальної самостійності, оскільки для обох компонентів пізнавальної самостійності (мотиваційного та операційного) розрізняє по чотири рівні

[38]. Найтиповіші з них – початковий (пізнавальна пасивність – копіюючий характер самостійної діяльності), середній (відтворююча активність у поєднанні з самостійною діяльністю репродуктивного характеру), достатній (при інтерпретуючій активності простежується продуктивний характер умінь здійснювати пізнавальну діяльність самостійно), високий (творча активність – творчий характер самостійної пізнавальної діяльності).

Головну роль у детермінуванні творчої поведінки відіграють *мотивація, особистісні цінності, індивідуальні риси особистості.* А.К. Маркова [67,13] підкреслює, що мотивація виконує кілька функцій: спонукує поведінку, спрямовує та організовує її, надає їй особистісного смислу й значення. Важливість формування всіх сторін мотиваційної сфери обумовлена тим, що лише у взаємному зв'язку і єдності вони реалізують функції мотивації: потреба виконує функцію спонукання, ціль – спрямовуючу й організуючу функції, мотив – смислоутворюючу. Наявність мотиву надає активності нового, більш дієвого характеру. Мотивом, найбільш адекватним навчальній діяльності, є спрямованість школяра на опанування новими способами дій. Засвоєння способів перетворення виучуваного об'єкта призводить до внутрішнього збагачення суб'єкта навчальної діяльності (учня) і тому становить специфічну відмінність такої діяльності від усіх інших видів діяльності.*

Найважливіше, як мотиви, що характеризують обставини, перетворюються в якості особистості. Виникнення мотивів навчання не є достатньою умовою для ефективної навчальної діяльності, якщо у школяра не сформовано уміння ставити цілі у навчальній роботі. Щоб збудити інтерес, зазначає І.О. Теплицький [105,37], треба створити мотив, а потім відкрити школярам можливість знаходження цілі (системи цілей) у виучуваному матеріалі, адже цікавий навчальний предмет це той, що став „сферою цілей" учня у зв'язку з тим або іншим спонукальним мотивом. Якщо в результаті самоаналізу (рефлексії) проявляється незадоволення учня своєю роботою, то це може розглядатися як важливий етап у становленні мотивації. Емоційне забарвлення є однією з динамічних характеристик мотивів, куди входять також сила мотиву, його інтенсивність, виразність, стійкість тощо. Для підтримання стійкої мотивації необхідно здійснювати добір змісту навчального матеріалу [67], щоб не викликати перевантаження або недовантаження школярів, добирати методи навчання, організовувати й підтримувати плідні стосунки на рівні вчитель – учень, учень – учень (група), забезпечувати позитивне емоційне забарвлення від результатів навчання.

На основі аналізу розглянутих вище джерел, навчальної практики виділимо ті якості особистості учня, які доцільно формувати у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики з використанням ППЗ GRAN, DG та ін., програмного забезпечення Microsoft Office. Виокремлені якості об'єднаємо у три групи: *організаційно-діяльнісні, пізнавальні (когнітивні), творчі (креативні)* (табл.1.1).

Для діагностування рівнів навчальних можливостей учнів Ю.К. Бабанський та М.М. Поташник [4] рекомендують проводити педагогічні консиліуми, на яких слід не лише обговорювати якості особистості, але й складати програми удосконалення навчально-виховного процесу [4, 64]. Результати вивчення особистості можна буде врахувати і реалізувати, якщо забезпечити диференційований підхід

---

* Учень, який навчається без бажання, – це безкрилий птах. *Сааді*

в організації навчання. Наприклад, надати різну за характером допомогу, запропонувати учням різнорівневі домашні завдання. Для проведення консиліумів

Таблиця 1. 1.

Перелік якостей для формування у процесі навчання математики з використанням педагогічних програмних засобів GRAN, DG та ін.

Групи якостей	Набори якостей
організаційно-діяльнісні (мотиваційно-творча спрямованість, самоорганізація)	здібність до рефлексії та корекції діяльності; цілеспрямованість (уміння ставити цілі і організовувати їх досягнення); впевненість у своїх силах і здібностях; допитливість, творчий інтерес, потяг до пошуку нових даних, фактів, прагнення до самоосвіти, пізнавальна самостійність; здатність до спілкування
пізнавальні (когнітивні) якості	уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, узагальнювати, класифікувати, систематизувати; просторова уява; здатність втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми
творчі (креативні) якості	здатність переносити знання і уміння в нові ситуації; здатність до формулювання гіпотез, конструювання версій, закономірностей як індивідуально, так і в комунікації з іншими людьми, уміння бачити відоме в невідомому і навпаки; здатність до дослідницької діяльності, творча уява, фантазія; дивергентність мислення

мають бути розроблені критерії якостей та визначені їх рівні.

Щоб керувати процесом формування особистісних якостей школяра у навчанні, треба знати його актуальний та потенціальний рівні. З.І. Слєпкань зазначає [97], що на початку 60-х років американські психологи Дж. Гетцельс і П.Джексон визнали неможливість вимірювання творчого потенціалу за допомогою коефіцієнта IQ і ввели коефіцієнт креативності Cr (креативність – здібність до творчості). Однак визнано недостатню, обмежену валідність коефіцієнта Cr.

Оцінюючи рівні сформованості особистісних якостей, доцільно враховувати поради щодо діагностування рівня розвитку творчої особистості, подані В.І. Андрєєвим [2], З.І. Слєпкань [97], опиратися на критерії, розроблені С.О. Сисоєвою [93], О.С. Чашечніковою [116], зважати на рекомендації визначати діапазони розвитку якостей за А.В. Хуторським [114] та ін. Для оцінки прояву показників особистісних якостей учнів введемо *три рівні – початковий, середній, високий* (табл.1.2). При цьому доречно говорити не про „низький” рівень, а про „початковий”, який визначаємо як мінімальний прояв за певних умов, обставин, зокрема, підтримки учня в діяльності вчителем, однокласником чи іншою людиною. Таке формулювання початкового рівня допоможе не лише констатувати факт наявності чи відсутності якості, але й фіксувати позитивні зрушення у розвитку якості як вчителем, так і самим учнем. Запропонований підхід відповідає принципам особистісно орієнтованого навчання. Вживання термінів „низький”, „повністю відсутній” може негативно вплинути на учня і призвести до заниженої самооцінки, якщо учень не побачить реального просування на шляху становлення

Таблиця 1. 2

Початковий рівень	Середній рівень	Високий рівень
1	2	3
Дивергентність мислення		
мислення, яке характеризується якостями, що дозволяють виявити розбіжності і сформулювати проблему – швидкістю, гнучкістю й оригінальністю, широтою, продуктивністю, узагальненістю, варіативністю		
Проявляється іноді	Проявляється часто, залежно від ситуації	Проявляється при вирішенні навчальних проблем постійно
Здібність до рефлексії та корекції діяльності		
рефлексія – самоусвідомлення діяльності		
Вміння виокремити етапи власної діяльності з визначенням успіхів, трудностей, застосованих способів діяльності	Вміння виокремлювати і аналізувати етапи діяльності, передбачати можливі успіхи та труднощі в певному виді навчальної діяльності	Вміння будувати різнорівневу рефлексивну модель діяльності, що відбувається в освітньому процесі
Цілеспрямованість, уміння ставити цілі, організовувати їх досягнення		
наявність суб'єктивної системи цілепокладання, потреба в усвідомленні цілей		
Вибір мети діяльності учнем здійснюється з переліку, запропонованого вчителем; потрібна підтримка вчителя при досягненні цілі	Ситуативний вияв уміння самостійно ставити цілі, прогнозувати діяльність і досягати мети	Постійний вияв уміння прогнозувати кінцевий результат, прагнення до досягнення мети, проміжні цілі
Впевненість у своїх силах і здібностях		
оцінка власних сил і здібностей як достатніх для виконання завдання		
Впевненість, якщо діяльність здійснюється при підтримці	Адекватне оцінювання своїх сил, але з сумнівами у правильності дій, без постійної впевненості в своїх силах	Відсутність сумнівів в оцінці власних сил і здібностей; адекватна оцінка сил і здібностей, надія тільки на себе
Допитливість, творчий інтерес		
форма вияву пізнавальної потреби, що забезпечує спрямованість на творчість		
Зацікавленість виникає при активній допомозі з боку дорослого	Ситуативний вияв зацікавленості, зумовлений здебільшого стимулюванням з зовні	Нестимульована з зовні зацікавленість навколишнім, різними явищами, новими формами діяльності, розв'язуванням нестандартних проблем
Пізнавальна самостійність, потяг до пошуку нових даних, фактів, прагнення до самоосвіти		
інтегративна якісна характеристика особистості, що виявляється в її прагненні до пізнавальної діяльності й умінні ефективно здійснювати цю діяльність самостійно		

Продовж. табл. 1.2.

1	2	3
Потяг до відшукання нових фактів виникає при активній допомозі іншої людини, є потреба в підтримці учня на стадії опрацювання даних. Характер діяльності наслідувально-пасивний	Самостійний пошук даних для самоосвіти з окремих питань. Потреба в підтримці на стадії опрацювання даних. Потяг до пошуку не завжди свідомо проектується на навчальну діяльність. Характер діяльності активно-пошуковий	Самостійний пошук нової інформації з метою саморозвитку, сформовані уміння опрацьовувати дані самостійно. Свідоме ставлення до навчально-пізнавальної діяльності. Характер діяльності інтенсивно-творчий
Здатність до міжособистісного спілкування		
здатність вступати в контакт з людьми, результатом чого є взаємні зміни поведінки, діяльності, відносин, установок		
Потреба в спілкуванні не чітко виражена; організовує спільну діяльність за дорученням	Контакти з значною кількістю осіб; ситуативний прояв уміння організовувати співробітництво	Активно орієнтується на роботу в колективі, може організувати співпрацю
Уміння аналізувати і синтезувати дані		
вміння розділяти ціле на частини, поєднувати частини в єдине ціле, знаходити логічні взаємозв'язки між окремими частинами цілого		
Аналіз, синтез здійснюється при підтримці	Аналіз, синтез здійснюються самостійно, хоча допускаються помилки при поділі цілого на частини; головне змішується з другорядним	Бачення складових частин будь-чого, вміння порівнювати предмети, поняття, усвідомлювати дані, виділяти головне, робити висновки
Уміння порівнювати, класифікувати		
порівняння – вміння виділяти спільне і відмінне в предметах і явищах; класифікація – вміння розподіляти об'єкти за класами залежно від їх ознак		
Порівняння, класифікація здійснюється при підтримці	Порівняння, класифікація здійснюються здебільшого самостійно, хоча допускаються помилки при виділенні істотних ознак, формулюванні висновків	Бачення істотних несуттєвих ознак, виділення головного, самостійне здійснення порівняння, класифікації, висновків
Уміння узагальнювати, систематизувати		
абстрагування – виділення в предметах і явищах суттєвого і відокремлення несуттєвого; узагальнення – уміння виділяти спільні властивості предметів і явищ, що є суттєвими; систематизація – розміщення взаємопов'язаних частин матеріалу, що є цілісним утворенням, в певному порядку		
Абстрагування, узагальнення, систематизація здійснюється за сторонньої підтримки	Ситуативне самостійне здійснення абстрагування, узагальнення, систематизації. Можливі помилки при виділенні суттєвих ознак	Самостійне відокремлення суттєвого від несуттєвого, виділення спільних суттєвих властивостей, систематизація

Продовж. табл. 1.2.

1	2	3
Здібність до втілення здобутих знань у духовні і матеріальні форми, перенесення знань і умінь у нові ситуації		
Розробка моделі, пошук способів розв'язування завдання, дослідження моделі здійснюється за сторонньої підтримки	Ситуативне самостійне вивчення завдання, розробка моделі, пошук способів розв'язування, організація дослідження	Самостійне вивчення задачі та її структурного аналізу, розробка моделі, вміння проводити дослідження, знаходити способи розв'язування задачі, визначати раціональний, оцінювати ефективність побудованої моделі
Просторова уява, просторове мислення		
вміння створювати просторові образи і оперувати ними у процесі розв'язування різних практичних і теоретичних задач. Характеризується широтою оперування образом, повнотою образу, його динамічністю, узагальненістю, зворотністю		
зміни просторового об'єкта стосуються в основному положення	образ під впливом задачі перетворюється в основному за структурою	перетворення образу виконуються тривало і з повтореннями
Здібність до формулювання гіпотез, конструювання версій, закономірностей як індивідуально, так і в комунікації з іншими людьми		
здатність конструювати систему висновків, за допомогою яких на підставі фактів формулюється висновок про об'єкти, явища, їх розвиток		
Аналіз причинно-наслідкового взаємозв'язку, генерація гіпотез здійснюється за підтримки	Ситуативна здатність запропонувати спосіб розв'язування сформульованої проблеми чи самостійно сформулювати проблему	Вміння сформулювати проблему і запропонувати спосіб її розв'язування; вміння змінювати точку зору на проблему, абстрагуватися від задачі
Уміння бачити знайоме в незнайомому і навпаки, здатність до дослідницької діяльності, здатність до знаходження нового засобами наукових досліджень		
Учень може дібрати з рекомендованої літератури факти, пов'язані з проблемою	Наявний інтерес до дослідницької діяльності, але вона здійснюється під керівництвом педагога	Використання під час пошуку нових фактів, найпростіших наукових методів дослідницької діяльності; вміння добирати і аналізувати літературу з конкретної проблеми, власне навчальну проблему
Творча уява, фантазія		
психічна властивість, процес створення нових образів на основі пережитого		
Фантазія носить переважно репродуктивний характер, образи будуються тільки на основі конкретного матеріалу, за аналогією з чимось	Образи та ідеї більше пов'язані з первинними даними, більш однотипні; фантазія та уява не виходять за межі реального	Розвинена фантазія, що дає можливість створювати образи та ідеї, відтворювати пропущені ланки та факти в логічному ланцюгу; вияв фантазії в малюнках

себе як всебічно розвиненої особистості. Під високим (підсумковим, завершальним) рівнем розумітимемо постійний прояв даного показника у діяльності учня – ціль, якої учень намагається досягти. Середній рівень характеризується проміжними значеннями рівневих елементів.

Якщо дослідження рівнів сформованості якостей особистості здійснювати *методом незалежних експертних оцінок* за методикою С.О.Сисоєвої [93], то для виставлення балів доцільно залучати самого учня, вчителів математики, інформатики, які тривалий час працювали з учнем, шкільного психолога. С.О. Сисоєва зауважує [93,*148*], що оцінка якостей особистості кількома незалежними компетентними особами практично співпадає з оцінкою, проведеною за психологічними тестами. Щоб мати змогу формувати творчі якості в навчанні, необхідно бути обізнаним із *сутністю творчого процесу, шляхами і механізмами формування творчої особистості, головний з яких – творча задача.* Найважливішим для розвитку особистості є характер її навчальної діяльності. Педагогічний словник [19] трактує творчість як продуктивну людську діяльність, що здатна породжувати якісно нові матеріальні та духовні цінності суспільного значення. Виокремлюють чотири рівні творчості за обсягом принципової новизни результату [121,*7*]. Вид творчості, що носить суб'єктивну новизну, є підвалиною для виникнення творчості вищих рівнів, і обмежений його обсяг не зменшує важливості.

О. Моляко [71] під творчістю розуміє процес створення нового для суб'єкта. Тому *творчість* у тій чи іншій формі *доступна кожній людині.* Як школяреві, який засвоює нові знання і розв'язує нову, незнайому задачу, так і робітникові, який виконує нове технічне завдання. Вони розв'язують творчі задачі. Творчість може вплітатися у репродуктивну діяльність, і тоді продуктом творчості є вдосконалення. Творчим може бути як результат діяльності, так і прийоми та операції, за допомогою яких вона здійснюється.

І.О.Теплицький, цитуючи В.М. Дружиніна, *підґрунтя творчості вбачає в репродуктивній діяльності, в наслідуванні зразка*. Щоб творити, необхідно шляхом наслідування засвоїти зразок активності людини-творця, вийти на новий рівень оволодіння культурою і самостійно спрямуватися далі [105]. У той же час А.В.Хуторський [114] зазначає, що творча діяльність учнів не передбачає від них попередніх умінь діяльності за зразком. Репродуктивна діяльність може сприяти творчості тільки у тому випадку, якщо за її допомогою засвоюються способи діяльності, а не зміст навчання. Тобто, у формуванні особистісних якостей у навчальній діяльності *ідея „зразка" необхідна для засвоєння способів діяльності*! Знання, уміння, навички учнів є підґрунтям творчості.*

На основі аналізу джерел [61], [93], [114] та ін. можна зробити висновок, що *для ефективної реалізації творчої ситуації у навчально-виховному процесі доцільно дотримуватися наступної психолого-педагогічної структури творчої навчальної діяльності учнів*: 1) бажання, зацікавленість, ентузіазм, потяг до формулювання проблеми, психологічна готовність до її вирішення; 2) наявність знань, умінь та навичок, необхідних для чіткого

* Перед людиною три шляхи до пізнання: шлях мислення – найбільш благородний, шлях наслідування – найбільш легкий і шлях особистого досвіду – найбільш важкий. *Конфуцій*

усвідомлення і формулювання творчого завдання; 3) зосередження зусиль та пошуки додаткових відомостей для розв'язування завдання. Якщо завдання не вирішується, відбувається перехід до наступних етапів; 4) інкубація – підсвідомий аналіз і вибір, уявний відхід від вирішення проблем, переключення на інші види діяльності; 5) еврика (осяяння, інсайт). Це може бути лише перший крок до розв'язання завдання, за яким будуть необхідні інші; 6) перевірка (верифікація). При плануванні творчої навчальної діяльності учитель має враховувати рівень розвитку учнів і прогнозувати вихід із творчих ситуацій для різних груп, тобто передбачати надання диференційованої допомоги в ході творчої діяльності. Іноді доцільно переносити вирішення завдання на наступний урок з метою забезпечення інкубації.

Д. Пойа, аналізуючи творчий математичний процес, акцентує увагу на тому, що навчання повинне плекати ростки винахідливості, готувати учня до відкриття, і звертається до вчителів із закликом „Вчити здогадуватися!" [80,389]. При цьому школяр має відрізняти строге доведення від нестрогої спроби, доведення від здогадки; розумну здогадку від менш розумної.

Формування творчих якостей учнів здійснюється у процесі розв'язування *творчих задач*. Задачу вважатимемо *творчою*, якщо вона або деяка із її підзадач є нерутинною відкритою пізнавальною задачею. В.А. Крутецький [54,*10*] виділяє задачі з неформальною вимогою, з зайвими даними, з кількома розв'язками, зі змінною умовою, задачі на доведення. У навчанні доцільно використовувати типологію навчально-творчих задач за В.І. Андрєєвим [1,*42*] та С.О. Сисоєвою [93,*320*].

Загальне уявлення про етапи процесу розв'язування задач як про складний та багатоплановий процес подає Л.М. Фрідман [112, *27*]. На основі аналізу джерел [54], [66], [71], [80], [112] та ін. можна виокремити етапи *розв'язування творчих задач*:1) бачення задачі, самостійність у її пошуку і постановці; 2) виділення відомих і невідомих даних, процесів; первинне моделювання їх якостей, аналіз умови; 3) пошук невідомого в задачі (висунення гіпотез), що може потребувати, довизначення умов, розгортання деяких понять, що стосуються даних задачі; 4) виведення інших характеристик даних задачі, встановлення наявності у них властивостей, поданих у визначеннях, зближення даних і вимог задачі; 5) пошук невідомого за допомогою більш визначених за змістом прийомів для підвищення рівня впевненості в собі, знаходження і використання подібної задачі, розподіл задачі на частини; пошук невідомого за допомогою прийомів менш визначених за змістом, узагальнення, конкретизація задачі, формулювання і розв'язування оберненої задачі; 6) перевірка і аналіз гіпотез, виділення обґрунтувань гіпотез, аналіз переваг і недоліків, розгляд причин некоректності гіпотез; виявлення схожості у ідеях та умовах.

В.І. Андрєєв акцентує увагу на *багатоплановості застосування навчально-творчих задач* [2,45]: для оволодіння новим знанням про поняття, закони, теорії, принципи, методи, правила, засоби діяльності; розумовими і практичними уміннями; для актуалізації знань, умінь; для контролю знань та умінь; з метою діагностики і розвитку творчих якостей особистості.

Позитивно впливає на формування особистісних якостей учня *продуктивне середовище пізнання*, яке забезпечує комфортні умови творчої діяльності. Вчителю необхідно створювати таке середовище взаємодії інформаційного, пізнавального, психологічного напрямків, щоб школярі могли зануритися в атмосферу творчості, пошуку нового. До сприятливих умов розвитку творчої особистості можна віднести й такі, коли діяльність учнів не регламентується, а її процес організується так, щоб в ньому були елементи творчості, які передбачають комбінування, порівняння, аналогізування, універсалізацію, випадкові видозміни. Важливо забезпечити можливості вільного вибору творчої спрямованості учнів, об'єктивність оцінювання досягнень школярів, підтримку нових ідей учня та виявлення довіри до здобутків кожного з учасників навчального процесу.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому формування позитивних особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики є актуальною проблемою?

2. Охарактеризувати основні якості творчої особистості.

3. Описати структуру творчої навчальної діяльності учнів.

4. Охарактеризувати типи навчально-творчих задач за В.А. Крутецьким, В.І. Андрєєвим, С.О. Сисоєвою і пояснити загальну схему їх розв'язування.

1.2. Роль, місце та зміст інформаційно-комунікаційних технологій в системі шкільної математичної освіти

Напрями впливу інформатики та ІКТ на математичну освіту, які залишаються актуальними, визначив А. П. Єршов, виступаючи з доповіддю "Комп'ютеризація школи і математична освіта" на Міжнародному конгресі з математичної освіти 1988 року [26]. Серед них відзначимо 1) *значне розширення математичної практики*; 2) у шкільному курсі математики *обчислювальний експеримент з математичною моделлю* стає джерелом відкриттів; 3) *візуалізація абстракцій*; 4) *динамізація математичних об'єктів*. Оскільки видимий образ активізує розумову діяльність людини, то візуальне сприйняття є одним з основних джерел, що дозволяють робити відкриття. При цьому потрібно дотримуватись певної пропорції між абстрактним математичним об'єктом і його візуальною моделлю. Використання комп'ютера із його засобами візуалізації і обчислень дає можливість користувачеві здобути із статичного математичного співвідношення різноманітні траєкторії розвитку динамічного процесу у часі, просторі, збагачуючи тим самим його досвід, інтуїцію, здатність до прогнозування. *Це створює підґрунтя для широкого впровадження дослідницьких методів у навчанні.*

Впровадження ІКТ розширює застосування математики у різних сферах людської діяльності[*]. Педагогічна практика, математична освіта мають адекватно реагувати на зазначені тенденції і відображати їх у цілях, змісті, методах, засобах і формах навчання. Оскільки математика постачає для інформатики значну кількість алгоритмів, то це викликало необхідність включення до шкільного курсу елементів дискретної математики, зокрема, комбінаторики, еле-

---

[*] Обчислювальна машина цінна рівно настільки, наскільки цінна людина, що її використовує. *Норберт Вінер*

ментів математичної логіки в прикладному аспекті, елементів теорії графів. М.І. Бурда зазначає [7,*64*], що раніше основною функцією математичної освіти була власне математична освіта, а на сучасному етапі на перше місце виходить інша не менш важлива функція – освіта за допомогою математики.

Розгляд комплексу питань, пов'язаних із використанням сучасних ІКТ у навчальному процесі, дидактичні й психологічні аспекти застосування ІКТН, проблеми формування інформаційної культури як системної особистісної якості учня і вчителя знайшли відображення в працях М.І. Жалдака [27-33], Н.В. Морзе [72-73], С.А. Ракова [87-89], О.В. Співаковського [102], Ю.В. Триуса [109], Т.Л. Архіпової [3], Є.Ф. Вінниченка [12-14], [31], Ю.В. Горошка [21], [31], Т.В. Зайцевої [34], О. Б. Жильцова [29], І.В. Лупан [63], С. О. Семерікова [106], О.А. Смалько [99], Є.М. Смирнової-Трибульської [100-101], Т.І. Чепрасової [117] та ін. Результати дослідження цих авторів переконливо свідчать, що впровадження ІКТ у навчання математики створює передумови поглиблення змісту математичної освіти, сприяє інтенсифікації процесу навчання, розвиває особистість, стимулюючи пізнавальну активність школяра, сприяє підготовці спеціалістів, здатних працювати в умовах інформаційного суспільства та ефективно використовувати математичні знання на практиці. Впровадження ІКТН дозволяє підвищити практичну спрямованість навчання математики, сформувати в учнів життєво необхідні навички, збагатити їх досвідом експериментальної та дослідницької роботи. М.І. Жалдак зазначає, що з часу появи ІКТ відбувся *перехід від програмістського ухилу в навчанні до користувацького*, оскільки стало зрозуміло, що користуватися комп'ютером із застосуванням готового навчального програмного забезпечення необхідно навчити всіх учнів, в той час, як програмістами стануть серед них не всі [33,*39*].

Сучасні інформаційні технології – це сукупності методів, засобів і прийомів, що використовуються для забезпечення ефективної діяльності людей в різноманітних виробничих і невиробничих процесах. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання*, включаючи комп'ютер як засіб управління навчально-пізнавальною діяльністю, є сукупністю комп'ютерно-орієнтованих методів, засобів та організаційних форм навчання. Поряд з терміном "інформаційно-комунікаційні технології навчання" використовується термін "*комп'ютерно-орієнтовані технології навчання*" [109].

Проаналізуємо, вплив ІКТН на методичну систему навчання математики. Відомо, що структура МСН визначається трьома основними питаннями: "навіщо навчати?" (цілі), "чого навчати?" (зміст) і "як навчати?" (методи, засоби, форми навчання). Згідно з системним підходом на рівні методики навчання за А.М. Пишкало, всі компоненти навчального процесу – *цілі, зміст, методи і прийоми, засоби, організаційні форми навчання* – утворюють єдине ціле із визначеними внутрішніми зв'язками. Сукупність компонентів МСН, що відповідають на питання "як навчати?", деякі науковці ([109], [118]) розглядають як певну підсистему – *технології навчання* у вузькому смислі. Структуру з підсистемою "технологія навчання" можна подати як триєдине ціле, що містить *цільовий*, *змістовий, технологічний* компоненти МСН. Визначальними є цільовий та змістовий компоненти.

На думку Н.В. Морзе, модель МСН, враховуючи темп розвитку засобів інформатизації, варто доповнити включенням очікуваних результатів навчання; технології добору змісту, методів, форм і засобів навчання; технології встановлення зв'язків між елементами методичної системи [72]. Під *комп'ютерно-орієнтованою* МСН за Ю.В. Триусом [109, *229*] розумітимемо МСН, яка забезпечує цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання і розвиток його творчих здібностей на основі широкого використання ІКТ.

Важливо, щоб ІКТ не були надбудовою до існуючої системи навчання, а обґрунтовано й гармонійно інтегрувалися у навчальний процес, забезпечуючи нові можливості і вчителям, і школярам. При цьому, за словами М.І. Жалдака [27], в основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику нових КОМСН на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі дидактичні системи, гармонійного поєднання ТМСН і КОМСН, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення, в тому числі і за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку.

На основі аналізу джерел [27], [87], [109] можемо виділити такі цілі КОМСН, як *розвиток особистості учня*; інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу за рахунок застосування ІКТН, оптимізація пошуку необхідних користувачу відомостей, підвищення якості освіти; *виконання соціального замовлення суспільства на формування особистості, що проживатиме в умовах інформаційного суспільства*.

Спостерігається диференціація використання комп'ютера як засобу навчання, виховання та розвитку від комп'ютерних ігор для раннього шкільного віку до тренажера, консультанта, екзаменатора і партнера у вирішенні конкретних навчальних завдань для старшокласників. ІКТ справляють вплив через спілкування в мережі Internet, телепередачі, відеомагнітофонні записи та інші опосередковані прояви, що безупинно змінюють все інформаційне середовище й тих людей, у спілкуванні з якими виростає дитина і формується як особистість. Це накладає вимогу *врахувати вікові особливості учнів і застосовувати в навчанні доступні засоби.* Значні переваги перед текстовим, графічним чи іншим традиційним повідомленням має аудіовізуальне в поєднанні з кольором і рухом, що якісно інакше сприймається і запам'ятовується, а іноді має властивість вступати в несподівані асоціативні зв'язки з іншими фрагментами відомостей. Через істотне розширення обсягу і характеру доступних людині відомостей, форм їх одержання і перетворення, через діяльність і спілкування відбувається внутрішнє збагачення особистості, накопичується її різноманітний духовний потенціал. Завдяки автоматизації функцій розумової праці людини за рахунок перекладання на комп'ютер доступних йому рутинних логічних і обчислювальних операцій вивільняються резерви розуму для виконання творчої роботи.

Переважна більшість дослідників вважають, що використання ІКТ у навчальному процесі сприяє підвищенню інтересу учнів до отримання знань; забезпеченню диференціації; індивідуалізації у процесі навчання, зокрема проходженню матеріалу за власним темпом; об'єктивності контролю якості знань; активізації процесу навчання, зокрема через інтенсифікацію подачі матеріалу з використанням ІКТ; формуванню умінь і навичок різноманітної творчої діяльності; вихованню інформаційної культури; оволодінню навичками оперативного прийняття рішень в складних ситуаціях; забезпеченні оперативного доступу до банків різноманітних відомостей.

Розглядаючи психолого-педагогічні аспекти комп'ютерно-орієнтованого навчання, Ю.І. Машбиць серед найбільш плідних застосувань комп'ютера виокремлює *значні можливості у реалізації проблемного навчання; формування творчого мислення школярів, готовності їх до творчої праці* [68]. Автор наголошує на формуванні алгоритмічного мислення як процесі, *"що передбачає евристичний пошук, сміливий здогад, інтуїцію – усе те, що у найбільшій мірі характеризує творчі витоки мислительного акту"* [68, *25*]. Важливо, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов'язаних із здогадкою і пошуком скорочених шляхів розв'язування задачі на основі „нераціональних" способів мислення.

Одним з найважливіших принципів, що дозволяють забезпечити розвиваюче навчання, є профільна та рівнева диференціація, індивідуалізація навчання. М.І. Жалдак акцентує увагу на тому, що при використанні ІКТ у навчальному процесі „мова не повинна йти лише про вивчення певного навчального матеріалу, а, перш за все, *про всебічний і гармонійний розвиток особистості учнів, їх творчих здібностей"* [27, *14*]. ІКТН, відкриваючи перспективи диференціації навчання, розкриття творчого потенціалу, пізнавальних здібностей кожного учасника навчального процесу, мають стати *особистісно орієнтованими*.

Для того, щоб інформаційна технологія була особистісною, необхідно забезпечувати свідоме ставлення учня до навчання, підвищення його самостійності та активізації діяльності, яка визначається усвідомленням цілей навчання. Не менш важливою є можливість обрання школярами таких видів діяльності, які в найбільшій мірі відповідають їх здібностям та нахилам. Наприклад, завдяки графічному супроводу за допомогою GRAN1 комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні завдання, що відповідають зоні його найближчого розвитку, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. Для учнів гуманітарного спрямування це створює передумови для досягнення успіху навіть тоді, коли вони невпевнено володіють аналітичним апаратом, не в повній мірі знають формули і методи розв'язування задач. У цьому разі використання ППЗ перетворює окремі розділи і методи математики в „математику для всіх". З іншого боку, такий підхід дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу. Оскільки науковий аналіз творчого продуктивного мислення показує, що *головним в процесі мислення є побудова зразка проблемної ситуації, здогадка, висування гіпотези,* то важко переоцінити ефективність використання „інтелектуальних" програм в разі поглибленого вивчення математики. М.І. Жалдак, характеризуючи педагогічний потенціал КОМСН математики [27,*7*], акцентує увагу саме на *врахуванні і розвитку неформалізованих, творчих компонентів мислення* через реалізацію проблемної ситуації чи постановку задачі; самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, що приводять до розв'язку; генерацію здогадок та гіпотез у процесі пошуку основної ідеї розв'язку (наукова технічна фантазія, що не зводиться до комбінаторики та генерації випадкових станів); інтерпретацію розв'язку.

Такої ж думки дотримуються Г.О. Михалін [70], В.С. Тюхтін [110]. Забезпечити отримання позитивних результатів у розвитку особистості можна, наприклад, через формування дослідницьких умінь школярів завдяки посиленню ролі обчислювального експерименту, сфера застосування якого у шкільному курсі математики широка – від формулювання понять (графіка функції, границі, похідної функції в точці і т.д.) до перевірки відомих тверджень. Можливість швидко проводити експерименти створює передумови навчання розвиваючими методами, а тому досягати високого рівня навчання та проблемності пізнавальної активності, на основі чого в учнів створюються пізнавальні навички та потреба у набутті інших. Ю.В.Триус [109,*100*] зазначає, що мислення людини, яка має навички роботи з персональним комп'ютером, вигідно відрізняється організованістю, внутрішньою дисципліною, логічною строгістю.

Підтримуємо авторів статті [65] в тому, що індивідуалізація навчання на основі НІТ може бути забезпечена при рефлексивному управлінні навчальною діяльністю. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання має забезпечувати відповідність інформаційної моделі конкретному учневі. Для цього необхідно передбачити визначення стійких і ситуативних індивідуальних особливостей учнів. Наприклад, за допомогою засобу ППЗ ТерМ вчитель може добирати і пропонувати школярам завдання трьох рівнів складності, здійснювати перевірку правильності самостійного виконання учнем кроків завдання.

Ряд важливих рекомендацій щодо розвитку особистості в процесі практичного застосування комп'ютерів у навчанні висловив В.Г. Разумовський [86,12]: „Важливо, щоб учні могли мислено уявити весь логічний ланцюг *творчого процесу застосування ЕОМ на практиці*: явище → його математична модель → алгоритм → програма мовою ЕОМ → розв'язування задачі за допомогою ЕОМ → інтерпретація результату → область його застосування на практиці". Якщо застосовується ППЗ, то учні виступають в ролі користувачів, а не програмістів, тому запропонований ланцюг видозмінюється: *явище → розробка моделі → розв'язування засобами ППЗ → інтерпретація отриманих результатів → застосування на практиці*. Принципово важливими є зауваження В.Г. Разумовського стосовно того, що при моделюванні виокремлюється сама сутність явищ і стає ясною їх спільність, тобто відбувається розвиток науково-теоретичного мислення. Захоплення використанням готових моделей погрожує передчасним розривом зв'язку виучуваного явища з дійсністю. Для уникнення формалізму в знаннях учнів потрібно *віддати перевагу створенню моделі перед використанням готової.* Тому, пропонуючи готові моделі, динамічні креслення в дидактичних іграх з комп'ютерною підтримкою, необхідно обговорювати з учнями етапи розробки креслення, відтворювати послідовність кроків їх побудови.

Н.В. Морзе та Н.П. Дементієвська [23], [73] досліджують, як можна використовувати комп'ютерні технології для розвитку учнів та вчителів у навчанні за допомогою методу проектів. Вони акцентують увагу на суттєвій рисі проектної технології – процесі цілеутворення, розглядаючи його у двох аспектах: діагностика цілеутворення і об'єктивний контроль якості засвоєння учнями навчального матеріалу та розвитку особистості. Для створення діагностичних та операціонально заданих цілей рекомендується використовувати систему, всередині якої мають бути виділені категорії цілей та послідовні рівні (ієрархія) [23, *28*]. У когнітивній (пізнавальній) області такою системою може бути педагогічна таксономія, що окреслює шість рівнів освітніх цілей – знання, розуміння, використання, аналіз, синтез, оцінювання. В даний час малодослідженим є питання впровадження проектних технологій в умовах класно-урочної системи навчання.

Питанням *розвитку розумової діяльності старшокласників* у процесі вивчення алгебри та початків аналізу з використанням ІКТ присвячене дослідження Т.В.Зайцевої, практична значимість якого полягає у створенні і впровадженні у практику роботи школи конкретних методичних рекомендацій вчителям щодо використання ППЗ „GRAN1" та „DERIVE" [34]. У роботі розглянуто шляхи активізації розумової діяльності учнів у процесі вивчення теоретичного матеріалу, розв'язуванні задач, продемонстровано на прикладах, як можна у школярів формувати засобами ІКТ розумові дії аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення. Звернено увагу на важливості прикладної спрямованості навчального матеріалу, продемонстровано, як через використання ІКТ в навчанні математики стають доступнішими для сприйняття абстрактні математичні об'єкти та методи, здійснюється індивідуальний підхід у навчанні.

Не заперечуючи того, що комп'ютер є потужним засобом зі значними дидактичними можливостями, деякі науковці ([103,*359*], [111,*142*]) зауважують, що комп'ютеризоване навчання недостатньо розвиває логічне, образне мислення, істотно обмежує властивості усного мовлення, під його впливом формується формальна логіка мислення на шкоду почуттям і творчим розумовим операціям. Так, М.М. Фіцула [111,*142*] привертає увагу до проблеми швидкої стомлюваності учнів, що працюють за комп'ютером, частих випадків погіршення зору і окремих випадків розладів нервової системи. В умовах автоматизованого навчання можуть формуватися егоїстичні нахили людини, загострюватися індивідуалізм, розширюватися конкурентність, сповільнюватися виховання колективізму, взаємодопомоги. У той же час цими ж авторами як позитив відзначається, що комп'ютерно-орієнтоване навчання розвиває такі якості особистості, як уміння планувати і раціонально будувати виконавчі операції, точно визначати цілі діяльності, сприяє формуванню в учнів охайності, точності, обов'язковості.

Висловлені зауваження стосовно негативних проявів впровадження ІКТН окреслюють окремі напрямки для удосконалення методики навчання математики. Вчителю необхідно максимально уберегти школярів від зазначених негативних впливів, які, на жаль, не поодинокі. Зазначимо, що самі по собі знання, отримані через застосування засобів ІКТ, ще не роблять людину більш чи менш моральною. Тому, щоб зменшити негативний вплив інформатизації на культурну сферу (егоцентризм, некомунікабельність у відносинах з людьми в реальному житті, невпевненість в собі, коли поряд немає комп'ютера тощо), суспільство ні в якій мірі не повинно допускати абсолютизації ІКТ як в освіті, так і в будь-якій іншій сфері людської діяльності.

Вплив ІКТ *на зміст навчання* проявляється в розширенні та поглибленні теоретичних основ курсу математики завдяки більшій їх доступності для школярів, в поглибленні міжпредметних зв'язків і використанні завдань прикладного характеру. Як зазначається в Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, добір змісту математичної освіти забезпечує передумови для всебічного розвитку особистості і визначається на засадах загальнолюдських та національних цінностей, науковості і систематичності знань, їх значущості для соціального становлення людини, гуманізації і демократизації освіти; для індивідуалізації та диференціації навчання, його профільності у старшій школі, запровадження нових педагогічних технологій, формуванні соціальної, комунікативної, комп'ютерної та інших компетентностей учнів [25].

Мотиваційний вплив згідно з А.К. Марковою [67] здійснює лише той навчальний матеріал, зміст якого відповідає наявним і виникаючим потребам учня. Зміст матеріалу має виходити з наявних знань, спиратися на них та на життєвий досвід, і бути у достатній мірі складним і важким. Інакше він не зможе задовольнити потреби психічних функцій (пам'яті, мислення, уяви), не викликатиме яскравих емоцій (позитивних і негативних). Малозмістовний матеріал не сприяє виникненню і розвитку нових потреб. Складність навчального матеріалу повинна бути помірною, щоб не відвернути учня від досліджуваної проблеми.

У зв'язку з впровадженням ІКТН математики виникає потреба в перегляді системи завдань для формування знань, умінь та навичок школярів, для контролю і оцінювання знань. ПЗНП мають відповідати вимогам доцільності створення і практичного застосування – електронні засоби слід наповнювати таким змістом, який найбільш ефективно може бути поданий і засвоєний переважно з використанням комп'ютера. Однак, з впровадженням обчислювальної техніки необхідно обачливо підходити до зміни змісту математичної освіти з метою запобігання зниженню її рівня [97].

Ю.І. Машбиць та М.Л. Смульсон [69,*14*] акцентують увагу на тому, що з впровадженням комп'ютерно-орієнтованого навчання необхідно розрізняти три основні групи змісту. Перша група (*Зміст-1*) включає зміст основних об'єктів і способів оперування ними, що утворюють певний навчальний предмет. Для засвоєння цього матеріалу залучають певний додатковий матеріал (*Зміст-2*), що включає певний понятійний апарат, знаннєвий зміст відповідних розумових дій, різноманітні евристики. Саме *Зміст-2* визначальною мірою впливає на успішність засвоєння матеріалу. *Зміст-1* і *Зміст-2* разом утворюють зміст навчання. Потребує включення у зміст вивчення стратегій навчання, засвоєння учнями власної навчальної діяльності. Для успішної діяльності учні мають засвоїти ще *Зміст-3*, тобто зміст власної діяльності: як вони аналізують задачу, планують її розв'язання і т. д.

Серед *комп'ютерно-орієнтованих засобів* навчання математики розрізняють апаратне забезпечення (комп'ютер; засоби телекомунікацій) та програмне забезпечення (операційні системи; текстові й графічні редактори; табличні процесори; експертні системи; педагогічні програмні засоби; проблемно-орієнтовані програми; електронні підручники, електронні бібліотеки, методичні та консультаційні каталоги, навчальні телекомунікаційні проекти та ін.). Серед програмних засобів комп'ютерної математики виділяють системи для чисельних розрахунків, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних обчислень, спеціалізовані програми і пакети, системи комп'ютерної алгебри і геометрії, універсальні математичні системи [109, *37*]. Завдяки графічній візуалізації розв'язування математичних задач можна швидко зрозуміти суть розв'язування задачі, реалізувати багатоваріантність обчислень, автоматизувати рутинні чи складні обчислення, не заперечуючи математичну інтуїцію людини та її творчу участь у розв'язуванні проблем. Більше того, таке використання допомагає користувачеві *виробити таку інтуїцію без значних витрат часу.* При цьому економію часу можна з успіхом спрямувати на осмислення математичної сутності задач, що розв'язуються. Електронні підручники з "живими" математичними графіками допомагають у самостійному вивченні математики.

Сучасне життя складно уявити без глобальної мережі Інтернет. Освітні шкільні Інтернет-портали „Острів Знань" (http://ostriv.in.ua), портали Львівщини (www.osvit-portal.lviv.ua), Херсонщини (www. ucheba.ks.ua/new) та інші призначені для користувачів-учнів, вчителів, батьків, всіх, хто зацікавлений у розвитку особистості учня.

В інструктивно-методичних листах МОН України рекомендується застосовувати у процесі вивчення курсу математики україномовні педагогічні програмні засоби GRAN, DG, ТерМ та ін. [64,5]. У педагогічних вузах та школах апробуються такі засоби, як "Математика, 5 клас", "Математика, 6 клас", Бібліотека електронних наочностей „Алгебра, 7-9 клас", „Геометрія, 7-9 клас", ППЗ „Алгебра, 10 клас", „Алгебра, 11 клас", „Геометрія, 10 клас", „Геометрія, 11 клас ". Придбати в школу і використовувати можна лише ті комп'ютерні програми навчального призначення, що мають відповідний гриф та/або Свідоцтво про визнання відповідності педагогічним вимогам МОН України[1]. Перелічені ППЗ та інші можна розділити на два типи – одні направлені на зменшення часу спілкування учня і вчителя, і організовані у формі „репетитор"; інші розраховані на інтенсивну взаємодію обох учасників навчального процесу. До інтегрованих ППЗ другого типу належать GRAN та DG, використання яких дозволить в значній мірі звільнити учнів від виконання технічних, рутинних операцій, а вивільнений час використати на постановку проблем, з'ясування разом з учителем сутності досліджуваних процесів, розробку інформаційних моделей, встановлення причинно-наслідкових зв'язків і закономірностей, що має важливе значення як для фундаменталізації знань, так і для надання результатам навчання прикладного характеру.

Охарактеризуємо *дидактичні принципи*, *яким повинні задовольняти ПЗНП* [65,*70*]. Принцип науковості визначає як спосіб і критерії добору змісту навчального матеріалу, так і способи його подання відповідно до сучасного рівня наукових знань. Процес засвоєння матеріалу повинен відбуватися у відповідності з методами пізнання, а саме – науковим експериментом, через здійснення аналізу, синтезу, порівняння, аналогій, індукції та дедукції, абстрагування і конкретизації, систематизації і узагальнення. Способи подання навчального матеріалу, форми і методи організації навчальної діяльності мають відповідати рівню підготовки учнів та їх віковим особливостям. Досягнення успіху кожним школярем може бути забезпечене завдяки доступності навчального засобу. Завдяки перевагам подання графічних та інших даних засобами ІКТ закладаються істотні передумови успіхів у навчанні – емоційне включення, гностичність, емоційне сприйняття даних. Принцип наочності за умови використання ППЗ полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учнями моделей, як в активній перетво-

[1] Правила використання комп'ютерних програм у навчальних закладах // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах, 2006. – №1. – С. 172-174.

рюючій діяльності, у процесі якої школярі самостійно будують моделі. Встановлюючи суттєві зв'язки між складовими динамічної моделі, певні ознаки, у школярів формуються прийоми мислительної діяльності.

Схвальні відгуки педагогів отримали підручники [28-31], [88], які демонструють шляхи впровадження в навчальний процес ППЗ, інтеграцію навчальних дисциплін та посилення міжпредметних зв'язків.

Якщо для класифікації *методів навчання* вибрати за основу джерело здобуття знань, то з впровадженням ІКТ до словесних (вербальних) методів додається робота з електронними підручниками, довідковим матеріалом комп'ютерних програм; робота з відомостями, які отримуються через глобальну мережу Інтернет. Крім демонстраційного експерименту та самостійного спостереження, послуговуються таким наочним методом навчання, як робота з навчаючими та навчально-контролюючими програмами. Особливу увагу звертаємо на *практичні методи навчання*, оскільки в подальшому будемо часто ними послуговуватися. Крім розв'язування доцільних задач, виконання практикумів та лабораторних робіт, з впровадженням ІКТ доступними стають дослідницькі роботи у комп'ютерних лабораторіях; обчислювальні експерименти; телекомунікаційні проекти. З'являються нові можливості навчання розвиваючими методами – проблемним, частково-пошуковим, дослідницьким.

З *форм організації навчання* виокремимо комп'ютерно-орієнтовані лабораторні заняття, контрольні роботи; науково-дослідні роботи; комп'ютерне тестування та ін. Впровадження ІТ в освітній процес здійснюється здебільшого через комп'ютерно-орієнтований урок. При цьому постають проблеми створення належного навчального матеріалу для роботи на уроці. З одного боку, це проблеми програмування та інструментарію для створення програми, з іншого боку, це проблема педагогічної майстерності, уміння конструювати і розробляти уроки на основі методологічних і методичних положень та вимог.

Поділяємо думку С.А. Ракова [87] стосовно того, як краще організувати дослідження з використанням комп'ютера виходячи з різного стану забезпечення закладів технікою. В класах, які оснащені одним комп'ютером краще виконувати дослідження групами з 3-4 чоловік по черзі; якщо до комп'ютера додається мультимедійний проектор, то вчитель може виступати менеджером дослідження і обговорювати результати з усіма школярами; в класі, де є кілька комп'ютерів, краще працювати і звітувати групами; навіть у комп'ютерній лабораторії бажано працювати парами, щоб обговорювати і висувати гіпотези.

Є.М. Смирнова-Трибульска [100,*94*] виділяє чотири *ступені включення комп'ютерів у дидактичний процес*. Найнижчий – доповнення, розміщення комп'ютерів з ІКТ окремо від середовищ навчання. Другий ступінь – „розміщення" комп'ютерів та ІКТ в навчальному предметі, однак з обтяжливою рисою „доповнення", бо його використання незінтегроване з предметним змістом і його структурою. На третьому етапі відбувається інтеграція ІКТ у предмет навчання. Це означає повну інтеграцію програм навчання, дидактичного забезпечення (у тому числі підручників, комп'ютерів і відповідного програмного забезпечення навчального призначення), методів використання їх у навчанні визначеного предмета. Найвищим ступенем є повна міжпредметна інтеграція з певною предметною галуззю, наприклад, з математикою.

Ю.В. Триус [109,*237*] виокремлює рівні включення ІКТ в навчальний процес як для традиційної МСН, так і для комп'ютерно-орієнтованої. Для сучасного стану характерне *епізодичне використання ІКТ як засобів навчання.*

Впровадження ІКТ в навчальний процес гальмує декілька чинників, серед яких слабка матеріально-технічна база закладів освіти, недостатньо розроблені комп'ютерно-орієнтоване навчально-методичне забезпечення, практичні рекомендації вчителям математики, недостатньо визначені можливості використання ППЗ, зокрема, для становлення саморозвитку особистості учня. Потребує підвищення рівень інформаційної культури вчителів математики.

Підсумовуючи, зазначимо, що *гармонійне вбудовування комп'ютерних технологій в діючу дидактичну систему удосконалить і посилить її, сприятиме саморозвитку, самовдосконаленню учня* у процесі навчання. Щоб застосування ІКТН гарантувало досягнення зазначених цілей, необхідний відповідний добір змісту, методів, форм організації навчання; диференціація та індивідуалізація навчального процесу, підвищення внутрішньої мотивації учня, створення середовища, сприятливого для розвитку особистості.

Контрольні запитання і завдання

1. Порівняти компоненти традиційної методичної системи навчання і комп'ютерно-орієнтованої, визначити цілі застосування ІКТ в навчанні.
2. Описати комп'ютерно-орієнтовані методи і форми організації навчання.
3. До однієї з тем дібрати доцільні ППЗ, комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби і форми навчання. Оцінити їхні переваги у навчанні перед традиційними засобами. Користуючись мережею Інтернет, дібрати відомості для уроку математики.
4. Визначити місце навчального предмету „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики" в системі інших навчальних дисциплін.

1.3. Аналіз можливостей поєднання ІКТН математики з іншими педагогічними технологіями у навчанні і розвитку учнів

Формування у навчанні освіченої, всебічно розвиненої особистості як стратегічного завдання реформування освіти потребує впровадження особистісно орієнтованих педагогічних технологій. Проблеми реалізації *особистісного підходу* в навчанні учнів знайшли відображення в посібниках [76], [114]. Виділимо деякі його особливості: 1) зміст навчального матеріалу повинен забезпечувати виявлення змісту суб'єктивного досвіду учня; 2) виклад знань у підручнику чи вчителем на уроці має бути спрямованим не лише на розширення його обсягу, структурування, інтегрування, узагальнення предметного змісту, але й на постійне перетворення наявного суб'єктивного досвіду кожного учня; бути пов'язаним з особистісним цілепокладанням учня; 3) активне стимулювання учня до самооцінного навчання, зміст і форми якого повинні забезпечувати йому можливість самоосвіти, саморозвитку; конструювання і організація навчального матеріалу повинні надавати школяреві можливість обирати зміст, вид і форму при розв'язуванні задач (вибір індивідуальної навчальної траєкторії); 4) необхідно забезпечити своєчасний контроль і оцінювання не лише результатів, а головним чином процесу учіння, тих трансформацій, які виконує учень, засвоюючи навчальний матеріал. Особистісно орієнтованому навчанню характерне особистісне оцінювання. Тобто таке, щоб за балами кожен учень в оцінках вчителів бачив власний ріст. Процес учіння супроводжується рефлексивним усвідомленням його учнем. Під рефлексією розумітимемо не лише пригадування головного з уроку чи формулювання висновків, скільки усвідомлення способів діяльності, виявлення її смислових особливостей, навчальних приростів учня.

Л.В. Кондрашова [78,*118*] пропонує виділяти *шість складників моніторингу у процесі особистісно орієнтованого навчання* (табл. 1.3). Результати моніторингу даватимуть уявлення про стан, настрій, самопочуття учнів. Їх своєчасне врахування в навчанні математики значно підвищить ефективність формування особистісних якостей школярів.

Таблиця 1. 3.

Складники моніторингу особистісно орієнтованого навчання

Назва складника	**Початковий рівень**	**Підсумковий рівень**
Швидкість входження учня в навч.-пізнавальну ситуацію уроку	Можлива відмова від виконання навчального завдання	Вільний вибір способів виконання завдання і шляхів отримання планованого результату
Емоційна активність	Ситуативна байдужість до процесу та результату навчальної роботи, деяка нервозність, прояви негативних емоцій	Захопленість процесом пізнання, нормалізація настрою і самопочуття
Оригінальність розв'язування навчальних задач в різних варіантах	Можливе пряме запозичення, наслідування, проста репродукція	Творче виконання навч. завдань, висування нових ідей, нестандартних способів розв'язування
Самостійність учня у виконанні завдання	Вибір шляху „за зразком" (переважно самостійна робота, але за підтримки і своєчасної допомоги)	Ініціативність, винахідливість, самодіяльність в пошуку досягнення результату
Бачення результату навчальної роботи	Схематичне, незавершене розв'язування навчальної задачі	Результат, що характеризує індивідуальний стиль діяльності учня
Ставлення до результату діяльності	Варіанти оцінок і самооцінок, суб'єктивність \ об'єктивність, неадекватність \ адекватність	

Серед розмаїття особистісно орієнтованих технологій виокремимо ті, які найкраще можуть поєднуватися з ІКТН (табл. 1.4). Порівняльні відомості зібрані на основі аналізу джерел [76], [81], [97] та ін. Під технологією навчання розумітимемо запрограмований процес взаємодії вчителя та учнів у процесі навчання, який гарантує досягнення поставлених цілей. Для технології характерне чітке формулювання цілей та їхня діагностичність; опора на ґрунтовно розроблену теорію, високий рівень системних зв'язків між цілями, змістом, формами, методами і результатом; висока діагностичність і стійка гарантованість, властиві інновації.

Таблиця 1. 4.

Інноваційні педагогічні технології. Порівняльна таблиця

Мета	Сутність	Механізми розвитку
1	2	3
Робота над навчальним проектом (проектна технологія)		
практика особистісно орієнтованого навчання у процесі конкретної праці учня на основі його вільного вибору, з врахуванням його інтересів. *Ключові слова*: проект, проектна діяльність, продуктивна діяльність, інтегрування знань, пізнавальний інтерес, суб'єкт діяльності		
Створення умов, за яких результатом є індивідуальний досвід проектної діяльності учня. Завдання: не лише передати учням суму знань, а й навчити здобувати їх самостійно, застосовувати їх для розв'язування пізнавальних і практичних завдань; сприяти учневі у набутті комунікативних якостей; розширити коло спілкування; прищепити вміння користуватися дослідницькими прийомами	Стимулювання інтересу учнів до певних проблем, які передбачають володіння визначеною сумою знань, та через проектну діяльність, яка передбачає розв'язання однієї або цілої низки проблем, показ практичного застосування знань. Наявність значущої проблеми і передбачуваного практичного результату. Схема діяльності передбачає підготовчий етап, планування, збір необхідних відомостей, опрацювання формулювання висновків	Самостійна діяльність учнів (індивідуальна, парна, групова). Розрізняють дослідницькі, творчі, ігрові, інформаційні, практико-орієнтовані проекти. Отримання матеріальних результатів проектів, що передбачає відповідне оформлення – відеофільм, альбом, бортжурнал, комп'ютерна газета, альманах тощо. Пропонуються для розробки критерії оцінювання роботи
Технологія навчання як дослідження		
Ключові слова: пізнання, дослідження, дослідницька технологія, спостереження, порівняння, моделювання, конструювання, гіпотеза, експеримент, систематизація узагальнення		
Набуття учнями досвіду дослідницької роботи в пізнавальній діяльності; об'єднати розвиток їх інтелектуальних здібностей, дослідницьких умінь і творчого потенціалу, на цій основі формувати активну, компетентну, творчу особистість	Модель організації навчання: постановка мети, забезпечення конкретним навчальним матеріалом; дослідницькі завдання вивчення конкретного предмета (розвитку особистості, навчальні, виховання); власне навчання як дослідження; проміжна оцінка результатів, корекція, рефлексія, вихід на плановані результати.	Самостійна робота над проблемою індивідуально чи в групі. Велике значення має розробка системи питань і алгоритмів, що стимулюють учнів до участі в навчальних дослідженнях
Навчання у співпраці, групова навчальна діяльність, технологія організації продуктивної взаємодії		
Ключові слова: форма навчальної діяльності, мала група, співпраці, суб'єкт навчальної діяльності, особистісно орієнтоване навчання		
Навчати школярів співпраці у виконанні групових завдань, стимулювати моральні	Форма організації навчання в малих групах учнів, об'єднаних загальною навчальною метою	Вчитель керує роботою учня опосередковано, через завдання, які він пропонує групі

Закінчення табл.1.4

1	2	3
переживання взаємного навчання, зацікавленості в успіхові товариша, формувати комунікативні уміння, рефлексивні компоненти (цілеспрямованість, планування, контроль, оцінка)	при опосередкованому керівництві вчителем і в співпраці з учнями. Завдання вчасно почути, помітити, поправити, підтримати кожного учня, організувати співпрацю	та які регулюють діяльність учнів. Види роботи: в парах, четвірки, групи пошуку інформації, синтезу думок, групи „ажурна пилка" та ін.

Різні аспекти поєднання ІКТН і проектних технологій з метою формування навичок мислення високого рівня висвітлювали Н.В. Морзе [72], [73], Н.П. Дементієвська [23], В.В. Копотій [43] та ін. В основу методу проектів покладена прагматична спрямованість на результат, який можна побачити, осмислити, застосувати в реальній практичній діяльності. Основним мотивом дослідницької поведінки в ході виконання проекту є допитливість учня, яка зумовлюється невизначеністю об'єкта, проблемної ситуації. Проблемна ситуація створюється за допомогою постановки ключових, тематичних, змістових питань. Вчителю рекомендується розробити план проекту, навчальні цілі якого враховують вимоги державних освітніх стандартів та навчальних програм; приклади учнівських робіт; форми та критерії оцінювання діяльності учнів за створення мультимедійної комп'ютерної презентації, публікації, веб-сайту; дидактичні матеріали для учня; методичні матеріали для вчителя, план реалізації проекту та список інформаційних джерел.*
Завдання та діяльність для школярів необхідно спланувати так, щоб процес навчання формував навички мислення високого рівня – *аналізу, синтезу, оцінювання* фактів, які можна охарактеризувати наступними дієсловами: проаналізувати, класифікувати, передбачити, довести, протиставити, встановити відповідність, висунути гіпотезу, розробити, організувати, написати звіт, створити схему тощо. Через використання в організації роботи *методики співробітництва активізується самостійна дослідницька поведінка учнів*, що виконує важливу роль у розвитку пізнавальних процесів усіх рівнів, у навчанні, у набутті соціального досвіду, у соціальному розвитку та розвитку особистості. За своєю суттю *технологія є орієнтованою на особистість школяра, враховує його індивідуальні особливості та здібності, сприяє формуванню навичок творчого і критичного мислення, передбачає підвищення мотивації навчання.*

Технологія навчання як дослідження реалізується у процесі *дидактичної гри з комп'ютерною підтримкою.* Л.В. Тополя [107, *111*] відмічає ініціювання при цьому процесів розвитку певних видів мислення, усунення психологічних бар'єрів та комплексів, пов'язаних зі страхом неправильно виконати завдання, індивідуалізацію процесу навчання в гармонійному поєднанні з колективними формами роботи, оволодіння учнями методами самостійного здобування та подання знань, формування вмінь та навичок здійснення пошукової, творчої, дослідницької діяльності. Акцентовано увагу на таких суттєвих для вчителів математики питаннях, як ви-

---

* Навчання без роздумів непотрібне, але й роздуми без навчання є небезпечними. *Конфуцій*

значення місця дидактичної гри в системі інших видів діяльності на уроці; педагогічна доцільність застосування на різних етапах роботи з навчальним матеріалом; методика проведення дидактичної гри з врахуванням мети уроку, особливостей комп'ютерних програм, навичок роботи учнів з комп'ютером та рівня розвитку здібностей і підготовленості школярів.

Розробники ППЗ DG розрізняють уроки конструкторської діяльності і наукові дослідження [88]. Погоджуємося з С.А. Раковим [87] в тому, що *навчальні дослідження є вищою формою творчості учнів.* Тому організація самостійної творчої роботи учнів з використанням ІКТ потребує від учителя високої кваліфікації і математичної, і педагогічної, і у галузі ІКТ.

Згідно з принципами розвивального навчання, процес засвоєння знань має здійснюватися доступно на високому рівні складності. Чимало науковців, зокрема [27, *16*], [87, *126*], підкреслюють, що навчальний процес необхідно будувати так, щоб учні на початкових етапах могли навчальні задачі розв'язувати за допомогою вчителя. Саме це відповідає відомому принципу Л.С. Виготського – „*зони найближчого розвитку*". Після цього, поступово зменшуючи міру допомоги, слід домагатися, щоб учні розв'язували такі задачі самостійно. Те, що дитина спроможна зараз виконувати лише у співпраці з іншими, а завтра самостійно – це і є *зона найближчого розвитку.* Згідно з С.А. Раковим [87, *127*], таку зону в процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики створює навчання як дослідження. Подаючи матеріал дослідницькими методами з використанням засобів ІКТ, здійснюємо навчання, яке забігає наперед розвитку, приводить до руху низку внутрішніх процесів, які поки що для учня можливі тільки у сфері взаємодії з іншими, але які, виконуючи внутрішній хід розвитку, перетворюються потім у внутрішнє набуття особистості.

ІКТН математики успішно поєднуються з технологією навчання у співпраці. Творча учнівська діяльність у колективі (групах, парах), яка реалізується через різні форми роботи – *проведення навчальних дослідницьких робіт, виконання освітніх проектів, створення освітніх продуктів.* За умови ефективної організації колективна творчість має перевагу над індивідуальною в силу ряду причин.* Серед них С.А. Раков відзначає *розмаїття талантів,* коли кожна індивідуальність є неповторною і може привнести у роботу колективу свій оригінальний доробок. Завдання учителя в цьому разі полягає в ефективному менеджменті – створенні умов для розкриття індивідуальних талантів учнів, спрямованих на досягнення колективної мети. Не менш важливим є к*олективний резонанс,* коли кожна продуктивна ідея буде почута, асимільована, акомодована членами творчого колективу і розвинута ними.

Контрольні запитання і завдання

1. Охарактеризувати окремі педагогічні технології (проектні технології, навчання як дослідження, навчання у співпраці, створення ситуації успіху).
2. Які з особистісних якостей учнів доцільно формувати у співпраці?
3. В чому полягає сутність особистісного підходу у навчанні математики?
4. Як можна здійснювати моніторинг особистісно-орієнтованого навчання?

---

* Якщо ви маєте вогонь знання, дайте іншим запалити від нього світильники. *Томас Фуллер*

Розділ 2
ПЕДАГОГІЧНІ ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

2.1. Поради щодо використання компакт-диску до посібника

1. Перед початком роботи з посібником доцільно скопіювати вміст диску на вінчестер комп’ютера. Щоб створені файли можна було змінювати, слід перевірити, чи у властивостях знята з цих файлів помітка „тільки для читання”.

2. Перевірити наявність на *вінчестері* комп’ютера програмного забезпечення:

а) Microsoft Word, Excel, PowerPoint, Publisher;

б) педагогічних програмних засобів DG, GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D;

в) програми для аналізу функціональних залежностей Advanced Grapher;

г) ПЗНП Геометрія, 7-9 клас; ТерМ, Алгебра, 7-9; Алгебра, 10-11; Геометрія, 10-11, Математика 5-6. Інсталювати засоби бажано у пропоновані виробниками папки.

3. Перед першим переглядом посібника для програм, записаних на вінчестер без інсталяції необхідно відкрити за допомогою перерахованих засобів по одному файлу відповідного типу: а) тип „DGF” за допомогою DG; б) тип „GR1” за допомогою GRAN1; в) тип „G2D” за допомогою GRAN-2D; г) тип „G3D” за допомогою GRAN-3D. При цьому вручну вказують місце, де на вінчестері знаходиться відповідна програма. Співставивши тип файла і відповідну програму, в ході перегляду презентацій зможемо завантажувати відповідні файли за гіперпосиланнями.

4. Починають перегляд із запуску демонстрації „Home.pps”. Рисунки в презентаціях містять гіперпосилання на файли, створені за допомогою ППЗ. Для слайдів на побудову перерізів многогранників створено звукові файли.

5. Додаючи до презентації нові слайди, бажано робити гіперпосилання з них на відповідні файли ППЗ, а в переліку завдань (зміст) до кожної презентації здійснювати посилання на заголовок новоствореного слайду (викликати контекстне меню, обрати послугу *Гіперпосилання*, вказати на файл, який необхідно завантажувати і пов’язати його з даним рисунком, виділеним текстом тощо).

Перелік основних документів на компакт-диску

- вивчаємо ППЗ (програма курсу ІКЗН, фрагменти лекції до курсу ІКЗН, розробки уроків з використанням GRAN, розробка практичного заняття для вчителів з динамічної геометрії)
- досліджуємо функції (лінійна, квадратична, степенева, дробово-раціональна, тригонометричні, обернені тригонометричні, показникова, логарифмічна, функції, що містять цілу і дробову частину числа);
- задачі з параметрами з посібників [11], [20], [35], [91], [122-123];
- добірки матеріалів для навчання за методом проектів (“Геометрія паркетів”, “Геометрія українського орнаменту”, “Перерізи многогранників”, “Малюємо графіками”, добірки завдань на дослідження з підказками та ін.);
- завдання для дидактичної гри з комп’ютерною підтримкою, задачі на побудову, дослідження ГМТ, виконання геометричних перетворень фігур;
- добірки наочностей для уроків стереометрії;
- добірки практичних задач на екстремум, задач математичної статистики;
- малюнки, виконані за допомогою GRAN1 і Advanced Grapher;
- застосування диференціального та інтегрального числення, векторів та ін.

2.2. GRAN1

Програмно-методичний комплекс *GRAN* створений авторським колективом під керівництвом *М.І. Жалдака*, академіка АПН України, доктора педагогічних наук, професора, завідувача кафедри інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова**.** Значний вклад в розробку нових версій програми внесли *Ю. В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко, А.О. Костюченко***.**

За допомогою *GRAN1* школярі можуть будувати та аналізувати функціональні залежності явного та неявного видів, які задані в декартових чи в полярних координатах, параметрично, таблично [31]; графічно розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з однією чи двома змінними; наближено визначати корені многочленів; досліджувати границі числових послідовностей та функцій; опрацьовувати статистичні дані (побудова полігону частот, гістограм, обчислення відносних частот різних подій; визначення центра розсіювання відносних частот та величини розсіювання (дисперсії); будувати графіки функції розподілу; обчислювати визначені інтеграли; площі криволінійних трапецій; площі поверхонь та об'єми тіл обертання тощо. Назва засобу утворена від GRaphic ANalysis. ППЗ GRAN1 простий у користуванні, має „люб'язний" інтерфейс. Детальніше про засіб можна прочитати в посібниках [28], [31].

Про GRAN1 О.І. Скафа [94] зазначає, що він є одним із засобів візуалізації задачі та її розв'язку, допомагає активізувати діалог учня та вчителя, зробити його більш евристичним. Поділяємо також думку стосовно того, що використання GRAN1 в навчанні математики сприяє формуванню у школяра таких навчальних евристичних умінь, як спостереження явищ в плані логічних і математичних категорій; аналіз фактів, сприйняття їх через призму математичних відношень; виділення об'єктів, важливих для пошуку розв'язання евристичної задачі; висунення різних гіпотез з обґрунтуванням їх можливості; передбачення результатів; формулювання узагальненого принципу, що прояснює сутність завдання; висновків; перевірка розв'язання і його відповідність вимогам евристичної задачі та інші [96,*16*] З*астосування GRAN1 у навчанні математики створює передумови для розвитку особистісних якостей школяра.*

На можливості особистісного спрямування застосування ППЗ GRAN наголошує М.І. Жалдак [27,*11*]. Мова йде насамперед про можливість здійснювати диференційований підхід у навчанні. Учням, схильним до глибокого вивчення математики, відкриваються широкі можливості не лише досліджувати готові математичні моделі, але й вивільнити час для самої постановки завдання, з'ясування сутності досліджуваних процесів і явищ, інтерпретації отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Учням нематематичного профілю навчання навички роботи з комп'ютером сприятимуть тому, що вони не почуватимуть себе у складному становищі, не боятимуться втратити почуття власної гідності, зможуть подолати психологічні бар'єри при вивченні математики.

Для DOS-версії GRAN1 І.В. Лупан розроблено лабораторні роботи з вивчення властивостей функцій в 10-11 класах, подано пояснення і рекомендації щодо проведення та організації цих робіт, в додатку наведено "алгоритми" виконання дій з ППЗ GRAN1 [63,*36*]. Пропонується під час уроку-дослідження виокремити чотири ключові моменти – попередня бесіда з школярами про властивості функцій, виконання завдання - побудова графіків за допомогою ППЗ та занесення результатів спостереження в таблицю, обговорення та підведення підсумків роботи, контроль рівня знань. Ця структура уроку-дослідження зручна для здійснення самостійної пошуково-дослідницької діяльності учнів.

Особливо зручною в роботі є модернізована версія програми GRAN1, за допомогою якої ефективно досліджувати функціональні залежності, що можуть містити до 9-ти параметрів [21]. Досліджувати функціональні залежності з параметрами можна також з використанням GRAN-2D, хоча підхід для введення параметрів дещо інший. Завдяки застосуванню названих засобів активізується дослідницька діяльність школярів, що створює сприятливі умови для розвитку особистісних якостей учнів.

Є.Ф. Вінниченком розроблено окремі компоненти методичної системи навчання ІТ розв'язування математичних задач, які сприяють розвитку творчих здібностей учнів в процесі навчання; дібрано відповідний теоретичний та задачний матеріал [13]. Однак, *методичне забезпечення уроків математики для оновленого GRAN є недостатнім, тому і обране нами для подальшої розробки.*

▪ 1. *Для початку роботи* слід активізувати файл *gran1.exe.*

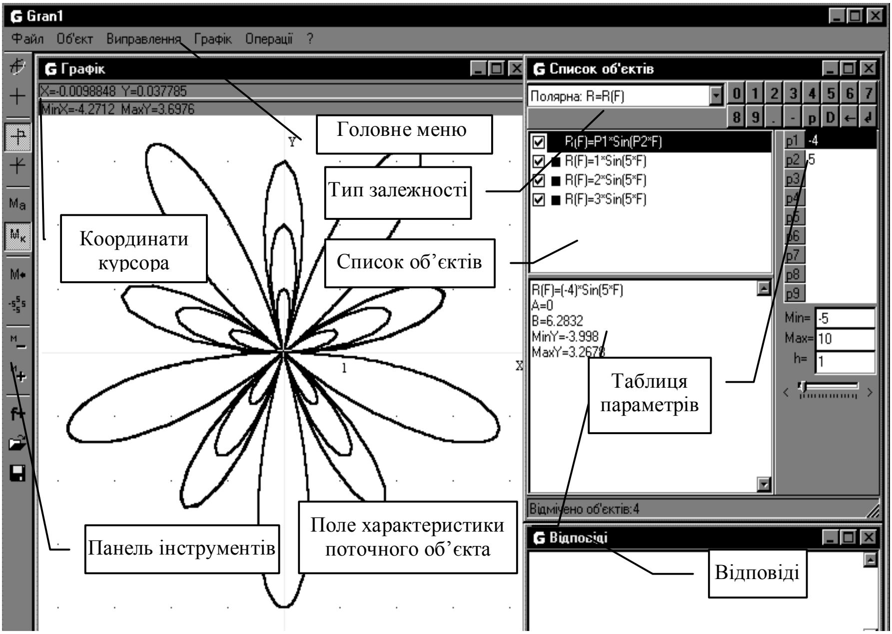


Рис. 2.1. Копія робочого вікна програми GRAN1

Головне меню (рис.2.1) включає пункти:

▪ „*Файл*" (новий, відкрити, зберегти, зберегти як, вихід),

▪ „*Об'єкт*" (створити, змінити, вилучити останній, список об'єктів, нова функція з зафіксованими параметрами),

▪ „*Виправлення*" (копіювання формул, графіків, вікон, налаштування розмірів вікон),

▪ „*Графік*” (побудувати, очистити, координати з клавіатури, масштаб, мітки, параметри вікна *Графік*);

▪ „*Операції*”. Послуги цього пункту меню призначені для виконання певних математичних операцій над введеними об'єктами. Пункт містить такі послуги: *Інтеграли, Операції з ламаними, Статистика, Нерівності, Похідна, Відстань до точки, Значення виразу G(x,y)*, *Відповіді, Калькулятор.*

Зліва у колонці розташована панель інструментів для виконання окремих найчастіше використовуваних підпунктів головного меню. Справа розташований список об'єктів і таблиця для зміни параметрів.

2. *Допустимі символи і операції.* Числові значення і вирази записуються за правилами, близькими до прийнятих в поширених мовах програмування (*BASIC, Pascal* та ін.). При записі числових значень дробова частина, якщо вона є, відокремлюється від цілої крапкою.

Арифметичні операції позначаються знаками: + додавання,

– віднімання, * множення, / ділення, ^ піднесення до степеня.

Пріоритети (порядок виконання) операцій загальноприйняті. Бажаний порядок операцій може бути вказаний за допомогою дужок. До виразів можуть бути включені *позначення деяких функцій*, представлених на панелі введення: *Sin – sin* (синус), *Cos – cos* (косинус), *Tg – tg* (тангенс), *Ctg – ctg* (котангенс), *Asin – arcsin* (арксинус), *Acos – arccos* (арккосинус), *Atg – arctg* (арктангенс), *Actg – arcctg* (арккотангенс), *Exp* – експонента (e^x), *Lg* – логарифм десятковий (за основою 10), *Ln* – логарифм натуральний (за основою *e*), *Log* – логарифм за довільною основою (при введенні в дужках вказується основа і через кому підлогарифмічний вираз), *Abs* – абсолютна величина, *Int* – ціла частина аргументу, *Sqrt* – корінь квадратний, *Pi* – число π (3.141592654). *P* – позначення для параметра. Введення *і одночасне оперування в програмі GRAN1 дев'ятьма параметрами P1, P2, ...P9* відкриває нові можливості для реалізації дослідження. При створенні об'єкта *функція* аналітичний вираз може містити один або кілька параметрів. Параметру, який ще не використовувався, надається початкове значення рівне одиниці. В ході дослідження можна змінювати значення поточного параметра, рухаючи бігунок з певним кроком в заданих межах (*Min-Max*). Якщо у процесі роботи необхідно надати параметру уточнюючого значення, то слід ввести значення параметра безпосередньо в таблицю параметрів.

3. Щоб *створити нову функціональну залежність,* необхідно виконати ланцюжок дій*: Тип залежності* (рис.2.2*) – Об'єкт – Створити – Ввести функціональну залежність у рядку на панелі введення даних – Зазначити відрізок задання – Точки – Натиснути „ОК” – Графік побудувати*. Для вказування залежностей між змінними використовується *панель введення функціональних залежностей* (рис.2.3). На ній представлено набір позначень функцій, символів, якими може оперувати користувач, що надзвичайно зручно для початківців. Крім виразу залежності, необхідно також вказати відрізок (область) задання залежності. При бажанні можна змінити колір графіка залежності. Якщо у властивостях об'єкта для побудови графіка зняти відмітку √, то

графік функції на екран виводитися не буде. Якщо перед формулою у списку об'єктів зняти відмітку √, то на функцію не поширюватимуться операції, які виконує користувач, хоча графік функції може будуватися.

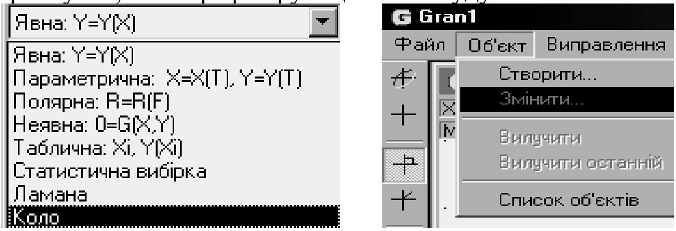


Рис.2.2. Обрати тип функціональної залежності, створити об'єкт

Рис. 2.3 Панель введення даних.

Використовуються наступні типи *функціональних залежностей*:

- *Задана явно залежність виду y=f(x)*. Окрім виразу для задання залежності, в якому використовується як аргумент лише змінна x, потрібно вказати межі, в яких змінюється аргумент та кількість точок побудови графіка залежності. Наприклад, для дослідження функцій $y=kx+b$; $y=ax^2+c$, $y=ax^3+bx^2+cx+d$ створюють об'єкти *y=P1*x+P2; y=P1*x^2+P2; y=P3*x^3+P4*x^2+P5*x+P6*. В ході експерименту змінюють параметр, досліджують властивості функції.
- *Неявно задана залежність у вигляді G(x,y)=0.* Наприклад, $y^2+(2x+4)y+(x^2+2x)(4-x^2)=0$ подається за допомогою виразу 0=y^2+(2*x+4)*y+(x^2+2*x)*(4-x^2).
- *Залежність параметрично задана у вигляді x=x(t), y=y(t)*. Наприклад, фігури Ліссажу – графіки залежностей виду $x=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$, $y=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$ – подаються у форматі GRAN1 формулами *X(t)=P1*sin(P2*t+P3); y(t)=P4*sin(P5*t+P6)*.
- *Тип залежності таблична* X_i, $Y(X_i)$. Для створення таблично заданої залежності між змінними x і y треба сформувати список точок на координатній площині. Оскільки для такої залежності формується апроксимуючий поліном, то необхідно вказати його степінь. Степінь добирають в межах від *0* до *7*, виходячи з умов задачі або з взаємного розміщення точок. Список точок можна сформувати, якщо вводити їх координати з екрану, з клавіатури або з числової панелі за допомогою мишки, завантажити з текстового файла, натиснувши кнопку *Дані з файла*. Числа у файлі повинні розділятися пропусками або починатися з нового

рядка. Після вказування точок необхідно задати бажаний колір графіка.

- Для створення *статистичної вибірки* потрібно вказати тип даних вибірки (варіанти, частоти або відносні частоти); модель даних (дискретна або неперервна); вказати тип графіка залежно від типу розподілу (полігон - для дискретного, гістограма - для неперервного); розглянути відповідно дискретну чи неперервну функцію розподілу. Якщо вводяться відносні частоти, вказується об'єм вибірки. Для неперервної моделі даних, що задається через набір варіант, потрібно вказати відрізок задання вибірки та кількість відрізків розбиття.
- *Залежність задана в полярних координатах* у вигляді $r=r(F)$, де $r(F)$ – вираз від змінної F, r – полярний радіус точки на площині, F – полярний кут (відкладається від полярної осі до полярного радіуса проти годинникової стрілки), причому зв'язок між полярними і відповідними декартовими координатами x і y можна визначити, виходячи з формул $x=r\cos(F)$, $y = r\sin(F)$. Графіком залежності $r = a f$, ($a > 0$, $a = const$, $f \geq 0$) буде спіраль Архімеда; залежності $r = a/f$, ($a > 0$, $f > 0$) – гіперболічна спіраль; залежності $r = be^{af}$, ($a > 0$, $b > 0$, $f \geq 0$) –логарифмічна спіраль. Для дослідження створюють об'єкти за формулами *R=P1*f; R=P2/f; R=P3*exp(P4*f),* зазначають межі зміни параметрів *P1 є [0;20]; P2 є [0;20]* і аргументу *f є [0;20].*
- Створити *коло* можна трьома способами. 1) За координатами центра кола та радіусом. Потрібно ввести з клавіатури координати центра кола та його радіус. Центр кола також можна вказати на координатній площині за допомогою мишки. 2) За двома точками – центром кола і точкою на колі. Потрібно ввести з клавіатури чи за допомогою мишки вказати на координатній площині центр кола та будь-яку точку, що лежить на колі. Для створення об'єкта необхідно натиснути кнопку „Ok", після чого в списку об'єктів з'явиться відповідне повідомлення. 3) Як об'єкт неявного типу задання *0=(x-P1)^2+(y-P2)^2-P3^3.*
- Для *створення ламаної* після сформування списку точок ламаної необхідно вказати, ламана замкнена чи не замкнена.

4. Якщо необхідно *змінити введену функцію* чи вказати інші межі відрізка, на якому задана функціональна залежність між змінними, використовується послуга *Об'єкт\ Змінити.*

5. Щоб вказати бажаний *тип координат*, слід звернутися до підпункту *Тип координат* пункту *Графік\Параметри вікна графіка* і далі до підпункту *Декартові координати* чи *Полярні координати*.

6. За допомогою послуги *Масштаб* можна змінювати масштаби у вікні *Графік* за допомогою таких підпунктів: *Попередній масштаб, Початковий масштаб, Показувати масштаб, Автоматичний масштаб, Масштаб користувача.* У режимі *Масштаб користувача* можна встановити довільні межі вздовж осей *Ox* і *Oy*, у яких будуть будуватися зображення. Досить звернутися до пункту меню *Графік\Масштаб* і далі у вікні *Визначення масштабу*, що з'являється на екрані після входження в зазначений пункт меню *Масштаб користувача*, ввести мінімальне (*Min X*) і максимальне (*Max X*) значення координат вздовж осі *Ox,* а також мінімальне (*Min Y*) і максимальне (*Max Y*) значення координат вздовж осі *Oy*, які бажано мати при побудові зображень (графіків, гістограм, ламаних і т.д.). У режимі *Масштаб\Авто* програма ав-

томатично вибирає масштаби вздовж осей *Ox* і *Oy* залежно від меж, у яких змінюються абсциси й ординати при конкретних побудовах.

7. Щоб визначити *координати точки на площині*, потрібно звернутися до підпункту *Координати* пункту *Графік*. Послуга використовується для встановлення коренів рівнянь, обчислення розв'язків системи рівнянь.

8. Щоб порівнювати *властивості даної функціональної залежності та оберненої до неї*, іноді зручно функції явного типу представляти як неявно задані. Прикладами, коли обернена залежність визначається однозначно, можуть бути: 1) лінійна функція $y = ax + b$, ($a \neq 0$); 2) степенева функція $y = x^n$ при непарних n ($n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$); 3) показникова функція $y = a^x$, ($a>0$, $a \neq 1$); 4) логарифмічна функція $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$); 5) функція $y = a/x$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$); 6) будь-яка монотонно зростаюча чи монотонно спадна функція. Щоб побудувати графіки залежності $y = f(x)$ і оберненої до неї залежності $y = g(x)$ з використанням послуг програми *GRAN1*, зручно подати залежності між змінними x і y у неявному вигляді $0 = y - f(x) = G_1(x, y)$ і $0 = x - f(y) = G_2(x, y)$, після чого побудувати графіки залежностей $G_1(x, y)=0$ і $G_2(x, y)=0$. Наприклад, для показникової та оберненої до неї логарифмічної створюють об'єкти за формулами *0=y-P1^x*, *0=x-P1^y* або за формулами $0= y - \log(P1, x)$, $0= x - \log(P1, y)$. Змінюють значення параметра *P1*, порівнюють властивості обох функцій.

9. Для виконання *операцій над ламаними*, відміченими „галочкою", можна скористатися послугою *Перетворення ламаної* у пункті *Операції*. При зверненні до послуги *Перетворення ламаної* з'являється додаткове підменю з трьох підпунктів: *Деформація*, *Паралельне перенесення*, *Поворот*. При необхідності обчислити площу многокутника, обмеженого деякою замкненою ламаною (без самоперетинань) з довільною кількістю вершин (не більше 1000), можна скористатися послугою *Площа многокутника* пункту *Інтеграли*. Якщо необхідно обчислити наближено площу деякої фігури, то необхідно в цю фігуру вписати замкнену ламану і обчислити площу утвореного многокутника. За допомогою GRAN1 можна обчислити *Об'єм та площу поверхні тіла*, утвореного обертанням навколо осей координат замкненої ламаної.

10. Послуга *Операції \ нерівності* призначена для вибору операцій, що пов'язані з розв'язуванням нерівностей або їх систем. Доступні такі операції: система нерівностей *y(x)<(>)c,* система нерівностей *G(x,y)<(>)0.* Послуга *Операції \нерівності \система нерівностей y(x)<(>)c...* призначена для розв'язування нерівностей виду *y(x)<c* або *y(x)>c* для відмічених функцій виду *y=y(x)*. Проміжки, на яких містяться корені системи відповідних рівнянь, записуються у вікно *Відповіді* і зображуються у вікні *Графік*. Послуга *Операції \нерівності\ система нерівностей G(x,y)<(>)0* призначена для розв'язування системи нерівностей виду *G(x,y)<0* або *G(x,y)>0* для відмічених функцій виду *0=G(x,y)*. Області, в яких система нерівностей задовольняється, заштриховуються у вікні *Графік*. Система в обох випадках може складатись і з однієї нерівності.

11. Послуга *Операції \похідна* призначена для обчислення приросту функції за введеним приростом аргументу та для обчислення числового значення похідної для поточної функції виду *y=y(x)*. Графік відповідної функції попередньо

повинен бути побудованим. Користувач повинен вказати значення аргументу *(X)* та значення його приросту *(DX).* Скориставшись послугою *Побудувати січну,* можна обчислити значення приросту функції, яке виводиться у вікно *Відповіді* і побудувати відповідну січну. Послуга *Побудувати дотичну* призначена для обчислення числового значення похідної функції для вказаного *X*, виведення його у вікні *Відповіді* і побудови дотичної. Якщо подати значення аргументу і приріст аргументу через вирази, що містять параметри, то можна проводити дослідження, пов'язані з трактуванням геометричного змісту похідної.

12. Послуга *Операції \Інтеграли \Інтеграл* призначена для обчислення суми визначених інтегралів для відмічених об'єктів у вказаних межах інтегрування. Послуга *Операції\ інтеграли\ Об'єм та площа поверхні тіла обертання\ вісь Ох* призначена для обчислення об'єму та площі поверхні тіла, з поверхнею, утвореною обертанням навколо осі *Ох* ліній, що відповідають відміченим об'єктам, у вказаних межах інтегрування. Інтегрувати можна функції виду *y=y(x)*, апроксимуючі поліноми для таблично заданих функцій та функції щільності розподілу статистичних ймовірностей. Передбачена послуга *інтеграли\ Об'єм та площа поверхні тіла обертання\ вісь Оу.*

13. Послуга *Операції\ статистика* призначена для операцій, що пов'язані з опрацюванням статистичних даних: *Частотна таблиця, Критерій Пірсона, Щільність нормального розподілу за вибіркою.* Послуга *Операції \ статистика \ частотна таблиця* використовується при необхідності переглянути частотну таблицю для статистичної вибірки. Таблиця подається у додатковому вікні, в якому вказані: 1) значення варіант для дискретного або межі інтервалів для неперервного розподілу; 2) частота варіанти для дискретного або частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 3) накопичена частота (сума частот від першої до даної включно); 4) відносна частота варіанти для дискретного або відносна частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 5) накопичена відносна частота (сума частот від першої до даної включно).

14. Для наближеного відшукання *найбільшого і найменшого значень функції* $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a, b]$ з використанням послуг програми GRAN1 досить побудувати графік залежності $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ і, використовуючи послугу *Координати* пункту *Графік*, визначити координати найвищої і найнижчої точок на графіку $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. У програмі автоматично обчислюється найменше і найбільше значення функції на заданому проміжку.

15. Можлива побудова відмічених „галочкою" *графіків лініями чи точками*. Не з'єднують точки відрізками для розривних функцій, зокрема *y=[x], y={x}* чи для асимптот графіків функцій. Можна будувати лінії різної товщини і кольору.

Приклади завдань для виконання за допомогою ППЗ GRAN1.

1. Побудувати графік функції $y=|x^2+x-6|$.

Необхідно створити об'єкт явного типу за формулою *Abs(X^2+X-6)*. Натиснувши „ввод", використовують послугу *Графік побудувати*. Щоб учень міг самостійно скласти алгоритм побудови графіка функції з модулем, бажано одночасно розглянути функцію без модуля і побудувати її графік. Слід створити об'єкти *y=x^2+P1*x+P2*, *y=ABS(x^2+P1*x+P2)* з параметрами, побудувати графіки і спостерігати за їхніми перетвореннями, змінюючи при цьому один з параметрів. Аналізуючи перетворення графіків у процесі зміни параметра, учні повинні зробити узагальнення і сформулювати алгоритм побудови графіка *y=|f(x)|*, якщо задано графік функції *y=f(x)*.

2. Дослідити вплив параметрів a, x_o, m квадратичної функції $f(x)=a(x-x_o)^2+m$ на розташування параболи на координатній площині. Для дослідження необхідно створити об'єкт явного типу за формулою *P1*(X-P2)^2+P3*. Рухаючи бігунок параметра, змінюють значення одного з параметрів. На рис. 2.4. побудовано параболи для різних значень параметрів. Для того, щоб можна було проаналізувати графіки, доцільно скористатися послугою *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами.* Нові функції фіксуються, якщо світловий курсор встановлено на функцію, яка містить параметри. В ході дослідження часто доводиться змінювати крок зміни параметра *h*. Десяткові дроби при цьому подають у форматі з крапкою, а не з комою.

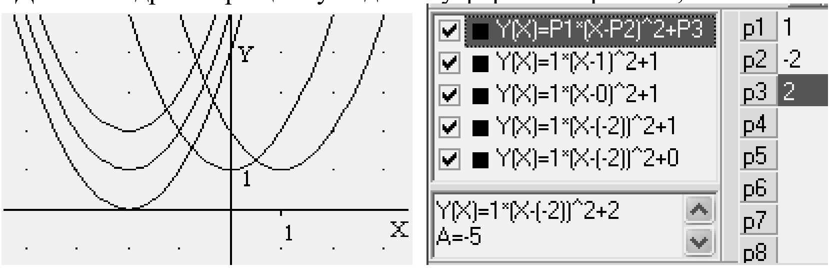


Рис. 2.4. Дослідження квадратичної функції

3. Розв'язати нерівність 3sin2x>1 .

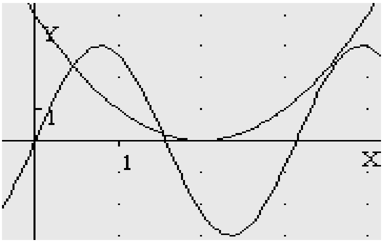
Для цього потрібно виконати ланцюжок операцій: *Тип функції y(x) - Об'єкт - Створити* - Ввести формулу *3*sin(2*x)* – задати *Відрізок –5; 5.* - *Побудувати графік* - Використати послугу операції *Нерівності* - Вказати „>1". У вікні *Відповідь* отримати наближені розв'язки нерівності.

4. Наближено розв'язати систему рівнянь $y=3\sin 2x$, $y=(x-2)^2$.

Очистити екран. Створити об'єкт, що відповідає другій функції. Для цього необхідно створити об'єкт явного типу за формулою *(x-2)^2*, зазначити відрізок *–1; 5*. Побудувавши графіки, знаходять координати точок перетину за допомогою послуги *Координати*. Координати курсору можна прочитати також у верхньому рядку *X=0.4, У=2.3.* Координати точки перетину графіків є розв'язком системи. Другим розв'язком системи буде пара чисел X=1,5 У=0,2. З'ясуємо, чи має система третій розв'язок? Обводимо „сумнівне" місце курсором мишки (притиснувши ліву клавішу), збільшуємо досліджувану частину. Графіки перетинаються у двох точках (рис. 2.5).

5. Побудувати ГМТ, що задовольняють нерівність cos(y-x)>0.

Тип залежності – неявно задана функція *0=G(x,y)*. Необхідно створити об'єкт за формулою *cos(y-x)*. Відрізок задання можна взяти стандартний [-5,5], як для змінної *X*, так і для змінної *Y*. Використовують послугу *Побудувати графік* та послугу *Операції \ Нерівності * G(x,y)>0 (Рис. 2.6). Щоб заштрихувати ГМТ, які задовольняють нерівність, за допомогою GRAN1, явно виражену функцію також представляють як неявно задану.



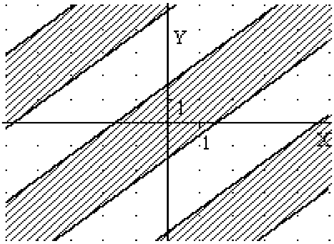


Рис.2.5. Графіки системи рівнянь **Рис. 2.6. ГМТ, що задовольняють нерівність**

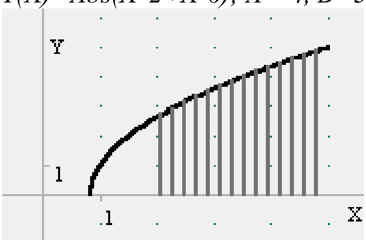
6. Обчислити інтеграл $\int_{2}^{5}\sqrt{6x-5}\,dx$. Тип залежності - явна *y(x)*. Створюють об’єкт-функцію за виразом *Sqrt(6*x-5)*. Доцільно змінити відрізок на *[-1,7]* і побудувати графік. Для обчислення визначеного інтегралу використовують послугу *Інтеграл*, зазначають межі інтегрування *2; 5* (Рис. 2.7).

7.Обчислити площу фігури, обмеженої графіками кривих $y=\sqrt{6x-5}$, $y=(x-2)^2$. Перед початком виконання завдання необхідно очистити екран та побудувати графіки функцій. Введення зазначених функціональних залежностей розглянуто у попередніх прикладах. Щоб знайти межу інтегрування, необхідно розмістити курсор миші в точку перетину графіків. Визначивши абсциси точок перетину графіків, встановлюють, що нижня межа інтегрування *1*, а верхня *4,1*. В подальшому користуються послугою *Інтеграл*, ввівши знайдені межі інтегрування. Спочатку обчислюють площу кожної з криволінійних трапецій окремо. Площу між кривими потрібно обчислити як різницю площ двох криволінійних трапецій.

8. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y=\left|x^2+x-6\right|$, *y=0, x= - 4, x=3.*

Необхідно побудувати графік функції, обрати послугу *Операції \Інтеграли\Площа поверхні та об’єм тіла обертання навколо осі Ох*, зазначити межі інтегрування *-4* та *3*. Щоб тіло обертання було видно на екрані, необхідно попередньо дібрати відповідний масштаб для зображення криволінійної трапеції (рис.2.8). У вікні *Відповідь* отримаємо: *Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ох:*

Y(X)=Abs(X^2+X-6); A=-4, B=3, V=396.57, S=520.14



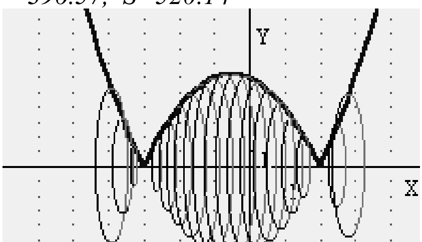


Рис.2.7. Криволінійна трапеція **Рис. 2.8. Тіло обертання**

9**.** *Підприємство випускає столи і книжкові полиці.* У табл. 2.1 подано затрати і прибутки з кожного виду продукції, а також наявні ресурси. *Знайти оптимальний за прибутком план виробництва***.**

Таблиця 2.1

Вид виробу	Матеріальні затрати			Прибуток
	Час (год) на виготовлення	Лісоматеріали (м^3)	Скло (м^2)	
Стіл	9,2 (P2)	0,3	----	3 (P7)
Полиця	4 (P3)	0,6	2	2 (P8)
Ресурси	520 (P4)	24 (P5)	40 (P6)	

Створимо математичну модель даної виробничої ситуації. Нехай *x* – кількість столів, *y* - кількість книжкових полиць. *P(x;y)= 3x+2y* - функція прибутку. Складемо математичну систему обмежень і представимо її у вигляді, зручному для розв'язування за допомогою GRAN1 (тип *Функція задана неявно*).

На рис.2.9 побудовано геометричне місце точок, яке задають перші три нерівності. Вимоги двох останніх нерівностей задаємо як *Відрізок для побудови графіків*. Розв'язки системи нерівностей заповнюють опуклий п'ятикутник

$$\begin{cases} 9{,}2x + 4y \le 520; \\ 0{,}3x + 0{,}6y \le 24 \\ 2y \le 40 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 520 - (9{,}2x + 4y) \ge 0; \\ 24 - (0{,}3x + 0{,}6y) \ge 0 \\ 40 - 2y \ge 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

на площині. Щоб заштрихувати точки, необхідно скористатися послугою *Операції \ Нерівності \ G(x,y)>0*. Попередньо перед функціями прибутку, якщо вони представлені у неявному вигляді, слід зняти відмітку. Потрібно знайти такі точки *(x;y)* п'ятикутника, для яких вираз *3x+2y* набуває найбільших числових значень. Множина точок, заданих рівнянням *3x+2y=c*, є прямою лінією. На рис.2.9 побудовано кілька прямих для різних значень параметра *3x+2y=50, 3x+2y=180, 3x+2y=P1.* Для зручності дослідження (не витирається заштриховане ГМТ, коли змінюється параметр P1) функцію прибутку подати за формулою *y= –2*x/3+P1/3.* Значення *P1* у рівнянні *3x+2y=P1* знаходять встановивши координати граничної точки. Обчислюють, що найбільший прибуток *145* одиниць у точці *x=50, y=15*. Тобто, потрібно випускати *50* столів і *15* полиць.

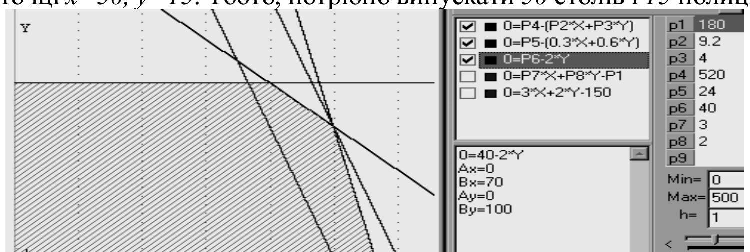


Рис.2.9. ГМТ, що задовольняють систему нерівностей

За допомогою GRAN1 можна отримати динамічну модель для визначення оптимального плану. Позначимо через параметри *P2, P3* час на виготовлення стола, полиці, *P4* – ресурс годин, *P5, P6* – запас лісоматеріалів, скла, *P7*, *P8* – прибуток від продажу стола, полиці. Відповідно до введених параметрів створимо функції виробництва товарів *0=P4-(P2*X+P3*Y); 0=P5-(0.3*X+0.6*Y); 0=P6-2*Y* та функцію прибутку *0=P7*X+P8*Y-P1.* Змінюючи один з параметрів, досліджуємо його вплив на інші показники.

10. На рис. 2.1 подано *графіки функцій у полярних координатах: R(F)=3*Sin(5*F); R(F)=2*Sin(5*F); R(F)=P1*Sin(P2*F).*

11. Щоб скопіювати графік, необхідно перейти до вікна *Графік* і використати послугу *Виправлення\ Скопіювати.* Для копіювання формули переходять до вікна *Список об'єктів* і використовують названу послугу. Передбачена можливість копіювання „активних" вікон. Щоб *вмонтовувати в текстові файли чи в презентації графіки, побудовані за допомогою ППЗ***,** необхідно зберегти файл GRAN1, а копію екрана з графіками помістити у створений *текстовий документ* та здійснити посилання з текстового документа на файл ППЗ (контекстне меню, пункт *Гіперпосилання*). Виділивши в документі графічний об'єкт чи деякий текст, на панелі інструментів натискують піктограму *Гіперпосилання*, відкривають папку та вказують на створений за допомогою GRAN1 файл. В результаті отримують текстовий документ з вмонтованими „живими графіками". В *презентаціях* завантажити файл ППЗ можна також, якщо скористатися послугою *Дії при наведенні (натискуванні) курсора.*

Контрольні запитання і завдання

1. Для розв'язування яких видів завдань можна використовувати GRAN1? Виконати запропоновані вище приклади за допомогою GRAN1.

2. Проаналізувати, які з особистісних якостей можна формувати в учнів у процесі розв'язування завдань за допомогою GRAN1? Які прийоми доцільно використовувати?

2.3. Advanced Grapher

Програму *Advanced Grapher (http://www.serpik.net/agrapher/agrapher.zip)* призначено для побудови графіків функцій, графічного розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей, обчислення площ фігур, похідної функції, складання рівняння дотичної та ін.

За допомогою програми Advanced Grapher у виразах можна виконувати арифметичні дії +, -, *, /, ^ (піднесення до степеня) та логічні дії (результат і операнди цих дій можуть бути „істинний" чи „хибний"). Можна використовувати вмонтовані функції: *sin* - синус; *cos* – косинус; *tan* – тангенс; *cot* – котангенс; *atan* – арктангенс; *asin* - арксинус; *acos* - арккосинус; *abs* – модуль; *sqrt* - квадратний корінь; *ln* – натуральний логарифм; *lg* - десятковий логарифм; *exp* – експоненту; *int* – цілу частину числа (номера); *frac* - дробову частина числа (номера); гіперболічний синус *sinh*; *cosh* - косинус; *tanh* - тангенс; *coth* - котангенс; *asinh* - арксинус; *acosh* - арккосинус; *atanh* - арктангенс; *acoth* - арккотангенс; *випадковий* - *rnd* – генератор випадкових чисел, *0≤rnd<1.* Можна використовувати у виразах функції. Наприклад, *tan(x+2); ln(ln(1/x)); cos(x)^3*. При записі виразів враховують пріоритет дій і функцій:

1) Функції, 2) ^, 3)*, / ; 4) +, – 5) >, =, =, <=,<>; 6) заперечення; 7) і, або.

