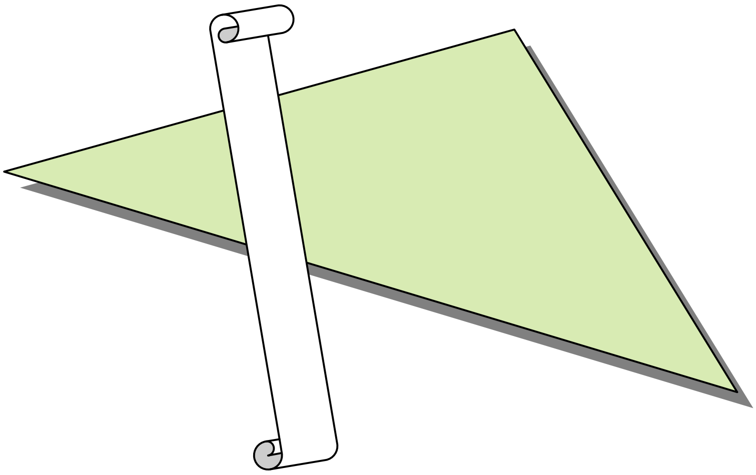
Міністерство освіти і науки України

Криворізький державний педагогічний університет

Кафедра математики



І.В. Лов'янова

Л.Р. Корольська

Вища математика

Навчальний посібник для студентів нематематичних спеціальностей педагогічних вузів за вимогами кредитно-модульної системи

Кривий Ріг

2008

УДК 512.86+517.131

Рецензенти:

Капіносов А.М., кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету.

Серебреніков В.М., кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Криворізького технічного університету.

Друкується за рішенням кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (протокол №5 від 20 листопада 2008р.)

І.В.Лов'янова, Л.Р.Корольська. Вища математика: Навчальний посібник для студентів нематематичних спеціальностей педагогічних вузів за вимогами кредитно-модульної системи / Під заг. ред. проф. В.В.Корольського – Кривий Ріг: КДПУ, 2008. – 214 с.

Навчальний посібник містить довідково – теоретичний матеріал у вигляді формул, таблиць, схем, який доповнює зміст лекцій курсу і допомагає у виконанні вправ для самостійної роботи; завдання для самостійного виконання, які можуть бути використані на практичних заняттях, у домашніх завданнях, для організації самостійної роботи студентів.

Для викладачів і студентів педагогічних університетів.

Передмова

Методичний посібник містить довідково – теоретичний матеріал у вигляді формул, таблиць, схем, який доповнює зміст лекцій курсу і допомагає у виконанні вправ для самостійної роботи; завдання для самостійного виконання, які можуть бути використані на практичних заняттях (ПЗ), у домашніх завданнях (ДЗ), для організації самостійної роботи студентів (СРС); запитання на залік та екзамен; перелік рекомендованої літератури та методичні вказівки до організації занять студентів при вивченні курсу вищої математики.

Зміст курсу розбито на вісім модулів. Сплановано різні види контролю по кожному модулю, а саме: контрольні роботи (КР), залік, екзамен. Методичний посібник містить у собі весь необхідний матеріал для якісної підготовки кожного студента до модуль – контролю. Так, у посібнику подано вказівки до розв’язання типових задач, перелік знань та умінь з кожного модуля, довідковий матеріал з окремих питань програми.

Посібник сприятиме організації продуктивної діяльності студентів на лекціях, практичних заняттях, під час самостійної роботи і виконання КР, на консультаціях, екзаменах і заліках.

Структура посібника відповідає логіці засвоєння матеріалу. Так по кожному модулю вказано вимоги до знань і умінь студента по закінченні вивчення модуля, довідковий матеріал, завдання для самостійного опрацювання, вид контролю знань по даному модулю (письмова самостійна робота, КР, залік, екзамен), вказівки до виконання завдань.

Якщо на вивчення дисципліни “Вища математика” відводиться загальна кількість годин – 216 (екологічний профіль), то за змістовими модулями години розподіляються так:

М 1. Лінійна і векторна алгебра________________18 годин

М 2. Аналітична геометрія____________________16 годин

М 3. Вступ до математичного аналізу___________18 годин

М 4. Диференціальне числення функції однієї змінної____28 годин

М 5. Інтегральне числення функції однієї змінної_28 годин

М 6. Диференціальні рівняння __________________38 годин

М 7. Елементи теорії ймовірностей_______________32 години

М 8. Елементи математичної статистики__________36 годин.

Якщо на вивчення дисципліни відводиться 54 години, то відповідно зменшується кількість годин по кожному модулю, а саме: М 1 – 3 години, М 2 – 2 години, М 3 – 18 годин, М 4 – 12 годин, М 5 – 12 годин, М 6 – 3 години, М 7, М 8 – 4 години. Розподіл загальної кількості годин на лекції, практичні заняття, СРС подано в таблиці 2. При цьому використовуються такі форми модульного контролю, як модульно – рейтинговий контроль, контрольна робота, виконання і захист індивідуальних завдань.

За навчальним планом спеціальності «Географія. Основи економіки» на вивчення дисципліни «Вища математика» відводиться 108 годин, які за змістовими модулями розподіляються так:

М 1. Елементи векторної і лінійної алгебри, аналітична геометрія____26 годин

М 2. Елементи математичного аналізу______________________28 годин

М 3. Елементи теорії ймовірностей__________________________30 години

М 4. Елементи математичної статистики____________________24 години.

Розподіл загальної кількості годин на лекції, практичні заняття, СРС, а також форми модульного контролю представлено в таблиці 1.

Розподіл балів при оцінюванні з навчальної дисципліни “Вища математика” здійснюється за рейтинговою системою.

Таблиця 1.

Змістові модулі з вищої математики

(екологічний профіль)

I СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	всього
1	Числа і простори	1	-	2	3
2	Векторна алгебра	2	2	2	6
3	Система лінійних алг.рівнянь	4	5	-	9
	Загальна сума	7	7	4	18

Форма модульного контролю – контрольна робота.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	всього
1	Площина	2	3		5
2	Криві другого порядку	2	2	2	6
3	Поверхні другого порядку	1	-	2	3
	Загальна сума	5	5	4	14

Форма модульного контролю – Модульно-рейтинговий контроль.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	всього
1	Функції	2	2	2	6
2	Границя функції	2	2	2	6
3	Неперервність функції	1	-	2	3
4	Деякі відомості про комплексні числа і функції	1	2	-	3
	Загальна сума	6	6		18

Форма модульного контролю – Модульно – рейтинговий контроль.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	Срс.	Всього
1	Задачі, які приводять до поняття похідної функції	-	-	2	2
2	Означення похідної функції. Фізичний зміст похідної.	2	2	2	6
3	Теореми про похідні	2	2	2	6
4	Таблиця похідних	2	2	2	6
5	Застосування теорем диференціального числення до дослідження функцій	2	2	-	4
6	Побудова графіка функції однієї змінної	2	2	-	4
	Загальна сума	10	10	8	28

Форма модульного контролю – Модульно – рейтинговий контроль.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС.	Всього
1	Первісна і невизначений інтеграл	-	-	2	2
2	Таблиця основних інтегралів	2	2	2	6
3	Методи інтегрування функції	2	2	2	6
4	Визначений інтеграл	2	2	4	8
5	Обчислення інтегралів	2	2	2	6
	Загальна сума	8	8	12	28

Форма модульного контролю – Модульно-рейтинговий контроль.

II СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	Всього
1	Найпростіші типи рівняння першого порядку	3	3	2	8
2	Окремі типи диференціальних рівнянь першого порядку	4	4	2	10
3	Диференціальні рівняння вищих порядків	4	4	2	10
4	Принципи моделювання екологічних задач за допомогою диференціальних рівнянь	3	3	4	10
	Загальна сума	14	14	10	38

Форма модульного контролю – Контрольна робота.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС.	Всього
1	Основні теореми теорії ймовірностей	4	4	2	10
2	Випадкові величини. Числові характеристики	2	4	2	8
3	Закони розподілу	2	2	4	8
4	Ймовірнісний підхід до розв'язування задач екології	2	-	4	6
	Загальна сума	10	10	12	32

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 8
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	Всього
1	Генеральна сукупність вибірки. Числові характеристики	4	4	2	10
2	Перевірка статистичних гіпотез	4	2	4	10
3	Лінійна кореляція	4	4	4	12
4	Статистична обробка експериментальних даних в дослідженнях природничих процесів	-	-	4	4
	Загальна сума	12	10	14	36

Таблиця 2

Вища математика

Змістові модулі для хіміко – біологічного профілю

№ п/п	Зміст модуля	Кількість годин			
		Лекції	Практичі	СРС	Всього
М1	Числа і простори	1	-	2	3
М2	Площина	1	-	1	2
М3	Функції Границя функції Неперервність функції Деякі відомості про комплексні числа	2 2 1 1	2 2 - 2	2 2 2 -	
	Разом	6	6	6	18
М4	Означення похідної. Теореми про похідні. Застосування теорем диференціального числення. Побудова графіка функції однієї змінної	2 1 1	2 - 2	- 2 2	
	Разом	4	4	4	12
М5	Невизначений інтеграл, таблиця основних інтегралів. Визначений інтеграл	2 2	2 2	2 2	
	Разом	4	4	4	12
М6	Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку	2	-	1	3
М7-8	Елементи теорії ймовірностей й матстатистики в дослідженнях природничих процесів	-	2 2	-	
	Разом	-	4	-	4
	Загальна сума годин	18	18	18	54

Таблиця 3

Змістові модулі з вищої математики

(географічний профіль)

I СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ, ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	всього
1	Система координат на площині, основні поняття	2	2	2	6
2	Векторна алгебра	2	2	-	4
3	Система лінійних алгебраїчних рівнянь	2	4	4	10
4	Криві другого порядку у канонічній формі	2	2	2	6
	Загальна сума	8	10	8	26

Форма модульного контролю –рейтинг контроль.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	всього
1	Вступ в аналіз	2	2	2	6
2	Диференціальне числення функції однієї змінної	4	4	4	12
3	Інтегральне числення функції однієї змінної	2	2	4	8
4	Поняття про диференціальні рівняння	2	-	-	2
	Загальна сума	10	8	10	28

Форма модульного контролю – рейтинг - контроль.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС.	Всього
1	Випадкові події та операції над ними	2	2	-	4
2	Основні теореми теорії ймовірностей	2	2	2	6
3	Асимптотичні формули Бернуллі	2	2	2	6
4	Випадкові величини, числові характеристики випадкових величин	2	3	2	7
5	Закон великих чисел	2	1	4	7
	Загальна сума	10	10	10	30

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

№ п/п	Змістовний модуль	Кількість годин			
		Лекції	Практичні	СРС	Всього
1	Генеральна сукупність вибірки. Аналіз варіаційного ряду	2	2		4
2	Числові характеристики варіаційного ряду. Методи обчислення.	1	2	2	5
3	Лінійне рівняння регресії	2	2	2	6
4	Статистична обробка даних в дослідженнях природних процесів	1	2	2	5
5	Поняття про метод Монте Карло	2	-	2	4
	Загальна сума	8	8	8	24

Форма модульного контролю – Виконання та захист індивідуальних завдань.

Орієнтовний розподіл курсу на модулі.

М 1. Лінійна і векторна алгебра.

М 2. Аналітична геометрія.

М 3. Вступ до математичного аналізу.

М 4. Диференціальне числення функції однієї змінної.

М 5. Інтегральне числення функції однієї змінної.

М 6. Диференціальні рівняння.

М 7. Елементи теорії ймовірностей.

М 8. Елементи математичної статистики.

Таке розбиття курсу на модулі передбачене програмою та держстандартами математичної підготовки студентів природничого профілю. Причому, в залежності від спеціалізації студентів той чи інший модуль розглядається більш поглиблено, так в групах географічного профілю більше годин відводиться на вивчення модулів М1, М2, в групах хіміко – біологічного профілю акценти зроблено на теми модулів М3 – М6, в групах екологів на М7, М8.

Таблиця 4. Розподіл балів при рейтинговій системі оцінювання з навчальної дисципліни “Вища математика”

Модулі	Модуль 1					Модуль 2		
Кількість балів за модуль								
Кількість балів за змістовні модулі та модульконтроль	ЗМ 1	ЗМ 2	ЗМ 3	ЗМ 4	ЗМ 5	ЗМ 6	ЗМ 7	ЗМ 8
Кількість балів за видами робіт								
Відвідування лекцій								
Рівень знань на поточних заняттях. Активність								
Результ.виконання індивідуальних завдань								
Наукова робота	Участь у наукових конференціях, семінарах, круглих столах 1 – 10. Участь у студентських олімпіадах та конкурсах 1 – 15							
	При складанні екзамену або диференційованого заліку 86-100 – “відмінно”, 71-85 - “добре”, 56-70 - “задовільно”, 30-55 - “не задовільно”. При складанні недиф.заліку 56-100 - “зараховано”, 30-55 - “не зараховано”, <30 – студент не допускається до підсумкового контролю.							

РОЗДІЛ І.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Матриці. Визначник матриці.
Системи лінійних рівнянь

Студент повинен знати:

- Основні методи розв'язання систем лінійних рівнянь: метод Гаусса, метод Крамера, метод оберненої матриці.
- Означення матриці, елементарні перетворення матриць.

Студент повинен уміти:

1. Обчислювати визначники та виконувати дії над матрицями.
2. Використовувати алгоритми методів розв'язання систем рівнянь.
3. Виконувати розрахунки за допомогою обчислювальних засобів.

Довідковий матеріал

Матриця. Визначник матриці

Система 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими має загальний вигляд:

(1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$, де $x_1,\ x_2,\ x_3$ - невідомі, $b_1,\ b_2,\ b_3$ - задані вільні члени, $a_{ik} = (i = 1,2,3; k = 1,2,3)$ - задані коефіцієнти при невідомих.

Систему (1) можна записати у матричній формі

(2) $AX = B$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Означення. Визначником матриці третього порядку називається число, знайдене за таким правилом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

де M_{ik} - мінор матриці А,

$$M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$
$$M_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$
$$M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\,.$$

За правилом трикутника визначник матриці III порядку обчислюється так:

$$\Delta A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Розв'язування систем n рівнянь з n невідомими

Правило Крамера: Система n рівнянь з n невідомими, якщо детермінант основної матриці не дорівнює „0", має один і тільки один розв'язок $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}, i = 1,2...n$,

де Δ - визначник основної матриці,

Δx_i - визначник, утворений із визначника Δ заміною коефіцієнтів невідомого x_i вільними членами системи b_i.

Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці А, якщо виконується рівність $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Нехай задано рівняння $AX = B$, де А і В – задані квадратні матриці порядку n , а X шукана квадратна матриця того самого порядку.

Нехай $\det A \neq 0$, тоді $A^{-1}AX = A^{-1}B,\ EX = A^{-1}B,\ X = A^{-1}B$.

<u>Приклади розв'язання задач</u>

Приклад 1.1.Розв’язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$$

Розв'язання.

Визначник з коефіцієнтів системи відмінний від нуля.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-5) + 5\cdot(-9)\cdot 2 + (-8)\cdot 4\cdot 3 - (-8)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-5\cdot 4\cdot(-5) - 2\cdot 3\cdot(-9) = -14 \neq 0$$

Тому можна застосувати правило Крамера:

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -8 \\ 9 & 3 & -9 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -42, \det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -8 \\ 4 & 9 & -9 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -28, \det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

Звідси знаходимо $x_1 = \dfrac{-42}{-14} = 3;\ x_2 = \dfrac{-28}{-14} = 2;\ x_3 = \dfrac{-14}{-14} = 1$

Трійка чисел (3; 2; 1) є єдиним розв’язком системи.

Приклад 1.2.Знайти матрицю обернену до матриці А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Обчислимо визначник матриці А.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

Матриця А неособлива, оскільки $\det A = -1 \neq 0$. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника.

Згідно з формулою $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} A_{21} A_{31} \\ A_{12} A_{22} A_{32} \\ A_{13} A_{23} A_{33} \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

Перевірка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-190+189 & -2+205-203 & 2-170+168 \\ 6-114+108 & -6+123-116 & 6-102+96 \\ 5+76-81 & -5-82+87 & 5+68-72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 1.3.Знайти матрицю, обернену до даної за означенням оберненої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Запишемо обернену матрицю у вигляді $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2 \\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3 \end{pmatrix}$

Згідно з правилом множення матриць дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 - \beta_1 + 2\beta_3 - \gamma_1 + 2\gamma_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 - \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3 - \gamma_2 - \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження елементів матриці A^{-1} запишемо системи

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=1\\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_1+2\beta_3=0\\ -\beta_1+\beta_2+2\beta_3=1\\ \beta_2-\beta_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma_1+2\gamma_3=0\\ -\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3=0\\ \gamma_2-\gamma_3=1\end{cases}$$

Розв'язки цих систем і дають нам елементи оберненої матриці

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4.Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1-x_2+x_3=6\\ x_1+5x_2=-3\end{cases}.$$

представивши її у вигляді матричного рівняння.

Розв'язання.

Перепишемо систему у вигляді AX=B, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ -3\end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння має вигляд $X=A^{-1}B$. Знайдемо A^{-1}.

Маємо:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-5=-2\neq 0$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Відповідно до формули

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

Отже $X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тобто $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

Задачі для самостійної роботи

Розв'язати системи (перетворивши їх у матричні рівняння)

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

Знайти обернені матриці

1.3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *1.4.* $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *1.5.* $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *1.6.* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Розв’язати системи за правилом Крамера

1.7. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$ *1.8.* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

Розв’язати системи

1.9. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ 4x - 3y + z = 3 \\ 2x + y - 5z = 7 \end{cases}$ *1.10.* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - 2y + 3z = 1 \\ x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$ *1.11.* $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 1 \\ 4x + y - 3z = 7 \\ 5x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = 20 \\ 5x - 6y + 4z = -12 \end{cases}$ *1.13.* $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$

Обчислити визначники

1.14. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & -7 & 4 \end{vmatrix}$. **1.15.** $\begin{vmatrix} 25 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}$. **1.16.** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

1.17. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$. **1.18.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. **1.19.** $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 7 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

1.20. $\begin{vmatrix} 20 & 3 & 7 \\ -5 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$. **1.21.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 9 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **1.22.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \\ -9 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

1.23. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 7 & 11 & 2 \end{vmatrix}$. **1.24.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. **1.25.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 15 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$.

1.26. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -11 & -6 \end{vmatrix}$. **1.27.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **1.28.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 9 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Відповіді.

1.1. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2$. *1.2.* $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$

1.3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ *1.4.* $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ *1.5.* $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *1.6.* $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

1.7. $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

1.8. $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

1.9. (1;0;-1). *1.10.* (1;0;-1).

1.11. (1;0;-1). *1.12.* (2;3;-1). *1.13.* (1;-1;1).

1.14. 91. *1.15.* 86.

1.16. -9. *1.17.* 27.

1.18. 203. *1.19.* 144.

1.20. 185. *1.21.* 41.

1.22. 68. *1.23.* -38.

1.24. -162. *1.25.* 15.

1.26. 120. *1.27.* -126.

1.28. 144.

Індивідуальне завдання

Розв’язати системи лінійних рівнянь:

1)за правилом Крамера,

2) методом Гаусса,

3) за допомогою оберненою матриці.