Послідовність операцій для введення функції. Щоб ввести функцію, необхідно визначитися з типом функціональної залежності (Рис. 2.10). Можна розглядати залежності явного виду *У(х)* чи *Х(у)*, задані в декартових координатах*;* у полярних координатах; параметрично задані функції; функції неявного виду; поле напрямів для побудови первісних; табличні залежності. Для введення функціональної залежності використовують послугу *Графік додати.* Можна натиснути піктограму *F+* на панелі інструментів (рис 2.11). На екрані з'являється панель введення даних (рис. 2.12). Обирають тип функції *у(х), х(у), R(a), f(x,y)* або інший курсором у полі *Вибір*, вводять формулу, зазначають стиль (лінії чи точки), у додаткових властивостях при потребі змінюють область побудови. Щоб на екран не виводився графік функції, перед формулою знімають відмітку. Головне меню програми містить пункти *Файл, Правка, Вид, Графік, Обчислення.* У підпункті *Обчислення* можна використовувати послуги *Калькулятор, Обчислення функцій, Таблиця значень, Дослідження функцій (нулі функції, екстремуми), Координати точок перетину графіків, Похідна, Дотична і нормаль, Інтегрування Регресійний аналіз* з широким спектром функцій.

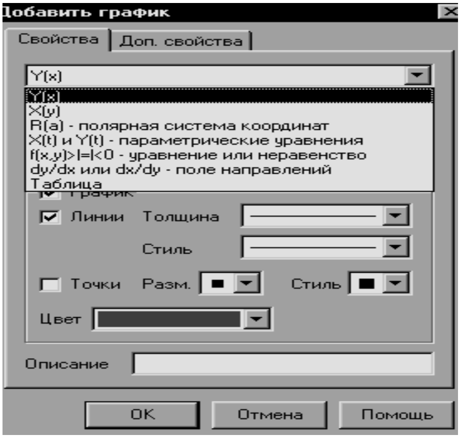


Рис 2.10.Таблиця для вибору типу даних

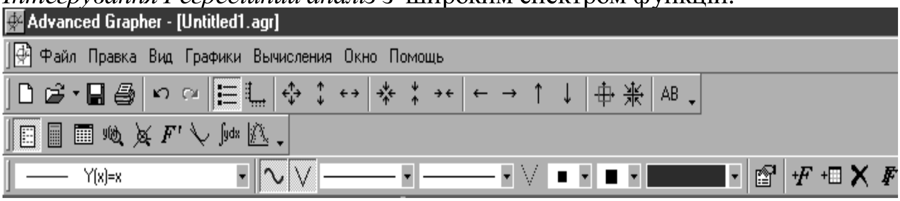


Рис 2.11. Панель інструментів

1. Розв'язати рівняння 2sin 0.5x = -1.

Перед побудовою слід обрати *Тригонометричний набір*, активізувати послугу додавання графіка, вказати тип функції *у(х),* ввести вираз *2sin(0.5x)+1*, вибрати знак *= 0.* Щоб знайти розв'язки рівняння, необхідно помістити курсор в точки перетину з віссю *Ох* і визначати їх абсциси.

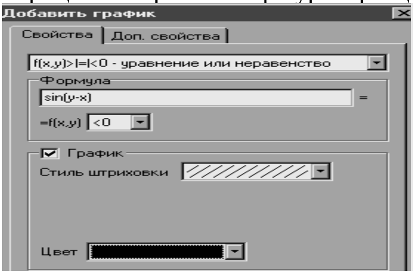
2. Наближено розв'язати систему рівнянь $y=3\sin 2x$, $y=2(x-5)^2$.

Піктограма F+. Тип функції *у(*х). Ввести вираз для першої функції *3sin(2x).* Натиснути F+. Тип функції *у(х).* Ввести вираз для другої функції *2(x-5)^2*. Для знаходження розв'язків системи застосувати послугу *Операції \ Точки перетину.*

3. *Побудувати геометричне місце точок, що задовольняють нерівність sin(y-x)<0.* Піктограма *F+*. Обирають тип функції *Неявно задана f(x;y)=0* і створюють об'єкт за формулою *sin(y-x),* проставляють знак „ме-

нше нуля” (Рис.2.12, 2.13). Заштриховані місця точок можна зберігати.

4. *Обчислити площу фігури, обмеженої графіками кривих* $y=\sqrt{6x-5},\ y=(x-2)^2$**.** Розглядають функції *y=SQRT(6x-5)* та *y=(x-2)^2* і застосовують операцію *Точки перетину графіків*, записують абсциси точок перетину – межі інтегрування. Користуючись послугою *Інтеграл*, необхідно зазначити, між графіками яких саме функцій потрібно обчислити площу фігури, ввести межі інтегрування. Можна обчислити площу фігури за одну операцію. Штриховка фігури при цьому зберігається як окремий об’єкт.



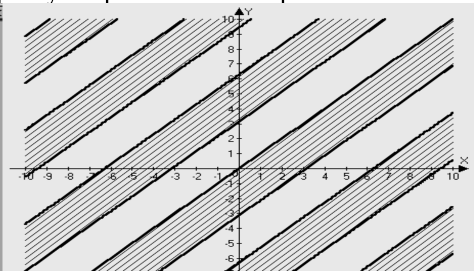
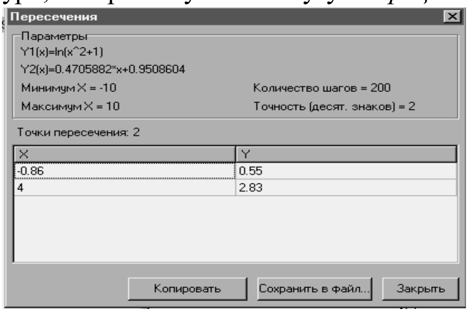


Рис 2.12. Панель введення даних **Рис 2.13. ГМТ нерівності**

5. *Знайти похідну функції* $y=\ln(x^2+1)$*, побудувати дотичну до графіка* функції в точці *x=4*, встановити з точністю до сотих абсциси точок перетину графіка функції та дотичної. Користуючись операцією Інтегрування, *обчислити площу фігури, обмеженої дотичною і графіком функції.*

При розв’язуванні виконують ланцюжок дій: створюють об’єкт явного типу *y(x)* за формулою *ln(x^2+1)*, активізують послугу *Операції\Дотична*, встановлюють, користуючись послугою *Операції\Точки перетину*, абсциси точок перетину графіка і дотичної – знаходять межі інтегрування. Обчислюють площу фігури, використовуючи послугу *Операції \ Інтеграл.* (рис. 2.14, 2.15, 2.16).



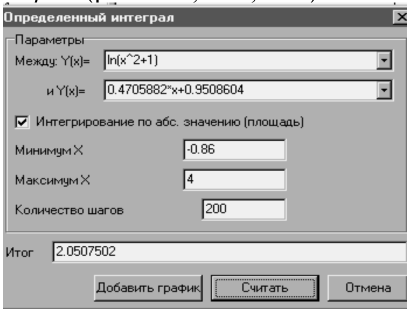
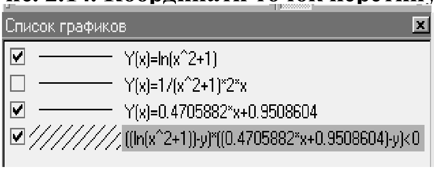


Рис. 2.14. Координати точок перетину **Рис. 2.15. Панель обчислення площі**



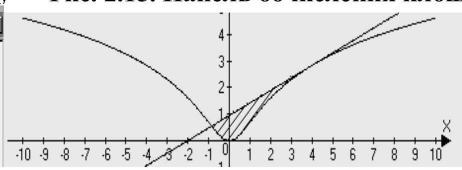


Рис. 2.16. Заштриховано фігуру між кривою і дотичною

Контрольні запитання і завдання

1. Виконати за допомогою програмного засобу запропоновані завдання, дібрати аналогічні, розробити систему завдань для вибраного уроку математики.
2. Проаналізувати можливості для формування особистісних якостей учня у процесі розв'язування задач з використанням даного програмного засобу.
3. Вартість видобування руди залежить від глибини видобування. Є дані для глибини 500-700 м. Як спрогнозувати вартість видобування руди на глибині 800 м?

2.4. Динамічна геометрія GRAN-2D і DG

В українській навчальній та методичній літературі помітними є видання, в яких висвітлюється методика організації досліджень засобами динамічної геометрії DG [87], [88], GRAN-2D [30]. С.А.Раков характеризує названі програмні засоби як інтерактивні системи досить високого класу [89, *2*], що моделюють геометрію Евкліда на площині. За допомогою GRAN-2D та DG зручно розв'язувати задачі на побудову на площині, спростовувати окремі припущення. Створивши динамічні моделі, аналізуючи динамічні вирази, можна проводити дослідження ГМТ, встановлювати екстремальні значення певних величин; шукати закономірності, послідовність яких може привести до доведення теорем тощо. Різні аспекти застосування зазначених засобів висвітлено в працях [3], [12], [14], [58], [88], [99] та ін. Чимало дослідників пропонують проводити спеціалізовані лабораторні роботи, на яких учні індивідуально або у складі дослідницької групи розв'язують математичні задачі дослідницького типу у комп'ютерному класі. Завдання для таких робіт в ПМК DG пропонуються у спеціальних електронних робочих зошитах [89, 3].

Пояснення щодо застосування програми GRAN-2D можна прочитати у посібнику М. І. Жалдака і В. О. Вітюка *„Комп'ютер на уроках геометрії"* [30]. Засіб призначений для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить назва (GRaphic Analysis 2-Dimension).У даному розділі подаємо короткі відомості про оновлену версію ППЗ GRAN-2D.

1. Після активізації ППЗ GRAN-2D на екрані з'явиться головне вікно програми (рис.2.17). Зверху під заголовком головного вікна знаходиться *головне меню* (файл, виправлення, об'єкт, обчислення, зображення, макроконструкція, вид, налагодження, допомога) – перелік послуг, до яких можна звернутися у процесі роботи з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з'являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю. Для активізації деяких послуг можна скористатись "кнопками" швидкого виклику послуг на *панелі інструментів*, що розміщена під головним меню програми. Для цього треба "натиснути" відповідну "кнопку", тобто встановити вказівник мишки на позначення "кнопки" і натиснути ліву клавішу мишки. Під панеллю інструментів розміщено *підказку* – поле, де з'являються короткі інструкції про те, яку дію необхідно виконати на поточному етапі роботи. *Поле зображення* – це область головного вікна програми, де зображаються створені об'єкти та осі координат. *Перелік об'єктів* – це поле, що містить перелік назв усіх об'єктів, які були створені або зава-

нтажені у процесі роботи з програмою. Зліва від назви об’єктів за допомогою мишки можна поставити або зняти відмітку („галочку”). При цьому у полі зображення виводитимуться зображення лише тих об'єктів, перед назвою яких у переліку об’єктів стоїть відмітка. *Поле характеристик поточного об’єкта* – частина головного вікна, де виводяться деякі параметри поточного об'єкта (довжина, радіус (кола), рівняння (прямої) тощо), а також відомості про об’єкти, з якими він зв’язаний. *Перелік динамічних виразів* – таблиця, що містить перелік назв заданих динамічних виразів та їх обчислені значення. *Поле інформування* – поле (внизу екрана), де виводяться координати точки, що відповідає поточному положенню вказівника мишки у полі зображення, а якщо вказівник мишки знаходиться над зображенням деякого об’єкта, то поряд з координатами виводиться назва цього об'єкта.

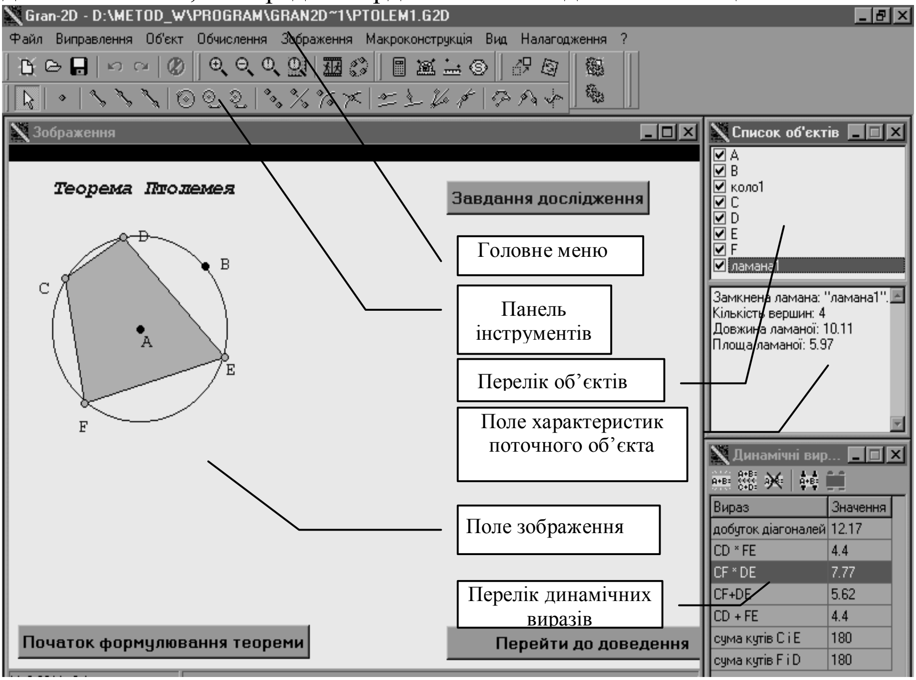


Рис. 2.17. Копія екрана GRAN-2D з моделлю до теореми Птолемея

2. При зверненні до послуги *Зображення\Розмір\Оптимальний* буде встановлено масштаб, при якому зображення створених об’єктів поміститься у полі зображення.

3. Якщо звернутися до послуги *Зображення\ГМТ* та за відповідним запитом програми, що з’явиться у полі підказки, вказати на зображення точки, то надалі при всіх переміщеннях вказаної точки на зображенні буде залишатися її слід.

4. При зверненні до послуги *Зображення\Покрокове відображення* розпочнеться покрокове відображення створених об’єктів, починаючи з першого до останнього. Для виведення на екран зображення кожного наступного об’єкта потрібно натиснути ліву клавішу мишки. Порядок виконання кроків побудови

зазначений справа. Якщо встановити світловий курсор на відповідну фігуру, то в полі характеристик отримаємо для точки – координати, для прямої – рівняння в загальному вигляді, для многокутника – площу і периметр тощо. Передбачено *Налагодження відображення*, щоб не виділяти як окремі кроки деякі допоміжні побудови, і переглядати зображення в автоматичному режимі.

5. За допомогою GRAN-2D можна оперувати у площині моделями геометричних об'єктів базових типів: *Точка, Лінія, Ламана, Коло, Інтерполяційний поліном, Графік функції*. При цьому типи *Точка, Лінія, Коло* діляться на підтипи: *Точка (Вільна точка, Точка на об'єкті, Середня точка, Точка перетину об'єктів, Симетрична точка, Інверсна точка); Лінія (Відрізок, Пряма, Промінь, Паралельна пряма, Перпендикулярна пряма, Бісектриса кута, Дотична до кола); Коло (коло, коло за радіусом, дуга)*.

6. Об'єкти можна створювати двома способами – або шляхом введення їх характеристик у вікні *Конструювання об'єкта*, або з екрана за допомогою мишки. Елементарні побудови: а) створити точку (з екрана чи аналітично); середня точка, якщо задано кінці; точка, симетрична даній відносно прямої чи точки; точка перетину двох кривих; інверсна точка; б) відрізок, промінь, пряма, що проходить через дві точки; в) пряма, яка проходить через задану точку і паралельна (перпендикулярна) до даної прямої; бісектриса кута; дотична до кола, що проходить через задану точку, г) ламана, правильний многокутник; д) коло (центр, точка на колі), коло за даним радіусом, дуга кола. Наприклад, для створення об'єкта типу *Точка перетину об'єктів* слід звернутися до послуги *Об'єкт\Створити\Точка перетину об'єктів*, та у вікні *Конструювання об'єкта*, що з'явиться, у полях *Перший об'єкт* та *Другий об'єкт* вказати назви об'єктів, точку перетину яких необхідно знайти, та "натиснути" кнопку *Застосувати*. Для створення об'єкта типу *Симетрична точка* звертаються до послуги *Об'єкт\Створити\Точка,* симетрична даній точці. У вікні *Конструювання об'єкта*, що з'явиться, у полі *Точка*, якій симетрична дана точка, слід вказати назву потрібної точки, а у полі *Об'єкт*, відносно якого здійснюється симетрія - вказати назву відповідної точки або лінії. Після "натиснення" кнопки *Застосувати* буде створено симетричну точку.

7. Якщо виконується побудова *Створити точку* і при натисненні лівої клавіші мишки вказівник знаходився над зображенням деякого об'єкта типу *Лінія* або *Коло*, то з'явиться запит *Прикріпити точку до об'єкта*? У разі позитивної відповіді створювана точка буде прикріплена до вказаного об'єкта і надалі така точка може переміщуватись тільки в межах об'єкта, до якого прикріплена. Передбачена також можливість від'єднувати прикріплену точку. Наприклад, для „відкриття" теореми Птолемея (якщо чотирикутник вписаний, то добуток його діагоналей рівний сумі добутків протилежних сторін) необхідно створити наступні об'єкти: точку A – центр кола; точку B – кінець радіуса кола; коло з центром у точці A і радіусом AB; точки C, D, E, F – точки, що прикріплені до кола; замкнену ламану CDEF – вписаний чотирикутник (Рис. 2.17, 2.18).

8. Для зміни параметрів раніше створеного об'єкта необхідно встановити вказівник переліку об'єктів у положення, що відповідає назві потрібного об'єкта, та звернутися до послуги *Об'єкт\Змінити*. У результаті з'явиться вікно *Конструювання об'єкта* з параметрами поточного об'єкта, які можна

змінити. Подвійне натиснення лівої клавіші мишки у випадку, коли вказівник мишки знаходиться на зображенні деякого об'єкта у полі зображення або на назві деякого об'єкта у переліку, також призведе до появи вікна *Конструювання об'єкта*, у якому можна змінити параметри цього об'єкта.

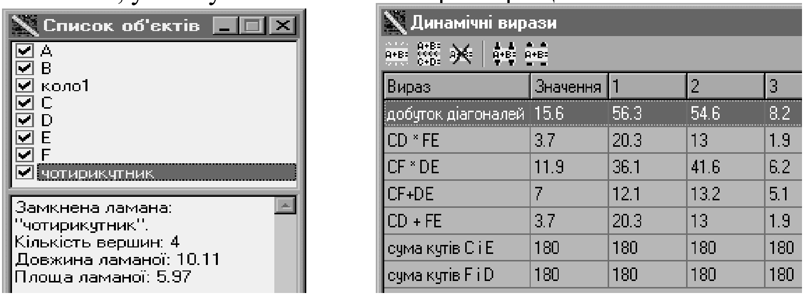


Рис. 2.18. Вигляд вікон *Список об'єктів* та *Динамічні вирази*

9. Деякі операції (*вилучення, переміщення об'єктів* тощо) виконуються лише стосовно виділених об'єктів. Для вилучення деякого об'єкта потрібно виділити цей об'єкт у полі зображення. Після цього слід звернутися до послуги *Об'єкт\Вилучити* або натиснути клавішу *Del*.

10. Для обчислення відстані між двома точками слід звернутися до послуги *Обчислення\Відстань*, і за відповідними запитами програми, що з'являться у полі підказки, послідовно вказати на зображення двох точок. Передбачено обчислення відстані між точкою і прямою, довжини відрізка, довжини кола, довжини дуги, довжини ламаної. При зверненні до послуги *Обчислення\Кут* після вказування трьох точок буде автоматично обчислюватись кут між прямими, що проходять відповідно через першу і другу та другу і третю точки. Передбачена послуга *Обчислення площі* многокутника, площі круга, сектора. Можна обчислювати орієнтований кут, заданий трьома точками, кут між прямими, полярний кут, полярний радіус та ін.

11. Для дослідження за допомогою ППЗ GRAN-2D доцільно створювати *динамічні вирази*, які можуть містити посилання на наявні об'єкти та обчислюються автоматично при зміні цих об'єктів. Так, наприклад, ввівши вираз для обчислення площі деякого многокутника, надалі можна змінювати положення будь-якої з його вершин – при цьому автоматично буде обчислено нове значення площі. Можна створювати динамічні вирази, які розміщуються як у таблиці *Динамічних виразів*, так і у *Полі зображення*. У подальшому їх можна включати до об'єктів, які зручно "приховувати" за допомогою *Кнопок*.

Для створення динамічного виразу слід звернутися до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Створити*, що приведе до появи вікна *Задання динамічного виразу* (рис. 2.18). Поряд з відомими функціями (*sin, ln* тощо) при заданні динамічних виразів можна використовувати спеціальні функції. *Len (точка1, точка2)* - обчислює відстань між точками. В дужках як аргументи подаються назви двох точок, розділені комою, відстань між якими необхідно обчислити. *Angle (точка1, точка2, точка3)* - обчислює кут між відрізками, що мають спільну вершину *точка2*. В дужках як аргументи подаються назви трьох точок, розділені комою, що є кінцями відрізків, при цьому другою вводиться назва спільної точки. Обчислюють площу многокутника за допомогою функції *Area (точка1, точка2, точка3,…)*. В дужках подаються послідовно назви вершин многокутника, розділені комою. Для обчислення площі многокутника при відкритій вкладинці достатньо вказати з екрана замкнену ламану.

У ході проведення чисельних експериментів часто виникає потреба “запам’ятати” поточне значення динамічного виразу, щоб порівняти його з іншими. При зверненні до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\ Зафіксувати поточне значення* у таблицю з переліком динамічних виразів справа від останнього стовпчика буде додано новий стовпчик, що міститиме поточні значення усіх динамічних виразів. Наприклад, для виконання досліджень, пов’язаних з відкриттям теореми Птолемея необхідно створити наступні динамічні вирази: добуток діагоналей *LEN(C,E)*LEN(F,D);* добутки для протилежних сторін *LEN(C,D)*LEN(F,E)* та *LEN(C,F)*LEN(D,E)*. При цьому бажано уникати прямих вказівок школяреві, які саме вирази слід створити. Для аналізу моделі, узагальнення емпіричних даних доцільно створити більше виразів, щоб учень під час графічного експерименту самостійно відкинув зайві. Для динамічного креслення, про яке йде мова, можна запропонувати також створити вирази для суми протилежних сторін *LEN(C,F)+LEN(D,E)* і *LEN(C,D)+LEN(F,E),* суми протилежних кутів *DEG(ANGLE(D,C,F))+DEG(ANGLE(F,E,D))* і *DEG(ANGLE(C,F,E))+DEG(ANGLE(C,D,E))*. Досліджуючи значення двох останніх виразів, учні пригадають раніше вивчену властивість вписаного чотирикутника – суми протилежних кутів рівні. Щоб спростити процедуру створення динамічних виразів, вибирають об’єкти з поля зображення, попередньо натиснувши на спеціальний символ „¤”, зазначений справа поряд з функціями для визначення величин.

12. У програмі передбачена можливість створювати *Написи* (*Об’єкт\ Додати напис*), *Кнопки* (*Об’єкт\ Додати кнопку*) (рис. 2.19). За допомогою кнопок можна *сховати\показати об’єкти, показати повідомлення, переходити до інших файлів.* Написи і кнопки можна змінювати підбираючи шрифти, кольори тексту. Передбачена можливість фіксувати положення кнопок чи написів у полі зображення (послуга *Прив’язка до сітки*). Для креслення до теореми Птолемея (рис.2.17) створено 4 написи і 3 кнопки.

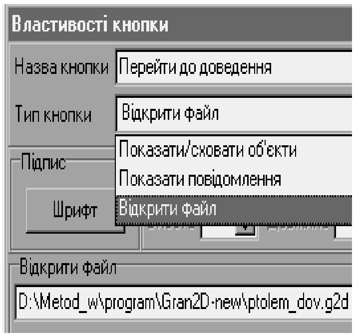


Рис. 2.19. Вікно *Властивості кнопки*

а) Заголовок „Теорема Птолемея”.

б) Напис №1 прихований кнопкою „Завдання для дослідження”.

▪ Розглянути чотирикутник, який вписаний у коло.

▪ Обчислити добуток діагоналей.

▪ Обчислити добуток протилежних сторін, суму протилежних сторін, протилежних кутів. З’ясувати, чи існує зв'язок між обчисленими величинами?

▪ Висловити і перевірити гіпотезу, змінюючи радіус кола, чотирикутник.

▪ До якої рівності зведеться встановлене співвідношення для прямокутника? Рівнобічної трапеції? Сформулювати наслідки теореми.

в) Напис № 2 до завдання. Сформулювати обернене твердження. Експериментально перевірити, чи буде істинним обернене твердження? Для цього одну з вершин чотирикутника попередньо від’єднати від кола і рухати в полі зображення, порівнюючи значення динамічних виразів.

г) Напис №4 прихований кнопкою „Початок формулювання теореми”. Школяр може скористатися ним у випадку утруднення з формулюванням теореми чи з метою самоперевірки.

Часто зручно *Сховати* за допомогою кнопок динамічні вирази, додаткові побудови, підказки до ходу розв’язування задачі. За допомогою однієї з кнопок можна відкрити файл, створений за допомогою GRAN-2D, який містить доведення теореми Птолемея.

13. За допомогою ППЗ GRAN-2D можна досліджувати властивості *геометричних перетворень* об’єктів. А саме, *паралельного перенесення, повороту відносно деякої точки, гомотетії, деформації вздовж осей координат та комбінацій перетворень* для об’єктів типу *Точка, Лінія, Ламана, Коло та Інтерполяційний поліном.* Для здійснення перетворень призначено послуги пункту головного меню *Об’єкт\Перетворення* (Рис. 2.20). На рис. 2.21 продемонстровано результат застосування операції *Поворот* на кут *45^{o}п* до замкненої ламаної з самоперетином (в центрі). Щоб отримати калейдоскоп, необхідно зазначити прив’язку результуючих об’єктів до початкового. У цьому разі будь-яка зміна розташування вершин ламаної, що повертається, відобразиться на решті ламаних, створених у результаті повороту (рис.2.21, справа).

Рис. 2.20. Вікно *Перетворення об’єктів*

14. *Макроконструкція* – це сукупність об’єктів базових типів, яка призначена для спрощення задання комбінацій об’єктів, що часто використовуються. *Макроконструкція* складається з *вихідних, проміжних та результуючих об’єктів*. При створенні макроконструкції необхідно вказати у полі зображення за допомогою вказівника мишки вихідні та результуючі об’єкти, а проміжні об’єкти, які необхідні для отримання результуючих об’єктів з вихідних, будуть вибрані за програмою автоматично з наявних на зображенні. Створивши макроконструкцію один раз, надалі для її встановлення, навіть

під час іншого сеансу роботи з програмою, слід вказати лише опорні об’єкти. Тоді весь ланцюг проміжних об’єктів та результуючі об’єкти буде створено автоматично, з врахуванням властивостей опорних об’єктів.

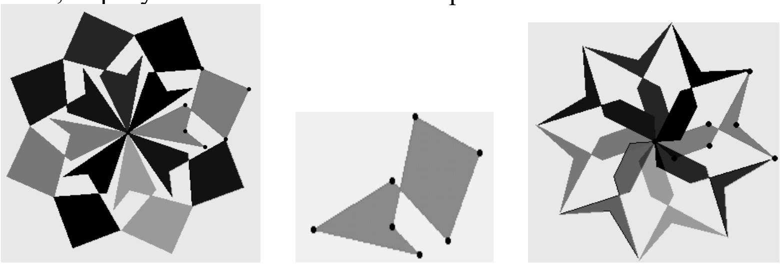


Рис. 2.21. Калейдоскопи, отримані в результаті застосування *Повороту*

Для створення макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція\Створити*. Звернувшись до цієї послуги, слід послідовно вказати у полі зображення вихідні об’єкти. Після вказування останнього об’єкта слід знову звернутися до зазначеної послуги, після чого потрібно вказати результуючі об’єкти. Вказавши останній об’єкт, активізують послугу *Макроконструкція\Створити*, що приведе до появи вікна *Назва конструкції*, де у відповідне поле необхідно ввести назву створюваної макроконструкції.

Для встановлення збереженої раніше макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція\Встановити*. При зверненні до вказаної послуги з’являється вікно *Встановлення макроконструкції* з переліком назв макроконструкцій, створених раніше. Наприклад, зручно створити макроконструкцію з назвою *Правильний п’ятикутник*, щоб за вихідними двома точками – стороною чи радіусом описаного кола – будувати п′ятикутник. Доцільно створити макроконструкцію для побудови кола, описаного навколо трикутника з заданими вершинами, вписаного в трикутник кола тощо.

Щоб створити макроконструкцію для поворотної симетрії восьмого порядку, утвореної в результаті повороту замкненої ламаної, навколо однієї з її семи вершин, треба виконати наступні дії: 1) створити на площині довільні сім точок; 2) створити замкнену ламану з вершинами в цих точках; 3) побудувати описану вище фігуру з порядком симетрії 8, взявши першу точку за центр повороту; 4) використати послугу *Макроконструкція\Створити*; 5) послідовно вказати курсором мишки вихідні об’єкти – сім початкових точок (рис.2.21); вибрані об’єкти при цьому блимають; 6) натиснути піктограму *Макроконструкція* для продовження; 7) курсором вказати на результуючі об’єкти – вісім замкнених ламаних, утворених в результаті повороту; 8) натиснувши втретє піктограму *Макроконструкція,* зазначають назву створеної макроконструкції.

Щоб застосувати створену макроконструкцію, необхідно створити в полі зображення довільні сім точок; скористатися послугою *Макроконструкція\Встановити,,* щоб завантажити конструкцію з відповідною назвою; вказати курсором на створені точки. Для розглянутих вище калейдоскопів перша зазначена точка служила центром повороту.

15. За допомогою GRAN-2D можна побудувати *графіки функцій,* заданих *явно в декартових координатах, у полярних координатах та параметрично, апроксимувати табличні дані многочленами.* Для цього використовують послугу *Об'єкт \Створення \Графік функції.* Іноді графік функції зручно будувати як *слід аналітично заданої точки*.

Наприклад, для введення означення тригонометричних функцій довільного кута, зручно підготувати модель, зображену на рис. 2.22. Побудуємо коло одиничного радіуса з центром у точці *A(-1, 0).* Точка *D(0,0)* – кінець радіуса. Візьмемо на колі довільну точку *C* (зазначити, що необхідно *прикріпити точку до об'єкта коло*) та за її координатами *створимо аналітично задану точку E (OANGLE(D,A,C), Y(C)).* Абсциса точки *E* рівна величині орієнтованого кута, що утворює радіус *AC* з додатнім напрямом осі *Ox*. Доцільно створити ще дві аналітичні точки *G(x(C), 0)* та *F(x(E),0)* та побудувати відрізки *CG* і *FE*, довжини яких рівні синусу кута, взятому з відповідним знаком. Для точки *E* у властивостях зазначаємо „*Залишати слід"*. Якщо точку C рухати вздовж кола, тоді точка E описує синусоїду. Г*рафік* побудовано *як слід аналітично заданої точки* (рис.2.22). Для побудови можна було б скористатися послугою *ГМТ*. Для цього після вибору зазначеного пункту слід послідовно вказати на точку *C* і точку *E*.

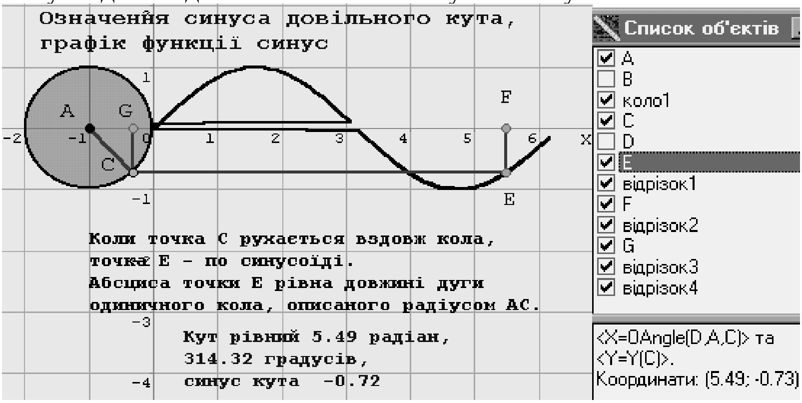


Рис. 2.22. Креслення для введення означення синуса кута

Оскільки при створенні об'єкта *Графік функції* можна використовувати такі величини як довжина відрізка, величина кута, площа фігури, ордината чи абсциса точки, то матимемо значну кількість параметрів.

Побудуємо графіки гармонічних коливань $y = A\cos\omega(x+\varphi)$. З'ясуємо, як можна ввести для дослідження параметри. Побудуємо довільну пряму, що паралельна осі *Ox.* На ній візьмемо три довільні точки *A, W, F.* Скориставшись послугою *Об'єкт\Створення \Графік функції*, обираємо тип функціональної залежності „явний" і записуємо аналітичний вираз *x(A)*cos(x(W)*(x+x(F))).* У виразі роль параметрів відіграють абсциси зазначених точок. Змінюючи положення точки *A*, з'ясовуємо вплив параметра A на амплітуду коливань; точки W – на частоту коливань (Рис. 2.23). Зміни початкової фази викликатиме зміна абсциси точки F.

16. За допомогою GRAN-2D можна наближати табличні дані многочле-

нами. Для цього використовують послугу *Об'єкт\ Створення\ Інтерполяційний поліном.* Для отримання рівняння кривої, крім заповнення таблиці з координатами точок, слід зазначити степінь многочлена. Послугою зручно скористатися для опрацювання результатів експерименту. Наприклад, перевірити істинність закону Ома, дібрати квадратичну функцію, що описує траєкторію польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту та інші.

Рис.2.23. Дослідження гармонічних коливань за допомогою GRAN-2D

17. В табл. 2.2 подано зміст завдань для практичного заняття "Динамічна геометрія". Детальніше зупинимося на першому завданні – *експертній системі "Трикутник"* (рис. 2.24). *Інтегрованість* даної наочності полягає в тому, що її можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, побудова кола, вписаного в трикутник чи описаного навколо трикутника, призначена як для вироблення умінь виконувати основні побудови, так і для самостійного "відкриття" учнями теореми синусів, перевірки істинності формул для визначення радіусів вписаного чи описаного кіл, для застосування учнями чи студентами під час вивчення теми „Декартова система координат" тощо. Для кращого усвідомлення суті нових геометричних фактів передбачена можливість проводити невеликі дослідження і опрацьовувати отримані числові характеристики. При цьому можна змінювати положення вершин трикутника, а тому моделювати трикутники різних видів, "вмикати" \ "вимикати" ті чи інші побудови.

Трикутник заданий координатами його вершин A(-2; 2), B(3; 7), C(11; 0).

- Скласти рівняння сторін трикутника, висоти, медіани, бісектриси, проведених з вершини B; лінії, що з'єднує середини сторін AB і AC; знайти координати центрів вписаного і описаного кіл (8-10 клас).
- Обчислити довжини вказаних висоти, медіани, бісектриси; величини кутів трикутника; радіуси, довжину вписаного і описаного кіл, площі відповідних кругів, площу трикутника (8-10 клас).
- Змінюючи положення вершин трикутника, дослідити відношення коефіцієнтів при відповідних змінних у загальному рівнянні прямої та зробити висновок стосовно того, як пов'язані коефіцієнти паралельних прямих, перпендикулярних прямих (8-10 клас).
- Дослідити і обґрунтувати взаємне розташування висоти, медіани і бісектриси, проведених з однієї вершини трикутника, положення центра описаного кола залежно від кутів трикутника (7-9 клас).

Таблиця 2.2.

№	**Зміст завдань для практичного заняття „Динамічна геометрія”**	**Форма роботи**
1	Ознайомлення з планом роботи. Мотивація діяльності. Очікувані результати.	
2	▪ Ознайомлення з можливостями використання GRAN-2D через покроковий перегляд побудови трикутника; вписаного і описаного кіл; медіани, бісектриси та висоти, проведених з однієї вершини (експертна система "Трикутник"). ▪ Аналіз створених динамічних виразів для обчислення радіусів вписаного і описаного кіл. ▪ Обчислення довжини відрізка, кута з використанням послуги „Обчислення”. ▪ Дослідження положення центра описаного кола в залежності від виду трикутника. ▪ Створення макроконструкції „Вписаний (описаний) трикутник”	індивідуальна в парах, взаємоконсультування
3	▪ Дидактична гра з комп’ютерною підтримкою. Аналіз основних етапів. ▪ Ознайомлення з динамічною моделлю для відкриття теореми про хорди, теореми про дотичну і січну та моделлю до практичної задачі на екстремум.	Демонстрація
4	Ознайомлення із завданнями для створення динамічних моделей: ▪ вписаний кут, вписаний чотирикутник; ▪ теорема Менелая; ▪ властивість медіан трикутника; ▪ задача на побудову жолоба з найбільшим перерізом.	Об’єднання у групи (№№ 1, 2, 3, 4)
5	▪ Обговорення в групі плану побудови моделі, потреби в створенні динамічних виразів. ▪ Постановка завдання дослідження для учня.	Обговорення в групі
6	▪ Коротке обговорення планів створення моделей та організації дослідження в загальному колі (заслуховування представника кожної з груп). ▪ Початкові пропозиції щодо вдосконалення моделей до завдання.	Обговорення в колі
7	▪ Створення моделей до завдання. ▪ Прописування завдання на дослідження для учня.	Робота в групах.
8	▪ ”Захист” моделі в групі представників 1-2-3-4. ▪ Рецензування виконаної роботи представником іншої групи.	„Мозаїка”
9	▪ Обговорення зауважень до створених моделей та виразів.	Групи за номером
10	Перегляд презентації. Творчі проекти до теми „Правильні многокутники”, дослідження функції „Малюємо графіками функцій”.	Анонс навчальних проектів
11	Домашнє завдання. ▪ Скопіювати створені моделі на диск. ▪ Підготувати одну з задач на доведення, попередньо переформулювавши її як задачу на дослідження. ▪ Розробити до задачі ланцюжок евристичних підказок. ▪ Підготувати малюнок і описати його функціями.	
12	Рефлексія. ▪ Що виконали в завданні? Чого навчилися? ▪ Що потрібно вдосконалити в системі роботи семінару? заняття? та інші питання.	Інтерактивний прийом *Мікрофон* Загальне коло.

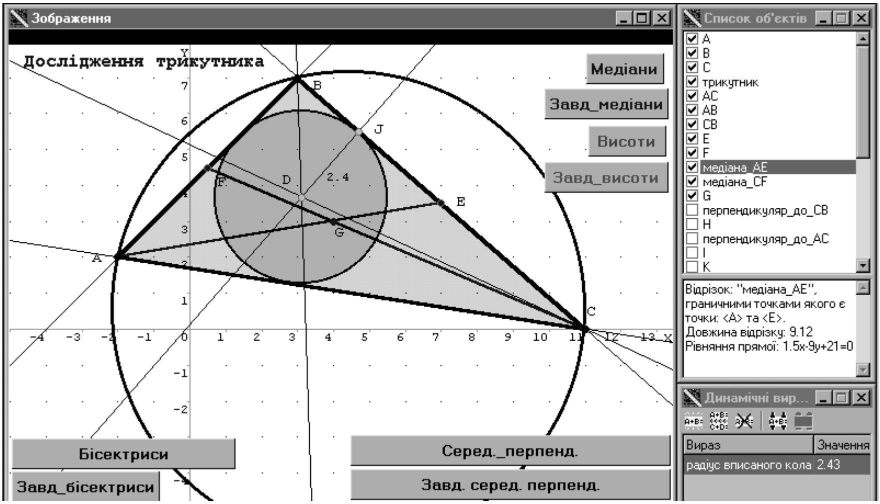


Рис. 2.24. Дослідження трикутника. Вписане і описане коло

- Створити макроконструкцію "Побудова кола, вписаного в трикутник і описаного навколо трикутника, якщо задано його вершини" (7-9 клас).

З'ясуємо, якими послугами потрібно користуватися при першому ознайомленні з програмою GRAN-2D для розв'язування поданого вище завдання? Що саме бажано проаналізувати?

- Переглянути і проаналізувати кожний крок побудови (обрати пункт меню *Зображення \ Покрокове відтворення*). З'ясувати, які саме величини для кожного з об'єктів можна обчислити за допомогою GRAN-2D? Якого виду рівняння складено для прямої, для кола; переконатися, що для кола обчислено довжину, знайдено площу круга; для замкненої ламаної розраховано периметр многокутника та його площу тощо. Здійснюючи покроковий перегляд побудованих об'єктів, одночасно слід аналізувати, яку з послуг потрібно використати, щоб створити той об'єкт, який відтворюється?
- Виміряти кути трикутника, довжини його сторін, інші елементи (пункт меню *Обчислення \ Кут* (*відстань, площа*)). Попередньо бажано зазначити точність обчислення.
- Після покрокового перегляду радимо захопити курсором одну з вершин трикутника і переміщувати її на площині, не відпускаючи при цьому ліву кнопку мишки. Проаналізувати, як змінилися об'єкти та їх характеристики. Змінюючи розташування вершин трикутника, дослідити положення центра описаного кола для гострокутного, прямокутного і тупокутного трикутників.
- Для створення макроконструкції, з використанням якої можна побудувати вписане чи описане навколо трикутника коло, необхідно послідовно виконувати виписані нижче дії. Активізувати послугу *Макроконструкція \ Створити*, вибрати вихідні об'єкти, послідовно клацнувши по кожній з трьох вершин. Після цього, натиснувши піктограму *Макроконструкція* ще раз, вказати результуючі об'єкти: трикутник, центри кіл, кола. Вибрані вершини та інші об'єкти повинні блимати. Чергове натискування на піктограму *Макроконструкція* дозволяє конструкцію зберегти для подальшого використання. При цьому на запит потрібно

відповісти, під яким іменем необхідно зберегти макроконструкцію.

- Для перевірки того, що макроконструкцію записано правильно, необхідно створити три довільні об'єкти *Точка*, що не лежать на одній прямій і скористатися послугою *Встановити макроконструкцію*. З переліку макроконструкцій вибирають тільки що створену і вказують курсором на вихідні об'єкти – побудовані вершини трикутника.
- Як підказку для користувача, який має намір створити дане креслення самостійно, подаємо перелік основних дій: створити вершини – три точки (*Створити точку*), з'єднати їх відрізками (*Відрізок*), знайти середини цих відрізків (*Середня точка*), провести медіани, з'єднавши середини відрізків з відповідними вершинами трикутника (*Відрізок*); провести два серединні перпендикуляри сторін (*Перпендикулярна пряма*), побудувати точку перетину цих перпендикулярів – центр кола, описаного навколо трикутника (*Точка перетину двох кривих*), побудувати описане коло (*Коло за центром і точкою на колі* – вершиною трикутника); побудувати бісектриси двох кутів трикутника (*Бісектриса кута*), знайти точку перетину бісектрис – центр вписаного кола (*Точка перетину двох об'єктів*), з центра вписаного кола провести перпендикуляр до сторони трикутника (*Перпендикулярна пряма*), побудувати точку дотику кола до сторони трикутника (*Точка перетину двох об'єктів*), вписати в трикутник коло (*Коло за відомим центром і точкою на колі*).
- Наведемо приклади динамічних виразів для експертної системи "Трикутник". Щоб експериментально перевірити формулу для обчислення радіуса вписаного кола створюємо вираз 2*AREA(A,B,C)/(LEN(A,C)+LEN(C,B)+LEN(B,A)); для радіуса описаного кола подаємо вираз LEN(A,B)*LEN(B,C)*LEN(C,A)/4/AREA(A,B,C) або інший LEN(C,B)/2/SIN(ANGLE(C,A,B)) (послуга *Обчислення\Динамічний вираз*).

Інші завдання, перелічені у таблиці 2.2, подаються в пункті 3.4 даного посібника.

За допомогою ППЗ "Динамічна геометрія" вчитель може швидко і якісно перевірити виконання індивідуальних завдань з аналітичної геометрії. Радимо провести міні-експеримент: зафіксувати час на перевірку правильності отриманих учнями результатів, адже всі необхідні елементи трикутника вже побудовані, і порівняти з часом, затраченим на традиційну перевірку. Щоб згенерувати завдання для кожного учня, можна до координат вершин трикутника ввести порядковий номер N учня в журналі чи остачу від ділення цього номера на 10: $A(-5, N+1)$, $B(-5,-3)$, $C(4, N+1)$. Доцільне застосування ППЗ сприятиме як розвитку особистості школяра, так і вивільненню часу вчителя за рахунок інтенсифікації праці.

Контрольні запитання і завдання

1. Навести приклади тем з геометрії, при вивченні яких зручно застосовувати GRAN-2D чи DG? Дібрати завдання для одного з уроків, підготувати динамічні конспекти, створити макроконструкцію за кресленням. Визначити мету застосування ППЗ, роль і місце у ході уроку. Які переваги має застосування ППЗ навчання математики у порівнянні з традиційними засобами?

2. Зазначити, які нові можливості для відкриття теорем, відшукання геометричних місць точок надає застосування ППЗ GRAN-2D, DG? Які особистісні якості учнів у ході дослідження з використанням ППЗ можна формувати?

3. Якими послугами ППЗ GRAN-2D можна скористатися, щоб урізноманітнити форми самостійної роботи учнів з динамічними кресленнями? Як це може вплинути на формування пізнавальної самостійності школярів?

2.5. GRAN-3D

GRAN-3D призначено для графічного аналізу тривимірних об’єктів (GRaphic ANalysis 3-Dimension). Детальніший опис послуг програми наведено в посібнику [30]. Окрема глава присвячена побудові перерізів многогранників. За допомогою GRAN-3D можна *імітувати зовнішні дії з геометричними тілами,* необхідними для того*, щоб учень міг провести з ними мисленеві внутрішні дії* і розвинути просторове мислення. Дослідження за допомогою GRAN-3D проводяться як з базовими об’єктами, так і з самостійно сконструйованими. Усі обчислювальні операції та побудови при цьому виконує комп’ютер, залишаючи учневі час на постановку задачі, побудову моделі до задачі, дослідження.

1.У головному вікні відображено *головне меню, панель інструментів, поле підказки, поле зображення, перелік об’єктів, поле характеристик об’єкта, поле інформування.* На рис. 2.25 зображено піраміду в основі якої лежить квадрат, а вершина піраміди проектується в одну з вершин основи. При цьому дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи.

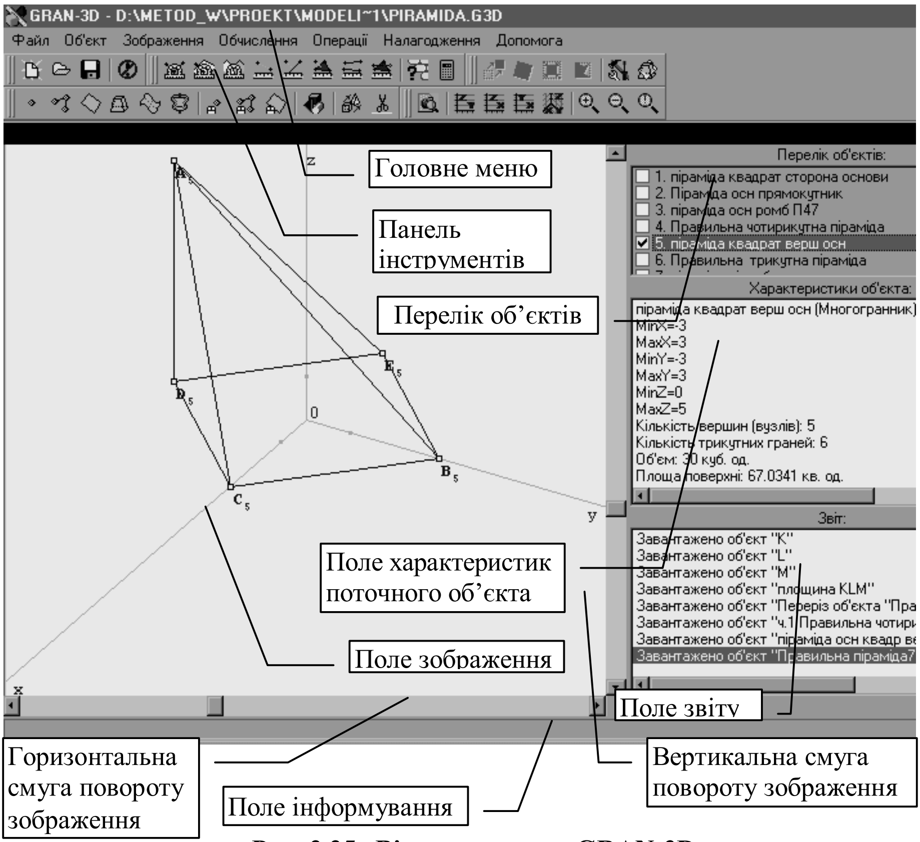


Рис. 2.25. Вікно програми GRAN-3D

2. З правого та нижнього краю цього поля розміщено *смуги повороту* зображення, за допомогою яких здійснюється поворот зображень об'єктів у полі зображення. Центром повороту може бути точка з довільними просторовими координатами. За допомогою смуг повороту зображення можна повертати систему координат разом з створеними моделями об’єктів.

3. *Поле звіту* – частина головного вікна, де фіксується протокол роботи програми та куди виводяться результати всіх вимірювань та обчислень.

4. Для встановлення системи у *положення ізометрії* або в положення, при якому зображення однієї з координатних осей вироджується в точку, призначено послуги пункту *Зображення\Положення координатних осей – Вироджена вісь Ox, Вироджена вісь Oy, Вироджена вісь Oz та Ізометрія.*

5. Для унаочнення моделей стереометричних тіл зручно скористатися послугою програми *Зображення\Режим півтонового зображення* (Рис.2.26), що дозволяє отримувати “реалістичне” зображення моделей цих тіл, побудоване з врахуванням видимості ліній і площин.

6. За допомогою GRAN-3D можна створювати та оперувати моделями геометричних об’єктів *точка, відрізок, ламана, площина, многогранник, поверхня обертання та довільна поверхня, яка визначається рівнянням виду $z=f(x,y)$.* При цьому можливе задання об’єктів у різний спосіб. Для створення деякого об’єкта слід звернутися до підпункту послуги *Об’єкт\Створити*, що має назву, яка відповідає бажаному типу об’єкта.

7. *Точка* задається координатами *x, y* та *z*, *відрізок* – двома точками або точкою і напрямним вектором, *ламана* – координатами вузлів або точкою та впорядкованим набором векторів (ламана може бути замкненою чи незамкненою), *площина* – трьома точками, точкою і вектором нормалі або коефіцієнтами *A, B, C, D* рівняння площини виду $Ax+By+Cz+D=0$.

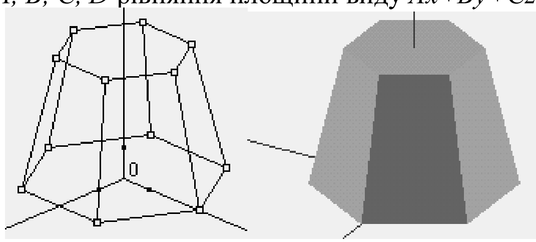


Рис. 2.26. Зображення правильної шестикутної зрізаної піраміди

8. *Многогранник* задається сукупністю граней, кожна з яких трикутник, який визначається деякими трьома вершинами многогранника, а кожна вершина задається своїми просторовими координатами. Щоб сконструювати об’єкт *Многогранник,* потрібно звернутись до послуги меню *Об’єкт \ Створити \ Многогранник*. Засобами ППЗ GRAN-3D можна створити довільний многогранник. Для цього необхідно у відповідних полях вказати кількість вершин многогранника та кількість трикутних граней, а не трикутні грані потрібно поділити на трикутники, ввести координати вершин многогранника у таблиці *Вершини*, а також вказати по три вершини на кожній грані. Для опуклих многогранників можна не вказувати кількість трикутних граней та номери вершин для кожної грані. Досить ввести вершини многогранника

(Рис. 2.27), а потім скористатися послугою *Сформувати грані опуклого об'єкта* – кількість граней і відповідні номери вершин для кожної грані буде встановлено автоматично. Для підтвердження введення даних натиснути кнопку *Виконати.*

9. Моделі *базових просторових об'єктів*, якими оперують при вивченні стереометрії *(правильна звичайна або зрізана піраміда, правильна призма, прямий паралелепіпед, конус, циліндр, куля, куб)* можна створювати окремо, вказавши необхідні параметри об'єкта у вікні *Задання базових просторових об'єктів* на вкладинці з відповідною назвою, що з'являється при зверненні до послуги програми *Об'єкт\Створити базовий об'єкт*. Наприклад, для створення моделі правильної піраміди на вкладинці *Правильна піраміда* (рис.2.27) слід вказати спосіб задання нижньої основи (за допомогою перемикача *Нижня основа*) та ввести відповідне значення у поле під вказаним перемикачем. Якщо необхідно створити зрізану піраміду, то слід встановити відмітку біля напису *Зрізана* та аналогічно до попереднього задати параметри верхньої основи. Також слід вказати кількість вершин в основі піраміди та висоту або довжину бічного ребра піраміди, залежно від положення лівого перемикача. Після введення даних слід натиснути кнопку *Створити*.

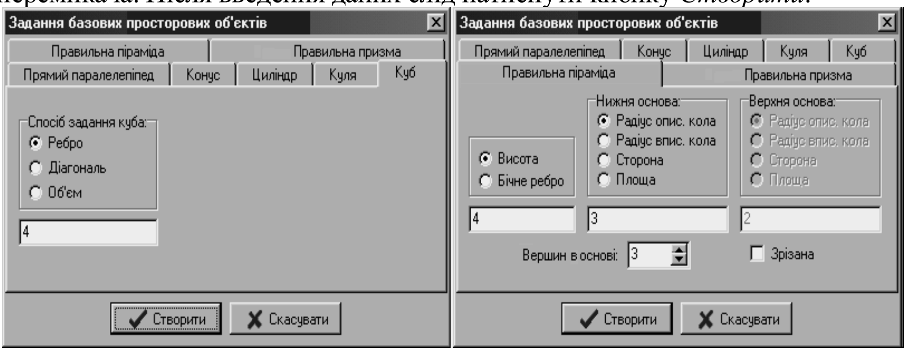


Рис. 2.27. Вікно задання базових просторових об'єктів

10. Деякі характеристики об'єктів обчислюються автоматично відразу після створення об'єктів або після їх перетворення. Наприклад, для об'єктів типу *Ламана* обчислюється довжина ламаної, а якщо ламана замкнена і всі її вузли належать одній площині, то також обчислюється площа області, обмеженої ламаною; для об'єктів типу *Площина*, незалежно від способу її задання, обчислюються коефіцієнти A, B, C і D рівняння площини виду $Ax+By+Cz+D=0$; для об'єктів типу *Многогранник* обчислюється об'єм та площа поверхні, а також площа і периметр окремо кожної грані (ці характеристики наведено у вікні *Перелік граней* об'єкта, що з'явиться після звернення до послуги *Обчислення\Многогранник\Площі* та периметри граней.

11. Користуючись ППЗ GRAN-3D, можна здійснювати *паралельне перенесення, поворот та деформацію об'єктів.*

12. *Об'єм та площа поверхні об'єктів типу Многогранник* (піраміда, призма, паралелепіпед, куб тощо) обчислюються за програмою автоматично при створенні або перетворенні цих об'єктів. Обчислені значення виводяться у полі характеристик поточного об'єкта.

13. У полі *Площа* виводиться сумарна площа граней, відмічених "√" у переліку. За допомогою кнопок *Відмітити всі, Зняти відмітки* та *Інвертувати відмітки* можна швидко відмітити всі грані, зняти відмітки з усіх граней в переліку або змінити стан відміток граней на протилежний. Зауважимо, що послугою *Обчислення\Многогранник\Площі та периметри граней* можна скористатися, коли поточним об'єктом є об'єкт типу *Многогранник*.

14. За допомогою ППЗ GRAN-3D можна виконувати *перерізи опуклих многогранників* площиною. Для цього призначено послугу *Операції\Виконати переріз.* Необхідно вказати у полі зображення (за допомогою вказівника мишки) площину (об'єкт типу *Площина*), якою перерізається многогранник, та об'єкт типу *Многогранник*. При цьому можуть бути створеними два нові об'єкти типу *Многогранник*, що матимуть таку ж назву, як і базовий, але з помітками ч.1 та ч.2 відповідно. Надалі новоутвореними многогранниками можна оперувати, як окремими об'єктами. У полі звіту з'явиться площа та величина периметра утвореного перерізу.

15. За допомогою ППЗ GRAN-3D можна обчислювати відстані між двома точками, між точкою та прямою, між двома прямими, між прямою і площиною, між точкою і площиною, а також обчислювати кути за трьома точками (між відрізками, що мають спільну точку), між прямою і площиною та між двома площинами. Для цього призначено послуги пунктів меню *Обчислення\Відстань* та *Обчислення\Кут*.

16. Приклад *задачі на обчислення*. В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює *9 од.*, а площа основи *20 кв. од.* Обчислити висоту піраміди; радіус описаного навколо основи кола; кут між сусідніми бічними ребрами; кут нахилу бічного ребра до площини основи; кут між площинами суміжних бічних граней, кут між бічною площиною і площиною основи Побудувати кут нахилу бічного ребра до площини основи (*Ламана*) та лінійний кут двогранного кута при ребрі основи. Наближено побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

Щоб створити модель піраміди**,** використовують послугу *Об'єкт\Створити базовий об'єкт*. На вкладинці *Правильна піраміда* вікна *Задання базових просторових об'єктів* необхідно ввести параметри піраміди та натиснути кнопку *Створити* (Рис.2.28).

Висота піраміди – це відстань від вершини до площини основи піраміди, тому для обчислення можна скористатися послугою *Обчислення\Відстань\між точкою і площиною*. Але оскільки при зверненні до цієї послуги необхідно вказати об'єкт типу *Площина*, то попередньо створюють об'єкт, що відповідає площині основи піраміди. Активізуємо послугу *Об'єкт\Створити з екрана*. За відповідними запитами програми, що з'являться у полі підказки, вказують три точки, що визначатимуть площину. Далі активізуємо послугу *Обчислення\Відстань\між точкою і площиною*, і за відповідними запитами програми вказуємо у полі зображення точку – вершину піраміди та площину – об'єкт *Площина основи*. У поле звіту буде виведено результат обчислення відстані, що становить 8.4261. Довжину діагоналі зручно обчислити, звернувшись до послуги *Обчислення\Відстань\між двома точками*. Радіус описаного кола становить 3.1623. Для обчислення *кута між сусідніми бічними ребрами* користуються послугою *Обчислення\Кут\за трьома точками*, вказавши послідовно на три точки, що утворюють кут. У полі звіту з′явиться результат обчислення 28.772^0.

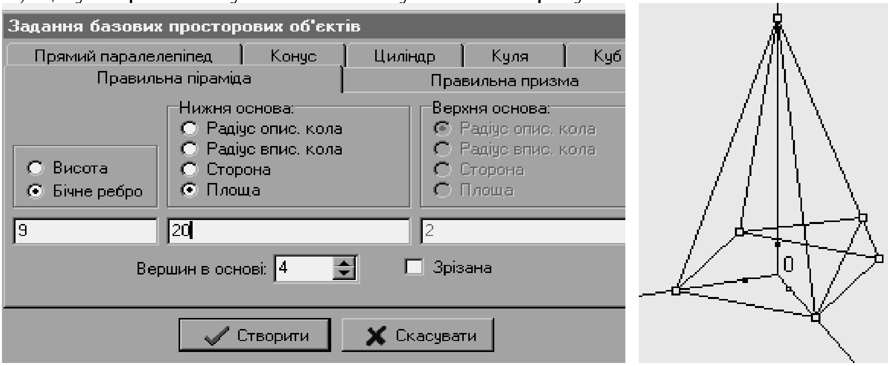


Рис. 2.28. Правильна 4-кутна піраміда

Кут нахилу бічного ребра до площини основи можна обчислити, скориставшись послугою *Обчислення\Кут\між прямою і площиною.* Оскільки при зверненні до цієї послуги необхідно вказати об’єкт типу *Площина* і об’єкт *Пряма*, то слід попередньо створити об’єкт пряма, що відповідає бічному ребру піраміди. У полі звіту з′явиться результат обчислення відповідного кута: 69.429^0. Програмою не передбачено виконувати побудову даного кута, тому можна позначити основу висоти піраміди як точку перетину діагоналей піраміди, а потім побудувати ламану, що відповідає куту.

Кут між суміжними бічними гранями можна обчислити, скориставшись послугою *Обчислення\Кут\між двома площинами*. Оскільки при використанні цієї послуги вимагається вказати два об’єкти типу *Площина*, то попередньо необхідно створити об’єкти-площини, що відповідають площинам двох сусідніх бічних граней. Активізувавши послугу *Обчислення\Кут\між двома площинами*, за відповідними запитами програми послідовно вказати у полі зображення об’єкти *Площина грані* 1 та *Площина грані* 2. У полі звіту з′явиться результат обчислення кута між вказаними площинами: 86.228^0.

Щоб виконувати обчислення вручну, учневі необхідно правильно побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі. З практики відомо, що учні часто допускають при цьому помилки. Побудувати точку на ребрі, що є вершиною цього лінійного кута краще в режимі, коли вісь, перпендикулярна до площини, проведеної через бічне ребро і висоту піраміди, є виродженою. А потім з’єднати необхідні точки ламаною.

17. Приклад завдання на *конструювання многогранника* та побудову його перерізу площиною.

Побудувати піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами *2 см* і *10 см*, висотою трапеції *5 см*. Відомо, що вершина піраміди проектується на середину більшої основи трапеції. Висота піраміди рівна *6 см*. Точка *M* лежить на бічному ребрі піраміди, що з’єднує вершину з кінцем більшої основи, і ділить ребро у відношенні *1:2*, починаючи від вершини піраміди. Через точку *M* та середини бічних ребер трапеції проведено площину. Знайти об'єм піраміди, площу і периметр утвореного перерізу. Виконати обчислення вручну і за допомогою GRAN-3D. Для обчислення площі скористатися формулою площі ортогональної проекції. Обчислити за допомогою ППЗ об'єми утворених в результаті перетину частин піраміди.

При створенні піраміди враховуємо, що вершина піраміди проектується на середину більшої основи, тому площина, в якій розміщена бічна грань, перпендикулярна до площини основи. Зручно основу висоти сумістити з початком координат, а більшу основу трапеції розташувати вздовж осі ординат. Тоді менша основа трапеції буде розташована у площині *Oxy*. Визначившись з розташуванням піраміди, отримаємо координати її вершин (Рис.2.29). Оскільки маємо справу з опуклим многогранником, то для його створення достатньо вказати кількість точок *5*, кількість трикутних граней *6* (трапецію розбити на два трикутники), а потім скористатися послугою *Сформувати грані опуклого об'єкта*. Модель піраміди зображено на рис. 2.30.

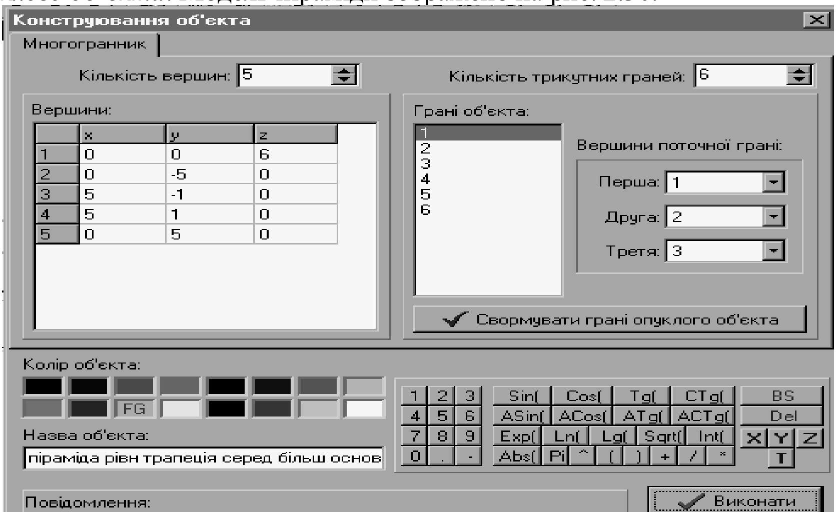


Рис. 2.29. Вікно конструювання піраміди

За допомогою формули поділу відрізка в заданому відношенні, визначаємо координати точки *M(0; 5/3; 4)* та середин бічних ребер трапеції *K(2.5; -3; 0)*; *L(2.5; 3; 0)*. Користуючись послугою *Об'єкт \ Створити з екрана*, будуємо площину через зазначені точки. Щоб побудувати переріз, використовують послугу програми *Операції\Виконати переріз* і послідовно вказують у *полі зображення* площину перерізу та піраміду. Водночас створюється ламана – контур перерізу та два нових об'єкти-многогранники, що відповідають частинам піраміди у різних півпросторах відносно площини перерізу. У *полі звіту* з'являється значення площі перерізу (*22.01* кв. од., рис.2.30). Об'єм піраміди і кожної з частин можна виписати з поля характеристик, якщо світловий курсор у переліку об'єктів встановити на цей об'єкт. $V= 60$ *куб. од.*, $V_1 = 27{,}8$ *куб. од.*, $V_2 = 32{,}2$ *куб. од.*

18. Розглянемо приклад завдання до теми *"Декартові координати в просто-*

рі": 1) скласти рівняння площини, яка проходить через точки *A*(1, 3, 0), *B*(4, -1, 2) і *C*(3, 0, 1); 2) знайти відстань до цієї площини від точки *D*(4, 3, 0); 3) записати рівняння площини, яка проходить через дану точку і паралельна до площини ABC.

Щоб скласти рівняння площини, обираємо пункт меню *Об'єкт \ Створити \ Площина* та записуємо координати заданих точок. У звіті прочитаємо складене рівняння: *0,82x+0,41y-0,41z=0*. Будуємо точку *D* (*Об'єкт \ Створити \ Точка*). Для обчислення відстані використовуємо послугу *Обчислення \ Відстань \ Між точкою і площиною* і вказуємо відповідно до запитів програми на точку і на площину *ABC*. Щоб скласти рівняння площини, паралельної до *ABC*, пригадуємо умову паралельності – пропорційні координати нормальних векторів. Виписуємо координати вектора, перпендикулярного до *ABC (82, 41, -41)* ; складаємо рівняння площини, активізувавши пункт меню *Об'єкт \ Створити \ Площина \ Точка і вектор нормалі*.

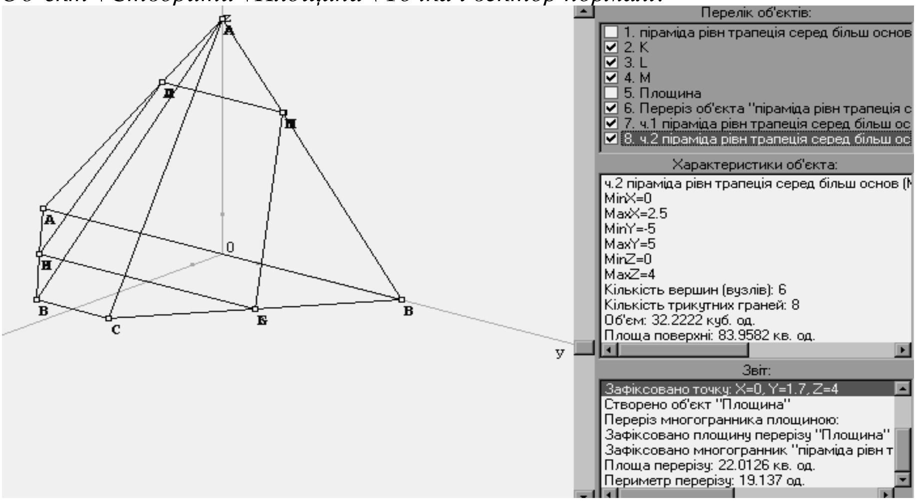


Рис. 2.30 Модель піраміди, в основі якої лежить рівнобічна трапеція

Контрольні запитання і завдання

1. Виконати розглянуті вище завдання за допомогою GRAN-3D.

2. Для правильної *5*-кутної піраміди *ABCDEF* (точка *A* – вершина піраміди), бічне ребро якої *10*, а площа основи дорівнює *38* кв.од., обчислити висоту; радіус описаного навколо основи кола; радіус вписаного в основу кола; відстань між вершинами *B* і *D*; відстань між вершинами *C* і *F*; кут між сусідніми бічними гранями; кут між бічною гранню і площиною основи; кут між сусідніми бічними ребрами; кут нахилу бічного ребра до площини основи.

3. Знайти площу бічної грані правильної *6*-кутної зрізаної піраміди, висота якої *4*, сторона верхньої основи дорівнює *1.5*, а площа нижньої *15* кв. од.

4. Обчислити площу бічних граней прямого паралелепіпеда, висота якого 30 см, а діагоналі основи довжиною 10 см та 13 см утворюють кут 17^0.

5. Дібрати до уроку завдання для виконання за допомогою GRAN-3D. Які з якостей особистості доцільно формувати у процесі навчання математики з використанням розглянутого засобу? Як це краще здійснювати?

2.6. ТерМ, Бібліотека електронних наочностей “Алгебра, 7-9 клас”

В Україні поширена *система комп’ютерної алгебри ТерМ* [64,160], [83], [102]. Цей програмно-методичний комплекс призначений для комп’ютерної підтримки уроків алгебри у 7-му класі загальноосвітніх шкіл, для активної математичної діяльності користувача. Засобами ТерМ зручно здійснювати рівневу диференціацію та індивідуалізацію навчання, можна наглядно демонструвати методи розв’язування задач, розв’язувати задачі творчого, дослідницького характеру, проводити обчислювальні експерименти та ін. Апробується також новий ПЗНП *„Алгебра, 7-9 клас”* [130]. Розроблено засоби на замовлення МОН України Херсонським державним університетом, Науково-дослідним інститутом інформаційних технологій. Координатор проекту – доктор педагогічних наук, професор *О.В. Співаковський*. Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук *М.С. Львов*.

Процес розв’язування задачі за допомогою ППЗ є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деякі перетворення математичної моделі задачі. До найважливіших аспектів підтримки роботи учня можна віднести перевірку правильності ходу розв’язування задачі, автоматизацію рутинних дій учня, пов'язаних з обчисленнями, надання йому зручного способу використовування навчальних, навчально-методичних та довідкових відомостей. У ході діяльності учитель може оперативно здійснювати перевірку правильності ходу розв’язування задачі, автоматизоване тестування знань учнів; використовувати заздалегідь сплановану згідно з вимогами стандартів систему навчальних матеріалів для проведення всього циклу уроків з можливістю його модифікації. ПМК може використовуватися на уроці у процесі пояснення методів розв’язування алгебраїчних задач, для проведення самостійних і контрольних робіт. Окремий модуль призначений для перевірки практичних умінь учнів та надбання ними навичок алгебраїчних перетворень.

1. Програма ТерМ запускається, як і усі додатки Windows, з головного меню (*Всі програми \ KSU Software \ TerM*) або із застосуванням ярлика. При запуску відкривається головна сторінка ПМК (рис. 2.31), на якій користувач здійснює персоніфікацію, вибирає мову, якою буде працювати (українська, російська, англійська), вибирає той модуль, з якого починає роботу (*Середовище розв’язання, Задачник, Навчальний посібник, Зошит, Розв’язувач, Графіки, Довідник*). Персоніфікація означає вибір зошита. Якщо зошит ще не заведений, то необхідно його зареєструвати, вказавши клас, прізвище та ім’я користувача, назву зошита (виконувати у режимі *Редагування*; додати *Клас, Користувача, Зошита*). Якщо вчитель планує перевіряти в учнів електронні зошити з домашніми завданнями, то учневі слід вдома зареєструвати цей зошит з такими ж підписами, як і у школі. Зошит (папка з файлом) знаходиться у папці *TerM 7 \ Data \ Copybooks \ 7 \ ПрізвищеCopybook*. Файл з виконаним завданням слід приносити в школу на дискеті чи надсилати електронною поштою.

2. *Електронний навчальний посібник* ПМК ТерМ-7 містить навчальний матеріал з алгебри для 7-го класу загальноосвітніх шкіл. Навчальний матеріал викладено в 4-х розділах, в 26 параграфах, які мають назви та номери. Посібник є гіпертекстом, який структурований змістом, представленим у лівій частині вікна

посібника – полі *Зміст*. Для того, щоб відкрити потрібний розділ посібника, треба натиснути мишкою на відповідний рядок поля *Зміст* з заголовком потрібного розділу. Крім навігації за змістом, користуються посиланнями – ключовими словами. У тексті ці слова підкреслені. Щоб повернутися на попередню сторінку підручника, активізують підпункт *Назад* пункту *Навігація*.

Рис 2.31. Загальний вигляд головної сторінки ПМК ТерМ

3. Параграфи завершуються вправами для самоперевірки знань. Перевірку знань здійснюють за допомогою програмного модуля *Вправи.* Щоб приступити до розв'язування вправи, треба "натиснути" на кнопку *Перевір себе*. Програма перевіряє правильність наданої користувачем відповіді після розв'язування трьох прикладів. Якщо відповідь правильна, сигнал правильності – зелений, для неправильної – червоний, якщо відповідь можна ще спростити, то сигнал жовтий. Щоб допомогти користувачу в обранні правильної форми відповіді, розв'язання одного прикладу з кожної вправи подається у *Полі прикладу* (рис. 2.32). Допустимі символи: змінні подаються латинськими буквами, дія помножити записується з використанням символу " * ", поділити " / ". Щоб подати степінь, слід ввести з клавіатури символ " ^ " і записати у відведені комірки основу та показник степеня. У табл. 2.3 наведено приклад введення з клавіатури послідовності символів до вправ § 12 „Множення многочленів". У першій вправі пропонується винести за дужки спільний множник, у другій – представити вираз у вигляді многочленна від змінної *x*.

Таблиця 2.3.

Завдання	Послідовність введення символів у відповіді	Результат
$6\cdot x\cdot y^2-2\cdot x^4\cdot y^4$	2*x ^ y^2 *(3 – ^ x^3 * ^ y^2)	$2\cdot x\cdot y^2\cdot(3-x^3\cdot y^2)$
$(x-a)\cdot(x-2\cdot a)$	^ x^2 – 3 * a * x + 2* ^ a^2	$x^2-3\cdot a\cdot x+2\cdot a^2$

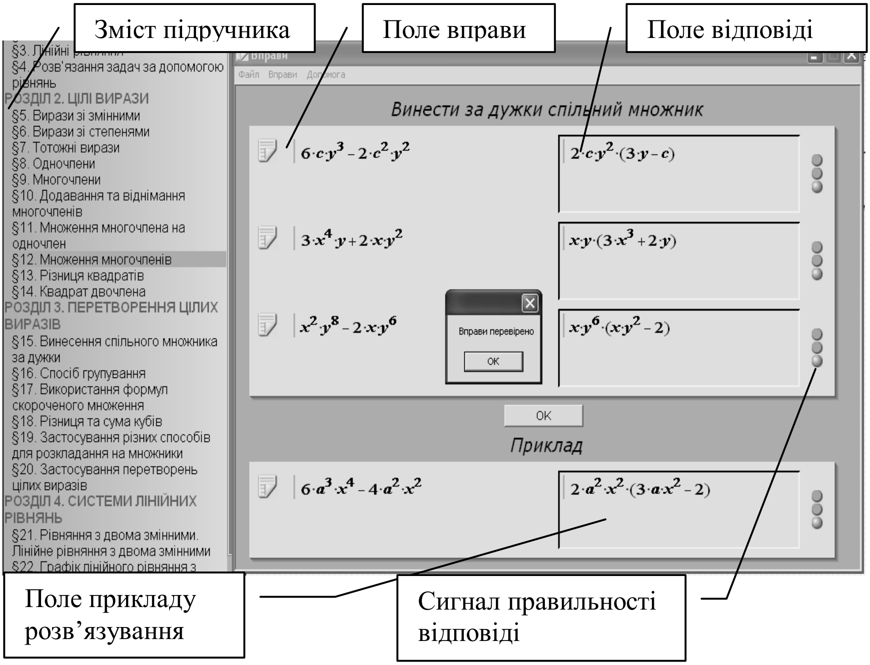
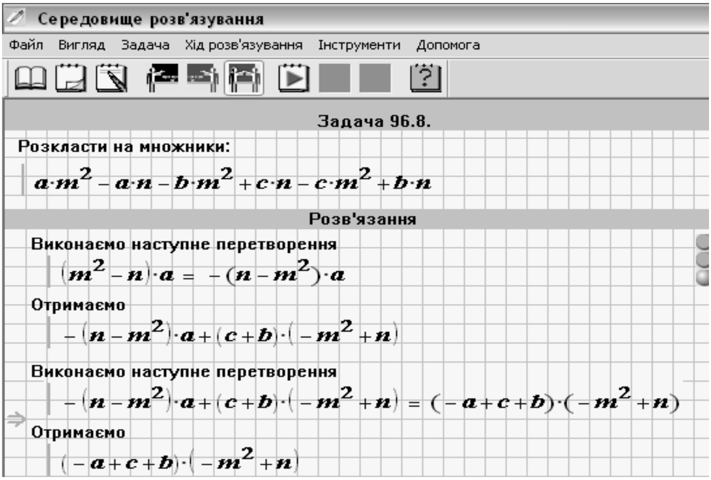


Рис. 2.32 Результат перевірки вправи на спрощення

4. ПМК ТерМ містить згруповані в 6-ти розділах навчальні задачі. В останньому розділі подаються завдання контрольних робіт для тематичного оцінювання. Кожна задача пронумерована. Зміст представлений у лівій частині вікна *Задачника*. Наприклад, для розв'язування текстових задач пропонується 110 умов. Крім того, можна вводити і розв'язувати власні задачі (послуга *Задачник \ Задача \ Нова задача \Вирази (Тотожності, Рівняння, Системи рівнянь).*

5. *Порядок розв'язування задачі*: 1) вибрати із задачника задачу середнього, достатнього чи високого рівнів складності, 2) вказати *Режим розв'язування* (*Перевірка ходу* або *Автоматичний*, *Змішаний*), 3) натиснути піктограму *Почати*, 4) послідовно виконувати дії. У режимі *Перевірка ходу* після виконання дії зазначають *Виконати крок*. Якщо при виконанні перетворення учень зробить помилку, то на „світлофорі" у правому боці поля зошита спалахне червоне світло. Для подальшого розв'язування задачі необхідно виправити помилку, оскільки комп'ютер „відмовиться" від запису неправильного виразу. 5) Після завершення розв'язування слід знайти заголовок „*Відповіді*" у правій частині вікна і натиснути кнопку „*Виконати*" біля напису „*Задачу розв'язано*". 6) Далі потрібно зберегти розв'язання у зошиті (*Файл \ Зберегти у зошиті*). При зберіганні результатів роботи у зошиті, слід вказувати тему уроку та його номер.

В автоматичному режимі подвійним натискуванням курсором мишки на виділену дію ініціюється виконання дій. Наприклад, в автоматичному режимі



Оформлення розв'язання в автоматичному режимі

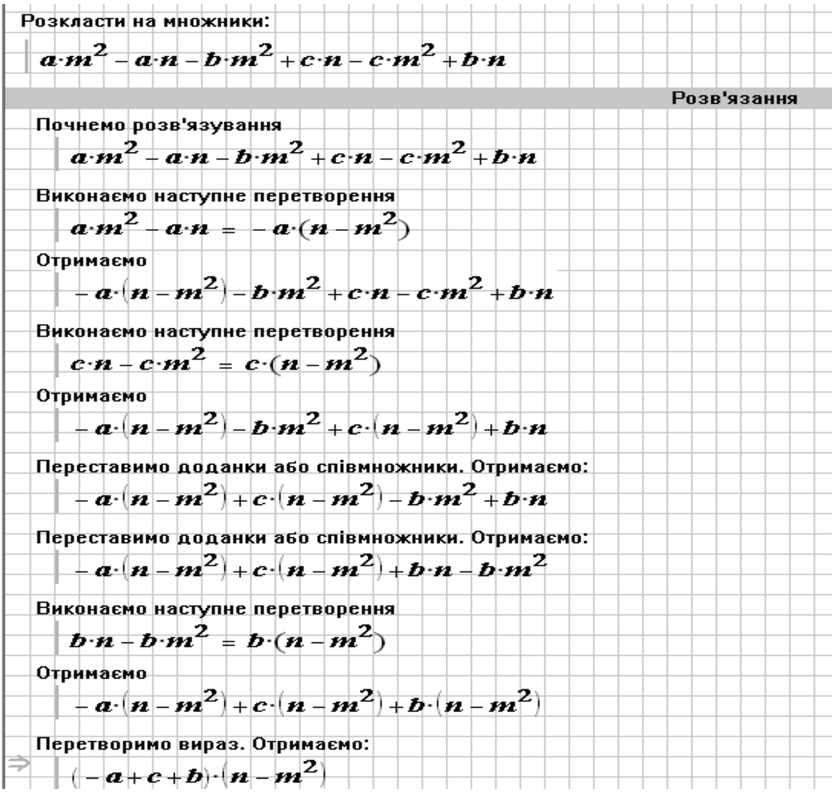


Рис. 2.33. Приклад оформлення засобами ТерМ перетворення виразу (режим перевірки кроку розв'язування)

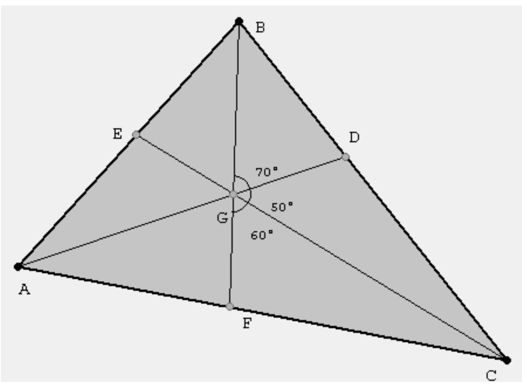
подвійним натискуванням курсором мишки по знаку суми ініціюється зведення подібних доданків, по правій дужці – розкриття дужок. Цей режим призначено для розв’язування більш складних задач, які потребують виконання великої кількості засвоєних раніше елементарних перетворень. Він вивільняє додатковий час за рахунок скорочення процесу розв’язування та дозволяє зосередитися учневі на сутності використовуваних методів. В автоматичному та у змішаному режимі можна вибирати потрібну дію з *Довідника.* Для появи *Довідника* досить натиснути на виділеному знаку дії праву клавішу мишки.

6. Порядок доданків змінюють, перетягуючи за допомогою курсора один з них у потрібне місце в рівності. Два рівняння додають, перетягуючи одне до одного за знак рівності або вибирають відповідну дію з *Довідника*. Аналогічно здійснюють підстановку виразу для певної змінної в інший вираз, наприклад, в рівняння. На рис. 2.33 подано копії сторінок зошита із записаним розв’язанням розкладання виразу на множники. Користувачами обрано різні режими роботи, тому оформлення дещо відрізняється.

При розв’язуванні текстових задач за допомогою рівняння чи системи лінійних рівнянь учень може отримати підказку не лише при виконанні дій, але й на етапі розробки моделі, що надзвичайно важливо для розвитку пізнавальних якостей учня. Наведемо приклад розв’язування текстової задачі, доступної для семикласників:

7. *№ 158. Гострі кути між бісектрисами внутрішніх кутів трикутника ABC рівні 50^0, 60^0, 70^0. Визначити внутрішні кути A(x), B(y), C(z) у трикутнику ABC.*

Для розв’язування задачі пропонується скласти систему з трьох рівнянь з трьома змінними *x, y, z* (підказка щодо введення змінних є в самій умові). Щоб скласти систему, учневі потрібно виконати малюнок (рис. 2.34), пригадати означення бісектриси кута трикутника та властивість зовнішнього кута трикутника. Розв’язати систему семикласник зможе як методом додавання, так і методом підстановки. Розв’язування задачі допоможе учневі усвідомити роль алгебраїчних методів у вивченні геометрії.



$$\begin{cases} \dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=60, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{2}=50, \\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{x}{2}=70. \end{cases}$$

Рис.2.34. За даними рисунка складено систему до задачі №158

У вікні модуля „*Середовище розв’язання*” підведемо вказівник мишки до заголовку „*Задача*”, що знаходиться на верхній панелі і натиснемо ліву клавішу мишки. З'явиться напис „*Режим розв'язування*”. Ще раз натиснемо ліву клавішу мишки на цьому напису і потім виберемо потрібний режим з трьох, назви яких відкриються: „*Автоматичний*”, „*Перевірка кроку розв'язання*”, „*Змішаний*”. У наведеному прикладі обираємо режим „*Змішаний*”. Потім необхідно на верхній панелі натиснути кнопку „*Почати розв'язування* ”. На панелі введення даних, що з'являється на екрані, проставляємо “галочку” навпроти напису “*Система рівнянь*”. За допомогою редактора формул проставляємо знак системи “{”, записуємо три рівняння (рис. 2.34). Натискуємо кнопку “*Виконати*”. В разі утруднення зі складанням системи, натискуємо кнопку “*Скласти*” (програмним забезпеченням).

1) Помножимо перше з утворених рівнянь на *–1*, щоб у подальшому додати його до другого рівняння. Для цього підведемо вказівник мишки до знаку рівності у першому рівнянні та натиснемо праву клавішу мишки. У довіднику справа вибираємо операцію множення ($c\cdot A= c\cdot B$) і у вікні, що відкривається, вводимо множник *-1* і виконуємо операцію. 2) Додаємо перше рівняння до другого. Для цього необхідно, узявшись за знак рівності першого з рівнянь, мишкою перетягнути його на друге рівняння і відпустити. 3) Множимо друге рівняння на *- 1* та додаємо до третього. 4) У третьому рівнянні необхідно звести подібні доданки і отримати вираз для змінної x. Щоб звести у рівнянні подібні доданки, слід перетягнути їх мишкою, розташувати поряд, а потім відпустити кнопку мишки. 5) Для спрощення виразу виділяємо необхідну дію. Для цього підведемо вказівник мишки до знаку дії у виразі і натиснемо праву клавішу мишки. Після напису „*Виконаємо наступне перетворення*” буде записана копія виразу і знак рівності. Праворуч від цього знаку учень з клавіатури набирає новий вираз, який є тотожним перетворенням заданого. Потім необхідно підвести вказівник мишки до заголовка „*Хід розв'язування*” на верхній панелі і натиснути ліву клавішу. Після цього з'явиться напис „*Виконати крок*”. На цьому напису треба ще раз натиснути ліву клавішу мишки. Під заголовком „*Отримаємо*” буде записано перетворений вираз. 6) Таким чином, третє рівняння системи буде розв'язане відносно змінної x. Цю змінну можна виключити з другого рівняння, підставивши в рівняння її значення. Для цього слід перетягнути мишкою змінну для виключення з одного рівняння в інше на місце входження даної змінної і відпустити кнопку мишки. 7) Далі слід спростити друге рівняння і знайти значення для змінної y. 8) Після цього з першого рівняння виключають змінну y та обчислюють значення для змінної z. 9) Записують відповідь задачі і зберігають розв'язання у відкритому зошиті.

8. За допомогою ТерМ можна виконувати побудови графіків лінійних функцій, знаходити розв'язки систем лінійних рівнянь з двома змінними графічним методом та ін. Для цього використовують інструмент *Графіки*.

9. Основним призначенням програмного засобу „*Алгебра 7-9*” [130] є використання в якості наочностей на уроках алгебри у 7-9 класах загальноосвітньої школи або у процесі самостійного вивчення учнями навчального матеріалу для формування відповідних теоретичних знань та практичних вмінь. Ім'я програми – *БН Алгебра 7-9*. Інсталяція здійснюється за допомогою файла виробника *InstallBNAlgebra*. На компакт-диску виробника розміщені також файли з настановами для організації роботи вчителя і учня: *Методичні рекомендації, Наста-*

нова користувача, Інструкція з інсталяції та експлуатації. Програма запускається, як і всі додатки Windows, з головного меню (*Всі програми \ SL Edu Soft \ БН Алгебра 7-9 \ Конструктор уроку)* або із застосуванням ярлика.

10. Після запуску програмного засобу відкривається вікно "*Персоніфікація користувача*", яка полягає у виборі категорії користувача та його прізвища. Необхідність персоніфікації зумовлена тим, що програмний засіб установлюється на комп'ютер учителя, за яким можуть працювати у різний час декілька вчителів. Кожен з них має змогу сформувати власну бібліотеку уроків і використовувати її у процесі навчання алгебри. Для того, щоб вибрати категорію (користувача), необхідно натиснути кнопку з трикутником списку категорій (користувачів). У списку, що відкриється, вибрати за допомогою вказівника та лівої кнопки мишки потрібні дані або ввести їх з клавіатури. Наприклад, створити категорію *Математичний клас*, користувача *Прізвище*. Тоді розроблені даним вчителем для даного профілю навчання уроки для 8-го класу зберігатимуться у папці *C:\Program Files \ SL Edu Soft \ Benazone \ users \ teachers \ Математичний клас \ Прізвище \ blessons \ class_8*.

11. У результаті здійснення персоніфікації відкривається головне вікно програмного модуля *Конструктор уроку* (для вчителя) або *Урок алгебри* (для учня). З цього модуля можна завантажити функції засобу *Середовище розв'язання, Графіки, Калькулятор*. *Конструктор уроку* призначено для формування бібліотеки уроків, тобто наповнення уроку наочностями - опорними конспектами, алгебраїчними задачами, графічними побудуваннями. Програмний модуль *Конструктор уроку* містить у своєму складі бібліотеки опорних конспектів, алгебраїчних задач, графічних побудувань, уроків. Засобами програмного модуля користувач має змогу формувати уроки, редагувати зміст бібліотеки уроків та проводити урок зі свого робочого місця в одному з таких режимів: *груповий*, *індивідуальний*, *вибірковий*.

12. Наведемо приклад створення розробки уроку на тему „Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних" для 8-го класу. Попередньо потрібно зазначити, що працюємо за програмою 8-го класу (*Файл \ Навчальна програма \ 8 клас*). Для створення нового уроку необхідно виконати команду *Файл\Новий урок*. У вікні, що відкриється, ввести з клавіатури номер уроку з календарного плану вчителя, записати тему уроку та натиснути кнопку "*Так*". Далі слід додати кілька опорних конспектів для уроку. У вкладці *Опорні конспекти \ Квадратні рівняння* знаходимо заголовки „Означення рівняння, що зводиться до квадратного. Приклади" і „Алгоритм розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних (метод заміни змінної)". Виділивши знайдений заголовок, натискуємо праву кнопку мишки і *Додаємо* конспект *до уроку* (рис. 2.35). Додані конспекти слід переглянути і дібрати з них ті приклади, які доцільно запропонувати на уроці. При цьому необхідно визначити, на якому етапі уроку краще подати покрокове відтворення розв'язання тієї чи іншої задачі, та які організаційні форми роботи учнів доцільно використати.

Для того, щоб зберегти урок, потрібно виконати команду *Файл\Зберегти урок*. У вікні *Збереження уроку*, що відкриється, треба виділити мишкою назву розділу бібліотеки уроків та натиснути кнопку "*Так*". При необхідності можна додавати нові розділи. За допомогою засобу можна створювати уроки для 7, 8, 9

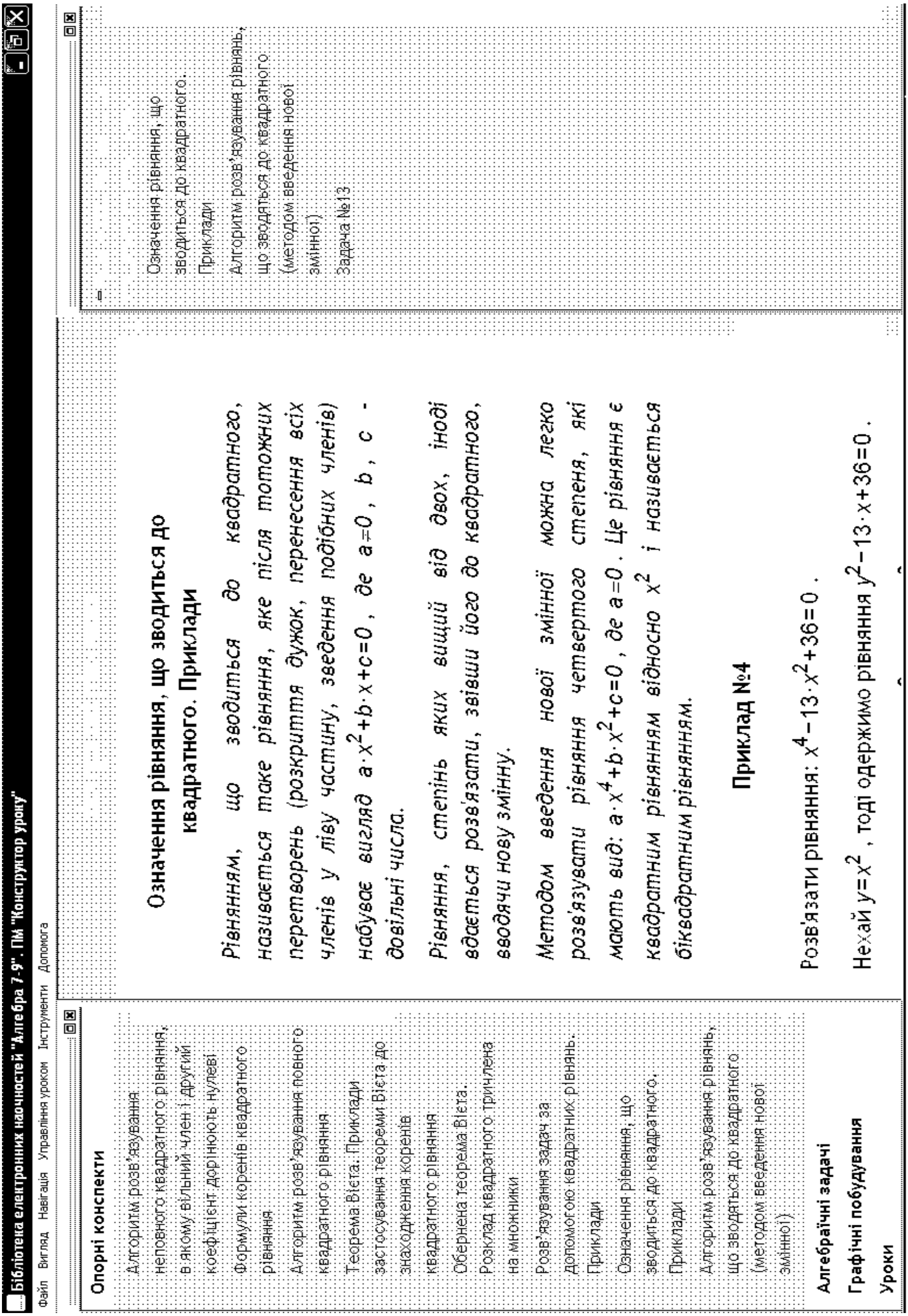


Рис. 2.35. Вікно Редагування уроку. В центрі фрагмент опорного конспекту уроку

класів. При цьому можна незалежно від класу використовувати для формування уроків навчальну програму для іншого класу. За допомогою команди *Роздрукування* можна роздрукувати зміст вікна *Версія для друку*. Команда *Урок* відкриває вікно змісту уроку для редагування змісту (додавання та видалення конспектів, переміщення конспектів вгору або вниз за змістом). Для початку редагування на виділеній темі уроку натискують праву клавішу мишки.

13. *Бібліотека опорних конспектів* (близько 200) містить означення усіх математичних понять, перелічених у навчальній програмі 7-9 класів, приклади, що ілюструють ці поняття, формулювання та покрокове пояснення алгоритмів розв'язування всіх типів навчальних задач, передбачених навчальною програмою, необхідні графічні ілюстрації. За оформленням опорні конспекти є плакатами наочностей, за технологією реалізації – слайдами. За основу викладання матеріалу обраний метод покрокового пояснення з можливостями повернення назад та повернення до поточного кроку (принцип гіпертексту). Розрізняють такі опорні конспекти: означення, алгоритм розв'язування задачі (рис.2.35), приклади застосування алгебраїчної властивості, графічне побудування, анімація реального процесу.

Бібліотека алгебраїчних задач є доповненням бібліотеки опорних конспектів. Ця бібліотека формується користувачем (вчителем чи учнем) за допомогою програмного модуля *Середовище розв'язання*. Для цього попередньо задача має бути сформульована, розв'язана та збережена користувачем у *Середовищі розв'язання*. Будь-яку задачу з бібліотеки алгебраїчних задач вчитель може включити до складу уроку з бібліотеки уроків. Розв'язані користувачем задачі для 8-го класу містяться у папці *C:\Program Files\SL Edu Soft\Benazone\modules\ben.class.8\libalgt\tasks*. Щоб додати в папку задачу, розв'язану на іншому комп'ютері, її спочатку потрібно зареєструвати в *Середовищі розв'язання.* Тобто, ввести умову задачі та зберегти її під тим номером і в тій темі, як і задача, яку мають прочитати з дискети. Після цього можна замінити відповідний файл у зазначеній папці.

Бібліотека графічних побудувань є доповненням бібліотеки опорних конспектів і формується учителем за допомогою модуля *Графіки*. Кожна із задач на графічні побудування має бути сформульована, розв'язана та збережена користувачем. Наприклад, розв'язані задачі за програмою 9-го класу знаходяться у папці *C:\Program Files\SL Edu Soft \ Benazone \ modules \ ben.class.9 \ libgeomt \ tasks.*

14. ППЗ має потужний апарат символьного перетворення виразів. Наведемо перелік запрограмованих перетворень, які використовуються при розв'язуванні рівнянь. Передбачена можливість перетворення рівняння в сукупність рівносильних рівнянь. Можна здійснювати розв'язування найпростіших рівнянь з модулем та рівнянь стандартного виду з модулями, раціональних рівнянь; видаляти розв'язки, які не задовольняють умові-нерівності. Можна подати розв'язання найпростіших рівнянь з радикалом, рівнянь стандартного виду з радикалами; квадратних рівнянь з використанням методу дискримінанту та за теоремою Вієта. За допомогою програмного модуля можна представити розв'язки рівняння, записавши їх у вигляді системи найпростіших рівнянь з нумерованими змінними чи відокремити додатні розв'язки. Для перетворення

рівнянь може використовувати метод заміни змінної. Щоб здійснити заміну певного виразу, слід цей вираз взяти у дужки і виділити. В подальшому потрібно виконати команду *Змінні \ Заміна виразу на змінну*.

Наведемо приклади дій з довідника для розв'язування нерівностей (9-ий клас): 1) логічні значення числових нерівностей – обчислити значення числової нерівності; 2) основні властивості нерівностей – додати вираз до обох частин нерівності, перенести доданок в іншу частину нерівності, помножити нерівність на число, поміняти місцями частини нерівності; 3) розв'язування нерівностей - розв'язати лінійну нерівність, скласти квадратне рівняння, відповідне нерівності, обрати формулу для розв'язування квадратної нерівності, розв'язати найпростішу лінійну нерівність, зобразити числовий проміжок на числовій осі; 4) перетворення алгебраїчних нерівностей – перетворити нерівність – добуток, частку, нерівність зі степенями, з радикалом, з модулем.

15. Наведемо *приклад доповнення бібліотеки алгебраїчних задач* розв'язанням нерівності другого степеня $2x^2-3x+1\geq 0$.

1) Налаштовуємось на навчальну програму *9*-го класу. Відкриваємо програмний модуль розв'язування задачі (*Інструменти \ Середовище розв'язання*), обираємо команду *Задача \ Нова задача \ Нерівності \ Алгебраїчна нерівність*, записуємо у відведену комірку формулу $2x^2-3x+1\geq 0$.

2) Підвівши вказівник мишки до знака нерівності, натискуємо праву клавішу мишки і таким чином відкриваємо *Довідник* для вибору першого кроку розв'язання. Для виділеної дії вибираємо в закладці *Нерівності* дію *Розв'язати відповідне квадратне рівняння*.

3) Виділяємо утворене рівняння (натискуємо на знак " = ") і обираємо дію *Обчислити дискримінант рівняння*. У полі розв'язання з'являється вираз $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1$. Підвівши вказівник мишки до знака „мінус", виділяємо вираз $(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1$ (підтвердженням виділення є змінення кольору виразу), натискуємо праву клавішу мишки і відкриваємо *Довідник* для вибору кроку *Обране \ Заміна рівних*. Заносимо у відведену комірку значення дискримінанта *1*.

4) Вибираємо з довідника дію *Розв'язати квадратне рівняння*, попередньо виділивши рівняння та його дискримінант (натиснути праву клавішу мишки, коли вказівник курсору розміщений над символом "*{*").

5) Спрощуємо вирази для коренів, виконавши дію *Заміна рівних*.

6) Записуємо розв'язки нерівності. Для цього виділяємо нерівність та знайдені розв'язки квадратного рівняння ("*{*") і зазначаємо дію *Вибрати формулу розв'язання*.

7) Для кожної з утворених простих лінійних нерівностей записуємо розв'язання у вигляді інтервалу (дія *Розв'язати найпростішу лінійну нерівність*).

8) Записуємо розв'язок даної нерівності як об'єднання інтервалів (*Системи \ Об'єднання розв'язків*).

9) Записування відповіді.

10) Зберігання розв'язаної нерівності у темі бібліотеки „Нерівності".

Перші чотири кроки розглянутої нерівності подано на рис. 2.36. Якщо включити дану нерівність в урок, то можна буде здійснювати покрокове

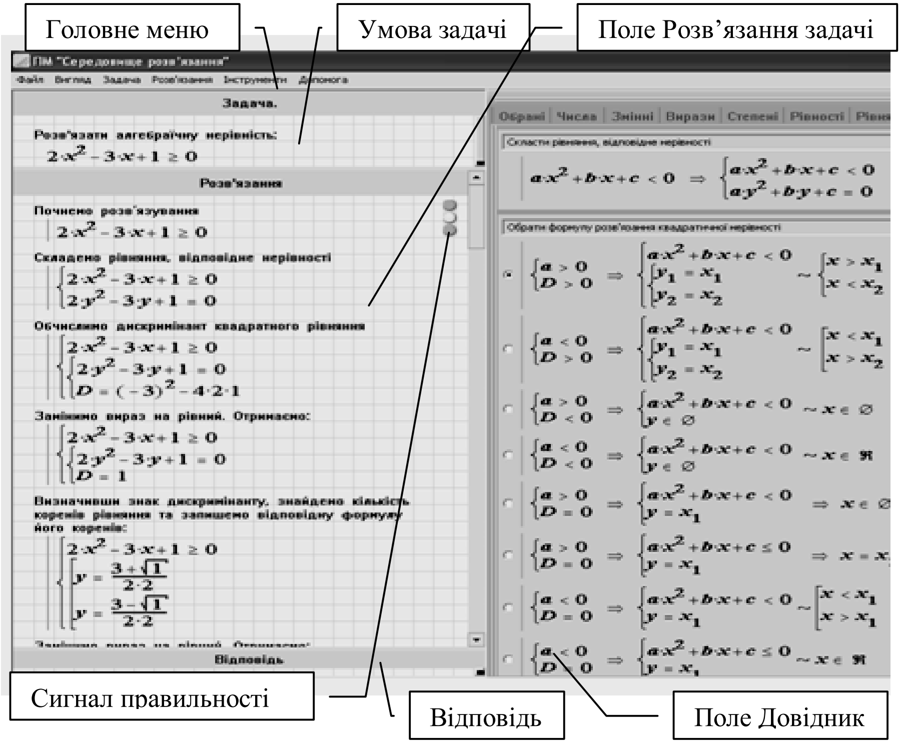


Рис.2.36. Загальний вигляд вікна *Середовища розв'язання* для 9 класу

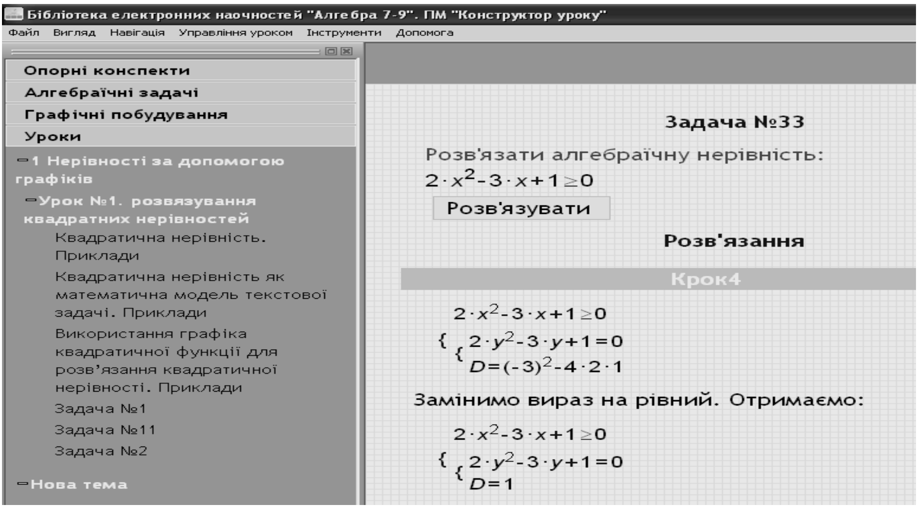


Рис. 2.37. Вікно програмного модуля *Конструювання уроку*, перегляд розв'язування

відтворення її розв'язання. На рис. 2.37 представлено крок обчислення дискримінанта квадратного рівняння. Передбачена можливість від режиму покрокового перегляду розв'язаного завдання переходити до середовища розв'язування. Подібне передбачене і для графічних побудов.

16. Подамо у вигляді табл. 2.4 коментарі до перших кроків розв'язування рівняння, що зводиться до квадратного (навчальна програма за 8-й клас).

Таблиця 2.4.

<table>
<tr>
<td>
Задача №1
Розв'язати алгебраїчне рівняння:
$(x^2+3\cdot x)^2-2\cdot(x^2+3\cdot x)-3=0$
Розв'язанн
Крок1
Почнемо розв'язування
$(x^2+3\cdot x)^2-2\cdot(x^2+3\cdot x)-3=0$
Крок2
Позначимо вираз новою змінною. Отримаємо:
$\begin{cases} a^2-2\cdot a-3=0 \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases}$
Крок3
Обчислимо дискримінант квадратного рівнянн
$\begin{cases} \begin{cases} a^2-2\cdot a-3=0 \\ D=(-2)^2+4\cdot 3 \end{cases} \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases}$
Крок4
Визначивши знак дискримінанту, знайдемо кі
запишемо відповідну формулу його коренів:
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2+\sqrt{(-2)^2+4\cdot 3}}{2\cdot 1} \\ a=\dfrac{2-\sqrt{(-2)^2+4\cdot 3}}{2\cdot 1} \end{array} \right. \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases}$
Крок5
Замінимо вираз на рівний. Отримаємо:
$\left\{ \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{2-\sqrt{(-2)^2+4\cdot 3}}{2\cdot 1} \end{array} \right. \right.$
$\{\ a=x^2+3\cdot x$
Крок6
Замінимо вираз на рівний. Отримаємо:
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \end{array} \right. \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases}$
Крок7
Перетворимо систему для розгляду ок
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ a=x^2+3\cdot x \end{cases} \end{array} \right.$
</td>
<td>
Для запису умови рівняння
$(x^2+3\cdot x)^2-2\cdot(x^2+3\cdot x)-3=0$
вводимо послідовність символів
^(^x^2+3*x)^2–2*(^x^2+3*x)-3=0.
Можна використовувати панель редактора.
Крок 1. Пункт *Розв'язування \ Почати.*
Крок 2. Виділяємо вираз у дужках (натискуємо знак „+”) для заміни новою змінною. У вкладці *Змінні \ Заміна виразу на змінну* виконуємо дію *Позначимо вираз змінною*, вводимо назву змінної *a*.
Крок 3. Для обчислення дискримінанта квадратного рівняння виділяємо рівняння за знак „=”. У вкладці *Рівняння \ Квадратні рівняння* вибираємо і виконуємо дію *Обчислити дискримінант*.
Крок 4. Визначивши знак дискримінанта, знайдемо кількість коренів рівняння та запишемо відповідну формулу його коренів. У вкладці *Рівняння \ Квадратні рівняння* вибираємо і виконуємо дію *Розв'язати квадратне рівняння*.
Крок 5. Виділимо вираз для першого кореня (за риску дробу) і замінимо його на рівний. Вкладка *Обране \ Заміна рівних*. Для першого кореня вводимо *3*.
Крок 6. Для другого кореня вводимо *-1*.
Крок 7. Перейдемо до сукупності двох систем. Для цього у вкладці *Обране \ Перетворення* виконаємо дію *Перейдемо до окремих випадків*.
</td>
</tr>
</table>

Крок8 Перетворимо вираз. Отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\3=x^2+3\cdot x\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\a=x^2+3\cdot x\end{cases}\end{array}\right.$ Крок9 Перетворимо вираз. Отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\3=x^2+3\cdot x\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\-1=x^2+3\cdot x\end{cases}\end{array}\right.$ Крок10 Видалимо з системи ті її члени, які $\left[\begin{array}{l}3=x^2+3\cdot x\\ \begin{cases}a=-1\\-1=x^2+3\cdot x\end{cases}\end{array}\right.$	*Крок 8, 9*. Врахуємо заміну змінної, підставимо знайдені значення змінної *а*. Для цього, „захопивши” вказівником курсора змінну, пересувають її у підстановку (змінну *а* на змінну *а*). *Крок 10, 11.* Видаляємо з сукупності систем змінну а. Для цього виділяємо вираз *а =3*, у вкладці Змінні вибираємо і виконуємо дію Видалити з системи ті її члени, які залежать від даної змінної. Аналогічно видаляємо вираз *а = -1*. *Крок 12, 13.* Зводимо квадратні рівняння до стандартного виду і розв'язуємо їх (кроки 3-5). Для розв’язаної задачі записуємо відповідь, зберігаємо у темі „Квадратні рівняння”. Включаємо до відповідного уроку (відкрити урок для редагування, додати задачу).

17. За допомогою програмного модуля *Графічні побудування* можна виконувати побудови різних графіків, зокрема, за допомогою елементарних перетворень, шукати точки перетину побудованої кривої та прямої, двох прямих, двох кіл та ін. При цього вибирають потрібну дію з *Довідника.* Програмний модуль *Графіки* має два режими опрацювання задач на графічні побудування – *Побудування* (рис.2.38) та *Демонстрація* (2.39), підтримує такі класи задач як *Числова пряма* і *Координатна площина*. Задачі, які розв’язуються у режимі *Математична модель*, не призначені для збереження в бібліотеці графічних побудувань та використання у складі уроку. Учитель має користуватися цим режимом для демонстрації безпосередньо у програмному модулі *Графіки*. Для того, щоб досліджувати залежності від кількох змінних графічно, потрібно виділити незалежну змінну, а іншим змінним надати числові значення, розглядаючи їх як константи та параметри. Отриману функцію від однієї змінної досліджують графічним методом. Змінюючи значення параметрів, будують декілька графіків.

З програмного модуля *Конструктор уроку* можемо завантажити модуль *Графіки* (*Інструменти \ Графіки*). Початок розв’язування здійснюється вибором пункту меню *Файл \ Нова задача* і записом умови задачі. Завершене побудування при потребі зберігають у бібліотеці графічних побудувань, надавши йому відповідний номер. Збережену задачу можна відкрити з бібліотеки, редагувати, демонструвати, додавати до уроку. Графічні побудування можна виконувати лініями різного кольору та товщини. Настроювання перед виконанням побудови здійснюються засобами меню *Опції*.

Перед тим, як будувати графіки, учень має визначити, до якого з типів функцій (лінійна, дробово-раціональна, квадратична або квадратично-радикальна) належить дана функція, знайти послідовність геометричних перетворень, які приводять до правильного побудування, виконати ці перетворення, щоб переконатися, що послідовність побудувань знайдено правильно.

18. Наведемо приклад виконання завдання на побудову графіка функції з модулем за допомогою елементарних перетворень: $y = \left|\left||x| - 2\right| - 1\right|$ (табл.2.5, рис. 2.38 – режим побудови, рис. 2.39 – режим демонстрації). Позначення для кроку 3 і кроку 5 – " $|y|$ " передбачає виконання перетворення $y=|f(x)|$. Це перетворення не слід плутати з перетворенням $|y|=f(x)$. Для кроку 4 акцентуємо увагу на тому, що у полі формули записано *+1*.

Таблиця 2.5.

№	Що будувати?	Вираз у полі формули, помітка на панелі побудувань	Опції, колір графіка	Команда з довідника
1	$y= x-2$	*f1 (y = x-2)*	авто	*f (y=kx+b)* вкладка *Формула-Графік*, побудова графіка лінійної функції
2	$y=\|x\| - 2$	вираз *f2* ($\|x\|$) відмічено *f1*	змінити колір	вкладка *Перетворення*, Симетричні відображення півплощин відносно осей (вісь *Oy*)
3	$y=\left\|\|x\| - 2\right\|$	вираз *f3* ($\|y\|$) відмічено *f2*	змінити колір	….. (вісь *Ox*)
4	$y=\left\|\|x\| - 2\right\|-1$	вираз *f4 (y+1)* відмічено *f3*	змінити колір	вкладка *Перетворення*, Паралельні перенесення у напрямках осей
5	$y = \left\|\left\|\|x\| - 2\right\| - 1\right\|$	вираз *f5* ($\|y\|$) відмічено *f4*	змінити колір, товщину лінії	вкладка *Перетворення*, симетричні відображення півплощин відносно осей (вісь *Ox*)

19. Розглянемо приклад доповнення бібліотеки графічних побудувань розв'язуванням системи рівнянь графічним способом. Необхідно знайти розв'язки системи двох рівнянь: $y = \sqrt{x+3}$ і $y = \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + 1$. Для запису умови завдання відкриваємо у модулі *Графіки* пункт меню *Файл \ Нова задача*. Формули в умову записують за допомогою редактора формул. Для побудови графіка першої функції у полі формули записують *f3 (* $y = \sqrt{x+3}$ *),* у вкладці *Формула – Графік* знаходять відповідний тип функції, виконують дію. Аналогічно для другої функції записують *f4 (* $y = \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x + 1$*)* і

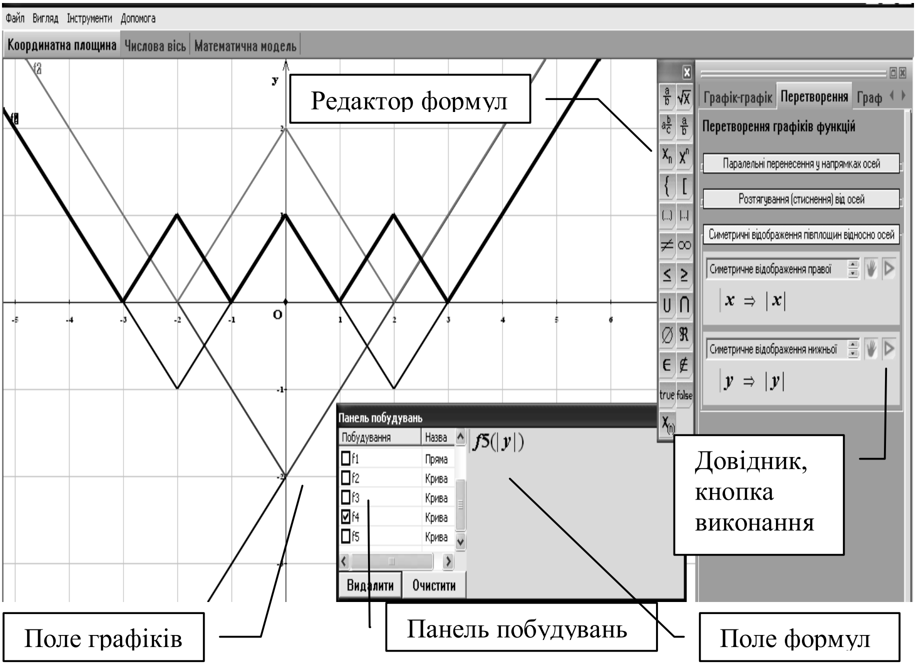


Рис.2.38. Вікно програмного модуля Графічні побудування (побудови)

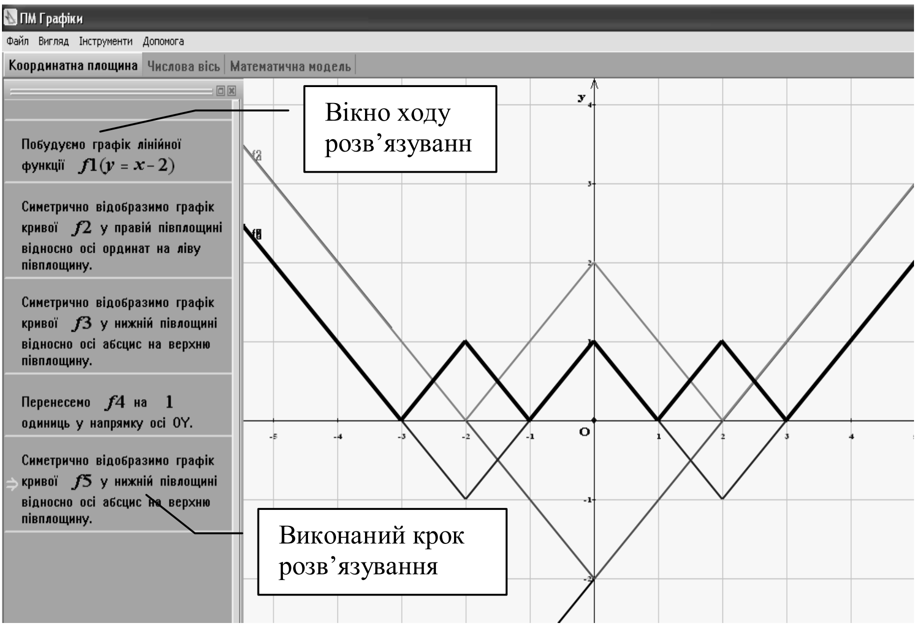


Рис. 2.39. Вікно *Графічні побудови*, режим *Демонстрації*

виконують побудову графіка квадратичної функції. Оскільки у вкладці *Графік-Графік* передбачено побудови точок перетину для графіків *Пряма-Пряма, Пряма-Крива, Коло-Коло,* то для даної системи побудову точок перетину за допомогою програмного модуля здійснити не можна. Для позначення розв'язків даної системи введемо точки *A(-2;1)* і *B(1;2)*. При цьому двічі виконують дію з вкладки *Формула-Графік \ Побудувати точку* (рис. 2.40).

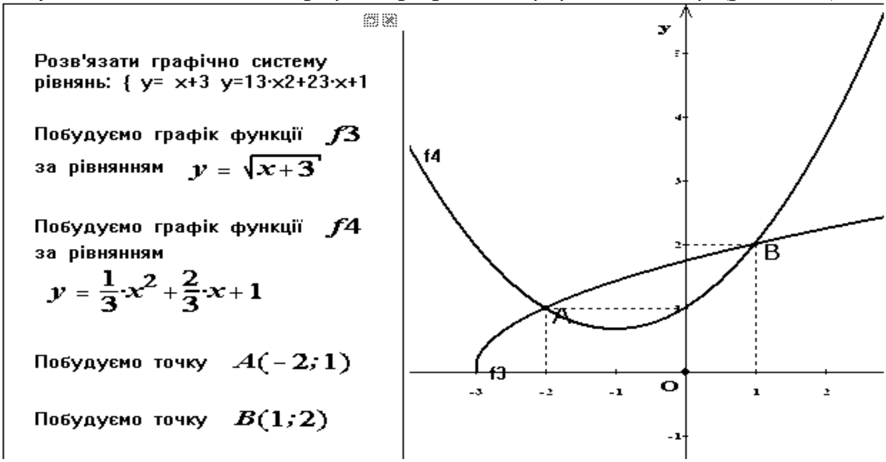


Рис. 2.40.Графічне побудування, режим *Демонстрація*

20. Проведення уроку вчитель може здійснювати у трьох режимах. Команда *Список учнів* відкриває вікно списку учнів, з якими проводиться урок. Режим *Груповий* – призначено для проведення уроку вчителем зі свого робочого місця. У цьому режимі вчитель пояснює новий матеріал, демонструючи конспекти (навчальні матеріали), які включені до складу даного уроку. Учні слухають пояснення вчителя та дивляться на навчальні матеріали, що відтворюються синхронно як у вікні ПМ *Конструктор уроку* на робочому місці вчителя, так і у вікні ПМ *Урок алгебри* на робочих місцях учнів. Режим *Індивідуальний* призначено для самостійного опрацювання учнями навчальних матеріалів уроку на своїх робочих місцях. Режим *Вибірковий* призначено для проведення уроку вчителем з групою учнів, яку вчитель має сформувати засобами *ПМ Конструктор уроку*. Інші учні (учні, які не увійшли у цю групу) працюють в індивідуальному режимі – кожен над своїм уроком.

Розглянутий програмний засіб має значні можливості для розвитку пізнавальних якостей, алгоритмічного мислення школяра як на уроці, так і в позаурочній діяльності учня.

Контрольні запитання і завдання

1. Охарактеризувати можливості ППЗ ТерМ, "Алгебра, 7-9 клас" для здійснення різнорівневого навчання математики.

2. Як можна формувати пізнавальну самостійність учнів, удосконалювати у них навички самоконтролю, якщо використовувати в навчанні математики програмні засоби ТерМ, "Алгебра, 7-9 клас"?

3. Підготувати добірку різнорівневих завдань для підсумкового оцінювання за 7-й клас, розв'язати завдання і зберегти у „Зошиті".

4. Працюючи у режимі „Конструктор уроку", підготувати добірку наочностей до уроку алгебри у 8-му чи у 9-му класі за допомогою ППЗ „Алгебра 7-9".

2.7. Бібліотека електронних наочностей “Геометрія, 7-9 клас”

У педагогічних вищих навчальних закладах та загальноосвітніх школах України апробуються ПЗНП “*Математика, 5 клас”, “Математика, 6 клас”, “Бібліотека електронних наочностей „Геометрія, 7-9 клас”, „Алгебра, 10 клас”, „Алгебра, 11 клас”, „Геометрія, 10 клас”, „Геометрія, 11 клас”.*

Детальніше зупинимося на характеристиці ППЗ „*Геометрія, 7-9 клас*” (ЗАТ „Мальва”, методисти М.І. Бурда, О.П. Вашуленко) і ППЗ **„***Алгебра, 11 клас*” (ДП НВП „Укрприборсервіс”, методисти Т.В. Колесник, Т.М. Хмара). Коректну інсталяцію ППЗ на комп’ютері забезпечує програма-інсталятор. Для запуску програми інсталяції необхідно запустити з диска файл „setup.exe”. ППЗ має два типи інсталяції – на одному комп’ютері чи в локальній мережі. Завантажити ППЗ „Геометрія, 7-9 *клас*” для роботи з бібліотекою електронних наочностей у режимі *Конструктор* можна виконуючи послідовно такі дії: Обрати: меню *Пуск → Програми → CJSC Malva → „Бібліотека електронних наочностей. Геометрія, 7-9 клас” → Бібліотека електронних наочностей. Геометрія, 7-9 клас”.*

1. Засіб ***„Геометрія, 7-9 клас***” [133] розроблений на дидактичних засадах *інтегрованість, конструктивність, інтерактивність та візуалізація. Інтегрованість* полягає в тому, що одну й ту ж наочність можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, побудова трикутників за основними елементами (двома сторонами і кутом між ними, стороною і прилеглими до неї кутами, трьома сторонами) призначена як для вироблення вмінь виконувати основні побудови, так і для самостійного “відкриття” учнями ознак рівності трикутників, для застосування цих ознак в типових ситуаціях. Інтегрованість забезпечується поданням наочно-образної, графічної інформації в поєднанні із знаково-символьною, спільний аналіз яких сприяє виробленню евристичних умінь. Для кращого усвідомлення суті нових геометричних фактів передбачена можливість проводити невеликі дослідження і опрацьовувати отримані числові характеристики.

Конструктивність забезпечується аналізом комп’ютерних зображень реальних предметів, перенесенням їх властивостей на відповідні моделі, де увага приділяється поелементному створенню. Внаслідок чого учень самостійно формулює означення нових понять, властивості геометричної фігури чи способи діяльності.

Під *інтерактивністю* розуміють можливість використання варіативних методичних технологій проведення уроків (шкільна лекція з ілюстраціями, групова, парна, індивідуальна робота, семінарське заняття тощо), підтримку активних методів навчання (проведення посильних навчальних досліджень, моделювання і конструювання геометричних об’єктів, логічна організація невеликих фрагментів навчального матеріалу).

Візуалізація забезпечується розробленими комп’ютерними динамічними моделями геометричних об’єктів. Пропонується їх перетворення (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині), що сприяє розвиткові образного мислення, творчих та евристичних його складових. Це дозволяє краще засвоювати знання, виробляти вміння і навички, формувати цілісні геометричні образи.

2. ППЗ створено згідно з чинною навчальною програмою з геометрії, затвердженою Міністерством освіти і науки України. Мета застосування ППЗ полягає в активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх самостійності в

опануванні знань, формуванні інформаційної та інших базових компетентностей особистості, посиленні позитивної мотивації навчання геометрії. Зміст і структуру ППЗ зорієнтовано на розв'язування навчальних завдань через впровадження сучасних педагогічних технологій, у тому числі інтерактивних форм та використання варіативної методики проведення уроків. Це може бути шкільна лекція з ілюстраціями, самостійна групова чи індивідуальна робота учнів, семінарське заняття, уроки повторення й узагальнення знань, виконання завдань творчого характеру. ППЗ унаочнює як теоретичну, так і практичну частини навчальної програми. Для роботи з ППЗ потрібно ознайомитися з настановою користувача та методичними рекомендаціями. Поради щодо застосування ППЗ для проведення занять вчителем та при самостійній роботі учнів викладено в документі „*Методичні рекомендації щодо використання в навчальному процесі педагогічного програмного засобу „Бібліотека електронних наочностей*".

Демонстрація підготовлених вчителем фрагментів уроків можлива з використанням мультимедійного проектора і дошки, що підключається до комп'ютера. ППЗ забезпечує такі види діяльності як пошук і добір наочностей, конструювання, редагування та їх перегляд. На рис. 2.41 представлено головне вікно ППЗ. У лівому верхньому куті розміщена панель роботи з файлами (1), справа – панель мінімізації / закриття вікна програми (3). У лівій частині вікна розташована панель переліків і змісту (4), у правій – робоча область (5), заголовок "активного" вікна (2), внизу – панель роботи з поточним уроком (6). ПЗНП „Бібліотека електронних наочностей „Геометрія, 7-9 клас" – це електронне видання, що містить набір мультимедійних компонентів, які відображають об'єкти геометрії, які вивчаються в 7-9 класах; програвач мультимедійних компонентів; простий у використанні редактор, що дозволяє вчителю формувати набори необхідних наочностей. Передбачено можливість роботи у режимах „Конструктор", „Уроки", „Підручник", „Статистика", „Інтернет", „Програвач уроків".

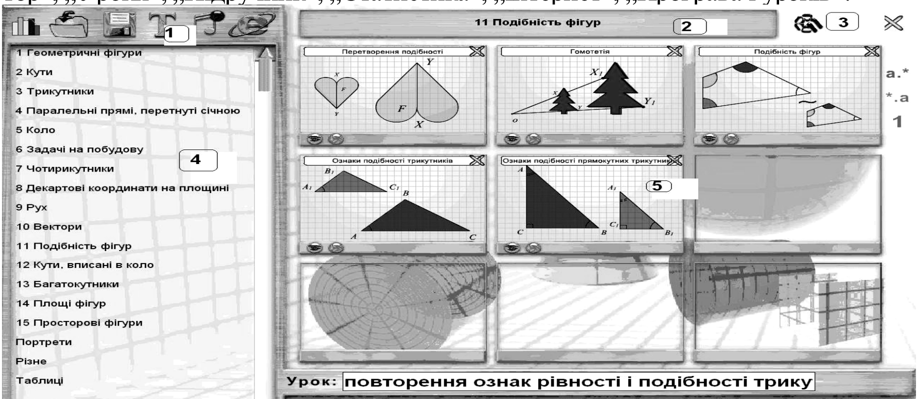


Рис. 2.41. Головне вікно ПЗНП „Бібліотека електронних наочностей „Геометрія, 7-9 клас" завантажене в режимі „Конструктор"

3. Використовуючи *Панель переліків і змісту*, можна здійснювати навігацію між структурними елементами бібліотеки наочностей, які відповідають розділам курсу „Геометрія, 7- 9 клас”. Переглядати та змінювати обраний урок можна використовуючи *Панель роботи з поточним уроком*. Наприклад, переглянемо урок до теми "Подібність трикутників". Для цього перейдемо до режиму *Уроки*. У переліку уроків знайдемо вибрану тему "Подібність трикутників (прямокутних)", відкриємо її у робочій області, натиснувши курсором на заголовку. Щоб переглянути урок, завантажимо його з робочої області до вікна поточного уроку. При наведенні курсора на розроблені елементи уроку весь урок виділяється жовтою рамкою. Тоді, виділивши урок рамкою, натискують ліву клавішу курсора. Буде створено копію поточного уроку, яку можна редагувати, починаючи з назви уроку і закінчуючи складом його елементів. Активізується перегляд змісту уроку "натискуванням" на кнопку біля слова *Перегляд*. Крім елементів з поясненнями ознак подібності трикутників, даний урок містить ще два елементи, використовувати які доцільно для актуалізації опорних знань та умінь учнів. Готуючись до уроку, вчитель відмічає у власному конспекті, які з кроків запропонованого елемента будуть використовуватися, на якому етапі уроку та з якою метою.

Відредагуємо даний урок, додавши до нього елемент "Ознаки рівності трикутників", щоб учні могли порівняти відповідні ознаки рівності та подібності трикутників. Щоб додати певний елемент до уроку, необхідно перейти до потрібного розділу бібліотеки наочностей і обрати мишкою елемент. Елемент автоматично додається в обраний кадр поточного уроку. Для цього з відкритим поточним уроком перейдемо до режиму *Конструктор*. Виберемо тему "Трикутники" та завантажимо її у робочу область. Знайдемо елемент "Ознаки рівності трикутників" і завантажимо його у вікно поточного уроку (виділити елемент жовтою рамкою, натиснути ліву клавішу мишки). Повторити з учнями ознаки рівності трикутників доцільно перед вивченням нового матеріалу. Якщо на панелі поточного уроку доданий елемент розташований п’ятим, то перемістимо даний елемент вліво на перше чи на третє місце, використовуючи при цьому управляючі клавіші панелі поточного уроку (при виділеному кадрі стрілка вліво). Для створення нового уроку необхідно на панелі роботи з поточним уроком у полі „Урок” ввести його назву і натиснути кнопку *Запам’ятати*. Відредагований урок зберігають (піктограма *Дискета* на панелі роботи з файлом), написавши замість фрази "Назвіть урок" його тему. До уроку можна додати текстові повідомлення, звукові файли. Далі буде розглянуте питання, як можна редагувати уроки шляхом імпортування елементів уроку, створених на іншому комп’ютері чи за допомогою іншого програмного забезпечення.

На рис. 2.42 представлено слайд для вивчення теми „Подібність фігур”. Внизу вікна подано ряд кнопок навігації, використовуючи які можна переглянути підготовлені до уроку слайди, в довільному порядку. Актуалізації потрібного для вивчення теми матеріалу сприяє оперативне подання графічно-символьних відомостей про раніше вивчені геометричні фігури, операційного змісту потрібних умінь.

На етапі мотивації навчання залежно від мети і завдань уроку рекомендується використовувати історичні довідки, портрети вчених-математиків, ілюстрації різних практичних ситуацій, які дають змогу обґрунтувати необхідність вивчення того чи іншого геометричного факту. Ефективному засвоєнню понять, способів діяльності та вивченню властивостей геометричних фігур сприяє динамічне унаочнення відповідних геометричних фігур, де виділяються істотні ознаки понять та здійснюється варіація неістотних ознак при збереженні постійними істотних. Це дає змогу учням самостійно формулювати принцип варіації і характеризувати істотні і неістотні ознаки. Застосування понять, властивостей і способів діяльності покращується завдяки пропонованій візуалізації практичних життєвих ситуацій. Динамічна наочність дає змогу складати і розв'язувати геометричні задачі за готовими малюнками, варіювати їх умови і вимоги, організовувати змістову роботу над розв'язаною задачею.

Рис. 2.42. Слайд до теми „Подібність фігур"

4. Електронна наочність передбачає візуалізацію граничних наближень при формуванні понять. Наприклад, в динамічних моделях для вивчення тем "Довжина кола", "Площа круга". Розгортання унаочнених поопераційних дій учня, ілюстрація їх застосування, сприяє кращому виробленню способів геометричної діяльності та рефлексивного ставлення учня до цієї діяльності.

Пропонується кілька тестових завдань. Наприклад, записати, які з даних трикутників подібні; тілам обертання поставити у відповідність фігури обертання (рис. 2.43); визначити величину вписаного кута та ін. Програмою передбачена можливість здійснення самоконтролю.

5. Можливий імпорт елементів наочностей (тексти, відеофрагменти, анімаційні фрагменти, малюнки тощо) для існуючої у користувача бібліотеки, але тільки таких файлових форматів, які підтримує дана програма, а саме – зображення (.swf, .jpg), таблиці (.tab), тексти (.txt), звуки (.mp3), уроки (.les). Розміщується наочність у поточний розділ бібліотеки відповідно

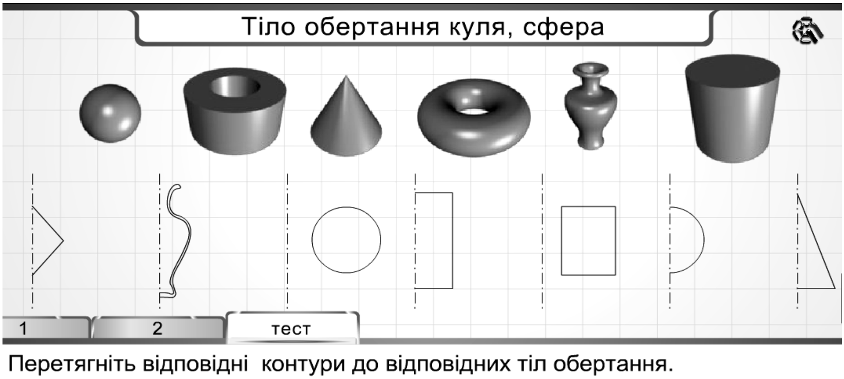


Рис. 2.43. Копія вікна з тестовим завданням

до наявної структури ППЗ. Для перегляду уроків можна використовувати не лише основну програму, але й додатковий її модуль „Програвач уроків".

Оскільки ПЗНП для уроків алгебри і геометрії в 10-11 класах, для уроків геометрії в 7-9 класах влаштовані дещо подібно, то детальніше на питанні імпортування елементів наочностей зупинимося для даного засобу. Наприклад, створимо розробку уроку про застосування переміщень фігур, композицію переміщень, створення орнаментів до теми "Геометрія українського орнаменту". Для цього використаємо наочності з посібника до теми "*Рух*". У режимі *Конструктор* завантажимо для нового уроку наочності *Рух \ Приклади центральносиметричних фігур*. Крім того, з бібліотеки малюнків імпортуємо візерунки для вишивання українських рушників, зразки орнаментів паркетів. Оскільки можна імпортувати зображення з розширенням jpg, то для збереження файлів у зазначеному форматі використаємо графічний редактор *Paint*. Вибираємо пункт меню *Правка \ Вставити зображення з файла*, змінюємо зображення до потрібних розмірів і зберігаємо у форматі *jpg* (*Зберегти як*). Наприклад, з назвою *uzor2.jpg* (закінчення набираємо малими буквами). Доречно буде прослухати з учнями фрагмент відомої української пісні про рушник. Тому імпортуємо також запис цієї пісні з колекції звуків. Послідовно виконуємо дії *Імпортувати – Огляд – Місцезнаходження файла – Вибір файла – Підтвердження імпорту файла mp3*. На рис. 2.44 комірка із звуковим фрагментом розташована в центрі. Для уроку доцільно підготувати один-два текстових фрагменти з запитаннями, які допоможуть краще проаналізувати візерунки, фрагменти з поясненнями про фігури, що мають симетрію повороту, ковзну симетрію. Ініціюють створення текстового повідомлення натисненням на піктограму з великою буквою "Т". Після цього записують заголовок повідомлення (може бути номер завдання), подають запитання чи пояснення до завдання, вказують ім'я файла, в якому зберігатиметься дане повідомлення. Завершується створення повідомлення (на рис.2.44 внизу зліва) операцією зберігання файла.

Завантаживши необхідні наочності до *Панелі роботи з поточним уроком*, вводять назву нового уроку і натискують кнопку *Запам'ятати*. Щоб імпортувати

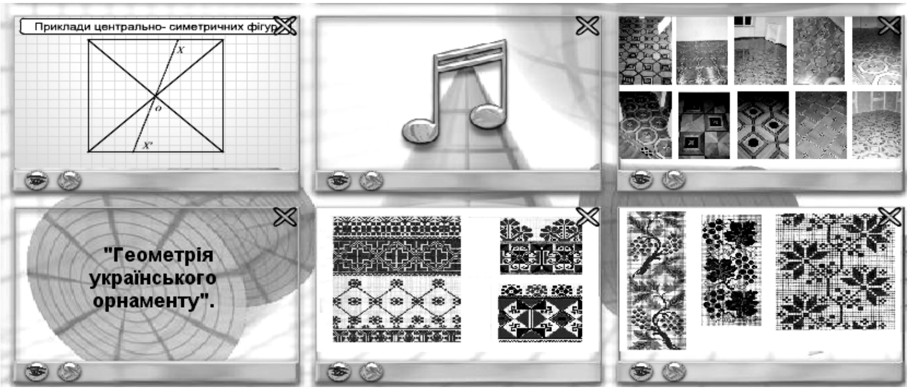


Рис. 2.44. Наочності до уроку "Геометрія українського орнаменту"

урок, розроблений на іншому комп'ютері, спочатку потрібно зареєструвати урок на новому місці (назва файла *LessonXX.chl* генерується програмою). В результаті імпортування існуючий файл замінюється потрібною оновленою версією, якщо назви файлів співпадають. Коли номер файла для імпорту відмінний (більший) від номера файла на комп'ютері, то файл на дискеті перейменовують. Розроблені уроки зберігаються у папці C:\Program Files \ CJSC_Malva \ Library_Geometry_7-9\assemble_Geometry\data\lessons, наочності зберігаються у папці відповідного розділу і теми C:\Program Files \ CJSC_Malva \ Library_Geometry_7-9\assemble_Geometry\data\9_ruch.

2.8. Педагогічний програмний засіб "Алгебра, 11 клас"

ППЗ „Алгебра, 11 клас" [132] створено згідно з чинною навчальною програмою з алгебри і початків аналізу. Завдяки використанню засобу можна вдосконалювати методику організації самостійної роботи учнів, враховувати широкий діапазон індивідуальних особливостей школярів (мислення, пам'ять, рівень підготовки до сприйняття і розуміння нових відомостей), будувати навчання з урахуванням цих особливостей, диференціювати процес навчання, здійснювати принцип алгоритмізації навчальної діяльності, забезпечувати інтенсивність роботи кожного учня, розвивати його здібності. Засіб призначений допомогти вчителю в організації продуктивної пізнавальної діяльності учнів при засвоєнні математичних знань, у виробленні стійких механізмів самонавчання, самовиховання і саморозвитку.

Розроблений ППЗ містить поурочний розподіл навчального матеріалу з курсу алгебри і початків аналізу 11-го класу, а також дидактичні матеріали для поточного, тематичного та підсумкового контролю навчальних досягнень учнів, які включають самостійні роботи, тематичні та підсумкові контрольні роботи, контрольні запитання і завдання, вправи для самостійного виконання, тестові завдання. Зміст дидактичних матеріалів диференційований за рівнем складності. Виконуючи контрольні роботи, здійснюють тематичний контроль навчальних досягнень учнів, а метою підсумкових робіт є підсумковий контроль рівня засвоєння певного розділу або ж всього курсу алгебри і початків аналізу в кінці навчального року. Контрольні запитання і завдання до кожної закінченої теми допоможуть усвідомити суть, зв'язки та окремі тонкощі математичної теорії, систематизувати та узагальнити навчальний матеріал, здійснити самоконтроль результатів його засвоєння. З цією ж метою дано і тестові завдання. Серед матеріалів ППЗ є довідкові відомості, а саме, умовні позначення, словник термінів, довідник, в якому вміщено основні формули до певного розділу курсу, список рекомендованої літератури. На рис. 2.45 зображено головне вікно ППЗ „*Алгебра, 11 клас*". Як і в розглянутому вище засобі, передбачена можливість працювати в режимах „Уроки", „Конструктор уроків" та ін. Коректну інсталяцію ППЗ на комп'ютері забезпечує виконання програми-інсталятора. Для ініціалізації програми інсталяції необхідно запустити з диска файл „*setup.exe*". Після запуску з'явиться діалогове вікно. Для інсталяції повного курсу „Алгебра, 11 клас" необхідно обрати режим інсталяції „*Повна*" та натиснути кнопку „*Далі*". За замовченням ППЗ буде встановлено у папку *C:\Program Files\UkrPribor Service\ Algebra_11\assemble_ Algebra_11*. На рис. 2.45 представлено головне вікно ППЗ, у якому подано панель роботи з файлами (1), заголовок "активного" вікна (2), мінімізації / закриття вікна програми (3), панель переліків і змісту (4), робоча область (5), панель роботи з поточним уроком (6).

До значної кількості задач з бібліотеки наочностей створено по два

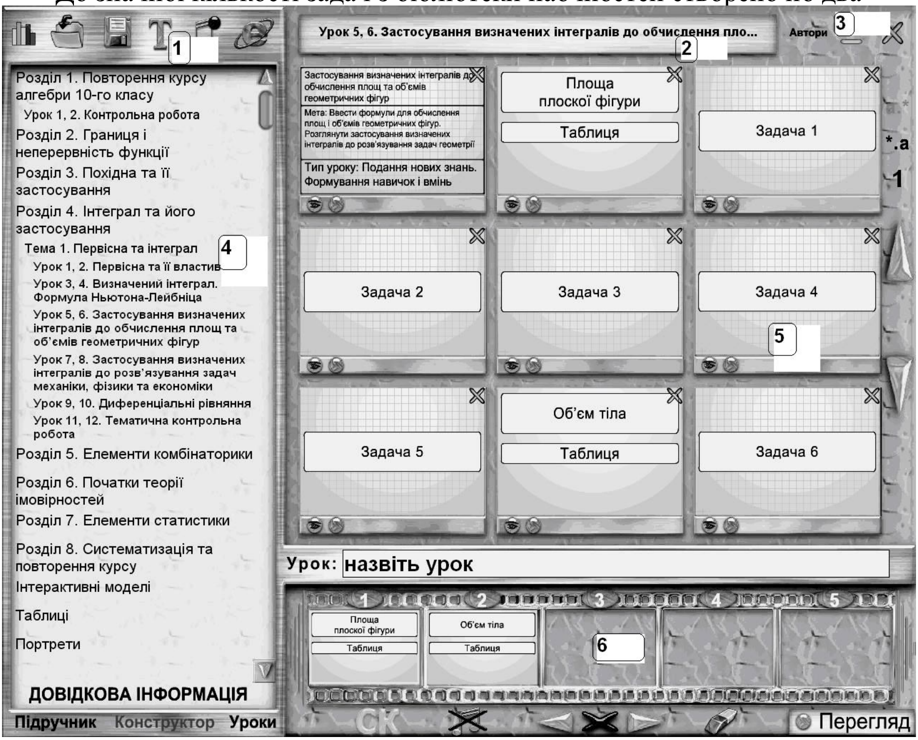


Рис. 2.45. Головне вікно ПЗНП „Алгебра 11" (режим „Конструктор")

слайди. У першому подано умову завдання, у другому – його розв'язання. Завдяки зазначеній організації подання відомостей створюються сприятливі умови для формування у школярів пізнавальних якостей, ефективного впровадження інтерактивних технологій навчання.

Розглянемо, як використовуючи даний програмний засіб, вчитель може провести урок на тему *"Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики"* за поданим нижче планом.

Мета уроку. Ввести формули для обчислення деяких фізичних величин за допомогою визначених інтегралів, розглянути приклади застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач фізики, техніки.

Тип уроку. Засвоєння нових знань.

Ключові слова: визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца, шлях, робота, маса, кількість теплоти, заряд.

Засоби навчання та обладнання. Підручник і ПЗНП "Алгебра, 11 клас".

План уроку.

I. Перевірка домашнього завдання та актуалізація опорних знань учнів (повторення формули Ньютона-Лейбніца, властивостей визначених інтегралів, формул з фізики для обчислення шляху, роботи, заряду, кількості теплоти, маси).

II. Повідомлення теми, мети, завдань уроку. Мотивація навчальної діяльності. Важливою передумовою ефективності вивчення і засвоєння нових навчальних математичних понять є використання мотиваційного фактору. Усвідомлення можливості застосовувати отримані на уроці знання у практичному житті, при вивченні фізики, економіки обумовить цілеспрямовану діяльність учнів.

III. Сприйняття та усвідомлення нового навчального матеріалу. За допомогою таблиці слід з'ясувати як обчислюється переміщення, робота, кількість теплоти, маса стержня, заряд для змінних величин швидкості, продуктивності, теплоємності, густини, струму відповідно. Усвідомлення отриманих знань, пробні вправи з перевіркою за електронною наочністю.

IV. Застосування набутих навичок та вмінь у процесі виконання вправ.

V. Підсумки уроку і повідомлення домашнього завдання.

У п. 3.6 додатково розглянемо, як можна провести підсумкове заняття на застосування визначених інтегралів. Акцент буде зроблено на впровадженні інтерактивного прийому "Спільний пошук відомостей". У розробці даного уроку важливо показати, як вчитель разом з учнями може удосконалювати вже розроблені програмні засоби навчального призначення.

Переглядати та змінювати обрані уроки можна, якщо використовувати *Панель роботи з поточним уроком* аналогічно до того, як виконували це для ПЗНП "Геометрія, 7-9 клас". У п.2.7 детально описано, наприклад, можливості редагування уроків шляхом імпортування окремих елементів.

Переглянемо урок № 29 (7) "Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики" з бібліотеки уроків ПЗНП "Алгебра, 11 клас". Для цього перейшовши до режиму *Уроки*, у переліку знайдемо урок з вказаним номером, відкриємо його у робочій області, натиснувши курсором на заголовку. Щоб переглянути урок і мати змогу його редагувати, завантажимо добірку елементів з робочої області до вікна поточного уроку. До зазначеного уроку пропонується включити сім елементів: 1) кадр, в якому записана тема уроку, мета, тип уроку; 2) таблиця з формулами для обчислення величини шляху при змінній швидкості руху тіла; маси тонкого стержня з неоднорідною лінійною густиною; роботи змінної сили; заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за певний проміжок часу; кількості теплоти, що виділяється чи поглинається тілом, за умови, що питома теплоємність залежить від температури; 3) для різних типів завдань пропонується по одному прикладу (5 елементів). В цілому, матеріалу для проведення одного уроку з використанням ППЗ достатньо.

З'ясуємо, як можна редагувати даний урок. Наприклад, додати до нього елемент "Формула Ньютона-Лейбніца" для актуалізації опорних знань та умінь учнів. Для цього з відкритим поточним уроком перейдемо до режиму *Конструктор*. Виберемо розділ 4, тему 1 "Первісна та інтеграл", урок 3-4 "Формула Ньютона-Лейбніца" та завантажимо його у робочу область. Серед запропонованого знайдемо елемент "Формула Ньютона-Лейбніца" і завантажимо його у вікно поточного уроку. Оскільки на панелі поточного уроку доданий елемент розташований восьмим, то перемістимо його вліво на друге місце, використовуючи при цьому навігаційні клавіші панелі поточного уроку (при виділеному кадрі стрілка вліво). Для створення нового уроку необхідно на панелі роботи з поточним уроком у полі „*Урок*" ввести його назву і натиснути кнопку *Запам'ятати*.

Для проведення уроку в класі з поглибленим вивченням математики додамо ще кілька завдань до бібліотеки наочностей. Зокрема, задачі на обчислення роботи при піднятті вантажів – на викачування води з бочки (№9 – нумерація відповідно до завдань у ПЗНП), на побудову піраміди Хеопса (№10). Якщо учні вже вивчали логарифмічну функцію, доцільно запропонувати завдання на визначення роботи, яку виконає ідеальний газ та інші.

Наочності до уроку № 7(29) розміщені у розділі 4 "Інтеграл та його застосування", темі 1 " Первісна та інтеграл". Тому перед тим, як доповнювати бібліотеку новими наочностями, необхідно урок 7-8 з вказаного розділу і теми у режимі *Конструктор* завантажити у робочу область. Тоді всі текстові повідомлення, імпортовані файли зображень, звукові файли будуть зберігатися у папці *C:\Program Files\UkrPriborService \ Algebra_11 \ assemble_Algebra_11 \ data \ rozdil_4\Tema_1\Lesson_7_8.* Для створення текстового повідомлення "натиснемо" на піктограму **Т** панелі роботи з файлом. У відкритому вікні для створення текстового повідомлення запишемо назву нової задачі "Задача № 9 на викачування води з бочки", введемо її умову і назву файла, під якою задача буде зберігатися у бібліотеці наочностей *z_9*. Аналогічно створюємо текстові повідомлення для задач №№ 10, 11, 12. Окремі формули, верхні чи нижні індекси в умовах задач можна записати у такому форматі, як записували їх при користуванні засобом GRAN.

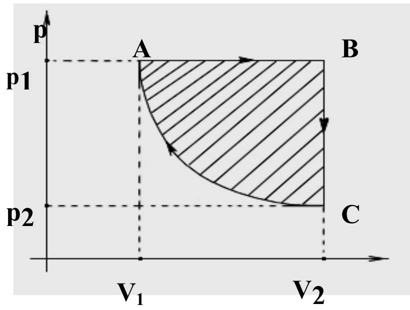
№ 9. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з циліндричної бочки глибиною *4 м*, з радіусом основи *2 м*.

№ 10. Піраміда Хеопса є правильною чотирикутною пірамідою висотою *147 м*, в основі якої лежить квадрат зі стороною *232 м*. Знайти роботу проти сили тяжіння, затрачену при будівництві піраміди.

№11. Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на 100 км шляху визначається формулою

$Q=18-0,3v+0,0003v^2$, $30<v<110$. Визначити середню витрату бензину, якщо швидкість руху *50-60 км/год*.

№12. Ідеальний газ в об'ємі $V_1=1м^3$ при тиску $p_1=3\cdot10^5$ *Па* здійснює коловий цикл за 3 етапи. Спочатку газ при сталому тиску нагрівають до температури, при якій його об'єм збільшується в три рази. Після цього він при сталому об'ємі охолоджується до температури, при якій його тиск дорівнює $p_2=10^5$ *Па*. З цього стану газ повертається у початковий стан при сталій температурі. Обчислити роботу, виконану газом.



Крім умов завдань, бажано подати і деякі нотатки з розв'язаннями задач чи підказками для обчислення. Тобто, створити ще одне текстове повідомлення для кожної задачі чи імпортувати розв'язання як зображення (файл з розширенням jpg), якщо запис містить значну кількість формул. Для задачі № 9 можна подати такі нотатки: "Для розв'язування задачі розіб'ємо циліндр паралельними основі площинами на тонкі шари. Виділивши один з них на глибині y і позначивши його товщину та об'єм відповідно через Δy та ΔV, отримаємо $\Delta V=\pi R^2\Delta y$ ($м^3$). Вага води ΔQ в знайденому об'ємі буде $\Delta Q = 1000\pi R^2\Delta y$ (т), оскільки $1м^3$ води важить 1 т. Щоб викачати воду, яка знаходиться в розглянутому шарі, його необхідно підняти до краю бака, тобто на висоту y. Робота ΔP, яка здійснюється при цьому виразиться так: $\Delta P=\Delta Q\, y= 1000\pi R^2 y\Delta y$ (1). При послідовному підніманні до краю бака кожного шару, починаючи з першого та закінчуючи останнім, виконується в кожному випадку робота, яка визначається рівністю (1); при цьому y змінюється від 0 до H. Запис для виконаної роботи матиме вигляд $\sum 1000\pi R^2 y\Delta y$. Але отримана величина роботи тільки наближена. Щоб знайти шукану роботу, будемо необмежено збільшувати число поділок циліндра площинами. Тоді вся робота обчислюватиметься за допомогою визначеного інтеграла.

Малюнок до завдання можна виконати в графічному редакторі Paint, зберегти з розширенням jpg та імпортувати у бібліотеку наочностей. Можливий імпорт до бібліотеки наочностей засобу файлів зображення (.swf, .jpg), таблиць (.tab), текстів (.txt), звуків (.mp3), уроків (.les).

Для задачі № 10 доцільно імпортувати як фото з єгипетськими пірамідами, так і підказку для перевірки правильності записаного інтеграла для обчислення роботи по зведенню піраміди Хеопса (рис. 2.46). Для g – прискорення сили тяжіння, H – висоти піраміди, x – висоти від основи до виділеного шару піраміди, ρ – густини каменю складаємо вираз

$$A = A(H) = \int_0^H dA = g\rho \frac{a^2}{H^2}\int_0^H x\cdot(H-x)^2\, dx \cdot$$

Щоб додати певний елемент до уроку, необхідно перейти до потрібного розділу бібліотеки наочностей і обрати мишкою елемент. Елемент автоматично додається в обраний кадр поточного уроку.

Для завдання № 12 імпортуємо малюнок, який демонструє коловий процес і створюємо текстове повідомлення з підказкою – рівнянням Менделєєва – Клапейрона $pV= mRT/\mu$. Робота при здійсненому коловому процесі чисельно дорівнює площі криволінійного трикутника ABC.

Імпортовані наочності для уроку "Застосування визначених інтегралів"

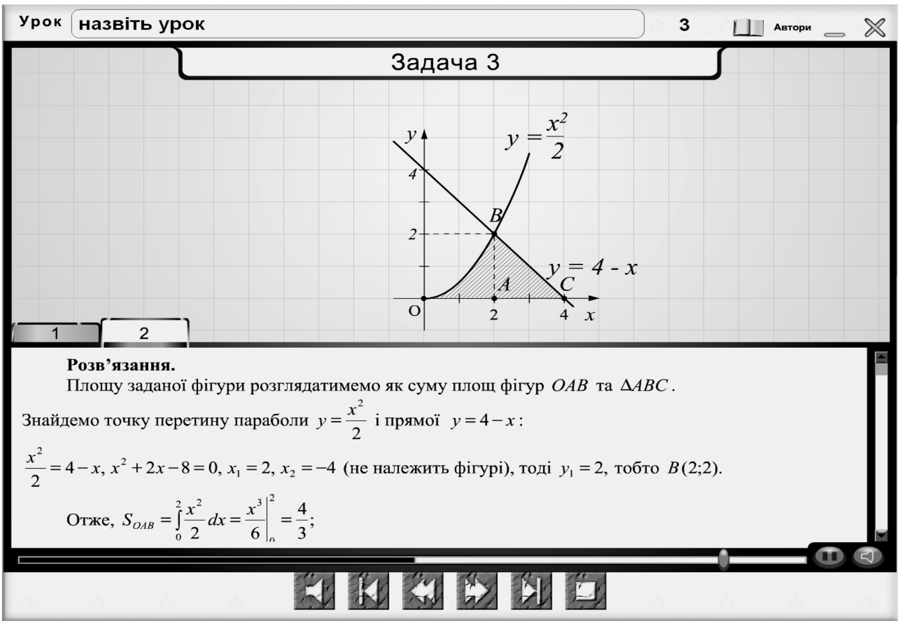


Рис. 2.46. Наочність до задачі на обчислення площі фігури з використанням визначених інтегралів

2.9. ППЗ "Геометрія, 11 клас "

ППЗ „Геометрія, 11 клас" [135] – це електронне видання, яке містить набір мультимедійних компонентів, що відображають об'єкти геометрії, які вивчаються в 11 класі, програвач мультимедійних компонентів, простий у використанні редактор, який дозволяє вчителю формувати набори необхідних наглядних матеріалів. ППЗ „Геометрія, 11 клас" створено згідно з чинною навчальною програмою з геометрії, затвердженою Міністерством освіти і науки України. Як і в розглянутих вище засобах, мета використання ППЗ полягає в активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх самостійності в опануванні знаннями, посиленні позитивної мотивації до вивчення геометрії. Зміст і структуру ППЗ зорієнтовано на розв'язування навчальних завдань. Розглянуті завдання можуть бути включені до шкільної лекції, семінарського заняття, уроків повторення і систематизації знань. Використання засобу може відіграти важливу роль в організації самостійної, групової чи індивідуальної роботи учнів. Оскільки більша частина завдань подається з підказкою чи з відстрочкою висвітлення ходу розв'язування, то така подача матеріалу сприяє впровадженню інтерактивних форм навчання, формуванню пізнавальних якостей учнів.

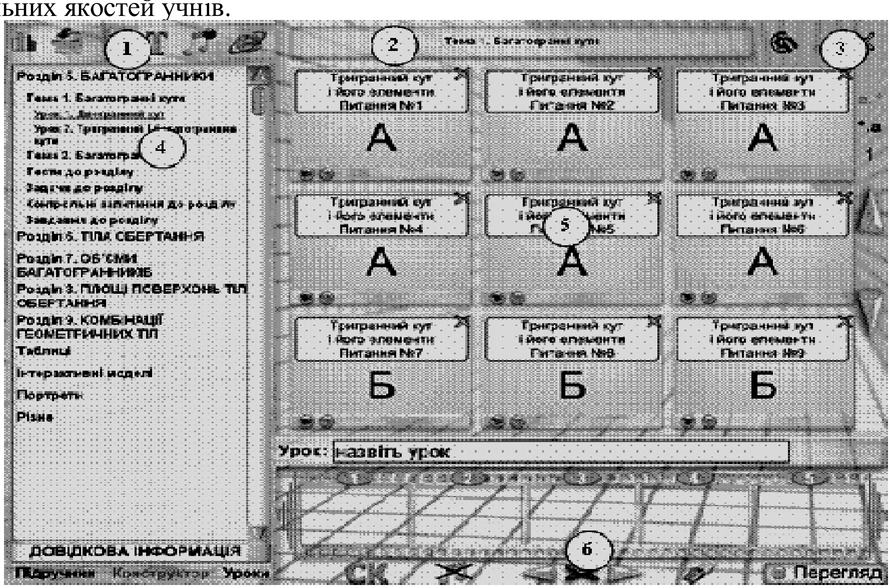


Рис. 2.47. Вікно програми „Геометрія, 11 клас" в режимі „Конструктор"

За замовченням ППЗ буде встановлено у папку *C:\Program Files\CJSC Malva\ Geometry_11\assemble_Geometry11*. Після інсталяції програми в меню „Пуск" у розділі „Всі програми" у папці „CJSC Malva" знаходимо посилання на два програмних модулі: *ППЗ Геометрія 11 клас і Програвач уроків*. За допомогою першого модуля можна вводити базові елементи бібліотеки (тексти, відеофрагменти, аудіофрагменти, анімації, тестові завдання тощо) курсу геометрії в 11 класі, переглядати існуючі уроки, додавати нові чи видаляти окремі із створених раніше. У модулі „Педагогічний програмний засіб Геометрія 11 клас” реалізовані три основні режими: *Конструктор, Уроки, Підручник*. Крім того, є додаткові режими *Статистика, Імпорт, Додавання текстового пояснення, Запис звукового фрагмента.* Після завантаження програми буде запропоновано роботу користувача у режимі „*Конструктор*” (рис. 2.47).

Основні елементи вікна: 1 – Панель роботи з файлами, 2 – Заголовок активного вікна, 3 – Панель мінімізації/закриття вікна програми, 4 – Панель переліків і змісту, 5 – Робоча область, 6 – Панель роботи з поточним уроком.

Для отримання додаткових відомостей слід натиснути кнопку „Додаткова інформація”. При цьому з’явиться вікно вибору типу даних (рис. 2.48, 2.49).

Рис. 2.48. Вікно вибору довідкових даних

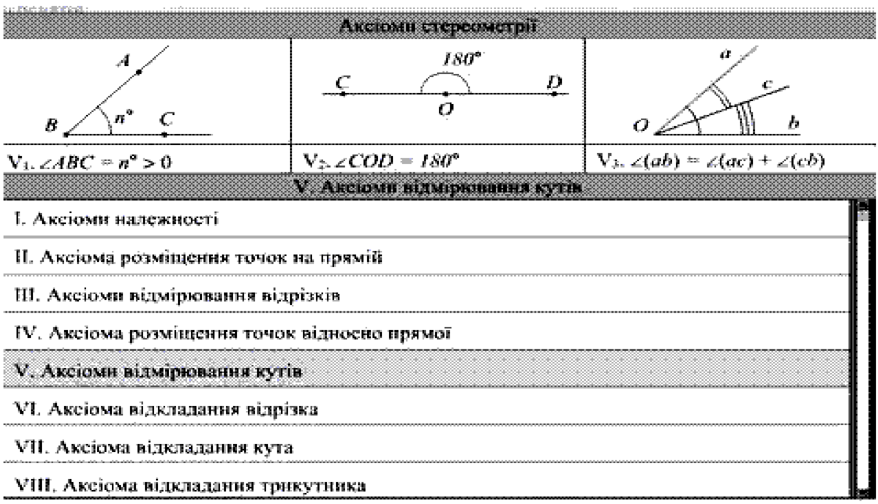


Рис. 2.49. Вікно довідки „Аксіоми”

Базовий елемент „Конструктор завдань (запитань або вправ)” містить декілька варіантів завдань/запитань, але користувач може самостійно дібрати завдання для роботи на уроці. Після формування завдання для конкретного учня, вчитель може отримати завдання на паперовому носії. Для цього потрібно натиснути кнопку „Друк”.

Наведемо приклад розробки уроку, на якому можна застосувати ППЗ “Геометрія, 11 клас”. Тема уроку „Об’єм призми”. Дидактична мета уроку – виведення формули для обчислення об’єму призми; формування умінь знаходити об’єм призми, об’єм похилої призми. На уроці планується використовувати такі засоби навчання як підручник і ППЗ. Урок доцільно провести за планом: 1) перевірка домашнього завдання, відтворення і корекція опорних знань учнів, 2) актуалізація знань про призму, її види та елементи (розділ 5, уроки 4, 5), 3) сприйняття та усвідомлення нового матеріалу, що передбачає доведення теореми про об’єм прямої призми та розв’язування задачі на знаходження об’єму похилої призми, 4) закріплення вивченого, 5) підсумки та повідомлення домашнього завдання. Програмний засіб можна використовувати як для актуалізації опорних знань учнів, так і під час доведення теореми. Якщо за допомогою ППЗ продемонструвати учням як трикутну призму добудовують до паралелепіпеда, а довільну призму розбивають на скінченну кількість трикутних призм, то учням простіше буде здійснити доведення теореми самостійно. Підготовлено наочності і для пропонованої задачі на відшукання об’єму похилої призми (розділ 7, урок 4). Динамічна трансформація похилої призми в пряму шляхом переміщення однієї її частини, що відтинається перпендикулярним до бічних ребер перерізом, на іншу є вдалим вирішенням проблеми відтворення цього процесу в уяві учнів. Для закріплення вивченого матеріалу у розробленому ППЗ пропонуються запитання для самоперевірки, а також набір вправ з готовими відповідями. Це допоможе вчителю організувати самостійну роботу учнів з можливістю допомоги тим учням, які цього потребують. Розроблено також набори вправ, які можна запропонувати школярам для домашнього завдання.

Оскільки в п.3.3. будемо розглядати побудови перерізів многогранників за допомогою програмних засобів GRAN-2D і GRAN-3D, то переглянемо копії екранів з побудовами перерізів за допомогою даного засобу (рис. 2.50, 2.51, 2.52). Щоб описати суть методу внутрішнього проектування, створено три слайди. Прослухавши звукові файли до першого чи другого слайду, учень може ввімкнути *Паузу* і спробувати самостійно побудувати переріз. На третьому слайді подано побудований переріз призми (рис. 2.51). Для вивчення теми „Зрізана піраміда” створено слайди як для побудови зрізаної піраміди, так і для демонстрації наслідків, які можемо отримати, якщо досліджувати властивості побудованого перерізу (рис. 2.52).

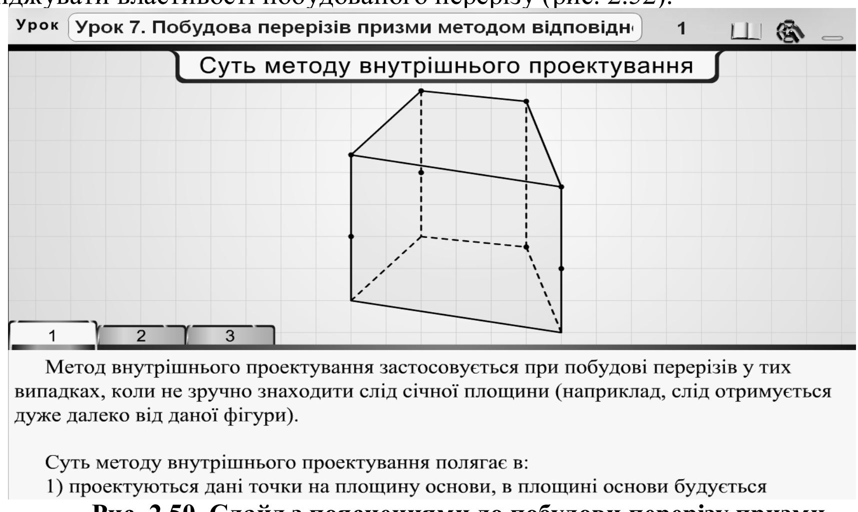
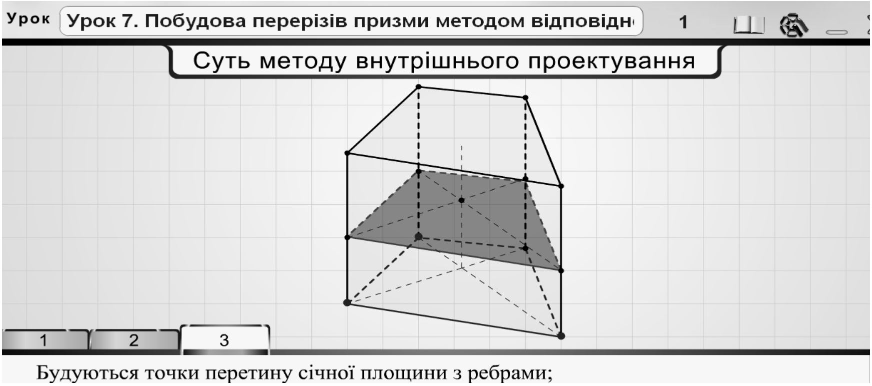


Рис. 2.50. Слайд з поясненнями до побудови перерізу призми



Слайд з побудованим перерізом призми

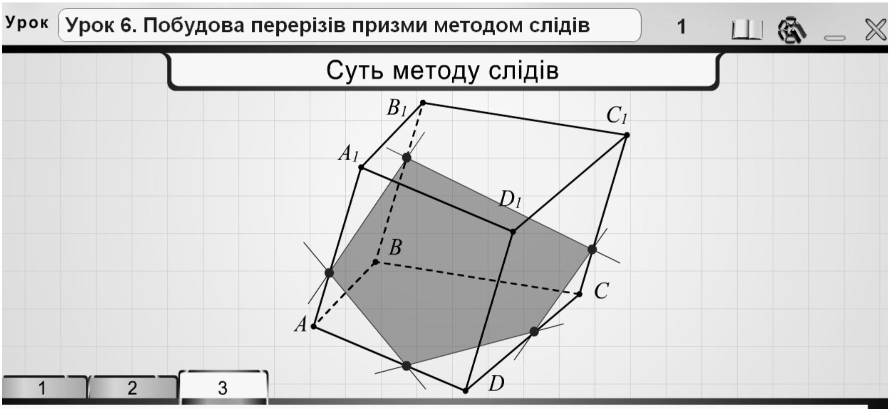


Рис. 2. 51. Побудовано переріз призми методом слідів

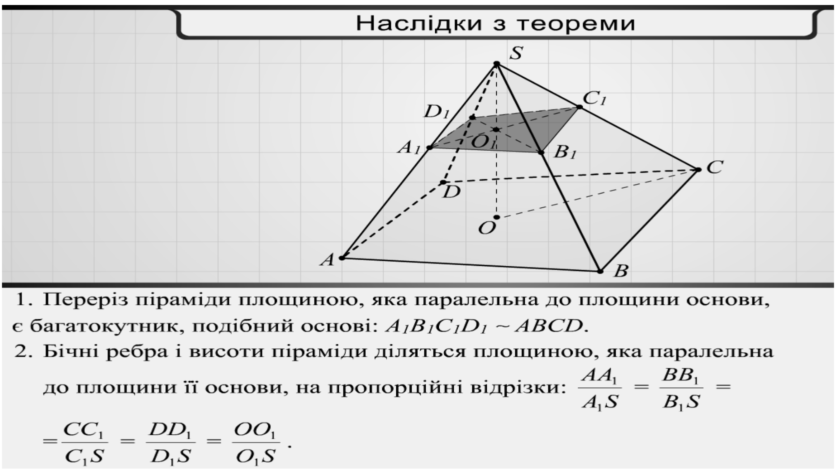


Рис. 2.52. Слайд до уроку „Зрізана піраміда”. Наслідки з теореми

2.10. Математика, 5 клас

ПМК ***"Математика, 5-6 клас"*** [129] для загальноосвітніх закладів призначений для викладання та вивчення математики в 5-6 класі загальноосвітніх закладів, охоплює чинну навчальну програму, затверджену Міністерством освіти та науки України. Розробники засобу – підприємство „Контур" (м. Рівне), методисти А.М. Капіносов, Г.М. Янченко та ін.

Урок в ПМК – це сукупність зображень, відеофрагментів, текстових пояснень, тестових запитань, що використовує вчитель при проведенні одного заняття з використанням ПМК. Урок складається з певної кількості кроків. Крок – це частина уроку, що містить сукупність зображень, відеофрагментів, тексту, об'єднаних за певною ознакою (наприклад, пояснення властивості, явища). Крок складається з одного або декількох кадрів. Кадр – це частина кроку, що висловлює, демонструє певну властивість, явище, думку. Елемент кадру – окреме зображення, відеофрагмент, текст, тестове запитання. Кожен урок розкриває конкретну тему згідно з навчальною програмою та містить засоби для пояснення необхідної теми: текст, формули, статичні та динамічні схеми, моделі, анімації, аудіо- та відеофрагменти, малюнки, світлини тощо. Для перевірки знань передбачено контрольні запитання та завдання, задачі, тести для самоконтролю та контролю. Відомості про результати роботи учнів учитель може переглядати на головному комп'ютері у зведеному вигляді та по кожному учню окремо. Крім того, програмний засіб містить довідникові відомості: довідку по роботі з ПМК, словник термінів і понять, історичну довідку, додатки (таблиця простих чисел, координатна площина).

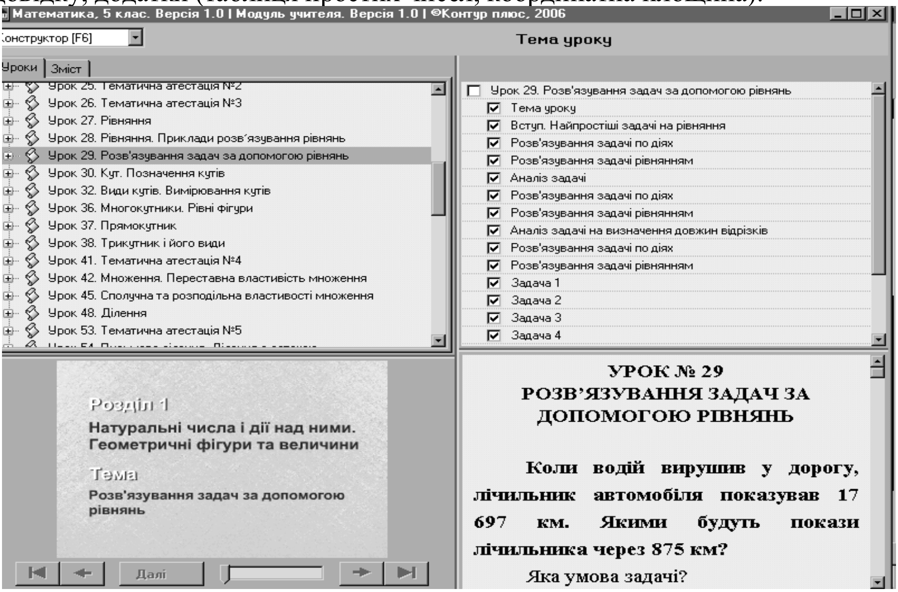


Рис. 2.53. Копія екрана ППЗ „Математика, 5 клас". Режим „Конструктор"

Для встановлення курсу "Математика, 5 клас" у вікні, що з'явиться, необхідно ввести текст “X:\Математика, 5 клас_Setup.exe”, де X - літера, якій відповідає CD-ROM, дисковода для читання компакт-дисків. ПМК працює в режимах учителя, уроку, учня, підручника, конструктора. Важливим засобом є *Конструктор уроків*, за допомогою якого вчитель може створити уроки за власною методикою, а при потребі відредагувати запропоновані уроки (рис. 2.53).

Для вибору режиму необхідно скористатися меню, яке розташоване у лівому верхньому куті екрана. У режимі „*Підручник*” ліва частина екрана відображає навігаційне дерево, а права – методичні рекомендації та текстові відомості для обраної теми чи уроку. Для того, щоб вибрати необхідний урок, потрібно знайти його за допомогою дерева навігації і активізувати натисканням курсора.

Оскільки при вивченні математики складність навчання обумовлюється великою кількістю рутинних обчислень, які принципово не впливають на логіку розв’язування задач, то для учня важлива побудова ходу розв’язання математичної задачі, розвиток і сприйняття евристики у виучуваному матеріалі, динамічна подача величин і їх відношень, ілюстрація практичних дій із математичними об’єктами, а не лише отримання відповіді чи готових результатів. Завдяки використанню на уроці ППЗ „Математика, 5-6 клас”, вчитель зможе вивільнити час для творчого розвитку учнів. Засіб може бути використаний учителем для підготовки до уроку, для пояснення нового матеріалу, для створення власних уроків і редагування існуючих, для формування та закріплення навичок розв’язування вправ, передбачених програмою, для проведення тестового контролю знань, індивідуальних і факультативних занять. До складу навчального матеріалу включено понад 100 уроків за програмами 5 і 6 класів, наведено календарно-тематичне планування.

На прикладі уроку формування знань, умінь і навичок (5-ий клас, урок № 29) розглянемо, як можна подати учням тему „Рівняння. Розв’язування задач”. Дидактична мета уроку – навчити учнів розв’язувати задачі різними способами. Мета застосування ППЗ – формувати навички аналізу і розв’язування задач різними способами, уміння встановлювати зв’язки між величинами в умовах задач. На етапі пояснення нових знань за допомогою ППЗ формуємо навички поетапного аналізу умови задачі. Паралельно з текстом на моніторі подається дикторський супровід.

Наведемо перелік задач, які пропонуються учням для розв’язування:

1. Коли водій вирушив у дорогу, лічильник автомобіля показував 17 697 км. Якими будуть покази лічильника через 875 км?

2. Під час виборів за одного кандидата проголосувало 39 859 виборців, а за іншого – на 1 562 виборця менше. Скільки виборців проголосувало за цих кандидатів разом?

3. Сума довжин двох відрізків дорівнює 127 см. Перший відрізок довший від другого на 15 см. Визначте довжини відрізків.

На другому кроці, щоб проаналізувати завдання, учням ставляться запитання, а після паузи подається на них відповідь. Приклади запитань: Яка умова задачі? Яке запитання задачі? Які величини зустрічаються в задачі? Які числові значення величин у задачі? Як по-іншому сформулювати запитання? Які зв’язки між числовими значеннями в задачі?

Мета третього кроку – розв’язування задачі, ілюстрація розв’язку задачі. Для першого завдання отримуємо 17 697 + 875 = 18 572 (км). Відповідь: покази лічильника

– 18 572 кілометри. Учнів просять поміркувати, чи можна розв’язати задачу по діях?

Мета четвертого кроку – формування навичок розв’язування задач різними способами. Заключний крок – розв’язування за допомогою рівняння. Для завдання №1 з’ясовують, що спосіб розв’язування задачі по діях кращий, ніж за допомогою рівняння.

До значної кількості завдань окремим кроком подається схематичний малюнок (рис. 2.54, рис.2.55). В окремих слайдах малюнки динамічні. Наприклад, до завдання №3 побудова малюнка (рис.2.54) супроводжується словами: „Поміркуймо, чи можна розв’язати задачу по діях? Зробимо малюнок. Першим побудуємо довший відрізок, другим – коротший. На довшому відрізку поставимо засічку навпроти кінця коротшого відрізка і напишемо, що довжина частини першого відрізка, на яку він довший від другого, становить 15 сантиметрів. З правого боку поставимо фігурну дужку і напишемо 127 см. Це означає, що сума довжин відрізків становить 127 сантиметрів. Розв’яжемо задачу по діях двома способами”.

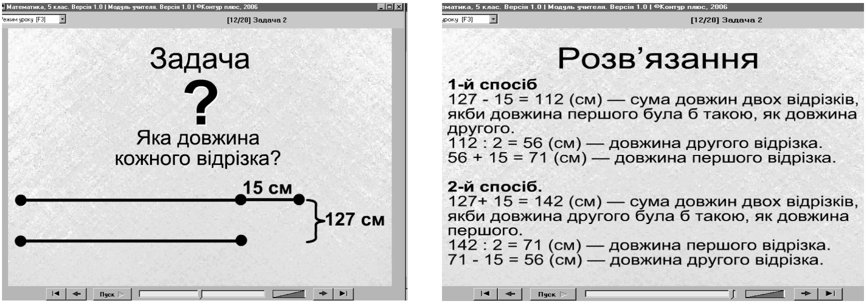


Рис. 2.54. Копії екранів з малюнком і розв’язанням завдання №3. Режим урок

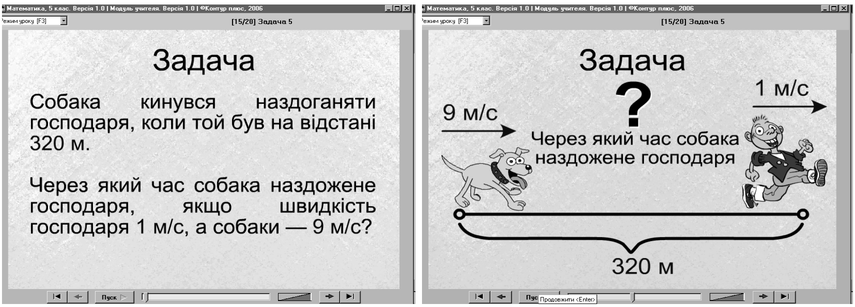


Рис. 2.55. Копії екранів з умовою задачі і схематичним малюнком до неї

Використовуючи ППЗ, можна здійснити поточний контроль та заключне оцінювання знань учнів. Пропоновані тестові завдання в ПМК призначені для контролю знань учнів на основі дворівневої шестибальної системи оцінювання при вивченні математики в 5 і 6 класах. Дидактичні матеріали для тематичних оцінювань подані в одному варіанті. Наведемо коротку характеристику рівневих завдань посібника. Завдання початкового рівня відповідають етапу первинного сприйняття і розуміння навчального матеріалу. Основними показниками навчальних досягнень є вміння розв’язувати елементарні завдання із застосуванням одного елемента знань на впізнання об’єктів і їх властивостей, виразів, на розпізнавання властивостей з виконанням однієї математичної операції, на наведення прикладів об'єктів. Традиційно у навчанні цей рівень формує вчитель через систему усних вправ, а контролюється вибірково в окремих учнів при фронтальному опитуванні. Із застосуванням ПМК контроль можна здійснювати систематично та індивідуально, що є значною перевагою в класно-урочній системі навчання. Завдання рівня 1 подані у формі тестових завдань закритого типу (вибір відповідей із заданих). Така форма завдань дозволяє за 8-10 хв. перевірити досягнення учнів на етапі первинного сприйняття і осмислення. Завдання середнього рівня (рівень 2) виражають результати оволодіння діями з математичними об'єктами на основі означень, теорем, правил у простих ситуаціях за алгоритмами та зразками. Завдання цього рівня — це традиційні обов'язкові результати навчання з теми. Основними показниками є вміння розв'язувати задачі на безпосереднє застосування теоретичного положення алгоритмічного типу до виучуваних об'єктів, на впізнання об'єкта у відомій, раніше проаналізованій, ситуації і застосування теоретичного положення алгоритмічного типу, за відомою схемою із застосуванням властивостей об'єкта, на дві логічні дії (підведення об'єкта під поняття і виведення наслідку). Тестові завдання збережено відповідно до міжнародного освітянського стандарту IMS QTI (Instructional Management Systems Question and Tests Interoperability) версії 2.0, який підтримують більшість виробників систем тестування та навчання.

У режимі *Конструктор* учитель може створити уроки за власною методикою, а також відредагувати запропоновані розробниками уроки. Перейти до цього режиму можна натисканням клавіші F6. Зміст курсу відповідно до тем, розділів, окремих елементів уроків знаходиться у вкладці *Зміст*. Ця вкладка містить матеріали відповідно до кожного уроку. Окремі кроки, тестові завдання, блоки самоперевірки можуть повторюватися в декількох уроках, тому для створення нового уроку спочатку необхідно створити нові кроки у *Змісті*, а потім сформувати урок у вкладці *Уроки*.

Для створення та формування уроку потрібно відкрити вкладку *Уроки*, натиснути правою кнопкою миші на рядок *Уроки курсу* і в меню, що з'явилося, вибрати рядок *Створити урок* та ввести тему уроку. Після підтвердження введення теми вона з'явиться останньою у дереві навігації. Для того, щоб додавати та редагувати кроки в уроці, слід натиснути на назві уроку правою кнопкою миші і в меню, що з'явиться, вибрати рядок *Редагувати урок*. У вікні праворуч від дерева навігації відобразиться список кроків цього уроку (Рис. 2.53). Якщо урок новостворений, цей список буде порожнім. Для того, щоб додати крок, потрібно знайти його в дереві навігації (вкладка *Зміст* або *Уроки*) і перетягнути на список кроків.

Для того, щоб крок тимчасово не відображався під час уроку, слід натиснути курсором на поле, що знаходиться ліворуч від назви кроку. Повторне натиснення на це поле відновить крок в уроці. Щоб видалити крок з уроку, потрібно натиснути на назві кроку правою кнопкою миші і вибрати пункт меню *Видалити крок*. Таке видалення не знищить крок з інших уроків і зі змісту. Для того, щоб видалити тему або фрагмент уроку, у вкладці *Зміст* на відповідній назві натискують правою кнопкою миші і в меню, що з'являється, вибирають рядок *Видалити*. Під час проведення уроку кроки відображатимуться в тій послідовності, в якій вони подані у списку. Кроки можна переставляти на іншу позицію в уроці, перетягуючи їх за допомогою вказівника мишки вгору або донизу.

Перед тим як розпочати підготовку до уроку (перегляд пропонованих кроків та їх аналіз), радимо відкрити текстовий редактор Microsoft Office Word, ввімкнути буфер обміну (пункт меню *Правка \ Буфер обміну*) для того, щоб у ході перегляду можна було зробити копії окремих екранів (на клавіатурі клавіша Print Screen). Пізніше окремі з вибраних копій вчитель зможе опрацювати за допомогою графічного редактора та імпортувати як окремі кроки уроку.

Розглянемо, як можна редагувати запропонований розробниками урок № 29 „Рівняння. Розв'язування задач". Для редагування перейдемо до режиму *Конструктор*, відкриємо вкладку *Урок*, завантажимо урок №29 (у правому верхньому куті висвітлюється список кроків, які пропонуються для використання при вивченні теми). Якщо вчитель планує на уроці за допомогою ППЗ не розглядати першу задачу, а залишити її учням додому для самостійного опрацювання, то перед кроками 2, 3, 4, які відповідають цій задачі, слід зняти відмітки. Доцільно зняти відмітку і перед кроком "Аналіз задачі на визначення довжин відрізків", запропонувавши школярам здійснити такий аналіз у класі. Наступний крок, у ході якого пропонується короткий запис завдання, доречно подати після того, як учні спробують самостійно здійснити такий запис. Після редагування уроку слід перейти до вкладки *Уроки* і виконати дію *Оновити список*. Збереження створеного уроку відбувається автоматично при виході з конструктора.

Додамо з попереднього уроку № 28 два завдання на розв'язування рівняння для актуалізації опорних знань та умінь учнів. Ці завдання вчитель може запропонувати на початку уроку як усні вправи, а головну увагу звернути на визначення невідомих компонентів рівняння. Не закриваючи урок №29, відкриємо у вкладці *Зміст* урок №28, додамо (перетягнемо) до складових уроку №29 задачу 1 і задачу 2. Розташуємо ці кроки першим та другим, перед оголошенням теми і мети даного уроку.

Для створення нового фрагмента уроку правою кнопкою мишки натискують на назві теми і в меню, що з'являється, вибирають рядок *Створити крок* (Рис. 2.56).

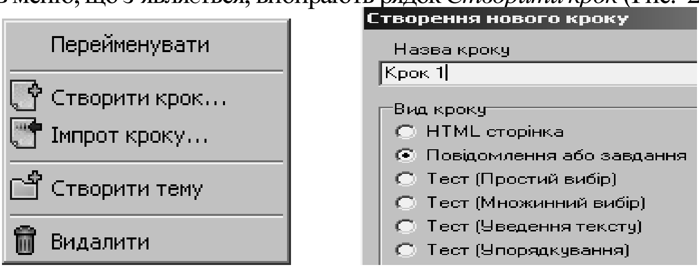


Рис. 2.56. Створення нових кроків уроку

При створенні кроку *HTML сторінка* з'явиться вікно редактора, в якому можна вводити текст, форматувати його, а також вставляти зображення. Для розміщення на сторінці малюнка слід натиснути кнопку *Вставити зображення* і у вікні, що з'явиться, вибрати у папці потрібний файл із малюнком. Можна скористатися колекцією малюнків, які розміщені у папці *C:\Program Files \ Microsoft Office\CLIPART\PUB60COR.*

Крок *Повідомлення або завдання* використовують для поточної перевірки знань, самоперевірки або під час проведення уроку (для проведення тестувань із метою оцінювання не використовують). Якщо створено вид кроку *Повідомлення*, то під час перегляду в *Режимі уроку* на екран виводиться текст і, якщо необхідно, малюнок. Якщо створено вид кроку *Завдання*, під час перегляду в *Режимі уроку* на екрані спочатку відображається текст запитання, а після натиснення кнопки *Далі* – з'являється відповідь на нього. Для створення такого виду кроку відкривається діалогове вікно *Додати відповідь*. При вставленні зображення у кадр, можна змінити як його розміщення відносно тексту, так і розміри самого зображення. Наприклад, для збільшення малюнка вдвічі записують у вкладці *Параметри зображення* число 2, для зменшення вдвічі – 0,5. Кнопку *Формули* призначено для виведення на екран інструкції із уведення математичних формул. Починається і закінчується написання формули введенням символів „__" (подвійне підкреслення). Після завершення вводу запитання слід зберегти.

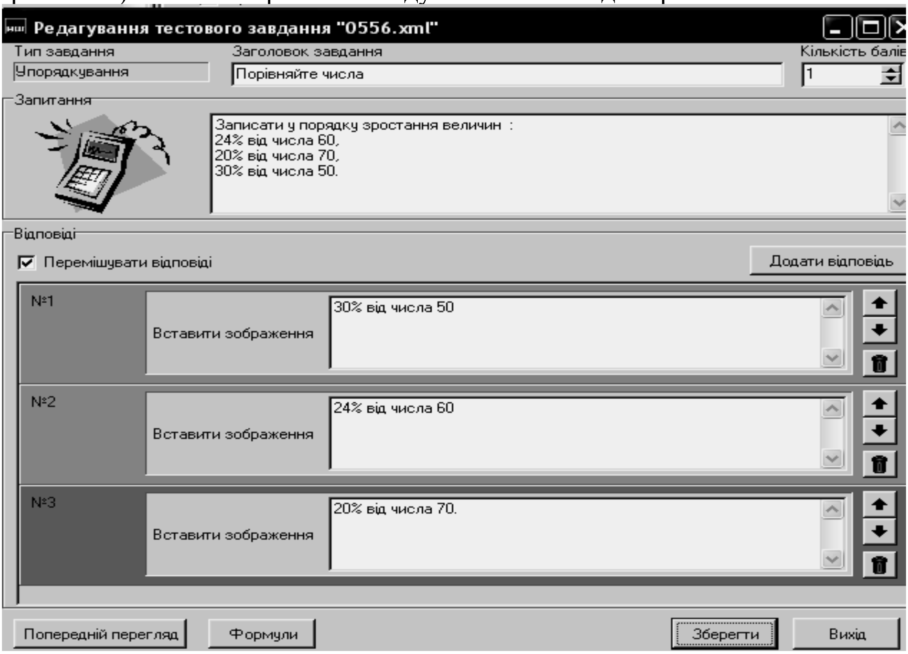


Рис. 2.57. Вікно створення тестового завдання на впорядкування

При створенні тесту *Простий вибір* учню надається декілька варіантів відповіді на поставлене запитання. Він має вибрати правильну відповідь. При створенні такого завдання потрібно ввести заголовок завдання, кількість балів за правильну відповідь, текст запитання, варіанти відповіді. При потребі на відведене місце можна вставити зображення. Оскільки у ПМК передбачена можливість перемішувати відповіді, то при створенні тесту правильну відповідь доцільно писати першою.

При створенні тесту *Множинний вибір* учню надається декілька варіантів відповіді на поставлене запитання. Він має вибрати правильні відповіді (більше однієї). Біля кожної з правильних відповідей потрібно натиснути один раз курсором на полі *правильна відповідь*, після цього у полі з'явиться символ . Після завершення вводу слід натиснути кнопку *Зберегти* для збереження завдання та виходу із діалогового вікна. При створенні тесту з можливістю уведення тексту можна передбачати такі типи відповідей, як рядок (слово), ціле число, дійсне число (з десятковою комою).

Передбачена можливість створювати фрагменти уроку за допомогою *імпорту файлу*. Для цього необхідно попередньо створити та зберегти файл на вінчестері комп'ютера або на іншому накопичувачі. Крім кроків, створених за допомогою даного засобу на іншому комп'ютері, можна імпортувати файл таких форматів: **.swf, *.html, *.bmp, *.jpg, *.jpeg, *.wmf, *.emf*. Назва нового кроку з'явиться у вкладці *Зміст* дерева навігації. Після імпортування кроків до відповідної теми їх можна додавати до уроку.

Якщо є потреба в тому, щоб створити нову тему, за допомогою правої кнопки мишки активують рядок *Зміст курсу* і у вікні, що з'явилося, вибирають рядок *Створити тему* (Рис. 2.58) та вводять її назву. Після введення назви теми, вона появляється останньою у переліку тем.

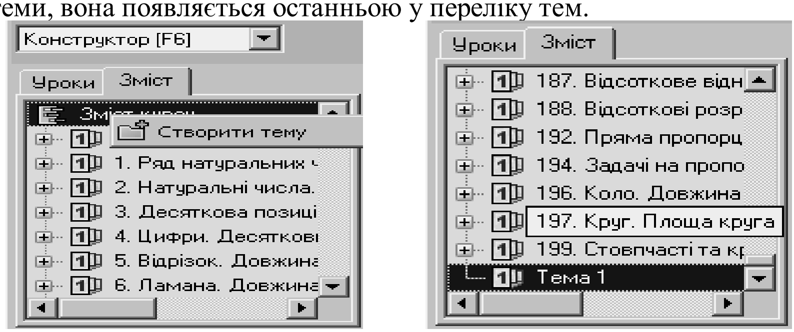


Рис. 2.58. Вікно створення нової теми вкладки *Зміст*

Застосування ПМК дає можливість досягнення наступних педагогічних цілей: підтримка групових та індивідуальних форм вивчення математики в умовах класно-урочної системи організації навчального процесу, створення комфортних умов комп'ютерної підтримки традиційних і новаторських технологій навчання математики, підвищення пізнавального інтересу учнів до вивчення математики, забезпечення диференційованого підходу до вивчення математики, формування навичок розв'язування задач практичного та дослідницького характерів, структуризація змісту навчання математики та активізації опорних знань.

Контрольні запитання і завдання

1. Встановити на вінчестер комп'ютера перераховані в 2.7-2.10 ПЗНП. Дослідити відмінності між режимами роботи за одним комп'ютером і в мережі.

2. Дослідити, як використовуючи встановлені ПЗНП, можна формувати у школярів пізнавальні, творчі, організаційно-діяльнісні якості?

3. Для певної теми уроку переглянути запропоновані в ППЗ розробки, сконструювати і зберегти власний урок. Дібрати наочності для актуалізації знань і умінь, мотивації навчальної діяльності. Підготувати інші наочності та імпортувати їх.

4. До теми „Рух” проаналізувати рисунки з „Бібліотеки наочностей „Геометрія 7-9”, порівняти їх з кресленнями, створеними за допомогою GRAN-2D, DG. Чому заняття з використанням GRAN-2D доцільніше провести у комп'ютерному класі?

Розділ 3
СИСТЕМА РОЗВИВАЛЬНИХ ЗАДАЧ ТА МЕТОДИКА ЇХ ОПРАЦЮВАННЯ

3.1. Педагогічні умови формування особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики

На сучасному етапі відбувається інтенсивний пошук методик комп'ютерно-орієнтованого навчання математики. Актуальним є запровадження освітніх інновацій. Зокрема, інтерактивних методик, технології навчання за методом проектів та ін. Водночас потребують подальшої розробки проблеми гармонічного поєднання особистісно орієнтованого навчання з ІКТН. Оскільки використовуючи ІКЗН математики можна здійснювати навчання розвиваючими методами, то такий підхід в найбільшій мірі відповідає особистісно орієнтованій парадигмі сучасної освіти.

Як зазначалося вище, однією з цілей комп'ютерно-орієнтованого навчання математики є розвиток особистості школяра. Формування творчих якостей учня має величезне значення для його подальшого життя. Якщо дитині вдається досягти творчих успіхів у школі, то у неї є всі шанси на творчий успіх у житті.[*] Щоб розвивати особистісні якості учня, вчителю необхідно *діагностувати рівень* їх *сформованості*. Маючи такі відомості, педагог зможе здійснювати особистісний підхід до формування якостей учня.

На основі теоретичного дослідження, педагогічної практики можна окреслити сукупність педагогічних умов, шляхи ефективного формування особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики. Однією з умов є використання у навчально-виховному процесі такої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики, яка б дозволяла активізувати пошуково-дослідницьку діяльність учнів, унаочнювати складний для сприйняття абстрактний матеріал, проводити обчислювальні експерименти зі створеними учнями моделями, динамічними кресленнями з метою висування гіпотез, розв'язування творчих, нестандартних задач, забезпечувала б посилення прикладної спрямованості навчання, дозволяла б організовувати дослідження різноманітних математичних проблем на основі ІТ.

У навчальній діяльності учнів виняткове значення має самостійна постановка і розв'язування навчальних задач. Успішність навчальної діяльності, її розвивальний ефект значною мірою залежить від того, як учень довизначає поставлені вчителем задачі. До найбільш істотних переваг комп'ютерно-орієнтованого навчання математики відносимо надання учням *можливості самостійно ставити і розв'язувати за допомогою комп'ютера різноманітні навчальні задачі.* Навіть у тих випадках, коли вчитель виконує певний етап у розв'язуванні навчальної задачі, його функція полягає не в тому, щоб забезпечити правильне розв'язування задачі, а щоб допомогти *учневі у засвоєнні спо-*

[*] Кожна дитина у чомусь геній, і кожен геній у чомусь дитина. *Артур Шопенгауер*

собу її розв'язування, у досягненні певних навчальних цілей. Тому до основних психологічних механізмів навчання засобами ІКТ відносимо проблему зворотного зв'язку, довизначення навчальної задачі, динамічного розподілу функцій управління між учителем, комп'ютерним забезпеченням і учнями.

Формування творчих якостей особистості відбувається у процесі *розв'язуванні творчих задач*. Задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до виучуваних явищ. Тому *математичне моделювання, прикладну спрямованість навчального матеріалу* розглядаємо *як засіб активізації творчої діяльності учнів і формування творчих якостей особистості*. Враховуючи типології творчих задач В.А. Андрєєва, В.А.Крутецького, В.О. Моляко, С.А. Ракова, С.О. Сисоєвої та ін., можна виокремити *типи навчально-творчих завдань,* які доцільно використовувати для формування якостей особистості у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики. Наведемо приклади таких завдань.

Задачі *на виявлення протиріччя*, що формують бачення протиріччя, здатність формулювати проблему, діалектичність мислення.

Задачі *з відсутністю повних вихідних даних*, які бажано використовувати для формування здатності знаходити потрібні відомості та переносити їх, застосовувати в умовах задачі. Такі задачі називаємо „відкритими". Розмаїття *дослідницьких задач з відкритою умовою чи відкритою вимогою* можемо розглянути завдяки використанню ППЗ як інструмента дослідження.

Задачі *на прогнозування*, *відкриття теорем за* допомогою ППЗ доцільно використовувати для формування здібності генерувати ідеї, висувати гіпотези. Для цього можна проводити обчислювальні експерименти і аналізувати чисельні величини створених динамічних виразів.

Застосовуючи ППЗ GRAN, DG при розв'язуванні *практичних задач,* а серед них *задач на оптимізацію*, можна сприяти формуванню гнучкості, дивергентності мислення учнів. Для цього слід пропонувати добірки задач на дослідження моделі-функції, створювати динамічні креслення, пропонувати різні способи розв'язування однієї і тієї ж задачі.

Завдання *на рецензування* для забезпечення розвитку критичності мислення, здатності до оціночних суджень, пропонуються найчастіше у процесі навчання у співпраці, за методом проектів з використанням ІКТ. Задачі *на розробку алгоритмічних і евристичних приписів* як результатів дослідження за допомогою ППЗ, бажано використовувати для розвитку здібності до узагальнення і згортання мислительних операцій, здатності до рефлексії мислення. Важливо пропонувати учням задачі на *здійснення умовиводів через узагальнення.*

Особливе значення при використанні ППЗ слід приділяти створенню *евристико-дидактичних конструкцій*, які цілеспрямовують школяра в ході самостійного вивчення окремих питань. До таких відносимо не лише ті конструкції, які в Україні пов'язують з ім'ям О.І. Скафи та її учнів, але й динамічні креслення, оснащені системою підказок. Приклади таких підказок зустрічаємо у розробників ППЗ DG. До задач на винахідливість відносимо також *задачі на створення динамічних креслень,* особливо до задач прикладних; на *розробку макроконструкцій* для більш складних креслень.

В позаурочні години на факультативних заняттях, на спецкурсі математики старшокласникам доречно пропонувати розв'язувати *різноманітні задачі–проблеми, задачі–загадки, задачі–фантазії.* Інтерес до задачного практикуму підвищується, якщо до фонду задач включати створені учнями або дібрані ними у посібнику за якоюсь суттєвою ознакою завдання. Важливими є *задачі, розв'язок яких цікавий чи несподіваний,* або який можна *естетично і вигідно подати* у відомому програмному продукті.

Для розвитку інтелектуально-логічних здібностей бажано пропонувати *логічні задачі*, значну кількість *задач з параметрами.* Застосовуючи ППЗ GRAN, зручно здійснювати аналіз у багатьох задачах з параметрами використовуючи графічні прийоми. Наприклад, метод паралельного перенесення, повороту.

Готуючи з учнями розробки для уроків математики, *презентації, науково-дослідницькі роботи* тощо, сприяємо формуванню організаційно-діяльнісних якостей особистості. Здатність до рефлексії, до самоуправління доцільно розвивати *складаючи та обговорюючи з учнями індивідуальні освітні траєкторії, аналізуючи творчі здобутки.* Компоненту організаційно-діяльнісних якостей – комунікативні якості особистості, що передбачають уміння розподіляти обов'язки колективної творчої праці, пошук засобів взаємодопомоги і співробітництва, доцільно розвивати, *впроваджуючи проекти на основі ІКТ, обговорюючи результати досліджень в групах, здійснюючи пошук потрібних* відомостей. Важливо для учнів уміти знайти в літературі і подати за допомогою презентацій, файлів, створених за допомогою ППЗ, *історичні математичні задачі*, відомості про творців математики, розробників задач з інформатики.

Творчу фантазію та уяву можна розвивати, пропонуючи завдання на *створення різноманітних малюнків, що їх можна описати функціями, орнаментів, геометричних паркетів*, *калейдоскопів* (динамічних креслень фігур, що мають певний порядок обертання) тощо.

Щоб розвивати в учнів просторову уяву, можна пропонувати їм створювати *слайди з перерізами многогранників* площиною, динамічні креслення до стереометричних задач, створювати многогранники за їх описами і розгортками, виконувати перетворення об'єктів за допомогою ППЗ та інші.