1. $\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 2x+3y+4z=-1 \\ x+4y-3z=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-y+3z=5 \\ 2x+3y-2z=-1 \\ x-2y+5z=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 5x+2y-z=3 \\ 4x+y+3z=-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+2y-z=3 \\ 3x+2y+я=1 \\ 4x+y+3z=-2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ x+2e+3z=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+3y-5z=-1 \\ 4x+y+3z=3 \\ x-3y+2z=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x+4y+3z=1 \\ 3x+2y-z=3 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ 4x+y+z=-2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-y+2z=-3 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x+3y-2z=-5 \\ 4x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x-2y+z=3 \\ 4x+y-4z=-5 \\ x+4y+я=-3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x+2y+3z=-2 \\ x+3y+z=-2 \\ 3x-2y-5z=-3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x+y-4z=-5 \\ x+4y+z=-3 \\ x+3y-z=-4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x-2y+z=3 \\ x+3y+z=-2 \\ 4x-2y-5z=-3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x+3y-2z=5 \\ x+y+z=-2 \\ 3x-2y-5z=-3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x-2y-5z=-3 \\ x+4y+3z=-1 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x+3y-2z=-5 \\ 4x+4y+z=-3 \\ x+3y+5z=2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+3y-z=-4 \\ x-2y+z=3 \\ 4x+4y+z=-3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x+3y+z=-2 \\ 4x+y-4z=-5 \\ 3x-4y-z=3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x+3y+2z=-3 \\ -4x-2y+z=5 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x+3y+x=3 \\ 4x+y+3z=-1 \\ x+4y+5z=4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x+3y+2z=-3 \\ 4x+y+3z=-1 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -2x+3y+x=3 \\ 4x+5y+3z=-1 \\ x+4y+5z=4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+7y-2z=-3 \\ 3x+2y+4z=1 \\ 4x+y+3z=-1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x+3y+z=-3 \\ -2x+5y+5z=7 \\ 3x-2y+4z=1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x+2y+6z=1 \\ 3x+8y-2z=-5 \\ -4x+y-z=3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+3y+4z=3 \\ 4x-4y+5z=1 \\ 3x+y-z=-4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+5y-z=-5 \\ x+3y+3z=2 \\ 3x+8y+2z=-1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+3y+5z=4 \\ 5x+2y+6z=1 \\ 2x-5y+z=-1 \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Що називається добутком двох матриць?
2. Запишіть формули Крамера.
3. В якому випадку застосовується правило Крамера? За яких умов система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок?
4. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?
5. У чому полягає метод Гаусса розв'язання системи лінійних рівнянь?
6. Дайте означення оберненої матриці.
7. Як можна відшукати обернену матрицю?
8. Які існують способи знаходження оберненої матриці?
9. Запишіть систему лінійних рівнянь у матричному вигляді.
10. Як розв'язується система лінійних рівнянь у матричному вигляді
(з використанням оберненої матриці)?
11. Що таке одинична матриця?
12. Які властивості має операція множення матриць?
13. Чи можна перемножити матрицю з розмірами 2х3 на матрицю з такими самими розмірами?
14. Що називається матрицею? Які види матриць ви знаєте?
15. Що називається визначником другого, третього, n-го порядку.
16. Сформулюйте властивості визначників.
17. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента визначника? Наведіть приклад.
18. Чому дорівнює визначник, у якого стовпець або рядок складається з нулів?
19. Як зміниться визначник при транспонуванні матриці ?

<u>Векторна алгебра</u>

<u>Студент повинен знати:</u>

- Відмінності між векторною і скалярною величиною.
- Означення та властивості вектора.
- Правила дій над векторами.
- Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів та їх властивості.

<u>Студент повинен уміти:</u>

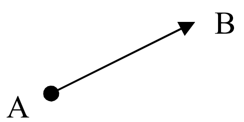
- Використовувати означення та властивості вектора до розв'язування задач.
- Обчислювати скалярний та векторний добуток векторів.
- Застосовувати апарат векторного числення до розв'язування задач геометрії і фізики.

<u>Довідковий матеріал</u>

Вектор. Дії над векторами.

Деякі з фізичних величин – такі як маса, температура, об'єм, потенціал – характеризуються одним числом. Вони називаються скалярними величинами, або просто скаляром. Поряд із скалярами існують величини, для характеристики яких потрібно також вказати і напрямок. Такі, наприклад, фізичні величини як сила, швидкість, переміщення, напруження та інші називаються векторними величинами, або векторами.

Вектором називається направлений відрізок.



Якщо A – початок вектора, B – його кінець, тоді вектор позначатимемо $\overline{AB}$, часто вектор позначають однією літерою - $\overline{a}$.

Модуль вектора $\overline{AB}$ це довжина відрізка AB, яка позначається $|\overline{AB}|$ або $|\overline{a}|$.

Нульовим вектором є вектор, у якого початок збігається з кінцем, позначають $\overline{0}$.

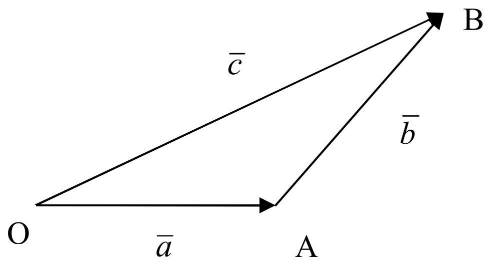
Колінеарними називають вектори, які лежать на паралельних прямих, або на одній прямій: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Рівними називають два вектора, якщо вони задовольняють умовам:

1. вони колінеарні;
2. їх модулі рівні;
3. мають одинаковий напрям .

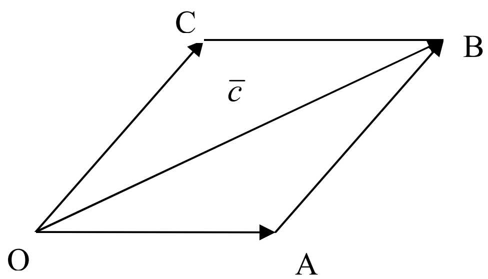
Лінійні операції з векторами.

<u>Означення:</u> *Сумою двох векторів* називається третій вектор, початок якого є початком першого вектора, а кінець – кінець другого, при чому початок другого вектора зіставлений з кінцем першого.



$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

Суму двох векторів можна визначити як діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, які виходять із загального початку заданих векторів.



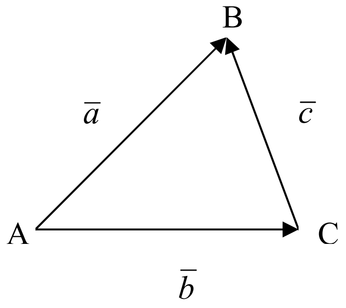
$\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

Властивості:

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (комутативна властивість додавання векторів)

$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (асоціативна властивість додавання векторів)

<u>Означення:</u> *Різницею двох векторів* $\overline{a}$ і $\overline{b}$ з спільним початком називається замикаючий вектор $\overline{c}$, напрямок якого вибирається в сторону зменшуваного.



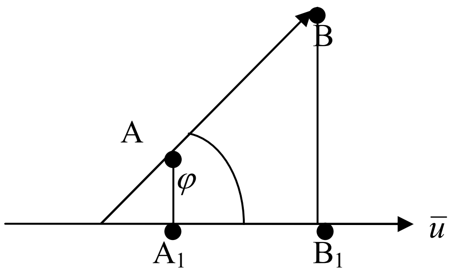
$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається колінеарний йому вектор $\overline{b}$, довжина якого дорівнює $|\lambda|\overline{a}$ і напрямок вектора $\overline{b}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$, та протилежний напрямку вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$.

Проекція вектора на вісь.

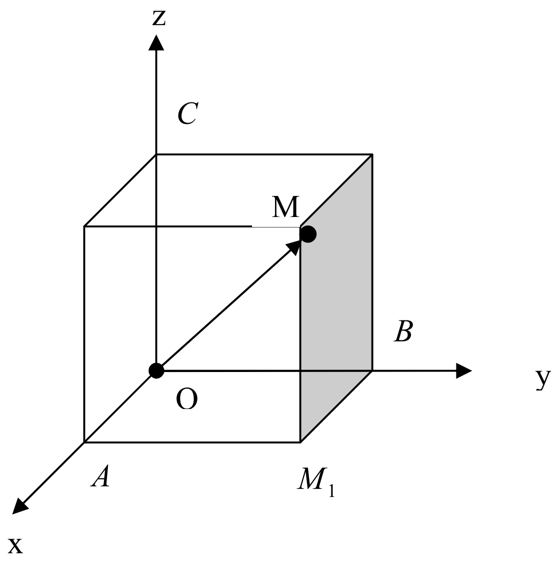
Нехай задано вектор $\overline{AB}$ і вісь $\overline{u}$.

<u>Означення:</u> *проекцією* вектора $\overline{\mathrm{AB}}$ на вісь $\overline{u}$ називається довжина вектора A_1B_1.



Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь $\overline{u}$ позначається як $\text{пр}_{\overline{u}}\overline{\mathrm{AB}}$, $A_1B_1 = \text{пр}_{\overline{u}}\overline{\mathrm{AB}}$, обчислюється за формулою $\text{пр}_{\overline{u}}\overline{\mathrm{AB}}=\left|\overline{\mathrm{AB}}\right|\cdot\cos\varphi$, φ - кут між вектором $\overline{\mathrm{AB}}$ і віссю $\overline{u}$.

Прямокутна система координат у просторі.



Проведемо через точку O три взаємно перпендикулярні осі OX, OY, OZ і на кожній із них візьмемо одиничний вектор, напрямлений по цій осі (орт осі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) вектори $\overline{OA} = x\bar{i}, \overline{OB} = y\bar{j}, \overline{OC} = z\bar{k}$, де A, B, C – вершини прямокутного паралелепіпеда, OM – діагональ, A, B, C – проекції точки M на координатні осі. OA=x, OB=y, OC=z. Координати точки M у заданій прямокутній системі записують так M(x,y,z);

$$\overline{OM} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{j} = \bar{a}$$

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

Кути, утворені вектором $\bar{a}$ з координатними осями, можна обчислити за формулами: якщо $\overline{OM} = \bar{a}$

$$\cos(\bar{a} \wedge x) = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \ \cos(\bar{a} \wedge y) = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \ \cos(\bar{a} \wedge z) = \frac{a_z}{|\bar{a}|} \ .$$

Нехай початок вектора знаходиться в точці $M_1(x_1,y_1,z_1)$, а кінець у точці $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то координати вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z)$.

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

Скалярний добуток векторів.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається добуток їх довжин і косинуса кута між ними (1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$, оскільки $|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=np_a\bar{b}$ і $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi=np_b\bar{a}$, то (1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot np_a\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_b\bar{a}$.

Властивості:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (комутативна властивість множення).
2. $(\alpha\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\alpha\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=\bar{a}\cdot(\alpha\cdot\bar{b})$ (асоціативна властивість множення)
3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (розподільча властивість множення відносно додавання).

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами в ортогональному базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.

Формула для обчислення косинуса кута між двома векторами:

$$\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|};\text{ де }\begin{array}{l}|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\\|\bar{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\end{array}$$

Векторний добуток векторів.

Означення. Векторним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$, перпендикулярний площині цих векторів і такий, що утворює з впорядкованою парою заданих векторів праву трійку, вектор $\bar{c}$ має довжину, чисельно рівну площі паралелограма, побудованого на заданих векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Позначають векторний добуток символом $\bar{a}\times\bar{b}$ або $[\bar{a}\cdot\bar{b}]$, і модуль його дорівнює $\overline{|a\times b|}=|\bar{a}|\times|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$, $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$.

Властивості:

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$
2. $\lambda\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a})\times\bar{b}=a\times(\lambda\cdot\bar{b})$ (сполучна властивість)
3. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$ (розподільча властивість)
4. $\bar{a}\parallel\bar{a}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{a}=0$ (умова колінеарності векторів)

5. обчислення векторного добутку векторів, заданих розкладом за ортонормованим базисом:

$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$

$\overline{b} = b_x \cdot \overline{i} + b_y \cdot \overline{j} + b_z \cdot \overline{k}$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + \overline{j} \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + \overline{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x)$

Обчислення площі трикутника за координатами його вершин зручніше записувати через визначник:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|; \quad \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

Наприклад: A(1;-2;0), B(2;1;-1), C(0;3;1). Знайти площу трикутника S_{ABC}.

$\overline{AB}$=(1;3;-1), $\overline{AC}$=(-1;5;1),

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 8\overline{k};$$

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}; \quad S_\Delta = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ кв. од.}$$

Мішаний добуток векторів

Означення. Скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на векторний добуток векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається мішаним добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Позначається $\overline{a} \bullet (\overline{b} \times \overline{c})$

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, то $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.5. Задано точки A(1;2;3) і B(3;-4;6). Знайти довжину, напрямок вектора $\overline{a} = \overline{AB}$.

Розв’язання.

Проекціями вектора $\overline{AB}$ на осі координат є різниця відповідних координат точок B і A: $a_x = 3-1=2$, $a_y = -4-2=-6$, $a_z = 6-3=3$

Звідси $\overline{a} = \overline{AB} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$. Знайдемо довжину вектора $\overline{a}$:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$$

$$\cos\alpha = \cos(\overline{a}x) = \frac{2}{7};\;\; \cos\beta = \cos(\overline{a}y) = -\frac{6}{7};\;\; \cos\gamma = \cos(\overline{a}z) = \frac{3}{7}$$

Приклад 1.6. Задано вектори $\overline{a} = 4\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k},\;\; \overline{b} = 6\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

Обчислити скалярні добутки: $1)\overline{a}\cdot\overline{b};\;\; 2)\sqrt{\overline{a^2}};\;\; 3)\sqrt{\overline{b^2}};\;\; 4)(2\overline{a}-3\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b});\;\; 5)(\overline{a}+\overline{b})^2$

Розв’язання. Знаходимо.

$$1)\overline{a}\cdot\overline{b} = 4\cdot 6 + (-2)(-3) + (-4)2 = 24 + 6 - 8 = 22$$

$$2)\overline{a^2} = \overline{a}\cdot\overline{a} = 4\cdot 4 + (-2)(-2) + (-4)(-4) = 16 + 4 + 16 = 36;\quad \sqrt{\overline{a^2}} = 6$$

$$3)\overline{b^2} = \overline{b}\cdot\overline{b} = 6\cdot 6 + (-3)(-3) + 2\cdot 2 = 36 + 9 + 4 = 49; \sqrt{\overline{b^2}} = 7$$

$$4)(2\overline{a}-3\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b}) = 2\overline{a}^2 + 4\overline{ab} - 3\overline{ab} - 6\overline{b}^2 = 2\overline{a}^2 + \overline{ab} - 6\overline{b}^2 =$$
$$2\cdot 36 + 22 - 6\cdot 49 = 2(36 + 11 - 147) = -200$$

$$5)(\overline{a}+\overline{b})^2 = \overline{a}^2 + 2\overline{ab} + \overline{b^2} = 36 + 2\cdot 22 + 49 = 129$$

Приклад 1.7. Обчислити при якому значенні α вектори $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ і $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв’язання.

Знаходимо скалярний добуток цих векторів: $\overline{a}\cdot\overline{b} = \alpha - 6 - 2\alpha$

Оскільки $\overline{a}\perp\overline{b},\;\; mo\; \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$

Звідси $-\alpha - 6 = 0;\;\; \alpha = -6$.

Приклад 1.8. Обчислити кут між векторами $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{b} = -3\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$.

Розв’язання.

Оскільки $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\gamma$, тоді $\cos\gamma=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

Маємо $\bar{a}\cdot\bar{b}=2(-3)+(-4)2+4\cdot6=10;$

$|\bar{a}|=\sqrt{4+16+16}=6;\quad |\bar{b}|=\sqrt{9+4+36}=7$

Отже $\cos\gamma=\dfrac{10}{6\cdot7}=\dfrac{5}{21}$ і $\gamma=\arccos\dfrac{5}{21}$.

Приклад 1.9. Задано вектори $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ і $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$.

Знайти координати векторних добутків:

1) $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ 2) $\left[(2\bar{a}+\bar{b})\bar{b}\right]$

3) $\left[(2\bar{a}-\bar{b})(2\bar{a}+\bar{b})\right]$

Розв’язання:

$$1)\ \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k}$$

$$2)\ \left[(2\bar{a}+\bar{b})\bar{b}\right]=2\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{b}=2\bar{a}\times\bar{b}=10\bar{i}+2\bar{j}+14\bar{k}$$

$$3)\left[(2\bar{a}-\bar{b})(2\bar{a}+\bar{b})\right]=4\bar{a}\times\bar{a}+2\bar{a}\times\bar{b}-2\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}=20\bar{i}+4\bar{j}+28\bar{k}$$

Приклад 1.10. Задано вершини Δ ABC. A(1;2;0), B(3;0;-3) і C(5;2;6). Обчислити його площу.

Розв’язання:

Знаходимо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

$\overline{AB}=(3-1)\bar{i}+(0-2)\bar{j}+(-3-0)\bar{k}=2\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}$

$\overline{AC}=(5-1)\bar{i}+(2-2)\bar{j}+(6-0)\bar{k}=4\bar{i}+6\bar{k}$

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, а тому знаходимо векторний добуток цих векторів.

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & +6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & +6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & +6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}$$

Звідси

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=14 \text{ кв.од.}$$

Приклад1.11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=30^0$.

Розв’язання. Маємо:

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}+\bar{b})=3\bar{a}\times a+\bar{a}\times b+9b\times a+(b\times b)=$$

$$=3\times 0+(\bar{a}\times\bar{b})-9(\bar{a}\times\bar{b})+3\times 0=-8(\bar{a}\times\bar{b})$$

оскільки $(\bar{a}\times\bar{a})=(\bar{b}\times\bar{b})=0$, $[\bar{b}\times\bar{a}]=-[\bar{a}\times\bar{b}]$.

Звідси $S=8|\bar{a}\times\bar{b}|=8\cdot\sin 30^\circ=4$ кв. од

Приклад 1.12. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=(1;-1;-3)$ $\bar{b}=(-2;2;1)$, $\bar{c}=(3;-2;5)$

Розв’язання.

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix}1 & -1 & -3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=12-13+6=5$$

Приклад 1.13. Знайти об’єм трикутної піраміди з вершинами A(-1;0;2), B(2;1;1), C(3;0;-1), D(3;2;2).

Розв’язання.

Знайдемо вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди у вершині А: $\overline{AB} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\overline{AC} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$, $\overline{AD} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$. Знаходимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$V_{парал} = 2$ куб.од.

Оскільки об’єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ о’бєма паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ i $\overline{AD}$, то $V_{пірам} = \frac{1}{6} V_{пар} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (куб.од.)

<u>Задачі для самостійної роботи</u>

Чи колінеарні вектори $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ побудовані на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$?

1.29. $\bar{a} = (1;-2;3)\ \bar{b} = (3;0;-1),\ \overline{C_1} = 2\bar{a} + 4\bar{b}, \overline{C_2} = 3\bar{b} - \bar{a}$

1.30. $\bar{a} = (1;0;1),\ \bar{b} = (-2;3;5),\ \overline{C_1} = \bar{a} + 2\bar{b}, \overline{C_2} = 3\bar{a} - \bar{b}$

1.31. $\bar{a} = (-2;4;1),\ \bar{b} = (1;-2;7),\ \overline{C_1} = 5\bar{a} + 2\bar{b}, \overline{C_2} = 3\bar{a} - \bar{b}$

Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

1.32. $A(1;-2;3), B(0;-1;2), C(3;-4;5)$

1.33. $A(0;-3;6), B(-12;-3;-3), C(-9;-3;-6)$

1.34. $A(-1;2;-3), B(3;4;-6), C(1;1;-1)$

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

1.35. $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}, b = 3\bar{p} - \bar{q}, |\bar{p}| = 1, |\bar{q}| = 2, (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \frac{\pi}{6}$

1.36. $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}, b = \bar{p} - 2\bar{q}, |\bar{p}| = 4, |\bar{q}| = 1, (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \frac{\pi}{4}$

1.37. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q}, b=\overline{p}+2\overline{q}, |\overline{p}|=\frac{1}{5}, |\overline{q}|=1, (\overline{p}\wedge\overline{q})=\frac{\pi}{2}$

Перевірити на компланарність вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

1.38. $\overline{a}=(2;\,3;\,1), \overline{b}=(-1;\,0;\,-4), \overline{c}=(2;\,2;\,2)$

1.39. $\overline{a}=(3;\,2;\,1), \overline{b}=(2;\,3;\,4), \overline{c}=(3;\,1;\,-1)$

1.40. $\overline{a}=(1;\,5;\,2), \overline{b}=(-1;\,1;\,-1), \overline{c}=(1;\,1;\,1)$

Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1.41. $A_1(1;3;6), A_2(2;2;1), A_3(-1;0;1), A_4(-4;6;-3)$

1.42. $A_1(-4;2;6), A_2(2;-3;0), A_3(-10;5;8), A_4(-5;2;-4)$

1.43. $A_1(7;2;4), A_2(7;-1;-2), A_3(3;3;1), A_4(-4;2;1)$.

<u>Відповіді</u>

1.29. Не колінеарні.

1.30. Не колінеарні.

1.31. Не колінеарні.

1.32. -1.

1.33. $\frac{24}{25}$

1.34. 0.

1.35. 7.

1.36. $14\sqrt{2}$

1.37. 1.

1.38.Не компланарні.

1.39. Не компланарні.

1.40. Не компланарні.

1.41. $V=\frac{70}{3}, h=\frac{64}{\sqrt{14}}$

1.42. $V=-\frac{64}{3}, h=\frac{64}{\sqrt{161}}$

$1.43. V=-\frac{43}{6}, h=\frac{43}{\sqrt{469}}$

Індивідуальні завдання

на тему: "Пряма на площині "

1. Задані вершини трикутника: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$

   1. Записати рівняння:

      a) сторін;

      b) висот;

      c) медіан.

   2. Записати рівняння прямої, що проходить через:

      a) точку A паралельно стороні BC.

      b) точку B паралельно стороні AC.

   3. Знайти координати точки перетину висот.

   4. Обчислити кути ΔABC.

   5. Обчислити площу ΔABC.

   6. Побудувати ΔABC.

1 варіант. A(2,-2), B(5, 4), C(-2, 0).

2 варіант. A(-2, 2), B(-5, -4), C(2, 0).

3 варіант. A(-2, -2), B(-5, 4), C(2, 0).

4 варіант. A(-2, 2), B(4, 5), C(0, -2).

5 варіант. A(2, 2), B(5, -4), C(-2, 0).

6 варіант 6. A(2, -2), B(-4, -5), C(0, 2).

7 варіант *7*. A(2, 2), B(-4, 5), C(0, -2).

8 варіант 8. A(-2, -2), B(4, -5), C(0, 2).

9 варіант 9. A(-2, 1), B(4, 4), C(0, -3).

10 варіант. A(2, -1), B(-4, -4), C(0, 3).

11 варіант. A(2, 1), B(-4, -4), C(0, -3).

12 варіант. A(-2, -1), B(4, -4), C(0, 3).

13 варіант. A(1, 0), B(0, 3), C(-5, -2).

14 варіант. A(-1, 0), B(0, 3), C(5, -2).

15 варіант. A(-1, 0), B(0, -3), C(5, 2).

16 варіант. A(1, 0), B(0, -3), C(-5, 2).

17 варіант. A(0, 1), B(3, 0), C(-2, -5).

18 варіант. A(0, 1), B(-3, 0), C(2, -5).

19 варіант. A(0, -1), B(-3, 0), C(2, 5).

20 варіант. A(2, 0), B(1, 3), C(-4, -3).

21 варіант. A(0, -1), B(3, 0), C(-2, 5).

22 варіант. A(-2, 0), B(-1, -3), C(4, 2).

23 варіант. A(2, 0), B(1, -3), C(-4, 2).

24 варіант. A(-2, 0), B(-1, 3), C(4, -2).

25 варіант. A(2,-2), B(5, 4), C(-2, 0).

26 варіант. A(-2, 2), B(-5, -4), C(2, 0).

27 варіант. A(-2, -2), B(-5, 4), C(2, 0).

28 варіант. A(-2, 2), B(4, 5), C(0, -2).

29 варіант. A(2, 2), B(5, -4), C(-2, 0).

30 варіант. A(2, -2), B(-4, -5), C(0, 2).

Питання для самоконтролю.

1. Що називається вектором, модулем вектора?
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
3. Сформулюйте властивості лінійних операцій над векторами.
4. Дайте означення скалярного добутку двох векторів, сформулюйте основні його властивості. Як визначається скалярний добуток через координати векторів - співмножників?
5. Сформулюйте умови перпендикулярності двох векторів. Запишіть формулу для кута (знаходження) між векторами та умову паралельності двох векторів.
6. Що називається векторним добутком двох векторів? Які його властивості?
7. Запишіть векторний добуток через координати векторів - співмножників в ортогональному базисі. Який геометричний зміст

модуля векторного добутку?

8. Чи є векторною величиною а) об'єм; б) робота; в) сила земного тяжіння?
9. Скільки ненульових векторів задають:

   а) дві точки;

   б) вершини паралелограма;

   в) вершини куба;

   г) вершини тетраедра?
10. Чи рівні вектори $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, якщо чотирикутник ABCD - паралелограм?
11. Чи колінеарні вектори $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, якщо прямі $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$:

    а) перетинаються;

    б) паралельні;

    в) збігаються?
12. Чи одинакові довжини векторів $\overline{a} = (4; -3)$ i $\overline{b} = (3; 4)$
13. При яких значеннях параметра p перпендикулярні вектори $\overline{a} = (1; 2; 3)$ ma $\overline{b} = (p; -2; 1)$?
14. Чи перпендикулярні прямі AB і AC, якщо A(2; 1; 3), B(0; 1; -1), C(-2; 0; 3)?
15. Чи паралельні прямі AB і AC, якщо A(2; 1; 3), B(1; 0; 2), C(1; -2; 2), D(0; -1; 1)?
16. Чи може довжина суми двох векторів:

    а) дорівнювати сумі довжин;

    б) бути більшою від суми довжин?
17. Довжина якого із векторів $\overline{a}$; $-2\overline{a}$; $\frac{1}{3}\overline{a}$ найбільша?
18. Як розміщені точки A, B, M за умови, що

    а) $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $b)\ \overline{AM} = -\frac{1}{2}\overline{BA}$; $c)\overline{AB} = 3\overline{AM}$; $d)\overline{AM} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

РОЗДІЛ ІІ.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

<u>Студент повинен знати:</u>

- Означення кривих другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.
- Правила побудови прямої, кола, еліпса, параболи, гіперболи.
- Умови взаємного розташування двох прямих.

<u>Студент повинен уміти:</u>

- Розв'язувати задачі на рівняння прямої: канонічне, параметричне, загальне, з кутовим коефіцієнтом.
- Використовувати канонічне рівняння еліпса, гіперболи, параболи.
- Класифікувати лінії другого прядку.

<u>Довідковий матеріал</u>

Лінії на площині

<u>Пряма лінія</u>

1) $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої, де хоча б один з коефіцієнтів А і В відмінний від нуля;

2) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, b – відрізок, який відтинає пряма на осі Оу;

3) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\ (x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k;

4) рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1\ (x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$ - канонічне рівняння прямої;

5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ рівняння прямої у відрізках; а і b – відрізки, які відтинаються прямою на координатних осях;

6) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 (x_1,y_1), $\vec{S}=(l,m)$ – напрямлений вектор, t–параметр:

$$\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

<u>Кут між двома прямими</u>

а) тангенс кута між двома прямими $y = k_1x + b_1$ *і* $y_2 = k_2x + b_2$ (1)

знаходиться за формулою: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

б) якщо прямі задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

(2)

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то кут знаходиться за формулою:

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}, \text{ або } \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \times \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ - нормальні вектори

<u>Умова паралельності прямих</u>

Якщо рівняння прямих задано у вигляді (1), то $k_1 = k_2$, а якщо рівняння прямих задано у вигляді (2) , то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

<u>Умова перпендикулярності прямих</u>

Якщо рівняння прямих задано у вигляді (1), то $k_1k_2 = -1$, а якщо рівняння прямих задані у вигляді (2), то $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

<u>Відстань від точки до прямої</u>

т.M_0 (x_0,y_0), пряма $Ax + By + C = 0$, то $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Криві II-го порядку

Коло

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (3) – рівняння кола радіуса R з центром в т.M_0 (x_0,y_0) (канонічний вигляд кола).

Якщо ж центр кола збігається з початком координат, то рівняння має вигляд

$x^2+y^2 =R^2$

Еліпс

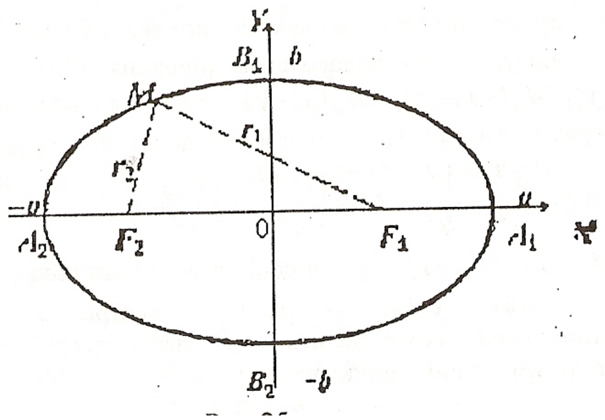


Рис.2.1

Означення. Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (4),

Відстань між вершинами називається осями еліпса: велика (фокальна) вісь $A_2A_1 = 2a$ і мала вісь $B_2B_1 = 2b$, відстань між фокусами $F_2F_1 = 2c$, OA_1 = a – велика піввісь, OB_1= b – мала піввісь.

Координати фокусів еліпса заданного рівнянням (4): x_1=- C; y_1=0; x_2=C; y_2= 0; F(-C;0), F(C;0), де $C=\sqrt{a^2-b^2}$. Ексцентриситет еліпса: $E=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}$, (0<E<1).

Фокальні радіуси еліпса: $r_1 = a + Ex_1,$ $r_2 = a - Ex_2$

Гіпербола

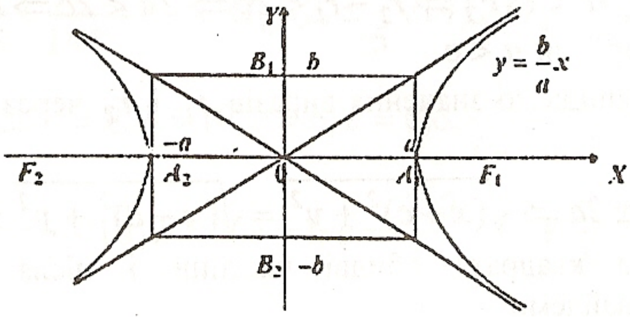


Рис.2.2.

Означення: гіперболою називається множина точок площини, різниця відстаней до яких від двох заданих точок, фокусів, є величина стала.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (5) ,

де a = OA_1 – дійсна піввісь, b = OB_1 – уявна піввісь. Точки перетину гіперболи з її віссю симетрії називаються вершинами гіперболи, точки F_1 і F_2 – її фокусами

(F_1(-c;0); F_2(c;0), де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ексцентриситет гіперболи: $\mathrm{E} = \frac{c}{a}$;

асимптоти гіперболи визначаються рівняннями: $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$;

директриси: $x = \frac{a}{\mathrm{E}}$; $x = -\frac{a}{\mathrm{E}}$;

фокальні радіуси точки правої вітки: $r_1 = Ex + a$; $r_2 = -Ex + a$;

фокальні радіуси точки лівої вітки гіперболи: $r_1 = Ex - a$; $r_2 = -Ex - a$;

Парабола

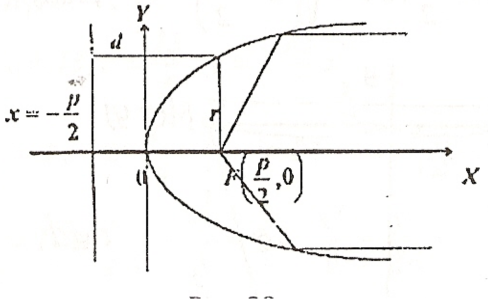


Рис.2.3.

Означення: параболою називається множина точок площини, які рівновіддалені від заданої точки, що називається фокусом, і заданої прямої, що називається директрисою.

Канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$ (6), парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через точку O(0;0)

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Задано рівняння прямої $14x - 5y - 45 = 0$.

Написати: 1) рівняння з кутовим коефіцієнтом;

2) рівняння у відрізках.

Розв'язання.

1) Розв'яжемо рівняння відносно y, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = \frac{14}{5}x - 9, \quad k = \frac{14}{5}, \quad b = -9.$

2) Перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину і розділимо обидві частини на 45; отримаємо $\left(\frac{14}{45}\right)x - \left(\frac{5}{45}\right)y = 1..$

$\frac{x}{\frac{45}{14}} + \frac{y}{\frac{-45}{5}} = 1,$ дістанемо рівняння даної прямої у відрізках. Тут $a = \frac{45}{14}; \quad b = -\frac{45}{5} = -9..$

Приклад 2.2. Задано вершини трикутника ABC: A(3;0), B(5;10), C(13;6).

Знайти: а) рівняння сторони AC;

б) рівняння висоти CD, опущеної з вершини C на сторону AC;

в) рівняння медіани AE.

Розв'язання:

а) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Щоб знайти рівняння сторони AB, підставимо координати точок A і B: $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-0}{10-0}; \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y}{10}$; $y = 5x - 15$.

б) Висота CD перпендикулярна до сторони AB, тому їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2 відповідають умові $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. З рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1,y_1)$ в заданому напрямку: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Підставимо в нього координати точки C і кутовий коефіцієнт k, одержимо шукане рівняння висоти CD:

$y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 13)$; 5y – 30 = - x + 13; x + 5y – 43 = 0.

в) Визначити координати точки E. Застосуємо формулу поділу відрізка у заданому відношенні: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Використовуючи координати вершини B і C, дістанемо: x = 9, y = 8; E(9;8). Підставимо координати точок A і E в рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, одержимо рівняння медіани AE: $4x – 3y – 12 = 0$.

Приклад 2.3. Записати рівняння кола, що має центр у точці (5;-7) і проходить через точку (2;-3).

Розв'язання.

Знайдемо радіус кола як відстань від центра до даної його точки:

$r = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5$.

Тепер у рівняння кола підставимо координати центра і знайдену величину радіуса: $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 25$.

Приклад 2.4. Знайти координати центра та радіус кола

$x^2 + y^2 – 4x – 14y + 17 = 0$.

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння так: $x^2 – 4x + 4 + y^2 – 14y + 49 = 36$,

або $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$. Порівнюючи це рівняння з рівнянням кола, дістанемо $a = 2$, $b = 7$, $R = 6$. Отже, центр кола знаходиться в точці (2;7), радіус його дорівнює 6.

Приклад 2.5. Знайти рівняння еліпса, фокусами якого є точки $F_1(0;0)$ та $F_2(0;8)$, а велика піввісь $a = 5$.

Розв’язання.

Відстані від точки M(x;y) еліпса до фокусів дорівнюють відповідно $\sqrt{x^2+y^2}$ та $\sqrt{x^2+(y-8)^2}$. Згідно з означенням еліпса маємо

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-8)^2}=10$.

Перетворюючи це рівняння, одержимо $\sqrt{x^2+y^2-16y+64}=10-\sqrt{x^2+y^2}$;

$x^2+y^2-16y+64=100-20\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$; $16y+36=20\sqrt{x^2+y^2}$;

$4y+9=5\sqrt{x^2+y^2}$;

$16y^2+72y+81=25x^2+25y^2;$

$25x^2+9y^2-72y-81=0.$

Виділимо повний квадрат відносно y: $25x^2+9(y^2-8y+16)=225$.

Поділимо на 225 і дістанемо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$. Осями симетрії такого еліпса будуть лінії x = 0 та y = 4, велика піввісь a = 5, мала піввісь b = 3.

Приклад 2.6. Обчислити півосі гіперболи, якщо директриси задані рівняннями $x=\pm3\sqrt{2}$ і кут між асимптотами прямий.

Розв’язання.

Директриси пов’язані з півосями гіперболи формулами $x=\frac{a}{E}; x=-\frac{a}{E}; E=\frac{c}{a}; c=\sqrt{a^2+b^2}$. Рівняння асимптот $y=\frac{b}{a}x$ та $y=-\frac{b}{a}x$. Згідно з умовою задачі

одержимо систему двох рівнянь $\begin{cases}\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\sqrt{2};\\ \frac{b^2}{a^2}=1\end{cases}$ (умова перпендикулярності асимптот). Звідси $b^2=a^2; \frac{a^2}{a\sqrt{2}}=3\sqrt{2}; \Rightarrow a=3\cdot2=6$, отже b=6.

Задачі для самостійної роботи

2.1. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку (-1;8).

2.2. Записати рівняння прямих, на яких лежать катети рівнобедреного прямокутного трикутника, знаючи рівняння прямої, на якій лежить гіпотенуза 3x – y + 5 = 0, і координати вершини прямого кута C(4;-1).

2.3. Встановити, які з пар прямих паралельні, збігаються або перетинаються (в останньому випадку знайти їх точку перетину):

1. x + y – 3 = 0 і 2x + 3y – 8 = 0;
2. y = x + 5 і 2x – 2y + 3 = 0;
3. $y=\frac{1}{2}x+2$ і $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=1$.

2.4. Визначити точку, симетричну точці M(8;-9) відносно прямої, яка проходить через точки A(3;-4) і B(-1;-2).

2.5. Обчислити величину кута між прямими:

1. $y=3x$ і $y=-2x+5$
2. $y=4x-7$ і $y=-\frac{x}{4}+2$
3. $y=5x-3$ і $y=5x+8$.

2.6. Записати рівняння прямої, паралельної і рівновіддаленої від двох паралельних прямих $x + y - 1 = 0$ і $x + y + 13 = 0$.

2.7. Записати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї з його вершин B(-4;-5) і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти: $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

2.8. Дві сторони квадрата лежать на прямих 5x – 12y – 65=0; 5x – 12y + 26=0. Обчислити площу квадрата.

2.9. Записати рівняння кола з центром у точці $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ і з радіусом, що дорівнює 2 . Побудувати це коло.

2.10. Записати рівняння кола, яке проходить через точки A(5;7) і B(-2;4), якщо центр його лежить на прямій $4x + 3y - 18 = 0$.

2.11. Записати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку М(5;0), якщо фокальна відстань дорівнює 6.

2.12. Довести, що рівняння $36x^2 + 100y^2 – 3600 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів та фокальну відстань.

2.13. Записати рівняння еліпса, фокусами якого є точки $(0;-\sqrt{5})$ і $(0;\sqrt{5})$, а велика вісь дорівнює 6.

2.14. Побудувати еліпси $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ і $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Для кожного еліпса обчислити ексцентриситет.

2.15. Знайти півосі, координати фокусів та ексцентриситет гіперболи, що задані рівнянням $4x^2 – 5y^2 = 20$. Обчислити довжини фокальних радіусів точки М(-5;4).

2.16. Записати рівняння асимптот та директрис гіперболи $9x^2 – 25y^2 = 225$.

2.17. Гіпербола проходить через точки $M(3;\frac{2\sqrt{15}}{5})$ та $N(-2\sqrt{5};3)$. Знайти її канонічне рівняння.

2.18. Написати рівняння параболи:

1)що проходить через точки (0;0) і (-1;2) і має вісь симетричну осі Ox;

2) що проходить через точки (0;0) та (2;4) симетрично відносно осі Oy.

2.19. Знайти координати фокуса та рівняння директриси параболи $y^2 = 20x$. Обчислити відстань від точки $M(10;-10\sqrt{2})$ до фокуса.

<u>Відповіді</u>

2.1. y = 8x.

2.2. x – 2y – 6 = 0 і 2x + y – 7 = 0.

*2.3.*1) точка перетину (5;-2), 2) прямі паралельні, 3) прямі збігаються.

2.4. M(10;-5).

2.5. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$.

2.6. y = - x – 6.

2.7. BC: 3x – 5y – 13 = 0; AB: 8x – 3y + 17 = 0; AC: 5x + 12y – 1 = 0.

2.8. S = 49 кв.од.

2.9. $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{4})^2=4$

2.10. $(x-3)^2+(y-2)^2=9$

2.11. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{26}=1$

2.12. $F_1(-8;0)$, $F_2(8;0)$, $|F_1F_2|=16$

2.13 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

2.14. $a=\sqrt{5}$; b = 2; $F_1(-3;0)$; $F_2(3;0)$; $E=\frac{3}{\sqrt{5}}$; $r_1=2\sqrt{5}$; $r_2=4\sqrt{5}$

2.15. $y=\frac{3}{5}x$; $y=-\frac{3}{5}x$; $x=-\frac{25}{\sqrt{34}}$; $x=\frac{25}{\sqrt{34}}$

2.16. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$

2.17. $y^2=-4x$; $x^2=y$

2.18. F(5;0); x = -5; r = 15.

Індивідуальні завдання

на тему: «Криві другого порядку»

1.Скласти канонічне рівняння ліній ІІ-го порядку та встановити їх вид;

2.Знайти характеристики кривої та зробити рисунок

1 варіант

1) а) $x^2+3y^2-12=0$; б) $y^2=4x^2+4$; в) $x^2=y-4$.

2) $x^2-2x+2y^2+8y+5=0$.

2 варіант

1) а) $3x^2+2y^2-6=0$; б) $x^2=y^2+4$; в) $y^2=x+4$.

2) $2x^2+8x+y^2-2y+5=0$.

3 варіант

1) а) $2x^2+y^2-8=0$; б) $y^2=9x^2+9$; в) $x^2=y+3$.

2) $4x^2-24x+5y^2+20y+36=0$.

4 варіант

1) а) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$; б) $y^2 = 25x^2 + 25$; в) $x^2 = 2y + 4$.

2) $3x^2 - 18x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

5 варіант

1) а) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$; б) $y^2 = 16x^2 + 16$; в) $y^2 = 2x + 2$.

2) $3x^2 - 18x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

6 варіант

1) а) $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$; б) $x^2 = 25y^2 + 25$; в) $y^2 = x - 3$.

2) $3x^2 - 12x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$.

7 варіант

1) а) $2x^2 + 5y^2 - 10 = 0$; б) $x^2 = 36y^2 + 36$; в) $x^2 = 2y - 4$.

2) $5x^2 + 20x - 3y^2 - 12y + 17 = 0$.

8 варіант

1) а) $5x^2 + 3y^2 - 15 = 0$; б) $x^2 + 36 = 36y^2$; в) $y^2 = 2x + 6$.

2) $3x^2 - 18x + 4y^2 - 16y + 31 = 0$.