Розглянемо *методи навчання* математики з використанням ІКТ за допомогою яких можна забезпечувати ефективний розвиток творчих якостей учнів. З методів, класифікованих за джерелом знань, виділяємо *практичні.* Необхідною умовою для організації самостійної пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення і продуктивної діяльності є фонд дійових знань. Тому говорячи про дослідницький і частково-пошуковий методи як розвиваючі, віддаватимемо належне пояснювально-ілюстративному та репродуктивному. *Проблемне подання відомостей, евристична бесіда* з учнями *та дослідницьке навчання* особливо стимулюють розвиток творчих якостей учня. Творчі якості особистості ефективно формувати у процесі дослідницької діяльності. Метою діяльності є пробудження активних дослідницьких інтересів. Активність та глибока зацікавленість творчим процесом сприяють розширенню знань учня, його інтересів та форм пізнання, заохочують до пошуку нових фактів, нових відомостей. Основою для проведення на уроці евристичної бесіди можуть бути спостереження учнів, організовані з метою збудження творчих припущень. Вчитель стимулює самостійність роздумів і суджень школярів, заздалегідь готуючи систему запитань. У сократівському діалозі за допомогою запитань, які допомагають активізувати мислення учня, відбувається відкриття істини. Відповідаючи на питання, учні самостійно формулюють означення, поняття, „відкривають" доведення теореми, знаходять способи розв'язування задачі, приходять до розв'язання проблеми. Особливу увагу слід звернути на *побудову зразка проблемної ситуації, здогадки, висування гіпотези*.

Дослідницький метод передбачає самостійний пошук розв'язування пізнавальної задачі. Комп'ютер використовується як інструмент дослідження школяра, який допомагає створити йому ситуацію успіху. Може виявитись потреба, щоб проблему сформулював сам учень або її формулює вчитель, але учні шукають вирішення. Це метод залучення учнів до самостійних і безпосередніх спостережень, на основі яких вони встановлюють зв'язки предметів і явищ дійсності, роблять висновки, пізнають закономірності. Внесення елементу дослідження в навчальні заняття сприяє вихованню у школярів активності, ініціативності, допитливості, розвиває мислення, заохочує потребу дітей і підлітків у самостійних пошуках. З*алучення учнів до дослідницької діяльності* є вагомим аспектом активізації пізнання, а тому й однією з педагогічних умов ефективного формування пізнавальних та креативних якостей.

Розглянемо *форми комп'ютерно-орієнтованого навчання*, які сприятимуть ефективному формуванню особистісних якостей учнів. Використовуючи в навчанні математики комп'ютер, необхідно дібрати доцільні організаційні форми заняття. Працюючи у класі з одним комп'ютером, бажано проводити дослідження в невеликих групах, вислуховувати знайдені учнями продуктивні гіпотези. За умови наявності мультимедійного проектора і комп'ютера, доцільно орієнтуватися на колективну форму роботи, надаючи учням змогу виступати і демонструвати власні навчальні продукти. Доцільно проводити *спеціалізовані комп'ютерно-орієнтовані лабораторні роботи* в ході яких учні зможуть "відкрити" певні закономірності чи перевірити відомі твердження.

Учні краще навчаються за *умови, що вони мають змогу обговорити всі виниклі проблеми.* Тому навчання у співпраці стимулює їх до висування плідних ідей. Раціональна думка, висловлена одним учнем, трансформується іншим у гіпотезу, спосіб обґрунтування тощо. Учні допомагають один одному, навчаються праці у колективі. В обговоренні можуть взяти участь школярі, які самостійно не досліджували, а лише спостерігали. Наявність *творчого спілкування* є однією з умов розвитку творчих якостей особистості. Завдяки груповій роботі, особливо при застосуванні інтерактивних методів, зростає об'єм засвоюваного матеріалу та глибина його розуміння, зростає пізнавальна активність і творча самостійність учнів. При цьому значно менше часу витрачається на формування знань, умінь та навичок. Учні одержують більше задоволення від занять, комфортніше почувають себе у школі. При цьому змінюється характер взаємостосунків між учнями, зростає згуртованість класу. Маючи змогу досягати вищих результатів у навчанні, подаючи нові ідеї, отримані в результаті досліджень, у школяра зростатиме самоповага, повага до своїх друзів та їхніх ідей. У той же час необхідно подбати про забезпечення умов для вільного висловлення думок, розвитку терпимого ставлення до критики, здатності адекватно оцінювати свої та чужі можливості. Працюючи в команді, в учнів формуються уміння будувати власну поведінку з урахуванням позиції інших, гуманістичні мотиви спілкування. Сумісна навчальна діяльність учнів сприяє формування організаційно-діяльнісних якостей.

У третьому розділі посібника пропонуються добірки завдань, для виконання яких найчастіше використовують *програмні засоби GRAN та DG.*

Важливо у процесі навчання з використанням ІКТ дотримуватися дидактичних і психологічних принципів розвивального навчання. Для цього слід забезпечувати провідну роль теоретичних знань; навчаючи швидкими темпами, забезпечувати навчання на високому, але доступному рівні, тобто у зоні найближчого розвитку учня; дбати, щоб поданий матеріал усвідомлювався всіма учнями.

Впровадження ІКТ в освітній процес здійснюється через комп'ютерно-орієнтований урок, тому поряд з питанням добору „інтелектуальних" комп'ютерних програм постає *проблема педагогічної майстерності вчителя,* уміння конструювати і розробляти ним уроки на основі методологічних і методичних положень та вимог. *Підготовленість вчителя до використання ІКТ* визначаємо як одну з найважливіших умов ефективного формування особистісних якостей учнів у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання. Детальніше проблеми підвищення інформаційної культури вчителя математики будемо висвітлювати в п. 3.9. У цьому ж пункті буде наведено перелік тем занять з математики, при вивченні яких доцільно застосовувати обрані для використання засоби. Протиріччя між педагогічним потенціалом комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики і реальним станом використання педагогічних програмних засобів може бути зняте через відповідну підготовку майбутніх вчителів як на заняттях з фундаментальних математичних дисциплін, так і в курсі «*Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики*».

Отже, успіху у формуванні особистісних якостей школяра у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики можна досягти, якщо забезпечити систематичне, цілеспрямоване, обґрунтоване і педагогічно доцільне використання сучасних ІКТ у навчанні математики; формувати стійкий інтерес до пошукової дослідницької діяльності; стимулювати творчий потенціал учнів під час розв'язування навчально-творчих завдань.

Контрольні запитання і завдання

1. Порівняти типології творчих задач для формування особистісних якостей учнів за В.А. Андрєєвим, С.О. Сисоєвою, В.А. Крутецьким.
2. Дібрати для однієї з тем творчі завдання для використання ППЗ.

3.2 Проектні технології: коли навчатися цікаво?

Метод навчальних проектів, що ґрунтується на ідеї комплексного використання інноваційних педагогічних технологій та ІКТ, пов'язаний з технологіями навчання у співпраці, модульним, навчанням через дослідження, технологією успіху. Засоби ІКТ задіяні як на стадії пошуку та переосмислення необхідних відомостей, так і при оформленні результатів дослідницької діяльності – створенні презентацій, публікацій чи веб-сайтів. У роботі слід дотримуватися наступних принципів: 1) цілі навчання повинні бути сприйнятими учнями, 2) необхідно забезпечувати об'єктивний контроль якості знань, 3) сприяти розвитку особистості учня.

Характерною рисою пропонованої технології є практична спрямованість навчального матеріалу. У навчанні за методом проектів ставиться вимога, щоб отриманий продукт був „відчутним", практично значущим для учня. Можна пропонувати для впровадження як монопроекти, так і міжпредметні, а за кількістю учасників – групові чи одноосібні. На стадії підготовки проекту слід дібрати зміст навчального предмету, розробити завдання для учнів, засоби оцінювання учнівських навчальних продуктів, рівня якості знань. Важливо передбачити нюанси впровадження проектних технологій в умовах класно-урочної системи навчання. Школярі залучаються до активної участі у плануванні роботи, до розробки критеріїв оцінювання навчальних продуктів тощо. Бажано, щоб у процесі навчання учень міг дібрати посильне, цікаве для нього завдання. Діяльність школярів слід планувати так, щоб процес навчання сприяв формуванню навичок мислення високого рівня. Педагогічна таксономія окреслює шість рівнів навчальних цілей – знання, розуміння, використання, аналіз, синтез, оцінювання [23,*29*]. Важливо забезпечувати формування в учнів уміння аналізувати, класифікувати, передбачати, довести, протиставити, встановити відповідність, висунути гіпотезу, розробити, організувати, написати звіт, створити схему тощо.

Вивчаючи *теорему Піфагора*, важливо дати учням змогу відчути важливість її практичного застосування. Для цього можна запропонувати мініпроекти щодо вивільнення часу – швидше ходити по прямій, різноманітних обчислень з недоступними об'єктами. Цікаво для школярів опрацювати відомості про різні способи доведення теореми Піфагора, підготувати слайди з анімацією, що ілюструють хід доведення. Бажано також „відкрити" теорему Піфагора в ході комп'ютерного експерименту, дослідивши, що сума площ квадратів, побудованих проти катетів, рівна площі квадрата, побудованого проти гіпотенузи. Динамічну модель для дослідження створюють за допомогою GRAN-2D чи DG. У підручниках з геометрії, зокрема [8,*32*], найчастіше подається найпростіше доведення, яке ґрунтується на незалежності косинуса кута від розмірів та розташування трикутника. У той же час відомі давньокитайське, давньоіндійське, доведення Евкліда та багато інших. Значна частина цих доведень опирається на обчислення площі квадрата і прямокутного трикутника. Формули для площі відомі учням з 6-го класу.

С.А. Раков [88] пропонує виконати деяке узагальнення теореми Піфагора і дослідити, що сума площ крайніх квадратів, побудованих проти катетів, рівна площі квадрата, побудованого проти гіпотенузи (рис.3.1). Для середніх квадратів можна встановити співвідношення *(S1+S2)/S3=5*. Властивість учні встановлять у ході комп'ютерних експериментів, а обґрунтувати результат $S1 = 3a^2 + c^2$, $S2 = 3b^2 + c^2$, $S3 = c^2$ зможуть лише після вивчення тригонометричних функцій кута. Важливо, щоб створені учнями динамічні креслення за допомогою GRAN-2D чи DG, можна було використати в режимі покрокового відтворення. Самостійний перегляд учнем зазначених креслень, за умови ретельного аналізу кожного із виконаних кроків побудови, сприятиме формуванню його пізнавальної самостійності. Використовуючи послугу *Створити кнопку*, учні складають до задач написи із завданнями для дослідження та розміщують їх на слайді. Послідовно відкриваючи евристичні підказки (словесні чи у вигляді додаткових побудов), відповідаючи на питання, що висвітлюються при натискуванні кнопки, слідуючи поданим рекомендаціям, школяр самостійно просуватиметься до знаходження кінцевого результату, висунення гіпотези та її обґрунтування.

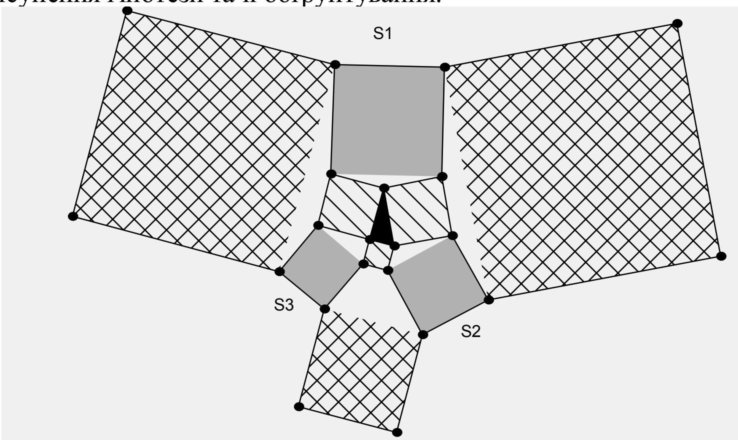


Рис. 3.1. Модель для узагальнення теореми Піфагора

Користь від залучення учнів (студентів) до створення динамічних креслень з підказками до розв'язаних ними задач насамперед в тому, що таким чином можна розвивати в учня здібності до рефлексії та корекції навчальної діяльності. Адже учень має ще раз мисленно чи письмово пригадати, виявити, усвідомити кожен етап діяльності при розв'язуванні задачі. Вичленивши кожен крок, намагатися оптимізувати хід розв'язування. Крім того, учень вчиться ставити питання, щоб спонукати ним до роздумів іншого школяра, який оцінюватиме чи вивчатиме його навчальний продукт. У процесі створення слайдів з підказками до розв'язування задач в учнів удосконалюються уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, розвивається здатність до оціночних суджень. В п.2.4 даного посібника на прикладі вивчення теореми Птолемея подано ланцюжок підказок для дослідження та доведення. А тому, *одним із „відчутних" продуктів проектного навчання можуть бути добірки розв'язаних завдань зі створеними до них слайдами, що містять динамічні креслення, підказки до ходу розв'язування.*

Наведемо приклад завдання для якого доцільно здійснити узагальнення. *Дві прямі ділять кожну з двох протилежних сторін опуклого чотирикутника на три рівні частини. Відомо, що площа частини чотирикутника між цими прямими дорівнює S. Знайти площу даного 4-кутника?* [8,*175*].

Створивши динамічну модель за допомогою ППЗ (рис. 3.2), учень може для кожного з чотирикутників знайти площі, порівняти їх, висловити гіпотезу. Після того, як завдання буде розв'язане, важливо для розвитку мислення учнів сформувати у них уміння вибудовувати послідовність підказок для узагальнення задачі, надаючи школярам диференційовану допомогу. Наприклад, створити орієнтовну послідовність запитань і завдань:

1) Порівняти значення площ для двох сусідніх чотирикутників і знайти різницю цих значень. Яку закономірність можна побачити?

2) Ця послідовність називається ...

3) Поділити кожен з чотирикутників діагоналлю на два трикутники. У трикутників з рівними основами на одній стороні чотирикутника висоти змінюються за певною закономірністю. Якою?

4) Чому площі чотирикутників змінюються за такою закономірністю?

5) Перевірити, чи виконуються аналогічні властивості, якщо розглянути будь-яке число прямих? Парне? Непарне? Зробити висновки.

6) Якщо аналогічно поділити іншу пару протилежних сторін початкового чотирикутника на непарну кількість частин, то що можна сказати про центральний чотирикутник (на рис. 3.2 зафарбований чорним кольором)?

7) Сформулювати гіпотезу та спробувати обґрунтувати її.

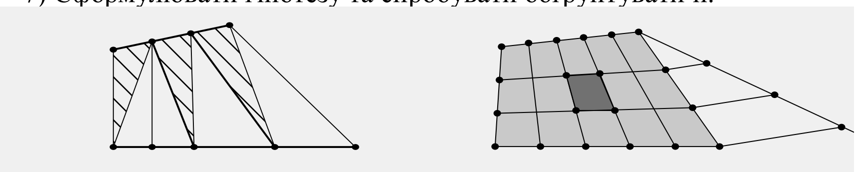


Рис. 3.2. Протилежні сторони чотирикутника поділено на однакову кількість частин

Розглядаючи різницю значень площі для двох сусідніх чотирикутників, школяр прийде до висновку, що значення площі утворюють арифметичну прогресію. Основи трикутників на одній стороні, на які поділені чотирикутники діагоналями, рівні. Арифметичну прогресію утворюють висоти трикутників, а в кінцевому результаті і площі чотирикутників. Узагальнити завдання можна поділивши чотирикутник на частини довільною парною кількістю прямих. Аналогічно проводять прямі для другої пари прямих, роблять висновок стосовно центрального чотирикутника. До кожного з пунктів за допомогою управляючих елементів – кнопок *Сховати\Показати об'єкт* можна подати тимчасово приховані побудови – поділ на трикутники, висоти трикутників. Зробимо зауваження стосовно побудови чотирикутника справа. Рівні відрізки на трьох сторонах можна побудувати, якщо використовувати послугу *Симетрична точка*. Щоб поділити на рівні відрізки четверту сторону, використовуємо алгоритм, який дає теорема Фалеса. Учень, створюючи конструкцію, щоб нею могли скористатися інші, аналізує кроки виконання завдання, синтезує нове, оцінює ефективність підказок, а тому розвиває пізнавальні якості, навички мислення високого рівня.

Вивчаючи *прогресії,* не можна обійти увагою задачі фінансової математики. Для математиків буде привабливим проект, представлений в [43,*90*]. Школярі визначають надійність банку за рентабельністю, прибутком, статутним капіталом. Проект ідеально вписується в календарний план вивчення табличного процесора на уроках інформатики. Реалізуючи подібний дослідницький навчальний проект (В який банк краще вкласти гроші? В якому банку краще взяти кредит?) на уроках математики при вивченні теми „Прогресії”, більша увага була приділена аналізу результатів дослідження, ніж оформленню звітних документів. У звітні документи проекту учні включали графіки, побудовані за допомогою GRAN1. За умови складних відсотків сума на рахунку клієнта банку визначається за формулою $P = P_o(1 + a/100)^n$, де P_o – початковий внесок, a – відсоток, n – кількість термінів, протягом яких нараховують відсотки. У форматі GRAN1 запишемо функцію *y(x)=P1*(1+P2/100)^X*, де *P1, P2* – коефіцієнти, які можна оперативно змінювати.

В іншому проекті пропонуємо учням поміркувати, в чому виявляється краса математики? Версії учнів будуть, звичайно, різними – краса задач, методу розв’язування, ліній, малюнків тощо. Важливо не пропустити жодної думки, дати можливість кожному висловитися. Такі хвилинні паузи багатьом учням дозволяють по-новому поглянути на роль математики в його власному житті. А отже, можуть пробудити інтерес до її вивчення, до створення власних навчальних продуктів як зовнішніх, так і внутрішніх.

А чи може математика вимірювати красу? Такими чи дещо іншими словами пропонуємо розпочати презентацію проекту, пов’язаного зі створенням паркетів з правильних многокутників. На його впровадження відводили 5-6 тижнів, тобто весь час, протягом яких вивчається тема „*Многокутники*”. Згідно з підручником [8], вивчення теми „Площі фігур” передує вивченню правильних многокутників. Щоб урізноманітнити проекти, зробити їх привабливішими для школярів, а найголовніше, щоб ще більше охопити і втілити у проекті той матеріал, що вивчається на уроках відповідно до програми, доцільно розширити набір фігур для побудови і додати до них вписані у многокутники кола, шести-, трипелюсткові квіти чи інші фігури, що мають симетрію порядку *n.* Практичним результатом втілення проекту має стати колекція створених учнями паркетів для застеляння підлоги у кабінеті математики. Запропонований міжпредметний проект об’єднує математику та інформатику, креслення та мову, вимагає знань з образотворчого мистецтва і трудового навчання. Він відповідає державному освітньому стандарту та навчальній програмі з освітньої галузі „Математика”. Контроль знань, умінь та навичок має бути забезпеченим на рівні не меншому, ніж стандарт. Всі навчальні здобутки учнів, їх навчальні продукти можуть перевищувати вимоги стандарту.

В ході реалізації проекту школярі мають відповісти на ключові питання: як математика може вимірювати красу, чи можна вважати геометричні паркети витворами мистецтва, для чого в практиці можуть бути потрібні правильні многокутники? І взагалі, як геометрія може вплинути на їхнє майбутнє, зокрема, на вибір професії? Не на кожне з цих питань учень зможе дати однозначну відповідь. Однак питання спонукатимуть його до здійснення рефлексії, переосмислення власної діяльності, переоцінки власних здобутків.

Особистісний підхід до учнів проявлятиметься в тому, що залежно від профілю навчання можуть бути розширені ті чи інші завдання, які ставляться перед ними. Так, „дизайнери" можуть досліджувати паркети музеїв, картинних галерей, орнаменти лінолеумів в магазинах будівельних матеріалів (тут правильні многокутники можуть перекриватися), представляти у вигляді діаграм результати дослідження на наявність правильних многокутників, проводити опитування з питань взаємозв'язків математики, краси і творчості, випускати газету тощо. „Математики", „технологи" більше уваги приділять пошуку алгоритмів побудови. На стадії планування роботи вчитель зможе здійснити особистісний підхід до учнів, запропонувавши вибрати заняття до душі, у відповідності до їхніх здібностей. Завдяки цьому в учнів розвиваються пізнавальні інтереси, бажання до пошуку нових фактів, що посилює внутрішню мотивацію, а зрештою, сприяє формуванню в учня позитивного уявлення про себе, додає впевненості у своїх силах і здібностях. У зв'язку з можливістю вибору завдань і необхідністю досягнення певного рівня навчальних досягнень, потрібно навчати учнів *цілепокладанню.* Найпростіший рівень – вибрати мету з переліку запропонованих. Рефлексія в навчанні допоможе учневі скоригувати мету подальшої роботи, власний навчальний шлях.

Відзначимо етапи реалізації проекту відповідно до загальної схеми технології проектного навчання. Підготовчий етап пов'язаний з визначенням теми і мети проекту, постановкою завдання. Учитель обговорює разом з учнями план проекту, уточнює завдання для кожної з груп, ознайомлює з критеріями оцінювання різних форм звітності. Школярам пропонується опрацювати окремі джерела відомостей як друковані, так і електронні через мережу Internet.

Другий етап включає в себе пошук та аналіз відомостей. Наприклад, з енциклопедії чи з „Математичного калейдоскопа" [124,44] учні можуть дізнатися, що являють собою геометричні паркети, чим однорідні паркети відрізняються від неоднорідних, розглянути різні зразки. Бажано, щоб дослідники обґрунтували, чому однорідних паркетів можна скласти лише одинадцять, в той час як кількість неоднорідних необмежена.

Паркети можуть бути двох видів – однорідними та неоднорідними, складеними з правильних многокутників без перекривання. Однорідні паркети складаються з кількох видів правильних плиток, до того ж у кожному вузлі сходиться рівна кількість плиток одного і того ж виду. Оскільки кут правильного *n*-кутника складає *1/2-1/n* частин повного кута, то будь-якому однорідному паркету відповідає певний набір натуральних чисел *n, p, e, i,* ..., які задовольняють рівняння. $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}-\frac{1}{i}+....=1$ В цілих числах рівняння має 17 розв'язків, але тільки 11 з них можна реалізувати у вигляді паркетів, плитки яких заповнюють всю площину і не перекриваються. Пошук розв'язків рівняння в цілих числах та їх перевірка є нестандартним завданням високого рівня. Наведемо приклади наборів для однорідних паркетів: 1) шість трикутників; 2) чотири квадрати; 3) три шестикутники; 4) квадрат і два восьмикутники; 5) трикутник і два 12-кутники; 6) 12-кутник, 6-кутник, квадрат; 7) трикутник, 2 квадрати, 6-кутник; 8) два квадрати і три трикутники. Неоднорідних паркетів (сходиться різне число правильних многокутників) можна побудувати нескінченно багато.

Наприклад, поділити один з шестикутників на трикутники. Відшукуючи потрібні відомості, учні вчаться аналізувати матеріал, оцінювати його з позиції отримати новий продукт, усвідомлюють цей матеріал, розбирають обґрунтування певних фактів. А тому розвивають власні пізнавальні якості, навички мислення.

Третій етап. В роботі ставили за мету максимально наблизити проектну технологію до класно-урочної системи навчання. А тому передбачили можливість на уроці у формі проміжного звіту заслуховувати теоретиків проекту, уточнювати завдання, вимоги. Домашнє завдання, крім традиційних завдань, передбачало добровільне творче – розробку і виконання ескізу паркету.

Четвертий. За планом на одному з наступних уроків звітували „математики-історики”. Вони ознайомлювали решту учнів з правилами побудови правильних многокутників, розповідали, як це робили древні греки. Школярі досліджували внесок математика Гаусса, з’ясовували, які з правильних многокутників можуть бути гранями правильних многогранників, який філософський зміст древні греки вкладали у Платонові тіла?

Інша група звітувала про особливості побудови многокутників за допомогою ППЗ GRAN-2D, DG. Обговорювалася необхідність створення макроконструкцій для побудови правильних многокутників за відомою стороною і квітів для оздоблення. Завдяки створенню та встановлення макроконструкцій удасться уникнути рутинності численних побудов, а це зробить процес розробки паркетів дійсно творчим. Окремі види паркетів можна створити засобами текстового редактора, якщо використати для цього *Автофігури*.

Розглянемо, наприклад, як створюють макроконструкцію для побудови квадрата за відомою стороною. 1) Будують точки A, B, відрізок AB. 2) Користуючись послугою *Перпендикулярна пряма*, проводять перпендикуляр через точку A. 3) Будують коло з центром у точці A та радіусом AB. 4) Користуючись послугою *Створення точки перетину об’єктів*, відмічають точку C (рис. 3.3). 5) Знаходять середину CB (послуга *Середня точка між точками C і B*). 6) Будують точку F, симетричну точці A відносно точки E (послуга *Створення симетричної точки*). 7) Створюють замкнену ламану, що відповідає квадрату. Послідовність побудов, виконаних за допомогою ППЗ, ідентична до тих, які потрібно виконувати вручну. Учень може відтворити цю послідовність за допомогою послуги *Вивести зображення покроково*. Після того, як квадрат побудували, переходять до створення макроконструкції. Якщо обрати послугу *Макроконструкція\Створити*, то в полі підказки зможемо прочитати „*Вкажіть вихідні об’єкти*”. Послідовно за допомогою курсора вказуємо точки A і B. Знову натискуємо на піктограму *Створення макроконструкції* і переходимо до відмічання результуючих об’єктів. Потрібно вказати точки C, F, а також ламану (назва об’єкта, що може бути вибраним, відображається внизу, у рядку інформування). Остаточно натиснувши на піктограму *Створення макроконструкції,* ввести її назву. Наприклад, *квадр_сторона*. У подальшому, коли школярі засвоїли алгоритм побудови правильного многокутника вручну, можна будувати його за допомогою послуги *Макроконструкцію встановити*. Для цього знаходять макроконструкцію з відповідною назвою (*квадр_сторона)*, завантажують її і послідовно вказують на дві точки, що визначають сторону квадрата.

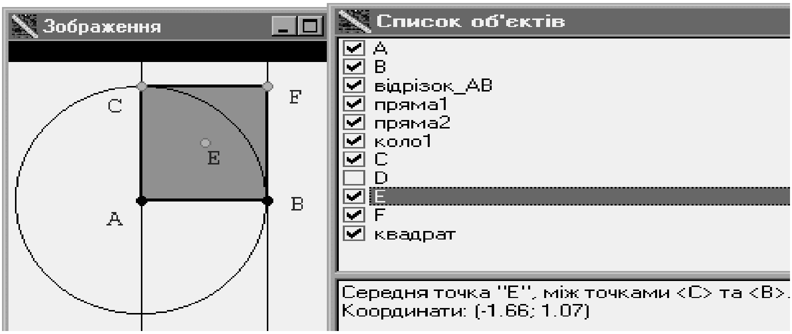


Рис. 3.3. Побудовано квадрат за відомою стороною АВ

Оскільки не кожний з многокутників можна побудувати вручну за допомогою циркуля та лінійки, то корисно запропонувати школярам розробити макроконструкції для наближеної побудови n-кутників з використанням ППЗ. Для цього на колі, в яке має бути вписаний n-кутник, вибирають довільну точку і створюють об'єкт *Коло за радіусом*. Точку перетину двох кіл беруть за центр наступного кола. Операцію виконують n разів. Тоді змінюють радіус малого кола так, щоб перша і остання точки співпали. Центри малих кіл будуть вершинами правильного многокутника.

У ході реалізації проекту учні добирають дані і опрацьовують їх у групах. Для кращої організації спільної роботи бажано обрати керівника групи, надавати учасникам диференційовану допомогу, щоб уможливити навчання учнів у „зоні найближчого розвитку". Завдання вчителя – вчасно почути, помітити, підтримати кожного учня, організувати їх співпрацю. Його завдання *не лише передати певну суму знань, але й навчити учнів самостійно їх здобувати і застосовувати*. Робота над навчальним проектом сприяє тому, що в учнів розвиваються здібності до втілювання здобутих знань у духовні та матеріальні форми. Навчання у співпраці формує в учнів уміння розподіляти обов'язки між членами групи, стимулює розвиток здатності до міжособистісного спілкування, добросовісності, почуття обов'язку.

П'ятий етап. Наступне заняття доцільно провести у комп'ютерному класі. Учні із задоволенням виконують побудови паркетів за допомогою ППЗ GRAN-2D чи DG. Паркети на рис.3.4 створено за допомогою макроконструкцій, тому в переліку об'єктів є кола, симетричні точки, точки перетину, середини відрізків.

На рис. 3.5 зображено паркет, який створено за допомогою GRAN-2D з використанням послуги *Об'єкт\Створення\Правильний многокутник*. Для побудови вказуються лише дві вершини многокутника і кількість його сторін. Многокутник при цьому розташовується справа від побудованої сторони.

Незважаючи на те, що будувати паркети за допомогою ППЗ швидше і приємніше, переконані, що спочатку необхідно сформувати уміння виконувати побудови многокутників вручну, оскільки хід побудови співпадає з ходом створення *Макроконструкції*. Економити час потрібно лише при створенні паркетів.

Шостий етап. На уроці виводяться формули для радіусів вписаного та описаного кіл, для площі многокутника, площі кільця, сектора, сегмента.

Виконувати виведення цих формул зручно, використовуючи групову форму організації праці. Особливо ефективно застосувати інтерактивну методику „ажурна пилка” [81]. Одночасно з обчисленнями за формулами, слід продемонструвати як здійснюються обчислення за допомогою ППЗ.

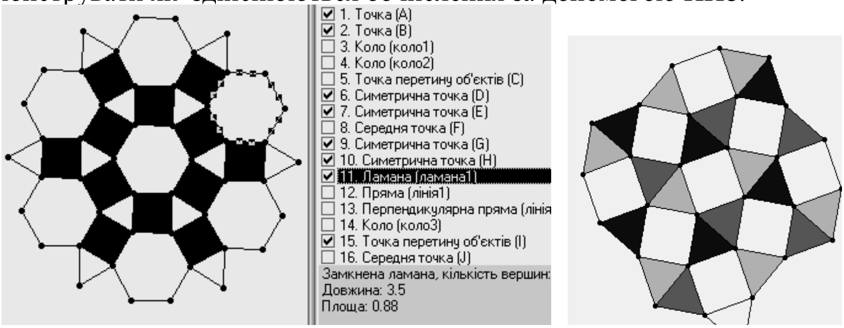


Рис. 3.4. Однорідні паркети виконані за допомогою *Макроконструкції* (GRAN-2D)

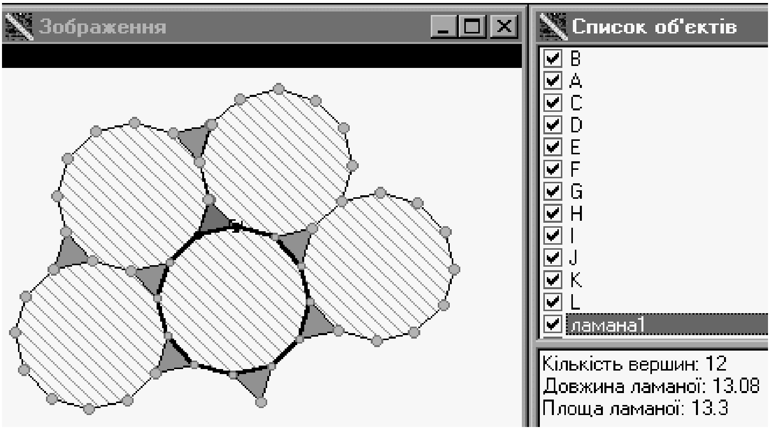


Рис. 3. 5. Паркет створено з використанням послуги *Правильний многокутник*

Сьомий етап. Учні виконують розрахунки вартості паркету, враховуючи розміри кімнати, як вручну, так і за допомогою запропонованих ППЗ. Можна скористатися послугами обчислення площ многокутників, периметрів многокутників, довжин кіл, площ кругів. Для обчислення вартості викладання паркету можна складати динамічні вирази. Дещо іншу форму часткової автоматизації обчислень учні матимуть, якщо використають Microsoft Excel. Тоді обчислення проводять за внесеними у клітинки формулами, вибираючи відповідні значення довжини сторони многокутника, кількості многокутників певного виду, вартості матеріалу з відведених для цього комірок.

Заключний етап. Оформлення результатів, презентація розробок, підведення підсумків. Учні створюють паспорт проекту зазначаючи, скільки і яких матеріалів потрібно придбати, яка їх вартість, загальна вартість проекту? Публікації (рис.3.6), презентації відображають хід дослідження; на сайті, крім оголошення про конкурс та його результати, учні зберігають колекцію створених малюнків. Створюючи за допомогою PowerPoint презентацію, учні вчаться виступати перед аудиторією, структурувати свою доповідь. Вони удосконалюють уміння добирати найяскравіші переконливі факти для демонстрації думок, ідей. Виконання цього завдання потребує також знань з інформатики. При оцінюванні результатів роботи, перегляді газети, презентації необхідно враховувати, як представлені виконавці проекту, наскільки зроблене відповідає поставленим завданням, в якому об'ємі дібрано і опрацьовано матеріали, чи відображені результати дослідження? Важливо звернути увагу школярів на наявність посилань на джерела відомостей. Інформатики можуть враховувати наявність в презентаціях заголовків слайдів, анімації, ефектів зміни слайдів, використання різних шрифтів, малюнків, фону, звуків. На компакт-диску до посібника наводиться розробка навчального проекту *„Геометрія паркетів*", пропонується план проекту, учительська та учнівська презентації, публікація та веб-сайт, засоби оцінювання, деякі дидактичні матеріали.

Завершити роботу над проектом необхідно самооцінкою та оцінкою результатів навчання. Для контролю рівня знань учнів можна передбачити написання контрольної роботи і подання відповідей на тестові завдання. Оцінюються і ті види робіт, що їх виконували учні в ході реалізації проекту. *Найважливішою для становлення учня як самобутньої особистості є самооцінка. На основі рефлексивних суджень учень має здійснити власну оцінку діяльності*: що нового дізнався, чого навчився, що зрозумів; які види роботи виходили краще; які труднощі були, що намагався зробити, щоб їх подолати, які зміни відбулися у розроблених малюнках, виступах, в особистісних якостях? Якщо оцінка вчителя співпадає з самооцінкою учня, то в цьому разі є підстави говорити про адекватну оцінку. У випадку неспівпадання оцінки, бажано вживати додаткових заходів – разом з учнем намагатися переоцінити певні види робіт, надати можливість повторно здати залік чи написати контрольну роботу. Таке спіставлення оцінок важливе, оскільки впливає на формування адекватної Я–концепції школяра, позитивного уявлення учня про себе.

Для школярів при вивченні теми «Многокутники», «Перетворення фігур» привабливими можуть бути проекти „Математичні фігури в українському орнаменті" ("Геометрія українського орнаменту") (рис.3.6), „Розмалюй писанку" (рис. на обкладинці). Створення орнаментів тісно пов'язане з використанням симетричних фігур, потребує застосування геометричних перетворень. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, інженерії, архітектурі та мистецтві отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях. А.С. Гурська цитує німецького математика і філософа Германа Вейля: „*Мистецтво орнаменту містить у неявному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики*"[1] (с. 49). Автор подає у посібнику цікавий матеріал, який можна школярам використати у проектній роботі. Можливості використання ППЗ для виконання *геометричних перетворень*

[1] Гурська А.С. Мова та граматика українського орнаменту: Навчально-методичний посібник. – К.: Альтернативи, 2003. -144 с.

ГАРМОНІЯ ВРЯТУЄ СВІТ! І ГЕОМЕТРІЯ ЇЙ ДОПОМОЖЕ

Гармонія врятує світ!

Номер перший **Дата випуску 13 жовтня 2005**

Зверніть увагу:

- На красу паркетів , з колекції на сайті «Юний паркетник»
- Як можна заробити гроші?
- Який зв"язок існує між пантофлями і Лувром.?
- Що говорили древні греки про правильні многогранники і філософію

А хто на портретах?

Геометрія в паркеті

Любий наш читачу! Ми хочемо тобі розповісти, як чудово працювати у спільному проекті „Гармонія врятує світ!". Переконані, що й тобі захочеться попробувати відпрацювати власний проект. Ми всією командою з'ясовували, як знання з геометрії допоможе поліпшити оточуючий світ, краще зрозуміти своє місце в ньому. ***Я Катя - дизайнер проекту.*** Побувавши на численних сайтах Internet, ми створили і власну колекцію. Запрошуємо переглянути її на нашому сайті. Чому паркетів? Виявляється, між правильними многокутниками, які ми вивчаємо на уроках геометрії, і орнаментами паркетів існує тісний зв'язок. Без знання їх властивостей не вдалося б створити паркетні шедеври Маріїнського палацу у Києві, резиденції гетьмана Хмельницького у Чигирині, палат короля Яна Собоського у Львові та багато інших. Ми побували в музеї і винесли звідки багато вражень. А ще ми дослідили, які з цих многокутників частіше зустрічаються в інших підручниках, художніх творах, у нашому побуті і стпворили діаграму в Excel.

Маша – журналіст, фотокор. Це фото нашого кабінету математики. Саме тут ми хочемо вистелити підлогу оригінальним паркетом з правильних многокутників. **Читайте на сайті про наш конкурс, беріть в ньому участь та перемагайте!**

Як ми почувалися древніми греками?

Сергій – ну дуже крутий математик! Він прочитав у „Кванті" та в „Математичному калейдоскопі" (1970, №3; 1981, № 8) і навчив усіх у команді створювати геометричнії паркети. Полюбуйтеся нашими розробками та надсилайте свої! ***А Кирило*** в цей час ***відчув себе древнім греком***. Він будував не тільки на комп'ютері у програмі GRAN-2D, але й циркулем та лінійкою. Ми знаємо тепер формулу Гауса, яка дає відповідь на питання, які правильні многокутники можна будувати цими інструментами. Звісно, що правильний 257-кутник я не побудував, бо у Гауса побудова зайняла 257 сторінок!

Гармонія тісно пов'язана з золотим перерізом, золотою пропорцією і також була відома в Стародавній Греції.

А ви знаєте де є золота пропорція в правильному 5-кутнику? Знайдіть принаймні дві та отримайте приз! А в 10-кутнику?

А хто на портретах?

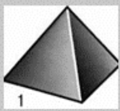
Рис. 3. 6. Математична газета з підсумками роботи за проектом «Паркети»

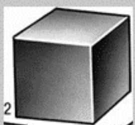
ГАРМОНІЯ ВРЯТУЄ СВІТ! І ГЕОМЕТРІЯ ЇЙ ДОПОМОЖЕ

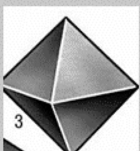
Кривий Ріг
Кропивницького , 22

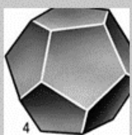
Ми у Вебі lizeum. ccjv

Телефон: (0564)53-13-00
Факс: (555)55449-9555
Эл.почта: KTANJA@nm.ru









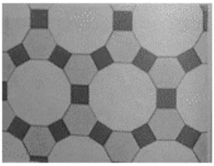
Жовтневий ліцей

Живи красиво!

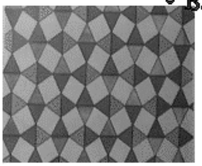
Гроші і математика—обоє люблять точний рахунок.

- Привіт! Ми геометри-паркетники 10-го класу Жовтневого ліцею Кривого Рогу. У нас є досвід по розробці паркетів та їх чудові колекції. Пропонуємо обмінятися. Наш ***головний проектувальник Антон*** процитував Платона, який сказав, що „Добрий початок – половина справи!"
- **Вам потрібно швидко і якісно виконати калькуляцію матеріалів паркету? Це до Ані.** Вона стане економістом або займатиметься ***менеджментом та маркетингом***. Про всяк випадок, занотуйте адресу.
- А школяреві заробити гроші? Не обмініть увагою наш конкурс проектів паркету для кабінету математики! Переможцеві директор обіцяє солідний приз! Надсилайте проекти до 23 жовтня на нашу електронну адресу. Детальніше з умовами конкурсу можна ознайомитися на веб-сайті «Юний паркетник»

Увага! Конкурс.

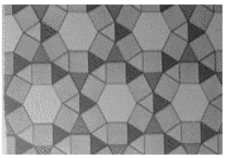


Автор К. Мітюн

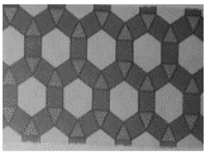


Автор С. Лобанов

З колекції ClipArt



Проект А..Ахмедової



Проект К. Кулигіна

Проект К. Булигіна В GRAN-2D

У древніх греків

Правильних **многогранників** існує лише п'ять: ***тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр.*** В ідеалістичній картині світу, даній давньогрецьким мислителем ***Платоном***, чотири з них втілювали чотири стихії: ***вогонь, землю, воду, повітря***. А п'ятий символізував ***весь навколишній світ***, латинською ***quinta essencia „п'ята сутність".*** Поставте слова у правильну відповідність! Намалюйте

Який зв'язок існує між пантофлями, правильними многокутниками та Маріїнським палацом

Пентагон і пентаграма. Що спільного?

На могильному камені якого математика побудований правильний сімнадцятикутник і чому?

Математична газета з підсумками роботи за проектом «Паркети»

Ліцейська газета (Ліга)

Жовтневий ліцей м.Кривий Ріг Випуск 12

Мотиви українських вишивок

Орнаментальні мотиви українських вишивок сягають своїм корінням у місцеву флору та фауну, в історичну традицію. У давнину основні орнаментальні мотиви відображали елементи символіки різних стародавніх культів. За мотивами орнаменти вишивок поділяються на три групи: геометричні (абстрактні), рослинні, зооморфні (тваринні). Геометричні орнаменти притаманні всій слов'янській міфології. Вони дуже прості: кружальця, трикутники, ромби, кривульки, лінії, хрести (прості й подвійні). Важко судити, який зміст вкладався в ці символи раніше. Сьогодні на основі їх в народній вишивці широко використовуються такі мотиви, як "баранячі роги", "кучери", "кудрявці", гребінчики"тощо. В орнаменті подільських вишивок трапляється мотив "кривульки", або "безконечника", який відомий ще з часів трипільської культури, тобто значно раніше, ніж славнозвісний грецький меандр. Зигзагоподібний меандровий орнамент зустрічається у вишивках західних районів Поділля. До цього виду орнаментальних мотивів належать "сосонки", "хвощ"та "перерви", що набули поширення в південних та західних районах Поділля. Відомий взір "рожи" (зірки, розетки) представляє собою перехід від геометричного до рослинного орнаменту. Іноді він нагадує зображення сонця.

Традиційний український одяг

Українські рушники

Зверніть увагу

- **У ліцеї розпочав роботу гурток «Вишивальниці» і «Модельєри»**
- **Триває конкурс «Вишитого геометричним візерунком рушничка» для кабінету української мови і літератури**
- **Організовується поїздка до Черкас. Планується відвідання музею «Українських рушників»**

Український традиційний одяг Наддніпрянщина

В цьому випуску

Геометрія українського орнаменту

Найпростіші геометричні орнаменти, що часто зустрічаються в орнаментах вишивок східнослов'янських народів, здогадно розшифровуються: пряма горизонтальна лінія — земля, хвиляста — вода, змія, квадрат, поділений на чотири частини, — вінця нового будинку-зруба або засіяне поле. Ромбомеандровий узор, який ми знаходимо в українських вишивках у вигляді ромба, ромба з гаками, подовженими боками, графічно відтворює малюнок дентину на зрізі бивня мамонта. У пізньопалеолітичну добу він був символом мамонта-блага, а далі — в землеробських культурах — символом родючості. Вишивальниці у своїй роботі використовують всі основні геометричні фігури та їхні поєднання: кола (символи сонця) в середині яких розміщуються розетки, складені з ромбів; ромби можуть бути однією фігурою та поділені на частини, також з крапками в середині (засіяний лан, символ родючості, крапки - зерна, зародки майбутнього життя; ромби, складені у квітку - "повна рожа" також солярний знак, "орнаментальний мотив магічного ромба - символу родючості - має назви: "решітка", "очі", "перші музики"..."

Газета з підсумками роботи за проектом «Геометрія українського орнаменту»

Жовтневий ліцей
м.Кривий Ріг Випуск 12

Кропивницького, 63

Телефон: (0564)53-13-00
Эл. почта: ktanja@nm.ru

Ліцей

Мистецтво орнаменту містить у неявному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики
Герман Вейль

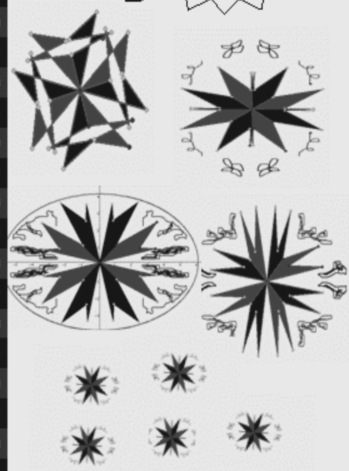
Привіт, ви завітали на сторінку юних вишивальниць. Тут ви дізнаєтесь деякі цікавинки про нашу роботу та зможете ознайомитися з кращими вишиванками.

Ексклюзив від Юлії Тимошенко

Традиційний український одяг у сучасній обробці

У понеділок Юлія Тимошенко вирішила виглядати бездоганно від коси до підборів. На урочистих зборах власного блоку вона, вдруге за останні кілька місяців, з'явилася у національному вбранні ексклюзивної ручної роботи. На сцену палацу "Україна" Тимошенко вийшла, як завжди, у всьому білому. Але цього разу око БЮТівців і гостей урочистого зібрання радував не новий "Луї Віттон", **а святкова вишиванка, а до неї розшиті жилетка і довга спідниця у ніжно кремових і зеленуватих тонах.** На питання, хто саме робив костюм, Тимошенко відповіла, що це була "колективна праця". "Це історична традиційна вишивка, яка зібрана за спеціальними історичними книжками. Проте не все у вбранні Тимошенко цього дня було "колективною працею" українських майстринь. Над дечим попрацювали і французи

Створено за допомогою GRAN



Газета з підсумками роботи за проектом «Геометрія українського орнаменту»

сприяють тому, що школярі можуть відчути красу і потужність методів геометричних перетворень. При побудові розеток, для поділу прямокутників у золотому відношенні доцільно застосовувати GRAN-2D. За допомогою цього засобу можна також здійснювати деформації візерунків до осей.

Детальніше зупинимося на особливостях побудови „квітки" (рис.3.7). Питання, як можна за допомогою GRAN-2D створювати калейдоскопи, розглядалося в п. 2.4, рис.2.21. Першу пелюстку будують у формі семикутника. Якщо квітка має симетрію обертання порядку *n*, то для того, щоб пелюстки не перекривалися, многокутник потрібно розміщувати всередині кута *360°/n*. Для побудови решти пелюсток за допомогою GRAN-2D застосовують вмонтовану послугу повороту. Для кожної пелюстки здійснюємо ланцюжок операцій *Об'єкт – Перетворення – Параметрично – Поворот*. Вказують центр повороту (в даному випадку – центр кола), кут; відмічають галочкою, що потрібно створювати нову ламану і прив'язувати її до початкової. Оскільки у квітці дванадцять пелюсток, то повертаємо початковий многокутник на кути, які кратні 30°.

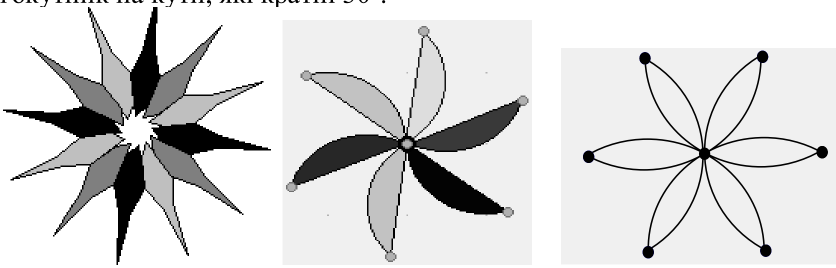


Рис. 3. 7. Квітка для оздоблення паркету

В електронному підручнику для учнів „Відкриття геометрії засобами пакета DG" поворотній симетрії приділено значну увагу. Оскільки в DG нема вмонтованого перетворення „Поворот", то потрібно створювати відповідний „Макрос". Що ж стосується того, чи не можна створити макроконструкцію, щоб побудувати одночасно всі пелюстки, то і в GRAN-2D, і в DG це питання вирішується майже однаково. Початковий семикутник симетрично відображають, наприклад, відносно прямої, що проходить через дві точки, які лежать на одній стороні кута, і створюють макроконструкцію (вихідні об'єкти сім точок, результуючі – п'ять симетричних точок і симетричний многокутник), повторюють операцію одинадцять разів. Тоді на основі побудованої фігури краще створити ще один макрос, щоб уже за початковим семикутником будувати одразу всю квітку. Перевага побудови через многокутники перед побудовою за дугами (справа) в тому, що пелюстки простіше можна розфарбувати у різні кольори, зробити розрахунки площі та периметра. Побудову центральної квітки за допомогою GRAN-2D виконують з використанням послуги *Дуга кола*. Щоб розфарбовувати її, потрібно у властивостях зазначити, що це *Сегмент*. Зафарбувавши його, повертають на кути кратні 60°.

Щоб розвивати творчу уяву та фантазію, доцільно запропонувати учням побудувати поворотні калейдоскопи та калейдоскопи симетрій. Виконання цього

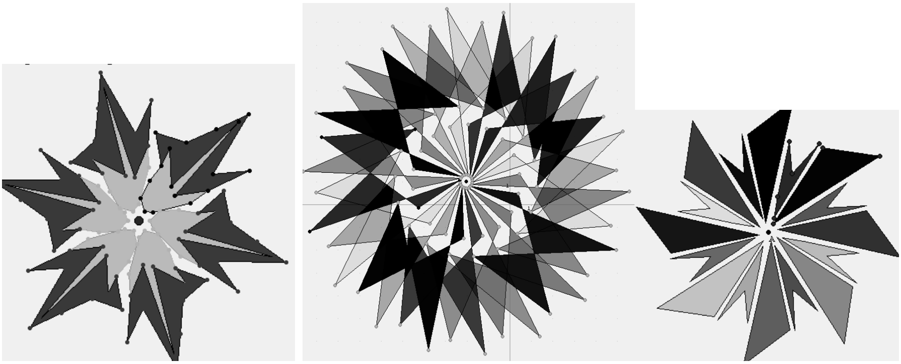


Рис. 3. 8. Побудовано калейдоскопи (GRAN-2D)

творчого завдання викликає інтерес як в учнів математичного класу, так і в суспільно-гуманітарного. Приклади створених малюнків наводимо на рис. 3.8.

Значно підвищує інтерес школярів до вивчення математики *дидактична гра*. Вплив її на школярів проявляється в тому, що гра вносить деякий елемент невизначеності, що збуджує, активізує розум, налаштовує на пошук оптимальних рішень. Використовуючи у навчанні дидактичну гру, вчитель може розвивати у школярів такі компоненти творчих якостей як фантазія, творча уява, образність мислення. Л.В. Тополя [107], М.Е. Марко[1] (С.18) виокремлюють наступні притаманні педагогічній грі риси: вільна розвиваюча діяльність, що починається за бажанням учня, заради задоволення від самого процесу діяльності, а не тільки від результату (процедурне задоволення); творчий, в певній мірі імпровізаційний, активний характер діяльності (поле творчості); емоційна піднесеність діяльності (емоційна напруга), що передбачає як суперництво, так і співпрацю в команді; змагання та ін.; наявність прямих чи непрямих правил, що відображають зміст гри, логічну і тимчасову послідовність її розвитку.

За характером педагогічного процесу виділяють такі групи ігор: а) навчальні, тренувальні, контролюючі, узагальнюючі; б) пізнавальні, виховні, розвиваючі; в) репродуктивні, продуктивні, творчі та інші. Дидактична гра, що використовується як засіб розвитку пізнавальної активності школярів, є грою за готовими правилами. Специфіку ігрової технології в значній мірі визначає ігрове середовище. Л.В. Тополя серед видів дидактичної гри виокремлює дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою. Мова в [107] йде про можливості відкриття певних закономірностей у ході комп'ютерного експерименту з використанням GRAN-2D, але в той же час мало висвітленим залишилося питання, як використовуючи ППЗ в дидактичній грі, можна розвивати фантазію учнів, формувати естетичні якості школярів.

Починаючи вивчення *декартових координат*, доцільно запропонувати учням міні-проект – створити колекцію малюнків „У світі тварин", „Квіти мого

---

[1] Марко М.Е. Дидактичні ігри на уроках математики. – Ужгород: Авторський навчально-виховний комплекс, 2003. – 141 с.

міста” та ін. Радимо запропонувати школярам завдання: відтворити на площині ланцюжок, заданий парами чисел, за яким приховано зображення якоїсь фігури, тварини тощо (рис.3.9). У домашньому завданні бажано виконати обернене: побудувати малюнок, описати його координатами, запропонувати загадку друзям. Скільки радості з’являється в очах учнів, коли складені ними завдання відгадують однокласники і схвально їх оцінюють! Виконання завдання класифікуємо як дидактичну гру-загадку. Його виконання розвиває в учнів фантазію, навчає бачити красу ліній у математиці, виховує зібраність, охайність, уважність. Виконані малюнки (рис. 3.9, 3.10, 3.11) є варіативними. Їх можна використати при вивченні інших тем. Наприклад, складати рівняння прямої, для різних відрізків порівнювати кутові коефіцієнти, обчислювати відстані між точками, знаходити площі фігур. Якщо малюнки виконувати за допомогою ППЗ, то учні оперативно зможуть здійснювати самоперевірку розв’язаних завдань.

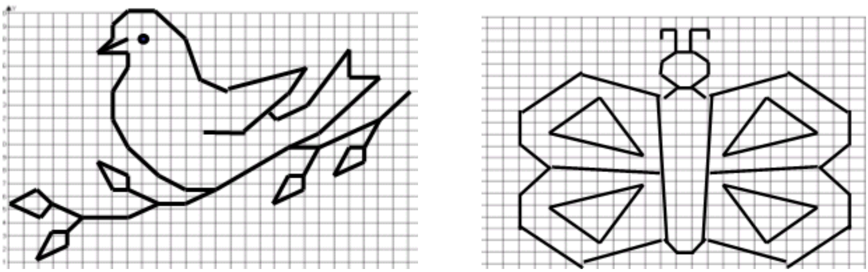
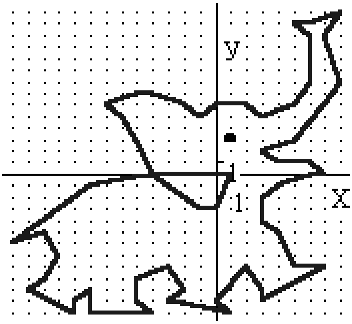


Рис. 3. 9. Синичку та метелика побудовано як об’єкти типу *Ламана*



(1,0)	(0,-3)	(-1,-3)	(-4,0)	(-5,3)	(-6,5)
(-7,6)	(-5,7)	(-4,7)	(-2, 6)	(-1,5)	(0,6)
(2,6)	(3,5)	(5,6)	(6,8)	(6,12)	(5,13)
(6,13)	(8,14)	(7,12)	(8,8)	(7,6)	(5,3)
(3,2)	(4,1)	(6,1)	(7,0)	(6,0)	(4,-1)
(3,-2)	(3,-4)	(4,-5)	(5,-8)	(7,-8)	(3,-11)
(3,-10)	(2,-8)	(0,-11)	(1,-12)	(-3,-11)	(-2,-10)
(-3, -8)	(-5,-9)	(-5,-11)	(-4,-12)	(-8,-12)	(-8,-10)
(-9,-11)	(-9,-12)	(-12,-10)	(-11,-9)	(-10,-7)	(-11,-5)
(-13,-6)	(-8,-1)	(-4,0)	око (1,3)		

Рис. 3. 10. Веселе слоненя. GRAN1, *Об’єкт ламана,* дані подано в рядках

Зазначені завдання можна виконувати як вручну, так і з використанням ППЗ. Наприклад, GRAN. Для цього необхідно створювати об’єкти типу *Ламана.* Зазначимо деякі особливості застосування ППЗ для виконання завдання. Вводити координати точок в таблицю радимо використовуючи послугу „*Точки з екрану*”. При такому введенні учні краще засвоять зміст поняття „координати точки”. А ось для перевірки правильності побудованого ланцюжка, що описує власний малюнок учня, краще створювати об’єкт *Ламана,* заповнюючи таблицю координат точок з клавіатури (рис.3.10). Щоб малювати за допомогою GRAN-2D, спочатку доцільно налаштувати параметри програми. Потрібно зазначити:

у *Властивостях точок* не відображати назву проставленої точки, але можна відображати координати, щоб здійснювати оперативний контроль виконання завдання. Якщо точка проставлена правильно, у властивостях можна зняти помітку для координат. Крім того, в GRAN відображаються поточні координати курсора. Для графічної області слід зазначити необхідність побудови координатної сітки та всіх міток на осях координат. Щоб частину площини, обмеженої ламаною, можна було розфарбувати, необхідно побудувати замкнену ламану (рис.3.11). Передбачена можливість змінювати побудовану ламану – додавати чи вилучати певні її вершини. Виправляти допущені помилки у побудові ламаних за допомогою GRAN-2D нескладно, тому процедура корекції не викликає в учнів роздратування чи невпевненості у собі.[*]

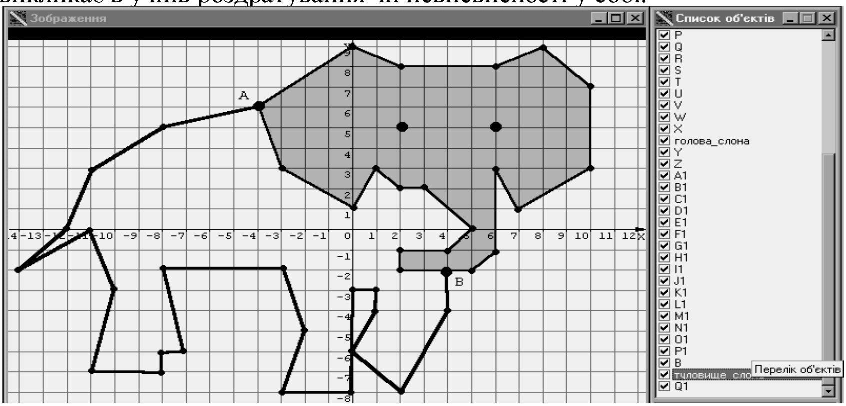


Рис. 3. 12. Голову слоненяти побудовано як замкнену ламану (GRAN-2D)

Вивчаючи тему *„Круг та його частини”,* пропонували учням створити колекцію малюнків, в яких приховані дані геометричні фігури (рис. 3.12). Маючи необмежений час для виконання домашнього завдання, можливість дібрати в літературі потрібний матеріал, порадитися з друзями, учні можуть самовиразитися, створюючи малюнки, отримати позитивну оцінку однолітків та вчителя. Завдяки виконанню подібних творчих завдань у школярів зміцнюється позитивне уявлення про себе, підвищується внутрішня мотивація, інтерес до навчання. Для побудови фігур, обчислення периметра чи площі їх частин можна застосувати ППЗ GRAN-2D. Задаючи в налаштуваннях програми кількість значущих цифр для розрахунків, учні можуть оцінювати похибку наближених обчислень. Нагадаємо, що для побудови дуги за допомогою GRAN-2D необхідно вказати на 5 точок – центр дуги, початок і кінець радіуса, дві точки, що разом з центром кола задають початковий та кінцевий напрями (поворот радіуса відбувається проти часової стрілки). Щоб зробити малюнок яскравим, привабливим, його можна розфарбувати різними кольорами, нанести штриховки.

Серед творчих завдань з алгебри і початків математичного аналізу пропонували завдання створити колекцію малюнків, кожна лінія в яких

[*] Всі тварини рівні. Але деякі тварини більш рівні, ніж інші. *Дж.Оруелл*

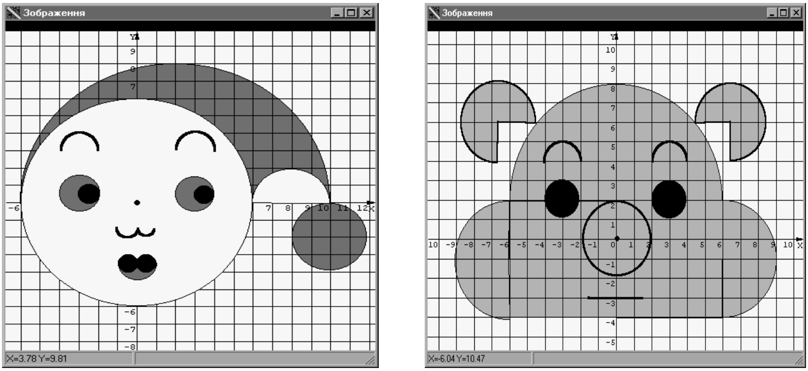


Рис. 3. 12. Побудовано з використанням послуг *Коло, Дуга кола (сегмент)*

описана графіками функціональних залежностей. У формі конкурсу художників–математиків рекомендують провести практичне заняття побудови графіків функцій і автори посібника[1]. На уроці чи спецкурсі бажано об'єднати учнів у групи і кожній з них запропонувати системи рівнянь чи нерівностей, якими зашифровано малюнок. Переможе та команда, яка краще справиться з побудовою графіків, записаних на аркушах. Побудову можна здійснити як вручну, так і з використанням зазначених програм. Виконуючи завдання, учні оперують поняттями області визначення і області значень функції. При розшифровці рис. 3.13 у школярів можуть виникнути проблеми при побудові залежностей з модулями, а саме - "руки" $y = 2\big||x| - 2\big| - 2$ та "рукавів" $y \le -2(|x| - 2)^2 + 3{,}5$.

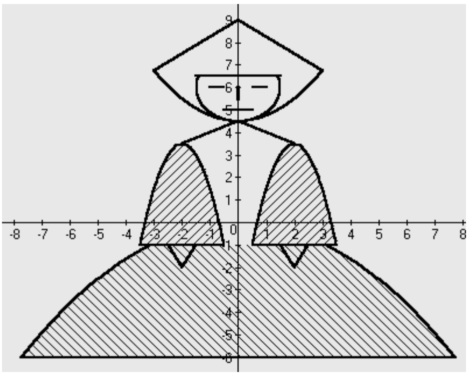


Рис. 3. 13. ГМТ побудовані за рівняннями чи нерівностями

Завдання з тренувального перейде в розряд розвиваючого, якщо запропонувати учням описати рівняннями малюнок, виконаний в координатній пло-

[1] Скобелєв Г.М., Берман В.П. Математика в позаурочний час. – К.: Радянська школа, 1973. – 160 с.

щині. Тому при вивченні теми „*Побудови графіків функцій за допомогою елементарних перетворень*” актуальним буде творчий проект „Малюємо графіками функцій”. Кінцевим продуктом в проекті стане колекція малюнків. Завдання для школярів будуть корисними у тому смислі, що закладають базу для усвідомлення практичного застосування матеріалу – опису графічних зображень за методом функціонального подання. Учням доступно вивчати предмет в ігровій формі. При цьому наявний елемент заохочення, ігровий ефект. Школярі мають можливість проявити нестандартний підхід, творчість, розкрити прихований потенціал дослідника, винахідника. Разом з тим, здійснюється особистісно орієнтований підхід у навчанні, що забезпечує диференціацію та індивідуалізацію в досягненні певного рівня знань, умінь та навичок [46], [52].

Вивчаючи функції в класах з поглибленим вивченням математики, подаємо учням добірку рівневих нестандартних завдань. У цих завданнях здійснюється акцент на закріплення учнем основних взаємопов’язаних інформаційних блоків теми та виявлення і закріплення певного способу розумових дій. Завдання, запропоновані в проекті, перекликаються з наведеними в тому плані, що школярам доводиться оперувати поняттями області визначення та області значень функції; досліджувати поведінку функції на відрізках області визначення. Необхідно з’ясувати вплив параметрів функції на розміщення графіка функції на координатній площині, виявляти певні закономірності; встановлювати відповідність між графіками функцій та їх формулами, що сприяє більш глибокому розумінню призначення параметрів, знаходження відповідних відрізків області визначення; дослідження значень відповідних параметрів функції, що впливають на графічне зображення при його переміщенні на координатній площині. Школярам доводиться використовувати відомості про властивості функції. Наприклад, коли прямі паралельні; коли вітки параболи напрямлені вгору, коли абсциса вершини параболи від’ємна тощо? Вільне володіння знаннями з теми у поєднанні з творчою фантазією при створенні та описуванні малюнків сформує міцний фундамент для вивчення наступних розділів математики.

Виявляється, що в окремих учнів виникають проблеми при створенні малюнка для описування, а не лише при добиранні функцій. Простіше побудувати графік функції за готовою формулою. Інша справа, коли потрібно проаналізувати – графіки яких функцій (чи частини графіків) нагадують ті чи інші криві, дібрати формулу, з’ясувати вплив коефіцієнтів, можливо, зробити корекцію малюнка тощо. Виконання малюнків створює передумови формування не лише творчої уяви і фантазії, але й таких пізнавальних якостей, як уміння аналізувати, синтезувати, креативної якості – здібності до формування залежності.

За допомогою GRAN1 можна не тільки побудувати графіки функції, але й наближати криві графіками многочленів від першого до сьомого степеня включно. Для цього обирають в GRAN1 тип залежності „Таблична”, створюють об’єкт *Таблиця*, зазначають степінь многочлена, будують графік. Звернемо увагу на можливість добору коефіцієнтів, наприклад, квадратичної функції, через зміну параметрів у формулі $y = ax^2 + bx + c$. В GRAN1 для цього створюють об’єкт $y = P1 * x\hat{}2 + P2 * x + P3$, де *P1, P2, P3* – коефіцієнти, які можна змінювати, якщо рухати бігунок параметра. Більша затрата часу при такому доборі функції компенсується тим, що учні глибше усвідомлюють зміст параметрів.

Рис.3.14 „Дівчина-красуня” створений за допомогою графіків квадратичних та лінійних функцій. Рівень складності виконання малюнка відповідає вимогам до рівня знань учнів гуманітарних класів. Добірку функцій подаємо у форматі для GRAN1, поряд вказуємо проміжок, на якому задано функцію:

1) Y(X)=X^2, x є [-10;10]; *2) Y(X)=X^2+20, x є [-5;5];*
3) Y(X)=45, x є [-5;5]; *4)Y(X)=100, x є [-10;10];*
5) Y(X)=-X^2/4+125, x є [-12;12]; *6)Y(X)=-X^2/4+120, x є [-8;8];*
7)Y(X)=-X^2/4+115, x є [-6;6]; *8) Y(X)=-X^2/4+110, x є [-4;4];*
9) Y(X)=80, x є [-5;-3]; *10) Y(X)=80, x є [3;5].*

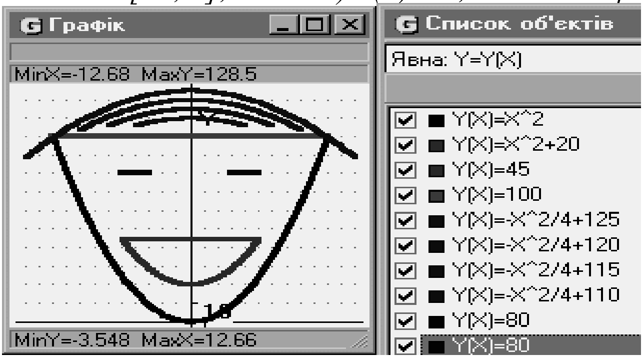


Рис. 3. 14. Малюнок „Дівчина-красуня” виконано за допомогою GRAN1

Завдання на створення малюнків можна диференціювати виставленням вимоги: для описування кривих, що мають вертикальну вісь симетрії задіяти перетворення $y = f(|x|)$, з горизонтальною віссю – перетворення $|y| = f(x)$. Учням, які поглиблено вивчають математику, можна запропонувати задіяти функції, які містять цілу та дробову частину числа. Наприклад, „рівняння трави” задається формулою періодичної функції $y = k\{x\} + b$. За допомогою GRAN1 для цього створюють об’єкт явного типу задання $y = k * (x - \operatorname{int}(x)) + b$. Дробова частина представлена як різниця між числом та його цілою частиною. Для розфарбовування частин малюнка учні будують ГМТ, задані відповідними нерівностями і перевіряють правильність виконання за допомогою програмного засобу.

Малюнок „Котик” (рис. 3.15) описано поданими нижче рівняннями та нерівностями у форматі для Advanced Grapher, доступними для побудови у 9-му класі при поглибленому вивченні математики.

Об’єкти явного виду задання:

*1) y=x*x/4, x є [-6,5;6,5];* *2) y=10, x є [-5;-3];*
3) y=2, x є [-1;1]; *4) y=9, x є [-4;-2];*
5) y=9, x є [2;4]; *6) y=x*x+1, x є [-1;1];*
*7) y=-0.25*x^2+abs(x)+3,* *8)y=-0.35*x^2+abs(x)+3, x є [-3;3];*
*9) y= -0.5*x^2+abs(x)+3, x є [-2,5;2,5].*

Об'єкти неявного виду задання *f(x,y)=0, f(x,y)<0, f(x,y)>0*:

1) *y+abs(abs(x)*2-8)-15=0,   x є [-10;10];   y є [10;15];*
2) *y+abs(abs(x)*2-8)-12<0,   x є [-10;10];   y є [10;12];*
3) *y+7*abs(x)-7<0,   x є [-10;10];   y є [5;7];*
4) *(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.5=0*
5) *(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.05<0*
6) *y+2*x^2-1.5<0,   x є [-10;10]; y є [1;2].*

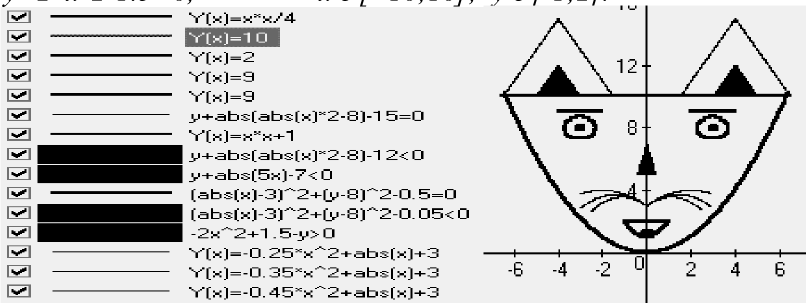


Рис. 3. 15. Малюнок „Котик" виконано за допомогою Advanced Grapher

При побудові ГМТ, заданих рівняннями, враховують особливості. Наприклад, графік функції *y= -abs(abs(x)*2-8)+15* потрібно будувати двічі, оскільки за один раз умову області визначення функції $1.5 < |x| < 6.5$ подати не можна. Якщо ж для побудови ГМТ створити об'єкт неявного типу задання, то побудову можна здійснити за один раз, оскільки при створенні вказують як відрізки для *x*, так і для *y*. У побудовах використано лінійну, квадратичну функції, функції з модулями, задіяне також рівняння кола.

Рівень складності представлення функціональних залежностей на рис. 3.16, 3.17, 3.18 відповідає матеріалу для 9-го класу при поглибленому вивченні математики. Якщо малюнок виконувати за допомогою Advanced Grapher (рис.3.18), то можна зберегти у файлі заштриховані ГМТ, задані нерівностями. Щоб побудувати ГМТ, заданих нестрогою нерівністю, слід створити два об'єкти – графік рівняння та ГМТ, заданих строгою нерівністю. Зменшити кількість об'єктів у переліку можна, якщо розглянути перетворення з модулем.

„Очі" (рис. 3.18) можна побудувати, якщо створити об'єкт неявного виду за формулою (abs(x)-6)^2+(y-3)^2-1<0. Зобразити симетричні „вуха" таким чином не вдасться, оскільки не зможемо з використанням програмного засобу нерівністю представити область задання. Якщо ставиться вимога зменшити кількість об'єктів, то рівень складності завдання підвищується. Отже, складність завдання можна змінювати виставленням певних вимог.

Вивчаючи в 10-му класі *тригонометричну форму комплексного числа,* школярі побіжно ознайомлюються з полярною системою координат. Щоб краще зрозуміти спільне та відмінне між обома системами координат, доцільно запропонувати учням побудувати кілька кривих, заданих у полярних координатах, за допомогою ППЗ. У квітки, заданої формулами *R(F)=5*Sin(P1*F), R(F)=5*Sin(P1*F+P2)* (рис. 3.19, зліва) у полярних координатах, при зміні

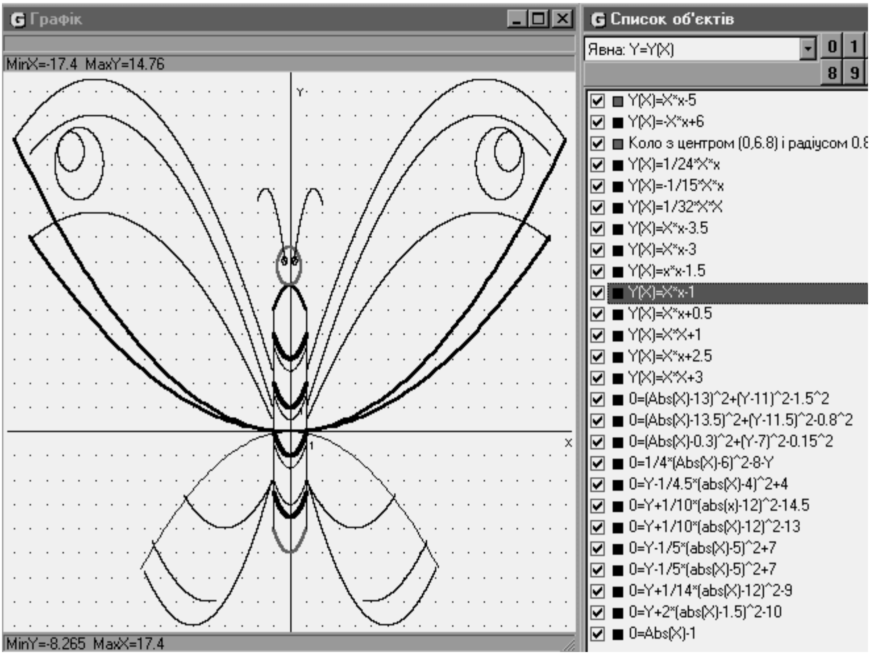


Рис. 3. 16. Метелик. Справа подано перелік об'єктів у форматі GRAN1

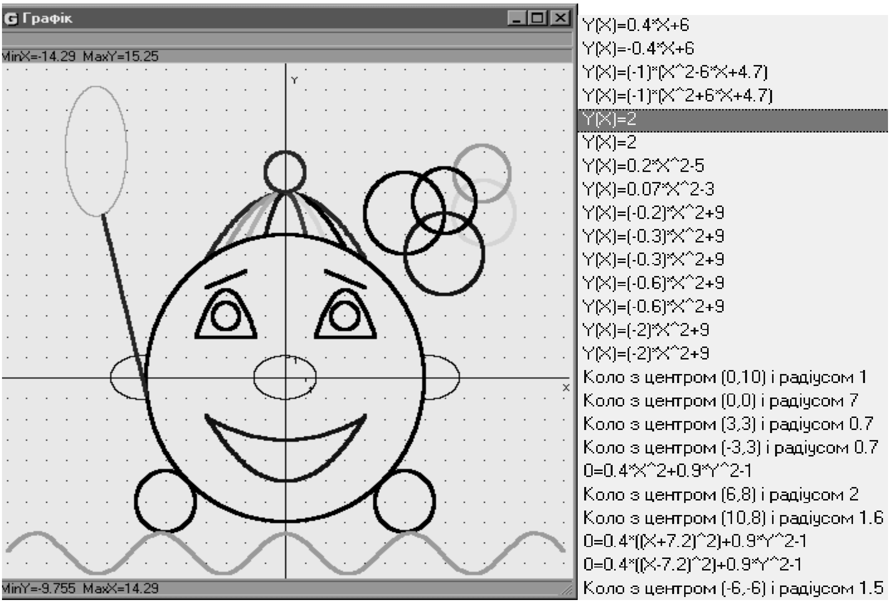


Рис. 3. 17. Капітошка. Справа перелік об'єктів у форматі GRAN1

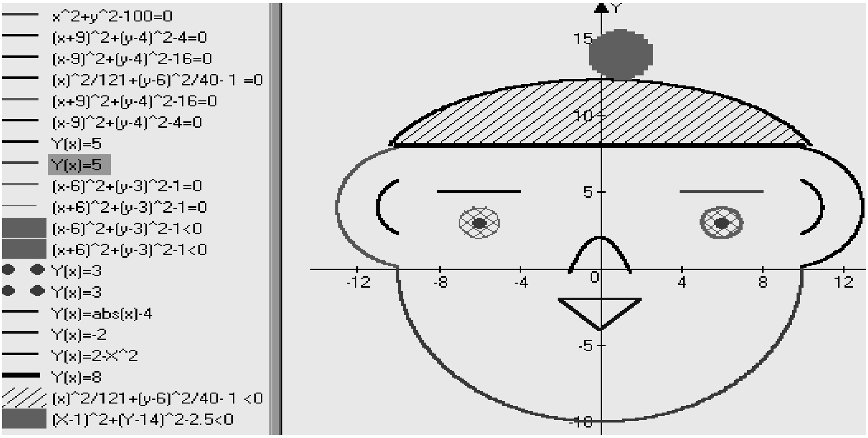


Рис. 3. 18. Хлопчик. Зліва перелік об'єктів у форматі Advanced Grapher

параметра P2 рухаються по колу пелюстки, оскільки змінюється початкова фаза. При цьому *P1=4.99*. За допомогою таких кривих побудовано „п'ятипелюсткові троянди" на рис.2.1. На рис. 3.19 (справа) представлено криві, побудовані в полярній системі координат за формулами *R(F)=9*Sin(101*F)+Cos((P1+1)*F); R(F)=4*Sin(99*F)+Cos((P1+5)*F); R(F)=1*Sin(97*F)+Cos((P1+3)*F)*. Змінюючи значення параметра P1 і величину полярного кута, відслідковуємо перетворення різнобарвної квітки.

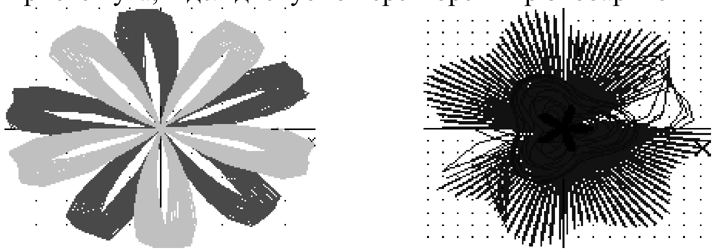


Рис. 3. 19. Графіки залежностей у полярних координатах

На рис. 3.20 побудовано криві, задані в полярних координатах і параметрично (циклоїда), кола і параболи. Побудови перших двох кривих не передбачені шкільною програмою. У цьому разі використання ППЗ для побудови кривих дозволяє учневі самостійно здобувати нові знання, що перевищують вимоги стандарту. Учень може розглядати різні комбінації відомих йому функцій, зокрема, періодичних, створювати різноманітні композиції. Важливо, щоб змоделювавши подібні візерунки, школярі проаналізували, як побудовано графіки, з'ясували вплив параметрів. Тобто, від несвідомого перейшли до свідомого, щоб отримати підґрунтя для нових творчих актів.

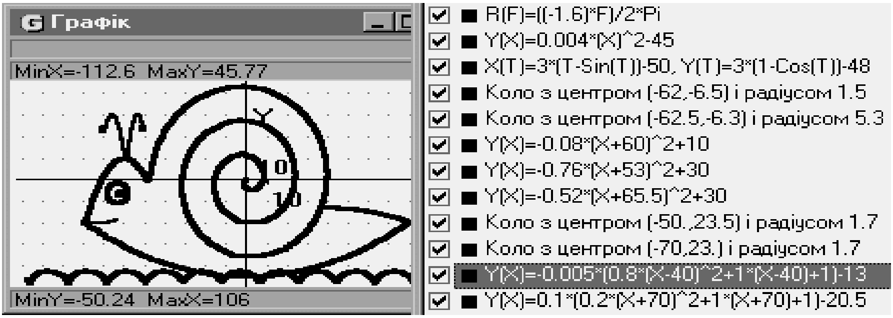


Рис. 3. 20. Равлик. Приклади побудови кола за відомим центром і радіусом, парабол, кривих у полярних координатах і заданих параметрично

Вивчаючи теми *„Застосування похідної", „Застосування визначеного інтеграла",* впроваджували проекти „Бюро добрих послуг", в яких розглядали задачі практичного змісту. У проекті „Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач геометрії, фізики, економіки", група „інформатиків" представляла зразки розв'язування задач за допомогою ППЗ. У табл. 3.1 подано зміст творчо–пошукових завдань до теми „Інтеграл", які можуть виконувати школярі, готуючись до уроків систематизації і узагальнення у формі конференції. Розробку складено на основі інтерактивної технології кооперативного навчання „робота в малих групах", „пошук відомостей"; побудовано на інтегративній основі (математика + фізика + інформатика). На конференції доповідають про результати пошукової роботи математики, фізики, інформатики, економісти, історики. Учні, об'єднані у групу „Інформатики", наближено обчислювали визначені інтеграли через самостійно створені програми чи за допомогою GRAN1. Девізом конференції обрали слова Івана Франка: "Хто пірнув до дна в глибину знань, той, хоч і труду мав досить, дивні перли з тої глибини виносить".

Наведемо приклади завдань на *обчислення визначених інтегралів.*

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

а) $y = 3x - x^2 - 1.5$, $\quad y = 0.5*|2x-3|$; б) $y = 7 - |x|$, $\quad y = 0.25*\left|4 - x^2\right|$.

Щоб обчислити площу фігури за допомогою ППЗ GRAN1, потрібно побудувати графіки функцій, наближено визначити межі інтегрування, розташувавши курсор в точках перетину графіків (рис. 3.21), а потім скористатися послугою *Інтеграл.*

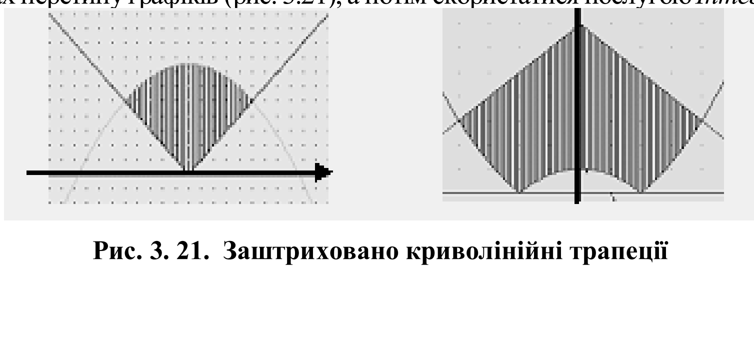


Рис. 3. 21. Заштриховано криволінійні трапеції

Таблиця 3. 1

Зміст завдань до підсумкового заняття теми „Визначений інтеграл”

	План проведення учнівської конференції, зміст творчо-пошукових завдань для груп	**Виконавці**
1	Повідомлення теми, мети уроку, мотивація навчальної діяльності	
2	Інструктаж щодо плану роботи конференції, визначення очікуваних навчальних результатів	
3	Історична довідка. Підготувати повідомлення про видатних математиків, чиї імена пов’язані з розвитком теорії інтегрального числення	Історики
4	Обговорення питань конференції згідно з тематикою	
4а	Основні методи інтегрування: ▪ теоретичний блок, ▪ обчислення інтегралів за методом розкладання, зокрема, на прості дроби, ▪ підготувати завдання з використанням геометричного змісту визначеного інтеграла, ▪ підготувати приклади на використання заміни змінної, на інтегрування частинами, ▪ з використанням прикладних програм, випереджаюче завдання	Математики Інформатики
4б	Застосування інтеграла в геометрії: ▪ теоретичний блок (обчислення площ фігур, об’ємів тіл), ▪ теоретичний блок (об’єми тіл обертання), ▪ підготувати добірки завдань на обчислення об’єму тіла обертання, ▪ на обчислення площі фігури, ▪ створити презентацію „Об’єми тіл обертання” за допомогою Microsoft PowerPoint, що містить теоретичні відомості, копії екранів GRAN	Математики Інформатики
4в	Наближені обчислення з використанням GRAN1: ▪ обчислення площі поверхні тіла обертання, об’єму тіла обертання, ▪ обчислення площі фігури, заданої формулою в полярних координатах (додаткове завдання), ▪ наблизити криву ламаною, оцінити точність обчислення площі фігури, об’єму тіла обертання	Інформатики
4г	Економічний зміст визначеного інтеграла, задачі з економіки: ▪ визначення коефіцієнта Джинні, ▪ застосування функції Кобба-Дугласа, ▪ визначення середнього часу на випуск одиниці продукції	Економісти

Закінчення табл. 3.1

4д	Застосування визначеного інтеграла у фізиці: ▪ теоретичний блок (систематизація типів задач, основні формули), ▪ задача на обчислення роботи газу, ▪ обговорення результатів дослідження з фізики, ▪ демонстрація дослідів, ▪ підготовка добірок задач з розв’язуваннями, ▪ задача на обчислення роботи для побудови піраміди Хеопса, ▪ історична довідка про єгипетські піраміди	Фізики
5	Підведення підсумків роботи. Добір матеріалів для випуску „Інформаційного дайджесту”	Всі групи

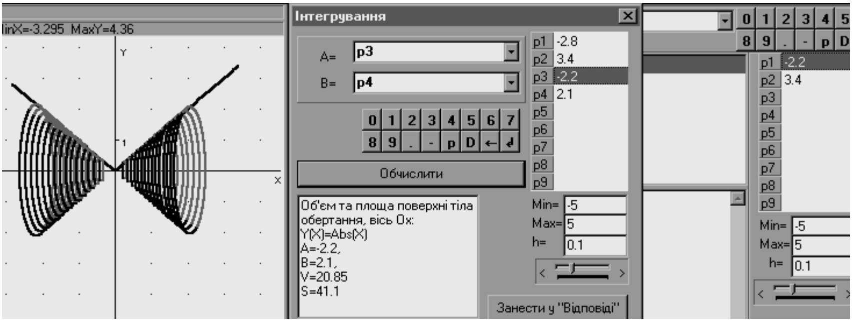


Рис. 3. 22. За допомогою GRAN1 отримано параметри для конуса

Для завдання а) спочатку обчислюють площу фігури обмеженої зверху параболою, потім площу фігури, обмеженої кутом, і знаходять різницю знайдених величин. Для завдання б) розв’язування вручну зведеться до обчислення інтеграла

$$S = 2\left(\int_0^2 (7 - x - 0.25(4 - x^2))dx + \int_2^4 (7 - x + 0.25(4 - x^2))dx\right) = 32 .$$

2. **Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням** навколо прямої *y=1* криволінійної трапеції, обмеженої кривими *Y=2+0.5sin2x, x=0; x=π / 2; y=1.*

Об’єм даного тіла буде рівним об’єму тіла обертання навколо осі *Ox* криволінійної трапеції, обмеженого кривими *Y=1+0.5sin2x, x=0; x=π /2; y=0.* Для отримання результату вручну, обчислюють інтеграл.

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (1 + 0.5\sin 2x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \sin 2x + 0.25\frac{1 - \cos 4x}{2})^2 dx = \pi(1 + \frac{9\pi}{16})$$

Для обчислення за допомогою ППЗ GRAN1 використовують послугу *Інтеграл \ Об’єм тіла обертання \ Вісь Ox*. При цьому зображається тіло обертання.

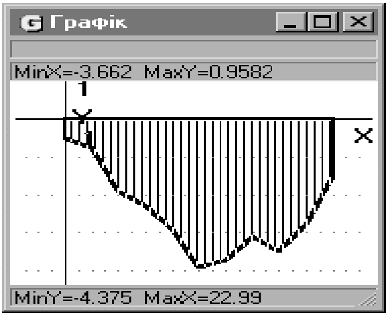
3. На рис. 2.8, 3.22 подані зображення тіл обертання для інших завдань. Щоб

отримати конус заданого об’єму чи заданої поверхні обертання, слід через параметри подати межі інтегрування і, рухаючи бігунок параметра, дібрати необхідне значення параметра (рис. 3.22).

4. Ширина річки *20 м*, заміри глибини у поперечному перерізі через кожні *2 м* наведено в таблиці 3.2, де *x* – відстань від берега, а *y* – глибина у метрах. Визначити наближено площу поперечного перерізу.

Таблиця 3. 1

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0,5	0,8	1,9	2,3	2,9	3,9	3,7	3,1	3,5	2,8	1,5



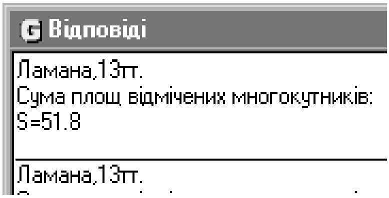


Рис. 3.23. Побудовано поперечний переріз русла річки

Щоб побудувати ескіз поперечного перерізу русла, слід обрати тип даних *Ламана* і занести в таблицю координати точок. Щоб можна було скористатися послугою *Операції з ламаними \ Площа многокутника*, необхідно додати ще дві точки *(0,0), (20,0)* і замкнути ламану. У вікні *Відповідь* отримаємо результат обчислення *51,8 кв. од.*

Вивчаючи тему „Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики”, школярі проводять різноманітні дослідження. Наприклад, вивчають на практиці розподіли статистичних ймовірностей; відслідковують курси валют; визначають зріст школярів, вагу, щоб дати рекомендації щодо харчування; досліджують якість знань; мелодійність мови через наявність м’яких приголосних, відповідних голосних букв та багато іншого. Особливу зацікавленість викликають практичні економічні завдання, які пов’язані з отриманням прибутків від операцій. Наприклад, розрахувати, яких розмірів головні убори і в якій кількості має шити фабрика, щоб отримати найбільший прибуток від пошиву зазначеної партії. Для цього школярам потрібно дослідити, які розміри уборів можуть бути взагалі та з якою частотою вони зустрічаються. Опрацювання результатів дослідження зручно виконувати як за допомогою ППЗ GRAN1, так і за допомогою Microsoft Excel. Школярам важче скласти практичні рекомендації за частотною таблицею, ніж розрахувати саму таблицю. Тому час, який вивільняється завдяки застосуванню комп'ютерних програм для опрацювання даних, доцільно використати на постановку задачі, на обговорення результатів дослідження.

Вивчаючи тему „Многогранники", організовували роботу учнів над проектом „Перерізи многогранників". Учнів об'єднували у групи залежно від того, які засоби для побудови будуть застосовуватися – Microsoft PowerPoint, динамічна геометрія GRAN-2D чи DG, ППЗ GRAN-3D. Виконувалися побудови перерізів за методом слідів та внутрішнього проектування на основі центрального чи паралельного проектування, комбінованим методом (детальніше п.3.3).

Отже, для формування активної, творчої, самосвідомої та відповідальної особистості, здатної до самореалізації у сучасному інформаційному суспільстві, на передній план виходять не тільки знання, уміння і навички, засвоєні учнем, а, насамперед, здатність особистості вчитися і здобувати нові знання, практичне застосування знань. Виокремимо ті ідеї навчання за методом проектів, які підкреслюють необхідність та доцільність його використання в процесі навчання математики, тому що: 1) сприяють фундаменталізації навчання через глибоке, усвідомлене засвоєння базових знань, що забезпечується за рахунок їх універсального використання в різних ситуаціях, передбачених роботою над проектом; 2) забезпечують розвиваюче навчання завдяки комплексному підходу до розробки навчальних проектів; в тому числі, сприяють розвитку творчих якостей учня, формуванню умінь самостійно конструювати свої знання, умінь орієнтуватися в інформаційному просторі; 3) стверджують особистісно орієнтований підхід у навчанні, підвищують внутрішню мотивацію школяра через гармонійне вбудовування освітнього процесу в логіку діяльності учня, що має для нього особистісний зміст; 4) вирішують в значній мірі проблему гуманізації навчання; роблять математику більш привабливою для тих учнів, рівень математичних знань яких невисокий.

Контрольні запитання і завдання

1. Дібрати матеріали для організації навчання за проектною технологією до однієї з тем. Продумати і сформулювати ключові та тематичні питання для учнів, скласти план проекту, план його реалізації, передбачити, як навчання за проектною технологією буде співвідноситися з класно-урочною системою навчання. Розробити форми оцінювання учнівських навчальних продуктів. Наприклад, для проекту "Геометрія українського орнаменту" (7-9 клас) розписати завдання для математиків, які створюють геометричні візерунки чи досліджують, які геометричні фігури використовуються в орнаментах. Якщо проект пропонується для 7-го класу, передбачити завдання для вишивальниць, модельєрів сучасного одягу з українським орнаментом, для художників.

2. Проаналізувати, які особистісні якості учнів можна формувати в ході реалізації розроблених проектів з використанням ІКТН математики.

3. Проаналізувати запропоновані на диску творчі проекти.

3.3. Розвиток просторової уяви і просторового мислення учнів

Просторове мислення як різновид образного мислення і важлива грань інтелектуального розвитку школяра відіграє значну роль в оволодінні знаннями основ наук. Оперування просторовими образами - це і вміння за плоским зображенням відтворити просторові форми і характеристики реального технічного об'єкта, і вміння уявити його в динаміці, у взаємозв'язках з іншими об'єктами. Вільне оперування просторовими образами необхідне при графічному моделюванні, яке опирається на математизацію та формалізацію багатьох областей знань, передбачає об'єднання їх у системи, виявлення структурних зв'язків. Розвиток здібностей до просторової уяви пов'язаний з вивченням стереометрії. Тому доцільне застосування в навчанні стереометрії ППЗ може сприяти розвитку просторової уяви і просторового мислення учнів. Деякі аспекти проблеми висвітлено в посібнику [30] М.І. Жалдака та О.В. Вітюка, в якому подано вказівки щодо використання ППЗ Gran-2D, Gran-3D в навчанні.

І.С.Якиманською відповідно до трьох типів оперування образами виділено три типи розвитку просторового мислення (низький, середній, високий) [127,121]. Цей показник позитивно корелюється з такими показниками, як широта оперування просторовим образом, повнота образу, його динамічність, узагальненість, зворотність та ін. Мета даного дослідження (продемонструвати можливості ІКТ у формуванні просторової уяви і просторового мислення як особистісних якостей учнів) конкретизувалася у завданнях: проаналізувати системи вправ, запропонованих в [113], [125], [127] з точки зору доцільності використовувати для їх виконання ППЗ; з'ясувати наявні можливості для створення бібліотеки наочностей (сучасної модифікації стереометричного ящика) засобами GRAN та DG; розглянути методику побудови перерізів многогранників площиною з використанням засобів ІКТ.

Як показує практика, значна частина старшокласників надзвичайно складно сприймає перехід „від площини" до „простору", не вміє читати рисунок, плоске креслення не сприймає як об'ємне. Учні відчувають труднощі при визначенні співвідношень між окремими елементами зображення, мисленно не можуть змінювати їх розташування, розділяти фігуру на частини чи, навпаки, „склеювати" її з наявних частин. З одного боку, це пов'язано з досить низькою графічною культурою багатьох школярів, оскільки для задач на побудову в шкільному курсі математики відводиться обмаль часу. З іншого боку, у 7-9 класах учні переважно оперують образами плоских фігур.

Згідно з [113], [125] ефективно розвиває просторове мислення школярів виконання таких типів вправ: 1) пошук зображення серед кількох даних для пред'явленого об'єкта; 2) знаходження об'єкта, що відповідає даному зображенню, з деякого набору об'єктів; 3) завершення зображення відомої фігури за її фрагментом; 4) ідентифікація різних зображень одного і того ж просторового об'єкта; 5) впізнавання фігури за її проекціями; 6) визначення взаємного розташування кількох фігур за їх зображенням; 7) оцінювання форми і розмірів фігури; 8) побудова проекцій заданої фігури; 9) побудова зображення об'єкта за його проекціями; 10) зображення об'єкта за його словесним описом; 11) виготовлення моделі за її кресленням, за пред'явленим об'єктом, за описом; 12) впізнавання і зображення об'єкта, отриманого (мисленною) зміною (за допомогою повороту, симетрії, паралельного перенесення) положення заданого об'єкта; 13) зображення перерізу заданих фігур (в тому числі після мисленного їх переміщення); 14) зображення частин фігури після її мисленного розтину.

Вважаємо, що вправи 1), 2), 6) відповідають низькому, 3), 4), 5), 7), 8), 9), 10), 11) – середньому, 12), 13), 14) – високому типу розвитку мислення.

Дослідження ефективності застосування ІКТН математики для розвитку просторової уяви розпочали з встановлення рівня розвитку просторових уявлень учнів. В ході експерименту використовували такі методи, як спостереження, бесіда, опитування. Були проведені діагностичні контрольні роботи на основі яких порівнювали результати роботи експериментального класу з контрольними. Розподіл учнів на три підгрупи відповідно до типу оперування просторовими образами дозволив підходити до розвитку просторової уяви учнів диференційовано, враховуючи індивідуальні особливості школярів, поступово ускладнюючи завдання, доповнюючи навчальний матеріал наочністю, фіксуючи увагу на практичному застосуванні знань. Дії з моделями, створеними за допомогою ППЗ, займають проміжну ланку між зовнішніми діями з геометричними тілами та мисленними внутрішніми діями. Наголосимо на тому, що мисленні дії повинні передувати зовнішнім, щоб задіяти та розвинути уяву учнів.

За допомогою GRAN-3D і GRAN-2D можна виконати значну частину вправ, що пропонуються для розвитку просторової уяви в [127], [113] 125]. Серед них відмітимо побудову розгортки паралелепіпеда, розрізаного вздовж семи ребер (GRAN-2D); проектування ламаної, яка проведена через ребра і грані куба; завдання пов'язані з поворотами многогранників; проекціями фігур (GRAN-3D) тощо. За допомогою ППЗ можна повертати побудовані поверхні, знаходити серед зображених фігури з певними властивостями. Наприклад, рівнобедрені, прямокутні трикутники; чотирикутники, у яких є пара паралельних сторін, рівнобічні трапеції тощо. Для деяких з представлених задач доцільно запропонувати учням самостійно виготовити моделі.

Дослідження за допомогою GRAN-3D проводяться як з базовими об'єктами, так і з самостійно сконструйованими, завдяки чому можна створювати бібліотеку наочностей. Доцільно запропонувати учням самостійно підготувати комп'ютерні моделі до задач. Наприклад, моделі пірамід, у яких вершина проектується в одну з вершин основи чи на одну з сторін; піраміди, в основі яких лежать прямокутники, ромби, трапеції чи інші многокутники. Учень за допомогою GRAN-3D може здійснювати різні обчислення, які стосуються многогранника чи тіла обертання, побудувати переріз многогранника площиною. За допомогою ППЗ потрібно здійснювати практичну роботу з просторовими об'єктами: змінювати їх положення (обертати навколо довільного центра на певний кут, паралельно переносити), деформувати, розділяти на частини;

демонструвати лінійні кути двогранних кутів, кут між прямою і площиною, спільний перпендикуляр мимобіжних прямих тощо. Кращому засвоєнню матеріалу учнями сприяє наявність у ППЗ режиму „Півтонового зображення", горизонтальних і вертикальних смуг прокрутки, що дає можливість розглядати тіла з усіх боків, у трьох проекціях – в режимах вироджених осей *Ox, Oy, Oz*.

Розвиває просторову уяву школяра створення многогранників за їх розгортками і описами. Колекцію правильних, напівправильних, зірчатих многогранників (всього 75) представлено у книзі М. Венніджера[1]. Для створення їх розгорток за допомогою GRAN-2D варто попередньо підготувати макроконструкції для побудови правильних многокутників за відомою стороною. Для демонстрації многогранників зручно підготувати презентацію, в слайди якої вмонтовувати кліпи з моделями зазначених многогранників, щоб в подальшому їх переглядати. На рис.3.24 представлено основу для розгортки ромбозрізаного кубооктаедра, виконану за допомогою GRAN-2D.

Використовуючи динамічні розгортки многогранників, створених за допомогою ППЗ, школярі здійснюють мисленні перетворення образів. Наведемо приклади задач на економію матеріалів, до яких зручно створити динамічні розгортки: 1) якими мають бути виміри відкритої коробки найбільшого об'єму, яку можна виготовити з прямокутного листа жесті; 2) виготовити повітряного змія у формі прямої трикутної призми з прямокутним трикутником в основі так, щоб вона мала задану площу бічної поверхні і найменшу суму довжин усіх ребер. Щоб обґрунтувати отримані за допомогою ППЗ результати (Для якої розгортки отримаємо найбільшу економію?), не обов'язково застосовувати апарат математичного аналізу. Наприклад, в другій задачі достатньо скористатися нерівністю Коші. Це дає змогу запропоновані задачі розв'язувати в ході вивчення теми „Елементи стереометрії" в 9-му класі.