9 варіант

1) а) $4x^2 + 8y^2 - 16 = 0$; б) $y^2 = 4x^2 + 16$; в) $x^2 = 8 - 2y$.

2) $5x^2 - 20x + 3y^2 - 12y + 17 = 0$.

10 варіант

1) а) $8x^2 + 4y^2 - 16 = 0$; б) $3x^2 = 4y^2 + 12$; в) $y^2 = 4 - x$.

2) $16x^2 - 64x + 9y^2 - 54y + 1 = 0$.

11 варіант

1) а) $2x^2 + 4y^2 - 16 = 0$; б) $4x^2 = 3y^2 + 12$; в) $x^2 = 2y + 4$.

2) $x^2 - 8x + 2y^2 - 4y + 16 = 0$.

12 варіант

1) а) $2x^2 + 4y^2 - 16 = 0$; б) $4x^2 = 9y^2 + 36$; в) $y^2 = 3x + 6$.

2) $3x^2 + 18x + y^2 - 6y + 30 = 0$.

13 варіант

1) а) $x^2+8y^2-16=0$; б) $9y^2=4x^2+36$; в) $x^2=6-3y$.

2) $2x^2+20x+3y^2-24y+92=0$.

14 варіант

1) а) $2x^2+16y^2-16=0$; б) $9y^2+36=4x^2$; в) $x^2=y+6$.

2) $x^2-2x+2y^2+8y+5=0$.

15 варіант

1) а) $8x^2+y^2-16=0$; б) $4x^2+36=9y^2$; в) $y^2=6-x$.

2) $3x^2-12x-4y^2-16y-16=0$.

16 варіант

1) а) $16x^2+2y^2-16=0$; б) $4x^2=25y^2+100$; в) $y^2=x-6$.

2) $16x^2+64x+9y^2-54y+1=0$.

17 варіант

1) а) $16x^2+y^2-16=0$; б) $25x^2=4y^2+100$; в) $x^2=6-2y$.

2) $2x^2+8x-y^2+2y+3=0$;

18 варіант

1) а) $4x^2+5y^2-20=0$; б) $4x^2=16y^2+64$; в) $y^2=x-1$;

2) $3x^2-I2x-4y^2-16y-16=0$.

19 варіант

1) а) $x^2+16y^2-16=0$; б) $4y^2=25x^2+100$; в) $y^2=3x+3$.

2) $3x^2-18x-y^2+2y+20=0$.

20 варіант

1) а) $5x^2+10y^2-20=0$; б) $16x^2=4y^2+64$; в) $x^2=y+1$.

2) $3x^2+18x+y^2-6y+30=0$.

21 варіант

1) а) $5x^2+y^2-15=0$; б) $25y^2=4x^2+100$; в) $x^2=2y+2$.

2) $5x^2-10x-4y^2+8y-19=0$.

22 варіант

1) а) $10x^2 + 5y^2 - 20 = 0$; б) $4y^2 = 16x^2 + 64$; в) $y^2 = 1 - x$.

2) $5x^2 - 10x - 4y^2 + 8y - 19 = 0$.

23 варіант

1) а) $12x^2 = 12 - y^2$; б) $16y^2 = 4x^2 + 64$; в) $x^2 = 2 - y$.

2) $3x^2 - 18x - 4y^2 + 16y - 1 = 0$.

24 варіант

1) а) $6x^2 + 2y^2 - 12 = 0$; б) $x^2 = 9y^2 + 9$; в) $y^2 = 3 - x$.

2) $x^2 - 8x - 2y^2 + 4y + 10 = 0$.

25 варіант

1) а) $x^2 + 3y^2 - 12 = 0$; б) $y^2 = 4x^2 + 4$; в) $x^2 = y - 4$.

2) $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 5 = 0$.

26 варіант

1) а) $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$; б) $x^2 = y^2 + 4$; в) $y^2 = x + 4$.

2) $2x^2 + 8x + y^2 - 2y + 5 = 0$.

27 варіант

1) а) $2x^2 + y^2 - 8 = 0$; б) $y^2 = 9x^2 + 9$; в) $x^2 = y + 3$.

2) $4x^2 - 24x + 5y^2 + 20y + 36 = 0$.

28 варіант

1) а) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$; б) $y^2 = 25x^2 + 25$; в) $x^2 = 2y + 4$.

2) $3x^2 - 18x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

29 варіант

1) а) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$; б) $y^2 = 16x^2 + 16$; в) $y^2 = 2x + 2$.

2) $3x^2 - 18x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

30 варіант

1) а) $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$; б) $x^2 = 25y^2 + 25$; в) $y^2 = x - 3$.

2) $3x^2 - 12x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$.

Індивідуальні завдання

на тему: «Вектори»

Задані вершини піраміди MABC

1) Знайти вектори , $\left(2\overline{AB}-\overline{BC}\right)$, $\left(3\overline{AB}+2\overline{MA}\right)$, $\left(\overline{AC}-2\overline{MC}\right)$ їх модулі;

2) Обчисліть кут MAB;

3) Обчисліть площу трикутника ABC;

4) Обчисліть об'єм піраміди;

5) Зробіть рисунок.

1. (3; -2; 1),	(1; 4; 0),	(-1; -2; 1),	(0; 0; 0).
2. (2; -3; 2),	(2; 2; 0),	(1; 5; 5),	(-2; 3; -2).
3. (3; 0; 4),	(0; 0; 4),	(5; -1; 3),	(4; 2; -1).
4. (1; 1; 1),	(-1; 2; 4),	(2; 0; 6),	(-2; 5; -1).
5. (4; 5; -2),	(-1; 3; 0),	(6; 1; 5),	(1; -1; 6).
6. (-1; 1; 1),	(1; -1; 1),	(2; -1; 0),	(1; 1; 1).
7. (2; 0; 0),	(2; 1; 4),	(0; 2; 1),	(4; 1; -2).
8. (7; 0; 1),	(2; 1; 4),	(5; 5; 3),	(5; 1; 0).
9. (7; 1; 2),	(-5; 3; -2),	(3; 3; 5),	(4; 5; -1).
10.(1; 1; 4),	(1; 1; 7),	(3; 4; -1),	(3; 1; 1).
11.(-2; 3; -2),	(2; -3; 2),	(2; 2; 0),	(1; 5; 5).
12.(4; 2; -1),	(3; 0; 4),	(0; 0; 4),	(5; -1; 3).
13.(1; 1; -2),	(2; 1 ; 2),	(1; 1; 4),	(-2; 1; 2).
14.(1; -1; 6),	(4; 5; -2),	(-1; 3; 0),	(6; 1; 5).
15.(4; l;-2),	(2; 1; 4),	(0; 2; 1),	(2; 0; 0).
16.(5;1;0),	(7; 0; 1),	(2; 1; 4),	(5; 5; 3).
17.(0; 5; 0),	(2; 3; -4),	(0; 0; -6),	(-3; 1; -1).
18.(4;5;-l),	(7; 1 ; 2),	(-5; 3; -2),	(3; 3; 5).
19.(0; 0; 6),	(4; 0; -4),	(1; 3; -1),	(4; -1; 3).
20.(3; 1; 1),	(1; 1; 4),	(1; 1; 7),	(3; 4; -1).
21.(2;-5;3),	(3; 2; -5),	(5; -3; -2),	(-5; 3; 2).

22.(6; 0; 4),	(0; 6; 4),	(4; 6; 0),	(0; -6; -4).
23.(3; 2; 4),	(2; 4; 3),	(4;3;-2),	(-2; -4; -3).
24.(6; 3; 5),	(5; -6; 3),	(3; 5; 6),	(-6; -1; 2).
25.(5; -2; -1),	(4; 0; 0),	(2; 5; 1),	(5;-2;-4).
26.(4; 2; 5),	(3; 0; 4),	(0; 0; 3),	(5; -2; -4).
27.(4; 0; -4),	(0; 0; 6),	(1; 3; -1),	(4; -1; -3).
28.(-5; 3; 2),	(5; -3; -2),	(2; -5; 3),	(3; 2; -5).
29.(-1; 2; 4),	(1; 1; 1),	(2; 0; 6),	(-2; 5; -1).
30.(2; 4; 3),	(3; 2; 4),	(4; 3; -2),	(-2; -4; -3).

Питання для самоконтролю

1. Як визначається положення точки М простору радіусом - вектором? Які координати вектора і точки в просторі?
2. Що називається координатним базисом?
3. Як визначається проекція вектора на вісь? Назвіть властивості проекцій.
4. Як визначити довжину та напрямок вектора за відомими його координатами?
5. Запишіть параметричні рівняння прямої. Який зв'язок їх з канонічним рівнянням?
6. Як визначається кут між двома прямими, що задані канонічним рівнянням? Запишіть умови паралельності та перпендикулярності цих прямих.
7. Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
8. Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох прямих на площині.
9. Дослідіть загальне рівняння прямої $Ax + Bx + C = 0$ при $A = 0,$ при $B = 0,$ при $C = 0.$
10. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку M_0 з координатами (x_0,y_0) і має кутовий коефіцієнт κ.
11 .Як знайти точку перетину двох прямих?
12. Чи завжди рівняння $ax+by+c=0$ можна представити у вигляді $y=\kappa x+b$?

13. Чи може пряма $y=\kappa x+b$ бути паралельною осі у?

14. Під яким кутом нахилена пряма $y=x+1$ до осі у?

15. Чи можуть кутові коефіцієнти паралельних прямих дорівнювати -3 і 3?

16. Чи можуть кутові коефіцієнти взаємно перпендикулярних прямих дорівнювати: а) 3 і $\frac{1}{3}$; б) 2 і $\frac{1}{2}$?

17. При яких значеннях *a* прямі $3x-y+a=0$ і $ax+ay+1=0$:

1) перетинаються;

2) паралельні;

3) збігаються?

18. Яка множина на площині називається колом? Запишіть рівняння кола з центром у точці C(a,b) і радіусом R.

19. Дайте означення еліпса і запишіть канонічне рівняння еліпса.

20. Побудуйте криву еліпса і поясніть геометричний зміст параметрів, що входять до рівняння.

21. Що таке ексцентриситет еліпса та який його геометричний зміст?

22. Дайте означення гіперболи та виведіть її канонічне рівняння.

23. Дослідіть форму гіперболи за її канонічним рівнянням. Поясніть геометричний зміст параметрів, що входять до рівняння.

24. Які гіперболи називаються рівносторонніми, спряженими?

25. Що таке ексцентриситет гіперболи та який його геометричний зміст?

26.Дайте означення параболи і виведіть її канонічне рівняння.

27. Дослідити форму параболи за її канонічним рівнянням.

28. Чому дорівнює ексцентриситет параболи? Який геометричний зміст параметра *p* у рівнянні параболи?

29. Яку фігуру на площині визначає рівняння: а) $5x-2y-1=0$; б) $x^2+y^2+2y+1=1$?

30. Чи лежить точка (4; 1) на колі $(x-2)^2+(y-1)^2=25$?

31. Чи є точка (1; 3) центром кола $(x+1)^2+(y-2)^2=4$?

32. Яку фігуру в просторі визначає рівняння: а) $y=-2$; б) $y = 2x^2$;

в) $x^2+y^2=1$; г) $y=\frac{1}{x}$; д) $(x-3)^2+(y-1)^2=4$; е) $\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

РОЗДІЛ ІІІ.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Студент повинен знати:

- означення функції, функціональні залежності в природі;
- види функцій, способи їх задання, графіки елементарних функцій;
- основні властивості функцій;
- поняття границі функції;
- основні теореми про границі;
- означення неперервності функції;
- означення комплексного числа, правила дій над комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формах;
- правила переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа.

Студент повинен уміти:

- будувати графіки функцій на основі правил перетворення;
- знаходити область визначення функції;
- досліджувати функції на парність та періодичність;
- застосовувати основні теореми про границі до обчислення границь;
- виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, переходити від алгебраїчної форми до тригонометричної форми комплексного числа.

Довідковий матеріал

Функції

Якщо кожному значенню, яке може прийняти змінна x, за деяким правилом становиться у відповідність єдине значення змінної y, то говорять, що y є однозначна функція від x. Позначають $y=f(x)$.

Множину значень змінної *x,* при яких функція має смисл, називають областю визначення функції. Позначають *D(f)*.

Способи задання функцій: аналітичний (формулою), табличний (таблицею), графічний (графіком), словесний (описанням).

Графіком функції *y=f(x)* називається сукупність всіх точок площини, абсциси яких є значення аргументу, взятих із області визначення функції, а ординати, відповідні значенням аргументу, - значення функції.

Функція *y=f(x)* називається монотонно зростаючою (спадною), якщо для кожної пари x_1, $x_2 \in X$, де $x_1 \prec x_2$ виконується нерівність

$$f(x_1) \prec f(x_2)(f(x_1) \succ f(x_2))$$

Функція *y=f(x)* називається парною, якщо для всіх $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Функція *y=f(x)* називається непарною, якщо для всіх $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Функція *y=f(x)* називається періодичною, якщо існує відмінне від нуля число *T,* таке, що для всіх $x \in X$ виконується рівність $f(x-T) = f(T+x) = f(x)$. Число *T* називають періодом функції.

Границі функцій

Границею функції $y = f(x)$ при ***x,*** що прямує до ***a,*** називається число ***b***, якщо для будь-якого $\varepsilon \succ 0$ існує число $\delta \succ 0$,таке, що для всіх ***x***, які задовольняють нерівність $0 \prec |x-a| \prec \delta$ випливає $|f(x)-b| \prec \varepsilon$.

Позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Визначні границі:

Перша визначна границя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Таблиця еквівалентних величин:

sin $x \cong x$;

tg $x \cong x$;

arcsin $x \cong x$;

$arctg\,x \cong x.$

Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e,\quad \lim_{x\to 0} x^x = 1,\quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1,\quad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Основні теореми про границі:

Якщо границя функції існує, то існує границя суми, добутку і частки, причому границя суми двох функцій дорівнює сумі границь кожного доданку, границя добутку дорівнює добутку границь, границя частки дорівнює частці границі чисельника і границі знаменника при умові, що границя знаменника не дорівнює нулю, постійний множник можна виносити за знак границі.

Комплексні числа.

Комплексним числом називається число виду $z=a+bi$,
де a, b дійсні числа, i – уявна одиниця $(i^2=-1)$.

$z=a+bi$ – алгебраїчна форма комплексного числа,

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Якщо $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$ - комплексні числа, то їх сума добуток і частка також комплексні числа, які обчислюються за правилами:

$$a+ib+c+id = a+c+(b+d)i.$$

$$a+ib-c-id = a-c+(b-d)i.$$

$$(a+ib)*(c+id) = ac+adi+bidi+bci = ac-bd+(ad+bc)i.$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}i.$$

$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрична форма комплексного числа, де

r – модуль числа, φ - аргумент числа

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad cos\ \varphi=\frac{a}{r}$ $\qquad sin\ \varphi=\frac{b}{r}$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

Множення і ділення.

Нехай $z_1=r_1(cos\ \varphi_1+ isin\varphi_1)$ *і* $z_2=r_2(cos\ \varphi_2+ isin\varphi_2)$, *тоді*

$z_1 z_2= r_1 r_2(cos(\varphi_1+\varphi_2)+ isin(\varphi_1+\varphi_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Формула Муавра для знаходження *n* – го степеня числа

$z^n=r^n\ (cos\ n\ \varphi+isin\ n\varphi)$

Обчислення кореня *n-го* степеня з комплексного числа у тригонометричній формі

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\ (cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+isin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\ к=0,1,...,n-1.$$

<u>Приклади розв'язання задач</u>

Приклад 3.1. Знайти область визначення функції

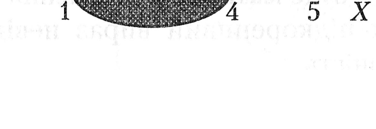
$$y=\arcsin\frac{x-3}{2}-\lg(4-x).$$

Розв'язання .

Згідно з властивостями оберненої тригонометричної та логарифмічної функції маємо:

$$\begin{cases}-1\le\frac{x-3}{2}\le 1\\ 4-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x-3\le 2\\ x<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2+3\le x\le 2+3\\ x<4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\le x\le 5\\ x<4\end{cases}$$



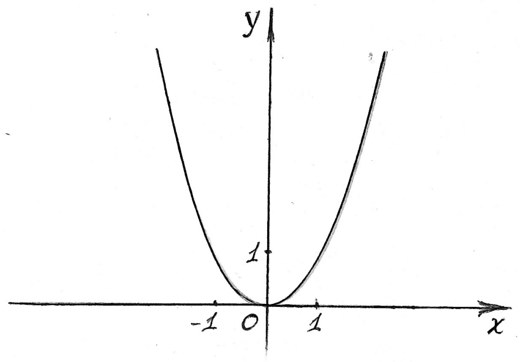
Отже, $1\le\ x\ \le\ 4$.

Відповідь: [1;4]

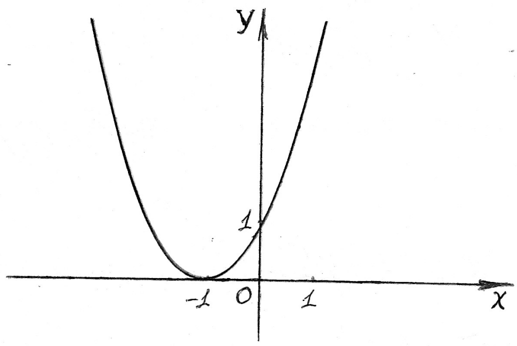
Приклад 3.2. Користуючись графіком функції $y=x^2$, побудувати графік функції $y=x^2+2x+2$

Розв'язання. Задану функцію представимо у вигляді $y=(x+1)^2+1$.

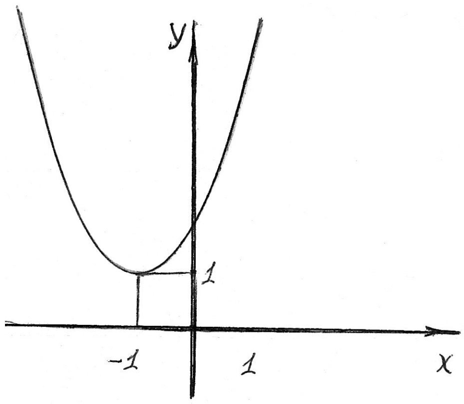
Виходячи із графіка функції $y = x^2$



Спочатку побудуємо графік функції $y = (x+1)^2$ перенесенням графіка $y = x^2$ вліво на 1



А потім графік $y = (x+1)^2$ перенесемо в гору на 1, отримаємо



$y = (x+1)^2 + 1$

Приклад 3.3. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x - 6}$, при підстановці в дану функцію *x=3* ніяких невизначеностей не виникає, тому маємо

$$\frac{3^2 - 5 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3^2 + 3 - 6} = -\frac{1}{3}$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$, при *x=1* знаменник функції відмінний від нуля, а чисельник функції дорівнює нулю, значить $\frac{0}{k}=0$, тому маємо

$$\frac{2-3+1}{3+4-2}=\frac{0}{5}=0$$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$, при *x=-2* чисельник дробу відмінний від 0, а знаменник дорівнює нулю, отже отримуємо відношення $\frac{k}{0}=\infty$.

Приклад 3.4. Розкрити невизначеність і обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$, при *x=2* чисельник і знаменник даного дробу перетворюється на нуль і ми отримуємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності розкладемо чисельник і знаменник на лінійні множники один із яких дорівнює *(x-2)*

$$\lim_{x\to +2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{9}{5}.$$

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$, при $x\to\infty$ має місце невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Для розкриття цієї невизначеності розділимо чисельник і знаменник на вищий степінь змінної *x*, тобто x^2, отримуємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{4}{2}=2.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$, при *x=2* знову отримуємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Для того, щоб її позбавитися слід помножити чисельник і знаменник дробу спочатку на вираз, спряжений до чисельника, потім на вираз спряжений до знаменника:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{9}{4}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x+x^2}-x$, при $x\to\infty$ маємо невизначеність $\infty-\infty$, щоб її розкрити помножимо і поділимо даний вираз на вираз, спряжений до нього, отримуємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x+x^2}-x)(\sqrt{4x+x^2}+x)}{\sqrt{4x+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{4x+x^2}+x},$$

при $x\to\infty$ отримали нову невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, виконуємо почленне ділення чисельника і знаменника на x , тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{4x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x}+1}+1}=\frac{4}{2}=2.$$

Приклад 3.5. Обчислити, скориставшись визначною границею $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}$, при *x=0* маємо невизначеність $\frac{0}{0}$ від якої позбавляються використовуючи першу визначну границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад 3.6. Обчислити за допомогою другої визначної границі $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x+2}$, подібні границі обчислюються за допомогою другої визначної границі $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}(1+\frac{1}{x})^{2}=e^{5}\cdot 1^{2}=e^{5}.$$

Приклад 3.7.

1) $(-3+5i)+(4-8i)=(-3+4)+(5-8)i=1+(-3)i$;

2) $(-2+3i)+(-2-3i)=(-2-2)+(3-3)i=-4+0i=-4$.

Приклад 3.8.

1) $(-5+2i)-(3-5i)=(-5-3)+(2-(-5))i=-8+7i$;

2) $(3-4i)-(3+4i)=(3-3)+(-4-4)i=0+(-8)i=-8i$.

Приклад 3.9.

1) $(1-2i)(3+2i)=3-6i+2i-4i^2=7-4i$;

2) $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

Приклад 3.10.

$$\frac{7-4i}{3+2i}=\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{21-12i-14i+8i^2}{9+4}=\frac{13-26i}{13}=1-2i.$$

Задачі для самостійної роботи

Знайти область визначення функції**:**

3.1. $y=3\sqrt{4-x^2}$.

3.2. $y=\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$.

3.3. $y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$.

3.4. $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$.

3.5. $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$.

3.6. $y=x\arcsin x$.

3.7. $y=2^{x}$.

3.8. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Побудувати графіки функцій:

3.9. $y=3x+5$.

3.10. $y=\frac{1}{2}x^2+1$.

3.11. $y=4-4x^2$.

3.12. $y=\frac{5}{x}$.

3.13. $y=x^3+1$.

3.14. $y=\sin 2x$.

3.15. $y=\cos 3x$.

3.16. $y=\sin\frac{x}{2}$.

3.17. $y=\cos\frac{x}{3}$.

3.18. $y=2\,\mathrm{tg}\,x$.

3.19. $y=4\sin x$.

3.20. $y=5\cos x$.

Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

3.21. $2+i+3+i+(-4+5i)$.

3.22. $8+(2-9i)+4i+(-2-8i)$.

3.23. $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$.

3.24. $(3+7i)(2+i)$.

3.25. $\dfrac{1-i}{1+i}$.

3.26. $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$.

3.27. $5+3i-(2+i)$.

3.28. $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}i$.

3.29. $(2c-di)-(5c-2di)-(c-di)+(-4+3di)$.

3.30. $(2-i)(1+2i)$.

3.31. $\dfrac{5-\sqrt{2}i}{5+\sqrt{2}i}$.

3.32. $\dfrac{5-7i}{\sqrt{3}+i}$.

3.33. $0,8-0,2i+0,1-1,3i$.

3.34. $5x-3yi-2x+8yi$.

3.35. $(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i)-(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i)+(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i)$.

3.36. $(2+3i)(2-3i)$.

3.37. $\frac{3+4i}{5-2i}$.

3.38. $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}i}{\sqrt{m}-\sqrt{n}i}$.

Розв'язати рівняння в множині комплексних чисел:

3.39. $x^2-12x+45=0$. *3.42.* $3x^2+7x+5=0$.

3.40. $x^2+6x+18=0$. *3.43.* $2x^2-x+3=0$.

3.41. $3x^2+2x+27=0$. *3.44.* $z^2-2iz-5=0$.

Складіть квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, що має такі корені:

3.45. $z_1=1-\sqrt{3}i$, $z_2=1+\sqrt{3}i$.

3.46. $z_1=3+4i$, $z_2=3-4i$.

3.47. $z_1=3+8i$, $z_2=3-8i$.

Записати в тригонометричній формі комплексні числа:

3.48. i.

3.49. -2.

3.50. $1+i$.

3.51. $1-i$.

3.52. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Виконати дії над числами у тригонометричній формі

3.53. i^2.

3.54. -2^2.

3.55. $(1+i)^2$.

3.56. $(1-i)^2$.

3.57. $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$.

Добути корінь 4 – го степеня з чисел:

3.58. i.

3.59.-2.

3.60.1+i.

3.61.1-i.

3.62. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Обчислити попарно добуток та частку:

3.63. i та *1+i.*

3.64. 1+i та *1-i.*

3.65. 1-i та *-2.*

3.66. I та *1-i.*

3.67. -2 та $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.68. -2 та *1+i.*

3.69. 1+i та $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.70. 1-i та $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знайти границі:

3.71. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$.

3.72. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$.

3.73. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^2+1}$.

3.74. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

3.75. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^4+1}}$.

3.76. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

3.77. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

3.78. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

3.79. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

3.80. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

3.81. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

3.82. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

3.83. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.

3.84. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$.

3.85. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

3.86. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

3.87. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$.

3.88. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

3.89. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

3.90. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

3.91. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

3.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

3.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

3.94. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

3.95. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

3.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3.97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

3.98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

3.99. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

3.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

<u>Відповіді</u>

3.1. [-2;2].

3.2. [-5;5].

3.3. [2;5).

3.4. [-3;7].

3.5. $(-\infty;+\infty)$.

3.6. $[-1;1]$.

3.7. $(-\infty;+\infty)$.

3.8. $(-\infty;1)\cup(-1;+\infty)$.

3.21. $1+7i$.

3.22. $8-13i$.

3.23. $3a+3bi$.

3.24. $-1+17i$.

3.25. $-i$.

3.26. $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

3.27. $3+2i$.

3.28. $\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{20}i$.

3.29. $-8c-4di$.

3.30. $4+3i$.

3.31. $\dfrac{23-10\sqrt{2}i}{27}$.

3.32. $\dfrac{(5\sqrt{3}-7)-i(5+7\sqrt{3})}{4}$.

3.33. $0,9-1,5i$.

3.34. $3x+5yi$.

3.35. $\dfrac{13}{20}-\dfrac{7}{4}i$.

3.36. 13.

3.37. $\dfrac{7+26i}{29}$.

3.38. $\dfrac{m-n+2\sqrt{mni}}{m+n}$.

3.39. $-6\pm 3i$.

3.40. $-3\pm 3i$.

3.41. $\dfrac{-1\pm 4i\sqrt{5}}{3}$.

3.42. $\dfrac{-7\pm i\sqrt{11}}{6}$.

3.43. $\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{4}$.

3.44. $z=i\pm 2$.

3.45. $x^2-2x+4=0$.

3.46. $x^2-6x+25=0$.

3.47. $x^2-6x+73=0$.

3.48. $cos\,\dfrac{\pi}{2}+isin\dfrac{\pi}{2}$.

3.49. $2(cos\,\pi+isin\,\pi)$.

3.50. $\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

3.51. $\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

3.52. $cos\,\dfrac{\pi}{3}-isin\dfrac{\pi}{3}$.

3.71. 0,5. 3.72. ∞. 3.73. 0. 3.74. 1. 3.75. 1. 3.76. 0. 3.77. 0.

3.78. 1. 3.79. -0,5. 3.80. 9. 3.81. 0. 3.82. -0,8. 3.83. 1,8.

3.84 $\dfrac{5}{13}$. 3.85. 6. 3.86. ∞. 3.87. -1. 3.88. 0,5. 3.89. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

3.90. -1,2. 3.91. $-\dfrac{5}{12}$. 3.92. 2,5. 3.93 $\dfrac{2}{3}$. 3.94. 0. 3.95. 0, ∞.

3.96. 0,5. *3.97. 0,75.* *3.98. -1.* *3.99. 0,5.* *3.100* $-2\sin\alpha$.

Індивідуальні завдання

на тему: “Границі”.

Не використовуючи правила Лопіталя знайти границі.

1 варіант

1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^3-2}{6x^3-4x+3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x-3}{2x+1})^{4-x}$.

2 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^2}{x+3x^2+2x^4}$.

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{4-3x-x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1}-x}$.

3 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg8x)^{\cos ec2x}$.

4 варіант

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{1-\cos 4x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{3x-1})^{1-6x}$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$.

5 варіант

1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x-2x^2-10}{x^2-x-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^{2+9}}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{3x-1})^{1-3x}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 6x}}{1-\cos 4x}$.

6 варіант

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+4x+1}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} sin3xctg2x$.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{2x-1})^{4x+1}$.

7 варіант

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+3x+4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{-\frac{3x}{2}-2}$.

8 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2 8x+4}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^3+x^2-4}$.

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-tg^3 x}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2 2x})$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x-3}{2x+5})^{3x-4}$.

9 варіант

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+x-5}$.

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x+4})^{2x-1}$.

10 варіант

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+4}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+3x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin 2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x-8x-3x^2}{x^2+x-6}$.

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}-3}$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{1}{x}+1}$.

11 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4 3x^2+1}{3x^4 5x+2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2 2x-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})^x$.

12 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-7x+5}{4x^3+8x^2-3}$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.   5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2 2})x^2$.

13 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-x+4}{3-2x^2}$.   4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{ctgx-ctga}{x-a}$.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2+x-6}$.   5) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+2x}-\sqrt{x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

14 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-11x^2+3}{5x-3x^5}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{3x}$.

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}$.   5) $\lim\limits_{x\to\infty}[In(x+1)-Inx]$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

15 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x\sin^2 x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{20+x-x^2}{3x^2 11x-20}$.   5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x-2}}$.

16 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$.   4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9}$.   5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+4}{3x+2})^{x+2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.

17 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-6x+7}{5x^2-9}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$.

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+5}{x+2})^{2x+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

18 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-2x^2+11}{5x^7+3x^4+2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg2x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+5}{x+8})^{2x+3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x^3+x^2}}{x^2-3x+2}$.

19 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6 6x^5-x^2+5}{3x^4-4x^3+1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1+x})^{x+4}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

20 варіант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{4}}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x[Inx-In(x+2)]$.

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$.

21 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$, *при а)* $x_0=1$, $x_0=-1$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$. *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x-3})^{x-5}$.

22 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2+2x-3}$ *при а)* $x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$. *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x-1}{2x+4})^{3x-1}$.

23 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2+4x-3}{3x^2+x-2}$, *при а)* $x_0=1$, $x_0=-1$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$. *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-2}{x+1})^{2x-5}$.

24 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$, *при а)* $x_0=2$, $x_0=4$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$. *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^{3x}}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x}{2x-3})^{3x}$.

25 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$, *при а)* $x_0=-1$, $x_0=2$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}5x\,ctg4x$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3x-4}{3x+2})^{2x}$.

26 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-125}$, *при а)* $x_0=-1$, $x_0=5$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg2x}{\sin 3x}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{4x-1}{4x+1})^{2x}$.

27 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$, *при а)* $x_0=1$, $x_0=2$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^{2x+3}$.

28 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x-4}$, *при а)* $x_0=-1$, $x_0=-3$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2-3x}{5-3x})^{x}$.

29 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$, *при а)* $x_0=-1$, $x_0=-5$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{2\sin x}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-7}{x+1})^{4x-2}$.

30 варіант

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$, *при а)* $x_0=2$, $x_0=4$, $x_0=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{3x^2}$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1-x}{2-x})^{3x}$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення функції одного аргументу. Що таке область визначення функції, область значень?
2. Які основні способи задання функції?
3. Яка функція називається зростаючою, спадною, монотонною, парною, непарною, періодичною? Наведіть приклади.
4. Побудуйте графіки основних елементарних функцій.
5. Що таке ціла раціональна функція (многочлен), раціональна функція, трансцендентна функція?
6. Як за графіком *y=cos x* побудувати графіки функцій *y= cos 3x*,

$y=\cos\dfrac{x}{3}$, $y=\cos x+1$.

7. Сформулюйте та доведіть основні теореми про границі.
8. Що означають записи: $A=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$,

$$B=f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x).$$

9. Як визначається число e?
10. Які логарифми називаються натуральними?
11. Дайте означення неперервності функції в точці.
12. Які числа утворюють множину комплексних чисел?
13. Сформулюйте правила дій над комплексними числами в алгебраїчній формі?
14. Покажіть зв'язок між алгебраїчною і тригонометричною формами запису комплексного числа.
15. Як перемножити два комплексних числа, задані в тригонометричній формі?
16. Як поділити два комплексних числа, задані в тригонометричній формі?
17. Запишіть формулу Муавра та формулу обчислення коренів з комплексного числа.

РОЗДІЛ IV .

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Студент повинен знати:

- задачі, що приводять до поняття похідної;
- означення похідної;
- правила диференціювання;
- таблицю похідних елементарних функцій;
- поняття диференціалу;
- властивості диференційованих функцій;
- правила дослідження функції за допомогою похідної;
- застосування похідної у дослідженні природничих процесів.

Студент повинен уміти:

- диференціювати функції за правилами та таблицею похідних;
- застосувати похідну до дослідження функції

Довідковий матеріал

Похідна. Таблиця похідних

Похідною функції в точці називається границя відношення її приросту до відповідного приросту незалежної змінної, при умові, що останній прямує до нуля.

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$

Похідні елементарних функцій:

$$c' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Правила диференціювання

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$(UV)' = U'V + UV'$ $\qquad$ $(CU)' = CU'$

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$, $V \neq 0$.

$y = f(g(x))$ то $\quad y_x' = f_g' g_x'$ - похідна складної функції.

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ то $\quad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$ - похідна функції заданої параметрично.

Геометричний та механічний зміст похідної

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 записується так: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f'(x_0)$ - кутовий коефіцієнт дотичної.

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної в ній.

$k_n = -\frac{1}{k_d}$, де k_n - кутовий коефіцієнт нормалі, k_d - кутовий коефіцієнт дотичної.

Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 записується так: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії *S=f(t)* називається похідна функції *S* за часом *t* в момент часу t_0 *;* $v(t_0) = s'(t_0)$

<u>Приклади розв’язання задач</u>

Приклад 4.1.

Знайти похідну за означенням, $y = x + 2$

Знайдемо Δx, Δy та $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, отже

$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = x_0 + \Delta x + 2 - (x_0 + 2) = \Delta x$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, значить $y' = (x + 2)' = 1$.

Приклад 4.2.

Обчислити похідні функцій

1) $y = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$ $\quad y' = 2x - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 0 = 2x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

2) $y = x^2 \cos x$

$y' = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = x(2\cos x - x\sin x)$

3) $y = \frac{x^3}{2x+3}$ $\quad y' = \frac{3x^2(2x+3) - x^3 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^3 + 9x^2}{(2x+3)^2}$

4) $y = \arcsin(7x+2)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(7x+2)^2}}(7x+2)' = \frac{7}{\sqrt{-49x^2 - 28x - 3}}$

5) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 2t - 1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_t' = -\sin t \\ y_t' = 2t + 2 \end{matrix}$ $\quad y_x' = -\frac{2t+2}{\sin t}$

6) $y = arcctgx$ $\quad y''$-?

$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$y'' = \left(-\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = \left(1+x^2\right)^{-2}\left(1+x^2\right)' = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

Приклад 4.3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка заданої функції $y = (x-3)^3$ в точці (2, -1)

Запишемо рівняння дотичної $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Знайдемо всі необхідні компоненти формули

$y' = 3(x-3)^2$

$y_0' = 3(2-3)^2 = 3$

$y_0 = -1$,

отже рівняння дотичної

$$y = 3(x-2)-1,$$
$$y = 3x-7.$$

Тоді рівняння нормалі

$$y = -\frac{1}{3}(x-2)-1,$$
$$y = -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}.$$

Задачі для самостійної роботи

Знайти похідну наступних функцій за означенням

4.1. $y = 3x$.

4.2. $y = 8 - x^2$.

4.3. $y = (4x+1)^2$.

4.4. $y = \dfrac{x^3}{3}$.

4.5. $y = \dfrac{1}{x-3}$.

4.6. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Знайти похідну наступних функцій, користуючись таблицею похідних, та правилами обчислення похідних.

4.7. $y = 1 - 2x^3$.

4.8. $y = \dfrac{x+2}{x}$.

4.9. $y = \dfrac{3}{x^2-1}$.

4.10. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

4.11. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5$.

4.12. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$.

4.13. $y = \dfrac{2x+3}{5}$.

4.14. $y = x^2(2x-1)$.

4.15. $y=\left(x^3+3\right)\left(4x^2-5\right)$.

4.16. $y=(x-5)^4(x+3)^5$.

4.17. $y=(x-1)\sqrt{x}$.

4.18. $y=\dfrac{x^3-3}{5-x^2}$.

4.19. $y=\dfrac{5x}{(5-2x)^3}$.

4.20. $y=\dfrac{\left(3x^2+5\right)^3}{2x-3}$.

4.21. $y=\dfrac{2}{\left(x^3+5\right)}$.

4.22. $y=\sqrt[3]{6x^2-5}$.

4.23. $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$.

4.24. $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-4}}$.

4.25. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$.

4.26. $y=\sin^3 x$.

4.27. $y=\sin x^2$.

4.28. $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$.

4.29. $y=\cos\dfrac{x^3}{2}$.

4.30. $y=x^2\cos x$.

4.31. $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

4.32. $y=\left(x^2-1\right)\sin x+2x\cos x$.

4.33. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

4.34. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

4.35. $y=tg^4\left(x^2+1\right)$.

4.36. $y=(tgx-ctgx)^2$.

4.37. $y=x-tgx$.

4.38. $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$.

4.39. $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$.

4.40. $y=\ln^2 x$.

4.41. $y=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$.

4.42. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$.

4.43. $y=\ln x^2$.

4.44. $y=(x-1)e^x$.

4.45. $y=\left(x^2-4x+8\right)e^{\frac{x}{2}}$.

4.46. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. 4.47. $y=e^{x\ln x}$.

4.48. $y=x^{2}2^{x}$. 4.49. $y=e^{\sqrt{x}}$.

4.50. $y=tg^{3}2x\cos^{2}2x$. 4.51. $y=\ln\left(e^{-x}+xe^{-x}\right)$.

4.52. $y=\ln\dfrac{x^{3}-9}{x^{3}-1}$. 4.53. $y=x-arctgx$.

4.54. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^{2}}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$.

4.55. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}arctgx$.

4.56. $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$. 4.57. $y=\arcsin\left(e^{x^{2}}\right)$.

4.58. $y=\ln\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$. 4.59. $y=\ln\dfrac{\sqrt{5}+tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{5}-tg\dfrac{x}{2}}$.

4.60. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

4.61. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{2x+3}{\sqrt{5}}$.

4.62. $y=arctg\dfrac{3}{2}x$. 4.63. $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x}{x+5}}$.

4.64. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^{2}-1}}$. 4.65. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}-x}{\sqrt{x^{2}+1}+x}$.

4.66. $y=\sqrt{x^{2}+1}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}-1}{\sqrt{x^{2}+1}+1}$.

4.67. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$.

4.68. $y=arctg\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$. 4.69. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

4.70. $y=\frac{\left(1+x^2\right)arctgx-x}{2}$.   4.71. $y=4^{arctg\sqrt{x^2+1}}$.

4.72. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці.

4.73. $y=x^2$, $A(2;4)$.

4.74. $y=\sin x$, $x_0=\pi$.

4.75. $y=5-3x^2$, $x_0=-2$.

<u>Відповіді</u>

4.1. $y'=3$.   4.2. $y'=-2x$.   4.3. $y'=8(4x+1)$.

4.4. $y'=x^2$.   4.5. $y'=-\frac{1}{(x-3)^2}$.   4.6. $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4.7. $y'=-6x^2$.   4.8. $y'=-\frac{2}{x^2}$.   4.9. $y'=-\frac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

4.10. $y'=-\frac{2}{x^3}$.   4.11. $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.   4.12. $y'=x^2-\frac{9}{x^4}$.

4.13. $y'=\frac{2}{5}$.   4.14. $y'=6x^2-2x$.   4.15. $y'=20x^4-15x^2+24x$.

4.16. $y'=(x-5)^3(x+3)^4(9x-13)$.   4.17. $y'=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

4.18. $y'=-\frac{x^4-15x^2+6x}{\left(5-x^2\right)^2}$.   4.19. $y'=\frac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}$.

4.20. $y'=\frac{\left(3x^2+5\right)^2\left(30x^2-54x-10\right)}{(2x-3)^2}$.   4.21. $y'=-\frac{30x^2}{\left(x^3+5\right)^6}$.

4.22. $y'=\frac{4x}{\sqrt[3]{\left(6x^{2-5}\right)^2}}$.   4.23. $y'=\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$.

4.24. $y' = -\dfrac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

4.25. $y' = \dfrac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}$.

4.26. $y' = 3\sin^2 x\cos x$.

4.27. $y' = 2x\cos x^2$.

4.28. $y' = -\dfrac{1}{2}\sin x$.

4.29. $y' = -\dfrac{3}{2}x^2\sin\dfrac{x^3}{2}$.

4.30. $y' = x(2\cos x - x\sin x)$.

4.31. $y' = \dfrac{5\cos x - \cos 5x}{2\cos^2 3x}$.

4.32. $y' = x^2\cos x$.

4.33. $y' = \dfrac{1}{1-\sin x}$.

4.34. $y' = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$.