Розгортка призми до другої задачі (рис. 3.25) майже однаково створюється за допомогою GRAN-2D і DG. Оскільки в основі призми за умовою лежить прямокутний трикутник, то гіпотенуза слугує діаметром кола, а вершина прямого кута розташована на колі. Будують розгортку призми врахувавши, що ребра для склеювання мають бути рівними. Створюють також динамічні вирази для обчислення площі бічної поверхні, суми довжин ребер, довжин кожного з катетів. В процесі руху точки вздовж півкола змінюється площа розгортки, ширина бокових прямокутників, тому потрібно коригувати висоту призми.

Нехай площа поверхні призми рівна 0.96 м^2, довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, що лежить в основі, 0.5 м. З площі бічної поверхні призми маємо: $(a+b+0.5)h = 0{,}96$. Довжина ребер рівна $l = 2(a+b+0.5)+3h$. Підставимо вираз з першої рівності в другу і отримаємо за нерівністю Коші,

[1] Веннинджер М. Модели многогранников. Пер. с англ. В.В.Фирсова. Под ред. и с послесл. И.М.Яглома, М., „Мир", 1974. – 236 с.

що $l = {}^{1,92}\!/_{h} + 3h \geq 2\sqrt{1,92 \cdot 3}$. Рівність виконується коли ${}^{1,92}\!/_{h} = 3h$. Знаходимо, що h=0.8. Тоді з системи рівнянь маємо a=0.3; b=0.4.

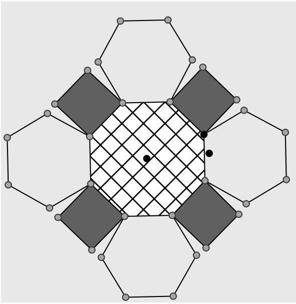


Рис.3. 24. Частина розгортки многогранника

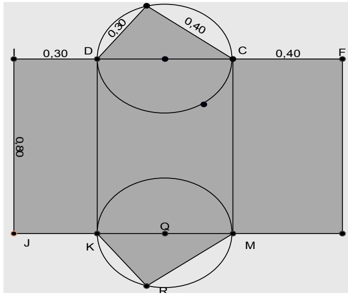


Рис. 3. 25. Розгортка призми

Розв’язуючи задачі на обчислення об’ємів тіл обертання за допомогою інтегралів, доцільно застосувати GRAN1. Побудови тіл обертання за допомогою ППЗ в ході розв’язування задачі сприяють неформальному засвоєнню знань. На рис. 2.8 зображено тіло, утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \left| x^2 + x - 6 \right|$, *y=0, x= -4, x=3,* навколо осі *Ox*.

За допомогою GRAN1 зручно продемонструвати застосування теореми Гульдіна [18], оскільки над замкненою ламаною, що обертається, можна здійснити попередньо паралельне перенесення, деформацію вздовж осей координат, поворот на довільний кут навколо початку координат. На рис.3.26 подано результат побудови за допомогою GRAN1 замкненої ламаної, заданої координатами вершин: (3;3)-(4;1)-(2;1)-(1;2)-(0.5;4) і зображено тіло, утворене обертанням цієї ламаної навколо осі *Oy*. Тіло обертання навколо однієї з осей будується за умови, що ламана дану вісь не перетинає. За допомогою програми можна виконувати над ламаною такі перетворення, як паралельне перенесення на довільний вектор, деформацію вздовж осей координат, включаючи симетрію відносно осей координат, поворот на довільний кут навколо початку координат.

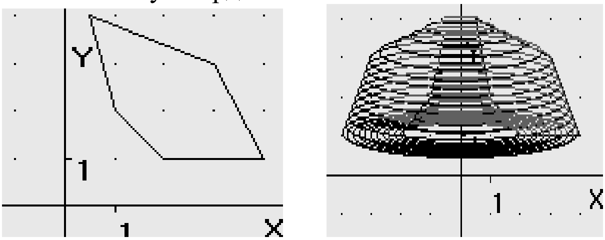


Рис. 3. 26. Ламана, зображення тіла обертання (вісь *Oy*)

Відзначимо особливості побудови просторових фігур за допомогою GRAN1 на прикладі завдання для класів з поглибленим вивченням математики: обчислити об'єм фігури, утвореної при обертанні навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої на проміжку $[-\pi,\pi]$ графіками $y=\pi-|x|$ і $y=|\sin x|$ (Рис.3.27).

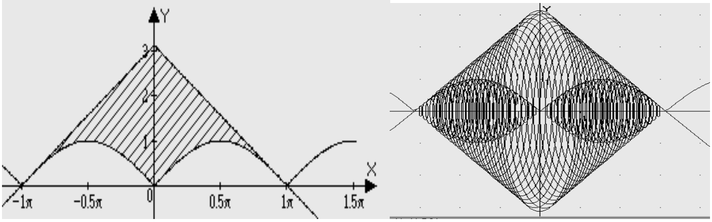


Рис. 3. 27. Криволінійна трапеція і зображення тіла обертання

За допомогою програми GRAN1 можна побудувати графіки обох функцій. Об'єм тіла обертання за допомогою GRAN1 можна знайти за два кроки: спочатку обертають навколо осі Ox графік функції $y=\pi-|x|$, потім графік другої функції, і від знайденого об'єму першого тіла віднімають об'єм другого. Якщо ж одночасно побудувати обидва графіки та їх обертати, то отримаємо тіло, зображене на рис.3.27, однак результат обчислення використовувати не можна, бо в даному випадку об'єми тіл додаються.

Важливу роль у сприйманні й усвідомленні навчального матеріалу відіграють фактори мотиваційного характеру. Однією з умов успішного навчання є застосування принципу наочності, що пожвавлює навчальний процес, збуджує ініціативу та мислення учнів, привчає їх до аналізу та узагальнення. У журналі [10] наводиться приклад використання ІКТ на уроках геометрії: за допомогою програми Flash створюють дві піраміди, що мають рівновеликі основи та рівні висоти. Щоб продемонструвати, що такі піраміди мають рівні об'єми, їх опускають в однакові посудини з „комп'ютерною водою". Звісно, що повторити такий дослід можна кілька разів, але підготувати для цього слайд не так швидко і не так просто. Вважаємо, що не варто підміняти комп'ютерними експериментами ті, які нескладно продемонструвати без комп'ютера. На уроці, все-таки, краще вкинути піраміди у справжню воду. І тут спрацює триєдине правило: навчай науково, педагогічно та емоційно.

Розвиває просторову уяву оцінювання форм, розмірів просторових тіл. Перед дослідом на переливання води з конуса в півкулю (висота конуса рівна радіусу його основи і радіусу кулі), слід запропонувати школярам оцінити просторові форми, їхні розміри і висунути гіпотезу стосовно об'ємів тіл. В подальшому експериментально переконатися, що об'єм конуса вдвічі менший об'єму півкулі. Щоб „відкрити" формулу для площі поверхні кулі, обмотують вздовж спіралі півкулю шнуром і порівнюють його довжину з довжиною шнура, вкладеного кільцями на поверхню великого круга [60].

З метою підвищення ефективності сприйняття та засвоєння стереометричного матеріалу, для подолання труднощів при перекодуванні умовно-графічного зображення просторового тіла та створення адекватного просторового образу, бажано доповнити теоретичний матеріал мультимедійними демонстраційними моделями, створивши модифікований стереометричний ящик засобами ІКТ. Він особливо важливий при введенні понять, аксіом, теорем. При цьому варто заохотити спроби школярів самостійно підготувати динамічні моделі до уроку, адже оволодіння знаннями залежить не стільки від пам'яті, скільки від тієї діяльності, в яку включається учень, від системи розумових операцій, котрі він здійснює при засвоєнні знань.

Модель і рисунок дають змогу учням виділити ознаки просторових фігур і абстрагуватися від несуттєвих, помітити потрібні відношення і зв'язки між елементами фігур, здійснити аналіз через синтез при доведенні теорем і розв'язуванні задач, узагальнити проведене доведення, поширивши твердження на всі фігури певного типу. Стереометричний малюнок дає просторові образи в спотвореному вигляді. І тоді на допомогу школяреві приходить логіка. На рис. 2.25 представлено модель піраміди, створеної за допомогою GRAN-3D, в основі якої лежить квадрат, а вершина піраміди проектується в одну з вершин основи. На рис. 2.30 зображено іншу модель. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція, а вершина проектується на середину більшої основи трапеції. У цієї піраміди одна з граней перпендикулярна до площини основи. Краще розглянути дані моделі школяр зможе використовуючи послугу *Вироджені осі* чи переміщуючи повзунок смуг вертикальної та горизонтальної прокруток.

За допомогою ППЗ GRAN-2D також зручно виконувати малюнки до значної кількості стереометричних задач на розташування прямих і площин в просторі. Процес побудови при цьому подібний до побудови вручну, оскільки враховуються властивості паралельного проектування. Перевагою комп'ютерних моделей є динамічність. Фігуру можна розташувати в найкращому ракурсі, легко змінивши розташування опорних точок, покроково відтворити хід побудови, розмістити підказки до умови завдання чи до ходу розв'язування. За допомогою ППЗ зручно підготувати креслення до наступних задач.

1) 11 кл. Навколо правильної чотирикутної піраміди описано кулю радіуса R. Двогранний кут при бічному ребрі піраміди дорівнює β. Визначити об'єм піраміди (рис. 3.28).

2) 10 кл. Перпендикуляри, опущені з деякої точки простору на всі сторони правильного трикутника, мають однакову довжину. Інша точка простору віддалена від цих перпендикулярів і від площини трикутника на 10 см. Відстань між даними точками дорівнює 26 см. Обчислити площу трикутника (рис. 3.29).

3) 10 кл. З точки простору до вершин квадрата зі стороною 60 см проведені рівні відрізки. Відстань від цієї точки до площини квадрата рівна 40 см. Обчислити площу опуклого чотирикутника, одна із сторін якого співпадає зі стороною квадрата, кінці протилежної сторони належать протилежним проведеним відрізкам, а площина чотирикутника перпендикулярна до площини цих відрізків.

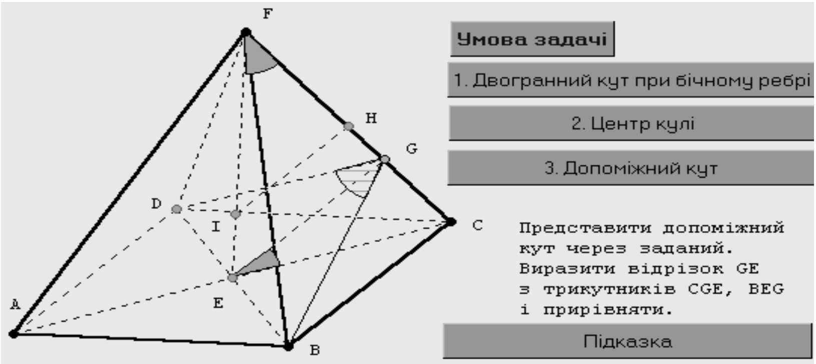
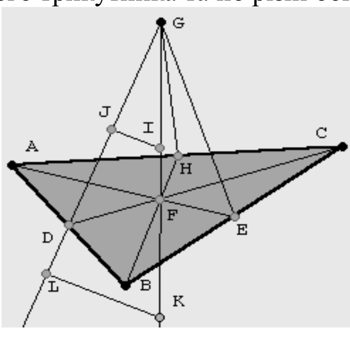


Рис. 3. 28. Копія вікна GRAN-2D з відкритими підказками до умови задачі

4) 10 кл. Основи рівнобічної трапеції рівні *35* і *24 см*, а її площа – *540* $см^2$. Точка простору віддалена від усіх вершин трапеції на $2\sqrt{374}$ *см*. Інша точка простору рівновіддалена від даної точки і від усіх вершин трапеції. Визначити відстань від другої точки до площини трапеції (рис. 3.30).

При завантаженні файла до першої задачі на екрані спочатку з'являється лише зображення правильної чотирикутної піраміди (рис. 3.28). На слайді розміщені також підказки до умови задачі, які школяр може послідовно відкривати, якщо натискуватиме відповідні кнопки типу *Сховати\показати об'єкт*. Для цієї задачі важливо зобразити лінійний кут *DGB* двогранного кута при бічному ребрі *FC* та центр описаної кулі *I*. Оскільки відрізок *GE* перпендикулярний до бічного ребра, то серединний перпендикуляр цього ж ребра йому паралельний. Наступна підказка стосується введення допоміжного кута. Якщо виразити відрізок GE з трикутників *CGE, BEG* і прирівняти, то зможемо представити допоміжний кут (зручніший для обчислення) через заданий $\cos \alpha = ctg\ 0.5\beta$.

Розв'язуючи другу задачу, необхідно розглянути два випадки. Точки, про які йде мова в умові задачі, розташовані з одного боку від площини правильного трикутника та по різні боки від площини.



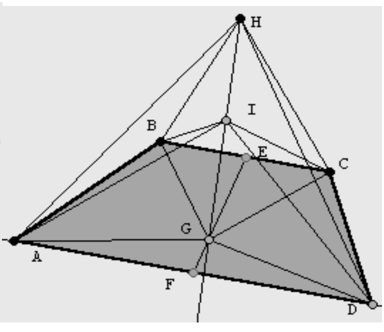


Рис. 3. 29. **Рис. 3. 30.**

У значній кількості шкільних задач, пов'язаних з побудовою на зображеннях, вимагається виконувати побудову перерізів заданих просторових фігур. Способи задавання перерізів різноманітні і універсального методу їх побудови не існує. У посібниках [57], [98] виділяється: метод слідів; внутрішнього проектування (спосіб відповідності) і комбінований метод.

Динамічні креслення перерізів многогранників доцільно застосовувати на уроках геометрії як в 11 класі, так і під час перших уроків стереометрії в 10-му класі, коли школярі опановують аксіоматику, вивчають властивості проектування згідно з підручником [18]. Пропонуємо переглянути підготовлені на диску динамічні моделі, створені з використанням засобів PowerPoint, GRAN-2D, GRAN-3D та DG у ході впровадження навчального проекту „*Перерізи многогранників*" (рис.3.31). На створених слайдах виконано побудови перерізів методом слідів та внутрішнього проектування на основі центрального чи паралельного проектування. Розв'язування задач на побудову перерізів зводиться до знаходження точок перетину січної площини з ребрами многогранника. Навчання побудовам перерізів рекомендується розпочати зі складання алгоритмів до базисної задачі [98,466]. *Задано три точки A, B, C та їх проекції. Знайти на площині ABC точку D, проекція якої D_1 відома при заданому напрямку проектування.* У добірці є чотири динамічні креслення для базисної задачі, подано алгоритми побудови. Автори посібника [57,17] зауважують, що для розвитку просторової уяви більш раціональним є знаходження сліду площини перерізу в площині будь-якої грані, відмінної від площини нижньої основи многогранника.

Рис. 3. 31. Меню презентації „Перерізи многогранників"

Будуючи перерізи призми площиною, найчастіше користуються паралельним проектуванням, а для піраміди – центральним проектуванням.

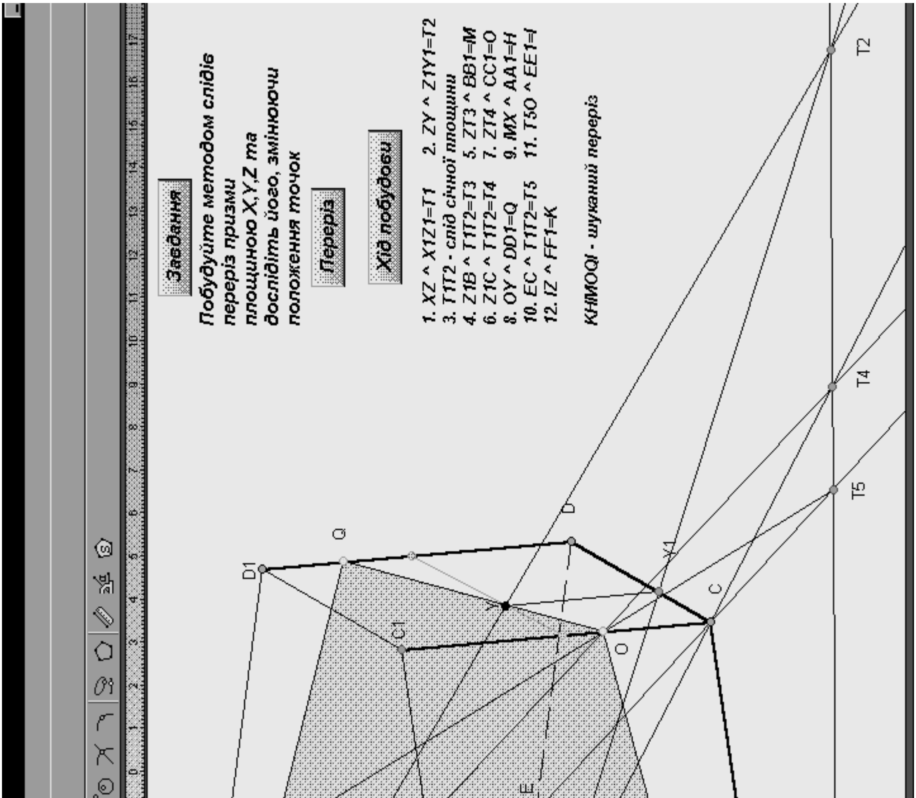


Рис. 3. 32. Побудову перерізу призми виконано за допомогою DG

Створивши динамічні креслення за допомогою GRAN-2D чи DG, після налаштування режиму перегляду, можна покроково відтворити хід побудови перерізу, повертати многогранники, розглядати *вигляд зверху, зробити моделі „керованими" – зручно вмикати/вимикати* кнопки побудови перерізу, записи ходу побудови, звуковий супровід. Оскільки характерною рисою просторового образу є динамічність, то рухаючи точки вздовж ребер чи в зазначених площинах імітується рух січної площини. При цьому може змінюватися форма перерізу і послідовність кроків побудови. На рис. 3.32 представлено побудову методом слідів перерізу шестикутної призми площиною, яка проходить через три задані точки, що розміщені в площинах бічних граней. Слід січної площини побудовано у площині нижньої основи призми. Хід побудови виписано зліва на слайді. Відмітка побудови перерізу і висвітлення ходу побудови на слайді при відкритті слайда не проставлена. Щоб з'явився переріз, необхідно натиснути кнопку з відповідною назвою. Відкривши файл, школяр може самостійно виконати побудову перерізу і перевірити себе. Звісно, що порядок побудов школяра може бути відмінним від того, який закладений у файлі, однак самі перерізи повинні співпасти.

В окремих підготовлених моделях акцент зроблено на рухові січної площини, а хід побудови пропонується учневі записати самостійно відповідно до коментарів рядка стану. На рис. 3.33 представлено перерізи паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точку F (F є B_1D_1) та паралельна до прямих DP і B_1Q, де P є AC, Q є AA_1.

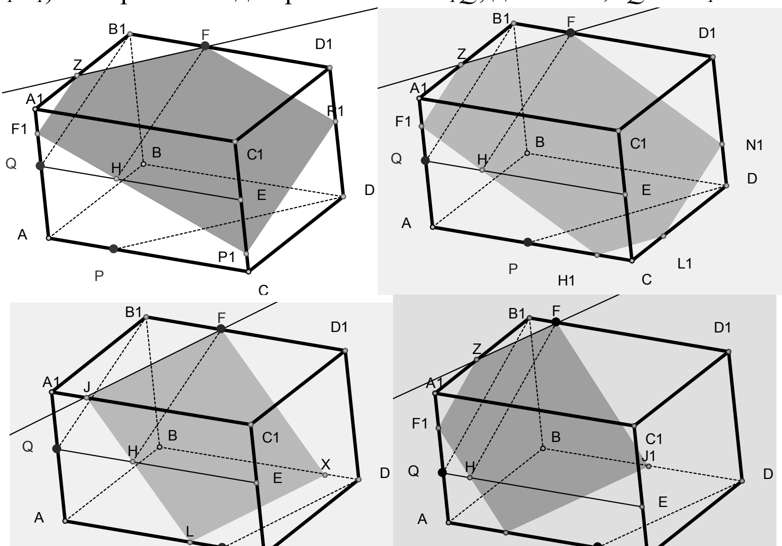


Рис. 3. 33. За коментарями рядка стану необхідно записати хід побудови

Використання методу відповідності продемонструємо на прикладі задачі на побудову перерізу шестикутної піраміди площиною, яка проходить через точки на ребрах A, E, C. Креслення виконаємо з використанням ППЗ GRAN-2D (Рис.3.34). Знаходять точку перетину січної площини з ребром SB_1: $E_1B_1 \cap A_1C_1 = X_1$, $AC \cap SX_1 = X$, $EX \cap B_1S = H$. Виконуючи побудови $C_1E_1 \cap A_1D_1 = Y_1$, $CE \cap SY_1 = Y$, $AY \cap SD_1 = D$, встановлюють точку на ребрі SD_1. Для перетину ребра SF_1 виконують дії: $A_1D_1 \cap C_1F_1 = Z_1$, $SZ_1 \cap AD = Z$, $CZ \cap SF_1 = F$. Тоді AHCDEF – шуканий переріз. Для акцентування уваги на ключових побудовах, в режимі *Налаштування відтворення побудови* знімають відмітки з допоміжних.

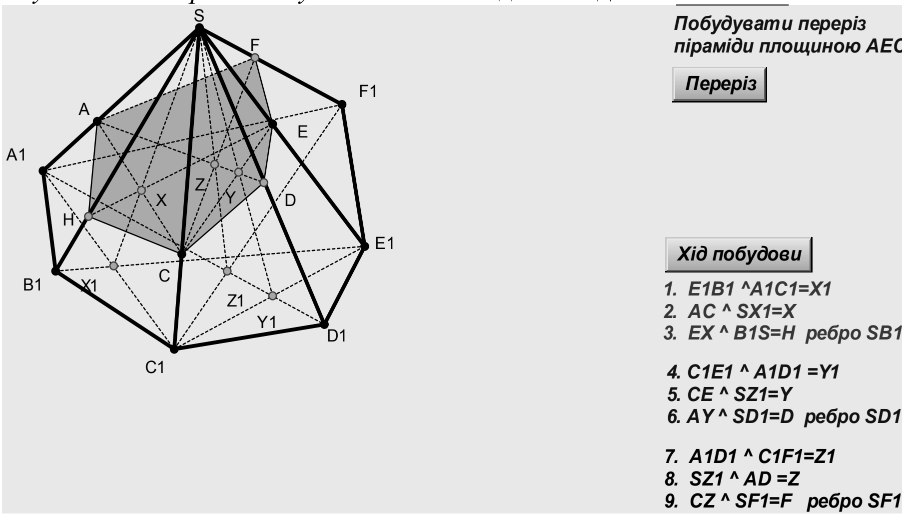


Рис. 3. 34. Побудовано переріз піраміди площиною за допомогою методу внутрішнього проектування. Подано слайд з відкритими підказками

Профільне вивчення математики передбачає ознайомлення школярів з рівнянням площини і прямої в просторі. За допомогою GRAN-3D можна скласти рівняння площини і побудувати площину. Доцільно для введених площин, користуючись послугою "Переріз", побудувати за допомогою GRAN-3D перерізи деяких многогранників (рис. 3.35). Кращий ефект при розгляданні і усвідомленні результату досягається, якщо розфарбовувати у різні кольори площину та обидві з частин розрізаного многогранника і здійснювати в режимі „Півтонового зображення" повороти, рухаючи повзунок вертикальної та горизонтальної смуг прокрутки. Для обох частин многогранника можна виконати різні обчислення, зокрема, площу поверхні, об'єм тіла, що вручну зробити надто складно. Тому використовуючи ППЗ, можна розглянути широкий клас прикладних задач.

З використанням GRAN-3D можна розв'язувати деякі задачі на відшукання екстремальних значень величин, проводити певні дослідження в задачах на доведення. Наведемо приклади таких задач: 1) нехай S і P – площі двох граней тетраедра, *a* – довжина їх спільного ребра, α – лінійний кут двогранного кута між ними. Експериментально перевірити, що об’єм тетраедра V може бути знайдений за формулою $V = \frac{2SP \sin \alpha}{3a}$; 2) переконатися, що об’єм тетраедра можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi$, де a і b - протилежні ребра тетраедра, d- відстань між ними, φ- кут між ребрами.

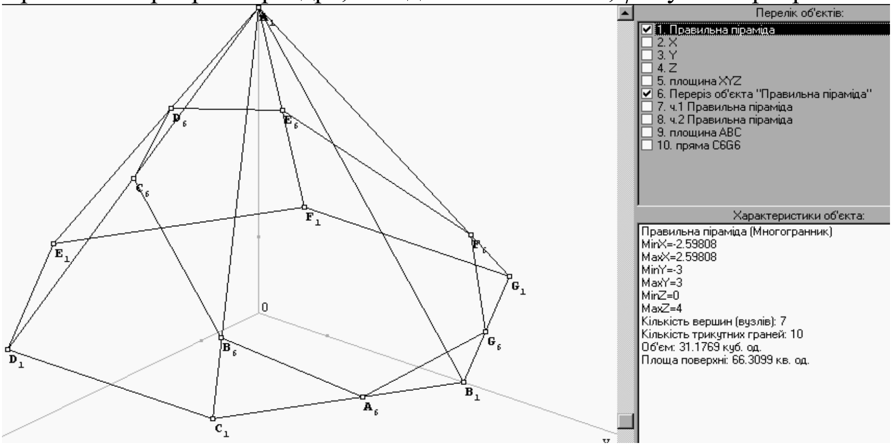


Рис. 3. 35. ППЗ GRAN-3D. Побудовано переріз 6-кутної піраміди площиною

Кожну з величин, про які йде мова в умові задачі, можна розрахувати за допомогою GRAN-3D, виписавши зі звіту дані, скласти і обчислити на вмонтованому калькуляторі потрібний вираз. Учень має при цьому вести записи заданих і розрахованих величин. Змінивши положення вершин, слід діяти за тим же алгоритмом. Відстежуючи зміну кута між площинами, між прямими, відстань між прямими, школяр переконується у правильності наведених формул.

Звернемо увагу ще на один аспект застосування GRAN-3D - на розв’язання проблеми гуманізації освіти. За допомогою ППЗ окремі школярі, які недосконало володіють алгоритмами побудови перерізів, зможуть розв’язувати задачі наближено. Використання комп’ютера створить для них ситуацію успіху. Отриманий на комп’ютері результат школяр може порівняти з отриманим вручну, виявити недоліки і таким чином удосконалити навички самоконтролю.

Використовуючи креслення многогранників, створені за допомогою GRAN-2D, також можна проводити деякі дослідження, що ґрунтуються на властивостях паралельного проектування.

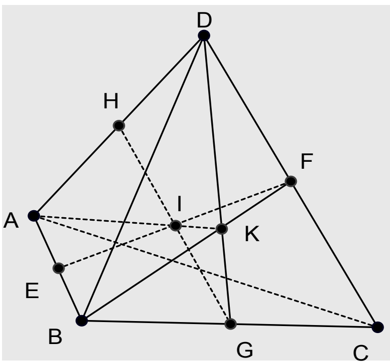


Рис. 3. 36.

На рис. 3.36 представлено креслення до задачі: *дослідити, що відрізки, які з'єднують вершини тетраедра з точками перетину медіан протилежних граней, перетинаються в одній точці (центрі ваги тетраедра) і діляться нею у відношенні 3:1, починаючи від вершини. Переконатися, що в цій же точці перетинаються і діляться пополам відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер.*

Проаналізувавши наявні ПЗНП, зробили висновок щодо напрямку їх удосконалення. Бажано, щоб конструювання об'єктів в електронних засобах було максимально наближеним до того, як учень виконує побудови вручну, і включало послуги: 1) побудова лінії перетину двох заданих площин; 2) перпендикуляра з точки до заданої прямої чи побудову в площині прямої, що проходить через задану точку і розташована по відношенню до іншої прямої під певним кутом, що дозволить будувати лінійні кути двогранних кутів; 3) проекції заданої прямої на задану площину, що дасть можливість будувати кут нахилу прямої до площини; 4) перпендикуляра з точки до заданої площини; 5) прямої, паралельної даній, щоб будувати кути між мимобіжними прямими; 6) бісектриси кута, в тому числі для побудови центра вписаної в многогранник кулі; 7) спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

Експериментальна перевірка запропонованої методики навчання учнів з активним використанням на уроках стереометрії ППЗ свідчить про набуття школярами вмінь та навичок правильно виконувати просторові рисунки, про підвищення рівня знань та умінь учнів. Застосування комп'ютерних технологій в курсі стереометрії дозволяє удосконалити зміст, врахувати індивідуальні психологічні особливості учнів, підвищити наочність навчання, сприяє розвитку просторової уяви та просторового мислення. Застосування ІКТН математики в системі методів активного навчання, зокрема через створення навчальних проектів, забезпечує розвиток пізнавальних навичок учнів, умінь самостійно конструювати свої знання, умінь орієнтуватися в інформаційному просторі.

Контрольні питання і завдання

1. Запропонувати спосіб побудови за допомогою GRAN-2D чи DG точки площини грані многогранника, що не лежить на ребрі цієї грані.

2. Побудувати в середовищі ППЗ GRAN-2D чи DG методом слідів та методом внутрішнього проектування переріз 5-кутної піраміди (призми) площиною, що проходить через три точки, взяті на ребрах многогранника чи в його гранях. Для створеного креслення додати підказки, приховані за допомогою об'єктів *Кнопка*. Побудувати переріз, використовуючи слід січної площини, відмінний від сліду в площині нижньої основи.

3. Виконати побудову перерізу многогранника, подібного до розглянутого у попередньому завданні, за допомогою ППЗ GRAN-3D. Виконати обчислення площі перерізу, площі поверхні та об'ємів утворених частин многогранника.

4. Яку систему завдань доцільно використати для формування просторової уяви учня?

3.4. Математичні "відкриття" за допомогою динамічної геометрії GRAN-2D і DG

У навчанні геометрії за допомогою ППЗ GRAN-2D досить часто використовуватимемо дослідницький метод навчання*, який за словами С.А. Ракова, є „живою душею математики" і на практиці найчастіше використовується через розглядання "відкритих" задач ("відкритих" проблем). Тобто, задач з неповними даними, з невизначеними елементами умови, з відкритістю твердження [66,58]. Розв'язування завдання зазначеного типу розпочинається з "довизначення", яке можна здійснити різними способами залежно від наявного досвіду чи особистісних уподобань учасників навчального процесу (учнів та вчителя). Розглядання саме таких задач у навчальному курсі математики наближає навчальний процес до творчого математичного процесу. Добірку різнорівневих завдань на довизначення задач планіметрії пропонує Н.А. Тарасенкова [104].

Проблеми методики організації досліджень засобами динамічної геометрії DG та GRAN-2D висвітлювалися М.І. Жалдаком [30], С.А.Раковим [87], Є.Ф. Вінниченком [12], О.В. Вітюком [30], О.А. Смалько [99], А.О. Костюченком [14] та ін. У недостатній мірі висвітлені питання, пов'язані з формуванням уміння узагальнювати результати дослідження. Потребує подальшої розробки методика вивчення властивостей геометричних перетворень за допомогою оновлених версій ППЗ GRAN-2D. Засоби DG та GRAN-2D використовуватимемо для пошуку закономірностей, для дослідження ГМТ, відшукання екстремальних значень величин. Отримані результати дослідження пропонуємо оформлювати у вигляді слайдів з підказками до ходу дослідження через створення об'єктів *Написи, Кнопки*.

Надзвичайно важливими для розвитку творчого потенціалу школяра є *дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою* [107]. Наведено *перелік завдань* з шкільного курсу планіметрії, виконуючи дослідження до яких за допомогою ППЗ, учні зможуть висувати гіпотези, формулювати твердження, експериментально їх перевіряти та шукати способи обґрунтування.

У 7-му класі до завдань дидактичної гри на уроках геометрії можна включити завдання на формування та доведення гіпотези про властивість медіан і висот рівнобедреного трикутника, проведених до бічних сторін, про суму кутів трикутника, градусну міру зовнішнього кута трикутника; про властивість кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною; про властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка, бісектрисі кута. Доцільно на основі результату експерименту сформулювати гіпотезу про розташування центра вписаного кола та описаного навколо трикутника кола.

Восьмикласникам варто запропонувати експериментально відкрити залежність між сторонами прямокутного трикутника - теорему Піфагора, узагальнити отриманий результат (п. 3.2); властивість катета в прямокутному трикутнику (катет у прямокутному трикутнику є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією катета на гіпотенузу); властивість висоти в

---

* Легше знайти доведення, маючи спочатку деяке поняття про те, що ми шукаємо, ніж знайти таке доведення без всякого попереднього знання. *Архімед*

прямокутному трикутнику (висота у прямокутному трикутнику, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу); властивості чотирикутників (паралелограма, ромба, прямокутника, квадрата, трапеції). Доцільно експериментально перевірити теорему про пропорційні відрізки (Чи дійсно паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки?), теореми про середню лінію трикутника, про середню лінію трапеції та інші.

Наведемо *приклади завдань для „відкриття"* на уроках геометрії в дев'ятому класі. У ході обчислювального експерименту учні можуть сформулювати і в подальшому довести наступні гіпотези: про градусну міру кута, вписаного в коло; про градусну міру вписаного кута і гострого кута між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди; про суму протилежних кутів вписаного чотирикутника; про суму протилежних сторін описаного чотирикутника. У ході експерименту доцільно сформулювати та довести гіпотези про метричні співвідношення в колі: добуток відрізків хорди, для кожної з хорд, проведених у колі через одну і ту ж точку є сталим; сталим є також добуток відрізків січної та її зовнішньої частини (якщо з точки P до кола проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A,B і $C, D,$ то $AP\cdot BP=CP\cdot DP$). Аналогічно можна висунути гіпотезу про рівність добутку січної на її зовнішню частину і квадрату довжини дотичної.

Створивши відповідні моделі, школярі зможуть експериментально перевірити теорему синусів (довжини сторін трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів); теорему косинусів (квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними); теорему про властивість медіан трикутника (медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини); теорему про властивість бісектриси довільного трикутника (бісектриса трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки пропорційні двом іншим сторонам); теорему Стюарта (якщо a, b, c – сторони трикутника ABC і точка D ділить сторону BC на відрізки $BD=a_1$, $CD=a_2$, $AD^2=(a_1 b^2+a_2 c^2\text{-}a\, a_1 a_2)/a$); користуючись теоремою Стюарта, виразити медіану і бісектрису трикутника через його сторони; теорему Птолемея (сума добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей); формулу для площі круга; відношення довжини кола до його діаметра; формули для радіуса описаного навколо трикутника кола $R=abc/4S$ і $R= a/(2sin\alpha)$; формулу для радіуса вписаного в n-кутник кола $r=S/p;$ формулу $S=((p–a)(p\text{-}b)(p\text{-}c)(p\text{-}d))^{0.5}$ для площі вписаного чотирикутника, де a, b, c, d – сторони, p – півпериметр. У класах з поглибленим вивченням математики бажано „відкрити" теореми Чеви, Менелая, побудувати пряму Сімпсона та ін.

Під „відкриттям" розуміємо результат пошукової навчальної діяльності, яку здійснює учень власними зусиллями при мінімальному керівництві з боку вчителя. У ході комп'ютерних експериментів слід розвивати в учнів такі пізнавальні якості як уміння аналізувати, синтезувати, узагальнювати, створювати сприятливі умови для формування таких креативних якостей, як здібність до формулювання гіпотез, конструювання версій, здатність до дослідницької діяльності. Використовуючи дослідницький метод у навчанні математики, слід збуджувати творчі припущення, намагатися підштовхнути учнів самостійно просуватися до розв'язування нетрадиційного завдання, що виникло в результаті їхніх спостережень та дослідів. Модель навчання через відкриття передбачає формулювання проблеми, з'ясування плану діяльності, створення динамічних креслень, проведення обчислювального експерименту, формулювання гіпотези. Збираючи та оцінюючи отримані результати, учні перевіряють гіпотезу, роблять висновок, намагаються знайти теоретичне обґрунтування. У пошуку доведення доцільно використовувати такий прийом розумової діяльності як аналіз через синтез. Особливу увагу варто звертати на інтерпретацію отриманих відомостей, спонукати учнів до здійснення узагальнення результатів експерименту.

Нема потреби щоразу на уроці створювати динамічні креслення. Іноді доцільно напередодні запропонувати групі школярів випереджаюче завдання – підготувати відповідні моделі, виконати дослідження, в класі доповісти про отримані результати, а при наявності проектора переглянути хід створення моделі. Для перегляду використовують послугу *Зображення \ Покрокове відтворення.* Коментування учнями готових моделей дозволить інтенсифікувати процес засвоєння матеріалу і вести навчання розвиваючими методами.

Особливу увагу вчителю слід звернути на такі важливі питання, як визначення місця дидактичної гри в системі інших видів діяльності на уроці; педагогічна доцільність її використання на різних етапах роботи з навчальним матеріалом; методика проведення „відкриття" з врахуванням мети уроку, особливостей комп'ютерних програм, навичок роботи учнів з комп'ютером та рівня здібностей і підготовленості школярів.

На компакт-диску бажано переглянути презентації, пов'язані з задачами на побудову, дослідження та доведення. Наприклад, „Вчителю про динамічну геометрію", „Дидактична гра з комп'ютерною підтримкою" та ін.

Розглянемо детальніше динамічне креслення для "відкриття" теореми про хорди (рис.3.37). Створимо точки *A, B*; коло з центром *A* і радіусом *AB*. На колі виберемо точки *C, D, E, F* (послуга *Об'єкт\Створення\Точка* із зазначенням прикріпити до кола), проведемо прямі *EC* та *DF* (послуга *Об'єкт\ Створення\Пряма*), знайдемо точку їх перетину *G (Об'єкт \ Створення \Точка перетину)* та створимо динамічні вирази для обчислення сум та добутків відрізків хорд: *LEN(C,G)*LEN(G,E); LEN(F,G)*LEN(G,D)*. Рухаючи вздовж кола одну з точок *C, D, E, F,* змінюючи радіус кола, учні зможуть відстежити зміни динамічних виразів, проаналізують отримані дані. Оскільки добутки залишаються рівними, то учні можуть висловити гіпотезу, що добуток відрізків однієї хорди буде сталим і залежатиме від положення точки перетину хорд.

Стимулюємо подальші пошуки учнів запитанням: які результати отримаємо, якщо перетинатимуться не хорди, а їх продовження. Учні мають з'ясувати, що в цьому разі мова йтиме про січні, проведені до кола з однієї точки. Оскільки учні з'ясують, що виписані добутки при цьому залишилися сталими, то зможуть сформулювати твердження стосовно сталості добутку січної на її зовнішню частину. В подальшому пропонуємо учням відслідковувати, які значення отримаємо для граничних положень січної, тобто для дотичної до кола. Учні зафіксують, що добуток залишається сталим. Тому зможуть сформулювати третє твердження – квадрат дотичної рівний добутку січної на її зовнішню частину. Наступний етап в ході дослідження дуже важливий, тому що учні повинні виокремити спільне в цих трьох формулюваннях, зробити узагальнення. Привертаємо увагу учнів до того, як здійснюється порядок вибору точок. Спочатку беремо точку на колі, потім точку перетину, останньою – іншу точку тієї ж січної (хорди) на колі. Точку дотику при цьому розглядаємо як подвійну. Отже, використовуючи поняття напрямлених відрізків, зводимо три формулювання в одне. Обговорення з учнями результатів дослідження сприятиме формуванню у них пізнавальних якостей узагальнення та систематизації.

Варто зауважити, що для проведення описаних досліджень важливим був той факт, що точку G отримали як перетин прямих, а не відрізків. Не змогли б на динамічному кресленні продемонструвати зв’язок між трьома згаданими вище теоремами та здійснити узагальнення і в тому разі, якби почали будувати січні використовуючи послугу *Промінь* чи послугу *Дотична.* Наведені приклади яскраво свідчать про важливість у ході створення креслення добору об’єктів та порядку їх створення. Тому важливо пропонувати учням не готові моделі для відкриття, а разом з ними обговорювати, яку із запропонованих краще використати? Формуючи вміння створювати, добирати „гнучкі” моделі, розвиватимемо творчу компоненту гнучкість мислення.

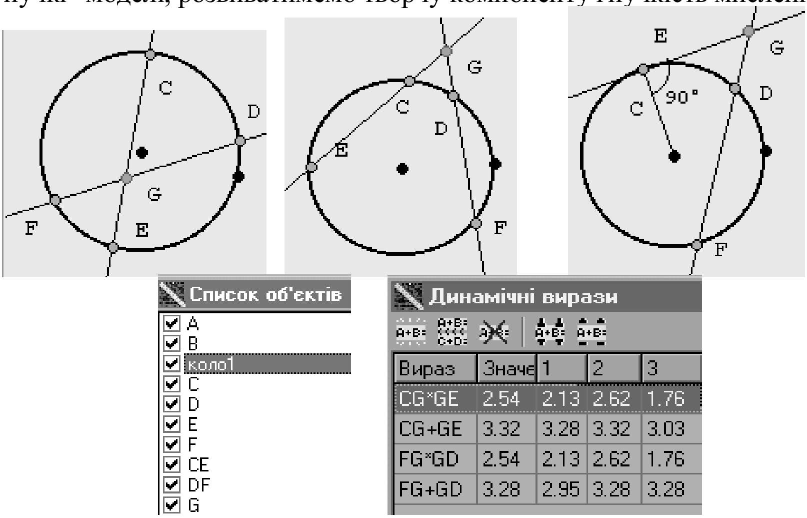


Рис. 3.37. Креслення для відкриття теорем про хорди, про січні, січну і дотичну

Вивчення теореми про кут, вписаний в коло, також доцільно розпочати з комп’ютерних експериментів. Вводимо поняття вписаного та відповідного йому центрального кута і пропонуємо школярам створити модель до теореми. Спочатку побудуємо коло з центром у точці A та радіусом AB. Далі на колі розмістимо дві точки C і D (створюємо їх з екрана, прикріплюємо до кола) та побудуємо дві ламані CED та CAD – вписаний та центральний кути. Активізувавши послугу *Обчислення\Кут*, знаходимо величини вказаних кутів. Модель для дослідження подана на рис. 3.38. Рухаємо точки C, E і D

вздовж кола, розглядаючи різні положення центра кола стосовно сторін вписаного кута (центр кола лежить на стороні кута, всередині кута, зовні кута). При цьому автоматично перераховуються величини кутів і учні вже можуть самостійно сформулювати гіпотезу: величина вписаного кута вдвічі менша відповідного йому центрального. З'ясовуємо разом з учнями, якого виду може бути вписаний кут? Визначаємо вид відповідного йому центрального, підводимо юних дослідників до формулювання наслідку, що кут, який спирається на діаметр – прямий. Далі пропонуємо учням розглянути два кути, вписані в коло, які стягують однакові хорди і порівняти їхні величини. Для цього слід побудувати ще один вписаний кут, сторони якого проходять через точки *C* і *D*. Для цього створюємо точку *F* на колі, будуємо ламану CFD та обчислюємо кут. Змінюємо положення точок *E, F,* досліджуємо величини вписаних кутів, порівнюємо їх з центральним і формулюємо ще дві гіпотези. Коли *F* і E знаходяться в одній півплощині по відношенню до прямої *CD*, то констатуємо, що вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні. Якщо *F* і *E* розташовані по обидва боки від *CD*, то отримаємо змогу сформулювати властивість для кутів вписаного чотирикутника - сума протилежних кутів дорівнює *180°.* В ході дослідження потрібно змінювати не лише розташування точок на колі, й час від часу змінювати радіус кола.

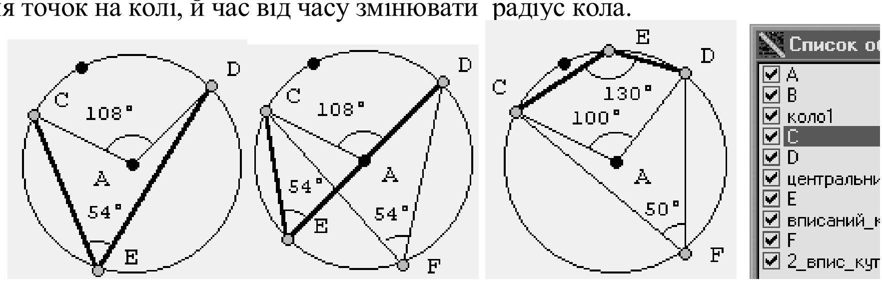


Рис. 3.38. Креслення для відкриття теорем про кут, вписаний в коло; про суму протилежних кутів вписаного чотирикутника.

Подання нового матеріалу через аналіз результатів графічного експерименту перекликається з методом доцільних задач. Якщо заняття проводиться не в комп'ютерному класі, коли кожен з учнів має змогу виконувати дослідження, то можна поєднувати комп'ютерний експеримент з методом доцільних задач. Перевага моделей, створених за допомогою ППЗ, в динамічності, що дає можливість здійснювати пошук доведення, застосовуючи прийом аналіз через синтез, повторюючи кроки, запропоновані в підручнику [8].

Наведемо *приклад розробки уроку геометрії з використанням програмного засобу DG*.

Тема: Кути, вписані в коло.

Мета: розглянути основні властивості кутів, вписаних у коло, використовуючи програмне забезпечення; ознайомити учнів з розв'язуванням задач з теми; зробити викладання предмета більш наочним і науковим.

Обладнання: комп'ютер та програмний засіб DG, картки із завданнями та інструкціями.

Хід уроку

Вважатимемо, що учні ознайомлені з роботою в програмному середовищі DG.

І. Організаційний момент.

Учитель нагадує учням правила техніки безпеки у процесі роботи з комп'ютерами.

ІІ. Актуалізація опорних знань (може подаватися з ілюстрацією, виконаною за допомогою DG). Учні мають відповісти на питання:

– який кут називається центральним?
– який кут називається вписаним у коло?
– назвати вписані і центральні кути, зображені на малюнках, пояснити відповіді.
– чи існує залежність між градусними мірами вписаного і відповідного центрального кутів?

ІІІ. Навчальне дослідження.

Клас бажано заздалегідь об'єднати у групи і призначити учнів-консультантів для кожної групи. Група отримує завдання і по черзі виконує його за допомогою комп'ютера. Створити групи можна як гомогенні, так і з учнів, що мають різний рівень підготовки. У першому випадку слід диференціювати завдання по складності. У другому сприяти, щоб учні з невисоким рівнем підготовки могли вносити у процес дослідження посильний вклад. Консультанти допомагають учням у групі відповісти на питання. Групи можуть працювати у класі біля комп'ютерів по черзі. Доки одна група виконує завдання за комп'ютерами, вчитель працює з іншою частиною класу, запропонувавши учням завдання, які учні виконують у зошитах. Завдання для роботи за комп'ютером слід надрукувати і роздати по одному на кожну парту. Крім умови завдання, бажано подати вказівки щодо того, які інструменти слід використовувати у ході дослідження. У кінці уроку відбувається міні-конференція. Доповідач від кожної групи звітує про її роботу, учні та вчитель ставлять запитання.

Завдання №1.

Дослідити залежність величини вписаного і центрального кутів, якщо вони спираються на спільну дугу.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою О.

2. Позначити на колі три точки А, В, С (інструмент *Точка фігури*).

3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудувати $\angle$ ВАС, вписаний у коло.

4. Побудувати центральний $\angle$ ВОС .

5. Вибрати інструмент *Виміряти кут* та виміряти $\angle$ ВОС і $\angle$ ВАС. Порівняти, у скільки разів $\angle$ ВОС більший за $\angle$ ВАС ? Доцільно заповнити таблицю та сформулювати висновок.

6. Динамічно змінюючи положення точок А, В і С, дослідити, чи буде зберігатися співвідношення між градусними мірами кутів ВОС та ВАС. Зробити висновок.

7. Змінюючи положення точок В і С, розглянути випадок, коли хорда ВС перетвориться на діаметр. Якою буде градусна міра кута ВАС?

8. Сформулювати властивість вписаних кутів, які спираються на діаметр кола.

Завдання №2.

Перевірити властивість: порівняти кут між хордою АВ і дотичною до кола, що проходить через точку А, з центральним і вписаним кутом, які мають спільну дугу АВ.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою О.

2. Позначити на колі точки А і В (інструмент *Точка фігури*).

3. Побудувати відрізки АВ, АО, ВО.

4. Вибрати інструмент *Перпендикулярна пряма* і побудувати пряму АЕ перпендикулярно до радіуса АО.

5. За допомогою інструмента *Виміряти кут* виміряти кути ВАЕ та АОВ.

6. Динамічно змінюючи положення точок А та В, порівняти відношення кутів АОВ і ВАЕ, заповнити таблицю та сформулювати висновок.

Завдання №3.

Дослідити величини вписаних кутів, які спираються на одну і ту саму хорду. Дослідити властивості кутів вписаного чотирикутника.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою О.

2. Позначити на колі три точки А, В і С (інструмент *Точка фігури*).

3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудувати кут ВАС, вписаний у коло.

4. Побудувати хорду ВС (інструмент *Відрізок*). Виміряти кут ВАС, динамічно змінюючи положення лише точки А, дослідити зміну величини кута ВАС.

5. Сформулювати висновок.

IV. Завдання, які учні розв'язують у зошитах. До кожної задачі бажано завчасно створити креслення і покроково відтворити його після аналізу умови.

№1. Провести дотичну до кола, яка проходить через дану точку А поза колом.

Якщо вчитель працює у класі з проектором, слід виконати побудову також з використанням ППЗ. У розробку конспекту вчитель може помістити малюнок, створений за допомогою засобу, зробити з нього гіперпосилання на файл ППЗ, подати вказівки до ходу розв’язування.

№ 2. Всередині квадрата ABCD взяли точку Р так, що трикутник АВР - рівносторонній. Довести, що $\angle PCD = 15^\circ$.

№ 3. Вершину А гострокутного трикутника АВС сполучено відрізком з центром О описаного кола. З вершини А проведено висоту АН. Довести, що кути ВАН і ОАС рівні.

№ 4. Дотична в точці А до кола, описаного навколо трикутника АВС, перетинає пряму ВС у точці Е; AD — бісектриса трикутника АВС. Довести, що трикутник ADE рівнобедрений.

IV. Підсумок уроку.

Учитель оголошує оцінки та домашнє завдання.

Якщо порівняти дії інструментів у засобах DG та GRAN-2D, можна зробити висновок про те, що навчившись працювати в одному середовищі, просто переходити до іншого.

Розглянемо, які наочності за допомогою ППЗ можна запропонувати при вивченні теми "*Паралелограм. Ромб. Прямокутник. Квадрат*". У бібліотеці наочностей "Геометрія, 7-9 клас" пропонується чотири елементи, що мають по кілька кроків для паралелограма, ромба, прямокутника, квадрата (рис. 3.39). Учневі надається деяка можливість моделювати ці фігури. Наприклад, з’єднавши середини сторін прямокутника, з'ясувати, що отриманою фігурою буде ромб. Для кожного з чотирикутників подаються його властивості у вигляді текстових повідомлень з демонстраціями. Можна також прослухати звукові повідомлення про ці властивості.

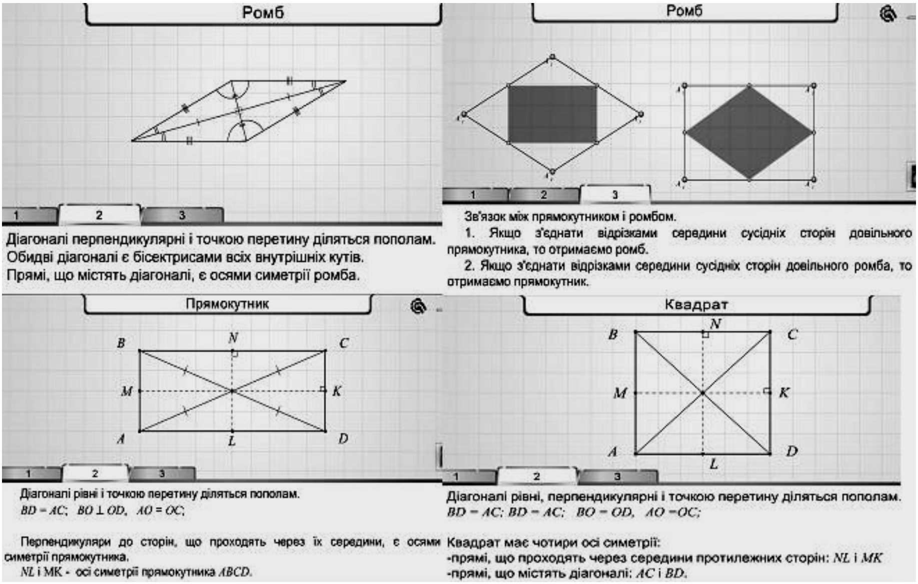


Рис. 3.39. Копії окремих кадрів з бібліотеки наочностей "Геометрія, 7-9 клас" до теми "Чотирикутники. Паралелограм".

До зазначеної теми "Паралелограм" за допомогою ППЗ GRAN-2D пропонуємо підготувати динамічний опорний конспект – експертну систему "Паралелограм" (рис. 3.40), використовуючи яку, учні на одній і тій же моделі зможуть відкривати властивості паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата. Всі елементи паралелограма (кути, сторони, відрізки діагоналей тощо) вимірюються в динаміці. Аналізуючи ці дані, учневі при засвоєнні нового матеріалу потрібно висловити гіпотези щодо властивостей паралелограма певного виду, подавши їх як продовження незавершеного речення. Друга частина речення прихована за підказками, які подаються в конспекті за допомогою об'єктів-кнопок. Мислення учнів активізуємо постановкою питань, які стимулюють самостійність суджень та висування гіпотез. Відкривши кнопки з повідомленнями, учні зможуть перевірити, чи правильно вони сформулювали властивості. За допомогою кнопки "Діагональ ділить паралелограм…" приховано як закінчення речення, так і допоміжну побудову трикутника. Для демонстрації того, що точка перетину діагоналей є центром симетрії паралелограма, прихована додаткова побудова двох симетричних відрізків та їх вимірів. Відповідні побудови подаються і за допомогою кнопки "Побудова осей симетрії прямокутника". Щоб їх використати, попередньо слід змінити паралелограм так, щоб він став прямокутником. В окремому завданні пропонується учням встановити вигляд чотирикутника, який отримаємо, якщо з'єднаємо середини сторін паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата, довільного чотирикутника).

Щоб обґрунтувати отримані властивості, доцільно об'єднати учнів у чотири групи, запропонувавши кожній з них відповідне завдання.

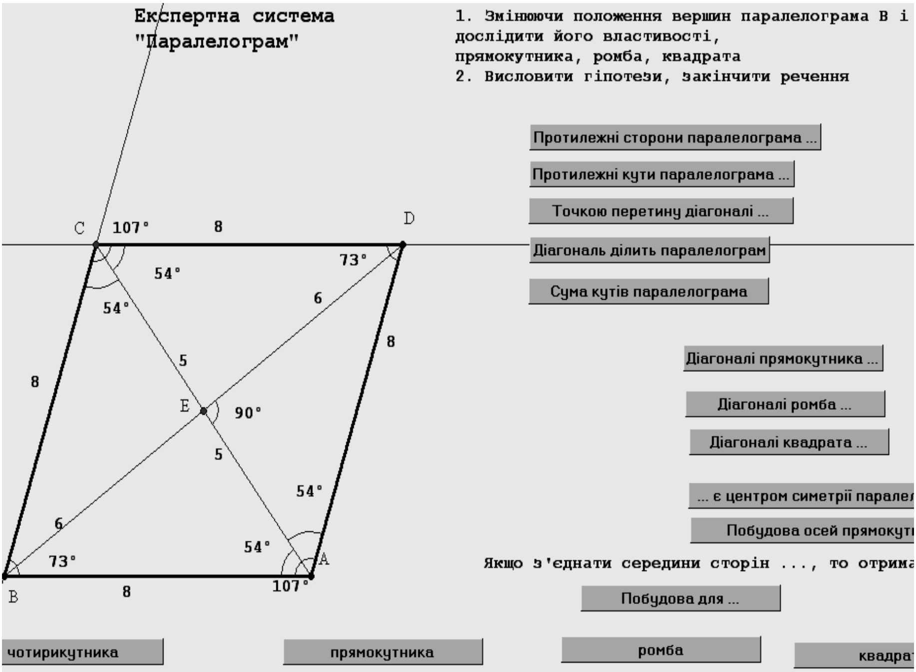


Рис. 3.40 Копія екрана динамічного опорного конспекту до теми "Паралелограм"

Наведемо приклади завдань, які доречно запропонувати учням при вивченні теми "Прямокутник" і подамо деякі вказівки щодо створення креслень до них:

1) *Діагоналі чотирикутника рівні, два кути його прямі. Чи є цей чотирикутник прямокутником?* Для створення креслення будуємо пряму, на ній беремо точку *A*, через неї проводимо перпендикуляр, на перпендикулярі беремо точку *C* (прикріпити до перпендикуляра) та з'єднуємо її з довільною точкою *B* прямої, відмінною від точки *A*. Оскільки діагоналі за умовою рівні, то слід провести коло з центром у точці *A* та радіусом, рівним довжині *CB*. Створюємо об'єкт-точку *D* і прикріпляємо її до побудованого кола. Завершують побудову створенням замкненої ламаної *ABDC* та вимірюванням кутів чотирикутника. Доцільно за допомогою кнопки приховати коло, описане навколо трикутника *ABC*, щоб проаналізувати положення точки *D*.

2) ABCD – прямокутник. На сторонах AB і CD відкладено рівні відрізки BM і CE. MK – перпендикуляр, опущений на AC. Знайти кут BKE.

Щоб розглянути деяке узагальнення задачі, доцільно точку *M* прикріпляти не до відрізка *AB*, а до прямої *AB*. Щоб побудувати рівні відрізки, слід будувати коло з центром у точці *C* і радіусом *BM* або через точку *M* провести пряму, паралельну *BC*. За допомогою об'єкта-кнопки доцільно приховати коло, описане навколо прямокутника *CEMB*. Доцільно перевірити, чи зміниться величина кута, якщо відрізки *BM* і *CE* відкладати на продовженні сторін? Якщо через точку *C* провести довільну пряму і на неї опустити перпендикуляр *BK*?

3) На стороні BC прямокутника ABCD є така точка M, що кут AMB *рівний куту AMD. Знаючи, що сторона AD вдвічі більша за AB, знайти величини названих кутів.* Важливо побудувати прямокутник, у якого одна сторона вдвічі більша іншої. Для цього з центром у вершині прямого кута *A* слід провести коло, яке відітне від сторін кута рівні відрізки. Самі точки *B* і *B1* знаходять за допомогою інструмента *Перетин двох ліній*. Щоб створити точку *D*, можна побудувати точку, симетричну *A* відносно *B1*.

В.О. Моляко [71], В.А. Крутецький [54], М.І. Жалдак [27], С.А. Раков [87], М.Л. Смульсон [69], Н.А. Тарасенкова [104], І.О. Теплицький [105] та ін. звертають увагу, що для формування креативних здібностей не завжди необхідно повністю формулювати умову завдання на дослідження, радять здійснювати довизначення задачі, формулювання проблеми школярем. Таке довизначення відносять до навчально-творчих задач, які розвивають здібності знаходити потрібні відомості, переносити їх, застосовувати в умовах задачі. Звернемо увагу на важливу роль переформулювання та довизначення задачі. Це один з видів мотивування діяльності учнів. Переформулювання дозволяє створити таку навчально-пізнавальну ситуацію, коли учням захочеться досліджувати і висувати гіпотези. Виходячи з важливості здогадки, відкриття для формування мислення старшокласника, вважаємо за доцільне переформулювати частину задач з підручника на відшукання геометричного місця точок, задач на доведення з курсу геометрії, додавши до них завдання на дослідження. Наведемо приклади завдань з підручника [8], які доцільніше подавати як завдання на дослідження і обґрунтування.

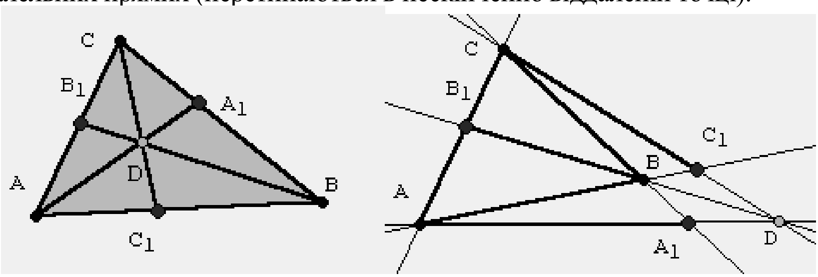
Довести	**Дослідити і обґрунтувати**
1. Вершини трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на серединах сторін трикутника *ABC*. Показати, що площа трикутника *ABC* в чотири рази більша площі трикутника $A_1B_1C_1$	1. Встановити, як співвідносяться площі трикутників *ABC* і $A_1B_1C_1$, якщо вершини трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на серединах сторін трикутника *ABC*? Обґрунтувати отриманий результат.
2. Довести, що медіани ділять трикутник на шість рівновеликих частин.	2. Медіани ділять трикутник на шість частин. Дослідити, чи залежить значення площі вказаних частин від виду трикутника? Порівняти з площею трикутника. Обґрунтувати.
3. Довести, що відстань ортоцентра від якої-небудь вершини трикутника у два рази більша за відстань центра описаного кола від протилежної сторони.	3. Порівняти відстані ортоцентра трикутника від його вершин з відстанями центра описаного кола від протилежних до взятих вершин сторін. Висловити і обґрунтувати гіпотезу.
4. Довести, що коли основи висот гострокутного трикутника сполучити, то дістанемо трикутник, для якого висоти першого будуть бісектрисами.	4. Основи висот гострокутного трикутника сполучили. Дослідити, яку властивість мають в отриманому трикутнику висоти першого? Обґрунтувати гіпотезу і сформулювати алгоритм відновлення трикутника, якщо задані основи його висот.

Розглянемо приклад *довизначення задачі* на „відкриття” теорем Менелая і

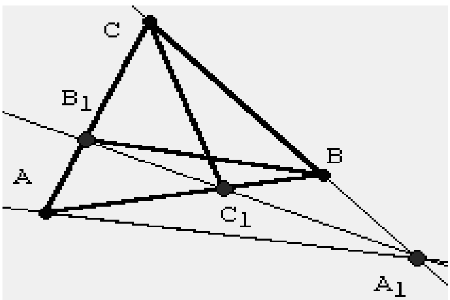
Чеви (поглиблене вивчення математики). Нехай задано трикутник ABC і три точки на прямих, які утворюють трикутник (C_1 на прямій AB, A_1 на прямій BC, B_1 на CA). Досліджуючи значення виразу $AC_1 / C_1B \cdot BA_1 / A_1C \cdot CB_1 / B_1A$, зафіксувати характерні положення точок і прямих. Висунути гіпотези. Школярі спочатку повинні проаналізувати і з'ясувати, як складено вираз, які відношення перемножуються і лише після цього перейти до створення динамічного креслення за допомогою ППЗ. В ході дослідження було зафіксовано три різні положення прямих AA_1, CC_1, BB_1 (рис.3.41): 1) перетинаються в одній точці, 2) паралельні; 3) точки C_1, B_1, A_1 лежать на одній прямій. Для кожного з перелічених розташувань точок значення виразу рівне одиниці.

Використовуючи ППЗ динамічної геометрії, учні залучаються до самостійної творчої діяльності, близької до діяльності вченого. Досліджуючи, школярі проходять усі етапи творчого пошуку, аналізують і порівнюють, доводять і спростовують, узагальнюють і оцінюють тощо.

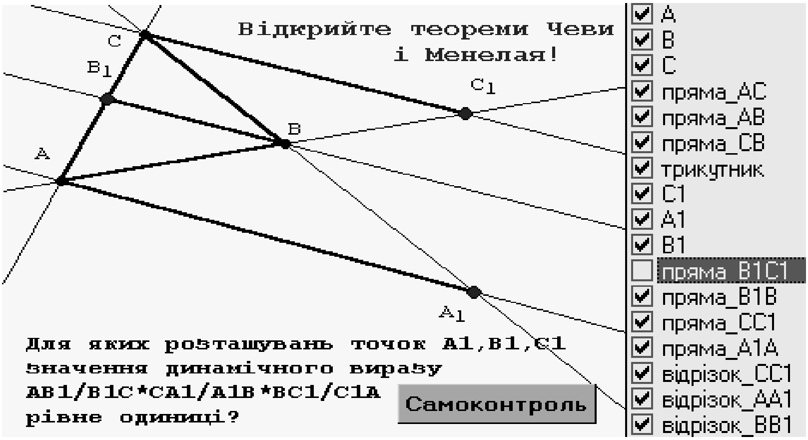
Вивчаючи іменні теореми, доцільно використовувати історичний матеріал, який підвищує інтерес школярів до предмета. Можна включити до презентації слайди з цікавими повідомленнями про визначних математиків і за наявності мультимедійного проектора продемонструвати їх у класі. Доцільно, щоб школярі підготували коротку історичну довідку про те, що грецький математик та астроном Менелай Александрійський жив у II-I ст. до н.е. і був одним із творців сферичної тригонометрії. Італійський математик Чева (1648-1737) у 1678 році знайшов необхідні та достатні умови перетину в одній точці трьох відрізків, що виходять з вершин трикутника. Це твердження можна узагальнити для паралельних прямих (перетинаються в нескінченно віддаленій точці).



Прямі AA_1, CC_1, BB_1 перетинаються в одній точці



Три точки лежать на прямій



Прямі AA_1, CC_1, BB_1 паралельні. Справа список об'єктів (GRAN-2D)
Рис. 3.41. Креслення для "відкриття" теореми Чеви і Менелая

В результаті дослідження, обговорення в групах школярі мають отримати твердження, істинність яких потрібно буде довести.· 1) Прямі CC_1, AA_1, BB_1 перетинаються в одній точці чи паралельні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $AC_1 / C_1B \cdot BA_1 / A_1C \cdot CB_1 / B_1A=1$ (узагальнена теорема Чеви). 2) Точки C_1, A_1, B_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $AC_1 / C_1B \cdot BA_1 / A_1C \cdot CB_1 / B_1A=1$ (теорема Менелая).

Створене креслення зручно використовувати і в ході доведення. Наприклад, виділити кольором подібні трикутники (створити замкнену ламану, вказавши відповідні точки), зазначити пари рівних кутів (використати послугу обчислення кутів). На слайді можна розмістити підказки до обґрунтування, використавши кнопки типу *Показати\Сховати об'єкти* чи *Показати повідомлення.*

Вивчаючи теорему Птолемея, спочатку доцільно провести дослідження і висловити гіпотезу стосовно залежності між сторонами та діагоналями вписаного чотирикутника. Послідовність вказівок школярам може бути такою:

- розглянути чотирикутник, вписаний в коло;
- обчислити добуток, суму діагоналей; добуток протилежних сторін, суму протилежних сторін, суму протилежних кутів;
- з'ясувати, чи існує зв'язок між обчисленими величинами; висловити гіпотезу. Які співвідношення мають місце?
- перевірити гіпотезу, змінивши радіус кола, форму чотирикутника;
- до яких рівностей зведеться встановлене співвідношення для прямокутника? Для рівнобічної трапеції?

сформулювати обернене твердження. Експериментально перевірити чи буде істинним обернене твердження?

Доцільно пропонувати школярам складати підказки до ходу створення

· Ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні доведення. *Леонардо да Вінчі* динамічного креслення, для дослідження на моделі і обґрунтування твердження; розміщувати підказки на слайдах, створених за допомогою ППЗ. Виконання подібних завдань сприятиме формуванню в учнів алгоритмічного мислення. На рис. 3.42 подано копію опорного динамічного конспекту для доведення теореми Птолемея з частиною відкритих підказок. Підказки можуть містити як лише текстові евристичні настанови, так і приховувати деякі побудови, співвідношення між елементами.

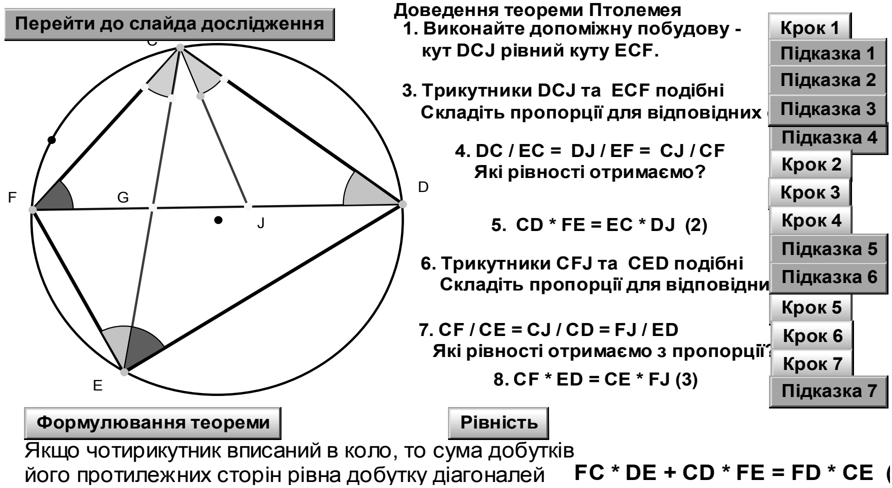


Рис. 3.42. Креслення до теореми Птолемея з відкритими підказками

Вивчаючи коло Ейлера [8,*25*], бажано для динамічного креслення створити чотири *Кнопки*, за якими приховувати і вмикати окремі побудови – медіани, висоти трикутника, означення точок Ейлера, точки Ейлера. Крім того, доцільно на слайді розмістити вказівки до ходу дослідження: у довільному трикутнику провести медіани; через основи медіан провести коло; дослідити розташування основ висот; дослідити розташування точок Ейлера (ділять пополам відрізки, що сполучають вершину з ортоцентром). Для побудови кола, яке проходить через три точки, що не лежать на одній прямій, можна завчасно створити і зберегти на диску макроконструцію, щоб швидко завантажити її в разі потреби. Оскільки виконувати побудову до задачі на звичайній дошці досить складно (рис. 3.43), то використання готової моделі з покроковим відтворенням інтенсифікує процес подачі матеріалу, дозволить проводити навчання дослідницьким методом та зосередити зусилля на обговоренні доведення. Створене за допомогою GRAN-2D чи DG креслення буде динамічним. Зміна положення однієї з вершин приведе до автоматичної перебудови малюнка. Школярам для записування доведення слід запропонувати роздрукований малюнок. Виконуючи допоміжні побудови до ходу доведення, можна формувати прийоми розумової діяльності, зокрема, здійснювати аналіз через синтез. Дослідницькими методами з використанням ППЗ бажано відкрити і ще деякі властивості кола Ейлера (рис.3.44). Наприклад, експериментально перевірити, що центр кола Ейлера є серединою відрізка, який сполучає центр описаного навколо трикутника кола з ортоцентром трикутника, а його радіус дорівнює половині радіуса описаного навколо трикутника кола. Для експериментальної перевірки використовуємо послугу *Виміряти відстань*.

Учням можна нагадати, що в 2007 році світове математичне товариство відзначало 300-річчя з дня народження визначного математика Ейлера, який значний час працював в Петербурзькій академії наук.

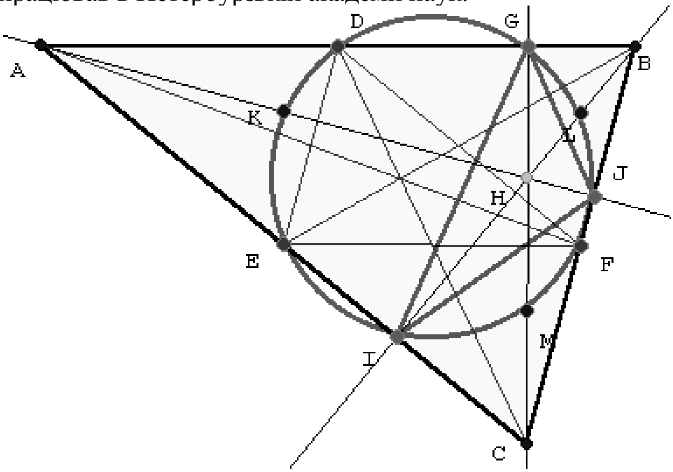


Рис. 3.43. Коло Ейлера. Побудовано трикутники, що з'єднують основи медіан, висот, точки Ейлера

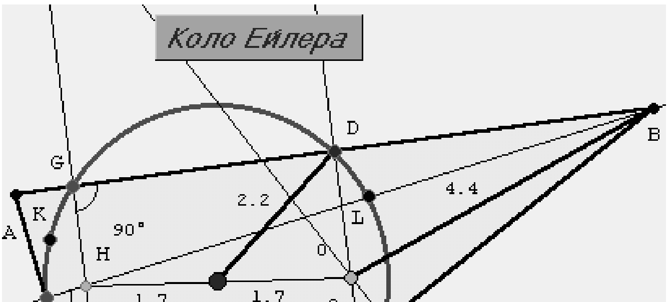


Рис 3.44. Дослідження властивостей кола Ейлера

ППЗ GRAN-2D і DG ефективно використовувати не лише для відкриття теорем, задач на дослідження але й для інших типів завдань – розв’язування задач на побудову, для відшукання ГМТ, геометричних перетворень тощо.

Розглянемо, як можна розв’язувати та подавати на уроці, пропонувати для самостійного опрацювання *задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки.* Розв’язування задачі полягає не стільки в побудові фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити, і відповідному доведенні. Основними етапами в розв’язуванні задачі є аналіз; побудова, що включає запис способу побудови фігур та власне виконання побудов; доведення та дослідження. У шкільному курсі математики основними методами розв’язування задач на побудову є метод геометричних місць, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії), алгебраїчний метод.

Задачі на побудову методом геометричних місць пропонуються учням вже в сьомому класі. Щоб розв’язати задачу цим методом, можна використати відповідне правило-орієнтир [98,276]. Продемонструємо його застосування на прикладі наступної задачі: побудувати трикутник за кутом, бісектрисою трикутника, проведеною з цієї вершини, та висотою, проведеною з іншої вершини. На рис. 3.45 представлено копію вікна побудови, виконаної до запропонованої задачі за допомогою GRAN-2D з відкритими підказками.

Розглянемо, як для розв’язування задачі слід застосовувати правило-орієнтир. По-перше, необхідно з’ясувати, до знаходження яких точок зводиться розв’язання задачі і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. У запропонованій задачі такими є точка В – вершина трикутника і точка Т – основа бісектриси. На другому кроці відкидають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу. На третьому кроці будують ГМТ, які задовольняють першу вимогу. На заключному знаходять точки перетину геометричних місць точок. Розглянемо хід побудови до задачі.

1) Від променя АК відкладаємо кут, рівний даному. При цьому бажано застосовувати не послугу *Дуга*, а виконати побудову так, як це школярі повинні робити вручну (рис. 3.45). Перевага такої побудови проявиться на етапі дослідження – зміна кута призводитиме до автоматичної перебудови креслення. Сторона кута – перше ГМТ для точки В.

2) На відстані, рівній висоті трикутника, проводимо пряму, паралельну до АК. Ця пряма – друге ГМТ для побудови точки В. Знаходимо точку В як результат перетину з прямою сторони кута. Для виконання побудови за допомогою GRAN-2D, послідовно використовуємо послуги *Перпендикулярна пряма*, *Коло заданого радіуса*, *Точка перетину об’єктів* пряма і коло, *Паралельна пряма*, *Точка перетину об’єктів* пряма і промінь.

3) Будуємо бісектрису кута А – ГМТ, що задовольняють першу вимогу для точки Т. Друге ГМТ – коло з центром у точці А та радіусом, рівним довжині бісектриси. Для виконання побудови за допомогою GRAN-2D, послідовно використовуємо послуги *Бісектриса кута*, *Коло за радіусом*, *Точка перетину об’єктів* бісектриса і коло.

4) Через точки В і Т проводимо пряму (послуга *Пряма через задані точки*) до перетину з прямою АК. Точка перетину – вершина трикутника С. Трикутник АВС – шуканий.

5) Досліджуємо можливість побудови за вихідними даними трикутника, його вид, довільно змінюючи при цьому кут, довжину висоти та бісект-

риси. Встановлюємо, що трикутник не можна побудувати у тому випадку, коли співвідношення між висотою і бісектрисою буде таким, що точка Т належатиме прямій ОВ, яка паралельна до АК.

Рис. 3.45. Копія вікна побудови з відкритими підказками

Застосування методу паралельного перенесення для розв’язування задач на побудову проілюструємо за допомогою задачі на побудову трапеції за відомими основами та діагоналями. Правила-орієнтири для паралельного перенесення і повороту схожі [98,278]. Припускаємо, що задачу розв’язано. Одну з діагоналей паралельно переносимо в напрямку однієї з основ і проводимо її через другу вершину обраної основи. В результаті отримаємо допоміжний трикутник з двома сторонами, які рівні діагоналям трапеції. Третя сторона трикутника рівна сумі основ трапеції. Цей трикутник можна побудувати за даними задачі. Виконуючи обернене паралельне перенесення, будуємо шукану трапецію (рис. 3.46). Розглянемо послідовність дій, які доцільно виконати за допомогою GRAN-2D, щоб моделлю можна було скористуватися кілька разів. Наприклад, самостійно міг переглянути учень, який пропустив урок; вчитель використав на іншому уроці – при вивченні теми „Площа трапеції”.

1) Щоб задати умову задачі („*Дано*”), створюють напис з умовою задачі (*Об’єкт\Додати напис*). Будують чотири відрізки, що відповідатимуть основам та діагоналям трапеції (послуга *Об’єкт \ Створення з екрана \ Відрізок*).

2) На етапі „*Аналіз*” будують довільну трапецію (вказують дві довільні точки – на рис. 3.46 точки I, J); проводять через них пряму. Далі створюють довільну точку К, яка не лежить на побудованій прямій, і будують пряму, яка проходить через дану точку К і паралельна до даної прямої IJ (послуга *Паралельна пряма*); створюють *Об’єкт* – точку L, що прикріплена до побудованої паралельної прямої; застосовуючи послугу *Ламана*, будують замкнену лама-

ну – трапецію IKLJ. При побудові трапеції послідовно вказують курсором чотири вершини I, К, L, J, а на закінчення побудови ламаної натискують праву кнопку мишки. Проводять діагоналі трапеції (послуга *Створити відрізки*). Всі розглянуті вище побудови можуть бути домашньою заготовкою і тоді їх потрібно лише відкрити одразу після обговорення з учнями, що ж саме задано. Або ж побудови одночасно виконувати за допомогою ППЗ та учнями в зошитах за допомогою креслярських інструментів. Використовуючи послугу *Паралельна пряма* (вказують на точку L та відрізок КJ), здійснюють паралельне перенесення однієї з діагоналей. Точку перетину побудованої прямої з основою трапеції (точку М) знаходять за допомогою послуги *Створення точки перетину об'єктів*. Бажано для багаторазового використання моделі додати кнопку, за допомогою якої можна приховати побудови до аналізу (послуга *Створення \ Додати кнопку*, тип кнопки *Показати \ Сховати об'єкти*) та виконати *Налагодження відображення*. Об'єкти, які потрібно приховувати, вказують курсором. Написи при цьому змінюють колір, інші об'єкти „блимають". Закінчують вибір об'єктів для приховування натискуванням клавіші *Esc*. Натискування створеної кнопки на слайді викликає появу об'єктів чи їх зникнення. Використовуючи послугу *Налагодження відображення*, з кожного із створених об'єктів бажано зняти відмітки, щоб при покроковому перегляді вони з'являлися всі одразу. В цьому випадку всі побудови з відміткою будуть відображатися окремим кроком. Це допоможе школяреві при самостійному опрацюванні задачі з врахуванням коментарів кроків побудови краще усвідомити хід побудови до задачі. Щоб не відображалися при цьому елементи фігури, створеної для аналізу, фігуру перед покроковим відтворенням потрібно приховати за допомогою кнопки.

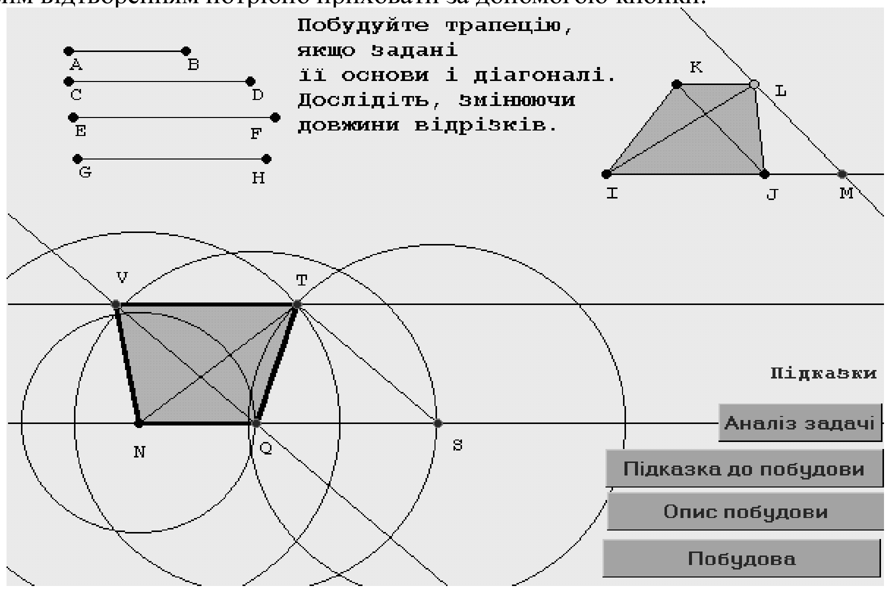


Рис. 3.46. Копія екрана GRAN-2D з відкритою підказкою аналізу і побудови

3) Етап побудови. Виконуємо побудову допоміжного трикутника ILM. Послідовно використовуємо послуги для побудови точки N і прямої, яка проходить через цю точку. Іншу, допоміжну точку, необхідну для створення об'єкта пряма, після побудови приховали, знявши відмітку з відображення імені. Крім того, з цих точок бажано зняти відмітку при налагодженні відображення. Щоб побудувати відрізок, рівний відрізку AB, застосовують послугу *Коло за радіусом*. При цьому спочатку вказують центр кола – точку N, а потім курсором відмічають початок радіуса – точку A та кінець радіуса – точку B. Використовуючи послугу *Точки перетину об'єктів,* відмічають точку Q. Далі аналогічно відкладають відрізок, рівний іншій основі. Отримують точку S. Для іншої точки перетину кола з прямою зазначають у властивостях – *Не відображати назву*. Використовуючи послугу *Коло за радіусом*, знаходять точку T; будують відрізки NT і TS. Використовуючи послугу *Паралельна пряма*, проводять пряму через точку T (вказують курсором першою), яка паралельна до прямої NS (вказують курсором другою). Аналогічно будують пряму, паралельну TS. Точку перетину побудованих прямих (точку V) знаходять, використовуючи послугу *Точка перетину об'єктів*. Завершують побудову створенням замкненої ламаної NVTQ. До ходу побудови бажано створити кілька кнопок, за допомогою яких приховувати і послідовно відкривати підказки. З одного боку, якщо вчитель використовує готову модель, то відкривання підказок зробить його діалог з учнями більш евристичним, що забезпечуватиме розвиток мислення школярів. З іншого боку, якщо учень чи студент, майбутній вчитель математики, самостійно опрацьовує задачу, то завдяки послідовному відкриванню підказок імітується евристичний діалог школяра з учителем. Адже за кнопкою можна приховувати запитання для учня. Покрокова подача матеріалу може допомогти школяреві удосконалювати навички самоконтролю.

4) Виконавши побудову, обґрунтовуємо, що трапеція шукана. Зміна довжин заданих відрізків зразу призводить до зміни трапеції. Щоб розвивати логічне мислення школяра, необхідно спонукати його зробити висновок про можливість побудови трапеції до того моменту, як це він встановить за допомогою ППЗ експериментально. Побудувати трапецію можна тоді, коли можна побудувати допоміжний трикутник. Тобто сума довжин відрізків діагоналей має бути більшою суми довжин основ трапеції. За допомогою ППЗ школяр може порівняти площу трапеції та площу допоміжного трикутника і висловити гіпотезу, що вони рівні. Тобто, вивести можливі наслідки аналізуючи виконану побудову.

Доцільно запропонувати 9-класникам виконати побудову до наступних задач: 1) побудувати трапецію, якщо відомі її сторони; 2) побудувати трапецію за основою, різницею кутів при основі і бічними сторонами.

Розглянемо застосування геометричних перетворень площини для розв'язування задач на побудову. Метод осьової симетрії застосовують, наприклад, для розв'язування задач на оптимальне розміщення мосту через річку, якщо відоме розташування населених пунктів з одного боку від річки чи по різні боки. Послідовність виконання дій для створення динамічного креслення до цих задач за допомогою GRAN-2D буде проаналізовано в наступних пунктах. Центральну симетрію можна розглядати як окремий випадок повороту на кут 180°.

Можна виділити кілька типів задач, для розв'язування яких ефективно використовувати метод повороту.

- Задачі на побудову многокутників, вершини яких лежать на трьох даних лініях (прямих чи колах). Наприклад, побудувати рівносторонній трикутник так, щоб три його вершини лежали на трьох даних прямих (рис. 3.47); вершини знаходились на трьох концентричних колах; одна вершина співпадала з даною точкою, інша лежала на даній прямій, третя на даному колі (рис. 3.48). Можна запропонувати учням побудувати квадрат, три вершини якого лежать на трьох паралельних прямих тощо.
- Другий тип задач – задачі на побудову многокутників, вписаних в інші многокутники. Наприклад, у даний квадрат вписати рівносторонній трикутник, одну з вершин якого задано на стороні квадрата; у даний ромб вписати квадрат.
- До завдань третього виду можна віднести задачі на доведення, що розв'язуються за допомогою повороту.

Щоб побудувати трикутник (рис. 3.47), на прямій CD вибрали довільну точку G і повернули пряму AB на кути $+60^\circ$ і -60° до перетину з прямою EF.

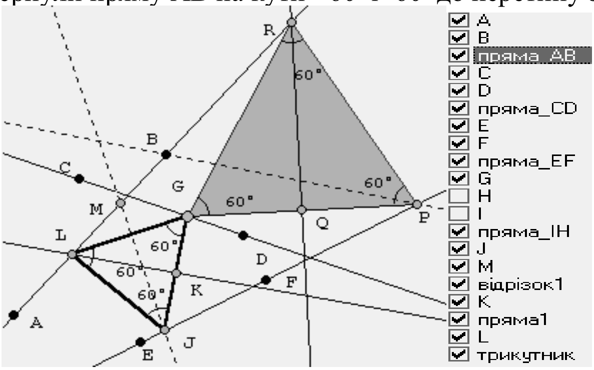


Рис. 3.47. Креслення до задачі про побудову рівностороннього трикутника, вершини якого лежать на заданих прямих

Вершини рівностороннього трикутника розташовані в точці A, на прямій BC і на даному колі відповідно. Для побудови виконано поворот прямої на кут $+60^\circ$ відносно A (рис.3.48).

В п.3.2 зазначалося, що вивчаючи тему „Правильні многокутники”, доцільно разом зі школярами створювати з використанням ППЗ GRAN-2D макроконструкції для побудови правильних многокутників, якщо задана сторона або радіус кола. У цьому випадку при відтворенні побудови кроки виконання завдання співпадають з виконаними вручну. Самостійне опрацювання таких

Узагальнення поняття часто буває корисним для усвідомлення його суті.
А.М. Колмогоров

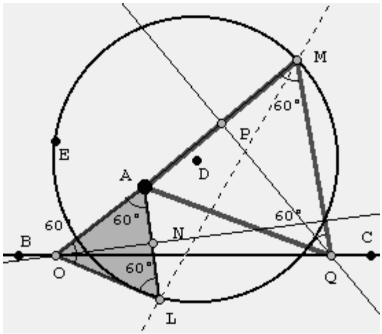


Рис. 3. 48. Для побудови застосовано перетворення *Поворот*

динамічних конспектів сприятиме формуванню в школярів умінь та навичок виконання відповідних побудов. Для побудови правильних многокутників можна також використовувати послугу *Об'єкт \ Створення\ Правильний многокутник*. Однак при відтворенні побудови відображаються лише вершини і ламані. Тому послугу варто використовувати лише в тому випадку, коли рекомендується побудувати значну кількість многокутників. Наприклад, при створенні конструкцій для дослідження *властивостей послідовності* довжин відрізків деяких фігур чи їх площ. Наприклад, доцільно запропонувати школярам створити динамічні вирази для визначення знаменника геометричної прогресії для сторін многокутників, їх периметрів, площ, вписаних в многокутники кіл чи описаних навколо многокутників кіл (рис. 3.49).

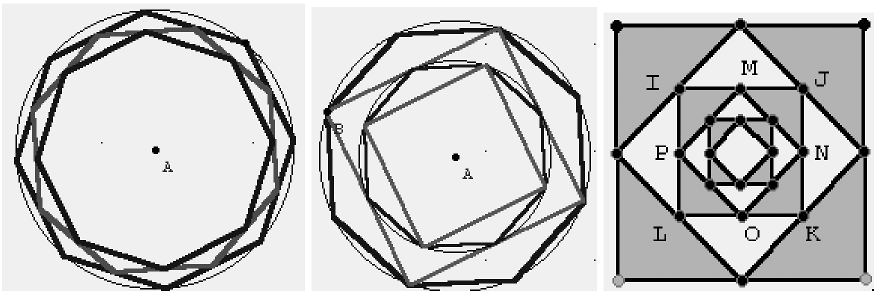


Рис. 3.49. Конструкції з правильних многокутників

Вивчаючи тему „Декартові координати на площині", школярі за результатами комп'ютерного експерименту за допомогою GRAN-2D чи DG можуть не лише вивести формулу поділу відрізка пополам, поділу в заданому відношенні, скласти рівняння кола, прямої, встановити геометричний зміст кутового коефіцієнта в рівнянні прямої, отримати умови паралельності і перпендикулярності прямих, але й ефективно будувати та досліджувати різні ГМТ, задані словесно. Досліджуючи фігури методом координат, розглядають такі дві задачі: 1) знаючи геометричні властивості фігури, знайти її рівняння; 2) знаючи рівняння фігури, знайти її геометричні властивості. Звичайно, використання моделюючих програм не подає аналітичного розв'язування задачі, але може підштовхнути школяра до розв'язання, показати ціль, до якої потрібно прийти.

Наприклад, задано коло і точку на ньому. Необхідно знайти *геометричне місце точок*, які ділять хорди кола, проведені через дану точку, навпіл. На рис. 3.50 зображено ГМТ, що є колом з діаметром CA. Справа подано перелік об'єктів, які необхідно створити за допомогою GRAN-2D. На завершальному етапі побудови креслення необхідно скористатися послугою *Властивість точки\Залишати слід*. Коли точка D рухається по колу, точка E залишає слід, який є колом. Обґрунтування до задачі здійснюється методом координат. Для побудови могли скористатися послугою *ГМТ*, послідовно вказавши на точки D і E.

При поглибленому вивченні математики за підручником [8], восьмикласники знайомляться з кривими другого порядку, складають рівняння еліпса (рис. 3.51), гіперболи, параболи (рис. 3.52), кола Аполлонія. З досвіду роботи можемо стверджувати, що найбільший емоційний вплив справляє на школярів побудова ними ГМТ з використанням мотузки і крейди. Однак, дослідити оптичні властивості названих кривих краще за допомогою GRAN-2D чи DG. Для перших двох кривих фіксують дві точки і досліджують ГМТ, сума (різниця) відстаней від яких до двох заданих стала. Щоб відкрити параболу, досліджують ГМТ, рівновіддалених від точки і прямої. На рис. 3.52 побудовано ГМТ, рівновіддалене від даної точки C і прямої, яка не проходить через цю точку. Перелік об'єктів для побудови параболи подано справа від малюнка. Для точки F зазначаємо у властивостях, що необхідно залишати слід. Користуючись динамічним кресленням, зручно продемонструвати оптичні властивості параболи – промені світла, які виходять з фокуса, відбиваючись від параболи йдуть паралельно осі симетрії параболи. Крім динамічних креслень, на слайдах бажано розміщувати евристичні підказки для виконання дослідження, послідовно їх відкривати за допомогою вмонтованих кнопок.

Рис. 3.50. ГМ середин хорд

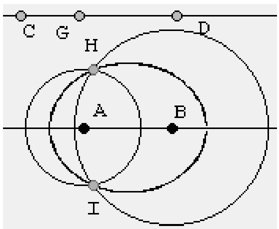


Рис. 3.51. ГМТ – еліпс

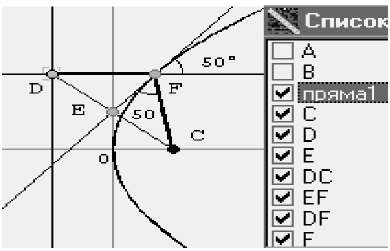


Рис. 3.52. ГМТ – парабола

При виконанні завдання на дослідження геометричного місця точок, сума (різниця, добуток, відношення) відстаней від яких до двох заданих є сталою величиною, зручно і за допомогою ППЗ GRAN1. Для цього слід скласти і досліджувати відповідну функцію. Для сталого добутку отримаємо лінії Кассіні, для сталої частки – коло Аполлонія.

Підсумовуючи, ще раз акцентуємо увагу на тих особистісних якостях, які можна розвивати в учнів, якщо доцільно застосовувати у навчанні ППЗ „Динамічна геометрія”. Пропонуючи „відкривати” відповідні твердження, ГМТ, виконуючи задачі на дослідження, побудову, доведення та інші стимулюється формування пізнавальних і творчих якостей школярів.

Контрольні запитання і завдання

1. Дослідити, як використовуючи засоби динамічної геометрії, можна формувати в учнів здібності до висування гіпотез, уміння узагальнювати, пізнавальну самостійність та інші позитивні особистісні якості?

2. Дібрати з підручника геометрії чи відповідних посібників з математики одну-дві задачі на побудову, розв’язати їх, створити динамічні опорні конспекти. Використовуючи пункт меню *Налагодження \ Налагодження відображення*, з допоміжних побудов зняти відмітки про відтворення побудови як окремого кроку.

3. Дібрати завдання з підручника [8] на доведення, переформулювати його як завдання на дослідження і обґрунтування, створити відповідний динамічний опорний конспект уроку, який міститиме креслення, динамічні вирази, підказки.

4. Підготувати завдання до уроку геометрії на вибрану тему, створити до них креслення за допомогою GRAN-2D. Бажано дібрати завдання на дослідження, на побудову, на обчислення, на доведення. Розробити підказки до задач, створивши відповідні об’єкти-кнопки.

5. Підготувати креслення для завдань на побудову до теми "Чотирикутники":

а) побудувати ромб *ABCD*, якщо задана середина сторони *AC (AB, AD, BC)* та центри кіл, описаних навколо трикутників *ABC* і *ADC*;

б) побудувати ромб *ABCD* за розташуванням вершин *A* і *B*, відстанню від даної точки *M* до середини *DC*;

в) побудувати квадрат за сумою сторони з діагоналлю;

г) побудувати квадрат за різницею довжин діагоналі та сторони;

д) на місцевості була відмічена ділянка *ABCD* квадратної форми. Дощі розмили її межі, збереглася віха в центрі ділянки і кілочки на сторонах *AB* та *CD*. Чи можна за цими даними відновити межі ділянки? Чи можна розв’язати завдання, якщо другий кілок забитий на стороні *BC*?

е) побудувати трапецію за середньою лінією, відстанню між основами та кутами при одній з основ.

6. Виконати дослідження за допомогою ППЗ:

а) на сторонах паралелограма у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники. Вершинами якого чотирикутника є ті їх вершини, які не лежать на сторонах паралелограма? Дослідити вид чотирикутника залежно від виду паралелограма;

б) всередині опуклого многокутника рухається точка. З неї опущено перпендикуляри на всі сторони многокутника чи їх продовження. Чи змінюватиметься сума довжин цих перпендикулярів?

в) в XIX столітті селяни міряли площу чотирикутника (не прямокутника) *ABCD* за формулою *0,25(AB+CD)(AC+BD).* Для яких чотирикутників формула дає правильну відповідь? Коли отримані результати можна використовувати як наближені обчислення? Для яких чотирикутників формулу застосовувати зовсім не доцільно?

3.5. Формування мотиваційно-творчої спрямованості учнів у процесі вивчення теми „Геометричні перетворення фігур"

Розробниками ППЗ DG (С.А. Раков, В.П. Горох та ін.) і GRAN-2D (М.І. Жалдак, Є.Ф. Вінниченко, О.В. Вітюк, А.О. Костюченко) передбачено широкий спектр послуг, використовуючи які, зручно вивчати властивості геометричних перетворень, демонструвати різні види рухів, гомотетію у процесі перетворення плоских фігур. Переваги подання графічних відомостей з використанням ППЗ, активне включення школярів у самостійне створення фігур різної складності, розв'язування задач з використанням різних перетворень за допомогою ППЗ створюють сприятливі умови для особистісно орієнтованого навчання учнів. Тому використання DG і GRAN-2D в навчанні геометричним перетворенням сприятиме розвитку позитивних особистісних якостей учнів.

С.А. Раков, В.П. Горох та ін. [88] досліджують можливості використання ППЗ DG для побудови геометричних місць точок, створення електронних шарнірних механізмів для виконання геометричних перетворень. Пропонується розробити наступні механізми: симетризатор – для забезпечення симетрії відносно прямої; ротатор – для забезпечення повороту, центральної симетрії; транслятор – для паралельного перенесення; гомотетор – для здійснення перетворення гомотетії, ротатор - гомотетор – для забезпечення композиції гомотетії та повороту; дилататор – засіб для виконання довільного перетворення подібності. Наведені електронні механізми можна розглядати як керовані математичні моделі з засобами змінювання параметрів моделі і динамічного відображення змін моделей, зокрема в графічній інтерпретації.

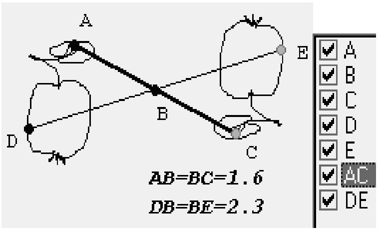
Є.Ф. Вінниченко і А.О. Костюченко розглядають особливості здійснення певних видів перетворень за допомогою оновленого ППЗ GRAN-2D [14]. Однак, методика використання GRAN-2D при вивченні геометричних перетворень, розроблена не в повній мірі, потребує подальших досліджень та апробації.

Завдання на побудову з використанням геометричних перетворень запропоновано в публікації [10]. Мова йде про математичні моделі підготовлені за допомогою Macromedia Flash. При вписуванні квадрата в трикутник, акцент зроблено на демонстрації руху квадрата, що полегшує розуміння суті геометричних перетворень. Аналогічно підходять до вивчення властивостей геометричних перетворень і розробники бібліотеки наочностей „Геометрія 7-9". Нам в більшій мірі імпонує наочність конструктивна, коли школяр може без ускладнень переглянути хід створення креслення, виконати певні дослідження, змінивши параметри моделі. Найкраще, коли порядок виконання побудов і власне побудови максимально наближені до тих, які учень виконує на уроках математики вручну. Тому в даному посібнику перевагу в навчанні геометричним перетворенням надано пакетам динамічної геометрії DG і GRAN-2D.

У процесі дослідження ефективності використання ППЗ GRAN-2D на етапі формування понять, дослідження властивостей переміщення, перетворення подібності ставили за мету розвивати мотиваційно-творчу спрямованість особистості. Намагалися розвивати творчий інтерес, потяг до пошуку нових даних, пізнавальну самостійність, прагнення до самоосвіти та ін. Основна мета вивчення геометричних перетворень, зазначається в [98,291], ознайомити учнів з різними видами рухів, подібністю і гомотетією, їх властивостями; ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач. Вивчення геометричних перетворень за підручником О. Погорєлова відбувається за два етапи: у 8-му класі вивчають рухи, у 9-му перетворення подібності. В підручнику для поглибленого вивчення математики [8] тема розглядається в 9-му класі. Вводячи означення центрально–симетричних точок послуговуються двома методичними прийомами: 1) означення базується на суттєвих властивостях: дві точки X_1 та X_2 називаються симетричними, якщо точка O – середина відрізка X_1X_2; 2) конструктивне означення: нехай O – фіксована точка, X_1 – довільна точка площина. Відкладемо на продовженні відрізка OX_1 за точку O відрізок OX_2, рівний OX. Точка X_2 називається симетричною точці X_1 відносно точки O. Друге означення одночасно дає спосіб побудови центрально-симетричних точок і центрально-симетричних фігур. Школярам потрібно навести приклади центрально-симетричних фігур.

При вивченні перетворень з використанням GRAN-2D заняття проводили у комп'ютерному класі. Розглядаючи *симетрію*, діяли таким чином. Запропонували учням побудувати довільну точку A і вказати центр симетрії (пряму симетрії). Симетричну точку порадили створити, використавши послугу *Точка, симетрична відносно даної точки (прямої)*. Утворені точки з'єднали відрізком. У цьому разі були створені незалежні об'єкти центр симетрії (вісь симетрії), а залежними будуть симетричні точки. В подальшому поставили учням завдання самостійно, користуючись обчислювальними інструментами ППЗ, з'ясувати властивості симетричних точок. Змінюючи положення точки A, учні з'ясували таку суттєву властивість, як однакові відстані до центра (прямої) симетрії. Для встановлення властивостей точок, симетричних відносно прямої, учні використовували два інструменти – обчислення відстані та обчислення кутів. Далі в бесіді з учнями сформулювали означення симетричних точок за суттєвими властивостями. Наступним кроком була розробка алгоритму побудови симетричних точок. Привертаємо увагу учнів до того, як можна дати конструктивне означення симетричних точок, і що саме такий підхід закладено в програмне забезпечення. В ході дослідження учні записують сформульовані ними означення, властивості. Бажано одразу з'ясувати, як пов'язані координати симетричних точок. Для цього потрібно на екрані відобразити координатні осі, а для точок зазначити у властивостях „Відображати координати". Для центральної симетрії спочатку розташовують центр у початку координат. В ході дослідження змінюють положення точки A і отримують формули $x_1 = -x$, $y_1 = -y$. Потім переходять до довільного центра симетрії і пригадують з учнями, за якими формулами можна знайти координати симетричної точки, середини відрізка.

Наступним кроком є підведення учнів до формулювання ними означення симетричних фігур. Для цього демонструємо побудову симетричних фігур. А саме, радимо учням у властивостях для двох побудованих симетричних точок зазначити „Залишати слід". Рухаючи точку A вздовж деякої фігури, симетрична до неї точка опише симетричну фігуру. У процесі дослідження кожен учень отримав змогу проявити творчість і побудувати ту фігуру, яка була йому до вподоби. Учні із задоволенням розглядали малюнки однокласників, спостерігалося загальне піднесення, бажання удосконалити власний малюнок (рис.3.53, 3.54). Щоб зручніше демонструвати властивості перетворення, бажано створити ще одну пару симетричних точок. В подальшому доцільно виконати з учнями вправи, які б дозволяли їм зробити висновки, що симетрія є рухом. Експериментально перевіривши, що при симетрії зберігаються відстані між відповідними точками, промені переходять у промені, зберігаються кути та ін., школярі в подальшому зможуть самостійно обґрунтувати властивості переміщення.



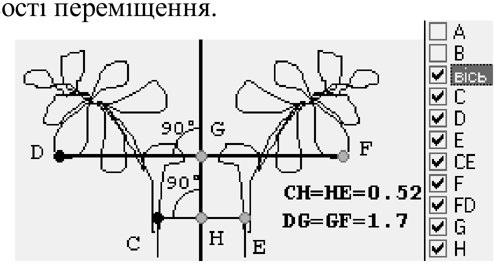


Рис. 3.53. Центральна симетрія **Рис. 3.54. Осьова симетрія**

Творче домашнє завдання полягало в тому, щоб учні дібрали приклади застосування симетрії в архітектурі, техніці, біології та ін., підготували презентацію зі знайденими матеріалами, побудували динамічні симетричні моделі.

Для введення *повороту* необхідно вказати центр, кут повороту та напрям. Акцент при вивченні властивостей перетворення зробили на створенні динамічних моделей повороту (рис.3.55). За допомогою GRAN-2D зручно продемонструвати властивості повороту. Будуємо довільний кут *BAC* – кут повороту і довільну ламану. Нехай точка J – центр повороту. Застосуємо послугу *Перетворення параметрично \ Поворот* до побудованої ламаної. Зазначаємо, що в результаті повороту необхідно створити результуючий образ та прикріпити його до вихідного. Поворот здійснюємо на орієнтований кут *BAC*, подаючи його в градусах (запис для кута *Deg(Oangle(B,A,C)))*. В подальшому можемо змінювати величину кута *BAC*, положення центра повороту і спостерігати за переміщенням на площині ламаної. Якщо для точок новоствореної ламаної зазначити у властивостях „*Залишати слід”*, то в результаті повороту точки повинні залишати слід у вигляді дуг кіл.

Важливо разом з учнями навести приклади фігур, які є центральносиметричними; мають вісь симетрії чи симетрію обертання порядку *n*. В підручнику [8,117] подано означення фігури з симетрією обертання *n*-го порядку. Це фігура, яка внаслідок повороту навколо деякої точки фігури на кут $360^{\circ}/n$ переходить в себе. На рис. 3.7, 3.8 наведено приклади фігур, які мають симетрію *n*-го порядку, і зроблено пояснення, як потрібно такі фігури будувати. Щоб отримати калейдоскоп, необхідно зазначити прив’язку результуючих об’єктів до початкового. У цьому разі будь-яка зміна в розташуванні вершин ламаної, що повертається, відобразиться на решті ламаних, створених в результаті повороту. Важливо стимулювати створення учнями малюнків.

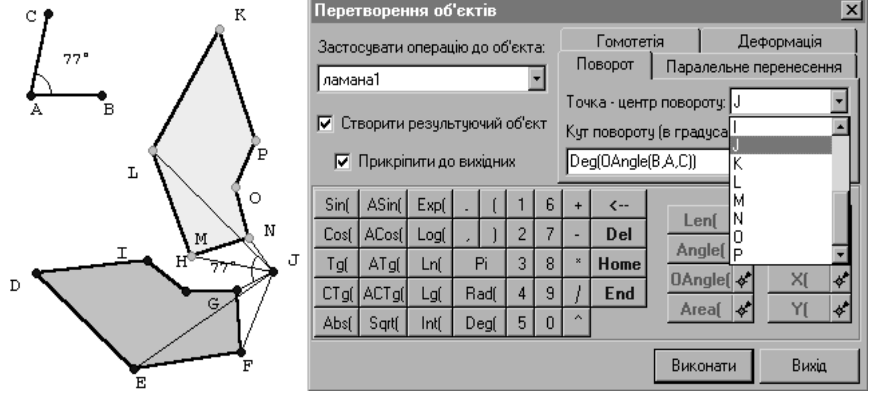


Рис. 3.55. Вікно ППЗ GRAN-2D „Перетворення об'єктів". Поворот

Знайомлячи школярів з властивостями *паралельного перенесення* за допомогою GRAN-2D (рис. 3.56), використовуємо послугу *Об'єкт \ Перетворення параметрично \ Паралельне перенесення.* Координати вектора перенесення можна задати як постійними числами, так і через параметри. Ілюструвати паралельне перенесення краще, якщо на екрані зображена система координат і нанесена координатна сітка.

Аналогічно можна підійти до вивчення властивостей *гомотетії***.** На рис. 3.57 подано приклади гомотетичних фігур. Фігуру зліва створено як слід точки. Зміна положення центра гомотетії не змінює положення намальованої фігури. Справа – зображення динамічного креслення. Коефіцієнт гомотетії подається як різниця абсцис точок К та J. Цю модель створено так, що зміна положення центра гомотетії чи коефіцієнта, автоматично приводить до зміни фігур.

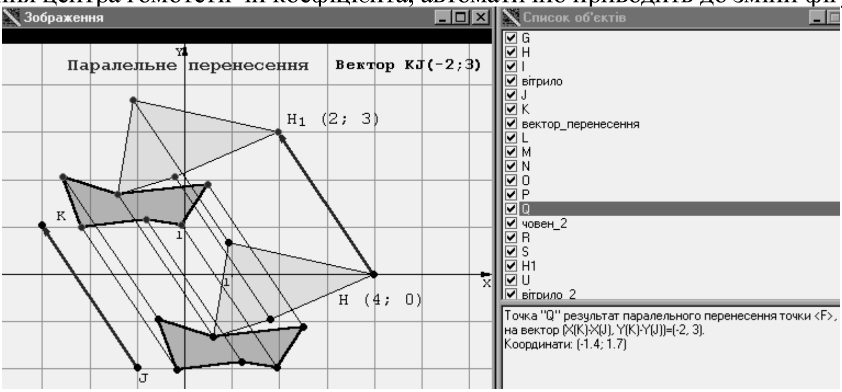


Рис. 3.56. Паралельне перенесення

За допомогою ППЗ GRAN-2D зручно проводити дослідження на композицією переміщень. Для створення динамічних моделей необхідно зазначати прив'язку до початкових елементів. При цьому створюються і проміжні точки.

Використання при вивченні геометричних перетворень ПЗНП створює передумови для формування активної, творчої, самосвідомої особистості,

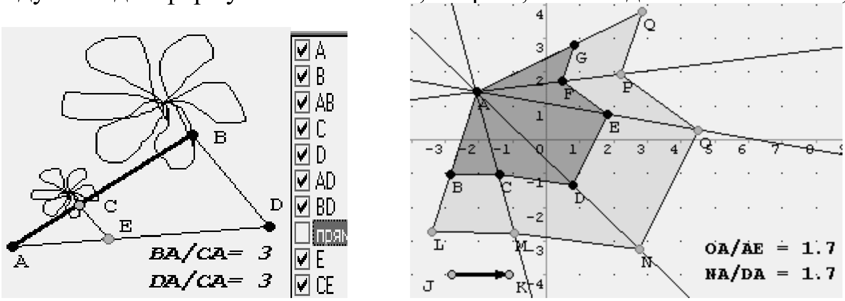


Рис. 3.57. Приклади гомотетичних фігур

здатної до самореалізації. Учень отримує можливості для вияву творчих здібностей, розвитку пізнавального інтересу, пізнавальної самостійності. Розвивається його творча уява, підвищується внутрішня мотивація школяра через гармонійне вбудовування освітнього процесу в логіку діяльності учня, що має для нього особистісний зміст.

Контрольні питання і завдання

1. Підготувати добірку динамічних креслень для демонстрації властивостей геометричних перетворень.
2. Підготувати зразки орнаментів, побудувати їх за допомогою GRAN-2D.

3.6. Прикладна спрямованість навчального матеріалу як засіб активізації творчої діяльності учнів

Науково-технічний прогрес суспільства вносить суттєві зміни у зміст, методи і відповідним чином відображається у вимогах до математичної освіти. Поряд із зростанням ролі теоретичної складової, посилюється загальноосвітня роль курсу математики, прикладна та політехнічна спрямованість навчання·. В концепції математичної освіти 12-річної школи визначається посилення прикладної спрямованості як один із пріоритетів розвитку освіти.

Практичні задачі евристичного характеру є потужним знаряддям для розвитку творчих здібностей особистості. Наприклад, здібності втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми, переносити знання і уміння в нові ситуації, уміння бачити знайоме в незнайомому, винахідливість, гнучкість мислення та ін. Доступні для розуміння учня прикладні задачі посилюють світоглядні аспекти навчання, мають незрівнянну цінність для мотивації вивчення нового математичного матеріалу. Життєвою необхідністю їх розв'язування найбільш природно обґрунтувати потребу у нових ідеях, знаннях і методах.

В той же час, дослідження показують, що при вивченні теми, пов'язаної з розв'язуванням задач на відшукання найбільшого (найменшого) значення в задачах практичного змісту, незначна частина учнів вибирає

· Зближення теорії з практикою дає найбільш благотворні результати, і не одна тільки практика від цього виграє, самі науки розвиваються під її впливом. *П.Л Чебишев* задачі вказаного типу із запропонованих. Здебільшого у тому разі, коли в її умові дані практично не відрізняються від тих, які були в попередньо розв'язаних задачах. Найпоширенішими причинами, які обумовлюють невміння учнів працювати з практичними задачами на екстремум, є недостатня увага, що приділяється цим задачам в ході вивчення відповідного матеріалу в шкільному курсі математики, брак часу хоча б на постановку задач, невміння учнів інтегрувати знання з різних областей знань, а тому і невпевненість у своїх силах та здібностях. Окремі учні відмовляються від розв'язування практичних задач навіть не проаналізувавши умову завдання. Як одну з причин невибору задачі учні часто називають побоювання, що не зможуть довести завдання до відповіді, а тому і не отримають практичного результату, не зможуть його перевірити. Особливо складно даються задачі, які вимагають знання певних фактів з фізики чи з хімії.

В задачах практичного змісту, які пов'язані з найпростішою обробкою статистичних даних, труднощі в учнів найчастіше виникають при необхідності поставити питання за частотною таблицею. Наприклад, ставилося завдання дослідити, який середній зріст дівчат у 10-му класі, розподілити опитаних по групах зросту, щоб дати рекомендації з пошиву партії одягу. Якщо перша половина завдання – збір експериментальних даних, обчислення середнього арифметичного, моди, медіани, частоти – виконувалася учнями залюбки, оскільки ними були засвоєні алгоритми розрахунку величин, то самостійно поставити запитання за таблицею змогли близько половини учнів.

Не менш складними виявилися для учнів задачі на рух, до яких можна виконувати побудови графічних моделей. У дослідженнях використовували добірку задач зазначеного типу, запропоновану Г.П. Бевзом [5]. Учням пропонувалося одну і ту ж задачу розв'язати двома способами – алгебраїчним та графічним. Графічний метод передбачав побудову, аналіз графіків рівномірного руху (вздовж горизонтальної осі відкладали час, вздовж вертикальної – шлях), розв'язування завдання через застосування рівності чи подібності трикутників тощо. Значна частина тих учнів, які все ж змогли побудувати графічну модель до задачі, могла лише якісно проаналізувати процес – автомобілі рухаються, стоять, зустрілися, один наздогнав іншого тощо. Кількісну характеристику з графічного малюнка отримало учнів менше, ніж розв'язали алгебраїчно.

Питання прикладної спрямованості матеріалу як засобу стимулювання навчальної діяльності висвітлювали Г.П. Бевз [5], Т.В. Зайцева [34,*59*], М.П. Маланюк [66], Л.Л. Панченко [77], З.І. Слєпкань [97], Л.М. Фрідман [112], І.М. Шапіро [120] та ін. На важливості використання історичних задач в навчанні математики з метою формування особистості школяра акцентує увагу В.Г. Бевз. Застосування ППЗ GRAN1 та GRAN-2D для аналізу функціональних залежностей, наближеного відшукання найбільших і найменших значень функції на заданій множині висвітлювали М.І. Жалдак, Є.Ф. Вінниченко, О.В. Вітюк, Ю.В. Горошко [28–31]. М.І. Жалдак акцентує увагу на необхідності розвитку творчих компонентів мислення під час постановки задачі та інтерпретації розв'язку [27]. За допомогою використання ППЗ для дослідження моделі-функції можна інтенсифікувати процес навчання і вивільнити час. Учень звільняється від рутинної роботи, пов'язаної з обчисленнями, перекладаючи її на програмне забезпечення, а вчитель отримує резерв часу для творчого розвитку учнів. На важливості розв’язування практичних завдань, що потребують статистичної обробки даних, акцентують увагу М.І. Жалдак та Г.О. Михалін [32]. Для інтенсифікації процесу навчання пропонується застосовувати ППЗ GRAN. Н.В. Морзе [73] веде мову про отримання практичного продукту як мети навчання з використанням проектних технологій на основі ІКТ. Один із фундаторів методології математичного моделювання Б.В. Гнєденко[1] зазначав, що готувати не лише учнів, але й майбутніх вчителів математики потрібно так, щоб вони могли бачити, з одного боку, основний зміст сучасної математики, з іншого – її прикладні можливості, методологічні проблеми та історичний процес її розвитку. Причому, метод математичного моделювання слід розглядати як метод наукового пізнання.

Прикладні задачі – це задачі, які поставлені поза математикою і розв’язуються математичними засобами. Задачі такого виду відповідають певним вимогам: мати реальний практичний зміст, який демонструє практичну цінність набутих математичних знань; відповідати шкільній програмі; бути сформульованими доступною і зрозумілою мовою, тобто не містити термінів, що потребують додаткових знань, які не передбачені шкільною програмою.

Прикладні задачі в процесі навчання виконують такі дидактичні функції, як навчаюча, виховна, розвиваюча, контролююча [98]. Вирішальною серед цих функцій все частіше називається розвиваюча. Питання ощадливості та економії матеріалів відіграють на виробництві значну роль. Тому і задачі, пов’язані з оптимізацією розв’язку, виконують важливу розвиваючу та виховну функцію. На важливості задач з оптимізацією розв’язку акцентують увагу М.І.Бурда [7], С.А. Раков [87], М.І. Шкіль [122–123] та ін.

На основі аналізу розглянутих вище джерел, добірок задач з математики, досвіду використання ППЗ GRAN можемо констатувати:

– розв’язування практичних задач надзвичайно важливе для розвитку творчих якостей учня, активізації його творчої діяльності;

– впровадження ІКТН математики дозволяє значно інтенсифікувати процес розв’язування практичних, прикладних задач за рахунок перекладання операцій обчислення на програмне забезпечення;

– педагогічна практика свідчить про низьку готовність значної частини учнів до розв’язування задач зазначеного типу, починаючи з аналізу умови до дослідження на прийнятність, змістовність отриманих результатів.

Ратуючи за використання ППЗ в навчанні розв’язуванню практичних задач, ставили за мету розробити добірки завдань, для яких зручно створювати динамічні креслення за допомогою GRAN чи досліджувати моделі-функції [47]. Пропонуючи ці завдання для розв’язування, можна сподіватися на посилення внутрішньої мотивації учіння, підвищення в учнів творчого інтересу, потягу до пошуку нових фактів, прагнення до самоосвіти. Поряд з цими особистісними якостями формуються дослідницькі уміння учнів, здібність переносити знання і уміння в нові ситуації, винахідливість.

Щоб знаходити екстремальні значення певних величин за допомогою ППЗ

[1] Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

GRAN-2D, крім дослідження моделі-функції, можна створювати і досліджувати значення динамічних виразів. До складу таких виразів можуть входити величини певних кутів, довжин відрізків, площ многокутників. Екстремальні значення знаходять також обчислюючи площу круга, довжину кола, довжину ламаної.

Розглянемо схему розв'язування задач з практичним змістом, запропоновану М.Д. Касьяненко[1] (с. 97):

1. Вивчення задачі і здійснення її структурного аналізу:
а) виділення об'єктів задачі та відношень між ними;
б) виділення величин, які розглядаються в задачі;
в) пригадування і встановлення співвідношень між величинами.
2. Складання плану розв'язування задачі у загальному вигляді.
3. Побудова математичної моделі: складання числових виразів, рівнянь, нерівностей, використання готових (раніше вивчених) співвідношень, формул, тотожностей.
4. Розв'язування задачі.
5. Перевірка правильності моделювання та розв'язку задачі.
6. Дослідження здобутих розв'язків у даній практичній ситуації, знаходження остаточного результату - відповіді.
7. Пошуки інших способів розв'язування задачі, виділення найраціональнішого.
8. Опис найраціональнішого способу розв'язування задачі.
9. Складання задач, обернених до даної, їх розв'язування.
10. Встановлення меж застосування способу розв'язування задачі (для задач з іншим практичним змістом чи іншими числовими даними).
11. Складання узагальненої задачі, її розв'язування та дослідження.

Зауважимо, що не для всіх задач і не кожного разу потрібно виконувати всі етапи. Наприклад, етапи 9, 10, 11 можна включати під час розв'язування опорних задач. Поряд з повною схемою розв'язування задач з практичним змістом можна застосовувати і згорнуту [77,22]: 1) попередній аналіз об’єкта дослідження; 2) побудова моделі; 3) реалізація моделі математичними методами; 4) аналіз одержаних результатів та їх перенесення на образ, що вивчається. В згаданій публікації задачі розглянуто тренувальні (для вироблення стійких умінь і навичок) і розвиваючі (для розвитку творчого мислення). Щоб забезпечити поетапне оволодіння евристичною схемою діяльності математичного моделювання, доцільно на першому етапі застосовувати тренувальні задачі з відносно простим змістом, такі, що текст задачі містить підказку у виборі моделі.

Погоджуємося з Т.В.Зайцевою [34,124] в тому, що комп’ютерне моделювання підсилює принцип наочності в сучасному його розумінні – єдності предметно-образної і абстрактно-логічної дії. У зв’язку із загальнометодичним підходом у навчанні математики наочність зіставляється з одним із методологічних принципів науки – “принципом пояснення”. Комп’ютерною моделлю можна назвати таку заміну реальних об’єктів, яка дозволяє всебічно відобразити найважливіші сторони досліджуваного об’єкта або явища в навчальному процесі.

---

[1] Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності вивчення математики: Орг. твор. діяльності учнів. Навч.-метод. посібник. – К.: Рад. школа, 1980. – 142 с.

Оскільки прикладні задачі вимагають творчого підходу школяра як на стадії створення математичної моделі, так і при відшуканні одного чи кількох способів розв'язування, інтерпретації отриманих результатів, то по можливості намагалися розв'язувати їх в кілька етапів. На першому етапі – здійснювали аналіз умови, можливо, і постановку задачі. Завдання обговорювалися в групах, іноді пропонувалися для домашніх роздумів. На другому етапі вислуховували пропозиції учнів. Якщо завдання пропонувалося попередньо додому, то обговорювалися результати дослідження, в тому числі і отримані на комп'ютері. На цьому ж етапі намічали шлях теоретичного обґрунтування. І лише на третьому, заключному, можна було робити остаточні висновки. Розбиття на кілька етапів іноді корисне з метою забезпечення інкубації – *через уявний відхід від проблеми, підсвідомий аналіз і вибір підготувати ґрунт для відкриття.*

Перевагою моделі (креслення), побудованої за допомогою GRAN-2D, перед виконаною на папері є динамічність: зміна початкових умов веде до миттєвої зміни виразів, що відстежуються. А це дає можливість оперативно порівнювати знайдений результат із зафіксованими попередніми і визначати напрям подальшого дослідження. Проводячи обчислювальні експерименти, учні мають змогу висувати гіпотези, відчувати себе дослідниками, експериментаторами. В процесі навчання спостерігається підвищення самостійної пізнавальної активності – як до вивчення теорії, так і до оволодіння методами її застосування до розв'язування задач.

Наведемо приклади динамічних креслень до задач із практичним змістом. За допомогою ППЗ GRAN-2D і DG будемо вводити вирази, які міститимуть посилання на наявні об'єкти та обчислюватимуться автоматично при зміні цих об'єктів. Вивчаючи тему "Нерівність трикутника", помітили, з якою цікавістю школярі розв'язують задачу про оптимальне розміщення мосту через річку, яка протікає поблизу двох населених пунктів, та вирішують проблему зменшення витрат на асфальтування доріг. Для пошуку вирішення проблеми запропонували учням створити динамічне креслення за допомогою GRAN-2D (рис 3.58).

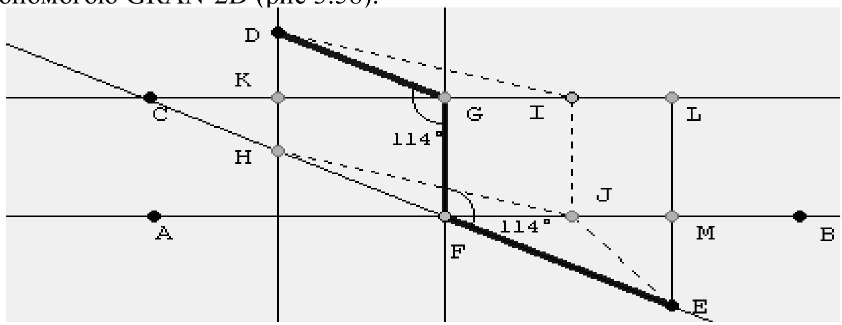


Рис. 3.58. Проект для побудови мосту

На першому етапі переводимо прикладну задачу на математичну мову, формуючи в учнів уміння абстрагуватися. Вводимо наступні абстрактні об'єкти: населені пункти – точки; береги річки – дві паралельні прямі; шлях, що з'єднує населені пункти, подаємо у вигляді ламаної. Аналізуємо, які величини задані в умові, які потрібно в задачі знайти. До заданих відносимо відстані до берегів річки від населених пунктів, ширину річки, відстань між населеними пунктами вздовж берега. Щоб побудувати динамічне креслення, необхідно з'ясувати, які об'єкти в динамічному кресленні будуть головними, залежними чи напівзалежними. Виробляємо поданий нижче алгоритм створення креслення:

1) побудуємо точки *A,B,C* (*Об'єкт\Створити\Точка)*;

2) проведемо берег річки *AB* (*Об'єкт\Створити\Пряма)*;

3) через точку *C* паралельно до *AB* проходить другий берег (*Об'єкт \Створити\Паралельна пряма)*;

4) позначаємо населені пункти *D, E* (*Об'єкт\Створити\Точка*);

5) вибираємо на прямій *AB* довільну *точку F* (вхід на міст) і даємо ствердну відповідь на питання про її *прикріплення до об'єкта;*

6) будуємо міст – перпендикулярну до *AB* пряму через точку *F (Об'єкт\Створити\Перпендикулярна пряма)*;

7) знаходимо точку *G* – точку перетину з протилежним берегом (*Об'єкт \Створити \Точка перетину об'єктів)*;

8) прокладаємо дорогу, що з'єднує пункти (*Об'єкт\Створити\Ламана DGFE*). Якщо вказівник *переліку об'єктів* установимо на пункті "ламана", то в полі *характеристик* з'явиться її довжина;

9) щоб знайти оптимальне розташування точки *F*, змінюють її положення, рухаючи вздовж прямої. При цьому відстежуємо зміну величини шляху як довжину ламаної або ж створюємо динамічний вираз за формулою *Len(D,G)+Len(G,F)+Len(F,E).*

Якщо в розпорядженні вчителя лише один комп'ютер, краще пропонувати заздалегідь підготовану модель, проставляючи відмітки біля введених об'єктів.

Отже, для довільного розташування пунктів на кресленні можемо знайти розташування точки F. Вчитель пропонує учням знову повернутися до вихідної проблеми і проаналізувати кожну із складових шляху. Варіюючи такою несуттєвою величиною, як відстань до берега, встановлюємо, що ширина річки не впливає на оптимальну довжину шляху. Тому переходимо до підзадачі даної задачі. За якої умови сума відстаней від населених пунктів до входу на міст буде однаковою? Учні можуть висунути дві гіпотези – внутрішні різносторонні кути *DGF* і *EFG* рівні чи прямі *DG* та *EF* паралельні. Зрештою, обидві гіпотези будуть правильними. Перевірку рівності кутів виконуємо за допомогою послуги *Обчислення\Кут*. Користуючись динамічним кресленням, спрямували учнів до самостійного висновку, маленького відкриття майбутнього інженера.

Наступним кроком має йти пошук обґрунтування висунутої гіпотези. Для цього потрібно здійснити добудовування паралелограма. Для обґрунтування висунутої гіпотези застосовуємо властивості паралелограма *DGFH* та нерівність трикутника *HEJ*, де *J* – довільна точка на прямій *AB*, відмінна від *F*. Оскільки $HE < HJ+JE$, то $DG+GF+FE < DI+IJ+JE$. Шлях *DGFE* найкоротший.

Для самостійної роботи учням запропонували розглянути розташування пунктів з одного боку річки, а додатково створити динамічне креслення за допомогою GRAN-2D. В підручнику О.В. Погорєлова (Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 1997. – 223 с.) поряд з умовою до задачі подається малюнок-підказка. Мабуть тому, що учневі непросто здогадатися, яким має бути розв'язок, не кажучи вже про його обґрунтування. Завдяки дослідженню за допомогою ППЗ, учневі вдасться пережити радість відкриття, що спонукатиме його розглянути інші задачі, які зводяться до обчислення довжини ламаної. Якщо задача не сформульована як прикладна, як це зроблено у підручнику [122,126], то краще почати її обговорення з практичних аспектів.

У підручнику [122,288] для 10-го класу задачу про побудову мосту через річку запропоновано розв'язувати з використанням похідної. Задачу класифіковано як завдання високого рівня складності. Модель-функція для дослідження за допомогою GRAN така ж, як і для дослідження з похідною вручну. Позначимо відстань *DK* через параметр *P1*, ширину річки *P2*, відстань між пунктами *KL* вздовж берега через *P3*, відстань *EM* від другого пункту до берега річки через параметр *P4*. Нехай змінна *x* – це відстань *KG*. Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт явного типу задання за формулою *Y(X)=Sqrt(P1^2+X^2)+P2+Sqrt((P3-X)^2+P4^2).* Для кожного з параметрів вказуємо невід'ємні межі (Рис. 3.59). Відстані, про які йде мова в задачі, можна змінювати рухаючи бігунок параметра. Щоб знайти точку мінімуму функції, встановлюємо курсор в найнижчу точку на графіку.

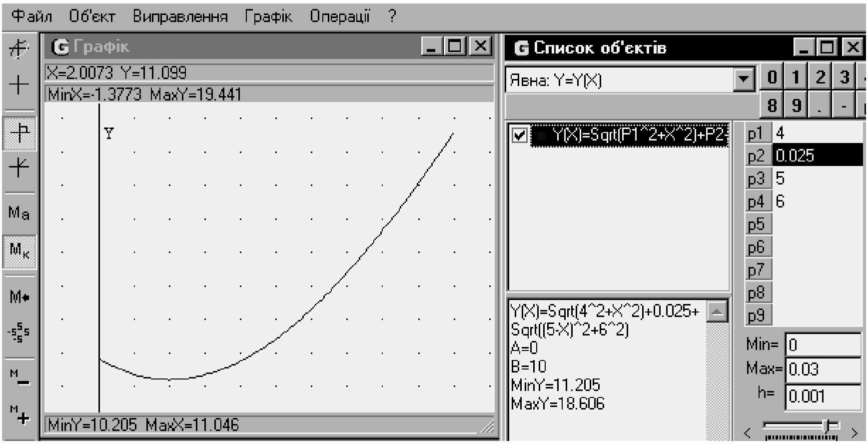


Рис. 3.59. Дослідження розташування мосту через річку (GRAN1)

Важливо правильно інтерпретувати отриманий результат і узагальнити його. Для параметрів функції, графік якої подано на рис. 3.59 *(P1=4, P2=0.025, P3=5, P4=6),* знайдено, що *X=2.* Для точки мінімуму буде виконуватися умова рівності тангенсів кутів *DGK* і *EFM,* тобто *P1/X=P4/(P3-X).* Умову отримаємо обґрунтовуючи результат за допомогою похідної *X=P1*P3/(P1+P4).*

Якщо проаналізувати добірки задач до теми "Переміщення фігур" в діючих підручниках для 8-9 класу, то помітимо, що серед них нема жодної практичної. Тому вважали за доцільне запропонувати школярам побудувати динамічні креслення до наступних практичних задач:

1) З прямокутного листа жерсті розмірами *5 x 8* дм виготовити коробку без кришки найбільшого об'єму. Якими мають бути її виміри (рис.3.60)?

2) При конструюванні трансформатора змінного струму заповнити по-

рожнину котушки залізним хрестоподібним осердям найбільшої площі (рис. 3.61). Знайти розміри осердя, якщо задано радіус порожнини котушки?

Створюючи динамічні моделі, школярі можуть використовувати такі переміщення фігур, як симетрія відносно прямої чи точки, паралельне перенесення чи поворот. Щоб в ході роботи вони могли водночас з'ясувати, як пов'язані координати симетричних точок, в задачі про трансформатор можна центр кола сумістити з початком координат, а перпендикулярні осі осердя спрямувати вздовж координатних осей. В задачі про коробку сторону прямокутника доцільно спрямувати вздовж осі координат, а її середину розташувати в точці (0,0).

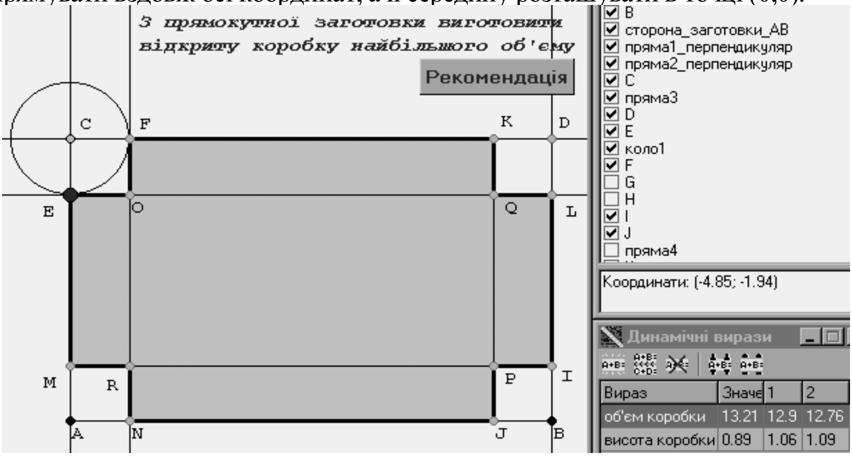


Рис. 3.60 Розгортка відкритої коробки

Створюємо розгортку поверхні коробки, дотримуючись правил побудови у GRAN-2D. Послідовність побудов у програмі така сама, як і при виконанні цих дій вручну з циркулем та лінійкою. На стороні *AC* прямокутника *ACDB* виберемо довільну точку *E* і *прикріпимо її до об'єкта* (пряма *AC*). Відріжемо у кожному з чотирьох кутів прямокутника квадратики, довжини сторін яких дорівнюють *CE*. Для цього знайдемо точку *F* – точку перетину кола (центр *C*, радіус *CE*) зі стороною *CD* і проведемо через точки *F* та *E* прямі, перпендикулярні до сторін прямокутника. Точку перетину прямих позначимо *G*. Через середину сторони *AB* проведемо вісь симетрії. Точка перетину її з діагоналлю *AD* утворить центр симетрії прямокутника. Для побудови симетричних точок користуємося послугою *Побудова точки, симетричної даній відносно прямої (точки).* Якби лист жерсті був квадратним, то для відрізання квадратиків могли б застосувати поворот навколо центра на кут 90°. На завершення побудови розгортки обводимо контур – створюємо замкнену ламану, що містить 12 вершин.

Активізувавши послугу *Обчислення \ Динамічний вираз \ Створити,* складаємо вираз для відстеження зміни об'єму коробки *LEN(O,Q)*LEN(Q,P)*LEN(O,F)*. Рухаємо точку Е вздовж сторони прямокутника і, звернувшись до послуги *Обчислення \ Динамічний вираз \ Зафіксувати поточне значення*, реєструємо величину об'єму. Серед обчислених значень вибираємо найбільше. Для прямокутника з розмірами *5 x 8* *дм* встановлюємо, що відрізати потрібно квадратики зі стороною *1 дм*. Для листа квадратної форми знайдемо, що максимальне значення об'єму буде за умови, коли відтинаємо квадратики зі стороною, рівною шостій частині сторони початкової заготовки. Закінчити дослідження бажано аналізом переваги побудови креслення через побудову симетричних точок.

Порівняємо, як задачу про коробку розв'язують за допомогою GRAN-2D через створення моделі у вигляді функції. Правило-орієнтир для учнів при цьому таке ж, як і для дослідження з похідною [98, 414]: 1) проаналізувати формулювання задачі, з'ясувавши, найбільше значення якої величини треба знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент) x і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію; 2) знайти найбільше значення функції. Отже, введемо змінну x – довжину сторони квадратика і складемо функцію $V(x) = (5-2x)(8-2x)x$, при $x \in (0;\ 2.5)$. Побудувавши графік функції, визначають точку екстремуму і екстремум за допомогою координатного курсору, який потрібно розмістити у найвищій точці графіка. Обґрунтовують результат з використанням похідної. Знаходять похідну $V' = 12x^2 - 52x + 40$ і переконуються, що при $x=1$ значення об'єму максимальне.

Для побудови перерізу осердя (рис. 3.61) через центр кола *A* з радіусом *AB* проводимо перпендикулярні осі та вибираємо на колі дві довільні точки *C* і *D*, що розташовані в одному із чотирьох утворених кутів. Через вибрані точки проводимо прямі, паралельні побудованим осям і знаходимо точку їх перетину – точку *E*. Щоб створити решту точок, що є вершинами ламаної – контуру перерізу, до точок C, E, D застосовуємо перетворення симетрії відносно центра кола і осей. Використовують при цьому послугу *Симетрична точка.* Оскільки мова в задачі йде лише про площу многокутника, то динамічний вираз можна не складати, але потрібно вказівник в переліку об'єктів встановити на ламану (осердя) і відслідковувати зміну площі в *полі характеристики поточного об'єкта*. Отримаємо, що найбільше значення площі буде у випадку, коли точка E лежить на бісектрисі кута OAB, а відзначений кут α наближено рівний 32°.

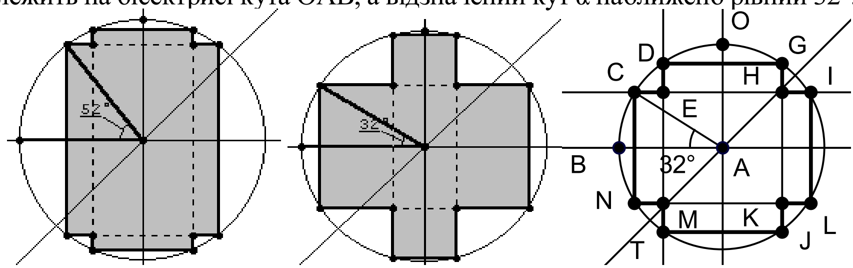


Рис. 3.61. Переріз осердя в динаміці. Рухаємо точки C і D

Обґрунтовують результати дослідження з використанням похідної. Заздалегідь повідомляють, що точки C і D симетричні відносно бісектриси кута OAB. Встановлюють, що найбільша площа осердя буде при $\alpha = 0.5 arctg\ 2$. Доведення наведене в підручнику для поглибленого вивчення математики [122, *286*].

Якщо розглянуті конструкції зберегти у файлі або ж на їх основі створити *Макроконструкції,* то це дозволить на уроці з метою економії часу використати моделі в режимі *покрокової побудови.* Наприклад, доцільно продемонструвати модель для створення проблемної ситуації на етапі мотивації при вивченні теми "Застосування похідної до дослідження функції", що сприятиме формуванню мотиваційно-творчої активності та спрямованості особистості. Застосування комп'ютерних технологій спрямоване на цілісне сприйняття досліджуваного явища, з'ясування його сутності, а тому сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу, більш повному осмисленню його школярами. Це робить їх діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

Опираючись на класифікацією В.І.Андрєєва [2,*42*], запропоновані задачі можна віднести як до навчально-творчих *задач на оптимізацію*, що передбачають вибір оптимального розв'язування та оптимізацію затрат і розвивають відповідно такі компоненти творчих здібностей особистості, як *гнучкість та раціоналізм мислення,* так і до *конструкторських задач* чи до *експериментальних задач на моделювання.* Два останні види навчально-творчих завдань дозволяють розвивати здібності до конструювання та до широкого перенесення принципів, методів наукового пізнання у нові ситуації. З позицій теорії розвиваючого навчання найбільш важливою тут є саме можливість використання математичного моделювання як засобу розвитку операційних структур мислення, пов'язаних із творчими здібностями.

Конкретну задачу на відшукання екстремальних значень можна розв'язувати різними способами. У навчанні використовували властивості функцій: обмеженість функції синус і косинус; квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ досягає в точці $x= -0.5b/a$ максимального значення при $a<0$, та найменшого при $a>0$. Використовували для обґрунтування, крім похідної, нерівність трикутника. Вивчаючи тему „Доведення нерівностей" в класах з поглибленим вивченням математики, пропонували школярам для розв'язування практичні задачі, в яких для обґрунтування використовувалися нерівності Коші, Коші-Буняковського. Зазначимо, що учні часто опорну нерівність Коші (для $a\geq 0$, $b\geq 0$ виконується $0.5(a+b) \geq \sqrt{ab}$) використовують формально, бо не перевірять, коли в нерівності виконується умова рівності (при $a=b$). Саме з умови рівності отримуємо важливий висновок: якщо сума двох додатних чисел стала, то їх добуток буде найбільшим тоді, коли значення цих величин рівні між собою. Якщо ж добуток двох додатних величин сталий, то їх сума буде найменшою тоді і тільки тоді, коли значення цих величин збігаються. Тобто саме умова рівності в практичних задачах на екстремум найсуттєвіша.

На заняттях з підготовки до олімпіад при поглибленому вивченні математики розглядалися більш загальні твердження, сформульовані в посібнику [66,*82*]: добуток $x_1^{m1} \cdot x_2^{m2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, сума яких дорівнює даному числу S, набуває найбільшого значення тоді, коли $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n}$, де $m_1, m_2, \ldots, m_n$ - довільні додатні раціональні числа. Сума $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ набуває найменшого значення, якщо добуток $x_1^{m1} \cdot x_2^{m2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ сталий і виконується співвідношення: $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n}$.

Розвиває творчі якості учнів як розв'язування нестандартних задач, так і відшукання нестандартного методу для розв'язування пізнавальної задачі. Наприклад, дев'ятикласникам математичного класу доцільно запропонувати використати нерівність Коші для обґрунтування результатів, отриманих за допомогою GRAN-2D до таких розвиваючих задач:

1) Під яким кутом потрібно збити три однакові дошки, щоб одержати жолоб з найбільшим поперечним перерізом (найбільшим об'ємом)?

2) Зробити розрахунок поперечного перерізу каналу, що має форму рівнобічної трапеції так, щоб на бетонування внутрішньої його поверхні пішло мінімум матеріалу за умови заданої пропускної спроможності каналу.*

Спочатку пропонували учням розв'язати першу задачу. Коли ознайомили учнів на уроці алгебри з умовою задачі, це викликало у них деяке збентеження, подив, зацікавлення. Здавалося б, що може дати доведення нерівностей для розв'язування прикладної задачі? Після того, як були здійснені обґрунтування, стимулювали учнів до створення власних задач, подібних до даної, до виведення наслідків з розв'язаної. Надзвичайно важливо навчати учнів здійснювати рефлексію власної діяльності – проаналізувати не стільки отриманий результат, як способи діяльності. Необхідно виокремити етапи розв'язування задачі: аналіз умови (що дано? що знайти?), синтез – створення динамічного креслення чи моделі-функції, пошук обґрунтування, узагальнення – виведення наслідків, що демонструють міжпредметні зв'язки алгебра-геометрія, планіметрія-стереометрія. Останні дві задачі різняться фабулою, однак динамічні креслення до них майже однакові.

Звернемо увагу на той факт, що динамічні креслення до завдань мають різне призначення. В задачі про побудову мосту, аналізуючи отримані результати, учні мали змогу знайти метод розв'язування задачі. В задачі про жолоб акцент зроблено на наочності. На рис.3.62 представлено поперечний переріз жолоба. Справа подано перелік об'єктів, які потрібно створити для дослідження. Складність побудови відповідає рівню 8-го класу. Однак у восьмому класі модель можна використовувати лише для мотивації вивчення математики: де у виробництві можуть бути використані знання про трапеції?

Рис. 3.62. Поперечний переріз жолоба – рівностороння трапеція

* Яка користь від того, що ти багато знав, коли ти не зумів застосувати свої знання до своїх потреб. *Франческо Петрарка*

Розглянемо, як можна отримати необхідний результат через аналіз динамічних виразів, а також досліджуючи модель-функцію. Записи здійснимо у відповідності до згорнутої схеми моделювання. Для обґрунтування отриманих результатів використаємо нерівність Коші.

Попередній аналіз і побудова моделі. Якщо в завданні стоїть вимога стосовно об'єму жолоба, то виділяємо підзадачу: знайти рівносторонню трапецію найбільшої площі. Розчленуємо умову задачі на елементарні умови і вимоги. Об'єктом в задачі є трапеція, у якої менша основа і бічні сторони рівні. Вимогою є обчислення площі. Вибудовуємо послідовність створення об'єктів за допомогою GRAN-2D, поданих на рис. 3.62. Креслимо кола з центрами в точках A і B та радіусом AB. Виберемо на одному з кіл точку C і через неї проведемо пряму, паралельну AB до перетину з другим колом. Будуємо замкнену ламану – трапецію. Довжина відрізка AB рівна ширині дошки і меншій основі трапеції.

Реалізація моделі засобами ІКТ. Величини, необхідні для дослідження, обчислюються в програмі автоматично. Для зменшення похибки обчислення рекомендуємо збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги „Налагодження програми". При зверненні до послуги *Обчислення\Кут* і вказуванні букв D, B, A, в динаміці обчислюватиметься тупий кут, який змінюється в результаті руху по колу точки C. Досліджуємо зміну площі залежно від тупого кута (динамічний вираз *AREA(A,B,D,C)*) і встановлюємо шуканий кут. Недоцільність іншого виду чотирикутника встановлюється на четвертому етапі *аналізу одержаних результатів та перенесення їх на образ, що вивчається.*

Розглянемо можливість розв'язування задачі засобами GRAN1. *Здійснимо попередній аналіз моделі.* Спочатку переформулюємо задачу з прикладної на математичну. Оскільки дошки однакові, то від визначення об'єму можна перейти до визначення максимальної площі перерізу. Виходячи з практичних міркувань, визначаємо, що перерізом може бути квадрат чи трапеція.

Реалізація моделі засобами ІКТ. Складемо функцію для обчислення площі і знайдемо її найбільше значення за допомогою GRAN1. Позначимо через x довжину відрізка EC, рівного піврізниці основ, через y довжину меншої основи та бічної сторони. За формулою $S = \frac{1}{2}(2x + 2y) \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$ обчислюватимемо площу трапеції. Для дослідження за допомогою GRAN1 позначаємо ширину дошки (змінна y) через параметр *P1* і створюємо об'єкт типу *Явний y(x)* за формулою $(X + P1) * SQRT(P1\hat{}2 - X\hat{}2)$. Вказуємо межі зміни X та параметра *P1*: A=0, B=5. Рухаючи бігунок параметра P1, змінюємо ширину дошки і відстежуємо, як точка максимуму пов'язана з величиною параметра *P1*. Для визначення точки максимуму розташовуємо координатний курсор у найвищій точці графіка (рис. 3.63) і знаходимо, що $X_{max}=0,5P1$, тобто згідно з позначенням $2x=y$.

Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на образ, що вивчається. З трикутника ACE встановлюємо кут збивання дошок.

При обґрунтуванні гіпотези за нерівністю Коші чи з використанням похідної, попередній аналіз і побудова моделі-функції повторюють викладені вище. *Реалізація моделі математичними методами.* Для доведення за нерівністю Коші перетворимо формулу

$S = \frac{1}{2}(2x + 2y) \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$ для вираження площі трапеції. Необхідно знайти найбільше значення площі за умови сталої величини $l=3y$. Добуток $3S^2 = (x + y)(x + y)(x + y)(3y - 3x)$ набуває найбільшого значення при сталій сумі $2l = (x + y) + (x + y) + (x + y) + (3y - 3x) = 6y$ за умови $x + y = 3y - 3x$. Тоді $y=2x$.

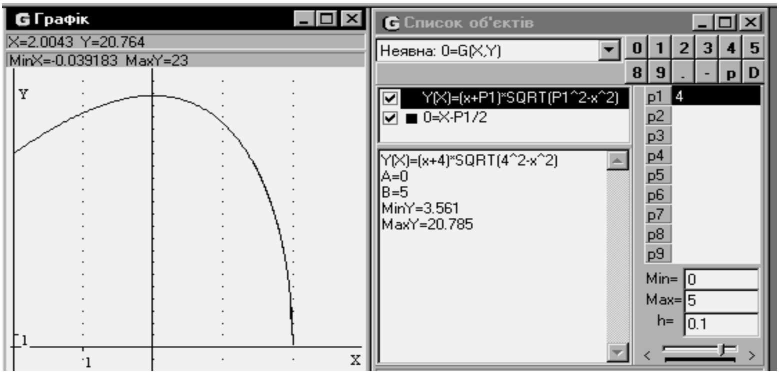


Рис.3.63. Графік функції площі трапеції

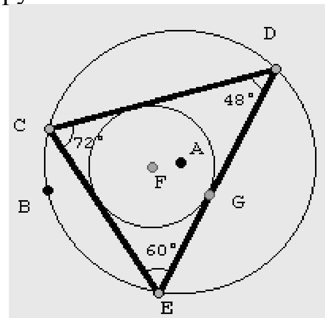
Проаналізуємо дидактичні функції, що їх виконує запропонована задача. Навчаюча функція забезпечує формування системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах засвоєння. В учнів формується уміння застосовувати нерівність Коші чи похідну до розв'язування задач на екстремум, будувати до них динамічні креслення. Виховна роль задачі проявляється у формуванні навичок навчальної праці, наукового світогляду, пізнавального інтересу і самостійності, такої моральної якості особистості як наполегливість. Розвиваюча – забезпечує розвиток вміння моделювати ситуацію, оволодіння прийомами розумової діяльності, сприяє формуванню здібності переносити знання і уміння в нові ситуації, бачити знайоме в незнайомому та ін. Контролююча функція спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння матеріалу.

У двох наступних задачах, класифікованих у посібнику[1] як завдання високого рівня, для обґрунтування результатів також можна використати нерівність Коші. Однак ці завдання краще розглянути при вивченні теми “Площі фігур”. Застосування алгебраїчних методів до розв'язування геометричних задач сприяє інтеграції навчальних дисциплін та посиленню міжпредметних зв'язків.

– В деталі, що має форму циліндра, просвердлити паралельно її осі круглий наскрізний отвір, діаметр якого дорівнював би діаметру кола, вписаного в трикутник, вписаного в свою чергу у поперечний переріз цієї деталі (рис.3.64). Знайти максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі.

[1] Ясінський В.В. та ін. Вибрані конкурсні задачі з математики. Т.1. Арифметика, Алгебра: Навчальний посібник для вступників до вищих навч. закл. К.: Фенікс, 2002. - 368 с.

– З відходів виробництва, що є обрізками трикутної форми, штампують круглі шайби. Визначити найбільший відсоток використання матеріалу.



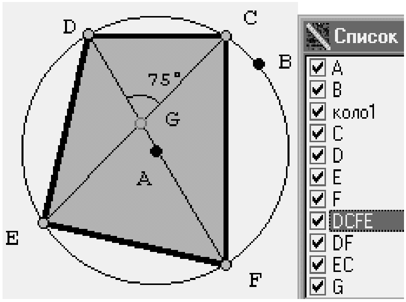


Рис.3.64. Обчислити відсоток відходів Рис. 3.65. Коли найбільша площа?

Наведені завдання як пізнавальні можна запропонувати і семикласникам при вивченні геометричних побудов, оскільки центральним моментом в моделях є вписування кола в трикутник. Труднощі тут виникнуть хіба що на стадії складання динамічного виразу. Для першої задачі знаходимо відношення площі вписаного круга до площі описаного і множимо на 100%, а динамічний вираз записуємо у вигляді (LEN(F,G))^2/(LEN(A,B))^2*100, де FG – радіус вписаного кола, AB – описаного. Можна скласти динамічний вираз і не розписуючи площу кругів, тобто у вигляді формули AREA(КОЛО2)/AREA(КОЛО1)*100. Змінюючи кути, відстежимо для якого виду трикутника відсоток відходів буде максимальним. При цьому рухаємо трикутник за одну з його вершин. Встановлюємо, що шуканим буде рівносторонній трикутник. Тоді максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі складає 25%. Разом з школярами формулюємо висновок: з усіх трикутників, вписаних в дане коло, найбільший радіус вписаного кола у рівностороннього трикутника.

До другого завдання динамічний вираз складаємо як відношення площі вписаного круга до площі трикутника CDE: за формулою (LEN(F,G))^2*PI*100/AREA(C,D,E) чи за іншою, в якій площа круга не розписана, AREA(КОЛО2)/AREA(C,D,E)*100. Для рівностороннього трикутника встановимо найбільший відсоток використання матеріалу обрізків – майже 60,5%. Для зменшення похибки обчислення рекомендується збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги *Налагодження програми*.

Як результати дослідження, сформулюємо з учнями важливі практичні висновки: найбільшу площу з усіх трикутників, вписаних в дане коло, має рівносторонній; з усіх трикутників зі сталою площею найбільший радіус вписаного кола також у правильного трикутника.

Обґрунтуємо висунуту гіпотезу. В першій задачі радіус описаного кола R величина постійна, а радіус вписаного кола r – змінна. З формул для радіусів кіл $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$ після нескладних перетворень отримаємо, що $r = \frac{2abc}{4R(a+b+c)}$, $r = \frac{1}{2R} : \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ba} + \frac{1}{ac} \right)$. Найбільше значення для радіуса r досягається, коли значення знаменника найменше. $2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ba}+\frac{1}{ac}\right)=\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ba}\right)+\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{ac}\right)+\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$. Для оцінювання знаменника застосовуємо нерівність Коші: $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ba}\geq 2\frac{1}{\sqrt{acb^2}}$, $\frac{1}{ba}+\frac{1}{ac}\geq 2\frac{1}{\sqrt{bca^2}}$, $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\geq 2\frac{1}{\sqrt{abc^2}}$. Умова рівності виконується при $a=b=c$. Маємо, що $r\leq 0.5R$.

Для другої задачі при незмінній величині площі отримаємо $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{4S}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}\leq\frac{4S}{3\cdot 2a}$. Рівність маємо при $a=b=c$.

Не менш цікаве та корисне для учнів дослідження за допомогою GRAN-2D до задач на вирізання з максимальною площею:

– із залишка тирсоплити у вигляді трапеції вирізати прямокутну кришку;

– із заготовки у вигляді трикутника вирізати паралелограм найбільшої площі так, щоб у паралелограма і трикутника був спільний кут;

– серед усіх прямокутників, вписаних в дане півколо, знайти прямокутник найбільшої площі;

– з клаптиків тканини у вигляді кругів вирізати для аплікацій чотирикутники найбільшої площі (рис. 3.65) та ін.

Остання задача посильна для 9-класників не лише математичного, але й суспільно-гуманітарного класу, оскільки площу чотирикутника будемо визначати через половину добутку діагоналей на синус кута між ними і враховувати обмеженість тригонометричних функцій. Змінюючи положення точок на колі, описаному навколо чотирикутника, спонукаємо учнів зробити висновок, що найбільше значення площі досягається для прямокутників, а серед прямокутників – для квадрата. Динамічне креслення використовуємо для пошуку способу доведення.

Динамічні креслення зручно виконувати за допомогою GRAN-2D до багатьох інших завдань, що зводяться до обчислення кутів та довжин ламаних, площ фігур чи об'ємів. Наприклад,

– як в даний конус вписати циліндр з найбільшим об'ємом;

– на якій відстані від стіни повинен стати глядач, щоб побачити картину під найбільшим кутом;

– на яку висоту підняти над круглим столом лампочку, щоб була найкраща освітленість для роботи?

Таким чином, поступово просуваючись до вивчення теми „Застосування похідної до розв'язування задач на екстремум", учням вже будуть відомі прийоми дослідження з використанням ППЗ, апробується значна кількість моделей при вивченні інших тем. Тому нові завдання викликатимуть в учнів зацікавленість, бажання всебічно дослідити моделі. Разом з тим нарощується кількість способів розв'язування однієї і тієї ж задачі. Завдяки розв'язуванню задач кількома способами, включаючи і моделі, створені за допомогою ППЗ, вибору найдоцільнішого способу розв'язування, задач нестандартного виду формується креативна якість особистості – гнучкість мислення. Прояв цієї якості діагностуєтьсяся в легкості переходу від одного способу розв'язування до іншого, вмінні знаходити декілька способів розв'язування поставленої задачі, вмінні вийти за межі звичних способів.

Розглянуті динамічні креслення можна також використовувати при вивченні декартових координат. Предметом обговорення має стати механізм обчислення координат точок перетину прямих, довжин відрізків, кутів між прямими, алгоритм складання рівняння паралельної чи перпендикулярної прямої, визначення координат симетричних точок, точок, отриманих при повороті навколо заданого центра тощо.

Вище вже йшла мова про те, що задачі на рух традиційно розв'язують алгебраїчним методом, складаючи рівняння чи систему. Вивчаючи тему „Подібність трикутників" варто запропонувати учням задачі такого виду і рекомендували їх розв'язувати, будуючи графічні моделі до задач на рух. Задачі привабливі можливістю застосовувати нестандартні методи розв'язування, що сприяє розвитку здібності бачити незвичайне в знайомому. Крім того, теми „Подібність трикутників" і „Кінематика" з фізики вивчаються в одному класі. Уміння аналізувати графічні моделі руху об'єктів дозволить поглиблювати міжпредметні зв'язки математика-фізика. Наведемо приклад текстової задачі, взятої з добірки [5].

З пункту А до пункту В вирушив пішохід. Одночасно з ним назустріч виїхав мотоцикліст. Зустрівши пішохода, мотоцикліст відразу ж повернув назад і довіз його до місця призначення, а потім повернувся і поїхав до пункту А. У результаті мотоцикліст витратив на дорогу в 2,5 рази більше часу, ніж планував. У скільки разів швидше пішохід прибув до пункту В, ніж у тому випадку, якби весь шлях він пройшов пішки?

Зручно для побудови графічної моделі і дослідження використати ППЗ DG або GRAN-2D. Ідея розв'язування задачі ґрунтується на подібності трикутників AOP і COM, AOK і COB (рис. 3.66). Доцільно не обмежуватися лише отриманням відповіді до задачі. Враховуючи динамічність моделі і створених виразів, бажано видозмінювати дані задачі і спонукати школярів проаналізувати отриманий результат, зробити висновок до того, як буде отримано його з використанням ППЗ. Зазначимо, що під динамічним розуміємо таке креслення, в якому об'єкти задовольняють певним вимогам – розділені на незалежні, залежні та напівзалежні, а до автоматичної зміни креслення приводить лише зміна швидкості. Тому створення динамічних креслень до задач високого рівня можна причислити до розв'язування творчих задач, які розвивають винахідливість, здібності до конструювання, а уміння створювати динамічні моделі зараховувати до творчих здобутків учнів, його навчальних приростів.

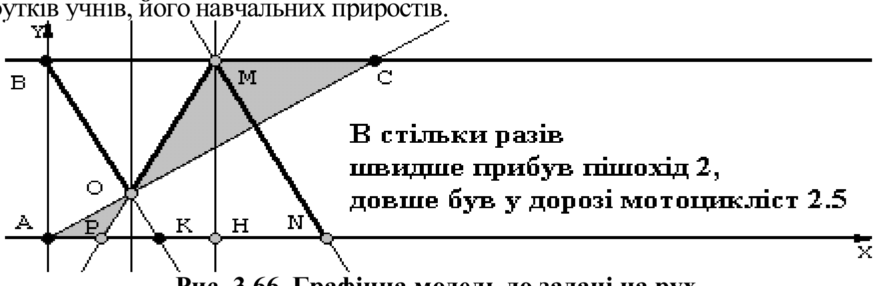


Рис. 3.66. Графічна модель до задачі на рух

За допомогою програмних засобів зручно досліджувати траєкторії *руху тіла, кинутого під кутом до горизонту* під час вивчення властивостей квадратичної функції, досліджувати максимальну дальність польоту, висоту підйому. Значну кількість завдань, подібних до зазначених, запропоновано в посібнику М.І. Жалдака „Комп'ютер на уроках математики"[28].

Розвиток нових економічних тенденцій, переорієнтація на ринкові відносини потребують від сучасної молоді володіння новітніми економічними даними. Тому навчальний матеріал слід насичувати різними економічними задачами. Зокрема такими, які передбачають використання визначених інтегралів. Про використання таких завдань у навчанні мова йшла у п.3.2. Для розвитку креативних якостей учнів у навчанні доцільно також використовувати завдання, пов'язані з опрацюванням *статистичних вибірок, економічні задачі лінійного програмування.* У навчанні учнів 8-их класів математичного профілю можна використати завдання з підручника[1], в 11-му – задачі з посібника [123], пропонувати учням складати і розв'язувати власні задачі. Особливу увагу слід звернути на змістовне конструювання цільової функції. ГМТ, які задовольняють системи нерівностей, можна будувати як вручну, так і за допомогою ППЗ GRAN1. В п. 2.2 наведено приклад розв'язування задачі лінійного програмування, тому обмежимось лише умовою аналогічної задачі для самостійного розв'язування.

На двох шахтах добувають руду – на першій по 100 т в день, на другій – 200 т в день. Цю руду можна переробляти на двох заводах, причому вартість перевезення однієї тонни руди з першої шахти на перший завод становить 5 ум. гр. од., а на другий завод – 4 ум. гр. од. Вартість перевезення однієї тонни руди з другої шахти на перший завод дорівнює 7 ум. гр. од., а на другий завод – 5 ум. гр. од. Кожний завод може переробляти в день не більше 250 т руди. Знайти оптимальний план перевезення руди.

Л.Л. Панченко [77] розглядаючи добірку подібних завдань для студентів, класифікує задачі як пізнавальні. На нашу думку, для шкільного курсу математики задачі лінійного програмування можна вважати розвиваючими.

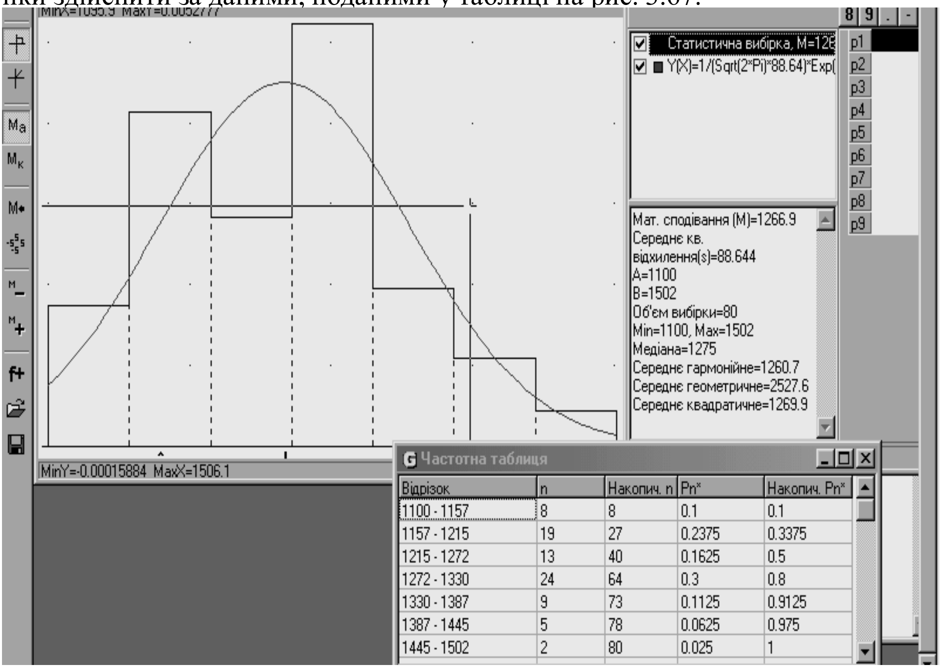
Використовуючи ППЗ GRAN1 для розв'язування задач, які потребують статистичного опрацювання даних, ставили за мету інтенсифікувати процес навчання за рахунок вивільнення учнів від рутинних обчислень. Розв'язуючи завдання паралельно вручну та з використанням ППЗ, можна встановити значну економію часу у разі застосування ППЗ для опрацювання статистичної вибірки. Зекономлений час доцільно відвести на обговорення отриманих результатів, складання задач за частотною таблицею. Практичне трактування результатів викликає в учнів найбільші труднощі, але, водночас, сприяє розвитку таких пізнавальних якостей як уміння аналізувати, синтезувати, здатність втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми, творчої якості – здатності переносити знання і уміння в нові ситуації. Навчаючи учнів розв'язуванню задач математич-

1 Коваленко В.Г. та ін. Алгебра: Експерим. навч. посібник для 8 кл. шк. з поглибл. вивченням математики і спеціалізов. шк. фізико-мат. профілю. - 3-тє вид. – К.: Освіта, 1996. – 228 с.

ної статистики, доцільно поєднувати використання ІКТН з навчанням дослідницьким методом. Спочатку слід зібрати дані, опрацювати їх, написати звіт, висловити пропозиції. Працюючи в малих групах, учні виступають, дискутують, вносять корективи у власні звіти, навчаються мислити на рівні прийняття рішень, що надзвичайно цінно для всебічного розвитку особистості.

Детальніше про розв’язування задач математичної статистики за допомогою GRAN1 можна прочитати у книзі М.І.Жалдака та Г.О. Михаліна „Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою” [32]. Наведемо приклади деяких задач математичної статистики.

▪ Яка в середньому кількість чавуну потрібна для виплавки однієї тонни сталі? Скільки тонн чавуну потрібно для виплавки 300 т сталі? Розрахунки здійснити за даними, поданими у таблиці на рис. 3.67.



Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
1100 - 1157	8	8	0.1	0.1
1157 - 1215	19	27	0.2375	0.3375
1215 - 1272	13	40	0.1625	0.5
1272 - 1330	24	64	0.3	0.8
1330 - 1387	9	73	0.1125	0.9125
1387 - 1445	5	78	0.0625	0.975
1445 - 1502	2	80	0.025	1

Рис. 3.67. Дані для виплавки 1 т сталі. Частотна таблиця, гістограма

▪ Відомо, що у гвардію набирають служити призовників зростом 180-184 см. Обстежити зріст юнаків 10-их і 11-их класів навчального закладу та зробити висновок, скільки новобранців з 1000 зможе служити у гвардії?

▪ Дослідити відношення зросту учня до його маси для підлітків деякого класу навчального закладу. Користуючись формулою К’ютела, розрахувати, чи відповідає маса учня його зросту? Для цього необхідно масу, виміряну в кілограмах, поділити на квадрат зросту, взятий у метрах. Якщо відношення менше двадцяти, то вагу необхідно набирати. Якщо значення обчисленої величини лежить в межах від 20 до 23, то вага нормальна. Тим учням, у яких обчислений коефіцієнт більший за 24, але не перевищує 29, бажано зменшувати вагу.

▪ Взуттєвій фабриці потрібно виготовити партію взуття обсягом 5000 пар для підлітків. Опитати учнів 9-их (11-их) класів, з’ясувати у них розміри взуття, опрацювати статистичні дані, підготувати поради для представника взуттєвої фабрики щодо виготовлення кількості пар взуття певних розмірів.

▪ Визначити ймовірний час безвідмовної роботи електроприладу, якщо відомі дані стосовно терміну роботи ста приладів. Встановити, скільки приладів з партії в 5000 штук безвідмовно пропрацюють певну кількість одиниць часу?

▪ Урожайність зернових культур в районі задана таблицею в центнерах з гектара. Обчислити урожай, який можна зібрати з 300 гектарів зернових?

40.2	10.2	15.4	19.4	14.1	28.0	15.8	20.1	26.5	15.6	29.3	13.6	18.6
34.6	20.8	28.4	18.2	28.1	17.1	26.4	25.9	37.6	32.6	31.4	27.9	21.4
10.9	26.4	38.0	49.1	22.0	26.5	25.6	27.6	20.1	30.0	40.2	26.2	11.0
12.9	27.2	30.1	15.4	31.4	31.4	12.4	37.6	34.0	12.1	18.3	19.1	36.7
14.6	12.9	30.1	18.5	12.4	18.1	38.3	13.4	20.1	29.2	26.1	10.8	19.2

Наведемо приклад розв’язування даного типу завдань.

▪ Обстежено зріст дівчат 10-11 класів і дані занесено у таблицю:

159	162	158	161	160	160	158	169	156	160	164	169	155	157	161	159
175	176	171	161	162	163	165	170	163	162	170	174	171	161	171	172
174	168	168	172	173	168	169	168	166	166	162	166	159	164	163	159
170	173	167	167	169	162	168	167	167	169	170	165	165	164	164	166
165	165	164	163	159	169	167	162	164	163	165	166	165	167	166	167

Знайти об’єм та розмах вибірки, моду, медіану, математичне сподівання (середнє арифметичне), середнє квадратичне відхилення, побудувати частотну таблицю, побудувати гістограму.

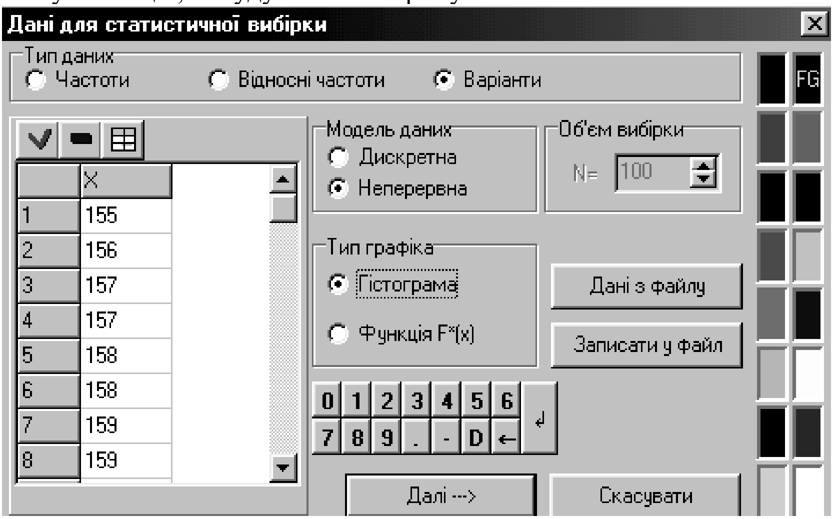


Рис. 3.68. Робоче вікно для введення вибірки

Для останнього завдання запишемо *послідовність виконання дій*, якщо для опрацювання даних використовувати ППЗ GRAN1. Вибираємо тип даних *Статистична вибірка*, активізуємо послугу *Об’єкт створити*, зазначаємо, що модель даних *Неперервна*, будувати потрібно *Гістограму* (рис.3.68). Обираємо тип даних *Варіанти* і вводимо дані з клавіатури. Бажано зберегти введені дані у файлі, щоб у подальшому мати змогу їх змінювати. Вказуємо відрізок задання та кількість відрізків розбиття (рис.3.69). Бажано підтвердити визначену автоматично за формулою Стерджеса кількість відрізків відповідно до об'єму вибірки. За допомогою послуги *Операції \ Статистика \ Частотна таблиця* будуємо інтервальний розподіл абсолютних і відносних частот (рис. 3.70).

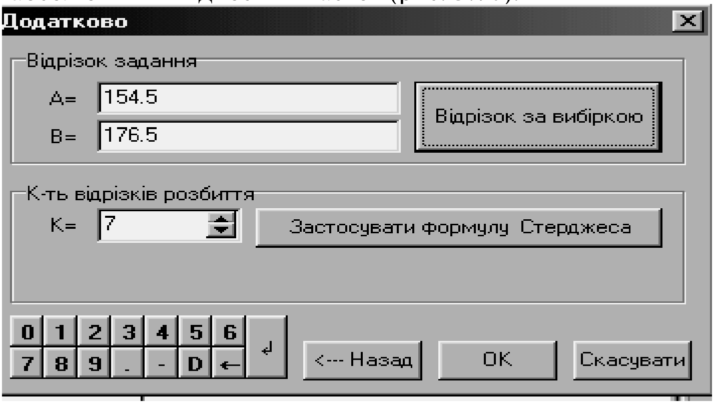


Рис. 3.69. Визначення розмаху вибірки, кількості відрізків розбиття

Користуючись побудованою частотною таблицею, розподілити за зростом замовлення на пошиття 2000 форм для школярок 10-11 класів (зріст 160-164, 164-168 і далі), обчислити ймовірний прибуток від продажу цієї партії одягу, якщо відомий прибуток від продажу одиниці товару (табл.3.3).[·]

Частотна таблиця

Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
154.5 - 157.6	4	4	0.05195	0.05195
157.6 - 160.8	8	12	0.1039	0.1558
160.8 - 163.9	14	26	0.1818	0.3377
163.9 - 167.1	26	52	0.3377	0.6753
167.1 - 170.2	14	66	0.1818	0.8571
170.2 - 173.4	7	73	0.09091	0.9481
173.4 - 176.5	4	77	0.05195	1

Рис. 3.70. Частотна таблиця до вибірки „Зріст дівчат"

У процесі розв'язування практичних задач значну увагу слід приділяти формуванню у школярів уміння розпізнавати, добирати деякі математичні об'єкти з множини подібних, узагальнювати отримані результати. Формуючи такі уміння, розвиваємо в учнів здатність до самостійного пошуку та засвоєння нових даних, здатність втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми.

[·] Математику слід вивчати у школі ще й з тією метою, щоб отримані тут знання були достатніми для звичайних потреб у житті. *М.І. Лобачевський*

Таблиця 3.3

Обчислення необхідної кількості тканини для пошиву форми і прибутку від продажу форми

№	Зріст дівчат	Витрати на од. продукції	Прибуток	Кількість = відносна частота * * розмір партії		Кількість тканини		Прибуток від продажу
1	2	3	4	5	6	7	8	0
1	152-156	2.5	2	0,01299•2000	26	2,5•26	65	52
2	156-160	2.8	3	0,1169•2000	208	2,8•208	582,4	624
3	160-164	3,1	4	0,2208•2000	442	3,1•442	1370,2	1768
4	164-168	3,4	4	0,3247•2000	649	3,4•649	2206,6	2596
5	168-172	3,7	4	0,2338•2000	468	3,7•468	1731,6	1872
6	172-176	4,0	3	0,09091•2000	182	4,0•182	728	546
7	176-180	4,3	2	0,1299•2000	26	4,3•26	111,8	52
∑					2001		6795,6	7510

Підсумовуючи, підкреслимо, що застосування ППЗ для розв’язування практичних задач дозволяє поєднати високий рівень абстрактності виучуваного матеріалу, логічну строгість систематичного подання зі значним ступенем наочності. Розглянуті моделі як засоби наочності виконують навчальну, розвиваючу та виховну функції. Використання ППЗ GRAN в практичних задачах на екстремуми дозволяє розв’язувати випереджаючі завдання. Створення динамічних креслень розвиває конструкторські здібності школярів, виробляє в них уміння встановлювати залежності, що описують взаємозв’язки між складовими частинами приладів та механізмів, готує до творчих пошуків, спонукає обирати раціональні шляхи досягнення поставленої мети.

Контрольні запитання і завдання

1. Розв’язати за допомогою ППЗ запропоновані в п.3.6 завдання.

2. Самостійно дібрати задачу практичного змісту, бажано знайти різні способи її розв’язування. Розв’язати завдання за допомогою ППЗ. Які якості особистості учня можна розвивати у процесі навчання, якщо використовувати задачі, подібні до дібраної?

3. Які переваги надає формуванню особистісних якостей учня розв’язування практичних задач з використанням ППЗ у порівнянні з традиційним підходом?

3.7. Пошуково-дослідницька діяльність учнів у процесі вивчення змістової лінії „Функції” з використанням ІКТ

Дослідницька навчальна діяльність школяра стимулює розвиток таких креативних особистісних якостей, як здатність генерувати ідеї, висувати гіпотези, переносити знання і уміння в нові ситуації, висувати оригінальні підходи та стратегії розв’язування творчих задач. Тому вчитель математики має не просто подати школяреві певний об’єм знань, а навчати його самостійно оволодівати знаннями, на основі міцних базових знань розвивати в учнів мислення, інтуїцію, уяву. Проблеми реалізації дослідницьких ідей в навчанні математики розглядали М.І.Бурда [7], О.І.Скафа [96], З.І.Слєпкань [97], В.П. Кисільова [39] та ін. Особлива заслуга в розробці дослідницької діяльності як педагогічної проблеми належить Д.Пойа [80]. Навчання повинне готувати учня до відкриття і не подавлювати в ньому ростки винахідливості. Сутність дослідницького підходу з використанням ІКТ при вивченні властивостей функцій висвітлювали М.І. Жалдак [28], Ю.В.Горошко [21], Є.Ф.Вінниченко [13], Т.В. Зайцева [34], І.В. Лупан [63], Т.І. Лисенко [58], С.А. Раков [88]. Однак подальшої розробки потребує методика використання оновлених версій ППЗ GRAN у процесі вивчення змістової лінії функції. Важливо дібрати комп’ютерно-орієнтовані завдання для поглибленого вивчення шкільного курсу математики.

Під пошуково-дослідницькою діяльністю учнів розглядаємо таку навчально-пізнавальну діяльність, яка спрямована на самостійне набуття суб’єктивно нових математичних знань на основі аналізу наявних даних, висування гіпотез та їх обґрунтування. У ході дослідницької діяльності удосконалюються дослідницькі уміння учнів. Під такими розумітимемо вміння прогнозувати кінцевий результат роботи, знаходити певні закономірності, досліджувати їх на основі висунутих гіпотез, перевіряти гіпотези, шукати шляхи їх обґрунтування, використовувати для дослідження ППЗ.

Як зазначає С.А. Раков, дослідницький підхід не є самоціллю – він складає методологічну основу набуття випускниками високого рівня математичних компетентностей (процедурних, логічних, дослідницьких, технологічних, методологічних), які за сучасними поглядами є метою (або навіть місією) математичної освіти. Навчальні дослідження є вищою формою творчості учнів. Організація самостійної творчої роботи учнів з використанням ІКТ у курсі математики потребує від учителя високої кваліфікації і математичної, і педагогічної.*

Однією з ефективних форм застосування ІКТ у навчанні математики є проведення спеціалізованих лабораторних робіт, на яких учні індивідуально або у складі дослідницької групи самостійно розв’язують математичні задачі дослідницького типу, наприклад, у комп’ютерному класі. Продуктивна творча самостійна робота учнів відбувається у процесі постійного обговорення та співпраці у дослідницькій спільноті, яку утворюють однокласники, вчитель, інші зацікавлені особи. У структурі лабораторної роботи можна виділити три основні блоки, перший з яких є мотиваційним, що включає вступне слово вчителя, актуалізацію знань та умінь учнів, поста-

* Поганий вчитель подає істину, добрий навчає її знаходити. *Ф.А.В. Дістервег*

новку завдання, мотивацію навчальної діяльності. У ввідній частині уроку доцільно обговорити з учнями мету уроку і дослідницької роботи та план їхньої реалізації. Другий блок є практичною частиною заняття, що передбачає роботу з ППЗ і виконання різних типів завдань таких, як експериментальна перевірка істинності тверджень, проведення досліджень з метою висунення гіпотези. В ході практичної частини роботи варто передбачити виконання різноманітних творчих завдань прикладного характеру.

Обговорення результатів дослідження, узагальнення та систематизацію способів діяльності, яких набули учні в ході роботи з програмним засобом, прийомів та методів розв'язування завдань, краще здійснювали в кінці уроку або ж по ходу заняття, якщо передбачено виконання кількох дослідницьких вправ. Запитання до учнів, подані в письмовій чи в усній формі, мають спонукати їх до здійснення різних розумових дій. Важливо, щоб перед початком обговорення учні записали власний висновок (звіт), який після обговорення може дещо змінитися, уточнитися. Однак, фіксація думки школяра надзвичайно важлива для розвитку пізнавальних якостей учня.

Заключний блок лабораторної роботи може включати як обґрунтування висунутих гіпотез, розглядання різних способів розв'язування задачі, так і фіксацію основних рекомендацій для обґрунтування. Показником системності засвоєння знань є уміння учнів розповісти про спостережені процеси, засвоєні теореми тощо. В той же час, зробити висновки або заповнити таблицю іноді доцільно запропонувати учням як домашнє завдання, якщо на уроці бракує часу. Відстрочка виконання завдання (аргументації) може бути також і прийомом розвитку особистості школяра, якщо інкубація (визрівання ідей) ще не відбулася. Оскільки на лабораторних роботах учні фактично створюють для себе посібник у таблицях, то в подальшому можливість використовувати його на уроках чи вдома посилить мотивацію навчання.

За допомогою GRAN1 школярі будують та аналізують функціональні залежності явного $y(x)$ та неявного $G(x,y)=0$ видів, задані в декартових чи в полярних координатах, параметрично, таблично. За допомогою модифікованого GRAN1 можна оперувати дев'ятьма параметрами P1, P2, ...P9, що відкриває нові можливості для навчання математики дослідницьким методом. ППЗ GRAN є одним із засобів візуалізації задачі та її розв'язку. Обчислювальні експерименти можна проводити при формуванні понять, перевірці тверджень тощо. Завдяки цьому отримуємо змогу досягати більш високого рівня навченості та проблемності пізнавальної активності.

Лабораторні роботи з використанням GRAN краще виконувати на початку вивчення певної теми, оскільки GRAN в більшій мірі є засобом інструментального, ніж контролюючого характеру, і тому найбільш ефективний при ознайомленні з новим матеріалом та при розв'язуванні задач дослідницького характеру. Передувати лабораторній роботі може підготовка у формі виконання домашнього завдання, коли повторюється певний теоретичний матеріал, що використовуватиметься при виконанні роботи. Доцільно запропонувати аналітично розв'язати приклади, щоб в подальшому перевірити правильність розв'язку за допомогою ППЗ. Можна запропонувати учням самостійно скласти чи дібрати задачі для лабораторної роботи. Для виконання роботи варто забезпечити школярів роздрукованими інструкціями щодо ходу дослідження, можливо, зошитами з друкованою основою чи електронними, в яких є відведені місця для занесення результатів спостереження та знахідок. З електронних зошитів зручно здійснюються гіперпосилання на файли ППЗ.

Дослідження показали, що підсумовуючи результати графічних експериментів, виконаних за допомогою GRAN1, учні можуть ефективно складати інструкції, алгоритми, схеми, узагальнювати способи розв'язування задач. Між діяльністю за алгоритмом, яка в значній мірі є репродуктивною, і діяльністю направленою на складання алгоритмів існує принципова різниця. Остання тісно пов'язана з творчим процесом, який вимагає від виконавця розумових дій аналізу і синтезу; порівняння та співставлення фактів і явищ, подібності і відмінностей; виділення первинних і вторинних ознак; розкриття причинно-наслідкових зв'язків тощо. Простіші алгоритми можна скласти з учнями в класі за один прийом, більш складні вимагають триваліших пошуків.

На заключному етапі роботи формулюються загальні твердження. Графічні експерименти за допомогою GRAN1 дають матеріал для емпіричних узагальнень, відповіді на питання „Як?”. Для теоретичного узагальнення слід обґрунтувати „Чому?”.

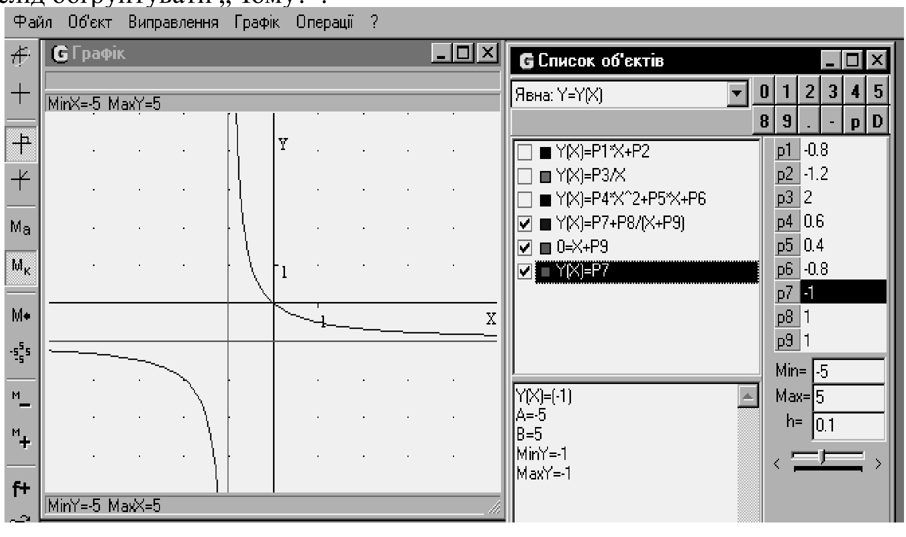


Рис. 3.71. Побудовано графік дробово-раціональної функції (GRAN1)

1. Розглянемо приклади завдань, при виконанні яких зручно виконати дослідження за допомогою GRAN1. У переважній більшості вони взяті з підручників [122], [123] для поглибленого вивчення математики, однак доступні і для учнів загальноосвітнього чи гуманітарного профілів. Школярі можуть висунути гіпотези стосовно властивостей лінійної функції $y = kx + b$ ($y = P1 * x + P2$), оберненої пропорційності $y = {}^{k}\!/_{x}$ ($y = P3 / x$), квадратичної $y = ax^2 + bx + c$ ($y = P4 * x\hat{}2 + P5 * x + P6$), дробово-

раціональної $y = (ax + b)/(cx + d)$ (Рис. 3.71). В дужках до кожної з функцій вказано об'єкт типу „*Явний: У=У(х)*" з аналітичним виразом. Для дробово-раціональної функції доцільніше досліджували об'єкт $y(x) = P7 + P8/(x + P9)$, тобто попередньо виділити цілу частину. Саме у такому записі школярі зрозуміють зв'язок між параметрами, властивостями функції і розташуванням графіка функції.

2. Детальніше зупинимося на переліку завдань для дослідження, які можна запропонувати школярам при вивченні *квадратичної функції*.

- Для функції $y=ax^2$, $a\neq0$ необхідно створити об'єкт типу „Явна" *y=p1*x^2 (A= -10, B=10),* встановити світловий курсор на параметр *P1* і плавно рухати бігунок параметра, наприклад, з кроком *0.1* від значення -5 до значення 5, спостерігаючи при цьому за зміною графіка функції. В результаті дослідження учні можуть відповісти на питання: Як коефіцієнт *а* впливає на напрям віток параболи? Для яких значень параметра функція досягає найбільшого (найменшого) значення? В якій точці досягається екстремальне значення?
- Дослідити, *як будують графік функції* $y=ax^2$, $a\neq0$, якщо побудовано графік функції $y=x^2$? Для дослідження створюють об'єкт *y=p1*x^2*; встановлюють значення параметра *p1* рівним одиниці; використовуючи послугу *Об'єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами,* будують графік функції $y=x^2$. Змінюють значення параметра і фіксують нові функції для значень параметра, поданих у табл. 3.4. Заповнивши запропоновану таблицю, учні роблять висновки щодо перетворення графіка функції $y=ax^2$, $a\neq0$ залежно від параметра *а*.

Таблиця 3. 4

a	x	$y=x^2$	$y=ax^2$	x	$y=x^2$	$y=ax^2$	Висновок
$a = 1$	$x=1$			$x=2$			
$a =2$	$x=1$			$x=2$			
$a =3$	$x=1$			$x=2$			
$a = -1$	$x=1$			$x=2$			
$a = -2$	$x=1$			$x=2$			
$a = 0,5$	$x=1$			$x=2$			
$a =0,25$	$x=1$			$x=2$			
$a = -0,5$	$x=1$			$x=2$			
$a = -0,25$	$x=1$			$x=2$			

- $\boldsymbol{y=ax^2+n}$, $a\neq0$. Дослідити за допомогою GRAN1, як впливає значення коефіцієнта *n* на зміну графіка функції $y=ax^2$, $a\neq0$. Для цього створюють об'єкт *y=p1*x^2+p2* і змінюють значення параметра *p2*. Використовуючи послугу *Об'єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами,* будують кілька графіків для різних значень параметра *n*. Роблять висновок щодо перетворення графіка.
- Дослідити для яких значень параметра *а* та *n*, можливо їх добутку, відношення існують нулі функції $y=ax^2+n$, $a\neq0$, тобто графік перетинає вісь *Ох*? Сформулювати висновок: якщо ......, то парабола вісь *Ох* перетинає; якщо ...... , то графік вісь *Ох* не перетинає.

- Які умови потрібно накласти на коефіцієнти *a* та *n*, щоб функція була лише додатною? Лише від'ємною? Мала проміжки різної знакосталості?
- $y=a(x-m)^2$. Дослідити, як впливає коефіцієнт *m* на зміну графіка функції $y=ax^2$, $a\neq 0$? Для дослідження необхідно створити об'єкт *y=p1*(x-p3)^2* і змінювати параметр *p3*.
- $y=a(x-m)^2+n$. На основі попередніх досліджень пояснити вплив коефіцієнтів *n* та *m* на розташування параболи. Гіпотезу перевірити експериментально. Для цього створити об'єкт *y=p1*(x-p3)^2+p2* та досліджувати його властивості, змінюючи послідовно кожен з параметрів.
- Щоб сформулювати властивості функції $y=a(x-m)^2+n$ для довільних значень параметра *a* ($a\neq 0$), опишемо, наприклад, властивості функцій $y=2(x-3)^2+1$, $y=-0.5(x+2)^2-3$ і заповнимо табл.3.5.

Таблиця 3. 5

№	Властивості	$y=2(x-3)^2+1$	$y= -0.5(x+2)^2-3$
1	область визначення		
2	область значень		
3	парність/непарність		
4	нулі функції		
5	проміжки знакосталості		
6	проміжки спадання		
7	проміжки зростання		
8	точка екстремуму		
9	екстремум		
10	опуклість графіка		
11	ескіз графіка		
12	напрям віток параболи		
13	вершина параболи		
14	характерні точки		

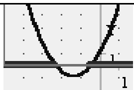
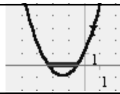
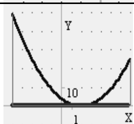
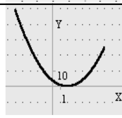
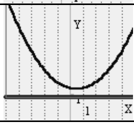
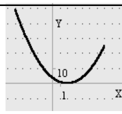
- Для функції $y=ax^2+bx+c$ дослідити вплив параметрів на розташування параболи, створивши об'єкт-функцію за формулою *y=p1*x^2+p2*x+p3.*
- Для квадратичної функції *експериментально встановити формулу абсциси вершини параболи.* З попереднього дослідження, учень має зробити висновок, що параметр *P3* не впливає на зміну абсциси вершини параболи. Тому можна зафіксувати параметр *P3*, а параметр *P2* змінювати, наприклад, з кроком *2*. Необхідно з'ясувати, як при цьому змінюється абсциса вершини. В подальшому змінюємо параметр *P1* з кроком *2* при інших зафіксованих параметрах. Підсумовуючи результати дослідження, школяр встановлює, що абсцису вершини параболи можна знайти за формулою $x_0= - b/(2a)$.
- Спонукати школярів зробити висновок, коли вершина параболи розташована зліва (справа) від осі *Oy*?
- Важливо з'ясувати, *як залежить розташування параболи* (перети-

нає вісь *Ox*, дотикається, не перетинає) *від значення дискримінанта* відповідного квадратного рівняння $D=(p2)^2-4p1p2$. Змінивши значення коефіцієнтів *p1, p2, p3*, необхідно обчислити дискримінант, використовуючи при цьому послугу *Калькулятор*. Обговорення результатів дослідження доцільно провести у формі інтерактивної вправи „Незавершене речення”: парабола перетинає вісь *Ox*, якщо ... ; дотикається до осі *Ox*, якщо ... ; не перетинає вісь *Ox,* якщо ... ; якщо дискримінант ..., то... .

Завдання зручно виконати і за допомогою GRAN-2D.

- Попереднє дослідження можна поєднати з використанням послуги *Операції\Нерівність*, щоб за допомогою ППЗ розв’язувати нерівності виду $f(x)>0$, $f(x)<0$. При цьому у вікно *Відповіді* заноситься результат розв’язування, а на осі абсцис розв’язки виділяються жирною лінією. У результаті графічного експерименту учень має самостійно заповнити таблицю (табл.3.6) *розв’язування нерівностей* другого степеня для функції $f(x)=ax^2+bx+c$.

Таблиця 3.6

a>0		$f(x)>0$	$f(x)\geq 0$		$f(x)<0$	$f(x)\leq 0$
D > *0*						
D = 0						
D < *0*						

- Щоб *відновити графік функції* $f(x)=ax^2+bx+c$, необхідно на площині задати три точки, скласти систему із трьох рівнянь з трьома змінними та розв’язавши її, визначити невідомі коефіцієнти. Щоб виконати завдання за допомогою GRAN1, необхідно створити об’єкт *Функція задана таблично*. Точки можна вибрати, якщо вказати їх координати з екрана або з клавіатури. Для побудови параболи зазначають степінь многочлена *2*. Слід також поставити учням питання, для якого розташування точок параболу зазначеного виду не вдасться побудувати?

Доцільною для розвитку мислення школяра є вправа на визначення за графіком знака дискримінанта і знаків коефіцієнтів *a, b, c* (рис. 3.72).

Розглянуті дослідження властивостей функції залежно від значень коефіцієнтів є пропедевтикою розв’язування задач з параметрами.

3. Зміна значення коефіцієнта *c* у функції $y=ax^2+bx+c$ спричинює переміщення параболи вздовж її осі $x=-b/(2a)$. Дослідити, *вздовж якої кривої рухатиметься вершина параболи,* якщо змінювати лише коефіцієнт *a*?

Для цього створюють об’єкт *y=p1*x^2+p2*x+p3* і змінюють параметр *p1,* надаючи йому різних значень. Щоб встановити лінію, вздовж якої

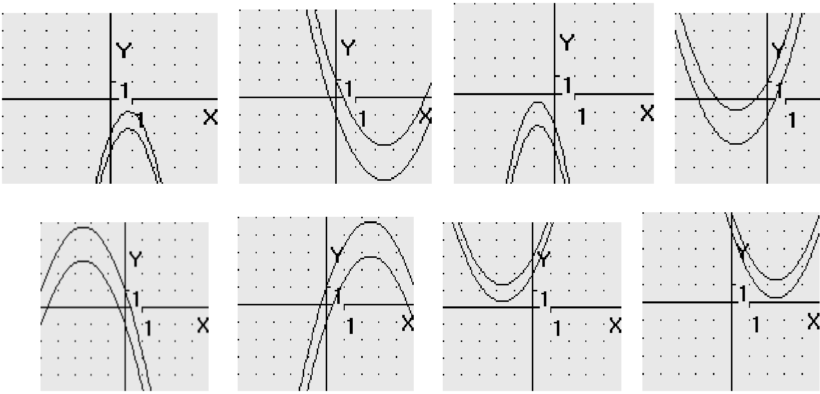


Рис. 3. 72. За побудованою параболою визначити знаки параметрів

рухається вершина, потрібно залишати слід параболи на площині, тобто створювати об'єкти типу „явна" для різних значень параметра *p1*. Значно спрощує дослідження використання послуги *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами*. Рекомендуємо в ході дослідження заносити координати вершини параболи в таблицю. Їх можна отримати, підставивши значення параметрів у формули для координат вершини параболи. Простіше створити таблицю значень за допомогою GRAN1. Для цього обирають тип даних *Таблично*, створюють об'єкт-функцію, вказують з екрана вершини побудованих парабол та степінь многочлена, яким наближатимуть табличні дані. Оскільки крива нагадує пряму, то вибирають степінь многочлена *1* і будують цю пряму. Коли змінюється лише параметр *a*, траєкторія вершини описується лінійної функцією $y=bx/2+c$. Можна також експериментально встановити, як від коефіцієнтів *p1, p2, p3* залежить рівняння лінії.

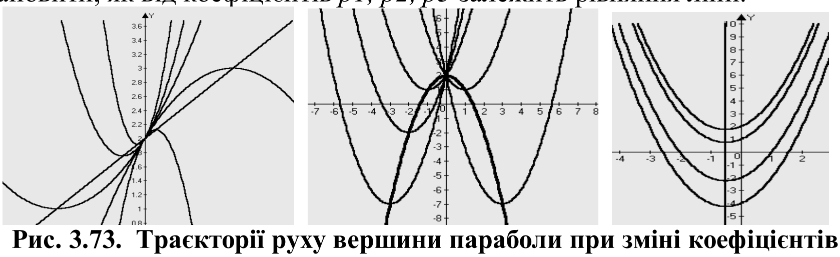


Рис. 3.73. Траєкторії руху вершини параболи при зміні коефіцієнтів

Якщо зафіксувати значення параметрів *p1* і *p3*, а змінювати коефіцієнт *b (p2),* то встановимо, що вершина параболи буде рухатися вздовж іншої параболи, заданої рівнянням $y=-ax^2+c$ (Рис.3.73).

Можна досліджувати функції і за допомогою ППЗ GRAN-2D. Щоб ввести параметри, побудуємо, наприклад, довільну пряму, паралельну до осі *Oy* (чи до осі *Ox*). На ній візьмемо довільні точки *P1, P2, P3,...* . Користуючись послугою *Об'єкт\Створення\Графік функції*, обирають тип функціональної залежності „явний" і записують аналітичний вираз. В якості параметрів вводять ординати (чи абсциси) точок *P1, P2, P3*. Зміна положення названих точок спричинює перетворення графіка функції. Нехай точки вибрано на прямій *y=c*. Абсциса точки на прямій у цьому разі може бути довільною. Використовують послугу *Об'єкт\Створення\Графік функції* та створюють об'єкти типу *„Явна"*. Для дослідження лінійної функції створюють об'єкт за аналітичним виразом *y=x(P1)*x+x(P2)*, для квадратичної функції – *y=x(P4)*x^2+x(P5)*x+x(P6)*) (рис.3.74), для оберненої пропорційності – $y = x(P3)/x$), дробово-раціональну функцію представляють у вигляді $y(x) = x(P7) + x(P8)/(x + x(P9))$.

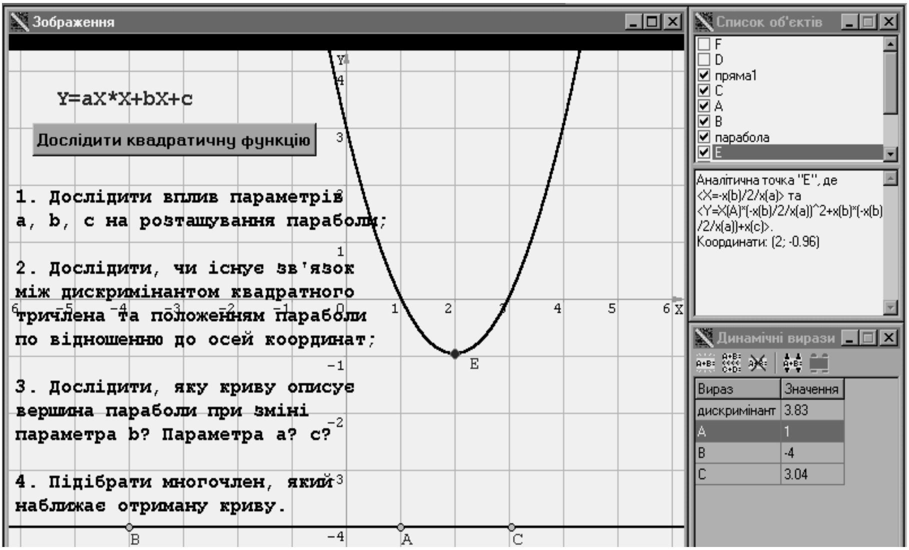


Рис.3.74. Дослідження квадратичної функції за допомогою GRAN-2D

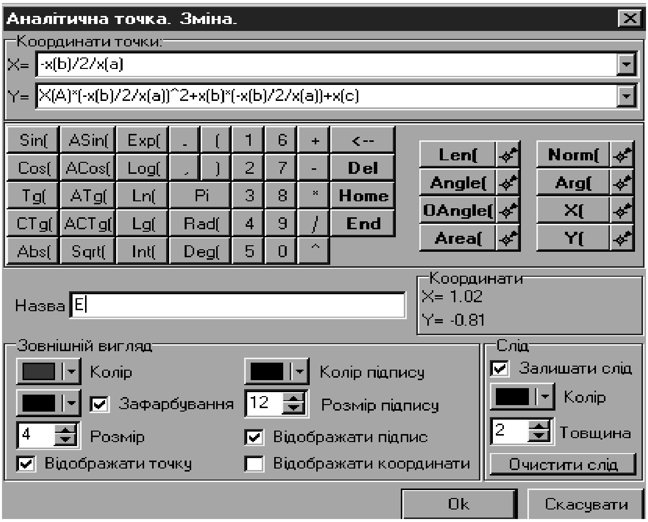


Рис.3.75. Вікно створення аналітичної точки - вершини параболи

Якщо поставлене завдання дослідити траєкторію руху вершини параболи, то для дослідження краще створити не лише об’єкт-функцію за виразом *y=x(P4)*x^2+x(P5)*x+x(P6)*), але й саму вершину – точку Е, задану аналітично (Рис.3.75). Для створеної точки зазначають у властивостях, що під час руху необхідно З*алишати слід*. Якщо зафіксувати два параметри, а змінювати третій, то точка Е залишить слід, описати який аналітично можна використовуючи послугу *Об’єкт\Створення\ Інтерполяційний поліном*. Якщо для побудови графіків скористатися послугою *ГМТ*, то лінія, вздовж якої рухатиметься вершина параболи, буде автоматично змінюватися зі зміною одного з параметрів.