4.35. $y' = \dfrac{8xtg^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$.

4.36. $y' = -\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$.

4.37. $y' = -tg^2 x$.

4.38. $y' = -\dfrac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$.

4.39. $y' = -\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$.

4.40. $y' = \dfrac{2\ln x}{x}$.

4.41 $y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}$.

4.42. $y' = \dfrac{1}{\sin x}$.

4.43. $y' = \dfrac{2}{x}$.

4.44. $y' = xe^x$.

4.45. $y' = \dfrac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

4.46. $y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4.47. $y' = e^{x\ln x}(1+\ln x)$.

4.48. $y' = (2x + x^2\ln 2)2^x$.

4.49. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

4.50. $y' = 2tg^2 2x(3 - 2\sin^2 2x)$.

4.51. $y' = -\dfrac{x}{1+x}$.

4.52. $y' = \dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$.

4.53. $y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

4.54. $y' = \sqrt{1-x^2}$.

4.55. $y' = \dfrac{1}{1-x^4}$.

4.56. $y' = -\frac{2}{(x+1)^2} ctg \frac{2x+4}{x+1}$. 4.57. $y' = \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

4.58. $y' = \frac{1}{1+e^x}$. 4.59. $y' = \frac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$. 4.60. $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$.

4.61. $y' = \frac{1}{2x^2+6x+7}$. 4.62. $y' = \frac{6}{4+9x^2}$. 4.63. $y' = \frac{1}{x^2+5x}$.

4.64. $y' = \frac{1}{4(x^2-1)}$. 4.65. $y' = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 4.66. $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

4.67. $y' = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. 4.68. $y' = \frac{2a^3}{x^4 - a^4}$.

4.69. $y' = \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 4.70. $y' = xarctgx$.

4.71. $y' = 4^{arctg\sqrt{x^2+1}} \ln 4 \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$. 4.72. $y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}} \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$.

4.73. $y = 4x - 4$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$. 4.74. $y = \pi - x$.

4.75. $y = 12x + 17$, $y = -\frac{1}{12}x - 7\frac{1}{2}$.

Індивідуальні завдання на тему «Похідна»

Знайти похідні заданих функцій

Варіант **1.**

1. $y = \frac{1}{24}\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2-4} + \frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x}.$

2. $y = \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}.$

3. $y = \left(arctgx\right)^{\frac{1}{2}\ln arctgx}.$

Варіант **2.**

1. $y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{2}}.$

2. $y = 4\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$

3. $y = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\sin\sqrt{x}}.$

Варіант **3.**

1. $y = 2x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right) - e^{-2x}\arcsin\left(e^{2x}\right).$

2. $y = x\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1} + 3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

3. $y = \left(\sin x\right)^{5e^x}.$

Варіант **4.**

1. $y = \sqrt{9x^2-12x+5}\,arctg(3x-2) - \ln\left(3x-2+\sqrt{9x^2-12x+5}\right).$

2. $y = x^3\arcsin x + \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

3. $y = \left(\arcsin x\right)^{e^x}.$

Варіант **5.**

1. $y=\frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

2. $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$.

3. $y=(\ln x)^{3^x}$.

Варіант **6.**

1. $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}$.

2. $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3. $y=x^{\arcsin x}$.

Варіант **7.**

1. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

2. $y=x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

3. $y=(ctg3x)^{2e^x}$.

Варіант **8.**

1. $y=3x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{6x}}\right)-e^{-3x}\arcsin\left(e^{3x}\right)$.

2. $y=2\arccos\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$.

3. $y=x^{e^{tgx}}$.

Варіант **9.**

1. $y=\ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right)-\sqrt{16x^2-8x+2arctg(4x-1)}.$

2. $y=4\arcsin\dfrac{4}{2x+3}-\sqrt{4x^2+12x-7}.$

3. $y=(tgx)^{4e^x}.$

Варіант **10.**

1. $y=\ln\dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}.$

2. $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}.$

3. $y=(\cos 5x)^{e^x}.$

Варіант **11.**

1. $y=(2x+3)^4\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{2}{3}\left(4x^2+12x+11\right)\sqrt{x^2+3x+2}.$

2. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$

3. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}.$

Варіант **12.**

1. $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}.$

2. $y=x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

3. $y=(x-5)^{arctgx}.$

Варіант 13.

1. $y = 5x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}\right) - e^{-5x} \arcsin\left(e^{5x}\right)$.

2. $y = (2 + 3x)\sqrt{x - 1} + \frac{3}{2} arctg\sqrt{x - 1}$.

3. $y = \left(x^3 + 4\right)^{tgx}$.

Варіант 14.

1. $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} arctg(x - 4) - \ln\left(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17}\right)$.

2. $y = 2\arcsin\frac{2}{3x + 1} - \sqrt{9x^2 + 6x - 3}$.

3. $y = x^{\sin x^3}$.

Варіант 15.

1. $y = \ln\frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2 - x} + \frac{2}{2 - x}\sqrt{-3 + 4x - x^2}$.

2. $y = arctg\sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

3. $y = \left(x^2 - 1\right)^{\arcsin x}$.

Варіант 16.

1. $y = \left(3x^2 - 4x + 2\right)\sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \arcsin\frac{1}{3x - 2}$.

2. $y = \sqrt{(4 + x)(1 + x)} + 3\ln\left(\sqrt{4 + x} + \sqrt{1 + x}\right)$.

3. $y = \left(x^4 + 5\right)^{ctgx}$.

Варіант 17.

1. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}$.

2. $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$.

3. $y=(\sin x)^{5^{x/2}}$.

Варіант 18.

1. $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-5x}\right)$.

2. $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

3. $y=\left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

Варіант 19.

1. $y=\ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right)-\sqrt{4x^2-12x+10}arctg(2x-3)$.

2. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

3. $y=(\cos 19x)^{\arccos x}$.

Варіант 20.

1. $y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

2. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin\frac{4}{x+1}$.

3. $y=x^{3^x}2^x$.

Варіант 21.

1. $y=\frac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}$.

2. $y=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)arctgx$.

3. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$.

Варіант 22.

1. $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

2. $y=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)$.

3. $y=x^{e^{ctgx}}$.

Варіант 23.

1. $y=\arcsin\left(e^{-4x}\right)+\ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1}\right)$.

2. $y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

3. $y=x^{e^{\cos x}}$.

Варіант 24.

1. $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)-\sqrt{25x^2+1}arctg5x$.

2. $y=3\arcsin\frac{3}{x+2}+\sqrt{x^2+4x-5}$.

3. $y=x^{2^x}5^x$.

Варіант 25.

1. $y=\dfrac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}$.

2. $y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}$.

3. $y=x^{e^{\sin x}}$.

Варіант 26.

1. $y=(3x+1)^4\arcsin\dfrac{1}{3x+1}+\left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x}$.

2. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}arctg\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

3. $y=(tgx)^{\ln tg\frac{x}{4}}$.

Варіант 27.

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+3}$.

2. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$.

3. $y=x^{e^{arctgx}}$.

Варіант 28.

1. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-3x}\right)$.

2. $y=\dfrac{x}{4}\left(10-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+6arctg\dfrac{x}{2}$.

3. $y=\left(x^8+1\right)^{ctgx}$.

***Варіант* 29.**

1. $y=\sqrt{49x^2+1}\,arctg7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right)$.

2. $y=\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+2\sqrt{x^2+3x+2}$.

3. $y=x^{29^x}29^x$.

***Варіант* 30.**

1. $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

2. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$.

3. $y=(\cos 2x)^{\ln\cos\frac{2x}{4}}$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення похідної функції $y=f(x)$ у точці x_0
2. Правила обчислення похідної суми, добутку, частки двох функцій.
3. У чому полягає геометричний, механічний, біологічний та економічний зміст похідної?
4. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$, яка має похідну у точці з абсцисою x_0.
5. Запишіть рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$, яка має похідну у точці з абсцисою x_0.
6. Диференціювання складної функції.
7. Диференціювання функції, заданої параметрично.

8. Що таке похідна функції другого, третього, n-го порядку?
9. Яка функція називається спадною (не зростаючою), зростаючою (не спадною) на проміжку (a,b)?
10. Що таке проміжки монотонності функції?
11. Сформулюйте необхідну та достатню ознаки зростання (спадання) функції на проміжку (a,b).
12. Сформулюйте означення точки максимуму (мінімуму) функції.
13. Сформулюйте означення максимуму (мінімуму) функції.
14. Яка необхідна умова екстремуму диференційованої функції $f(x)$?
15. Напишіть план дослідження функції.

РОЗДІЛ V.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Студент повинен знати:

- означення первісної, основну властивість первісної;
- таблицю невизначених інтегралів;
- властивості невизначених інтегралів;
- основні методи інтегрування функції;
- поняття визначеного інтеграла,
- задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла;
- формулу Ньютона-Лейбніца;
- основні властивості визначеного інтеграла;
- сфери застосування визначеного інтеграла.

Студент повинен уміти:

- застосовувати різні методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів;
- обчислювати визначені інтеграли за допомогою формули Ньютона-Лейбніца;
- застосовувати визначений інтеграл для розв'язування задач природничого та економічного змісту.

Довідковий матеріал

Первісна. Невизначений інтеграл.

*Основні поняття***.** Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо для всіх x з цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Властивості первісних:

1^0. Якщо *F(x)* – первісна для функції *f(x)* на проміжку (*a,b*), то *F(x)+C,* де С – довільна стала, також первісна цієї функції на (*a,b*).

2^0. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ будь-які первісні для функції *f(x)* на проміжку (*a,b*), то $F_1(x)$-$F_2(x)=C$, *C – const.*

Невизначеним інтегралом від функції *f(x)* на проміжку (*a,b*), називається сукупність всіх первісних для цієї функції на (*a,b*).

Позначення: $\int f(x)dx.$

Отже, за означенням $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Із означення невизначеного інтеграла безпосередньо випливає, що

$$\int 0 \cdot dx = C\ .$$

Властивості невизначеного інтеграла

1^0. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

2^0. $\int dF(x) = F(x) + C,\ C - const.$

3^0. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, де $A \in R.$

4^0. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

5^0. Якщо *F(x)* – первісна для функції *f(x)*, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ \ C - const.$$

6^0. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - диференційована функція, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Основна таблиця інтегралів

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ (a \neq -1),$ зокрема $\int 1dx = x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$, зокрема $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, зокрема $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C,$ зокрема $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a + x}{a - x} \right| + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

12. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \dfrac{x}{2} \right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

15. $\int tgxdx = -\ln |\cos x| + C.$

16. $\int ctgxdx = \ln |\sin x| + C.$

17. $\int shxdx = chx + C.$

18. $\int chxdx = shx + C.$

19. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

*Безпосереднє інтегрування***.** Знаходження невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.* Для знаходження невизначеного інтеграла, як правило, виконують *тотожні перетворення* підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного. Крім того, використовують *метод підведення під знак диференціала*, який випливає з властивості 6^0 невизначених інтегралів. Ця властивість означає, що вигляд формули інтегрування залишається незмінним незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи деякою диференційованою функцією (інваріантність формул інтегрування).

Отже, якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Метод підведення під знак диференціала в багатьох випадках дозволяє зводити інтеграл до табличного.

Основні методи інтегрування

Метод заміни змінної (метод підстановки). Якщо функція *f(x)* – неперервна і $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ неперервні, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt.$$

Функцією $\varphi(t)$ підбирають таким чином, щоб права частина у записаній формулі мала вигляд, зручний для інтегрування. Після інтегрування слід виконати обернену підстановку.

Метод інтегрування частинами. Якщо $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - диференційовані функції, то має місце формула

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами.* Застосовувати її доречно, коли інтеграл у правій частині формули більш простий для знаходження, ніж у лівій, або йому подібний.

Інтегрування основних класів елементарних функцій

Інтегрування раціональних дробів.

Раціональним дробом називається дріб вигляду $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x), Q_n(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо m<n, у противному разі, коли $m \geq n$, дріб називається *неправильним*.

Інтегрування раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів від многочлена та від найпростіших дробів.

1). $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$

2). $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

Інтегрування тригонометричних функцій

1). Інтеграл вигляду $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ раціоналізується за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$.

Дійсно,

$$I=\int R(\sin x,\cos x)dx=\begin{vmatrix} t=tg\dfrac{x}{2} \\ x=2arctgt \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

2). Обчислення інтеграла $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ можна спростити у таких випадках:

а). Якщо підінтегральна функція змінює знак при зміні знака sin x, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то раціоналізуюча підстановка

$$t=\cos x.$$

б). Якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то раціоналізуюча підстановка

$$t=\sin x.$$

в). Якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то раціоналізуюча підстановка

$$t=tgx.$$

3). Раціоналізація інтегралів $\int R(\sin x)\cos xdx$, $\int R(\cos x)\sin xdx$, $\int R(tgx)dx$ здійснюється так:

$$I=\int R(\sin x)\cos xdx=\begin{vmatrix} \sin x=t \\ \cos xdx=dt\end{vmatrix}=\int R(t)dt;$$

$$I=\int R(\cos x)\sin xdx=\begin{vmatrix} \cos x=t \\ -\sin xdx=dt\end{vmatrix}=-\int R(t)dt;$$

$$I=\int R(tgx)dx=\left|\begin{array}{l}tgx=t\\x=arctgt\\dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{R(t)dt}{1+t^2}.$$

4). Розглянемо інтеграл $I=\int R(\sin^n x,\cos^m x)dx,$ де n, m – парні.

Тоді використовують таку підстановку:

$$I=\int R(\sin^n x,\cos^m x)dx=\left|\begin{array}{l}tgx=t\\x=arctgt\\dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\\\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=\int R\left[\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{n/2},\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{m/2}\right]\frac{dt}{1+t^2}.$$

5). Для інтеграла $I=\int R(\sin^n x\cdot\cos^m x)dx,$ де n, m – цілі числа, а *підінтегральна функція залежить від добутку* $\sin x\cdot\cos x,$ розглянемо три випадки:

а) у інтегралі $\int\sin^n x\cos^m xdx$ або n, або m – непарне. Нехай n=2p, m=2q+1, тоді

$$\int\sin^{2p}x\cos^{2q+1}xdx=\int\sin^{2p}x(1-\sin^2 x)^q\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\\cos xdx=dt\end{array}\right|=\int t^n(1-t^2)^q dt;$$

б) нехай n=2p, m=2q. Застосовуючи формули пониження степення

$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2},$ маємо

$$\int\sin^{2p}x\cos^{2q}xdx=\frac{1}{2^{p+q}}\int(1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^q dx.$$

Підносячи до степеня, розкриваючи дужки, отримаємо члени, які містять cos2x у парних і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються як у випадку а), з парними – понижують степінь за вище наведенимиформулами;

в) якщо n, m – парні, але хоча б один з цих показників від'ємний, то застосовується підстановка: $tgx = t$ або $ctgx = t$;

6). Інтеграли вигляду:

$$\int \cos mx \cos nx dx; \int \sin mx \cos nx dx; \int \sin mx, \sin nx dx$$

реалізуються за допомогою формул тригонометрії:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

відповідно.

Визначений інтеграл.

Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сума I_n називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і даному вибору проміжних точок ξ_i. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Означення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ та вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} I_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x.$$

У випадку існування вказаної границі інтегральної суми функція $f(x)$ називається *інтегрваною* на відрізку $[a,b]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою і верхньою межею інтегрування*, функція $f(x)$ - *підінтегральною функцією*.

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ обмежена і неперервна на відрізку $[a,b]$ і має на цьому відрізку скінчену кількість точок розриву, то вона інтегрована на ньому.

Геометрична інтерпретація. Якщо $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ $(a < b)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції – фігури, обмеженої лініями: $y = f(x)$, x=a, x=b, y=0. (рис. 5.1.).

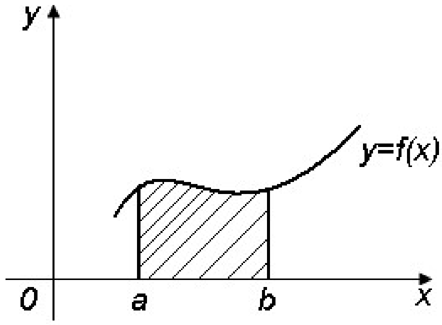


Рис. 5.1.

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених лініями : $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому, площі, розташовані вище осі Ox, входять у цю суму зі знаком “+”, а площі, розташовані нижче осі Ox, - зі знаком “-”.

Основні властивості визначеного інтеграла

1^0. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

2^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3^0. Якщо $f(x) \ge 0$ на відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

4^0. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ і C_1, C_2 – сталі множники, то

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]dx = C_1\int_a^b f(x)dx + C_2\int_a^b g(x)dx$$

(лінійна властивість інтеграла).

5^0. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a,c]$ і на $[c,b]$, то вона інтегрована і на $[a,b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(властивість адитивності інтеграла).

Зауважимо, що точка c може бути довільно розташована відносно точок a,b.

6^0. Якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7^0. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то існує така точка $c \in [a,b]$, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення)

Значення $f(c)$ - середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Обчислення визначених інтегралів. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a,b]$, то має місце *формула Ньютона-Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Різницю $F(b) - F(a)$ позначимо $F(x)\Big|_a^b$, а формула Ньютона-Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \mathrm{F(b) - F(a)}.$$

При обчислені визначених інтегралів, як і невизначених, основними методами є метод заміни змінної (або метод підстановки) і метод інтегрування частинами.

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де $x=\varphi(t)$ та її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$;

$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, а $f[\varphi(t)]$ неперервна на $[\alpha,\beta]$.

Зауважимо, що якщо при обчислені невизначеного інтеграла заміною $t=\psi(x)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчислені визначеного інтеграла замість цього треба змінити лише межі інтегрування.

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

де $u(x)$ та $v(x)$ - неперервно-диференційовані на $[a,b]$ функції.

Зауважимо, що для інтегралів з симетричними межами інтегрування мають місце такі співвідношення:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$ якщо $f(x)$ - парна функція;

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0,$$ якщо $f(x)$ - непарна функція.

Обчислення площ.

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)\geq 0$, то згідно з формулою $\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^n f(E_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$ обчислення площі криволінійної трапеції можна знайти за формулою $S=\int_a^b f(x)dx.$

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \le 0$, то криволінійна трапеція, обмежена кривою $f(x)$, відрізком $[a,b]$ та прямими $x=a$ і $x=b$, буде розміщена нижче осі Ox. У цьому разі визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

Проте площа є невід'ємною величиною, тому площу криволінійної трапеції, розміщеної нижче осі Ox, треба знаходити за формулою:

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \ \big(f(x) \le 0\big), \text{ або } S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Якщо $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ кілька разів змінює свій знак, то інтеграл на відрізку $[a,b]$ треба розбити на суму інтегралів за частинними відрізками. Інтеграл буде додатнім на тих відрізках, де $f(x) \ge 0$, та від'ємним там, де $f(x) < 0$. Інтеграл по відрізку $[a,b]$ дає різницю площ, що лежать вище та нижче осі Ox.

Отже, щоб одержати суму площ, (без врахування розміщення відносно осі Ox), треба знайти суму абсолютних величин інтегралів за частинними відрізками або обчислити інтеграл від абсолютного значення функції, тобто: $S = \int_a^b |f(x)|dx.$ Якщо треба обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x), \ y = f_2(x)$ та прямими $x=a$ і $x=b$ (Рис. 5.2), то при $f_2(x) \ge f_1(x)$ її можна знайти за формулою $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$

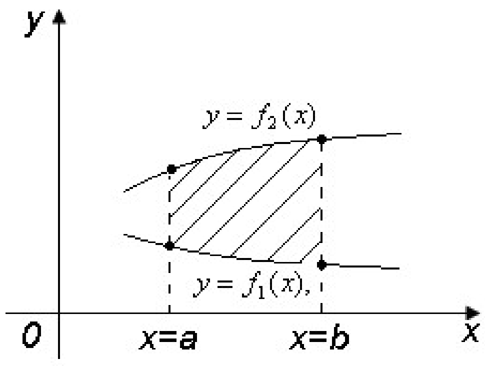


Рис. 5.2

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Приклад 5.2.

$$I = \int \cos(3x+2)dx.$$

Функцією $\varphi(x)$ у цьому випадку вважаємо $\varphi(x) = 3x+2.$ Цю функцію підводимо під знак диференціала:

$$d\varphi(x) = d(3x+2) = 3dx, \ dx = \frac{1}{3}d(3x+2),$$

тоді

$$I = \int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C;$$

Приклад 5.3.