4. Вивчаючи квадратичну функцію, доцільно запропонувати школярам дослідити *траєкторії польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту* (рис.3.76),

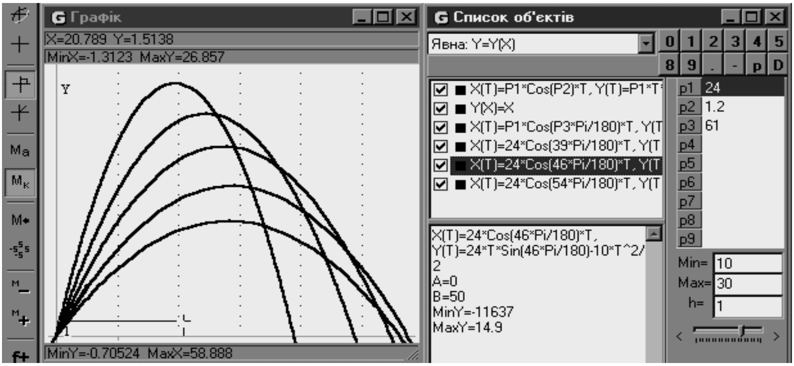


Рис. 3.76. Траєкторія польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту

знаходити максимальну висоту підйому і дальність польоту; кут, під яким потрібно кинути тіло, щоб потратити в ціль, або кут для максимальної дальності польоту. Задаємо параметрично функцію, за допомогою якої можемо визначити положення тіла над горизонтом у довільний момент часу: $x=(V_0 cos\alpha)t$, $y=(V_0 sin\alpha)t-gt^2/2$, будуємо графік і досліджуємо, змінюючи кут чи початкову швидкість. Спочатку виконаємо дослідження за допомогою ППЗ GRAN1. При цьому для радіанної міри кута необхідно створити об’єкти типу „параметрично” за формулами *x(t)=P1*Cos(P2)*T*, *y(t)=P1*T*Sin(P2)-10*T^2/2*. Рухаючи бігунок параметра спочатку для *P1*, а потім для *P2*, досліджують залежність дальності польоту і висоти підйому від початкового кута і початкової швидкості. У процесі дослідження встановлюють світловий курсор на функцію з параметром та використовують для створення траєкторій польоту послугу *Об’єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами*. Графіки, побудовані за допомогою GRAN, можна розрізняти за кольорами. В ході дослідження необхідно встановити, що найбільша дальність польоту досягається, коли початковий кут рівний 45°. Обґрунтовують результати дослідження властивостями квадратичної функції, заданої формулою $y=xtg\alpha-gx^2/(2v^2cos^2\alpha)$.

5. За допомогою програми GRAN1 учні якісніше засвоять *побудови графіків функцій через елементарні перетворення,* в тому числі, і перетворення з модулями: 1) $-f(x)$; 2) $f(-x)$; 3) $|f(x)|$; 4) $f(|x|)$; 5) $f(x)+b$; 6) $f(x+a)$, 7) $af(x)$; 8) $f(ax)$; 9) $|f(|x|)|$; *10)* $\frac{1}{f(x)}$ *;11)* $|y| = f(x)$. На прикладі побудови графіка функції $y=a(x-m)^2+n$ вже розглядалися елементарні перетворення графіків. Наступним кроком має стати систематизація та узагальнення отриманих результатів дослідження. Провести дослідження, обговорення, а в подальшому і обґрунтування отриманих результатів доцільно з використанням інтерактивних технологій, зокрема, "ажурної пилки" [81]. Для цього можна об'єднати школярів у чотири групи (за видами перетворення) і кожній з груп запропонувати завдання побудувати з використанням ППЗ по кілька графіків для різних функцій на кожне з перетворень $f(x)+b$, $f(x+a)$, $f(ax)$, $af(x)$. Після обговорення результатів дослідження в експертній групі, об'єднуємо групи за номером (у кожній групі є представник експертної групи) і тоді кожен учень отримає можливість висловитись, навчити інших, а загалом і сам краще засвоїти матеріал. На другому етапі дослідження необхідно скласти алгоритми для перетворень з модулями $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$; $|y| = f(x)$. Якщо початково групи об'єднувалися за видами перетворення, то перевірку засвоєння матеріалу слід здійснити таким чином, щоб учень для однієї з функцій $y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=1/x$ виконав всі з виписаних перетворень. У той же час, не менш ефективно досліджувати за допомогою GRAN1 всі види перетворень для однієї з функцій, а вже в групах обговорювати за видами функцій. Комп'ютер виступає інструментом дослідження, і його використання кожному з учасників створює ситуацію успіху.

6. Розглянемо, які дослідження доцільно запропонувати школярам при вивченні тригонометричних функцій. *Тригонометричні* функції відіграють важливу роль у математичному описанні багатьох періодичних процесів, що спостерігаються в природі. Наприклад, в описанні руху маятника навколо нерухомої осі, руху небесних тіл по еліптичних орбітах. Робота майже всіх машин та механізмів пов'язана з періодичним рухом - рухом поршнів, шатунів. На час вивчення даного матеріалу школярі вже вміють виконувати елементарні перетворення графіків функцій. Новим для них є поняття періодичності функції. Розглянемо, наприклад, формулу $I = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, яка виражає залежність між силою струму I та часом t у ланцюгу змінного струму.[·] Пропонуємо школярам дослідити за допомогою GRAN1 функцію і встановити *зміст коефіцієнтів* I_m, ω, φ *гармонічних коливань - амплітуди, циклічної частоти, початкової фази*; з'ясувати, який з коефіцієнтів впливає на зміщення графіка функції вздовж осі *Ox*; на період коливань, як саме визначається період. Щоб експериментально встановити

[·] А синуса график волна за волной
По оси абсцисс убегает. *Из студенческой песни*

величину основного періоду для функції *y=sinωx,* досліджують за допомогою GRAN1 об'єкт явного типу задання *y=sin(P1*x).* Значення основного періоду на екрані ППЗ визначається, як різниця між абсцисами кінцевої та початкової точок періоду. Або ж використовують послугу *Відстань від початку координат.* Результати дослідження заносять у таблицю (табл. 3.7). Проаналізувавши отримані дані, отримують експериментально формулу *T=2π/ω.* Аналогічно експериментально визначають основний період для функцій $I = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, $y = Atg(kx + b)$, висувають гіпотезу та її обґрунтовують.

Таблиця 3.7

Параметр	Період	Параметр	Період
P1=1	T=	P1=0.5	T=
P1=2	T=	P1=0.25	T=
P1=3	T=	P1= - 0.5	T=
P1= -2	T=	P1 = -1	T=

7. Для дослідження тригонометричних функцій за допомогою GRAN1 створюють об'єкти явного виду задання за формулами:

1) *Y(x)=P1*sin(x); Y(x)=P1*sin(P2*x); Y(x)=P1*sin(P2*(x+P3));*
2) *Y(x)=P1*cos(x); Y(x)=P1*cos(P2*x); Y(x)=P1*cos(P2*(x+P3));*
3) *Y(X)=P4*tg(x); Y(X)=P4*tg(P5*X); Y(X)=P4*tg(P5*(X+P6));*
4) *Y(X)=P7*ctg(X);Y(X)=P7*ctg(P8*X); Y(X)=P7*ctg(P8*(X+P9)).*

Послідовно змінюють параметри. Щоб зручніше було порівнювати властивості функцій, бажано використовувати послугу *Операції. Нова функція з зафіксованими параметрами*. Зауважимо, що можна було б і не створювати два перші об'єкти в кожному з пунктів, а лише обмежитися останнім. Однак вважаємо, що учні краще усвідомлять перетворення графіків у тому випадку, коли буде подано всі три об'єкти. Для графіків тангенса і котангенса необхідно також будувати вертикальні асимптоти. Для асимптот тангенса створюють за формулами *0=x-(P9+Pi/2)/P8* і *0=x-(P9-Pi/2)/P8* об'єкти неявного типу задання. Асимптота рухається зі зміною параметрів.

8. Щоб дослідити, для яких проміжків часу сила струму перевищує (не перевищує) наперед задане число, використовують послугу *Операції \ Нерівність*. Розв'язуючи графічно *тригонометричні нерівності* за допомогою GRAN1, поступово підводимо школярів до формулювання алгоритму їх розв'язування вручну. Наприклад, встановити, для яких значень часу *t*, амплітуда коливань, заданих функцією $y = 5\sin(2t + \frac{\pi}{3})$, більша двох; амплітуда коливань *y=3sin2x* менша одиниці (рис.3.77) тощо?

Для дослідження за допомогою GRAN1 створюють об'єкт явного типу за формулою *y=p1*sin(p2*x +p3),* будують графік, експериментують, рухаючи бігунок параметра. Використовуючи послугу *Операції, Нерівність,* розв'язують нерівність *P1*sin(p2*x +P3)< P5 (P1*sin(p2*x +P3)>P5)* і зчитують результати, отримані за допомогою програмного засобу у вікні *Відповіді.* Відрізки, що відповідають розв'язкам нерівності, виділяються на осі абсцис контрастною лінією. Аналогічно знаходять розв'язки для нерівностей, що містять косинус, тангенс чи котангенс.

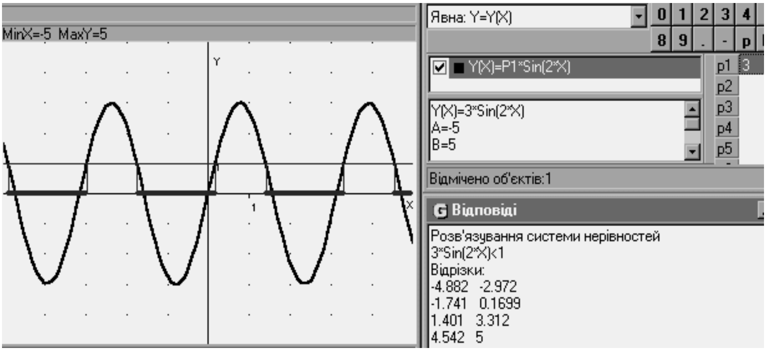


Рис.3.77. Амплітуда гармонічних коливань *y=3sin2x* менша одиниці

Розв'язуючи тригонометричні нерівності, доцільно продемонструвати, як отримують результат користуючись *тригонометричним колом* (рис.3.78). Щоб знайти наближене значення арксинуса числа, переходять до полярної системи координат і зчитують з рядка стану координати точки, над якою розташований курсор.

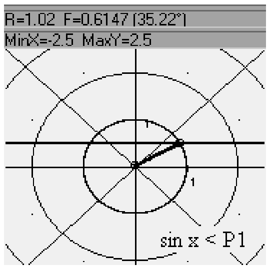


Рис. 3.78

9. Використовуючи ППЗ, школярі краще засвоять побудови *ГМТ на площині, задані тригонометричними нерівностями з двома змінними.*

Приклади ГМТ, заданих нерівностями *cos(y-x)>0*, *sin(y-x)<0* подано на рис. 2.6, рис.2.13. Щоб отримати заштриховані смуги подані на рис. 2.6, необхідно перейти від нерівності *cos(y-x)>0* до подвійної нерівності $-\pi/2+2\pi\ n<y-x<\pi/2+2\pi\ n, n\in Z;\qquad x-\pi/2+2\pi\ n<y<x+\pi/2+2\pi\ n, n\in Z.$ Наведемо приклад тригонометричної нерівності з двома змінними $sin(\pi(|y|+|x|))\geq 0$. Щоб заштрихувати ГМТ з використанням послуги ППЗ GRAN1 *Операції\Нерівність* (рис. 3.79), попередньо створюють об'єкт неявного типу задання *0=Sin(Pi*(Abs(X)+Abs(Y)))*. Для розв'язування нерівності $sin(\pi(|y|+|x|))\geq 0$ вручну переходять до подвійної нерівності $2n\leq|y|+|x|\leq 2n+1$, де n – цілі числа. На рис. 3.80 подано розв'язки нерівності $sin(\pi x)-sin(\pi y)\geq 0$. Для дослідження за допомогою GRAN1 створюють об'єкт неявного типу задання *0=Sin(Pi*X)-Sin(Pi*Y)* та застосовують послугу *Операції\ Розв'язати нерівність.*

10. У підручнику [122,192] школярам рекомендується *проаналізувати суму двох гармонічних коливань* за умови, що у них а) амплітуди різні, а частоти рівні; б) амплітуди рівні, а частоти різні; в) і амплітуди, і частоти різні. Ця вправа класифікована, як завдання високого рівня. Дослідження зручно виконати за допомогою GRAN1 і висловити гіпотезу стосовно суми періодичних функцій і визначення загального періоду. Проведення дослідження інтенсифікує процеси засвоєння матеріалу. Прикладна спрямованість матеріалу дозволить посилити міжпредметні зв'язки „математика-фізика", забезпечити підвищення внутрішньої мотивації учнів.

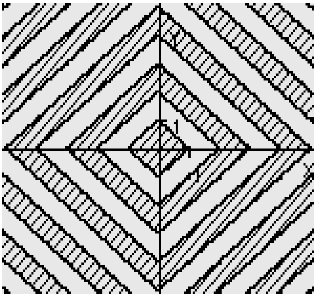


Рис. 3.79. Розв'язки нерівності *sin(π(|y|+|x|))≥0*

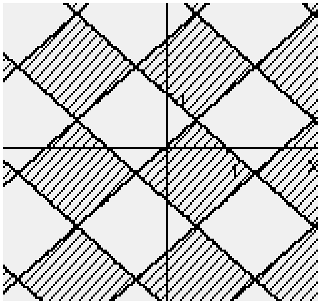


Рис.3.80. *sin(π x)-sin(π y)≥0*

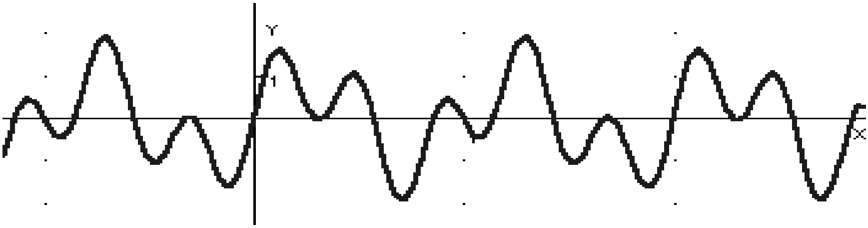


Рис. 3.81 Графік суми гармонічних коливань *y=sin(2πx)+sin(5πx)*

Доцільно *визначити спільний період, найбільше значення* функцій *y=cos(2x)+sin(4x)+sin(6x)*; *y=cos(3πx)+cos(6πx)+sin(9πx)*; *y=sin(3πx)+sin(5πx)*,; *y=sin(2πx)+sin(5πx) (Рис.3.81)*; $y = \dfrac{\cos 2x + \cos 3x}{1 + \sin x}$, $y = \dfrac{\sin 2x \cos 2x}{\sin x + \cos x}$. Для двох останніх функцій слід звернути увагу на періодичність точок розриву функції.

11. Якщо для дослідження тригонометричних функцій використовують Advanced Grapher, то попередньо використовують послугу *Графік. Набори властивостей. Тригонометричний набір* (рис.3.82). В програмі нема динамічних параметрів, тому кожному з параметрів потрібно надавати чисельного значення.

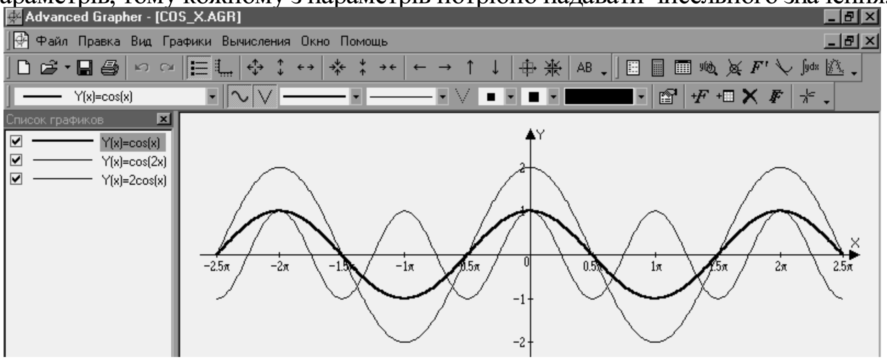


Рис. 3.82. Копія робочого вікна програми Advanced Grapher

12. Доцільно застосовувати ППЗ при введенні обернених функцій, в то-

му числі і тригонометричних. Для цього потрібно пригадати з школярами той факт, що графіки взаємно-обернених функцій симетричні відносно прямої *y=x*. За допомогою ППЗ зручно демонструвати проміжки оборотності функції, змінюючи при цьому відрізок задання. Щоб сформулювати властивості функції *y=arccos(x)*, спочатку будують графік *y=cos(x)* та встановлюють проміжки оборотності функції. Для дослідження за допомогою GRAN1 необхідно створити об'єкти неявного типу задання *0=y-cos(x), 0=x-cos(y)*. Для другої функціональної залежності необхідно вказати, що $y\epsilon(0,\pi)$.

13. Важко даються школярам *побудови графіків складених функцій, що містять обернені тригонометричні функції.* На компакт-диску пропонується добірка побудованих графіків з оберненими тригонометричними функціями відповідно до підручника [122]. Для побудови графіка функції $y=\arcsin(\sin(x))$ важливо встановити період функції, непарність, записати аналітичні вирази, перевірити правильність запису, виконуючи побудову графіка за допомогою ППЗ (рис.3.83). Підсумком роботи має стати сформульований алгоритм побудови та здійснена його перевірка для функції $y=\arccos(cox(x))$ чи $y=arctg(tg(x))$. Для аналізу і складання алгоритму побудови графіків функцій $y=arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $y=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (рис. 3.84), доцільно побудувати в одній системі координат також графіки внутрішніх функцій, горизонтальні та вертикальні асимптоти графіків, якщо вони існують.

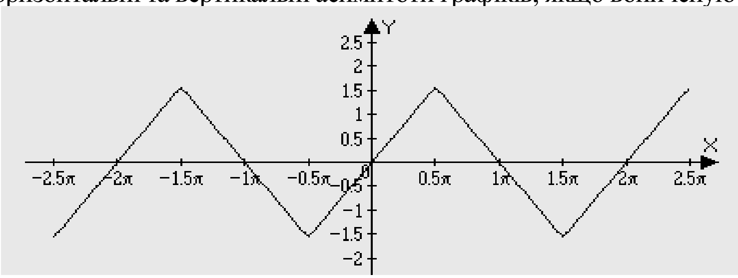


Рис. 3.83 Графік функції $y=\arcsin(\sin(x))$

При вивченні обернених тригонометричних функцій бажано виконати наступні завдання:

1) Виходячи з означення, побудувати графіки обернених тригонометричних функцій *y=arcsin(x), y=arccos(x), y=arctg(x), y=arcctg(x)* та дослідити їх властивості;

2) Побудувати за допомогою елементарних перетворень графіки функцій

$$y(x)=k\cdot\arccos b(x-c)+d\,; \qquad y(x)=k\cdot\arcsin b(x-c)+d\,;$$

$$y(x)=k\cdot arctg\ b(x-c)+d\,; \quad y(x)=k\cdot arcctg\ b(x-c)+d\,.$$

3) Побудувати графіки складених функцій за допомогою елементарних перетворень графіків та на основі знання про границі функції в точці і на нескінченності. У стовпчику справа подано запис у форматі GRAN1.

437 а) $y=a\cdot\arcsin(k/x)$ $\qquad y=P1*a\sin(P2/x)$

437 б) $y = x - \arcsin(x)$, $y = x - a\sin(x)$

437 в) y=arcsin(sin(x)), y=asin(sin(x)),

437 г) y= sin(arcsin(x)), y=sin(asin(x)),

445 в) $y=k \arccos(b x^2)$, *y=P1*acos(P2*x^2),*

*445 г) y= k arccos(a/x), y=P1*acos(P2/x),*

452 б) $y = arctg(tg(p1 \cdot x))$, *y=atg(tg(P1*x)),*

452 в) $y = tg(arctg(x))$, *y=tg(a tg(x)),*

445 д) $y = k \cdot \arccos\left(\dfrac{a - x^2}{a + x^2}\right)$, *y=P1*acos((P2-x^2)/(P2+x^2),*

452 а) $y = barctg\left(\dfrac{a}{x}\right)$, *y=P1* atg(P2/x)),*

452 ж) $y = arctg\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$, *y= atg((1-x)/(1+x)),*

453 с) $y = a \cdot x \cdot arctg(x)$, *y=P1*x*(atg(x)),*

454 е) $y = (0.5\pi - arctg\ x) \cdot x \cdot a$, *y=(pi/2- atg(x))*P1,*

454 є) y=x-k arctg(x), y=x- p1 atg(x)).*

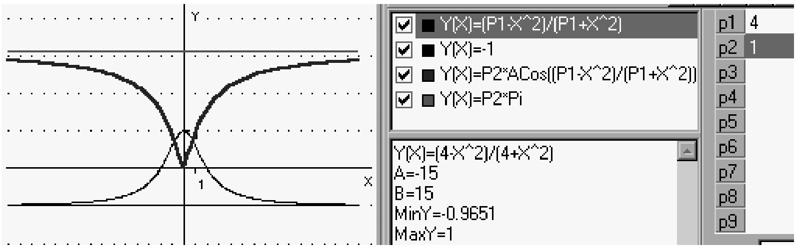


Рис.3.84. Графік складеної функції $y = k \cdot \arccos\left(\dfrac{a - x^2}{a + x^2}\right)$**, асимптота**

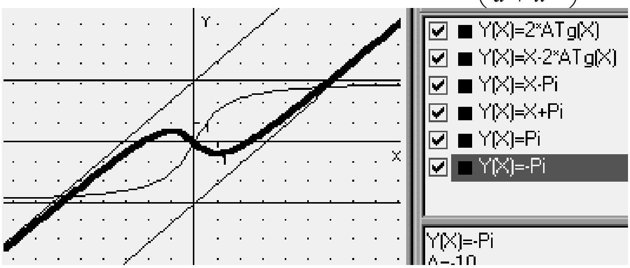


Рис. 3.85. Графік функції *y=x-2 arctg(x),* похилі асиптоти графіка

Детальніше розглянемо побудову графіка функції $y = (0.5\pi - arctg\ x) \cdot x \cdot a$ (рис. 3.86). Поряд з основним графіком необхідно будувати допоміжні, в тому числі асимптоти графіка. Послідовність побудови представимо у форматі GRAN1: допоміжні графіки *Y(X)=ATg(X);*

Y(X)=-ATg(X); y(x)= pi/2- ATg(X); асимптота *y(x)=0* при $x \to +\infty$, асимптота *y(x)= pi* при $x \to -\infty$, остаточний графік *y(x)= (pi/2-ATg(X)) *x*P1*, асимптота *y(x)=P1* при $x \to +\infty$, асимптота *y(x)= pi *x* P1* при $x \to -\infty$. Для даної функції саме обчислення границі при $x \to +\infty$ у школярів викликає найбільші труднощі.

14. При поглибленому вивченні математики вчителю не обійтися без перетворень, які пов’язані з функцією ант’є. *Задачі, які містять цілу і дробову частину числа***,** досить часто зустрічаються на олімпіадних змаганнях різних рівнів, у збірниках задач до багатьох вищих навчальних закладів, є нестандартними і вимагають творчого підходу до розв’язування. Завдання по праву називають “шедеврами шкільної математики”, тому доцільно розглянути їх на факультативних заняттях та спецкурсах математики [11], [55], [66].

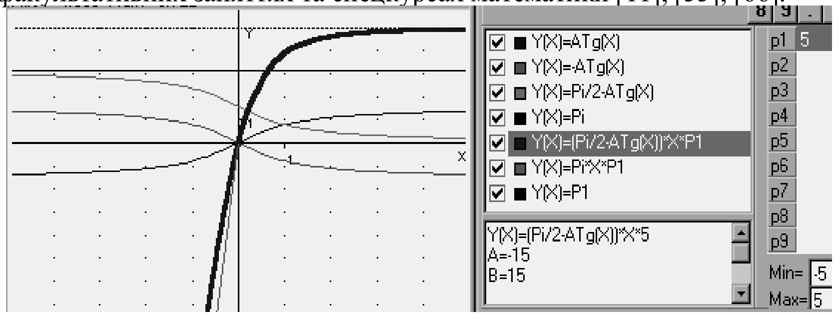


Рис. 3.86 Графік функції $y = (0.5\pi - arctg\ x) \cdot x \cdot a$ **, асимптоти графіка**

Кожне дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один з яких ціле число, а другий – невід’ємний правильний дріб. Нагадаємо, що ціла частина числа – це найбільше ціле число, що не перевищує дане. Дробова частина визначається як різниця між числом і його цілою частиною. З означення слідує, що дробова частина невід’ємна. Для будь-якого *x* виконуються подвійні нерівності $[x] \le x \le [x]+1$, $0 \le \{x\} < 1$.

У нині діючих шкільних підручниках, зокрема [122], вводиться поняття цілої і дробової частини числа, будуються графіки функцій *y=[x], y={x}, y={2x}, y={0.5x}*, причому два останніх для демонстрації перетворення, заданого формулою *y=f(ax),* і більше ні в десятому, ні в одинадцятому класі подібних завдань не зустрічається. Для організації дослідження і створення алгоритму побудови ефективно застосувати інтерактивну методику „ажурна пилка”. Об’єднуємо школярів у чотири групи у відповідності до виду перетворення:

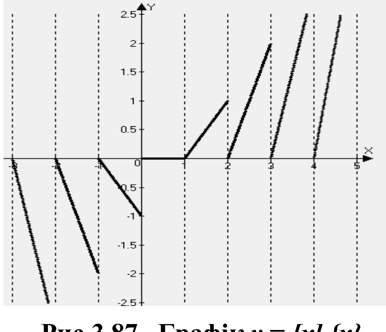


Рис.3.87. Графік *y = [x] {x}*

y=[f(x)], y={f(x)}, y=f([x]), y=f({x}), будуємо графіки і, виходячи лише з означення, складаємо і обговорюємо вироблені алгоритми. Для першого перетворення складемо таку послідовність дій: будуємо графік допоміжної функції $y=f(x)$; проводимо допоміжні прямі $y=n$, де n - ціле число; через точки перетину прямих з графіком проводимо прямі, паралельні осі Oy. На кожному з утворених інтервалів будуємо графіки відповідно до означення цілої та дробової частини. Для $n\leq f(x)<n+1$ маємо $[f(x)]=n$, $\{f(x)\}=f(x) - [f(x)]$. Для дробової частини розрізаний горизонтальними лініями графік функції $y=f(x)$ паралельно переносять для вказаних x вздовж осі Oy і розміщують у смузі $0\leq y\leq 1$. Дослідження необхідно розпочинати з побудови та аналізу графіків функцій $y=x$, $y=[x]$, $y=\{x\}$.

Для побудови графіка функції $y = [x]\{x\}$ (рис.3.87) скористаємося означенням цілої та дробової частини. Тоді $y = n(x-n) = nx - n^2$, n – ціле число. Побудову виконують для кожного інтервалу $n\leq x<n+1$ окремо.

Для побудови вручну графіка функції $y = x/[x]$ (рис.3.88) необхідно розписати функцію як кусково-задану:

$$y = \begin{cases} \textit{не існує при } 0 \leq x < 1, \\ x \quad \textit{при } 1 \leq x < 2, \\ 0.5x \textit{ при } 2 \leq x < 3, \\ x/3 \textit{ при } 3 \leq x < 4, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x/n \textit{ при } n \leq x < n+1. \end{cases}$$

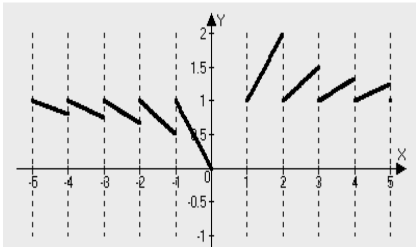


Рис. 3.88. Графік функції $y = x/[x]$

Щоб побудувати за допомогою GRAN1 графіки функцій $y=[x^2-a|x|]$ і $y=\{x^2-a|x|\}$, створюють для першої функції об’єкт явного виду задання $y = INT(x\text{^}2 - P1 * ABS(x))$. Для дробової частини на панелі введення даних нема зарезервованої кнопки, тому її потрібно ввести виходячи з означення: $\{\mathrm{f}(x)\} = \mathrm{f}(x) - [\mathrm{f}(x)]$. Тобто, $y = x\text{^}2 - P1 * ABS(x) - INT(x\text{^}2 - P1 * ABS(x))$. Добірки побудованих графіків, що містять цілу і дробову частину можна переглянути на компакт-диску (*презентація Ціла і дробова частина*). У програмі Advanced Grapher використовуються позначення: *int (x)* – ціла частина *x*, *frac(x)* – дробова. Варто наголосити на тому, що навіть тоді, коли графік побудований за допомогою GRAN чи Advanced Grapher, для школярів залишається невирішеною проблема „виколотих” точок (рис. 3.87, рис.3.88). Тому на графіках функцій, побудованих за допомогою GRAN-2D (рис.3.89), позначки для „виколотих” точок проставлені вручну. Оскільки графіки розривних функцій потрібно будувати лише в режимі „за точками”, то в ході дослідження можна використати прийом „лови помилку”. Тобто, надати учням можливість самостійно виявити особливість побудови. Активні обговорення, консультації в групах розвиватимуть комунікативні здібності школярів.

15. Вивчаючи похідну, корисно провести за допомогою GRAN дослідження, які допоможуть школяреві глибше усвідомити сутність цього поняття,

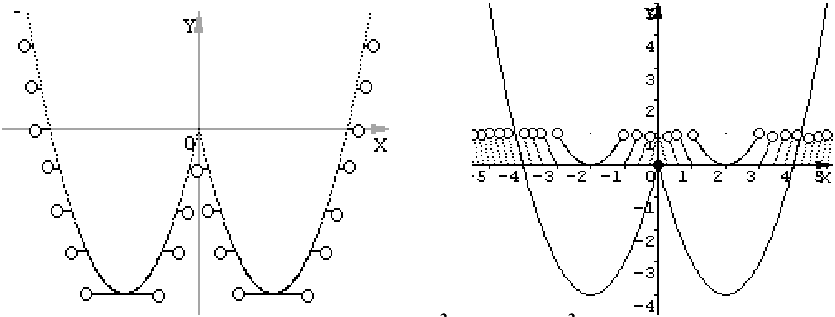


Рис. 3.89. Графіки функцій $y=[x^2-4|x|]$, $y=\{x^2-4|x|\}$ **(GRAN-2D)**

з’ясувати геометричний зміст похідної, „відкрити” теореми про необхідну умову існування локального екстремуму; достатню умову монотонності фун кції; висунути гіпотези стосовно зв’язку, який існує між знаком другої похідної функції та опуклістю графіків функції. До таких досліджень спонукає і саме подання матеріалу за підручником [122, *278*]. Зокрема, означення опуклості графіка функції вводиться через розташування дотичної по відношенню до графіка функції [122, *288*]. Комп’ютерні експерименти за допомогою GRAN1 можна виконати у двох режимах: 1) побудувати в одній системі координат графік функції і графік її першої похідної; графік функції і графік другої похідної (Рис.3.90); 2) провести дослідження за допомогою GRAN1, користуючись послугою *Операції. Похідна*.

Розглянемо кубічний поліном. Для дослідження за допомогою GRAN1 створюють об’єкти типу „явна”: для кубічного многочлена *Y(X)=P1*X^3+P2*X^2+P3*X+P4*, для першої та другої похідної відповідно *Y'(X)=3*P1*X^2+2*P2*X+P3, Y''(X)=6*P1*X+2*P2*. В одній системі координат будуємо два графіки (Рис. 3.90).

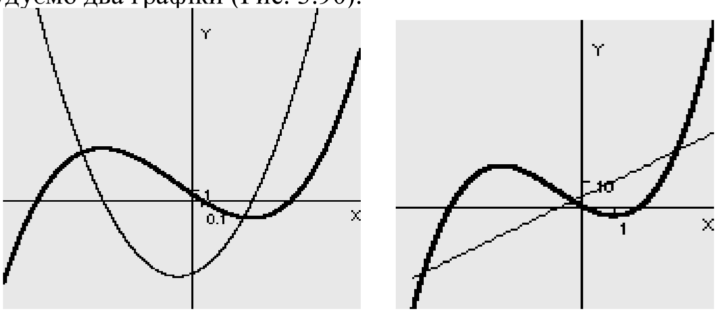


Рис. 3.90. Дослідження на монотонність. Дослідження на опуклість графіка

У ході лабораторної роботи в комп’ютерному класі чи просто евристичної бесіди на уроці школярі аналізують побудовані графіки, порівнюють проміжки монотонності функції та проміжки знакосталості першої похідної, проміжки опуклості графіків функцій та проміжки знакосталості другої похідної, співставляють нулі похідної та точки екстремумів, нулі другої похідної та точки перегину. Пропонуємо учням низку запитань і підводимо юних дослідників до формулювання необхідної та достатньої умов існування екстремуму, до складання алгоритму дослідження на монотонність та екстремуми, на опуклість графіків функцій та точки перегину графіків.

Досліджуючи функцію на монотонність та екстремуми, школярі заповнюють таблицю, у якій фіксують проміжки монотонності функції, точки екстремумів, екстремуми, проміжки знакосталості похідної, критичні точки (стаціонарні точки і точки з області визначення, в яких похідна не існує).

У процесі дослідження на опуклість графіків функцій заповнюють таблицю, в якій фіксують проміжки, на яких графік опуклий вгору, вниз, точки перегину, проміжки знакосталості другої похідної, нулі другої похідної.

Можна запропонувати школярам для дослідження функції: $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$, $y=|x|$, $y=x^3-3x^2$, $y=3x^4-7x^3+3x-7$, $y=0.25x^4-2x^2$, $y=x-x^3$, $y=x^2$ - $ln(1+2x)$, $y=x^2$ - $ln(1-2x)$. Особливу увагу слід звернути на дві останні функції. Учні часто допускають помилку, оскільки нуль похідної автоматично сприймають як критичну точку і не перевіряють область визначення функції. Точка $x = -1$ не є критичною точкою для функції $y=x^2$- $ln(1+2x)$. На рис. 3.91. представлено графік функції $y=x^2-ln(1+P1x)$, вертикальну асимптоту $1+P1x=0$, графік першої похідної $y=2x-P1/(1+P1x)$. Параметр $P1$ можна довільно змінювати і досліджувати функцію на монотонність та екстремуми залежно від параметра.

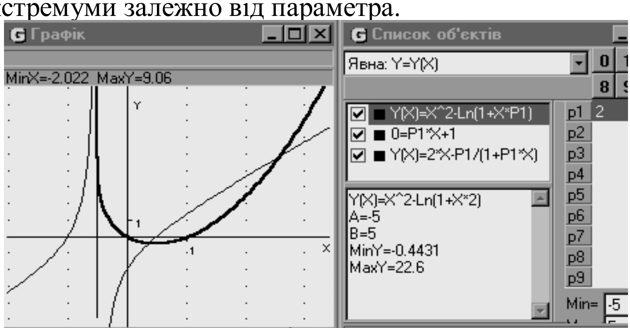


Рис. 3.91. Графіки функції $y=x^2-ln(1+Px)$ і першої похідної функції

Учням слід надавати диференційовану допомогу. Кому важче проаналізувати графічні образи, пропонувати підказки у вигляді незакінчених речень. Під час складання учнями письмового звіту, в обговоренні результатів дослідження у широкому колі можна використати інтерактивний прийом „незакінчені речення”, щоб спонукати школярів до здійснення теоретичних узагальнень. Наведемо приклади таких речень.

- Якщо a – точка екстремуму, то похідна, якщо вона в цій точці існує[1], ...
- Якщо диференційовна функція зростає, то перша похідна ...
- Якщо диференційовна функція спадає, то перша похідна ...
- Критична точка буде точкою максимуму, якщо ...

[1] Коли величина є максимальною чи мінімальною, в цей момент вона не тече ні вперед, ні назад. *І. Ньютон*

- Критична точка буде точкою мінімуму, якщо ...
- Диференційовна функція зростає тоді, коли похідна ...
- Якщо а – точка перегину, то друга похідна ...
- Якщо графік двічі диференційовної функції опуклий вгору, то друга похідна за умови, що вона існує, буде ...
- Якщо графік двічі диференційовної функції опуклий вниз, то друга похідна ...
- Точка а тоді буде точкою перегину, якщо ...
- Графік двічі диференційовної функції тоді опуклий вгору, якщо друга похідна ...
- Графік двічі диференційовної функції опуклий вниз, якщо друга похідна...

У результаті дослідження властивостей функцій за допомогою GRAN1, фіксували в учнів формування навчальних дослідницьких умінь, умінь спостерігати явища в плані логічних і математичних категорій, умінь аналізувати факти, сприймати їх крізь призму математичних відношень, висувати різні гіпотези з обґрунтуванням їх можливості.

Виконані дослідження перекликаються із завданням підручника [122], в якому школярам пропонується з'ясувати, при яких співвідношеннях між коефіцієнтами *a, b, c, d* функція $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ матиме екстремуми? Звісно, що умову $b^2 - 3ac > 0$ наявності екстремумів в розглянутій функції, школярі зможуть отримати лише аналітичним шляхом. Крім того, щоб розвивати теоретичне мислення, висновок потрібно зробити до графічних експериментів, в ході яких вони з'ясують, що екстремуми існують, коли графік першої похідної (парабола) перетинає вісь Ох. Виконані експерименти можна розширити в плані дослідження розташування точок (x_{min}, y_{min}) і (x_{max}, y_{max}) при зміні одного (двох) з параметрів, коли зафіксовані інші. Виконання цього завдання вимагає від школяра знання багатьох відомостей про квадратичну функцію, тому його бажано пропонувати як індивідуальне тим, що виявляють особливі здібності до математики.

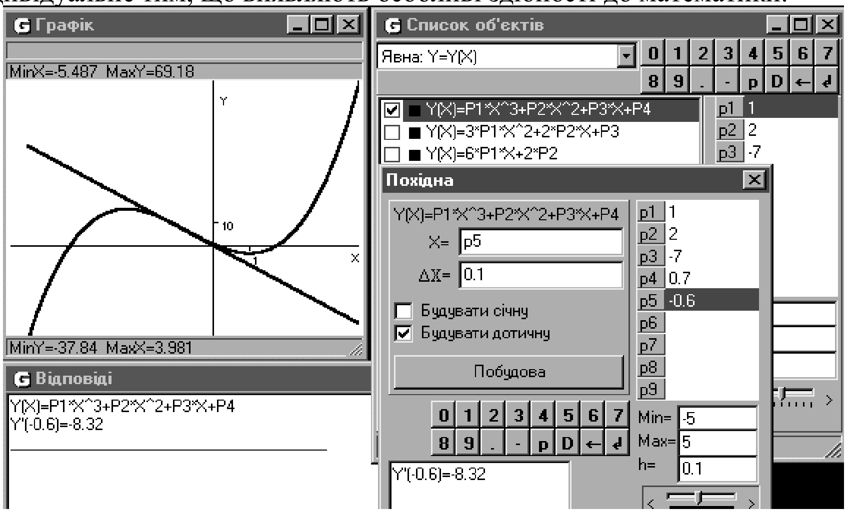


Рис. 3.92. Дотична рухається вздовж кривої (GRAN1)

Провести дослідження на монотонність та екстремуми можна також з використанням послуги *Операції. Похідна\ Будувати дотичну.* Попередньо слід побудувати графік функції. Дотична до графіка функції *f(x)* проходить через точку $(x_o, f(x_0))$. Якщо абсцису точки дотику задати через параметр *P5*, то плавно змінюючи значення параметра, будемо рухати дотичну вздовж кривої (Рис.3.92). При цьому динамічно обчислюється похідна функції в кожній з розглянутих точок. Значення похідної можна фіксувати та заносити у відповіді. В точках екстремумів отримаємо нульові значення похідної.

Послугу *Обчислення\Похідна* зручно застосовувати також при формуванні поняття приросту функції, границі функції в точці, поняття похідної, оскільки за допомогою GRAN1 можна будувати як дотичну, так і січну. Приріст аргументу потрібно плавно зменшувати через параметри. При цьому рухається і січна. Завдяки демонстраціям з використанням ППЗ школярі краще усвідомлюють поняття граничного переходу в означенні похідної функції. Не менш важлива зазначена послуга і при вивченні теми „Наближені обчислення з використанням похідної". З використанням ППЗ зручно продемонструвати зв'язок між приростом функції та диференціалом.

На рис. 3.93, 3.94 для дослідження зв'язку, що існує між функцією та її похідними, подано динамічні креслення, підготовлені за допомогою GRAN-2D. Точки, які розташовані на осі абсцис, можна рухати. Разом з ними рухаються як аналітично задані точки вздовж графіка функції та графіка похідної, так і дотична, проведена до графіка функції в поточній точці.

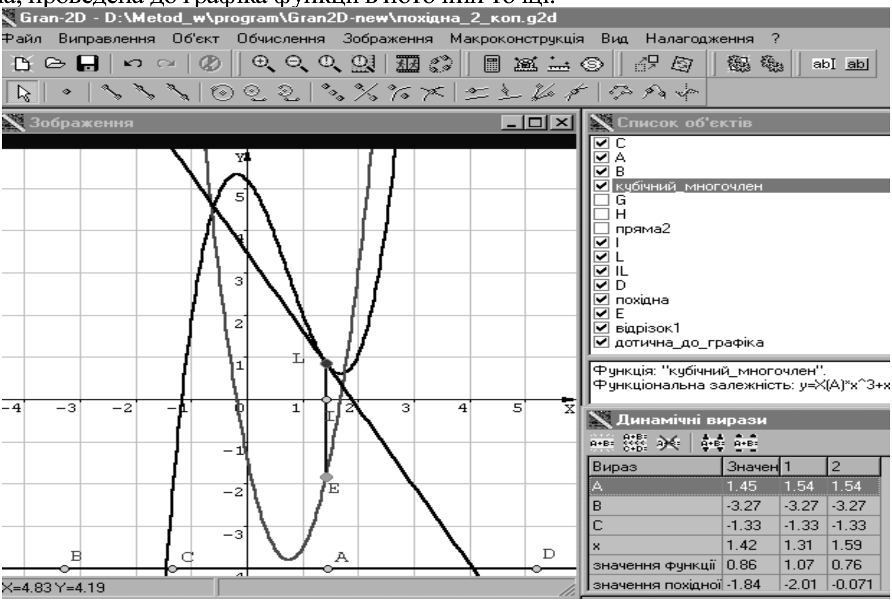


Рис. 3.93 Дослідження на монотонність (GRAN-2D)

Важливою передумовою, яка сприяє розвитку творчих якостей учня, є прикладна спрямованість навчання математики. Функціональні залежності моделюють багато явищ у природі, процесів у фізиці, хімії, біології, астрономії,

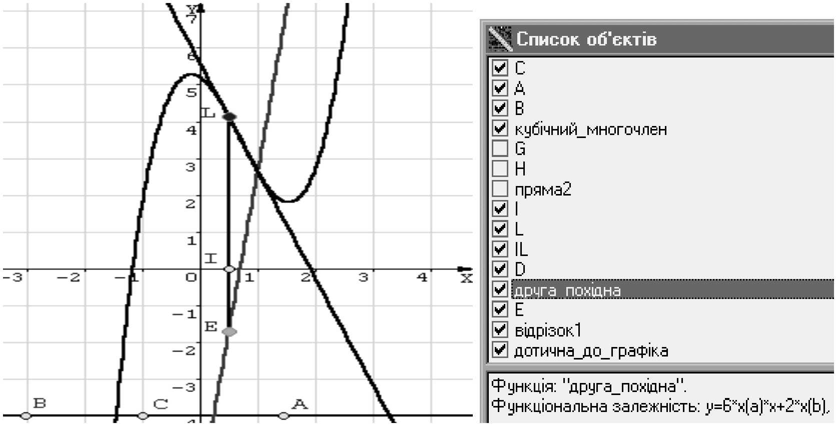


Рис. 3.94. Дослідження на опуклість графіка (GRAN-2D)

техніці. Розглянемо деякі приклади. Вивчаючи квадратичну функцію, доцільно розглянути приклади прискореного руху, адже саме таку функціональну залежність застосовують для визначення положення тіла відносно системи координат у будь-який момент часу. Параболами описують траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. Швидкість води в каналі на різних глибинах виражається формулою: $y = -62.5h^2 + 50h + 40$, де h – глибина шару води (в *м*), y – швидкість (в *м/хв*). Квадратичну функцію використовують для визначення залежності опору *y* сухої горизонтальної дороги з твердим покриттям від час руху автомобіля від його швидкості *x* руху [97,*12*]. Подамо функцію у форматі для GRAN1: *Y(X)=P1*X^2/720-P1*X/36+P1*, де *P1* – стала, що залежить від виду покриття.

Лінійна функція узагальнено описує низку зовнішньо відмінних, але внутрішньо ідентичних залежностей між явищами об'єктивної дійсності: між температурою нагрівання і довжиною стержня, між швидкістю і часом при рівноприскореному русі, між тиском і температурою газу при сталому об'ємі (закон Шарля) та ін. Швидкість γ поширення звуку в повітрі залежно від його температури можна визначити за формулою $\gamma = 331 + 0.6t$. Бажано повідомити школярам, що живу вагу коня визначають за формулою О.Маторіна *y=6x-620*, де *x* – обхват грудини у см, а калорійність молока – за формулою *y=M(114x+300)*, де *M* – кількість молока (в *кг*), *x* – відсоток жирності молока, що коливається в межах від 2% до 6%, *y* – калорійність молока (в ккал).

Вивчаючи обернену пропорційність, визначають кількість молока *y* (в *кг*), яка потрібна для одержання 1 *кг* масла. Залежність виражається формулою $y = {}^{88}\!/_{x}$, де *x* – відсоток жирності молока.

Добірки прикладних задач доцільно підготувати в ході впровадження навчальних проектів, а результати дослідження подати з використанням засобів ІКТ. Наприклад, створити мультимедійні презентації.

16. Цікаві дослідження можна виконати за допомогою ППЗ GRAN1 для показникової та логарифмічної функцій. При цьому надзвичайно важливо

виховувати в учнів потребу в самоосвіті. Тим учням, які профільно вивчають математику, доречно поставити питання: як можна використати комп'ютер, щоб краще підготуватися до іспиту з математики? Тоді метою застосування педагогічних програмних засобів буде і отримання нових знань, і удосконалення навичок самоконтролю тощо.

Розглянемо добірку завдань для вивчення властивостей логарифмічної функції. Враховуватимемо рекомендації, подані в посібниках [75], [122]. До тематичного оцінювання учень повинен знати означення, властивості логарифмів, графік логарифмічної функції, будувати графіки за допомогою перетворень, застосовувати властивості функції до розв'язування рівнянь та нерівностей. Перед створенням об'єкта *Функція* за допомогою GRAN1 необхідно зазначити тип залежності (явної *Y(x)* чи неявної *G(x,y)=0)* і послідовно виконати дії *Об'єкт створити* та *Графік побудувати*. На панелі введення даних виокремлено натуральні логарифми *ln(x),* десяткові *lg(x)* та логарифми з довільною допустимою основою *log(p1,x)*. В дужках на першому місці вказується основа, через кому підлогарифмічний вираз.

Для перегляду завдань, підготовлених до теми „*Логарифмічна функція*", рекомендуємо завантажити презентацію з однойменною назвою (рис. 3.95).

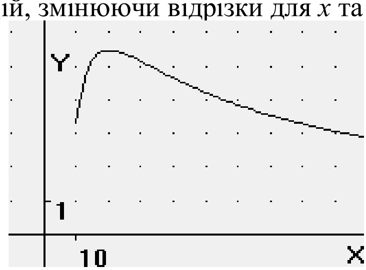
▪ Об'єм легенів людини ▪ Знайдіть функцію, обернену до показникової ▪ Виберіть графік логарифмічної ▪ Знайдіть число *e!* ▪ Порівняти зростання (спадання) показникової, степеневої, логарифмічної ▪ Елементарні перетворення графіків ▪ Властивості функцій ▪ Функції з модулями ▪ Найпростіші нерівності ▪ Знайти площу фігури	$y = \left\|\log_2(\|x\| - 3) - 1\right\|$ $y = \left\|\log_2\|x - 3\| - 1\right\|$ $\log_2(13 - x) \le 2x + 11$ $\log_{0.5}(2 - x^2 - y^2) \ge 0$ $\log_{\|y\| - x^2}(x^2 + y^2) \ge \log_{\|y\| - x^2} 4$ $ax^2 = \ln x$ $\ln x = ax$ $\log_{a+x}(ax - x^2) < \log_{a+x} x$ $\log_{1/x}(a - x) \le 1$ $\log_x(x - a) > 2$

Рис. 3.95. Зміст завдань компакт-диска до теми „Логарифмічна функція"

1. На етапі мотивації доцільно навести школярам приклади залежностей, які виражаються через логарифмічну функцію. За формулами, що містять логарифмічні функції, визначають інтенсивність звуку, повну вартість продукції, виготовленої на фабриці; їх використовують при визначенні сили землетрусу (показники шкали Ріхтера), для встановлення об'єму легенів людини $V(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини в роках (*xє[10;100]*) [97,12]. Графік функції *об'єму легенів людини* представлений на рис. 3.96. Для його побудови за допомогою GRAN1 на панелі введення даних набирають вираз *У =110*(ln(x)-2)/x*.

2. У посібнику [98,358] зазначається, що можна запропонувати учням

самостійно *знайти функцію, обернену до показникової* $y = a^x$, скориставшись відомим алгоритмом відшукання формули функції, оберненої до даної: встановити проміжки монотонності і з'ясувати, що показникова функція оборотна; розв'язати рівняння відносно змінної *x*; поміняти позначення незалежної і залежної змінних. За допомогою GRAN1 можна розглянути неявно задані функціональні залежності $y - P1\wedge x = 0$ і $x - P1\wedge y = 0$. Для параметра P1 зазначаємо межі зміни [*0.1;7*] та крок зміни *0,1*. Змінюємо основу, рухаючи за допомогою мишки чи клавіш управління курсором ←, → бігунок параметра, і досліджуємо зміну графіків функцій. Графіки даних функцій симетричні відносно прямої *y=x* (Рис.3.97). Доцільно продемонструвати учням зв'язок між областями визначення і областями значень обох функцій, змінюючи відрізки для *x* та *y*.



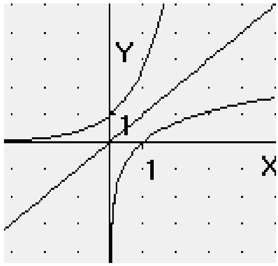


Рис. 3.96 Функція об'єму легенів Рис. 3.97.Від показникової до логарифмічної

В результаті дослідження школярі зможуть зробити висновки про залежність властивостей логарифмічної функції від основи логарифма і порівняти властивості логарифмічної функції з властивостями показникової. Графіки показникових функцій проходять через точку (*0;1*) і мають горизонтальну асимптоту *y=0*, а логарифмічних - через точку (*1;0*) і мають вертикальну асимптоту *x=0*. Для основи $a > 1$ отримаємо, що і показникова, і логарифмічна функції зростають, а для основи $0 < a < 1$ функції спадатимуть. Обов'язково потрібно звернути увагу на те, що трапиться при *P1=1* чи *P1<0*. Зазначимо, що розглянуті функції можна було б ввести і в явному вигляді, створивши об'єкти *Y(x)=(P1)^x* і *Y(x)=log(P1,x)*.

Завдяки проведеним дослідженням і обговоренню його результатів формуються такі прийоми розумової і навчальної діяльності учнів як порівняння, елементарний аналіз та узагальнення. У навчальному процесі узагальнення виступає у двоякій ролі: як мислительний прийом і як фактор розширення знань. Розрізняють *узагальнення від „конкретного до загального" (індуктивні) і від „загального до конкретного" (дедуктивні)*[1] (с.21). В даному дослідженні здійснюється емпіричне індуктивне узагальнення за схемою: порівняння властивостей логарифмічних функцій з різними основами з показниковою функцією з такими ж основами; виокремлення зага-

[1] Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах.– К.: Рад. школа, 1980. – 143 с

льних властивостей (абстрагування); перелік властивостей (узагальнення). Побіжно з цим формуються і прийоми теоретичного мислення.

3. На етапі актуалізації опорних знань можна запропонувати школярам *вибрати графік логарифмічної із кількох запропонованих*, користуючись графіком, усно розв'язати нескладні нерівності. Наприклад, для яких x виконується нерівність $\log_x 5 < \log_x 6$, $\log_2 5 > \log_2 x$? Для цього вчителю бажано завчасно підготувати файл з функціями, а в ході бесіди проставляти „галочки" і миттєво будувати відповідні графіки. Доцільно створити набір: $y = 1/x$, $y = sqrt(x)$ (квадратний корінь з x), показникові функції $y = \exp(x)$, $y = 2\wedge x$ та $y = (0.5)\wedge x$, логарифмічні $y = \ln(x)$, $y = \log(2, x)$, $y = \log(0.5, x)$. Користуючись координатною сіткою, зручніше визначати за графіком функції основу логарифма. При порівнянні графіків показникової та логарифмічної функцій додатково будуємо пряму $y = x$ (рис.3.97).

4. У сучасній науці широко використовуються натуральні логарифми, основою яких є число *e* (*e=2.718281828...*). Один із шляхів введення числа *e* полягає в тому, що будують дотичну до графіка показникової функції $y = a^x$ в точці *x=0* чи до графіка логарифмічної $y = \log_a x$ в точці *x=1* і визначають кут, який вона утворює з додатнім напрямом осі *Ox*. Основу, при якій тангенс рівний одиниці (кут 45°), позначають *e*. Завдання *визначення числа e* зручно виконати за допомогою GRAN1. З цією метою створюють об'єкти $y = P1\wedge x$ і $y = Log(P1, x)$ та зазначають межі зміни параметра *P1*, $P1 \in [2;3]$ і крок зміни *h=0,1*. Змінюємо основу і будуємо дотичні до графіків функцій у вказаних точках за допомогою послуги *Операції \ Похідна \ Дотична*. При цьому у вікні *Відповідь* отримуємо значення тангенса кута. Щоб визначити число *e* з більшою точністю, для *P1* зазначають межі зміни параметра $P1 \in [2.7;2.8]$ зменшують крок зміни параметра до *h=0,01*. Завершують дослідження висновками, що пов'язані з обчисленням похідної функції. Виходячи із загального означення похідної функції в точці, необхідно записати визначні (важливі) границі: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

5. За допомогою GRAN1 доцільно провести дослідження, які дозволять *порівняти швидкість зростання степеневої функції* $y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, *показникової та логарифмічної функцій* з основою, більшою одиниці, при $x \to +\infty$. З цією метою створюються об'єкти: *Y(x)=x^P2*; *Y(x)=(P1)^x*; *Y(x)=log(P3,x)*. Для кожного з параметрів задають область зміни і крок зміни: $P1 \in (1;7)$, $P2 \in (0{,}1;15)$, $P3 \in (1;7)$, *h=0,1*. Потреба у виконанні запропонованих досліджень викликана труднощами, які часто виникають у школярів при побудові графіків функцій. Наприклад, при поглибленому вивченні математики, таких, як $y = x^2 e^x$, $y = x \ln^{-2}(x)$, $y = (x \ln(x))^{-1}$. Для останньої функції найчастіше помилка допускається при обчисленні границі, коли x прямує до нуля справа. Підсумовуючи результати дослідження, школярі

здійснюють емпіричне узагальнення, яке сприятиме глибшому усвідомленню теоретичного матеріалу, пов'язаному з обчисленнями границі функції, з відшуканням горизонтальних та вертикальних асимптот графіків.

6. Ефективно застосувати ППЗ для *побудови графіків за допомогою елементарних перетворень,* для графічного розв'язування рівнянь та нерівностей, в тому числі з модулями чи з параметрами. Повторюючи перетворення графіків функцій – додавання числа до функції, числа до аргументу; множення функції на число, аргументу на число; модуль функції чи модуль аргументу, виконуємо побудови графіків логарифмічних функцій з основою *P1*: 1) *y=Log(p1,X-p2)*; 2) *y=Log(p1,X)+p3*; 3) *y=p4*Log(p1,X)*; 4) y*=Log(p1,p5*X)*; 5) *y=Abs(Log(P1,X));* 6) *y=Log(p1,Abs(X))*. Бажано одночасно здійснювати і деякі додаткові побудови. Наприклад, асимптоти графіків функцій. Для даного прикладу необхідно створити об'єкт неявного типу задання за формулою *0=X-P2*.

Розглянемо, як можна подати з використанням GRAN1 *побудови графіків функцій, що містять модулі*: $y=\left|\log_2(|x|-3)-1\right|$, $y=\left|\log_2|x-3|-1\right|$.

Учні найчастіше допускають помилки при записуванні ланцюжка перетворень, оскільки плутають, що раніше потрібно будувати $y=\log_2(x-3)$ чи $y=\log_2|x|$ і для якої з функцій? Запропонуємо для аналізу сім ланцюжків для побудови графіка першої функції і виберемо з них правильні. Для решти ланцюжків необхідно пояснити, які саме кроки здійснити неможливо.

Для функції $y_5=\left|\log_2(|x|-3)-1\right|$ проаналізуємо варіанти кроків побудови:

1) $y_1=\log_2 x$; $y_2=\log_2(x-3)$; $y_3=\log_2(x-3)-1$, $y_4=\left|\log_2(x-3)-1\right|$, y_5.

2) y_1; $y_2=\log_2(x-3)$; $y_3=\log_2(|x|-3)$, $y_4=\log_2(|x|-3)-1$.

3) y_1, $y_2=\log_2 x-1$, $y_3=\log_2(x-3)-1$, $y_4=\left|\log_2(x-3)-1\right|$.

4) y_1, $y_2=\log_2 x-1$, $y_3=\log_2(x-3)-1$, $y_4=\log_2(|x|-3)-1$.

5) y_1, $y_2=\left|\log_2 x\right|$, $y_3=\left|\log_2 x-1\right|$, $y_4=\left|\log_2(x-3)-1\right|$, y_5.

6) y_1, $y_2=\log_2|x|$, $y_3=\log_2(|x|-3)$, $y_4=\log_2(|x|-3)-1$, y_5.

7) y_1, $y_2=\log_2|x|$, $y_3=\log_2|x|-1$, $y_4=\log_2(|x|-3)-1$, y_5.

Обговорюємо з школярами, чому в 5-му і 6-му варіантах не можна здійснити перехід 2-3, а в 7-му перехід 3 - 4.

Власне побудова за одним з ланцюжків з коментуванням кожного з наступних кроків може бути здійснена у формі рейтингової самостійної роботи з самоперевіркою. Як одна з модифікацій - освітній маршрут у тестовій формі. На кожному з кроків побудови потрібно обирати правильний результат з кількох запропонованих. Для перевірки можна використовувати завчасно підготовлений файл з набором функцій для кожного кроку або ж виконувати побудови безпосередньо на уроці. Нема потреби щоразу набирати формулу спочатку. Іноді швидше виправити одну з попередніх формул, натиснувши вказівник у рядку введення формули. Для вибраного 1-го ланцюжка створюємо об’єкти: 1) $y = \log(2, x)$, 2) $y = \log(2, x-3)$, 3) $y = \log(2, x-3) - 1$, 4) $y = ABS(\log(2, x-3) - 1)$, 5) $y = ABS(\log(2, ABS(x) - 3) - 1)$.

Крок 1. Вибрати графік функції $y_2 = \log_2(x-3)$ із запропонованих (рис.3.98).

Крок 2. Відзначити графік $y_3 = \log_2(x-3) - 1$ на рис.3.99.

Крок 3. Вибрати графік функції $y_4 = \left|\log_2(x-3) - 1\right|$ (рис. 3.100).

Крок 4. Вибрати графік функції $y = \left|\log_2(|x| - 3) - 1\right|$ з рис.3.101 чи рис.3.102.

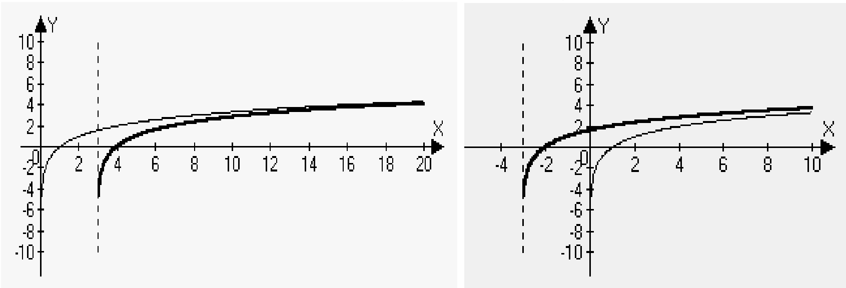


Рис. 3.98. Вибрати рисунок з графіком функції $y_2 = \log_2(x-3)$

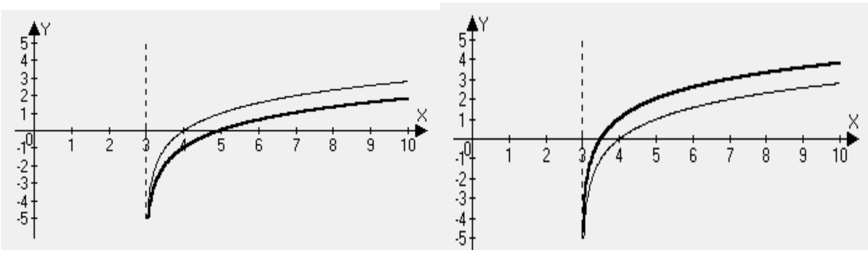


Рис.3.99. Вибрати рисунок з графіком функції $y_3 = \log_2(x-3) - 1$

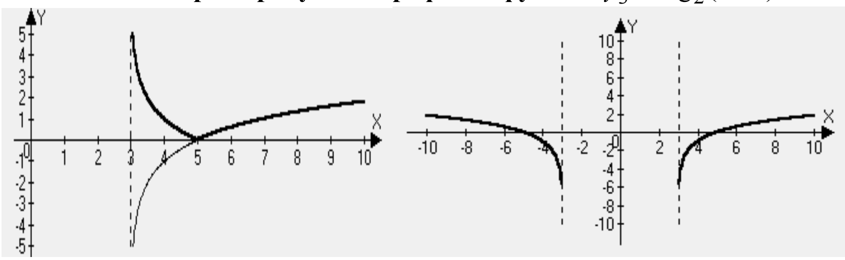


Рис. 3.100 Вибрати рисунок з графіком функції $y_4 = \left|\log_2(x-3) - 1\right|$

Користуючись побудованим графіком (рис.3.101), проаналізуємо, скільки розв’язків має рівняння $\left|\log_2(|x| - 3) - 1\right| = a$ залежно від параметра? Досліджуємо методом перерізів. Для цього проводимо прямі *y=const* (*У=Р1*) і встановлюємо кількість точок перетину з графіком: якщо *a<0* нема розв’язків, для *a = 0* два, якщо *a>0*, то чотири розв’язки.

Для функції $y = \left|\log_2|x-3| - 1\right|$ складаємо ланцюжок перетворення графіка (рис.3.102): 1) $y_1 = \log_2 x$, 2) $y_2 = \log_2|x|$, 3) $y_3 = \log_2|x-3|$, 4) $y_4 = \log_2|x-3|-1$, 5) $y = \left|\log_2|x-3|-1\right|$. Пропонуємо учням порівняти послідовність побудов для даної та розглянутої вище функцій і узагальнити алгоритми побудови, щоб в подальшому уникнути помилок, пов'язаних зі складанням ланцюжка перетворень. Для самостійної роботи чи для домашнього завдання можна рекомендувати розглянути функції $y = \left|2\log_3(|x|+3)-1\right|$ або $y = \left|\log_{0.5}|x+2|\right|$.

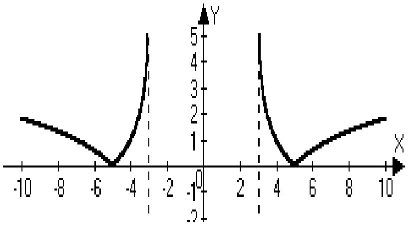


Рис. 3.101 $y = \left|\log_2(|x|-3)-1\right|$

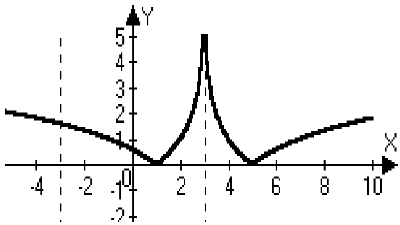


Рис. 3.102. $y = \left|\log_2|x-3|-1\right|$

На рис. 3.103, що є копією екрана презентації „Логарифмічна функція", зліва розташовані піктограми, при натискуванні яких можна перейти до переліку завдань; до текстового файла з детальними поясненнями до кожного завдання; відкрити ППЗ, побудувати систему координат. Два нижні значки вказують на наявність на слайді формул чи тексту з ефектами анімації. Формули ланцюжка перетворень, підказка до питання про кількість розв'язків рівняння з параметром, запис функції у форматі ППЗ та малюнок з'являються на екрані послідовно після натискування довільної клавіші. З малюнка, на якому зображені графіки, здійснено гіперпосилання на відповідні файли ППЗ з введеними до даного завдання функціями.

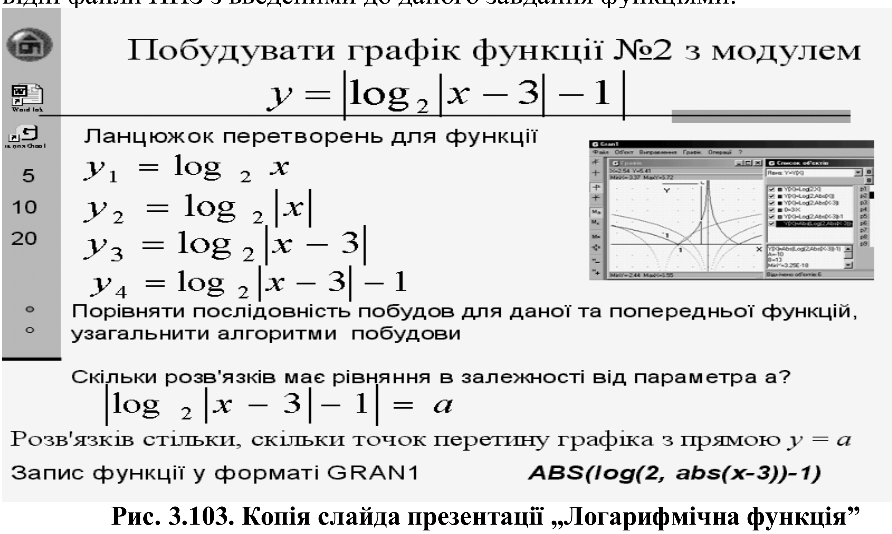


Рис. 3.103. Копія слайда презентації „Логарифмічна функція"

7. Користуючись програмою GRAN1, зручно *провести узагальнююче повторення властивостей функції.* Для цього, наприклад, можна подати розглянуті вище функції у вигляді з параметрами $y = \log(P1, x - P2) - P3$; $y = ABS(\log(P1, ABS(x) - P2) - P3)$; $y = ABS(\log(P1, ABS(x - P2)) - P3)$. Відстеживши зміни графіків залежно від параметрів *P1, P2, P3,* можна систематизувати знання учнів про область визначення, неперервність та точки розриву, область значень, нулі функції, проміжки знакосталості, точки екстремумів та екстремуми, асимптоти графіків.

8. Розглянемо, як можна застосувати ППЗ GRAN1 для *розв'язування нерівностей з однією змінною.* Спочатку необхідно проаналізувати з учнями властивості логарифмічної функції залежно від основи логарифма. Для цього потрібно створити об'єкт $y = \log(P1, x)$, побудувати графік і змінювати параметр з кроком 0,1. Щоб в ході евристичної бесіди з учнями складати алгоритми розв'язування найпростіших нестрогих нерівностей $\log_a x \le b$, $\log_a x \ge b$, $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$, доцільно побудувати горизонтальну пряму за формулою *y=P2* та використати послугу *Операції. Нерівність.* Множина точок, що задовольняє нерівності $\log(P1, x) > P2$ ($\log(P1, x) < P2$), за програмою виділяється контрастною лінією на осі абсцис, а у вікні *Відповідь* записуються розв'язки нерівності для зафіксованих значень параметра. В аналітичних викладках особливу увагу слід приділити питанню рівносильності перетворення нерівності.

9. Розглянемо нерівність, яку традиційно розв'язують графічним способом [11,*116*]. *Знайти, скільки цілих розв'язків має нерівність* $\log_2(13 - x) \le 2x + 11$ **?**

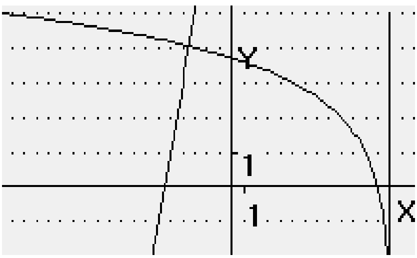


Рис.3.104

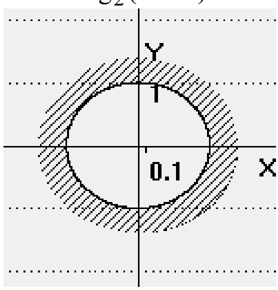


Рис.3.105

Будуємо графіки функцій *y=log₂(13-x)* і *y=2x+11* і записуємо у відповідь абсциси тих точок, для яких графік першої функції розташований нижче графіка другої (рис.3.104). Оскільки мова йде лише про цілі розв'язки нерівності, то отримаємо, що *x* може набувати цілих значень від *-3* до *12* включно. Крім розглянутих побудов графіків, можна використати послугу *Операції. Нерівність* для нерівності *log(2,13-x)-2x≤11.* У вікні *Відповідь* отримаємо кінці відкритого інтервалу *-3,48; 13*; а на осі абсцис буде побудований контрастною лінією інтервал. У відповідь згідно з умовою подаємо цілі розв'язки з інтервалу.

10. Розглянемо *побудови геометричних місць точок, координати яких (x,y) задовольняють задані рівняння чи нерівності.* Наприклад, для нерівно-

сті $\log_{0.5}(2-x^2-y^2)\geq 0$ створюємо об'єкт неявного типу задання *G(x,y)*=0 $0=\log(P2,P1-x\hat{}2-y\hat{}2)$ і використовуємо послугу *Розв'язати нерівність G(x,y)>0*. Змінюючи основу логарифмування *P2* і параметр *P1*, можна з'ясувати, як змінюється ГМТ. При розв'язуванні вручну для *P2=0.5*, *P1=2* перейдемо до системи нерівностей, що задають напіввідкрите кільце: $1\leq x^2+y^2<2$ (Рис. 3.105).

11. Багато помилок допускають школярі при розв'язуванні логарифмічних нерівностей, що мають змінну основу. Розв'язуванню таких нерівностей методом інтервалів у підручнику приділено значну увагу [75,*387*], тому застосовуючи педагогічні програмні засоби, учні зможуть удосконалити навички самоконтролю, розвивати таку позитивну рису особистості, як пізнавальну самостійність.

Нерівність $\log_{|y|-x^2}(x^2+y^2)\geq\log_{|y|-x^2}4$, що має змінну основу, рівносильна сукупності двох систем [11,*125*]:

$$\begin{cases}|y|-x^2>1,\\ x^2+y^2\geq 4,\end{cases}\quad \text{і}\quad \begin{cases}0<|y|-x^2<1,\\ 0<x^2+y^2\leq 4.\end{cases}$$

Для побудови за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт неявного типу задання *0=G(x,y)*: *0=*$\log(ABS(y)-x\hat{}2,(x\hat{}2+y\hat{}2)/4)$ і використовуємо послугу *Операції. Нерівність. G(x,y)>0* (рис. 3.106). Якщо одночасно введено кілька функцій, то світловий курсор у списку об'єктів має бути встановленим на функцію, яка розглядається. Крім того, потрібно зняти відмітки з залежностей, які не беруть участі в операції. Виконана за допомогою ППЗ побудова не є цілком правильною, бо на рисунку не відображено, що точка (0; 0) виколота, а параболи не включаються в ГМТ.

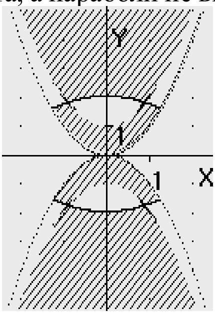


Рис. 3.106. Заштриховано розв'язки нерівності

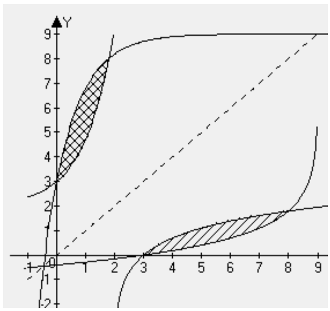


Рис. 3.107. Знайти площу

14. Наведемо приклад завдання на *обчислення площі фігури, обмеженої графіками функцій* $y=\ln(x-2)$, $y=\ln\frac{6}{9-x}$ [11,*138*]. Щоб спростити обчислення, у посібнику рекомендується розв'язати завдання нетрадиційно – графіки даних функцій замінити графіками обернених $y=e^x+2$ і $y=9-6e^{-x}$. Площа при цьому не зміниться, бо початкову фігуру замінює-

мо іншою, симетричною їй відносно прямої $y=x$. Таке перетворення полегшує обчислення, оскільки замість використання методу інтегрування частинами, обчислення вручну зведеться до застосування методу розкладання. Абсциси точок перетину графіків знаходимо з рівняння $e^{x}+2=9-6e^{-x}$.

Тоді $S=\int\limits_{0}^{\ln 6}(9-6e^{-x}-e^{x}-2)dx=(7x+6e^{-x}-e^{x})\Big|_{0}^{\ln 6}=7\ln 6-10.$

Для виконання наближених обчислень за допомогою ППЗ GRAN1 чи Advanced Grapher створюємо об’єкти *y= ln(x-2)* і *y=ln(6/(9-x))*, будуємо графіки функцій. Обернені функції подають формулами: y=*exp(x)+2* та y=*9-6*exp(-x)*. Щоб знайти межу інтегрування, встановлюємо курсор у точку перетину графіків і фіксуємо значення абсциси. Для обчислення площі заштрихованої фігури за допомогою GRAN1 двічі застосовуємо послугу *Обчислення \ Інтегрування* – від площі фігури під графіком верхньої функції віднімаємо площу фігури під графіком нижньої функції. За допомогою Advanced Grapher (Рис 3.107) можна за одну дію обчислити площу фігури, обмеженої зверху і знизу графіками неперервних функцій.

12. Робота з модифікованим ППЗ GRAN1 відкриває нові можливості для удосконалення умінь і навичок розв’язування широкого кола *задач з параметрами*. Побудови за допомогою ППЗ ефективно виконувати як у координатній площині (*x,y*), так і в площині (*x,a*). Власне, всі наведені вище приклади побудов й були побудовами до таких задач у площині *(x,y)*. Детальніше питання, пов’язані з розв’язуванням задач з параметрами, розглянемо у наступному пункті даного розділу.

Отже, використовуючи розглянуті педагогічні програмні засоби, учні можуть проводити дослідження, самостійно формулювати властивості функцій, висувати гіпотези щодо ГМТ, заданих рівняннями чи нерівностями. Проведені дослідження дають підставити для того, щоб стверджувати, що ІКТН математики сприяють розвитку таких навичок мислительної діяльності учнів, як аналіз, синтез, систематизація, узагальнення; удосконалюють навички самоконтролю та активізують дію мотиваційних чинників у створенні позитивного ставлення до навчання; стимулюють пошук нестандартних підходів до розв’язування задач, а тому розвивають особистість школяра.

Контрольні запитання і завдання

1. Проаналізувати можливості застосовування ППЗ GRAN при вивченні функціональних залежностей з метою розвитку інтелектуально-евристичних здібностей учнів, здібностей генерувати ідеї, висувати гіпотези в умовах обмежених даних, прогнозувати розв'язування творчих задач, інтелектуально вбачати і висувати оригінальні підходи, методи.

2. Оцінити можливості даного засобу для самоперевірки правильності результатів розв’язування задачі, удосконалення уміння знаходити власні помилки та причини їх появи.

3. Дібрати для певного уроку алгебри завдання, для розв’язування яких доцільно використовувати ППЗ GRAN.

4. Знайти наближені розв'язки рівнянь: $\dfrac{1}{\log_{0.5}(x+1)}=2$; $\log_2(x)$ - $\sin(x)=0$;

5. Знайти наближені розв'язки систем рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+3y^2=15, \\ \log_2(x-3)-y^2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(xy)=3, \\ \sin|x|=1/3; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(xy)=3, \\ 2^{x+y}=1/3; \end{cases}$$

6. Знайти множину розв'язків систем нерівностей:

а) $\begin{cases} x(1-x)\ge -3, \\ \log_{1/2}(x)\log_2(x)\ge -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2\le 16, \\ \mathrm{abs}(x)+\mathrm{abs}(y)\le 5. \end{cases}$

7. Скласти за допомогою ППЗ рівняння дотичної до графіка функції $y = \log_2(x) - \cos(x/20)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

8. Побудувати графіки функцій $y=\left|2\log_3(|x|+3)-1\right|$, $y=\left|\log_{0.5}|x+2|\right|$. Записати властивості функцій.

3.8. Формування пізнавальних якостей учнів у навчанні розв’язуванню задач з параметрами графічними прийомами

Через систему вправ, що пропонуються школярам при поглибленому вивченні математики, червоною ниткою проходять задачі з параметрами – дослідницькі мініатюри, які сприяють розвитку інтелектуально-логічних здібностей учня та формують його математичну культуру. Оскільки задачі вимагають ретельного аналізу та всебічного дослідження умов, то їх розв’язування відкриває перед школярами значну кількість евристичних прийомів загального характеру, які цінні для математичного розвитку особистості і застосовні в дослідженнях чи в будь-якому іншому математичному матеріалі. Задачі з параметрами мають значну діагностичну та прогностичну цінність, тому часто трапляються у збірнику для державної підсумкової атестації з математики [35], в завданнях незалежного зовнішнього тестування, на олімпіадах різних рівнів, на вступних іспитах до вищих навчальних закладів. Інтерес до зазначеного класу задач не випадковий - теоретичне вивчення багатьох фізичних процесів приводить до більш чи менш складних рівнянь та нерівностей, що містять параметри, і необхідною частиною їх розв’язування є дослідження характеру процесу залежно від значень параметра. Згідно з програмою для поглибленого вивчення математики тема „Задачі з параметрами” належить до варіативної частини, а самими учнями часто визначається як одна з найскладніших для засвоєння.

Використовуючи ППЗ GRAN, учні можуть досліджувати функціональні залежності з параметрами та унаочнювати розв’язки, що зробить завдання доступнішим школярам, а в цілому позитивно вплине на формування пізнавальних якостей учнів, на становлення пізнавальної самостійності школяра.

Розв’язуванню зазначених задач присвячені окремі розділи посібників [20], [66], [75], [91], [122-123]. Чимала кількість публікацій у журналі „Математика в школі” із зазначеної теми переконливо свідчить про те, що проблема навчання їх розв’язування залишається актуальною. Так, у посібнику [91] розглядаються окремо квадратні рівняння, раціональні рівняння та нерівності, алгебраїчні рівняння вищих степенів, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння чи нерівності, системи рівнянь та нерівностей. Систематизація задач у посібнику [20] проведена не за виглядом функцій, що входять в рівняння чи нерівності, а за особливостями математичної діяльності, необхідної для розв'язування задачі. Перевага такої систематизації дає змогу охопити широкий клас задач. Автори виокремлюють як аналітичні, так і графічні прийоми розв'язування основних типів задач, широко використовують в дослідженнях такі властивості функцій, як область визначення, монотонність, парність, періодичність, оборотність, наявність точок екстремумів тощо. Графічні прийоми передбачають побудови образів як на координатній площині *(x,y),* так і на площині *(x,a)*. В значній кількості задач застосовуються методи паралельного перенесення, повороту, гомотетії, стискування до прямої. Для розв'язування інших суттєво використовується теорія квадратичної функції, в якій важливу роль відіграють поняття старшого коефіцієнта, дискримінанта відповідного квадратного тричлена, абсциси вершини параболи. Цілий ряд задач вимагає застосування похідної чи таких нестандартних прийомів пошуку необхідних умов, як використання симетрії аналітичних виразів, „вигідних точок" тощо.

Для аналізу функціональних залежностей з параметрами та візуалізації отриманих результатів зручно застосовувати як GRAN1, так і GRAN-2D. Параметри у функціональні залежності для дослідження за допомогою GRAN-2D вводять як абсциси чи ординати деяких точок, що можуть рухатися вздовж певних кривих, змінюватися в певних межах. В комп'ютерних експериментах для задач з параметрами використовуються графічні прийоми розв'язування задач.

Параметр має двоїсту природу – з одного боку це фіксоване, але невідоме число, а з іншого – змінна, оскільки розглядаємо задачу для всіх допустимих значень параметра. Записати кожне рівняння нескінченної множини неможливо, тому намагаються виділити "особливі" значення параметра, їх називають контрольними, при яких і при переході через які відбувається якісна зміна рівняння. Під час розв'язування отримуємо різні "розгалуження". Параметр "керує" пошуком значень змінної. Поділ множини допустимих значень параметра на підмножини залежно від контрольних значень параметра викликає у багатьох школярів труднощі. Двоїста природа параметра обумовлює два основні методи розв'язування – аналітичний та графічний. Щоб не допустити помилок у ході міркувань, по можливості їх поєднують. Графічний метод перетворює процес розв'язування з формально-арифметичного в наочно-геометричний і сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Для рівнянь та нерівностей з параметрами можна сформулювати деякі загальні положення, дотримання яких дає певні орієнтири в процесі їх розв'язування аналітичним методом [122,98]: встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів; виражають змінну через параметри; для кожного допустимого значення параметра знаходять множину всіх коренів даного рівняння (розв'язків нерівності); досліджують особливі значення, при яких розв'язки існують, але не виражаються виведеними формулами.

Залежно від того, яка роль параметру відводиться в задачі (нерівноправна чи рівноправна зі змінною), можна відповідно виділити два основних графічних прийоми - побудова графічного образу на координатній площині *(x;y)* або на площині *(x;a)*. У першому випадку розглядають параметричну сім'ю кривих, що залежить від параметра а. Змінюючи параметр, відстежують зміни графіків, фіксують контрольні значення параметрів, розбивають множину допустимих значень параметра на підмножини і розв'язують для кожної з утворених підмножин. Відмова від традиційного вибору букв *x* і *y* для позначення осей, визначає другий прийом - один з найефективніших для розв'язування задач з параметрами. Під час побудови графічного образу на площині *(x,a)* згідно з [20] встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів; виражають параметр *a* як функцію від *x*; перетинають отриманий графік прямими, перпендикулярними до параметричної осі і записують потрібні результати. При використанні GRAN1 виражати параметр явно не потрібно. Досить вибрати тип *Функція задана неявно.* Крім того, щоб заштрихувати ГМТ на площині, функцію потрібно подати як неявну *y-f(x)=0.*

Водночас автори посібника зауважують [20,146], що при використанні графічного прийому в значній мірі втрачається головна дидактична цінність задач з параметрами як моделі мініатюрного дослідження, проте наведені міркування адресовані здебільшого вчителям і є цілком виправданими, наприклад, для абітурієнтів. Оскільки комп'ютерні експерименти за допомогою GRAN базуються саме на графічних прийомах, то ратуючи за комп'ютерну підтримку в процесі навчання, вважаємо за доцільне виокремити такі позиції, як наочність, що робить задачі з параметрами більш доступними школярам, сприяння розвитку мислительних прийомів, навичок самоконтролю та дослідницьких навичок.

1. Передбачимо за допомогою ППЗ GRAN1 *кількість розгалужень у рівнянні* $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$ *та число розв'язків для кожного значення параметра а.* Виконаємо побудову на площині *(x,a)* (рис.3.108). Вздовж осі ординат відкладемо значення параметра і позначимо його через *y*. Зазначивши, що функціональна залежність *G(x,y)=0* неявно виражена, використовуємо послугу *Об'єкт створити*. На панелі введення даних набираємо вираз $0 = x\verb|^|4-2*y*x\verb|^|2-x+y\verb|^|2-y$, зазначаємо межі зміни *x* та *y* і використовуємо послугу *Графік побудувати*. Проводимо прямі *y=const*, перпендикулярні до осі параметра. Для цього створюємо об'єкт явного типу задання *y=P1*. Змінюючи положення бігунка параметра, рухаємо горизонтальну пряму вниз чи вгору. Скільки точок перетину прямої з графіком функції отримаємо, стільки розв'язків матиме рівняння.

Аналізуючи графічний образ, знаходимо, що при *a<–0,25* дійсних коренів рівняння не має; якщо *a= –0,25* – то один корінь; для *–0,25<a≤0,75* – два корені; при *a>0,75* – чотири. Самі ж розв'язки за допомогою GRAN1 можна знайти лише наближено.

Оскільки графічний образ рівняння складається з двох парабол, то можна зробити висновок, що многочлен $x^4-2ax^2-x+a^2-a$ розкладається на множники (два квадратні тричлени). Розкладаємо його на множники, розв'язуючи дане рівняння через параметр *a*:

$a^2+a(-2x^2-1)+(x^4-x)=0,\ a_1=x^2+x+1;\ a_2=x^2-x$

$x^2+x+1-a=0;\ D_1=-3+4a;\ \ x^2-x-a=0;\ D_2=1+4a$

1) якщо $a \in (-\infty; -0.25)$, то $D_1<0$, $D_2<0$, то рівняння не має коренів;

2) якщо $a \in [-0.25; 0.75]$, $D_1<0$, $D_2 \geq 0$, то $x_{1,2} = 0.5(1 \pm \sqrt{1+4a})$;

3) якщо $a \in (0.75; \ +\infty)$, $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, то

$$x_{1,2} = 0.5(1 \pm \sqrt{1+4a}), \ x_{3,4} = 0.5(-1 \pm \sqrt{-3+4a}).$$

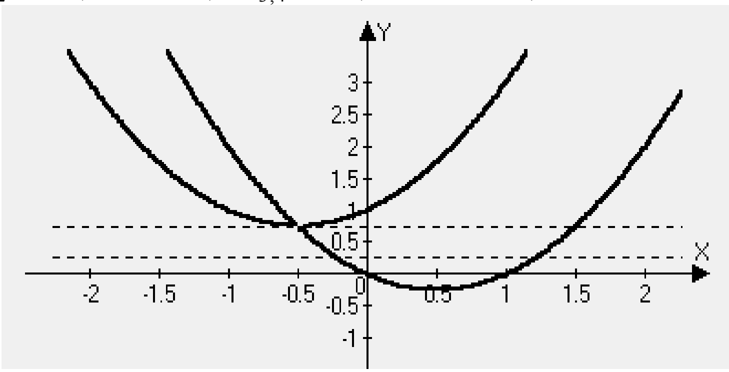


Рис. 3.108. Скільки розв'язків має рівняння? Система координат *(x, a)*

2. *Щоб знайти при яких значеннях параметра a рівняння* $x^2-2ax+a+1=0$ *і* $x^2+ax-a-1=0$ *мають хоча б один спільний корінь*, традиційно користуються аналітичним методом. Нехай $x = \alpha$ – спільний корінь даних рівнянь. Матимуть місце тотожності: $\alpha^2 - 2a\alpha + a + 1 = 0$, $\alpha^2 + a\alpha - a - 1 = 0$. Віднімемо від першої рівності другу: $-3a\alpha + 2a + 2 = 0$; $3a\alpha = 2a + 2$; $\alpha = (2a + 2)/(3a)$. Якщо $a=0$, то рівняння дійсних спільних коренів не мають. Тому $3a \neq 0$. Підставляємо знайдене значення α в одне з рівнянь, наприклад, у перше:

$$\left(\frac{2a+2}{3a}\right)^2 - 2a\frac{2a+2}{3a} + a + 1 = 0 \qquad (a-2)(3a^2+5a+2) = 0.$$

$$3a^3 - a^2 - 8a - 4 = 0$$

Отримаємо розв'язки: $a_1 = -1; a_2 = -\dfrac{2}{3}; a_3 = 2$. Оскільки значення параметра *a* знайдено припускаючи, що дані рівняння мають спільний корінь, то необхідно виконати перевірку.

Розглянемо, які дані можна отримати за допомогою GRAN1. Для цього побудуємо в системі координат *(x,a)* (рис.3.109) графічні образи рівнянь, позначивши параметр через *y*. Створюємо за допомогою GRAN1 об'єкти неявного типу задання *0=G(x,y)*: $0 = x\hat{}2 - 2*y*x + y + 1$; $0 = x\hat{}2 + y*x - y - 1$. Використовуючи послугу *Координати точки*, знаходимо ординати точок перетину графіків: –1; 2; ≈–0,67. При таких значеннях параметра рівняння мають спільний корінь. Графічним образом другого рівняння є прямі *x=1* та *x= -a-1*. Користуючись графіками, учень має можливість з'ясувати, наприклад, при якому значенні параметра спільний корінь рівний одиниці, скільки розв'язків може мати кожне з рівнянь?

З іншого боку, за допомогою GRAN1 можна побудувати параболи за формулами $y=x^2–2ax+a+1$ і $y=x^2+ax–a–1$, створивши для цього об'єкти явного типу задання $y = x\char`^2 - 2 * P1 * x + P1 + 1$; $y = x\char`^2 + P1 * x - P1 - 1$ (Рис.3.110) і проводити дослідження в системі координат *(x,y)*. Змінюючи значення параметра *P1*, рухаємо побудовані параболи і встановлюємо, при яких значеннях параметра графіки перетинаються на осі абсцис. Таким чином встановлюємо, наявність спільних нулів функцій.

Рис. 3.109. Координати *(x, a)*

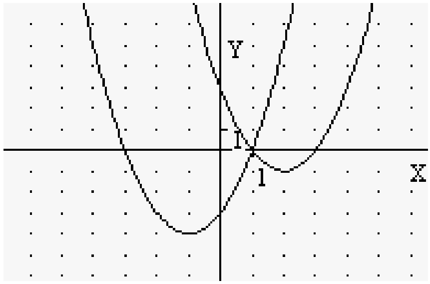


Рис. 3.110. Координати *(x, y)*

Для відшукання розв'язків нерівностей *f(x)≥0, f(x)>0, f(x)<0, f(x)≤0,* спочатку будують графік рівняння *f(x)=0.* Для цього створюють об'єкти явного *y=f(x)* чи неявного виду задання *G(x,y)=0,* а потім використовують послугу *Розв'язати нерівність.*

3. Щоб з'ясувати, *скільки розгалужень отримаємо при розв'язуванні нерівності* $x^2(4-a) > x^2(x^2 - 2a) + 4a$ *залежно від параметра а,* створимо об'єкт $x\char`^2 * (4 - Y) - x\char`^2 * (x\char`^2 - 2 * Y) - 4 * Y = 0$.

Заштриховане з використанням GRAN1 ГМТ (рис.3.111), що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. Абсциси спільних точок дадуть розв'язки нерівності.

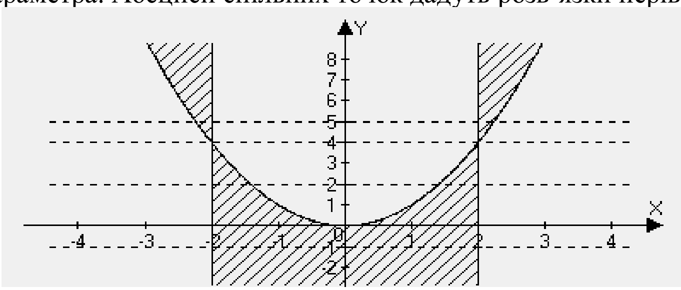


Рис.3.111. ГМТ, що задовольняють нерівність. Координати *(x, a)*

Записуючи їх, враховуємо, що нерівність строга:

якщо *a<0,* то *x є (-2;2);* якщо *0≤ a<4,* то $x \in (-2;-\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a};2)$;

для *a=4* нема розв'язків; при *a>4* $x \in (-\sqrt{a};-2) \cup (2;\sqrt{a})$.

На основі графічного образу бажано запропонувати учням самостійно скласти нові задачі. Наприклад, в останній задачі дослідити, при яких значеннях параметра множині розв'язків належить відрізок *[3;4]*; коли отримаємо розв'язки, що містять не менше шести цілих чисел, три цілих числа та інші?[*]

4. За допомогою GRAN1 учні встановлять, що *при значеннях параметра* $a \ge 1$ *нерівність* $a4^x - 4 \cdot 2^x + 3a + 1 \ge 0$ *виконується для всіх дійсних x* (рис. 3.112). Для дослідження створюють об'єкт типу *G(x,y)* за формулою $0 = y*4^x - 4*2^x + 3*y + 1$ (параметр позначили через *y*) і використовують послугу *Розв'язати нерівність G(x,y)>0.* Побудову виконано в координатній площині *(x,a).* Заштриховане з використанням GRAN1 ГМТ, що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. При різних значеннях *a* прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Абсциси спільних точок дадуть розв'язки нерівності.

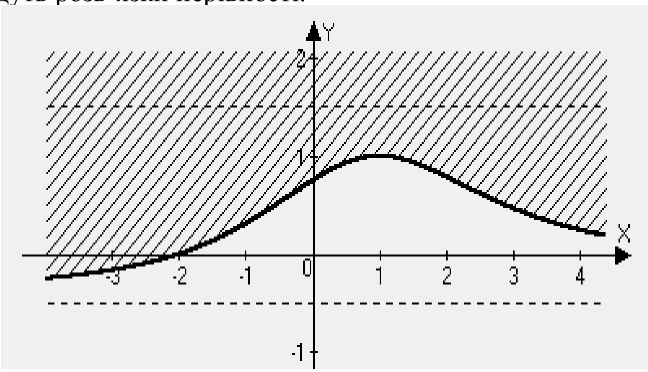


Рис.3.112. ГМТ побудоване в координатах (x, a)

Важливо спонукати школярів створити власні задачі за побудованим ГМТ, поставити запитання та відповісти на них. Наприклад, дослідити, коли нерівність не має розв'язків; розв'язки записуються через об'єднання двох інтервалів; при яких значеннях параметра множині розв'язків належить відрізок *[-1;2]*; коли отримаємо розв'язки, що містять цілі числа більші шести та інші? Вміння аналізувати графічні образи допоможе в подальшому швидше шукати ефективні методи розв'язування задачі. Крім того, завдяки складанню чим більшої кількості задач за певний час на основі одного і того ж ГМТ, розвиватимемо таку компоненту дивергентного мислення як продуктивність.

Якщо нерівність переписати у вигляді $a(4^x+3) \ge 4 \cdot 2^x - 1$, і врахувати, що $4^x+3>0$, то обґрунтування зведеться до знаходження найбільшого значення функції $f(x) = (4 \cdot 2^x - 1)/(4^x + 3)$. Виконують заміну $2^x = t$ і досліджують функцію $g(t) = (4 \cdot t - 1)/(t^2 + 3)$ за допомогою похідної для додатних *t*. $g'(t) = -4(t-2)(t+1.5)/(t^2+3)^2$. З урахуванням $t>0$, отримаємо, що $g'(t) = 0$ при $t=2$. Для $t>2$ $g'(t) < 0$ і функція спадає, при $t<2$ $g'(t) > 0$ – функція зростає. В точці $t=2$ функція g(*t*) досягає свого найбільшого значення, тоді функція

[*] Хочеш бути розумним, навчися правильно ставити запитання, уважно слухати, спокійно відповідати і промовчати, коли більше нічого сказати. *Й. К. Лафатер*

f(x) досягає свого найбільшого значення в точці $x=1$. Знаходимо, що $f(1)=1$. Отже, дана нерівність виконується для всіх $a\geq 1$. Доцільно звернути увагу школярів на те, що на рис. 3.112 побудовано графік функції *f(x)* та заштриховане ГМТ, заданих нерівністю $y\geq f(x)$. Оскільки встановлено проміжки монотонності для функції *g(x)*, точки екстремумів та екстремуми, то враховуючи властивості функції $y=2^x$, несkладно вручну побудувати ескіз графіка функції *f(x)*. Для побудови необхідно обчислити границю функції *f(x)* на нескінченності: при $x\to-\infty$ отримаємо, що $f(x)\to -1/3$; для $x\to+\infty$ маємо, що $f(x)\to 0$.

Щоб розвивати гнучкість мислення школяра, корисно розв'язувати одну і ту ж задачу різними методами. Так, попередню нерівність заміною змінної $t=2^x$ можна звести до квадратної нерівності $at^2-4t+3a+1\geq 0$, де $t>0$ і досліджувати квадратний тричлен $at^2-4t+3a+1$. Якщо застосовувати GRAN1, то необхідно створити об'єкт явного типу задання за формулою *y=P1*x^2-4*x+3*P1+1* і побудувати графік на координатній площині (*x,y*). У формулах для GRAN1 можна використовувати лише змінні *x, y* і параметри *p* з індексами. Змінюємо значення параметра рухаючи бігунок, що розташований під списком об'єктів (функцій). У ході дослідження школярі зможуть зафіксувати чотири різних положення параболи, що є важливими для відшукання розв'язків (Рис. 3.113). Очевидно, що від'ємні *a* умову нерівності не задовольняють, бо в цьому разі над віссю абсцис може бути розташованою лише частина параболи. Тобто нерівність буде виконуватися не для всіх дійсних *x*. Для нульового значення параметра отримаємо лінійну нерівність, розв'язки якої утворюють підмножину множини додатних чисел. Для додатних *a* вітки параболи напрямлені вгору. Враховуючи знак нерівності „≥", умову завдання задовольняють ті значення параметрів, коли парабола розташована над віссю абсцис чи дотикається до неї, тобто дискримінант $-3a^2-a+4$ відповідного квадратного рівняння недодатний, значення параметра при цьому *a* не менші одиниці.

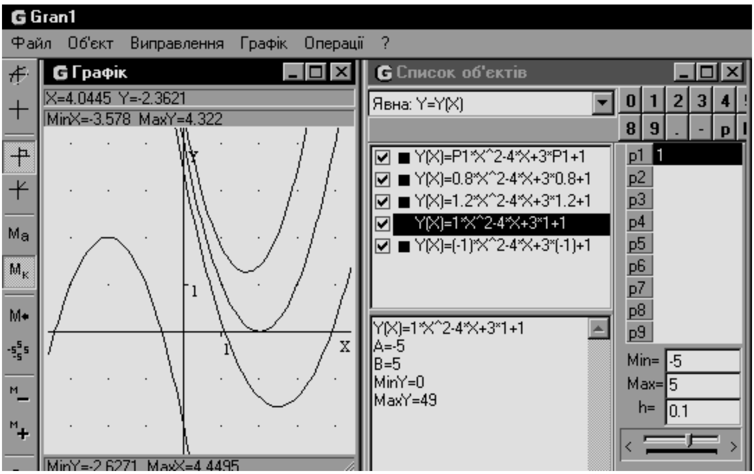


Рис.3.113. Дослідження положення параболи залежно від параметра

5. В *нерівності* $\left|x^2 - x + a\right| \ge x^2 - 2a$, *що містить змінну та параметр під знаком модуля*, розглядаються дві області для $x^2 - x + a \ge 0$ та $x^2 - x + a < 0$.

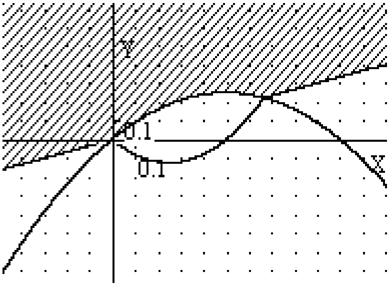


Рис.3.114. Під модулем вираз додатний

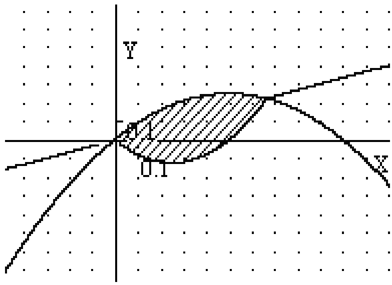


Рис. 3.115. ГМТ для від'ємного виразу

Для побудови ГМТ у координатах *(x,a)* за допомогою GRAN1, позначають параметр через *y* та створюють об'єкт неявного типу задання *0=G(x,y)* за формулою $0 = ABS(x\hat{}2 - x + y) - x\hat{}2 + 2 * y$. Побудувавши графік рівняння, застосовують операцію *Розв'язати нерівність G(x,y)>0*. Щоб заштриховувати за допомогою GRAN1 ГМТ в кожній з названих областей окремо, створюють ще один об'єкт. Границю області представляють спочатку як об'єкт неявного типу задання *0=G(x,y)* з виразом $0 = x\hat{}2 - x + y$ (Рис.3.114), а потім за формулою $0 = -x\hat{}2 + x - y$ (Рис.3.115). Використовують послугу *Розв'язати систему нерівностей G(x,y)>0.*

При побудові ГМТ вручну, переходять до сукупності двох систем, які в подальшому перетворюють, щоб будувати ГМТ в координатах *(x,a)*.

$$\begin{cases} x^2 - x + a \ge 0, \\ -x + a \ge -2a; \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x^2 - x + a \le 0, \\ -x^2 + x - a \ge x^2 - 2a. \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge x/3, \\ a \ge -x^2 + x; \end{cases} \text{ і } \begin{cases} a \le -x^2 + x, \\ a \ge 2x^2 - x. \end{cases}$$

Заштриховане ГМТ, що задовольняє нерівність, перетинають горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. Для кожного з допустимих значень параметра абсциси спільних точок прямих і побудованого ГМТ дадуть розв'язки нерівності.