Для обчислення інтегралів скористаємося формулою заміни змінної

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

У цьому випадку функцією $x = \varphi(\mathrm{t})$ доцільно вибрати у вигляді $\varphi(t) = t^2$, тоді $\varphi'(t)dt = 2tdt,$ отже

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = \left| t = \sqrt{x} \right| = 2arctg\sqrt{x} + C;$$

Приклад 5.4.

$$\int x\sin xdx;$$

Інтеграл знаходять з використанням формули інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$I = \int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin xdx, v = \int \sin xdx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -xc0sx + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C;$$

Приклад 5.5.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14};$$

Застосуємо прийом *виділення повного квадрата* у знаменнику:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 10} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 10} = \frac{1}{\sqrt{10}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{10}} + C;$$

Приклад 5.6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx.$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, знаменник якого *має дійсні корені, серед яких є кратні,* отже розклад на найпростіші дроби включатиме найпростіші *дроби першого та другого типів:*

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)},$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1) + D(x^2 - 1).$$

Використаємо *метод задання частинних значень:*

при x=1 маємо 4A=1, $A = \frac{1}{4}$;

при $x = -1$ маємо $-1 = -2B$, $B = \frac{1}{2}$.

Далі використаємо метод невизначених коефіцієнтів для знаходження коефіцієнта D. Для цього прирівняємо у тотожності коефіцієнти, наприклад при x^2. Отримаємо:

$$x^2\left|0 = A + D,\quad D = -\frac{1}{4}.\right.$$

Остаточно

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

Приклад 5.7.

Знайти $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = -\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2} \\ x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array}\right| = \int \frac{(t^3-1)^2 t(-6t^2)dt}{4(t^3-1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = \left| t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} \right| = -\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Приклад 5.8.

Знайти

$$I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Застосуємо універсальну підстановку:

$$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ x=2arctgt \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=\left|t=tg\frac{x}{2}\right|=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Приклад 5.9. Обчислити $I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx.$

$$I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx=2\cos tdt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{2\sin t}2\cos tdt=$$

$$=2\int\frac{\cos^2 tdt}{\sin t}=2\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=$$

$$=2\int\frac{dt}{\sin t}-2\int\sin tdt=2\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+2\cos t+C,$$

де

$$t=\arcsin\frac{x}{2}.$$

Приклад 5.10. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}.$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Приклад 5.11. Знайти інтеграл $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = e^{-x}dx; & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 +$$

$$+\int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Приклад 5.12. Обчислити інтеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ x = 1, t = 0 \\ x = e, t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5.13. Обчислити площу фігури обмеженої графіком функції $y = \sin x$ і вісю абцис $y = 0$ за умови $0 \le x \le 2\pi.$ Маємо $y \ge 0$, якщо $0 \le x \le \pi$ і $y \le 0$, якщо $\pi \le x \le 2\pi$.

$$F = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Приклад 5.14. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = \sin x$ та $y = \frac{2}{\pi}x$ (рис. 5.3). Задані лінії перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.Оже, маємо $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = \left(-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

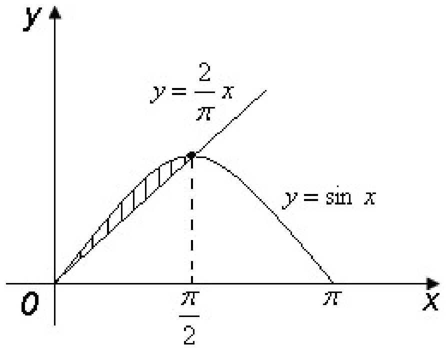


Рис. 5.3

<u>Задачі для самостійної роботи</u>

Обчислити задані інтеграли

5.1. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

5.2. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$.

5.3. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$.

5.4. $\int x\cdot 3^x dx$.

5.5. $\int x^2\sin x dx$.

5.6. $\int\frac{dx}{x^2+4x-12}$.

5.7. $\int\frac{dx}{x^2-6x+34}$.

5.8. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

5.9. $\int\sin 14x\cdot\sin 6x dx$.

5.10. $\int\cos 10x\cdot\cos 7x dx$.

5.11. $\int\sin^6 x\cdot\cos^5 x dx$.

5.12. $\int\frac{\sqrt{x}-2\cdot\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

5.13. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

5.14. $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}$.

5.15. $\int\frac{e^x}{2+e^x}dx$.

5.16. $\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

5.17. $\int x\cos x dx$.

5.18. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$.

5.19. $\int \frac{dx}{5x^2 - 7}$. 5.20. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$.

5.21. $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$. 5.22. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$.

5.23. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$. 5.24. $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$.

5.25. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$. 5.26. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$.

5.27. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. 5.28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

5.29. $\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 5.30. $\int_0^{\ln 5} x \cdot e^{-x} dx$. 5.31. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

Відповіді

5.1. $\ln|x| + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + c$. 5.2. $-ctgx - tgx + c$. 5.3. $-\frac{1}{4}\arcsin x^4 + c$.

5.4. $\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + c$. 5.5. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$.

5.6. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+6}\right| + c$. 5.7. $\frac{1}{5}arctg\frac{x+3}{5} + c$. 5.8. $\ln\left|x + \sqrt{3x^2+6x+4}\right| + c$.

5.9. $\frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{40}\sin 20x + c$. 5.10. $\frac{1}{34}\sin 17x - \frac{1}{6}\sin 3x + c$.

5.11. $\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{2}{9}\sin^9 x + c$. 5.12. $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$.

5.13. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + c$. 5.14. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + c$. 5.15. $\ln\left|e^x + 2\right| + c$.

5.16. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x + 1)^3} - 2\sqrt{\ln x + 1} + c$. 5.17. $x\sin x - \cos x + c$. 5.18. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$.

5.19. $\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{7}}{x\sqrt{5}+\sqrt{7}}\right|+c$. *5.20.* $\ln\left|x^2-4\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$.

5.21. $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln\left|2x+3\right|+c$. *5.22.* 4. *5.23.* $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. *5.24.* $1-\frac{2}{e}$.

5.25. $17\frac{1}{3}$. *5.26.* $\frac{7}{4}$. *5.27.* $-\frac{2}{3}$. *5.28.* $\frac{1}{3}$. *5.29.* $\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}-1)}$.

5.30. $\frac{4-\ln 5}{5}$. *5.31.* $-\frac{2}{3}$.

Індивідуальні завдання
на тему: «Інтеграл»

Знайти інтеграли

1 варіант

1) $\int \sin 4x dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$; 3). $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx$;

4) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x-1}}$; 5) $\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$;

6) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$; 7) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

2 варіант

1) $\int \cos(2x-7)dx$; 2) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$;

3) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$; 4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;

5) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 7) $\int_e^{e^2} x^2\ln x dx$.

3варіант

1) $\int \frac{dx}{x^2-18x+82}$; 2) $\int 2^{x-1}dx$; 3) $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$;

4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 5) $\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-5x^2+6}dx$;

6) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$; 7) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3x}$.

4 варіант

1) $\int e^{5x-7}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; 5) $\int \cos^3 x \sin x dx$; 6) $\int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

7) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$.

5 варіант

1) $\int e^{6x-1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-15}}$;

3) $\int \frac{\sin t dt}{25+\cos^2 t}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

5) $\int x \sin 8x dx$; 6) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi$.

6 варіант

1) $\int e^{2x+5}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$; 4) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-1}dx$;

5) $\int x \cos 4x dx$; 6) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$; 7) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{\pi}{2} dx$.

7 варіант

1) $\int e^{3x+5}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}};$

3) $\int \frac{5^x dx}{5^{2x}-4\cdot 5^x+3};$ 4) $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx;$

5) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx;$ 6) $\int\limits_0^{0,5}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)dx;$

7) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx;$

8 варіант

1) $\int e^{6x+1}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{x^2-8x+15};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{17-2x+x^2}};$ 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x-\sqrt[3]{x^2}}dx;$ 5) $\int \cos^7 xdx;$

6) $\int\limits_0^2 3^x dx;$ 7) $\int\limits_0^1 (e^x-1)^5 e^x dx;$

9 варіант

1) $\int e^{8x-1}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+15}};$

3) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10};$ 4) $\int x\sin^2 xdx;$

5) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)};$ 6) $\int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x}dx;$ 7) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

10 варіант

1) $\int \frac{dx}{x^2+3x+2};$ 2) $\int \sin 2xdx;$

3) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx;$ 4) $\int x\sin 4xdx;$

5) $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}$; 6) $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx$; 7) $\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$.

11 варіант

1) $\int e^{5x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$;

3) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; 4) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$;

5) $\int \frac{x^3dx}{x^2-4}$; 6) $\int_0^1 xe^{3x}dx$; 7) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$;

12 варіант

1) $\int e^{4x-1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$;

3) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$;

5) $\int \sin^3 x\cos^3 xdx$; 6) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

7) $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

13 варіант

1) $\int \cos 8xdx$; 2) $\int e^{5x-4}dx$;

3) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$;

5) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$; 6) $\int_0^{0,5}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)dx$; 7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$.

14 варіант

1) $\int e^{5x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}$;

3) $\int \frac{xdx}{x^4+x}$; 4) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$;

5) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^4 x dx$;

7) $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}$.

15 варіант

1) $\int e^{2x-1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

3) $\int \frac{1+x^2}{x^4}dx$; 4) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$;

5) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$; 6) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

16 варіант

1) $\int e^{-2x+4}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$;

3) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$; 4) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

5) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; 6) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^3+1\right)}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$; 7) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

17 варіант

1) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; 2) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$;

3) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; 4) $\int (x+1)e^x dx$;

5) $\int \frac{(3x-1)}{4x^2+4x+17}dx$; 6) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx$.

18 варіант

1) $\int \frac{dx}{3x-1}$; 2) $\int xe^x dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$; 4) $\int (x+1)e^x dx$;

5) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$; 6) $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$; 7) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

19 варіант

1) $\int 2^{x-1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

3) $\int e^{\cos x}\sin xdx$; 4) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$;

5) $\int \frac{(2-5x)}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$; 6) $\int\limits_0^{-2}\left(10^{\frac{x}{4}}-\sin \pi x\right)dx$; 7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\cos 2xdx$.

20 варіант

1) $\int \sin 8xdx$; 2) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx$;

3) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+2x^5}}$; 4) $\int x\cos 5xdx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; 6) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$; 7) $\int\limits_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

21 варіант

1) $\int e^{2x-1}dx$; 2) $\int x\cos xdx$;

3) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$; 4) $\int \sin 3xdx$;

5) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; 6) $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 xdx$; 7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$.

22 варіант

1) $\int \sin(x+2)dx;$ 2) $\int x\sin x dx;$

3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}};$ 4) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$

5) $\int arctg\sqrt{x}dx;$ 6) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx;$ 7) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}.$

23 варіант

1) $\int e^{2x-1}dx;$ 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx;$

3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx;$ 4) $\int x\ln x dx;$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-11x+2}}dx;$ 6) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}};$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$

24 варіант

1) $\int \frac{dx}{x^2-10x+26};$ 2) $\int \cos(2x-1)dx;$

3) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 4) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx;$

5) $\int \cos^6 x dx;$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx;$ 7) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$

25 варіант

1) $\int e^{2x+5}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3};$

3) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10};$ 4) $\int x\sin^2 x dx;$

5) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)};$ 6) $\int_0^{\ln 5} xe^{-x}dx;$ 7) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

26 варіант

1) $\int \sin 4x dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$;

3). $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$; 4) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 1}}$;

5) $\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$; 6) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$; 7) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$.

27 варіант

1) $\int \cos(2x-7) dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;

3) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} dx$; 4) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;

5) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 7) $\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$.

28 варіант

1) $\int \frac{dx}{x^2-18x+82}$; 2) $\int 2^{x-1} dx$;

3) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x} dx$; 4) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 5) $\int \frac{(2x^2-1)}{x^3-5x^2+6} dx$;

6) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$; 7) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3x}$.

29 варіант

1) $\int e^{5x-7} dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; 5) $\int \cos^3 x \sin x dx$; 6) $\int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

7) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$.

30 варіант

1) $\int e^{6x-1}dx;$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-15}};$

3) $\int \frac{\sin tdt}{25+\cos^2 t};$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$

5) $\int x\sin 8xdx;$ 6) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx;$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi.$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення первісної, основну властивість первісної.
2. Відтворіть письмово таблицю невизначених інтегралів.
3. Сформулюйте властивості невизначених інтегралів.
4. Перелічіть і охарактеризуйте основні методи інтегрування функції:
   - Метод безпосереднього інтегрування.
   - Інтегрування методом інваріантної форми диференціалу.
   - Метод заміни змінної(метод підстановки).
   - Метод інтегрування частинами.
   - Інтегрування раціональних дробів.
   - Інтегрування ірраціональних функцій методом заміни.
   - Інтегрування тригонометричних виразів.
5. Поняття визначеного інтеграла.
6. Властивості визначеного інтегралу.
7. Сформулюйте задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
8. Формула Ньютона-Лейбніца.
9. Обґрунтуйте основні властивості визначеного інтеграла.
10. Перелічіть сфери застосування визначеного інтеграла.

РОЗДІЛ VI.
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Студент повинен знати **:**

- означення диференціального рівняння;
- найпростіші типи рівнянь I порядку та способи їх розв'язання;
- спосіб розв'язання однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами;
- задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння.

Студент повинен уміти:

- визначити тип диференціального рівняння;
- користуватися способами розв'язання рівнянь різних типів.

Довідковий матеріал.

Рівняння, що містять незалежну змінну, шукану функцію та її похідні називається *диференціальним рівнянням.*

$$F(x,y,y')=0$$

– диференціальне рівняння 1-го порядку в неявному вигляді

$$y'=f(x,y)$$

– диференціальне рівняння 1-го порядку в нормальній формі

Розв'язком рівняння називається функція, яка перетворює рівняння у тотожність.

Задача відшукання розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, називається задачею Коші.

Види звичайних диференціальних рівнянь I порядку

1. Рівняння з відокремленими змінними

$$P(x)dx+Q(y)dy=0.$$

Загальний інтеграл рівняння $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$

2. Рівняння з відокремлюваними змінними

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Загальний інтеграл рівняння $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = C.$

3. Однорідне рівняння $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = xt,\ y' = t + xt'.$$

4. Лінійне рівняння $y' + p(x)y = q(x).$

Загальний інтеграл обчислюється за формулою Лагранжа

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

5.Рівняння в повних диференціалах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то загальний інтеграл має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

Рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0$$

Його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – дійсні, то $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

якщо $\lambda_1 = \lambda_2$, то $y = e^{\lambda x}(C_1x + C_2)$

якщо $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, то $y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2 \sin bx).$

Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1.

Розв'язати рівняння.

а) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0.$

$y(1 + x)dx + x(1 - y)dy = 0,$

$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0,$

$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C,$

$\ln|xy| = -x + y + C,$

$xy = e^{-x+y+C}$ - загальний інтеграл.

б) $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0.$

$y = xt \qquad dy = xdt + tdx,$

$(x^2 - x^2t^2)dx + 2x^2t\,(xdt + tdx) = 0,$

$(1 - t^2)dx + 2xt\,dt + 2t^2\,dx = 0,$

$(1 + t^2)dx + 2xt\,dt = 0,$

$\frac{dx}{x} + \frac{2tdt}{1+t^2} = 0,$

$\ln|x| + \ln|1 + t^2| = \ln C,$

$\ln|x\,(1 + \frac{y^2}{x^2})| = \ln C \qquad x + \frac{y}{x} = C$ – загальний інтеграл.

в) $y' + 2xy = 2x \qquad p(x) = 2x \quad q(x) = 2x.$

$y = e^{-\int 2x\,dx}(C + \int 2x\,e^{\int 2x\,dx}\,dx) =$

$= e^{-x^2}(C + \int 2x\,e^{x^2}\,dx) =$

$= e^{-x^2}(C + \int e^{x^2}\quad d(x^2)) =$

$= e^{-x^2}(C + e^{x^2}) = C\,e^{-x^2} + 1$ – загальний інтеграл.

г) $(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0.$

$P(x,y) = 2xy – 5,$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x,$

$Q(x,y) = 3y^2 + x^2,$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$

$x_0 = 0,\ y_0 = 0,$

$\int_0^x (2xy - 5)dx + \int_0^y 3y^2\,dy = C,$

$(x^2y - 5x)\,|_0^x + y^3\,|_0^y = C,$

$x^2y - 5x + y^3 = C$ – загальний інтеграл.

д) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

$k^2 - 5k + 6 = 0.$

$k_1 = 2,\ \ k_2 = 3,$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ – загальний інтеграл.

є) $y'' - 6y' + 25y = 0.$

$k^2 - 6k + 25 = 0,$

Д $= 36 - 100 = -64,$

$k_{1,2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i,$

$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ – загальний інтеграл.

Задачі для самостійної роботи

Розв’язати рівняння

6.1. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$ *6.2.* $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$

6.3. $(1 + e^x)yy' = e^x$ *6.4.* $\frac{1}{x}dx - \frac{y}{x^2}dx = 0.$

6.5. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$

6.6. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0.$

6.7. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy.$

6.8. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$

6.9 $(1 – 2xy)y' = y(y - 1).$

6.10. $x^2y' + xy = -1.$

6.11. $xdy – ydx = \sqrt{x^2+y^2} = dx.$

6.12. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

6.13. $(x + 4)dy – xydx = 0.$

6.14. $y - x y' = 2(1 + x^2 y').$

6.15. $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x}ydy = 0.$

6.16. $e^{x+2}dy = xdx.$

Скласти лінійні однорідні рівняння, якщо відомі їх характеристичні рівняння.

6.17. $k^2 - 5k + 6 = 0.$ *6.18.* $k^2 - k = 0.$

6.19. $k^2 - 4 = 0.$ *6.20.* $(k + 2)^2 = 0.$

6.21. $k^2 - 6k +8 = 0.$ *6.22.* $k (k +2) = 0.$

Розв’язати рівняння

6.23. $y'' - y' – 2y = 0.$ *6.24.* $y'' + 24y' + 144y = 0.$

6.25. $y'' - y' – 6y = 0.$ *6.26.* $y'' - 7y' + 10y = 0.$

6.27. $y'' – 5y = 0.$ *6.28.* $y'' – 22y' + 121y = 0.$

6.29. $y'' – 4y' + 20y = 0.$ *6.30.* $y'' + 15y' = 0.$

6.31. $y'' + 49y = 0.$ *6.32.* $y'' + 7y' = 0.$

6.33. $y'' – 49y = 0.$ *6.34.* $y'' + 20y' +19y = 0.$

6.35. $y'' + 2\sqrt{3}y' + 7y = 0.$ *6.36.* $y'' - y' – 12y = 0.$

6.37. $y'' + 4y' – 7y = 0.$ *6.38.* $y'' – 9y' – 10y = 0.$

6.39. $y'' + 16y = 0.$ *6.40.* $y'' + 2y' – 2y = 0.$

6.41. $y'' – 4y'+ 10y = 0.$ *6.42.* $y'' + 3y = 0.$

Відповіді

6.1. $(1 + y)(1 - x) = C.$ *6.2.* $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, y = C.$

6.3. $\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^2) + C.$ *6.4.* $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$

6.5. $1 + e^y = C(1 + x^2).$ *6.6.* $x^2 - y^2 - Cx = 0$

6.7. $y = -\frac{y}{2} + \frac{C}{x}.$ *6.8.* $x^3 + x^2y - y = C$

6.9. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}.$ *6.10.* $y = (C + x)e^{-x^2}$

6.11. $y = (C + x^2)e^{x^2}.$ *6.12.* $y = (C + x^3)\ln x$

6.13. $y = Cx^2 + x^2 \sin x.$ *6.14.* $y = (C + x^2)e^{e^{x}}$

6.15. $y + Ce^{-\sin x} + 1.$ *6.16.* $y'' - 5y' + 6y = 0.$

6.17. $y'' - y' = 0.$ *6.18.* $y'' - 4y = 0.$

6.19. $y'' + 4y' + 4y = 0.$ *6.20.* $y'' - 6y' + 8y = 0.$

6.21. $y'' + 2y' = 0.$ *6.22.* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$

6.23. $y = e^{-12x}(C_1 + C_2x).$ *6.24.* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$

6.25. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}.$ *6.26.* $y = C_1e^{-\sqrt{5}x} + C_2e^{\sqrt{5}x}$

6.27. $y = e^{11x}(C_1 + C_2x).$ *6.28.* $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$

6.29. $y = C_1 + C_2e^{-15x}.$ *6.30.* $y = C_1\cos 7x + C_2\sin 7x.$

6.31. $y = C_1 + C_2e^{-7x}.$ *6.32.* $y = C_1e^{7x} + C_2e^{-7x}$

6.33. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-19x}.$ *6.34.* $y = e^{-\sqrt{3}x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$

6.35. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}.$ *6.36.* $y = C_1e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2e^{-(2+\sqrt{11})x}.$

6.37. $y = C_1e^{10x} + C_2e^{-x}.$ *6.38.* $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x.$

6.39. $y = C_1e^{(-1+\sqrt{3})x} + C_2e^{-(1+\sqrt{3})x}.$ *6.40.* $y = C_1\cos\sqrt{6}x + C_2\sin\sqrt{6}x.$

6.41. $y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x.$

Індивідуальні завдання

на тему: «Диференціальні рівняння»

Розв’язати рівняння

1 варіант

а) $e^{x+2y}\,dy = x\,dx$; б) $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$ в) $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$;

г) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; д) $y' + y = x\sqrt{y}$; є) $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$.