6. Нерівності $\sqrt{x + a} > x + 1$, $\log_{1/x}(a - x) < 1$ у посібниках [11], [20], [75] пропонують розв'язувати як аналітичними, так і графічними методами. Для першої нерівності необхідні побудови показані на рис. 3.116. При виконанні побудови за допомогою GRAN1 на площині *(x,a)* створюють об'єкти неявного типу задання. Для цього набирають на панелі введення даних для першої нерівності вираз *SQRT(x+y)-x-1*, для другої *log(1/x,y-x)-1* та використовують послугу *Розв'язати нерівність G(x,y)>0* для першої нерівності чи *G(x,y)<0* для другої. При цьому світловий курсор у списку об'єктів має бути встановленим на об'єкт неявного типу. Щоб записати розв'язки нерівності, проводять прямі *a=const* (об'єкт явного типу задання *y=P1*), які перпендикулярні до осі параметра. При різних значеннях *a* прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Для фіксації прямих при різних значеннях параметра Р1, світловий курсор у списку об’єктів необхідно встановити на функцію *y=P1* і використати послугу *Об’єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами.* Абсциси точок перетину є розв’язками нерівності. Отримаємо розв’язки: якщо $a \le 0.75$, то ∅; для $0.75 < a \le 1$ маємо $x\epsilon(x_1, x_2)$; якщо $a > 1$, то $x\epsilon(-a; x_2)$.

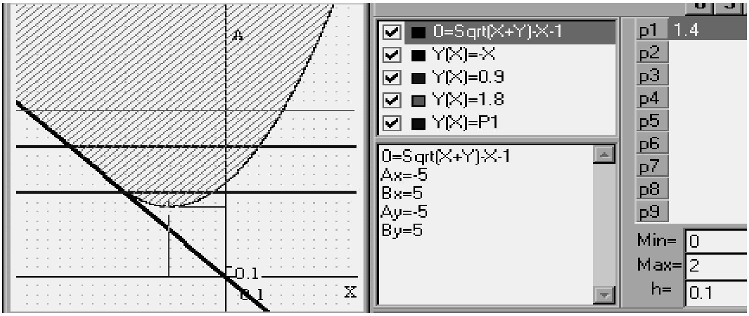


Рис. 3.116. ГМТ, побудованих в площині *(x,a)*

Щоб знайти аналітичні вирази для x_1 та x_2, переходимо від нерівності до рівносильної сукупності систем: $\begin{cases} x+1<0, \\ x+a \ge 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x+a > (x+1)^2 \end{cases}$.

З другої системи маємо, що $a > x^2 + x + 1$. Графіком функції $a(x) = x^2 + x + 1$є парабола, вітки якої напрямлені вгору, найменше значення *0.75* досягається у вершині *x= - 0.5*. Нехай x_1 - менший корінь рівняння $a = x^2 + x + 1$, x_2 – більший.

Для *a≥0.75* отримаємо, що $x_1 = 0{,}5(-1 - \sqrt{4a-3})$, $x_2 = 0{,}5(-1 + \sqrt{4a-3})$.

Зручно досліджувати дану нерівність, якщо виконувати побудови в координатах *(x,y)*. Тут параметр виступає як нерівноправна змінна, тому потрібно будувати параметричну сім’ю кривих для різних значень *a.* Для нерівності $\sqrt{x+a} > x+1$ будуємо пряму *y=x+1* та „півпараболу” $y = \sqrt{x+a}$. Для кожного з допустимих значень параметра початкову нерівність задовольняють ті значення змінної *x*, для яких парабола буде розташована вище прямої. Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо об’єкти явного типу задання *y=x+1* і *y=SQRT(x+P1)*, де *P1* – довільний параметр. Вказуємо межі для зміни параметра, наприклад, *[-5;5]* і крок зміни *h=0.05* (рис.3.117). Для введення нових функцій, що відповідають контрольним значенням параметра, користуються послугою *Об’єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами*. Світловий курсор при цьому повинен бути встановленим на функцію, параметри якої необхідно зафіксувати.

Плавно рухаючи бігунок параметра, здійснюємо паралельне перенесення „півпараболи” вздовж осі ОХ, фіксуємо контрольні значення параметрів, що відповідають чотирьом положенням кривої щодо прямої *y=x+1*, та записуємо вигляд розв'язку: 1) якщо *a<0,75 (P1<0.75),* то „півпарабола" розташована нижче прямої і розв'язків нерівність не має; 2) при *a=0.75* парабола дотикається до прямої; 3) для $0.75 < a \le 1$ розв'язками будуть $x \in (x_1, x_2)$, де x_1 та x_2 – абсциси точок перетину прямої та „півпараболи" ($x_1<x_2$); 4) при $a > 1$, парабола перетинає пряму в одній точці і тоді $x \in (-a; x_2)$. Вирази для x_1 та x_2 подані вище.

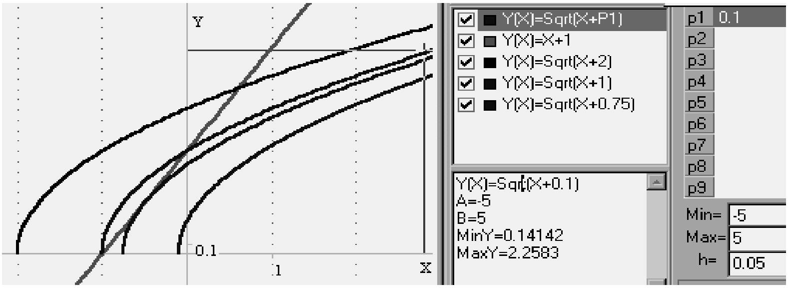


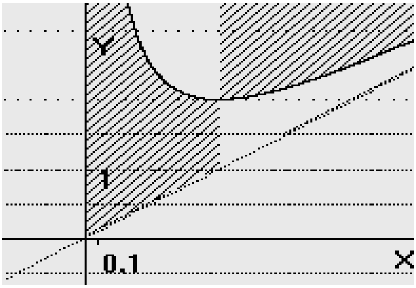
Рис. 3.117. Можливі положення параболи відносно прямої

Якщо у початковій нерівності виконати заміну *x+a=t*, то перейдемо до нерухомої параболи $y = \sqrt{t}$ та прямої *y=t+1-a*, що рухається вздовж осі *Oy*. Завдяки застосуванню ППЗ учні краще усвідомлять, як здійснюється паралельне перенесення кривої вздовж осі координат і відбувається фіксація контрольних значень параметра, що сприятиме в подальшому кращому виконанню цих дій мисленно.

В класах з поглибленим вивченням математики доцільно запропонувати учням розв'язати логарифмічну нерівність з параметром та змінною основою. Наприклад, *розв'язати залежно від параметра a нерівність* $\log_{1/x}(a-x) \le 1$. Здійснимо побудову графічного образу нерівності в координатній площині (*x,a*) [11]. Вздовж осі абсцис відкладемо значення змінної *x*, вздовж осі ординат – значення параметра *a*. Для побудови ГМТ за допомогою GRAN1 не потрібно виражати параметр, досить обрати тип „неявно задана функція", позначивши при цьому параметр через *y*: $\log(1/x, y-x) - 1 = 0$. Побудувавши образ рівняння, використовують послугу *Розв'язати нерівність G(x,y)<0*. Заштриховане ГМТ (рис. 3.118) перетинають прямими *y=const (У=P1)*, перпендикулярними до осі параметрів. Для різних значень параметра прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Абсциси точок цих відрізків є розв'язками даної нерівності: 1) якщо $a \le 0$, то нема розв'язків; 2) якщо $0 < a \le 1$, то $x \in (0,a)$; 3) якщо $1 < a \le 2$, то $x \in (0,1)$; 4) при *a>2*, $x \in (0; x_1) \cup (1; x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x + 1/x = a$.

Аналітично встановлюють, що $x_1 = 0.5(a - \sqrt{a^2 - 4})$, $x_2 = 0.5(a + \sqrt{a^2 - 4})$.

Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:



$$\begin{cases} 0 < 1/x < 1, \\ a - x \geq 1/x; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 1/x > 1, \\ a - x \leq 1/x \\ a - x > 0. \end{cases}$$

Рис. 3.118. $\log_{1/x}(a - x) \leq 1$

Розв’язуючи нерівність вручну, виражають параметр через змінну *x,* оскільки в нерівність параметр входить лінійно, та будують графічний образ нерівності у координатній площині *(x,a).* Щоб побудувати графік функції $y = x + 1/x$, виконують дослідження за допомогою похідної. Ескіз графіка можна побудувати, якщо поточково додати значення функцій $y = 1/x$ і $y=x$. Найменше значення функції $y=2$ досягається при $x=1$, що слідує, наприклад, з нерівності Коші. Завершуємо розв’язування виконанням описаної вище процедури знімання результатів.

7. Розглянемо завдання із збірника для вступників до ВНЗ на застосування паралельного перенесення, посильне восьмикласникам, які вивчають на уроках геометрії рівняння кола та взаємне розташування двох кіл на площині.

Знайти всі значення параметра а, для кожного з яких система рівнянь
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2y = 3 - 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2y = -a^2 \end{cases}$$
має два розв’язки?

Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо два об’єкти неявного типу задання *0=G(x,y)* за формулами *0=X^2+Y^2-4*P1*X-2*Y-3+4*P1^2* та *0=X^2+Y^2-2*P1*X-2*Y+P1^2*. Змінюючи значення параметра *P1*, досліджуємо рух кіл на площині вздовж прямої *y=1.* Фіксуємо можливі випадки взаємного розташування двох кіл (не перетинаються, дотикаються, перетинаються у двох точках). Зазначимо, що знизивши в програмі якість побудови кривих (послуга *Об’єкт \ Змінити властивості*), виграємо у швидкості їх побудови. Значення параметра можна уточнити, зменшивши його крок зміни. На рис. 3.119. представлено копію слайда презентації з умовою завдання. До підказки, формул у форматі ППЗ, малюнка з колами прикріплені ефекти анімації *Поява*, які спрацьовують при натискуванні довільної клавіші. До графіка, до ярлика текстового файла приєднані гіперпосилання на відповідні файли з введеними функціями.

Для обґрунтування отриманих результатів аналізують обидва рівняння, виділяють повні квадрати, знаходять центри кіл (*2a;1*), (*a;1*) та їхні радіуси $R_1=2$, $R_2=1$ відповідно. Кола перетинатимуться в двох точках за умови, що відстань між центрами буде меншою за суму радіусів і більшою за різницю більшого і меншого радіусів. Розглянемо два випадки:

1) для $2a<a$ маємо $R_1 - R_2 < a - 2a < R_1 + R_2$; $a \in (-3;-1)$;

2) якщо $a<2a$, то знайдемо, що $a \in (1;3)$.

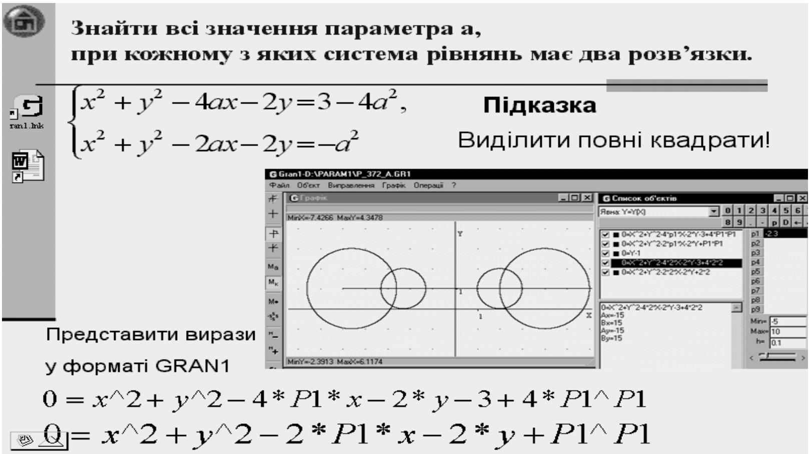


Рис. 3.119. Копія слайда презентації з дослідженням розташування кіл

8. Доступна восьми- та дев'ятикласникам і наступна задача, за допомогою якої можна продемонструвати застосування методу повороту: *при яких значеннях параметра а рівняння* $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ *має єдиний розв'язок?* Розглянемо функції $y=ax$ і $y=\sqrt{8x-x^2-15}+1$. Перетворивши другу з них за умови, що $y \ge 1$, отримаємо що графік є дугою кола, заданого рівнянням $(x-4)^2+(y-1)^2=1$ (рис.3.120). Для дослідження за допомогою GRAN1 створюють об'єкти явного типу задання *y=P1*x, y=SQRT(8*x-x^2-15)+1*. При побудові у *Властивостях графіка* слід зазначити, що $y \ge 1$. Пряма $y=ax$ *(y=P1*x)* повертається навколо початку координат. Аналізуючи графічні образи, встановлюємо, що єдиний розв'язок рівняння матиме тоді, коли промінь перетинатиме півколо в одній точці. Це буде пучок прямих, у яких кутовий коефіцієнт змінюватиметься від 1/5 до 1/3, а також пряма, яка є дотичною до півкола. Здійснюючи поворот прямої, що проходить через початок

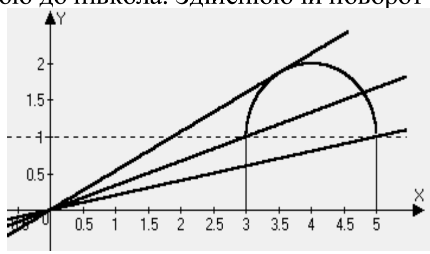


Рис. 3.120. Поворот прямої

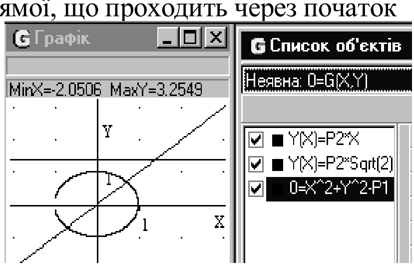


Рис. 3.121. Перетин кола і прямих

координат, фіксуємо контрольні значення параметрів. Відшукання точного значення кутового коефіцієнта дотичної зводиться до розв'язування квадратного рівняння $(ax-1)^2 = 8x - x^2 - 15$ за умови єдиності розв'язку. Об'єднавши розв'язки для обох випадків, отримаємо, що $a \in \left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}$.

9. *У задачі на відшукання кількості різних розв'язків, що має система рівнянь* $\begin{cases} x^2 + y^2 = b, \\ (y-ax)(y-a\sqrt{2}) = 0, \end{cases}$ *залежно від параметрів a і b*, при графічній інтерпретації маємо справу для a одночасно з двома перетвореннями – з поворотом ($y=ax$) та паралельним перенесенням ($y=a\sqrt{2}$); для b – з гомотетією з центром у початку координат (рис. 3.121).

Досить часто при розв'язуванні задач з параметрами за методом перерізів для побудови графіків учням доводиться застосовувати похідну. Труднощі в таких задачах виникають при обчисленні границі функції, при дослідженні наявності асимптот, проміжків опуклості графіків тощо. Саме тоді в нагоді стає комп'ютер, який „навчає" школяра використовувати властивості функцій та правильно будувати їх графіки.

10. Щоб знайти, скільки розв'язків має рівняння $e^{1/x} = a/x^2$ залежно від параметра *a,* в системі координат *(x,y)* будуємо графіки функцій $y = x^2 e^{1/x}$ та $y = a$ (рис.3.122). Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо об'єкти явного типу задання *y=x^2*exp(1/x)* та *y=p1*.

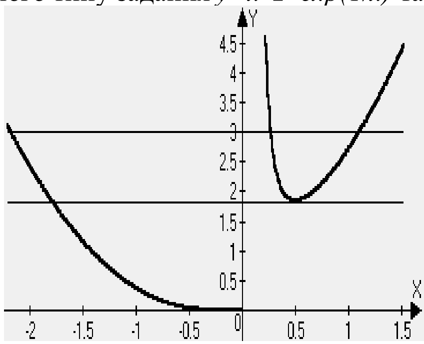


Рис.3.122. Графік функції $y = x^2 e^{1/x}$

При розв'язуванні попереднього та наступного завдань важливо, щоб учні порівняли швидкість зростання (спадання) залежно від основи і показника степеня показникової, степеневої та логарифмічної функцій.

Необхідно знайти**,** *скільки розв'язків має кожне з рівнянь* $x^4 = ae^x$, $\ln^2 x = ax$ *залежно від параметра a.* Для першого рівняння в системі координат *(x,y)* будуємо графіки функцій $y = x^4 e^{-x}$ та $y = a$ (рис.3.123). Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо об'єкти явного типу задання *y=x^4*exp(-x)* та *y=p1*. Змінюючи значення параметра *p1*, фіксуємо прямі, для яких графіки не мають точок перетину, мають одну, дві чи три точки перетину. Для дослідження другого рівняння будують графік функції $y = \frac{\ln^2 x}{x}$. Якщо використовувати ППЗ GRAN1, то слід створити об'єкт явного типу задання за формулою *Y(X)=(Ln(X))^2/X* (Рис. 3.124).

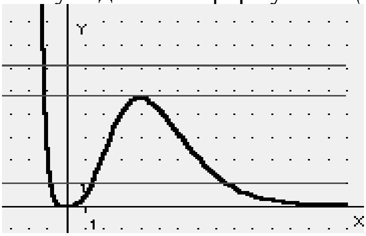


Рис.3.123.Графік функції $y = x^4 e^{-x}$

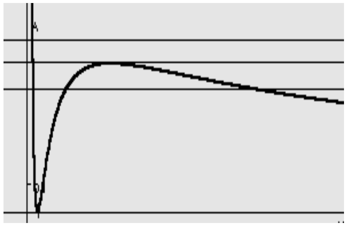
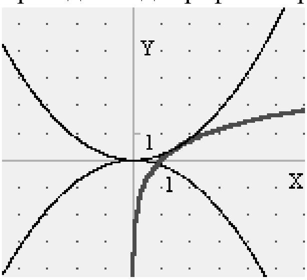


Рис. 3.124. Графік функції $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

Дослідити, при яких значеннях параметра а рівняння $ax^2 = \ln x$ *має один корінь, рівняння* $\ln x = ax$ *має два корені?*

До запропонованих завдань можна застосувати принаймні два графічні прийоми. Для першого рівняння створюємо об'єкти *y=P1*x^2* і *y=ln x*. Очевидно, що *a=0* задовольняє умову рівняння. Рухаючи бігунок параметра P1, змінюємо напрям віток параболи ($a \neq 0$), їх кривизну. Встановлюємо, що умову задачі задовольняють всі від'ємні *a* і те значення параметра, при якому графіки функцій дотикаються. Знайти точне значення параметра можна з умови дотику: а) рівні значення функцій $ax_o^2 = \ln x_0$; б) однакові кутові коефіцієнти дотичних, проведених до графіків через спільну точку $2ax_0 = 1/x_0$ (рис. 3.125).



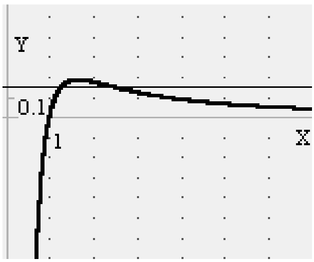


Рис. 3.125. Коли рівняння $ax^2 = \ln x$ **має єдиний корінь?**

Можна знайти кількість розв'язків рівняння $ax^2 = \ln x$, якщо дослідити функцію $y = \ln x / x^2$. Для цього перепишемо рівняння у вигляді $\ln x / x^2 = a$. При побудові графіка функції з використанням похідної в нагоді стануть дослідження порівняння монотонності степеневої та логарифмічної функцій, виконані у пункті 3.7. Кількість розв'язків рівняння рівна кількості точок перетину графіка функції $y = \ln x / x^2$ і прямої y=*a*.

11. Звернемо увагу на особливості побудови за допомогою GRAN графіків цілої частини функції *y=[f(x)]* та дробової *y={f(x)}*. Оскільки дані функції розривні, то при побудові слід зазначити у властивостях „*Не з'єднувати точки відрізками*", будувати графіки „*За точками*" (рис.3.126).

Для дослідження*, при яких значеннях параметра рівняння 2{x}=a[x] має три розв'язки* [91], створюють за допомогою GRAN1 об'єкти явного типу задання за формулами *y=P1*INT(x)*; *y=2*(x-INT(x))*. Для другої функції дробову частину представлено згідно з означенням *{x}=x-[x]*. При побудові графіка не відображаються „виколоті" точки, тому їх наносять на графік вручну (*Графік \ Мітки,* зазначати координати точок і назву для побудови точки).

Графіки на рис. 3.126 побудовані за допомогою GRAN-2D. В якості параметра взята абсциса деякої точки. Щоб рівняння мало три розв'язки, необхідно, щоб графіки перетиналися в трьох точках A, B, C. Розглядаємо два випадки: 1) для *a>0* має виконуватись одночасно *3a≥2, 2a<2*; 2) для a<0 необхідно виконання умов *-3a≥2, -2a<2*. В результаті отримаємо, що $a \in (-1; -2/3] \cup [2/3; 1)$.

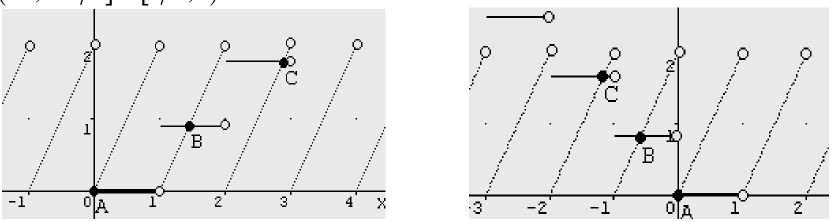


Рис. 3.126. Дослідження кількості розв'язків рівняння *2{x}=a[x]*

12. Як зазначалося вище, зручно досліджувати функціональні залежності з параметрами не лише за допомогою ППЗ GRAN1, але й використовуючи GRAN-2D. А саме, будувати графіки функцій заданих *явно в декартових координатах, в полярних координатах* та *параметрично*. Щоб ввести до розгляду параметри, створюють довільні точки *A, B, C ...* Наприклад, на паралельній до осі *Ox* прямій. Тоді обирають тип функціональної залежності, активізують пункт меню *Об'єкт\ Створення\Графік функції* і записують аналітичний вираз. В якості параметрів для даного розташування точок вводять абсциси точок *A, B, C ...* Зміна положення названих точок на початковій прямій приводить до зміни графіка функції. Для дослідження квадратичної функції з параметрами слід створити об'єкт за формулою *y=x(A)*x^2+x(B)*x+x(C)*. Досліджуючи за допомогою ППЗ GRAN-2D, доцільно створювати різні динамічні вирази. Наприклад, обчислювати дискримінант чи значення функції в певних точках. У ході дослідження можна залишати слід точки, у тому числі заданої аналітично. Для квадратичної функції можна досліджувати розташування параболи залежно від коефіцієнтів, встановити зв'язок між дискримінантом відповідного квадратного рівняння та положенням параболи по відношенню до осі *Ox*, встановлювати траєкторії руху вершини параболи як слід аналітично заданої точки при зміні одного з коефіцієнтів, відновити па-

раболу за трьома заданими точками тощо.

Доцільно запропонувати школярам виконати за допомогою GRAN дослідження і самостійно *сформулювати теореми про розміщення коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) залежно від значень параметрів* [91,*26*]. Наприклад, отримати умови, коли

- обидва корені будуть більші (менші), ніж задане число;
- корені матимуть різні (однакові) знаки;
- корені належатимуть заданому проміжку;
- заданий відрізок буде знаходитися всередині проміжку між коренями квадратного тричлена;
- тільки більший (менший) корінь лежатиме на заданому відрізку;
- значення квадратного тричлена будуть лише додатними (від'ємними) та інші.

Завдання на дослідження розміщення коренів можна включити до лабораторної роботи, яку бажано провести під час вивчення квадратичної функції.

На рис. 3.127 подано креслення, за допомогою якого можна досліджувати розташування коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) залежно від коефіцієнтів a, b, c. Хід створення об'єкта *Графік функції* з параметрами пояснено в п.3.7. Точки I та J вибрані на осі абсцис і можуть вільно рухатися вздовж неї, а точки K, L, M, E створені за аналітичними виразами. Змінюючи положення точок A, B, C, змінюємо відповідні значення параметрів та положення параболи. Попередньо слід звернути увагу школярів на те, що відстежувати необхідно такі величини, як старший коефіцієнт квадратного тричлена, дискримінант відповідного квадратного рівняння, абсцису і ординату вершини параболи, значення функції в певних заданих точках.

Наприклад, досліджуючи, *при якому значенні параметра m корені рівняння* $4x^2-(3m+1)x+m-2=0$ *знаходяться між числами 0 і 2,* не лише встановлюємо, що умову задовольняють ті значення параметра, для яких $m\in(2;2{,}4)$, але й через узагальнення переходимо від системи нерівностей $D\geq 0, f(0)>0, f(2)>0, 0<x_0<2$ до системи загального вигляду $D\geq 0, f(x_1)>0, f(x_2)>0, x_1<x_0<x_2$, яка виражає необхідну та достатню умови того, що корені рівняння для коефіцієнта $a>0$ лежать на проміжку (x_1, x_2). Для узагальнення необхідно проаналізувати положення параболи, зафіксовані на рис. 3.127, 3.128 (x_1 та x_2 – абсциси точок I та J).

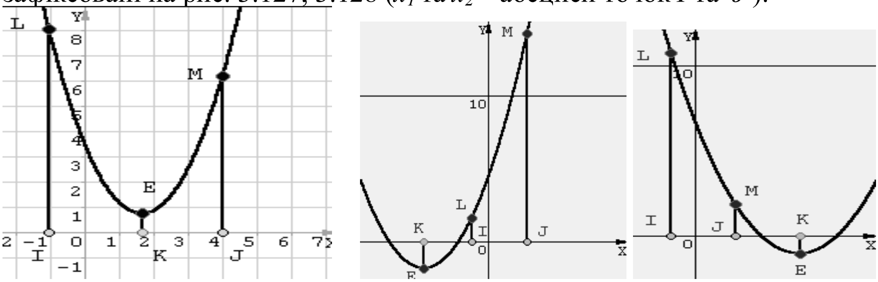


Рис.3.127. Можливі розташування параболи для a>0

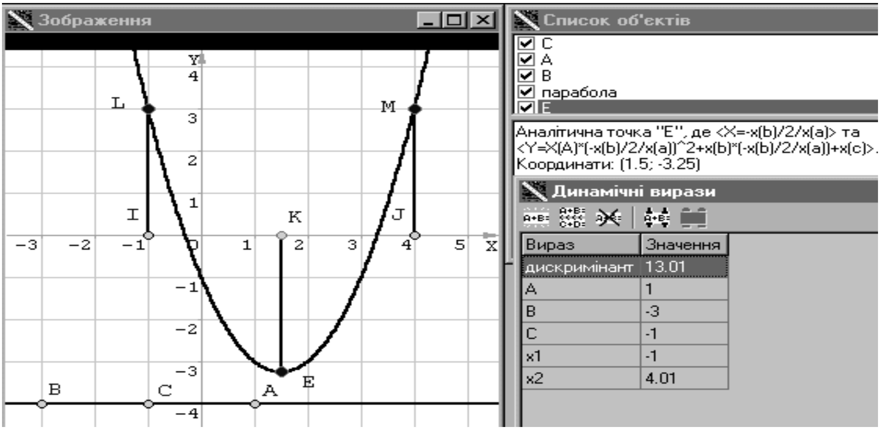


Рис. 3.128. Модель для дослідження розміщення коренів квадратного тричлена

13. Уміння формулювати умови, що аналогічні розглянутим вище, суттєво використовується при розв'язуванні цілого ряду задач із збірника для державної підсумкової атестації [122,*156*]. Наприклад, *визначити при яких значеннях параметра а має від'ємну точку максимуму і додатну точку мінімуму функція* $f(x)=x^3/3-0{,}5(a+2)x^2-3(a+2)x-1$*? У функції нема точок екстремумів?* Для складання правила-орієнтира пропонуємо учням за результатами дослідження проаналізувати зв'язок між функцією та її похідною, між точками екстремумів та нулями похідної.

Похідна функції рівна $f'(x)=x^2-(a+2)x-3(a+2)$. За допомогою GRAN1 створюємо об'єкти з параметром Р1 явного типу задання за формулами:

*Y(X)=X^3/3-(P1+2)*X^2/2-3*(P1+2)*X-1, Y(X)=X^2-(P1+2)*X-3*(P1+2*) (рис. 3.129). Оскільки похідна є квадратичною функцією, а її графіком – парабола, вітки якої напрямлені вгору, то достатньою умовою того, що функція матиме від'ємну точку максимуму та додатну точку мінімуму, буде від'ємне значення похідної в точці *x=0*. Тобто, для *P1>-2*. Для *P1≤ -2* точок екстремумів не буде (рис. 3.129, справа).

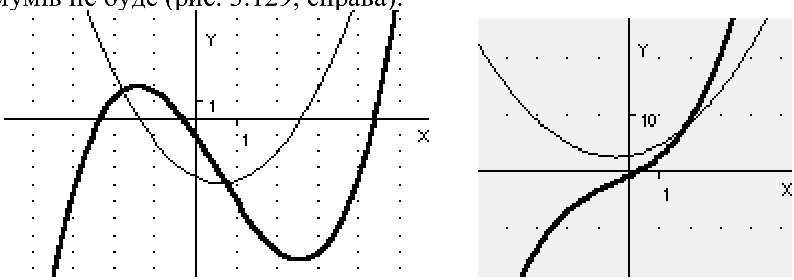


Рис.3.129. Дослідження на монотонність функції, що містить параметр

14. Зауважимо, що графічні методи розв'язування задач з параметрами не повною мірою можна вважати строгими, при їх застосуванні цілком ймовірні помилки. Тому *розв'язування графічними прийомами бажано су-*

*проводжуватися доказовими аналітичними міркуваннями***.** З іншого боку, можливі помилки і при розв'язуванні аналітичним методом. У цьому випадку графічні побудови можуть допомогти усунути недоліки.

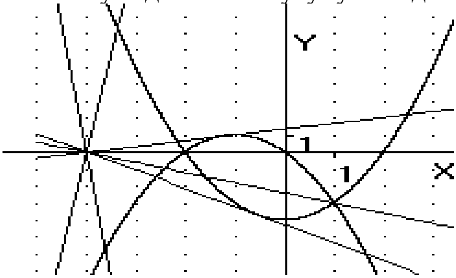


Рис.3.130. Прямі перетинають параболи у трьох точках

Наприклад, *для яких значень параметра р система двох рівнянь* $y^2+(2x+4)y+(x^2+2x)(4-x^2)=0$ *і* $y=p(x+4)$ *має три різні розв'язки?* ГМТ, заданих першим рівнянням, розпадається на дві параболи. Друге рівняння задає сім'ю прямих, що проходять через точку (-4;0). Розв'язуючи графічним методом, школярі швидше всього припустяться помилки, тому що знайдуть лише чотири положення прямої, а не шість. Однак, аналітична частина розв'язування, без якої в задачі не обійтися, покаже всі шість шуканих значень параметра. На рис.3.130 виконано побудови за допомогою GRAN1 для об'єктів неявного типу задання $0=y\text{^}2+(2*x+4)*y+(x\text{^}2+2*x)*(4-x\text{^}2)$ і явного $y=P1*(x+4)$. Кожна з двох прямих зліва дотикається до однієї параболи і перетинає в двох точках другу параболу. Саме ці прямі часто випадають з поля зору школярів.

Завдяки застосуванню ППЗ в дослідженнях до задач з параметрами можна ефективніше здійснювати рівневу диференціацію. Наприклад, одним учням можна запропонувати знаходити наближені розв'язки за побудованим ГМТ з використанням ППЗ і долучатися до процесу обговорення, представивши свої результати. Сильнішим школярам доцільно запропонувати більше уваги приділити обґрунтуванню отриманих результатів, відшуканню інших способів розв'язування задачі, зокрема аналітичних. Зрештою, а чи завжди відшукання обґрунтування задачі є показником високого рівня особистісного досягнення? А якщо досліджувати моделі з параметрами для реальних процесів – для процесів, які мають місце в техніці, фізиці, хімії? В цьому разі ми погоджуємося з думкою М.І. Жалдака в тому, що найголовніше у таких задачах власне постановка самого завдання, побудова моделі, формулювання проблеми, адже ці компоненти формують творче мислення учня [27].

Учні краще зможуть засвоїти запропоновані прийоми розв'язування задач, якщо вчитель передбачить групові форми роботи. Наприклад, розібрався з розв'язанням задачі з параметром, навчи її розв'язувати групу з чотирьох однокласників. При цьому звертаємо увагу учнів те, як і чому потрібно вчити однолітків. Необхідно формувати три групи змісту учбової діяльності – подавати не лише певний навчальний матеріал, але й зміст відповідних розумових дій, включаючи різноманітні евристики, зміст своєї власної діяльності. Тобто те, як учні повинні аналізувати задачу, планувати її розв’язання тощо. У цьому разі можна сподіватися на розвиток особистості учня, а не лише передачу знань.

Підсумовуючи, зазначимо, що застосування ППЗ в запропонованих вище дослідженнях буде педагогічно доцільним, забезпечуватиме диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприятиме розкриттю творчого потенціалу та пізнавальних здібностей кожного окремого учасника навчального процесу. Педагогічний експеримент засвідчив, що та група учнів, в навчанні якої використовували ППЗ, на контрольних роботах показала вищу якість знань.

▪ Аналізуючи графічні образи, школяр може встановити кількість розгалужень в задачі з параметром, визначити контрольні значення параметрів, отримати дані для створення евристичних правил-орієнтирів.

▪ У ході графічних експериментів за допомогою ППЗ формуються різні прийоми мислительної діяльності – аналіз, синтез, узагальнення та ін., удосконалюються навички самоконтролю, розвивається пізнавальна самостійність.

▪ Доцільно для розвитку мислення школяра розглядати паралельно графічні та аналітичні прийоми розв’язування однієї і тієї ж задачі. Графічний метод унаочнює хід розв’язування і сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

▪ Якщо завершувати аналіз побудованих графічних образів виведенням можливих наслідків (наприклад, скласти чим більше власних задач, дати на них відповідь), то таким чином стимулюватимемо розвиток у школярів такої важливої компоненти дивергентного мислення як продуктивність.

▪ Застосування ППЗ допомагає вирішувати проблему гуманізації освіти – робить задачі з параметрами доступнішими кожному, хто має хоча б елементарні навички роботи з комп’ютером, створює умови для самовираження внутрішніх потенціальних можливостей учня, сприяє досягненню успіху навіть тоді, коли учень не знає деяких теоретичних положень.

Контрольні питання і завдання

1. Розв’язати завдання графічними або аналітичними прийомами. Перевірку здійснити з використанням ППЗ GRAN чи DG:

а) При яких значеннях параметра a корені рівняння
$x^2–(3a– 1)x+ 2a^2 + a – 6 = 0$ належать відрізку $[2; 4]$?

б) При яких значеннях a корені x_1 і x_2 квадратного тричлена
$f(x)=(a^2+1)x^2+(a+2)x–a^2–3$ задовольняють умову $x_1 \in (-4; -1)$, $x_2 \in (0; 2)$?

в) При яких значеннях параметра a система $x^2 + x + a = 0$; $x > a$ має хоча б один розв’язок?

г) Нехай x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 – 6x - 2a +1 = 0$, x_3, x_4 – корені рівняння $2x^2 – 4x – a = 0$. При яких значеннях параметра a виконуються нерівності $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ або $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$?

д) При яких значеннях a система нерівностей $x^2 – (a + 2)x + a + 5 \leq 0$ і $|x| \leq 2$ виконується тільки при одному значенні x?

е) Розв’язати нерівності $\log_x(x-a) > 2$, $\log_{a+x}(ax - x^2) < \log_{a+x} x$ із збірника для вступників до вищих навчальних закладів [11,125]. До розв’язування аналогічної нерівності звести відшукання області визначення функції

$y=\sqrt{(x+2a^2-a+1)/(\log_x(x-a)-1)}$.

є) При яких *a* рівняння *log₂(a + | | x - 6 | - 3 |) = 0* матиме найбільшу кількість розв'язків? Найменшу кількість розв'язків?

ж) При яких *a* рівняння *xcosx+log₁/₂(2 - x/5) + a = 0* має на проміжку *[–9, 11]* найбільшу (найменшу) кількість розв'язків? Один розв'язок?

з) Показати, що при $a\in[0{,}5;+\infty)$ нерівність $\ln(1+x)\geq x-ax^2$ виконується для всіх додатних *x*.

2. Дібрати до уроку „Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами” приклади завдань. Розв’язати їх бажано аналітичним і графічним методами. Які особистісні якості школярів можна розвивати у процесі розв’язування аналогічних завдань на уроці?

3. Охарактеризувати графічні прийоми, які можна використовувати для розв’язування задач з параметрами.

4. Чому важливо навчати школяра не тільки за видом задачі відшукувати метод, але й сформувати вміння і навички аналітично обґрунтовувати результати, які отримані графічними методами?

3.9 До питання підвищення інформаційної культури вчителя математики. Програма курсу „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики”

Проблема формування особистісних якостей учнів у процесі комп’ютерно-орієнтованого навчання математики тісно пов’язана з проблемою підвищення кваліфікації вчителя математики в галузі ІКТ, зростанням його інформаційної культури. *Інформаційна культура* особистості – „складна системна якість особистості, яка являє собою упорядковану сукупність гуманістичних ідей, ціннісно-смислових орієнтацій, власних позицій і якостей особистості, що проявляється в реалізації універсальних способів пізнання, взаємодій, взаємовідношень, діяльності в інформаційному середовищі і визначає цілісну готовність людини до освоєння нового способу життя на інформаційній основі”[22, *71*]. На основі аналізу джерел [27], [87], [90], [103], [109] та ін. можемо зробити висновок, що до основних компонентів інформаційної культури особистості відносять розуміння сутності інформації та інформаційних процесів, їх ролі у процесі пізнання навколишньої дійсності та перетворюючої діяльності людини, проблем подання, оцінки і вимірювання інформації, її сприймання і розуміння, усвідомлення сутності інтелектуально-пошукових систем. Важливим є володіння основами алгоритмізації. При цьому необхідним є доцільне сполучення алгоритмічної та евристичної, творчої спрямованості навчання, врахування важливості як образної складової мислення, що не алгоритмізується (синтезу), так і алгоритмічної складової (аналізу). Не менш значущим є уміння обирати й формулювати цілі, здійснювати постановку задач, будувати моделі досліджуваних процесів і явищ, аналізувати їх за допомогою засобів ІКТ та інтерпретувати отримані результати, передбачати наслідки прийнятих рішень і робити відповідні висновки. Важливими є уміння впорядкування, систематизації, структурування даних і знань, розуміння сутності інформаційного моделювання, способів подання даних і знань. Необхідним є розуміння того, що для розв'язання далеко не всіх задач потрібні автоматизовані інформаційні системи.

Характеризуючи важливі компоненти інформаційної культури сучасного вчителя математики, М.І. Жалдак [27] та Г.О. Михалін [70] виділяють вміння грамотно працювати з будь-якими відомостями і такі специфічні компоненти, як уміння використовувати сучасні ІКТ для підготовки, супроводу, аналізу, коригування навчального процесу; вміння добирати найбільш раціональні методи і засоби навчання, враховувати індивідуальні особливості учнів, їх запити, нахили і здібності; вміння ефективно поєднувати традиційні МСН з ІКТ.

Ю.В. Триус та С.А. Раков акцентують увагу на компетентнісному підході у навчанні вчителів математики. Під компетентністю розуміють спеціально структуровані набори знань, умінь, навичок, що їх набувають у процесі навчання, і які спрямовані на досягнення високих результатів у певних видах діяльності [109]. Для майбутнього вчителя математики найбільш *значимими є навчальна компетентність (уміння вчитися), компетентність з ІКТ, математичні компетентності* [87]. Детальніше висвітлимо зміст математичних компетентностей. *Процедурна компетентність* – це використання різноманітних інформаційних джерел, включаючи Інтернет-ресурси; систематизація типових задач через встановлення критеріїв зведення; використання на практиці алгоритмів розв'язування задач. Володіння сучасними математичними пакетами (*технологічна* компетентність) набувається як через розв'язування типових задач з використанням ППЗ, СКМ, так і через уміння оцінювати похибки при використанні наближених обчислень; будувати комп'ютерні моделі для предметної області задачі з метою її евристичного, наближеного або точного розв'язку; досліджувати комп'ютерні моделі за допомогою комп'ютерних експериментів. Суттєвою є *дослідницька компетентність* як володіння математичними методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач. Компетентність набувається через формулювання (постановку) математичних задач на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач з урахуванням ідеалізації, узагальнення, специфікації. Дослідницька компетентність передбачає наявність умінь будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач; висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень; інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області задачі. Важливо вміти систематизувати отримані результати, а саме: досліджувати межі застосування отриманих результатів, встановлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань тощо.

Відмітимо, що представлений перелік дослідницьких умінь у повній мірі відповідає закономірностям та етапам творчого процесу, на яких вони формуються. Навчальні дослідження та дослідницький підхід у математичній освіті С.А. Раков розглядає як засоби набуття математичних компетентностей і зазначає, що для того, щоб учитель міг побудувати навчально-виховний процес на основі дослідницьких підходів у навчанні, він повинен, перш за все, сам бути математично компетентним. Питання підвищення кваліфікації педагога доцільно вирішувати на основі дослідницьких підходів у навчанні.

Не менш важливою характеристикою є *методологічна компетентність* як уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач. Набувається компетентність через володіння методологією дослідження задач математичними методами; розуміння переваг та обмеженості математичних методів, оцінювання на практиці ефективності їх застосування. Стосовно методології використання СКМ для дослідження математичних задач необхідно розуміти переваги та обмеженість пакетів для комп'ютерного моделювання у галузі математики, оцінювати на практиці їх ефективність. Бути методологічно компетентним означає вміти аналізувати ефективність розв'язування індивідуально та суспільно-значущих задач математичними методами; формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих проблем; рефлексувати власний досвід розв'язування задач та подолання перешкод з метою постійного вдосконалення власної методології проведення досліджень.

Одним із шляхів удосконалення професійної підготовки педагогів є участь у роботі творчих груп, майстер-класів методичного кабінету, курсів підвищення кваліфікації. Проведення практикумів на базі кабінету, відкритих засідань творчої лабораторії вчителів-методистів сприяє взаємозбагаченню вчителів. Організовані на громадських засадах заняття допоможуть педагогу навчитися розв'язувати математичні задачі за допомогою ППЗ, застосовувати ППЗ для подання нового матеріалу на уроках математики, на спецкурсах, в організації дослідницької роботи учнів.[·] Ефективність навчання в значній мірі залежить від рівня математичної підготовки учасників та уміння користуватися комп'ютером, від мотивації навчальної діяльності. Робота в групах, використання прийомів інтерактивного навчання допомагають учасникам навчального процесу створити ситуацію успіху.

З досвіду проведення таких занять можемо стверджувати, що значну користь вони приносять при такій структурі: 1) мотивація діяльності та очікувані результати; 2) демонстрація готових моделей, матеріалів, наслідування переглянутих операцій; 3) обговорення в парах чи в малих групах плану реалізації нового завдання, включаючи постановку його для вчителя і для учня; 4) ознайомлення в широкому колі учасників з умовами завдань; 5) практичне спрямування на розв'язування поставленого завдання, створення динамічних креслень для „відкриття" теорем, роздаткових матеріалів тощо; 6) захист створеної продукції в групах представників; 7) рецензування виконаної роботи представником іншої групи; 8) анонс творчих проектів, нових ППЗ тощо; 9) домашнє завдання, яке може передбачати розробку планів-конспектів комп'ютерно-орієнтованих уроків та подальший обмін ними, а також містити підготовчі завдання до наступного заняття; 10) рефлексія.

В табл. 2.2 подано зміст завдань для практичного заняття „Вивчення педагогічних програмних засобів GRAN-2D і DG". Враховуючи, що надзвичайно важливими для розвитку творчого потенціалу школяра є дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою, перед створенням динамічних креслень для дослідження слід пригадати ключові моменти технології „навчання як досліджен-

[·] Математику не можна вивчати, спостерігаючи, як це робить сусід. *А. Нівен* ня”, „навчання через відкриття”. Бажано порекомендувати для ознайомлення і використання у навчанні робочих зошитів для комп’ютерних експериментів, які пропонують розробники DG, провести дослідження з використанням креслень, створених за допомогою GRAN-2D, які знаходяться на компакт-диску. Зручно використовувати в навчанні електронні текстові документи, з певних місць яких зроблено гіперпосилання на файли, створені за допомогою ППЗ.

Доцільно запропонувати слухачам курсу "Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики" створити за поданою нижче програмою наступну структуру папок і файлів (рис. 3.131). У папках для кожної групи (MI_0X_X) для слухача доцільно створити папку з файлами GRAN і DG, папку для файлів Advanced Grapher, для зошита з виконаними завданнями за допомогою ТерМ (KONTROL_TerM), для розроблених кроків, підготовлених наочностей для імпортування, розроблених уроків для засобів "Математика, 5 клас" (UROK_5_KL), "Алгебра, 7-9 клас" (UROK_7_9_A), "Геометрія, 7-9 клас" (UROK_7_9_GEOM), "Алгебра, 10" (UROK_10_A), "Геометрія, 11 клас" (UROK_11_GEOM). Бажано помістити текстові документи чи презентації для виконання лабораторних робіт із засобами GRAN-2D (LABOR_DG_GRAN_2D, UROK_GRAN_2D_DG), Gran1 (RISUNOK, LABOR_GRAN1, UROK_GRAN1), Gran-3D (LABOR_GRAN_3D). Файл PRIZV_IM містить перелік робіт для виконання. З кожного пункту цього списку зроблено гіперпосилання на виконані роботи. Уроки, розроблені слухачами за допомогою GRAN, зручно переглядати за допомогою гіперпосилань з переліку тем уроків (tema_uroku_algebra, tema_uroku_geometri).

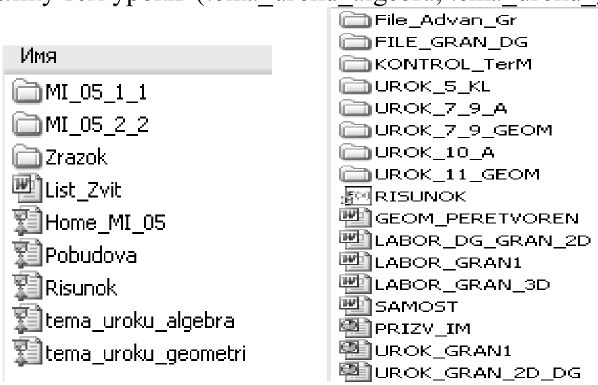


Рис.3.131. Перелік папок для розробки матеріалів курсу "ІКЗН математики"·

Розробляючи уроки, слід добирати завдання з врахуванням мети і завдань уроку. Добирати завдання для актуалізації опорних знань та умінь, для мотивації навчальної діяльності, для пояснення нових знань, формування умінь та навичок розв’язування задач, для перевірки та корекції отриманих знань, для пояснення того, як виконувати домашнє завдання та його перевірки.

· Не вважати нічого зробленим, якщо дещо ще залишилося доробити. *К.Ф. Гаусс*

Програма навчального курсу „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики"

Особистісна орієнтація освіти, запровадження освітніх інновацій, інформаційно-комунікаційних технологій, створення індустрії сучасних засобів навчання і виховання, забезпечення ними навчальних закладів є пріоритетними напрямами державної політики щодо розвитку освіти в Україні. На сьогоднішній день здійснюється широкомасштабна програма інформатизації освіти і науки, відбувається інтенсивний пошук методик комп'ютерно-орієнтованого навчання. Поряд з традиційними методами, формами та засобами в процесі навчання учнів та студентів все більшої ваги набирають комп'ютерно-орієнтовані. Ефективне використання інформаційно-комунікаційних засобів навчання математики дозволить здійснювати навчання розвиваючими методами.

Програму складено на основі галузевого стандарту вищої освіти за вимогами кредитно-модульної системи навчання для підготовки бакалаврів за спеціальністю „Педагогіка і методика середньої освіти. Математика". Вивчення курсу передбачається у шостому семестрі.

Розподіл навчального часу.

Загальна кількість годин (66 год), що відводяться на курс, ділиться на лекції (4 год), лабораторні (32 год) та самостійну роботу студентів (30 год).

Пояснювальна записка

Курс „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики" призначений для студентів вищих педагогічних навчальних закладів. Може використовуватися в педагогічних коледжах, інституті підвищення кваліфікації педагогів. Курс є інтегрованим, опирається на знання студентів, уміння і навички, отримані при вивченні курсів „Інформаційні технології (ІТ)" і „Методика навчання математики (МНМ)". Метою курсу є доповнення знання студентів з методики навчання математики та інформаційних технологій; формування теоретичної бази знань про структуру комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики; про сутність, психолого-педагогічні засади і технологічні основи впровадження ІКЗН математики; вироблення у студентів практичних умінь і навичок застосування ППЗ у процесі навчання математики; забезпечення умов для неперервної самоосвіти на основі систематичної самостійної роботи; для підвищення рівня знань і розвитку творчих здібностей особистості.

В основі курсу лежить ідея продуктивного освоєння програмних засобів навчального призначення майбутніми вчителями математики через їх власну розробницьку діяльність. Курс орієнтований на впровадження проектних технологій навчання, на форми активного навчання – проведення навчальних експериментів, підготовку дидактичних та методичних матеріалів, доповідей, презентацій, розробку уроків алгебри і геометрії. Закінчується курс захистом індивідуальних проектів, розроблених матеріалів. Індивідуальні розробки дидактичних засобів, методичних матеріалів включаються до спільного проекту курсу „Методична скарбничка вчителя математики".

Для забезпечення навчального процесу необхідна аудиторія з відповідним комп'ютерним обладнанням, мультимедійним проектором, програмне забезпечення, до складу якого входить текстовий редактор (Microsoft Word чи OpenOffice.orgWriter); система для підготовки презентацій (Microsoft PowerPoint чи OpenOffice.orgImpress); програмні педагогічні засоби.

У ході вивчення курсу студенти набувають умінь та навичок працювати з такими ППЗ як GRAN1, Терм_7, Математика-5, пакети динамічної геометрії DG, GRAN-2D, GRAN-3D, програмними засобами навчального призначення „Геометрія-11", „Геометрія 7-9", „Алгебра-11", „Алгебра 7-9". Для самостійного ознайомлення пропонуються ПЗНП „Геометрія-10", „Алгебра-10", Математика-6, Евристико-дидактичні конструкції (ДНУ), система комп'ютерної алгебри Advanced Grapher, тема "Побудова перерізів многогранників площиною методом внутрішнього проектування за допомогою GRAN-2D, DG".

Вимоги до рівня підготовки студентів

Студенти повинні знати:	Опора на засвоєні модулі з МНМ та ІТ
основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання, зокрема засоби навчання математики	ПП.04.01.08 МНМ
діяльнісні середовища професійного призначення, зокрема педагогічні програмні засоби навчання математики, і їх використання в навчальному процесі	ПМ.04.02.11 ІТ
технологію розв'язування математичних задач з використанням засобів сучасних інформаційних технологій, а саме, з використанням ППЗ	ПМ.04.02.13 ІТ
поняття математичної моделі, обчислювальний експеримент, етапи математичного дослідження та організацію обчислювального експерименту з використанням ППЗ	ПМ.04.03.01 ІТ
організаційні форми навчання математики; зокрема урок, типи уроків, структуру уроку	ПП.04.01.07 МНМ
системи опрацювання текстів, графічної інформації	ПМ.04.02.03, ПМ.04.02.04ІТ

Назва і шифр типового завдання діяльності	**Зміст уміння**	**Шифр уміння**
Використання програмного засобу навчально-виховного призначення для підтримки педагогічного процесу 11.ПФ.Д.02	Вміти добирати засоби та методи навчання з використанням комп'ютерної техніки. Вміти використовувати комп'ютерно-орієнтовані системи навчання математики. Володіти методиками використання прикладних програмних продуктів для підтримки навчального процесу. Вміти розробляти план вивчення навчального матеріалу з поєднанням традиційних та нових інформаційних технологій. Вміти використовувати програмні засоби для обробки результатів проведених психологічних, педагогічних і методичних досліджень.	11.ПФ.Д.02 ПР.Р.01 11.ПФ.Д.02 ПР.Р.02 11.ПФ.Д.02 ПР.Р.03 11.ПФ.Д.02 ПР.Р.04 11.ПФ.Д.02 .ПР.О.06
Формулювання гіпотетичного твердження 1.ПФ.Е.04	Вміти проводити комп'ютерні експерименти з метою встановлення нових закономірностей.	1.ПФ.Е. 04.ЗР.Р.07
Дослідження математичної моделі з використанням засобів комп'ютерної техніки 2.ПФ.Д.03	Вміти добирати та використовувати готові програмні засоби для символьно-формульного, графічного аналізу математичних моделей. Вміти інтерпретувати, аналізувати та узагальнювати результати розрахунків експерименту. Володіти знаряддєвим застосуванням комп'ютера, системами опрацювання текстової, числової та графічної інформації.	2.ПФ.Д.03. ЗР.Р.04 2.ПФ.Д.03. ЗР.Р.08 3.ПФ.Д.02. ЗР.О.02
Використання засобів ІТ для розв'язування математичних задач	Вміти проектувати комплексне використання засобів навчання на певному уроці з математики у школі певного типу, зокрема демонстрацій, дидактичного матеріалу 3.ПФ.Д.02.	5.ПФ.Д.01 .ПП.Р.13
Складання календ. тем.плану	Вміти, виходячи з завдань уроку і програмних вимог, дібрати засоби наочності. 5.ПФ.Д.01	.ПФ.Д.02. ІП.Р.08

Підготовка до уроку і складання плану або плану-конспекту уроку 5.ПФ.Д.02	Вміти на основі попереднього проектування елементів уроку скласти план уроку, який може мати таку структуру: – цілі і педагогічні завдання уроку; – етапи уроку з зазначенням тривалості кожного з них; – методи і зміст перевірки знань і вмінь учнів; – зміст, послідовність і методика вивчення нового навчального матеріалу; – перелік необхідного обладнання; – перелік технічних засобів навчання і засобів наочності; – задачі і вправи з розв'язаннями; – підведення підсумків уроку; – домашнє завдання. Вміти виготовляти засоби наочності для проведення уроків різних типів та позакласних заходів з математики.	5.ПФ.Д.02. ПР.Р.13 8.ПФ.Д.01. ПП.Р.03
Використання дидактичних засобів (підручник, дидактичний матеріал, таблиця, програмний засіб, модель, тощо) 8.ПФ.Д.01	Вміти виготовляти моделі для унаочнення матеріалу, що розглядається на уроці, для демонстрації на позакласному заході з математики. Володіти методикою використання системи дидактичних засобів з використанням ТЗН. Вміти розробляти і виготовляти презентації для проведення уроків різних типів.	8.ПФ.Д.01. ПП.Р.05 8.ПФ.С.02. ПР.Р.02 8.ПФ.Д.03. ПП.Р.02
Використання технічних засобів навчання 8.ПФ.С.02	Вміти виготовляти і навчати учнів виготовленню моделей і інших засобів для розвитку їх практичних навичок.	8.ПФ.Д.03. ІП.Р.03
Створення дидактичних засобів 8.ПФ.Д.03	Вміти працювати з комп'ютером у якості користувача. Вміти працювати з текстовим і графічним редактором.	11.СП.Д.01. ІП.О.01 11.СП.Д.01. ІП.О.02
Підготовка документа, який містить текст, таблиці, графічні об'єкти	Вміти коректно скласти документ, користуючись засобами комп'ютерної технології. 11.СП.Д.01	11.СП.Д.01. ПП.О.05

СТРУКТУРА ЗАЛІКОВОГО КРЕДИТУ КУРСУ

Модуль 1. Використання ППЗ у навчанні математики, алгебри і початків аналізу

№	Тема лекції, основні питання
1	**Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики.** • Вхідне анкетування • Поняття комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики. Сутність поняття ІКТН. • Традиційні та комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби і форми організації навчання. Класифікація математичних пакетів (навчального призначення та професійних). • Психолого-педагогічні аспекти застосування інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики. • Ознайомлення з планом занять курсу, зразками індивідуальних завдань, переліком рекомендованої літератури • Коротка характеристика основних україномовних педагогічних програмних засобів навчання математики, алгебри, алгебри і початків аналізу (НЗНП Математика-5, Алгебра 7-9, Алгебра -11, GRAN1, ТерМ, Евристико-дидактичні конструкції).

№	Теми лабораторних робіт, зміст завдань	Індивідуальні завдання
2.	Лабораторна робота №1. (2 год.) **ППЗ Математика-5**. • Установка засобу на вінчестер комп’ютера. • Ознайомлення з електронними підручниками. • Прослуховування фрагментів уроків. • Виконання тестових завдань. • Виконання завдань підсумкових атестацій. • Розробка уроків у режимі *Конструктор*.	2 год. Самостійне вивчення ППЗ **Математика-6.** Підготовка матеріалів уроку
3.	Лабораторна робота №2. (2 год.) **ППЗ ТерМ_7.** • Тотожні перетворення раціональних виразів. • Лінійні рівняння, системи лінійних рівнянь. • Розв’язування задач за допомогою рівнянь і систем рівнянь (змішаний режим і перевірка кроку).	2 год. Складання і виконання варіанта підсум. контрольної роботи за 7 клас
4.	Лабораторна робота №3. (2 год.) **ППЗ Алгебра 7-9.** • Конструювання уроку алгебри (опорні конспекти, розв’язування завдань за допомогою програмного модуля "Алгебраїчні задачі"). • Виконання завдань, дібраних до уроку алгебри, підготовка конспекту уроку.	2 год. Добір і виконання завдань до уроку алгебри, підготовка конспекту уроку
5.	Лабораторна робота №4. (2 год.) **ППЗ Алгебра 7-9.** • Конструювання уроку алгебри (опорні конспекти, розв’язування завдань за допомогою програмного модуля "Графічні побудування"). • Виконання завдань, дібраних до уроку алгебри, підготовка конспекту уроку.	2 год. Добір і виконання завдань до уроку алгебри, підготовка конспекту уроку
6.	Лабораторна робота №5. (2 год.) **ППЗ Алгебра-11.** • Ознайомлення із змістом підручника. • Конструювання уроку. • Виконання завдань до уроку алгебри. • Підготовка текстових документів до уроку.	2 год. Добір і виконання завдань до уроку алгебри. Вивчення ППЗ **Алгебра-10**
7.	Лабораторна робота № 6. (2 год.) **ППЗ GRAN1.** • Побудова динамічних графіків лінійної, квадратичної, степеневої, дробово-раціональної і тригонометричних функцій; дослідження властивостей. • Побудова графіків елементарних функцій шляхом геометричних перетворень. • Побудова і дослідження графіків функцій, заданих явно і неявно в декартових координатах, таблично, заданих різними аналітичними виразами на різних інтервалах області задання функції. • *Побудова малюнків графіками функцій. • *Побудова кривих, заданих параметрично, у полярних координатах.	2 год. 1. Побудова малюнка за допомогою графіків функцій. 2. Добір завдань до уроку алгебри у 8-9 кл. за вибраною темою.
8.	Лабораторна робота № 7. (2 год.) **ППЗ GRAN1.** • Графічне розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем. • Динамічні графіки як інструмент дослідження розв’язків рівнянь та нерівностей з параметрами. • Використання різних режимів побудови графіків (точковий, ламана), їх переваги і недоліки.	2 год. Підготовка плану-конспекту уроку алгебри за допомогою текстового чи гра-

	• Наближені обчислення найбільшого (найменшого) значення функції на проміжку, обчислення площ фігур, об'ємів тіл обертання. • Найпростіші задачі математичної статистики.	фічного редактора.
9.	Лабораторна робота №8. (2 год.) **GRAN1, Евристико–дидактичні конструкції.** • Задачі лінійного програмування. • Підготовка текстових документів, презентацій за розробленими планами уроків з гіперпосиланнями на GRAN1. • Акцентовані програми, програми із запізнюючою корекцією, зчеплені програми, задача-метод, тестування.	2 год. Самостійне ознайомлення з можливостями програми Advanced Grapher.

Модуль 2. Використання ІКЗН в курсі геометрії.

№	Тема лекції, основні питання	
10	**Педагогічні програмні засоби навчання геометрії.** • Дидактичні принципи застосування ППЗ. • Навчальні дослідження в геометрії та їх підтримка засобами ІКТ. • Пакети динамічної геометрії GRAN-2D, DG. • НЗНП Геометрія 7-9, Геометрія-11 • Програмний засіб навчального призначення GRAN-3D. • Особливості підготовки дидактичних та методичних матеріалів до уроку математики з використанням ІКЗН.	
№	**Теми лабораторних робіт**	**Індивідуальні завдання**
11	Лабораторна робота №9. (2 год.) **Динамічна геометрія GRAN-2D, DG**. • Геометричні побудови в курсі планіметрії. • Вимірювальні інструменти. • Створення і використання макроконструкцій, написів, кнопок. • Порівняльний аналіз систем динамічної геометрії. • Поняття динамічного опорного конспекту як організаційно-методичної основи навчального дослідження. • Експертні системи для розв'язування трикутників, чотирикутників.	2 год. 1. Виконання індивідуальних лабораторних робіт з геометрії. 2. Добір завдань до уроку геометрії у 7-9 кл. за вибраною темою.
12	Лабораторна робота №10. (2 год.) **Динамічна геометрія.** • Дослідницькі інструменти систем динамічної геометрії. Динамічні вирази. • Етапи навчального дослідження та їх підтримка засобами пакетів динамічної геометрії. • Навчальні дослідження типу пошук властивостей та їх підтримка засобами динамічної геометрії. • Побудови геометричних місць точок. • Навчальні дослідження типу пошук властивостей, застосування, систематизація та їх підтримка засобами динамічної геометрії.	2 год. Розробка динамічного опорного конспекту для відкриття теореми, задачі на дослідження і доведення. Підготовка конспекту уроку геометрії.

13	Лабораторна робота №11. (2 год.) **Динамічна геометрія** • Геометричні перетворення фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності. • Створення динамічних креслень за видами перетворень. • Дослідження властивостей геометричних перетворень. • Дослідження властивостей груп геометричних перетворень на основі комп'ютерних експериментів.	2 год. 1. Дослідження властивостей геометричних перетворень. 2. Створення креслень з симетрією повороту.
14	Лабораторна робота №12. (2 год.) **Динамічна геометрія**. • Геометрична задача на побудову як алгоритмічна задача. Етапи розв'язування задач на побудову. • Розв'язування задач на побудову методом геометричних перетворень. • Створення динамічних креслень до задач на побудову. • Виконання побудов перерізів многогранників площиною за допомогою ППЗ з врахуванням властивостей паралельного проектування.	2 год. Розв'язування задач на побудову. Створення динамічного креслення до задачі на побудову. 2. Дослідження перерізів.
15	Лабораторна робота №13. (2 год.) **Динамічна геометрія** • Особливості вивчення теми „Координати і вектори на площині" з використанням пакетів динамічної геометрії. • Виконання лабораторної роботи до теми в зошитах з друкованою основою (DG). • Побудова графіків функцій. Побудова динамічних графіків засобами динамічної геометрії. • Створення динамічних креслень до задач. Рецензування виконаних завдань.	2 год. Завершення розробки конспекту уроку з гіперпосиланнями на ППЗ динамічної геометрії
16	Лабораторна робота №14. (2 год.) **ППЗ GRAN-3D**. • Обчислення елементів многогранників і тіл обертання; обчислення площі поверхні та об'ємів тіл. • Побудова перерізів многогранників. • Рецензування виконаних завдань, підготовка розроблених документів до захисту	2 год. 1. Розв'язування задач за допомогою GRAN-3D. 2. Підготовка до захисту матеріалів, доповіді.
17	Лабораторна робота № 15. (2 год.) **ППЗ Геометрія -7-9, Геометрія -11** • Ознайомлення із змістом електронних підручників. • Конструювання уроку геометрії 7-9. • Конструювання уроку геометрії 11.	2 год. Добір і виконання завдань до уроку геометрії Самостійне вивчення ППЗ **Геометрія-10**.
18	Лабораторна робота № 16. (2 год.) • Підсумкова конференція, захист проектів. • Тестування чи усне опитування • Вихідне анкетування.	Захист проекту. Включення індивідуальних матеріалів до загального проекту

Таблиця рейтингового оцінювання
з курсу „Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики”

студента ______________________________________ група ________

№	Зміст завдання	Максим. 100 балів
1	ППЗ Математика-5. Виконання тестування, розробка уроку (обов'язковий документ)	7
2	ТерМ_7. Підсумкова контрольна робота за 7-й клас, добір завдань, виконання в електронному зошиті	4
3	Розробка уроку алгебри за ППЗ Алгебра 7-9 (обов'язковий)	7
4	ППЗ Алгебра-11. Розробка уроку (обов'язковий документ).	6
5	Лабораторна робота по GRAN1	4
6	Розробка уроку алгебри (текстовий документ чи презентація) з гіперпосиланнями на ППЗ GRAN чи DG (обов'язковий документ)	6
7	Малюнок, побудований графіками функцій	5
8	Завдання математичної статистики	4
9	Завдання за самостійно вивченим засобом (Алгебра -10, Математика-6, Евристико-дидактичні конструкції, Advanced Grapher)	4
		Всього 47
10	ППЗ Геометрія 7-9. Розробка уроку (обов'язковий документ)	4
11	ППЗ Геометрія -11. Розробка уроку	4
12	Динамічна геометрія GRAN-2D чи DG. Розробка креслення до задачі на дослідження, на доведення	4
13	Динамічні креслення до теми „Геометричні перетворення”	4
14	Задача на побудову з підказками у вигляді написів, кнопок	4
15	Конспект уроку геометрії з гіперпосиланнями на файли динамічної геометрії (обов'язковий документ)	7
16	Лабораторна робота. ППЗ GRAN-3D. Створення наочностей „Стереометричні моделі” (обов'язковий документ)	4
17	Завдання по самостійно вивчених засобах і типах завдань	6
18	Захист розроблених матеріалів (обов'язковий вид роботи)	6
19	Тестування, усне опитування (обов'язковий вид роботи)	10
		Всього 53

Основні вимоги до розроблених матеріалів

1. Підготовлені конспекти уроків з використанням ППЗ повинні задовольняти загальним вимогам, що пред'являються до документів зазначеного типу – містити записи теми, мети, типу уроку, чітко виражену структуру, завдання до кожного етапу уроку. Завдання добирати з врахуванням профілю навчання (загальноосвітній чи поглиблене вивчення математики).

2. Дібрані завдання для використання ППЗ мають відповідати темі, бути підпорядкованими поставленій меті (акцент на розвиваюче навчання), сприяти розкриттю теми та формуванню знань, умінь і навичок учнів. Має бути зазначена до-

цільність застосування ППЗ, місце, час, на тому чи іншому етапі уроку.

3. Текстові документи і презентації повинні містити *Гіперпосилання* на файли, підготовлені за допомогою ППЗ. Згідно зі структурою уроку, текстові документи містять зміст (послуга *Вставка/Посилання/ Заголовки*), посилання на використану літературу (послуга *Вставка/Перехресні посилання*).

4. Динамічні опорні конспекти, розроблені за допомогою ППЗ динамічної геометрії, повинні містити написи, кнопки, які допомагають школяреві самостійно просуватися в ході дослідження, розв'язування задачі.

5. Файли, створені за допомогою GRAN1, містять заголовок-мітку, при потребі мітку-підказку до ходу роботи, вирази для функціональних залежностей, в тому числі з параметрами. Файли бажано зберігати у масштабі користувача.

6. Уроки, підготовлені за допомогою „Конструктора", повинні містити слайди для актуалізації опорних знань і умінь, тексти із завданнями повинні містити ім'я виконавця.

Приклади тем для розробки уроків алгебри з використанням GRAN1 (GRAN-2D, Advanced Grapher чи інших засобів)

складено на основі програми для класів з поглибленим вивченням математики

Початкові відомості про числові функції

1. Числова функція. Область визначення та множина (область) значень числової функції. Способи завдання числової функції. Графік числової функції. *[1]Приклади процесів, що описуються функціями.
2. Графік числової функції. Зростання та спадання числової функції.
3. Лінійна функція: її графік та властивості. Пряма пропорційність. Графік лінійного рівняння з двома змінними. *Приклади процесів.
4. Графічна інтерпретація систем лінійних рівнянь з двома змінними. *Задача про продукцію.
5. Лінійні нерівності з двома змінними та їхня графічна інтерпретація. Графічна інтерпретація систем лінійних нерівностей з двома змінними. *Найпростіші задачі лінійного програмування.
6. Функція $y(x)=|x|$: її графік та властивості. *Приклади елементарних перетворень, рівняння, функції з двома модулями.
7. Функція $y=k/x$, $(к\neq 0)$: її графік та властивості. *Приклад процесу, що описується функцією. Приклади елементарних перетворень, приклад графічного розв'язання рівняння.
8. Функція $y(x)=x^2$: її графік та властивості. *Приклад процесу, що описується функцією. Приклади елементарних перетворень.
9. Функція $y(x)=\sqrt{x}$: її графік та властивості. *Процес, що описується функцією. Приклади елементарних перетворень.
10. Функція $y(x)= x^3$: її графік та властивості. *Приклад графічного розв'язання рівняння.
11. Урок систематизації та узагальнення „Початкові відомості про функції".

Квадратична функція. Побудова графіків функцій.

12. Функція $y(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$: її графік та властивості.

[1] Символ „*" біля питання тут і далі означає, що рекомендується додатково включити питання і розкрити його з використанням ІКТ.

13. Графіки окремих видів квадратичної функції: $y(x)=ax^2+в$ $(a\neq 0)$, $y(x)=a(x-к)^2$ $(a\neq 0)$.
14. Квадратична функція загального вигляду $y(x)=ax^2+вx+c$, $(a\neq 0)$, графік та властивості.
15. Координати вершини параболи. Вісь симетрії параболи. Напрям «віток» параболи. *Парабола як геометричне місце точок (динамічне креслення GRAN-2D).
16. Проміжки монотонності квадратичної функції. Проміжки знакосталості квадратичної функції.
17. Застосування властивостей квадратичної функції до розв'язування задач про знаходження найбільших і найменших значень. * Додати динамічні креслення, виконані за допомогою GRAN-2D.
18. Узагальнення та систематизація вивченого до теми „Квадратична функція”.
19. Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.
20. Розв'язування задач, що зв'язані з розміщенням графіка квадратичної функції на координатній площині і з розміщенням коренів квадратного рівняння на числовій осі.
21. Розв'язування задач, що зв'язані з дослідженням квадратних рівнянь з параметрами.
22. Парні та непарні числові функції. Зображення довільної функції у вигляді суми парної та непарної функції.
23. Елементарні перетворення графіків функцій.
24. Побудова графіків дробово-лінійних функцій.
25. Побудова графіків функцій, аналітичний вираз яких містить знак абсолютної величини.
26. Побудова графіків функцій, що задані у «кусковий» спосіб.

Рівняння і нерівності. Системи рівнянь і нерівностей.

27. Графічний спосіб розв’язування та дослідження рівнянь.
28. Рівняння з двома змінними. Графік рівняння з двома змінними.
29. Системи рівнянь з двома змінними. Графічний спосіб розв'язування та дослідження систем рівнянь з двома змінними.
30. Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь. *Додати динамічні креслення, виконані за допомогою GRAN-2D.
31. Аналітичне задання множин точок на координатній площині. Лінійні нерівності з двома змінними та їхня графічна інтерпретація.
32. Системи лінійних нерівностей з двома змінними та їхня графічна інтерпретація. *Задачі лінійного програмування.
33. Нелінійні нерівності й системи нелінійних нерівностей з двома змінними та їхня графічна інтерпретація.
34. Нерівності й системи нерівностей, що містять знак абсолютної величини.
35. Урок узагальнення і систематизації. *Включаючи і аналітичні методи розв’язування. * Розробити схеми для систематизації і узагальнення.

Степінь з раціональним показником.

36. Функція $y = x^n, n$ – натуральне число: її графік та властивості.
37. Поняття про обернену та складену функції. Порівняння властивостей. Функція $y = \sqrt[n]{x}$, n – натуральне, більше одиниці. Графік функції та її властивості.

Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії.

38. Числові послідовності та способи їх задавання (формулою загального члена, в рекурентний спосіб). * Можна застосовувати інші засоби, наприклад, Excel.
39. Монотонні послідовності. Обмежені послідовності.
40. Арифметична прогресія. Формула *n*-го члена арифметичної прогресії. Характеристична властивість арифметичної прогресії. Формула для суми *n* перших членів арифметичної прогресії.
41. Геометрична прогресія. Формула *n*-го члена геометричної прогресії. Характеристична властивість геометричної професії. Формула для суми *n* перших членів геометричної прогресії. *Використати динамічні креслення, створені за допомогою GRAN-2D. Наприклад, комбінації подібних вписаних многокутників.
42. Формула складних відсотків. *Можна розглянути таблиці погашення кредитів з використанням Excel.

Елементи прикладної математики

43. Математичне моделювання (на конкретних прикладах).
44. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків.
45. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень величин. *Розглянути наближені обчислення площі фігури, об'єму тіла обертання, площі поверхні.
46. Найпростіші методи обробки статистичних даних. Середнє значення, мода та медіана вибірки. Гістограма, полігон.

Перелік тем уроків геометрії для використання в навчанні динамічної геометрії GRAN-2D, DG

складено на основі програми для класів з поглибленим вивченням математики

Вступне повторення і поглиблення.

Уроки систематизації та узагальнення.

1. Ознаки паралельності прямих. Властивості паралельних прямих. Сума величин внутрішніх кутів трикутника. Властивість зовнішнього кута трикутника.
2. Висота, бісектриса і медіана трикутника. Ознаки рівності трикутників. Властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка.
3. Рівнобедрений трикутник. Ознаки та властивості рівнобедрених трикутників. Прямокутний трикутник. Прямокутний трикутник з кутом 30° (властивість та ознака).
4. Коло. Дотична до кола. Властивість точок, розташованих на бісектрисі кута. Рівність відрізків дотичних до кола, які проведено з однієї точки.
5. Властивість трикутника, одна зі сторін якого є діаметром описаного навколо нього кола. Коло, описане навколо прямокутного трикутника. Медіана прямокутного трикутника, яку проведено до його гіпотенузи. Побудова дотичної до кола через точку, що лежить поза ним.
6. Задача на побудову та її розв'язування. Основні задачі на побудову (побудова трикутника за трьома сторонами; побудова кута, що дорівнює даному; побудова бісектриси даного кута; поділ даного відрізка навпіл; побудова прямої, яка перпендикулярна до даної прямої). Геометричне місце точок. Метод геометричних місць

Чотирикутники.

7. Чотирикутники. Опуклі та неопуклі чотирикутники. Елементи чотирикутників. Сума величин внутрішніх кутів чотирикутника.
8. Паралелограм та його елементи. Властивості та ознаки паралелограма.
9. Властивості бісектрис внутрішніх кутів паралелограма. Величини кутів, що утворюються висотами паралелограма. Побудова паралелограмів.
10. Прямокутник. Властивості та ознаки прямокутника.
11. Ромб та квадрат. Властивості та ознаки ромба і квадрата.
12. Теорема Фалеса. Поділ відрізка на довільне число рівних частин.
13. Середня лінія трикутника та її властивості. Паралелограм Варіньйона даного чотирикутника.
14. Трапеція та її елементи. Прямокутна трапеція. Рівнобічна трапеція. Властивості та ознаки рівнобічної трапеції. Середня лінія трапеції та її властивості.
15. Побудова трапеції за відомими сторонами; за основами і діагоналями. Обчислення елементів трапеції.
16. Визначні точки трикутників: центр описаного кола, інцентр (центр вписаного кола), центроїд (точка перетину медіан трикутника), ортоцентр (точка перетину висот трикутника або їхніх продовжень). Формула для радіуса кола, вписаного до прямокутного трикутника.
17. Вписані та центральні кути.
18. Вписані та описані чотирикутники.
19. Коло Ейлера (коло «дев'яти точок»).
20. Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу з теми „Чотирикутники”.

Теорема Піфагора та її застосування.

21. Косинус гострого кута. Теорема про бісектрису внутрішнього кута трикутника. Теорема про бісектрису зовнішнього кута трикутника.
22. Теорема Піфагора (пряма та обернена). Ілюстрація доведення теореми Піфагора за допомогою методу «площ». Поняття про «піфагорові трійки».
23. Формула для довжини висоти довільного трикутника. Наслідки з теореми Піфагора щодо властивостей похилих, їхніх проекцій та відповідних перпендикулярів.
24. Нерівність «трикутника». *Задача про найкоротшу відстань.
25. Значення теореми Піфагора в системі геометричних знань. Застосування теореми Піфагора до розв’язування найпростіших прикладних задач.
26. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.
27. Значення синуса, косинуса і тангенса деяких кутів. Зміна тригонометричних функцій при зростанні гострого кута.
28. Розв’язування прямокутних трикутників. Прикладні задачі.

Подібність трикутників.

29. Узагальнена теорема Фалеса.
30. Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників.
31. Застосування подібності трикутників: середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику; властивість бісектриси трикутника.
32. Застосування подібності трикутників до розв’язування прикладних задач.

Многокутники. Площі многокутників.

33. Многокутник та його елементи. Опуклі й неопуклі многокутники. Сума

кутів опуклого многокутника.
34. Вписані й описані многокутники.
35. Поняття площі многокутника. Основні властивості площ. Площа прямокутника.
36. Площа паралелограма. Площа трикутника.
37. Площа трапеції.

Розв'язування трикутників.

38. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°.
39. Найпростіші тригонометричні тотожності.
40. Теорема косинусів.
41. Теорема синусів.
42. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі.
43. Формули для знаходження площі трикутника.

Правильні многокутники.

44. Правильні многокутники. Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників.
45. Побудова правильних многокутників. *Побудова паркетів з правильних многокутників.
46. Довжина кола. Довжина дуги кола.
47. Площа круга та його частин.

Декартові координати на площині.

48. Прямокутна система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами.
49. Рівняння кола і прямої.
50. Геометричні місця точок. *Еліпс, гіпербола, парабола (рівняння канонічного виду), коло Апполонія.

Геометричні перетворення.

51. Переміщення та його властивості.
52. Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення. Рівність фігур.
53. Перетворення подібності та його властивості. Гомотетія.
54. Подібність фігур. Площі подібних фігур.

Вектори на площині.

55. Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів. Координати вектора.
56. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори.
57. Скалярний добуток векторів.
58. Застосування векторів до розв'язування задач. Задачі з векторами.

Початкові відомості з стереометрії (GRAN-3D).

59. Взаємне розташування прямих у просторі. Взаємне розташування площин.
60. Взаємне розташування прямої та площини. Перпендикуляр до площини.
61. Пряма призма. Піраміда. Площа поверхні та об'єм призми і піраміди.
62. Циліндр. Конус. Куля. Площі поверхонь і об'єми циліндра, конуса і кулі.
63. Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. – 1980. - №3. – с. 56 -57.
2. Андреев В.И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности. — Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1988. — 238 с.
3. Архіпова Т.Л. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів 7-9 класів у процесі вивчення геометрії з використанням комп'ютера: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – К.: 2002. – 236 с.
4. Бабанский Ю.К., Поташник М.М. Оптимизация педагогического процесса: (В вопросах и ответах). – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Рад. школа, 1983. – 287 с.
5. Бевз Г.П. Графічні моделі задач на рух // Математика. – 2002. – № 9.– С.10-11
6. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач. – К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.
7. Бурда М.І. Гуманістична орієнтація змісту підручників з математики // Проблеми сучасного підручника: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: Педагогічна думка, 2003. – Вип. 4. – С. 63-69.
8. Бурда М.І., Савченко Л.М. Геометрія: Навч. посібник для 8-9 кл. шк. з поглиб. вивченням математики. – К.: Освіта, 1996. – 240 с.
9. Буряк В.К. Самостійна робота з книгою. – К.: Знання, 1990. – 48 с.
10. Варущик Н.І., Войтенко С. В. Використання СІТ на уроках геометрії // Математика в школі. – К., 2005. – №2 – С. 2-4.
11. Вишенський та ін. Збірник задач з математики: Навч. посібник/ В.А.Вишенський, М.О.Перестюк, А.М.Самойленко. - 2-е вид., доп.- К.: Либідь, 1993. – 344 с.
12. Вінниченко Є.Ф. Розв'язування задач на ГМТ з використанням моделюючих програмних засобів // Математика в школі. – К., 2003. – №4,–С. 13-16.
13. Вінниченко Є.Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язування математичних задач: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання інформатики. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006, – 234 с.
14. Вінниченко Є.Ф., Костюченко А.О. Деякі особливості геометричних перетворень в програмі GRAN-2D // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.:НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. – № 5 (12). – С. 114-120.
15. Вітюк О.В. Розвиток образного мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання інформатики. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2001, – 211 с.
16. Волкова Н.П. Педагогіка: Посібник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Видавничий центр "Академія", 2003. - 576 с.
17. Выготский Л.С. Психология. – М.: Изд-во ЭКСМО-Пресс, 2000. – 1008 с.
18. Геометрія: Підруч. для учнів 10-11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, В.М. Владіміров. – 2-ге вид. - К.: Освіта, 2003. – 239 с.
19. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – Київ: Либідь, 1997. – 376 с.
20. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К: РИА "Текст", –1992. – 290 с.
21. Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані си-

стеми навчання: Зб. наукових праць / Редрада. - К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. - №4 (11). – С.56-62.
22. Данильчук Е. В. Методологические предпосылки и сущностные характеристики информационной культуры педагога // Педагогика. – 2003. – № 1. – С. 65–73.
23. Дементієвська Н.П., Морзе Н.В. Як можна комп'ютерні технології використати для розвитку учнів та вчителів? // Актуальні проблеми психології: Психологічна теорія і технологія навчання / За ред. С.Д.Максименка, М.Л.Смульсон. – К.: Міленіум, 2005. – Т.8, вип. 1. – С.23-38.
24. Державна національна програма "Освіта" (Україна XXI століття). – К.: Райдуга, 1994. – 64 с.
25. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти.- К.: Постанова Кабінету Міністрів України № 24 від 14.01.2004. – 121с.
26. Ершов А. П. Компьютеризация школы и математическое образование //Математика в школе. – 1989. – №1. – С. 14–31.
27. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук праць/ Редкол. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 3-16.
28. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
29. Жалдак М.І. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб. для підготов. відділень / М.І.Жалдак, А.В. Грохольська, О.Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2003. – 304 с.
30. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів К.: РННЦ „ДІНІТ", 2003. – 168 с.
31. Жалдак М.И., Горошко Ю.В., Винниченко Е.Ф. Математика с компьютером: Пособие для учителей. – К.: РУНЦ „ДИНИТ", 2004. – 251 с.
32. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів. – К.: Шкільний світ, 2006. – 119с.
33. Жалдак М.І. Про проблеми навчання інформатики в середніх та вищих навчальних закладах // Актуальні проблеми психології: Психологічна теорія і технологія навчання / За ред. С.Д. Максименка, М.Л. Смульсон. – К.: Міленіум, 2005. – Т. 8, вип. 1. - С. 39-53.
34. Зайцева Т. В. Розвиток розумової діяльності старшокласників у процесі вивчення алгебри та початків аналізу з використанням інформаційних технологій: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 2001. – 215 с.
35. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. За редакцією З.І.Слєпкань. – Харків, „Гімназія", 2002. - 160 с.
36. Зеленкова Н.І. Дидактичні умови формування пізнавальної самостійності школярів на уроках математичного циклу. Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. – Кіровоград, 1996. – 20 с.
37. Капіносов А.М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2005 . – 112 с.
38. Каяліна С.В. Розвиток пізнавальної самостійності учнів засобами комп'ютерної техніки на уроках хімії. Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання хімії. – К. НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 21 с.
39. Кисільова В.П. Формування творчої особистості учня профільного ліцею у процесі навчання: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04 – теорія і ме-

тодика професійної освіти. – К: Ін-т педагогіки і психології проф. освіти АПН України, 2001. – 22 с.
40. Коваленко В.Г. та ін. Алгебра: Експерим. навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. вивченням математики і спеціалізов. шк. фізико-мат. профілю. - 3-тє вид. – К.: Освіта, 1998. – 228 с.
41. Концепція базової математичної освіти в Україні / З. І.Слєпкань, М. І. Шкіль, А. Я. Дороговцев і ін. – К.: ВІПОЛ, 1993. – 32 с.
42. Концепція національної системи освіти / Історія української школи і педагогіки: Хрестоматія / Упоряд. О.О. Любар. За ред. В.Г. Кременя. – К.: Т-во „Знання", КОО, 2003. – С.721-750.
43. Копотій В.В. Використання методу навчальних проектів у класах природничо-математичного профілю. // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць/ Редкол. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. - № 3(10) – 2005. – С.84-102.
44. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Під ред. Л.М.Проколієнко; Упор. В.В.Андрієвська, Г.О. Балл, О.Т. Губко, О.В. Проскура. – Київ: Радянська школа, 1989. – 608 с.
45. Крамаренко Т.Г. Розвиток творчого мислення школяра в навчанні математики через впровадження проектних технологій //Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. - № 5 (12). – С. 85-92.
46. Крамаренко Т.Г. Розвиток творчих здібностей учнів в процесі навчання математики // Наукові записки. – Випуск № 60. Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2005. – Частина 2. – С. 67-73.
47. Крамаренко Т.Г. Активізація розумової діяльності школярів через розв'язування практичних задач на екстремум // Математика в школі, 2006. - № 9. – С. 48-53.
48. Крамаренко Т.Г. Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами // Математика в школі. – 2007. –№6. – С. 41–48.
49. Крамаренко Т.Г. Розвиток просторової уяви та просторового мислення школяра засобами ІКТ // Вісник Черкаського університету: Збірник наукових праць. – Вип. 93. – Черкаси: Видавництво ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2006. – С. 83-89.
50. Крамаренко Т.Г. Підготовка вчителя до застосування ІКТ у шкільному курсі математики // Модернізація освіти: пошуки, проблеми, перспективи: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Київ-Переяслав-Хмельницький, 22-25 травня 2006 року). – Київ-Переяслав-Хмельницький, 2006. – С. 248 -250.
51. Крамаренко Т.Г. Деякі аспекти вивчення курсу „Інформаційно-комунікаційних засобів навчання математики". Проблеми підготовки та перепідготовки фахівців у сфері інформаційних технологій / Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції „Комп'ютерні технології в будівництві": Київ-Севастополь, 18-21 вересня 2007 р. – Кривий Ріг, 2007. – С. 51-52.
52. Крамаренко Т.Г. Площі плоских фігур. Урок геометрії. 9 клас // Учитель року-2004. Відкриті уроки з математики. / Упорядн. Н.С. Прокопенко, Н.П. Щекань – Х.: Вид.група „Основа", 2005. – С. 65-70.
53. Крамаренко Т.Г. Логарифмічна функція $y=\log_a x$. Властивості, розв'язування задач // Математична газета, 2006. - № 10. – С. 12-16.
54. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. — М.: Просвещение, 1968. – 431 с.
55. Кушнир И.А. Математическая энциклопедия. – К.: Астарта , 1995. – 768 с.
56. Лернер И.Я. Проблемное обучение. – М.: Знание, 1974. – 64 с.

57. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений. М.: Просвещение, 1991. – 127 с.
58. Лисенко Т.І. Використання комп'ютерів на уроках алгебри і початків аналізу // Математика в школі. – 2004. – № 3. – С. 22-25.
59. Лов'янова І.В. Формування інтелектуальних умінь старшокласників у процесі вивчення предметів природничого циклу. Автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.09 – теорія навчання, – К: Ін-т педагогіки АПН України, 2006. — 22 с.
60. Лосєва Н.М. Прагнення до саморозвитку учнів засобами стереометрії // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 17.– Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – С. 50-61.
61. Лук А.Н. Психология творчества. – М.: Наука, 1978. – 127 с.
62. Лук'янова С.М. Розвиток творчих здібностей учнів під час розв'язування типових текстових задач арифметичними способами // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 25.- Донецьк: Фірма ТЕАН, 2006. – С. 154-158.
63. Лупан І.В. Лабораторні роботи на уроках алгебри і початків аналізу в 10 класі // Математика в школі. – 2000. - №6. – С.36-39.
64. Львов М.С. Шкільна система комп'ютерної алгебри ТерМ 7-9. Принципи побудови та особливості використання. // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук. праць / Редкол.- К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – №3 (10). – 2005. – С. 160-169.
65. Мадзігон В.М., Лапінський В.В., Дорошенко Ю.О. Педагогічні аспекти створення і використання електронних засобів навчання // Проблеми сучасного підручника: збірник наукових праць. Випуск 4. – К.: Педагогічна думка, 2003. – С. 70-82.
66. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків. – К.: Радянська школа, 1977. – 104 с.
67. Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. Мотивация учения и ее воспитание у школьников. – М.: Педагогика, 1983. – 64 с.
68. Машбиц Е.И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы. – М.: Знание, 1986. – 80 с.
69. Машбиць Ю.І., Смульсон М.Л. Актуальні психолого-педагогічні проблеми дистанційного навчання // Актуальні проблеми психології: Психологічна теорія і технологія навчання / За ред. С.Д.Максименка, М.Л.Смульсон. – К.: Міленіум, 2005. – Т.8, Вип. 1. – с. 6-23.
70. Михалін Г.О. Використання алгоритмів у процесі навчання математичного аналізу // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 8. – 2004. – С.55 – 65.
71. Моляко В.А. Психология решения школьниками творческих задач. – К.: Радянська школа, 1983. – 94 с.
72. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики: Навч. посіб.: У 4 ч. / За ред. акад. М. І. Жалдака. – К.: Навчальна книга, 2003. – Ч.І: Загальна методика навчання інформатики. – 254 с.; Ч.ІІ: Методика навчання інформаційних технологій. – 287 с.
73. Морзе Н.В., Дементієвська Н.П. Intel Навчання для майбутнього (Адаптація до українського видання).– К.: Видавнича група BHV. 2004. – 416 с.
74. Національна доктрина розвитку освіти // Джерело. – № 9-10. – 2002. Дніпропетровськ. – С. 3-18.
75. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загально-освітн. навч. закладів. –Х.: Світ дитинства, 2004.- 432 с.

76. Освітні технології: Навч.-метод. посіб. / О.М. Пєхота, А.З.Кіктенко, О.М.Любарська та ін. За загальн. ред. О.М.Пєхоти. – К.:А.С.К.,2001.- 256 с.
77. Панченко Л.В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики // Математика в школі. – 2004. - №9. – С. 21-28.
78. Педагогика в вопросах и ответах: Учебное пособие / Л.В. Кондрашова, А.А. Пермяков, Н.И.Зеленкова, А.Ю.Лаврешина. – Кривой Рог: КГПУ, 2003. – 234 с.
79. Платонов К.К. Краткий словарь системы психологических понятий. Учебное пособие. – М.: Высш. школа, 1981. – 175 с.
80. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 463 с.
81. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. посібн. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.–192 с.
82. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, в 2-х частях – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
83. Програмний засіб "Програмно-методичний комплекс Терм VII підтримки практичної навчальної математичної діяльності": Інструкція з інсталяції та експлуатації. – Випуск 2. – Херсон, 2004. – 32 с.
84. Програма для класів з поглибленим вивченням математики . 8-11 класи. К.: Бібліотечка „Шкільного світу", № 37(145), жовтень, 2001. –23 с.
85. Програма спеціального курсу „Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі математики загальноосвітніх навчальних закладів" (автори М.І. Жалдак, В.Ю.Биков, Ю.О.Жук, С.А.Раков, Л.І. Білоусова, В.П. Горох) // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск VI: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавн. відділ НметАУ, 2006. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – С.4-20.
86. Разумовский В.Г. ЭВМ и школа: Научно-педагогическое обеспечение // Сов. педагогика. – 1985. – № 9. – с. 12–16.
87. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: Дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. – К., 2005. – 503 с.
88. Раков С. А., Горох В. П., Осенков К. О., Думчикова О. В., Костіна О. В, Ларін О. Р., Лисиця В. І., Олійник Т. О., Пікалова В. В. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG // Посібник для вчителів математики. – Харків: Вікторія. – 2002. – 136 с.
89. Раков С.А. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням пакета динамічної геометрії DG // Математика в школі, - 2005. –№ 7. – С.2-9.
90. Рамський Ю.С. Інформаційне суспільство. Інформатизація освіти // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 16-27.
91. Репета В.К. та ін. Задачі з параметрами. Розв'язки, рекомендації, приклади: Навчальний посібник для старшокласників та абітурієнтів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 264 с.
92. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. В 2-х томах. /АПН СССР. – М.: Педагогика, 1989.
93. Сисоєва С.О. Підготовка вчителя до формування творчої особистості учня. – К.: Поліграфкнига, 1996.– 406 с .
94. Скафа Е.И. Информационные технологии обучения и их роль в формировании эвристической деятельности учащихся // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових праць. Вип. 19. -

Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – С. 9-21.
95. Скафа Е.И. Эвристический подход в обучении математике // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 14. - Донецьк: Фірма ТЕАН, 2000. – С. 33-40.
96. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004.– 439 с.
97. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
98. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.
99. Смалько О.А. Використання програмного педагогічного засобу „GRAN-2D" на уроці планіметрії // Математика в школі. – 2003.– №1. – С. 10-14.
100. Смирнова-Трибульска Є.М. Використання комп'ютера при навчанні математики в польській школі. // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 93-99.
101. Смирнова-Трибульська Є.М. Інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності вчителя: Посібник для вчителів. – Херсон: Айлант, 2007. – 560 с., іл.
102. Співаковський О. В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій: Дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. – К., 2003. – 534 с.
103. Степанов О.М., Фіцула М.М. Основи психології і педагогіки: Посібник. – К.: Академвидав, 2003. – 504 с.
104. Тарасенкова Н.А. Диференційовані завдання за готовими малюнками для 8 класу. – К.: Кімо, 1999. – 80 с.
105. Теплицький І.О. Розвиток творчих здібностей школярів засобами комп'ютерного моделювання: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 - К., 2000. – 222 с.
106. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Розвиток творчих здібностей школярів засобами комп'ютерного моделювання: психолого-педагогічний аспект // Актуальні проблеми психології: Психологічна теорія і технологія навчання / За ред. С.Д.Максименка, М.Л.Смульсон. – К.: Міленіум, 2005. – Т.8, вип. 1. – с. 225-232.
107. Тополя Л.В. Математичні відкриття у процесі дидактичних ігор з комп'ютерною підтримкою //Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. Випуск 5. – 2002. – С. 110-118.
108. Тополя Л.В. Дидактичні ігри під час вивчення алгебри та геометрії в 7 – 9-х класах. Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 . – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. — К., 2003. — 20 с.
109. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: Монографія. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.
110. Тюхтин В.С. Взаимодействие человека с ЭВМ при решении творческих задач / Социальные и методологические проблемы информатики, вычислительной техники и средств автоматизации (материалы «Круглого стола») // Вопросы философии. 1986. - №9. – С.108-110.
111. Фіцула М.М. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 1991. – 192 с.
112. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
113. Цукарь А.Я. Упражнения на развитие пространственного воображения // Математика в школе. – 2000. – №9. – С.14-18.
114. Хуторской А.В. Современная дидактика: Учебник для вузов: – СПб: Пи-

тер, 2001. – 544 с. : ил. – (Серия «Учебник нового века»).
115. Чашечнікова О.С. До проблеми розвитку творчих здібностей // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 17. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – С. 3-14.
116. Чашечнікова О.С. Система компонентів творчого мислення, що можуть діагностуватися в процесі навчання математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 14. - Донецьк: Фірма ТЕАН, 2005. – С. 33-40.
117. Чепрасова Т.І. Підвищення практичної значущості результатів навчання інформатики в старших класах середньої школи в умовах НІТН. Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1981. – 217 с.
118. Черных Л. А. Теоретические основы разработки методической системы обучения // Евристика та дидактика точних наук: Зб. наук. робіт. – Вип. 3. – Донецьк: Донецька школа евристики та точних наук, 1995. – С. 15–19.
119. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. – М. : Педагогика, 1982. – 208 с.
120. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
121. Шелестова Л. та ін. Як допомогти дитині стати творчою особистістю / Упоряд. Л. Шелестова. - К.: Ред. загальнопед. газ., 2003. - 112 с. – (Бібліотека „Шкільного світу”).
122. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу: Підручн. для учнів 10 кл. з поглибл. вивч. математики в середн. закладах освіти. – К.: Освіта, 2000. – 318 с.
123. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу: Підручн. для учнів 11 кл. з поглибл. вивч. математики в середн. закладах освіти. – К.: Освіта, 2001. – 311 с.
124. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп: Пер. с польского. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
125. Щиряков А.Н. Как развивать пространственное воображение учащихся // Математика в школе. – 1991. - № 1. – С. 29-32.
126. Якиманская И. С. Развивающее обучение. – М.: Просвещение, 1979. – 158 с.
127. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – Научн.-исслед. ин-т общей и пед. психологии Акад. пед. наук СССР. – М.: Педагогика, 1980. - 240 с.
128. Ясінський В.В. та ін. Вибрані конкурсні задачі з математики. Т.1. Арифметика, Алгебра: Навчальний посібник для вступників до вищих навч. закл. К.: Фенікс, 2002. - 368 с.
129. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів, версія 1.0. – Рівне: ПП Контур плюс, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
130. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів України», версія 1. – Херсон, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows XP.
131. Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Алгебра, 10 клас». – К.: УкрПриборСервис, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
132. Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Алгебра, 11 клас». – К.: УкрПриборСервис, 2006. – 1 електрон. опт. диск

(CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
133. Педагогічний програмний засіб “Бібліотека електронних наочностей ”Геометрія, 7-9 клас”. – К. Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
134. Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 10 клас». – К. Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
135. Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 11 клас». – К. Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
136. Програмний комплекс "GRAN", версія 1.0. – К.: Республіканський навчально-методичний центр "Дініт", 2003. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 64 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
137. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Динамічна геометрія DG” для загальноосвітніх закладів, версія 1.0. – Харків, 2002. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 64 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
138. Антологія афоризмів / Упор. Л.П. Олексієнко. – Д.: Видавництво "Стакер", 2004. – 704 с.

Адреси деяких освітніх порталів, веб-сайтів

• http://www.mon.gov.ua/ - офіційний сайт Міністерства освіта та науки
• http://osvita.org.ua – освітній портал – каталог освітніх ресурсів, новини освіти, вищі навчальні заклади України і Росії
• http://edu.ukrsat.com/ - для вчителів – методичні розробки, навчальні програми, для учнів – бібліотеки,
• http://edu.km.ru — сайт Відділу освітніх проектів компанії «Кирилл и Мефодий»
• http://www.iteach.ru — російський сайт програми Intel «Навчання для майбутнього»
• http://www.intel.com/education/teach - Intel® Teach to the Future
• http://www.is.svitonline.com/malinman/rus/nav.htm - весела математика. Багато цікавої інформації, цікаві задачки, парадокси
• http://www.unicyb.kiev.ua/MMEDIA/reports/TaisiyaNazarenko/index.htm - Електронна бібліотека математичної літератури (математичні видання, журнали, публікації, посилання на сторінки з математичними ресурсами Інтернету)
• http://www.bymath.net. – Вся елементарна математика. Середня математична Інтернет-школа.
• http://itdrom.com/ – Школьный IT-университет (Росія).
• http://ostriv.in.ua – Шкільний Інтернет-портал "Острів Знань" (Україна).
• www.mathler.narod.ru –Російський сайт з різноманітною математичною інформацією
• www.amazon.com – База даних книг з комп’ютерної математики (одна з найбільших в Internet)
• www.emis.de/math –Європейське математичне товариство (публікації, присвячені викладанню математики)
• www.exponenta.ru – Російський освітній математичний сайт
• http://math-on-line.com – Цікава математика для школярів
• http://www.peoples.ru –Біографії відомих людей (математиків)
• http://mathem.hl.ru – Математика On-line

Навчальне видання

Крамаренко Тетяна Григорівна

УРОКИ МАТЕМАТИКИ З КОМП'ЮТЕРОМ

Посібник для вчителів і студентів

Додаток: компакт-диск

В авторській редакції

Дизайн і комп’ютерна верстка автора

Відповідальний за випуск В. В. Стецюк

Підписано до друку 16.04.2008. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,81.
Тираж 300 прим. Замовлення 706.

ПП "Видавничий Дім".
50063 Кривий Ріг, вул.Тухачевського, 26. Свідоцтво ДК № 515 від 03.07.2001 р.

Віддруковано у комунальному підприємстві "Жовтнева районна друкарня".
50014 Кривий Ріг, вул. Електрична, 5. Тел. (056) 407-29-02.