2 варіант

а) $y'\sin x = y\ln y$; б) $\frac{y'}{7^{y-x}} = 3$; в) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$;

г) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \sec x$; д) $y\,dx + 2x\,dx = 2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$; є) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

3 варіант

а) $y\sin^2 x\,dx + \cos x\ln y\,dy = 0$; б) $xy' + xe^{-\frac{y}{x}} = y$; в) $xy' - 2y = x^3 + 1$;

г) $y' - \frac{x}{x^2+1}y = y^2$; д) $y' - 3y\,\mathrm{ctg}3x = \frac{1}{\sin 3x}$;

є) $y' - \frac{y}{x-1} = y^2(x-1)$.

4 варіант

а) $\sec^2 x\,\mathrm{tg}y\,dy + \sec^2 x\,\mathrm{tg}x\,dx = 0$; б) $y - xy' = 1 - x^2y'$;

в) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$; г) $xy' - 2y = 2x^4$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;

д) $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$; є) $x\,dx + y\,dy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$.

5 варіант

а) $(1 - e^x)\,y\,dy - e^y dx = 0$; б) $(x + 4)dy - xy\,dx = 0$;

в) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$; г) $y' = 2x(x^2 + y)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;

д) $xy\,dy = (y^2 + x)dx$; є) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$.

6 варіант

а) $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x}y\,dy = 0$; б) $y' + y + y^2 = 0$;

в) $y^2 + x^2y' = xyy'$; г) $y' - y = e^x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;

д) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$; є) $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1 + x^2}dy = 0$.

7 варіант

а) $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$; б) $y^2\ln x\,dx - (y - 1) = 0$;

в) $x\,y' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$;   г) $x\,y' + y + x\,e^{-x^2} = 0$, $x_0=1$, $y_0=\frac{1}{2e}$;

д) $y'x^2 \sin y = xy' - 2y$;   є) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

8 варіант

а) $y' = (2y + 1)\,\mathrm{tg}x$;   б) $(x + xy^2)\,dy + y\,dx - y^2\,dx = 0$;

в) $x\,y' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;   г) $\cos y\,dx = x + 2\cos y)\sin y\,dy$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$;

д) $(2x^2 y \ln y - x)\,y' = y$; є) $(1 - e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.

9 варіант

а) $(\sin(x + y) + \sin(x - y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$;   б) $y' + 2y - y^2 = 0$;

в) $x\,y' - y = (x + y)\ln\left|\frac{x + y}{x}\right|$;   г) $x^2\,y' + xy = -1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;

д) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$;   є) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$.

10 варіант

а) $(1 + e^x)yy' = e^x$;   б) $(x^2 + x)y\,dx + (y^2 + 1)dy = 0$;

в) $x\,y' = y\cos\ln\left|\frac{y}{x}\right|$;   г) $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$;

д) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;   є) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^2)dy = 0$.

11 варіант

а) $\sin x\,\mathrm{tg}y - \frac{dy}{\sin x} = 0$; б) $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$;

в) $(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy$; г) $(2x + y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $xyy' = x^2 + y^2$

є) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

12 варіант

а) $3e^x \sin y\,dx + (1 - e^x)\cos y\,dy = 0$; б) $(xy^3 + x)dx - (y + yx^2)dy = 0$;

в) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$; г) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;

д) $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

13 варіант

а) $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$; б) $y' = 2xy + x$; в) $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$;

г) $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$; д) $y'x + y = -xy^2$

є) $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx = \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}dy$.

14 варіант

а) $3^{x^2+y}dy + xdx = o$; б) $y - xy' = 3(1 + x^2y')$; в) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;

г) $x(y' - 1) = e^x$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$; д) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$;

є) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

15 варіант

а) $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x$; б) $2xyy' = 1 - x^2$;

в) $y'x + x + y = 0$; г) $y = x(y' - x\cos x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$;

д) $xy' - 2\sqrt{x^3y} = y$; є) $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$.

16 варіант

а) $y' = e^{x^2}(1 + y^2)$; б) $(x^2 - 1)y' - xy = 0$;

в) $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; г) $(xy' - 1)\ln x = 3y$, $x_0 = e$, $y_0 = 0$;

д) $y' + xy = x^3y^3$; є) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy + ydx}{x^2} = 0$.

17 варіант

а) $\mathrm{ctg}x \cos^2 y\,dx + \sin^2 x\,\mathrm{tg}y\,dy = 0$; б) $(y^2x + y^2)dy + x\,dx + 0$;

в) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$; г) $(2e^y - x)y' = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;

д) $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$; є) $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$.

18 варіант

а) $\sin x\, y' = y \cos x + 2 \cos x$; б) $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0$;

в) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2+3xy +x^2)dy = 0$;

г) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$; д) $yx' + x = - yx^2$;

є) $y(x^2 + y^2 + a^2)dy+x(x^2-y^2-a^2)dx = 0$.

19 варіант

а) $1 + (1 + y')e^y = 0$; б) $xy' - y = y^2$; в) $(x - y)y\, dx - x^2\, dy = 0$;

г) $(x + y^2)dy = y\, dx$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$; д) $x(x - 1)y' + y^3 = xy$;

є) $(\sin y + y\sin x+\frac{1}{x})dx + (x\cos y - - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$.

20 варіант

а) $y' \mathrm{ctg}\, x + y = 2$; б) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$;

в) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$; г) $(\sin^2 y + x\, \mathrm{ctg}\, y)y' = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$;

д) $2x^3y\, y' + 3x^2y^2 + 1 = 0$; є) $\frac{y+\sin x\cos^2 yx}{\cos^2 yx}dx + \left(\frac{x}{\cos^2 yx} - \sin y\right)dy = 0$.

21 варіант

а) $e^x \sin y\, dx + \mathrm{tg}\, y\, dy = 0$; б) $y' - xy^2 = 2xy$;

в) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$; г) $(x + 1)\, y' + y = x^3 + x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;

д) $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2y\right)dy$; є) $(3x^2-y\cos xy+y)dx+(x-- x\cos xy)dy=0$.

22 варіант

а) $(1 + e^{3y})x\, dx = e^{3y}\, dy$; б) $2x^2y\, y' + y^2 = 2$;

в) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$; г) $xy' - 2y + x^2 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;

д) $y' + 3\sqrt[3]{y} = 3y$; є) $(12x^3 - e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y})dx+(16y + \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}})dy=0$.

23 варіант

а) $(\sin(2x + y)-\sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$; б) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$;

в) $xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$; г) $xy' + y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{2}{\pi}$;

д) $xy' + y = y^2 \ln x$; є) $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy\sin x^2 y + 4\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 \sin x^2 y\right)dy = 0$.

24 варіант

а) $\cos y\, dx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$; б) $y'\sqrt{1+y^2} = \frac{x^2}{y}$;

в) $(x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy = 0$; г) $(x^2 - 1)\, y' - xy = x^3 - x$, $x_0 = y_0 = 0$;

д) $x\, dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$; є) $y3^{xy} \ln 3\, dx + (x3^{xy} \ln 3 - 3)dy = 0$.

25 варіант

а) $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$; б) $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$;

в) $(y^2 - 2xy)\, dx - x^2\, dy = 0$; г) $(1 - x^2)y' + xy = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;;

д) $y' + 2xy = 2x^3y^3$; є) $\left(\frac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^2y^6 - \frac{1}{x-y}\right)dy = 0$.

26 варіант

а) $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$; б) $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$;

в) $ye^{2x}\, dx - (1 - e^{2x})dy = 0$; г) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$;

д) $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; є) $2x\, y' - y = xy^3$.

27 варіант

а) $2^x \mathrm{tg}y\, dx + (1 + 2^x)\sec^2 y\, dy = 0$; б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

в) $xy' + y' - e^x = 0$; г) $y' + 2y = y^2e^x$;

д) $x^2y' + \cos 3y = 1$; є) $y' + 3xy^2 = 4xy$.

28 варіант

а) $3x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$; б) $(y^2 + 2xy)dx - x^2\, dy = 0$;

в) $y' - \frac{2y}{x} = x^2\cos 3x$; г) $y' - 2xy = y^2 e^{-x^2}$;

д) $y' + y\,\mathrm{ctg}2x = \cos 2x$; є) $y' + \frac{y}{x+3} = 4y^2(x+3)^2$.

29 варіант

а) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y\, y' = 0;$ б) $5x^3 y' = y^2(2x - y);$

в) $y' + 3y\,tgx = \frac{1}{\cos x};$ г) $(xy' - y^2)\ln x = 2y;$

д) $x^2 y' \cos y + 1 = 0;$ є) $\left(y' + \frac{y}{x}\right)\cos\frac{y}{x} = 1.$

30 варіант

а) $y\sin^2 x\, dx + \cos x \ln y\, dy = 0;$ б) $xy' + x\,e^{-\frac{y}{x}} = y;$

в) $xy' - 2y = x^3 + 1;$ г) $y' - \frac{x}{x^2+1} y = y^2;$

д) $y' - 3y\,ctg3x = \frac{1}{\sin 3x};$ є) $y' - \frac{y}{x-1} = y^2(x-1).$

<u>Питання для самоконтролю</u>

1. Сформулюйте означення диференціального рівняння.
2. Поняття рівняння в повних диференціалах.
3. Рівняння з відокремлюваними змінними .
4. Рівняння з відокремленими змінними .
5. Привести схему розв’язання :

а). рівняння з відокремлюваними змінними;
б). однорідного рівняння;
в). лінійного рівняння;
г). рівняння в повних диференціалах.

6. Найпростіші типи диференціальних рівнянь вищих порядків.
7. Подайте схему загального розв’язку однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами II порядку залежно від характеру коренів рівняння.
8. Наведіть приклади задач природничого смислу, що приводять до диференціального рівняння.
9. Необхідна і достатня умова рівняння в повних диференціалах .
10. Інтегрування неоднорідного лінійного рівняння .
11. Інтегрування однорідного лінійного рівняння .
12. Найпростіші диференційні рівняння першого порядку : рівняння , що не містять шуканої функції .
13. Поняття про наближені методи розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь : метод Ейлера .
14. Види розв'язків диференціального рівняння : загальний, частковий, особливий .
15. Задача Коші . Теорема про існування та єдиність розв'язку рівняння першого порядку .

РОЗДІЛ VII.
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Студент повинен знати:

- класифікацію подій та алгебраїчні операції над подіями;
- класичне, геометричне, статистичне означення ймовірності;
- поняття умовної ймовірності та незалежності випадкових подій, правила множення і додавання ймовірностей;
- формулу повної ймовірності, формулу Байеса;
- схему незалежних повторних випробувань і формулу Бернуллі;
- дискретну випадкову величину, числові характеристики;
- неперервну випадкову величину, числові характеристики;
- закони розподілу дискретної і неперервної випадкових величин.

Студент повинен уміти:

- давати алгебраїчну та геометричну інтерпретацію операцій над подіями;
- вміти застосовувати поняття і методи теорії ймовірностей у моделюванні задач з економічним змістом;
- обчислювати ймовірності деякої події у класичній моделі.

Довідковий матеріал

Означення ймовірності

Ймовірністю події А називається числова міра об’єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається така ймовірність *P(A)*.

Властивості ймовірності

1) Для кожної події $A \in \Omega$, маємо, що $0 \le P(A) \le 1$.
2) Імовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.
3) Якщо події А і В несумісні $(A \cap B = \varnothing)$, то $P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю випадкової події А називається відношення кількості елементарних подій m, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

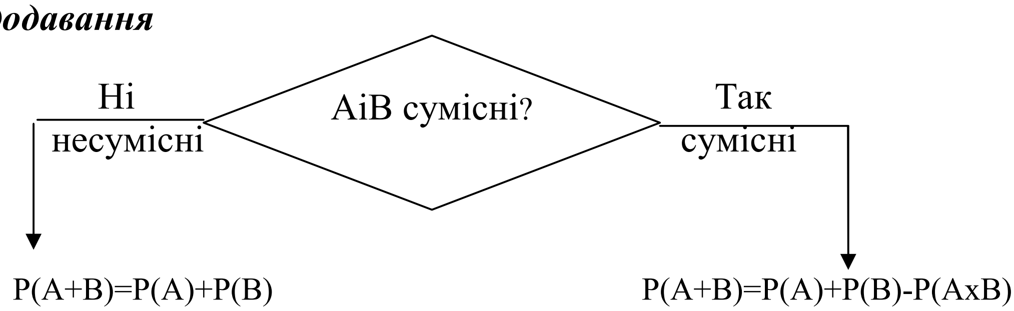
$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Основні теореми ймовірності

Означення. *Несумісними* подіями називаються такі події, коли настання однієї з них повністю виключає настання іншої.

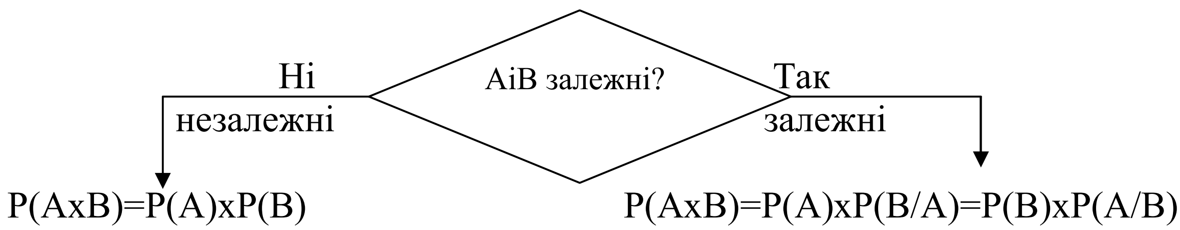
Означення. *Незалежними* подіями називаються такі події, коли ймовірність настання довільної з них не залежить від того, відбулася інша подія чи ні. У противному разі події називаються залежними.

Теорема додавання



Теорема множення ймовірностей

Ймовірність події В, визначена за умови що подія А відбулася, називається умовною і позначається *P(A/B)*.



Формула повної ймовірності

Нехай подія А може відбуватися за умови настання однієї із несумісних подій $B_i (i = 1,2,...,n)$, які утворюють повну групу і які назвемо гіпотезами. Нехай відомі ймовірності $P(B_i)$ та умовні ймовірності $P(A/B_i)$ тоді

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i).$$

Формула Баєса:

Розглянемо події $B_i (i = 1,2,...,n)$, які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Подія А може відбуватися одночасно з деякою із подій B_i. Відомо ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія А відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія А відбулась. Потрібно переоцінити ймовірності гіпотез B_i. Для цього застосуємо формулу Баєса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

Схема випробувань з повторенням

Незалежні випробування.

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія може як відбутися, так і не відбутися. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулася вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються <u>незалежними щодо події А</u>. Ймовірність того, що подія А відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають *P(A)=p*, а ймовірність настання протилежної події $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Для розв'язання задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

1. <u>Формула Бернуллі</u>. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність *P(A)=p*, подія А відбудеться m раз, подається так: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ (для $n \leq 10$)

2. <u>Найімовірніша кількість</u>. Частота m_0 настання події Ф в n незалежних повторних випробуваннях називається найімовірнішою кількістю (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$np - q \leq m_0 \leq np + p.$

Розподіл може мати одне або два найімовірніші числа.

3. <u>Локальна теорема Лапласа</u>. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких *P(A)=p*, подія *A* відбудеться m раз, подається такою наближеною залежністю:

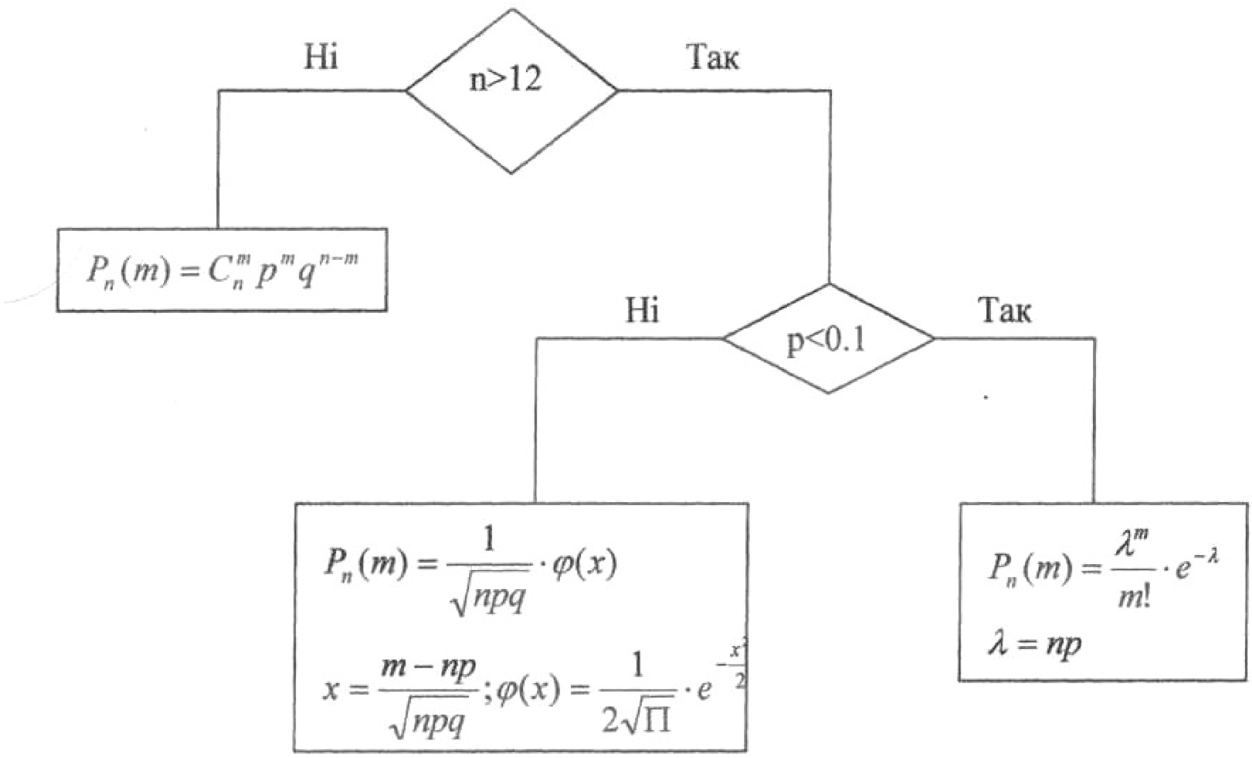
$P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x)$ - функція Гаусса

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, (при n>10, p>0.1).

Значення функції Гаусса наводяться у спеціальних таблицях.

4. <u>Формула Пуассона</u>. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань *P(A)=p* і *0<p<0.1*, а n велике, то

$P_n(m) = \dfrac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$, $a = np.$



5. <u>Інтегральна теорема Лапласа</u>. Ймовірність того, що подія А відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія А відбувається з ймовірністю p, подається формулою:

$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях.

6. Відхилення відносної частоти від ймовірності. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події А від її ймовірності за модулем не перевищує ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p < \varepsilon\right.\right) \approx 2\Phi(\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

Випадкові величини

Випадкова величина - це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того або іншого числового значення. Випадкові величини позначатимемо великими літерами X,Y,Z,…,можливі значення - малими літерами x,y,z,.. латинського алфавіту.

Існують два типи випадкових величин: дискретні величини, неперервні величини.

За теоретико-множинним трактуванням основних понять теорії ймовірностей, випадкова величина X є функція елементарної події: $X = X(\omega)$, де ω - елементарна подія, яка належить простору $\Omega(\omega \in \Omega)$.

Множина можливих значень випадкової величини X складається з усіх значень, які набуває функція X(ω).

Означення. Якщо ця множина скінченна або зліченна, то випадкова величина X називається дискретною.

Означення. Функція дійсної змінної x, $x \in R = (-\infty, \infty)$ визначена рівністю: $F(x) = P\{(\omega : X / \omega) < x\} = P(X < x)$, називається *функцією розподілу* випадкової величини $X = X(\omega)$.

Дискретні випадкові величини

Для того, щоб задати дискретні випадкові величини (д.в.в.), достатньо для кожного з цих можливих значень випадкової величини X задати ймовірність набування цього значення $p_i = P(X = x_i)$ (i=1,...). Події $\{X = x_i\}$

(i=1,2,...,n) утворюють повну групу попарно несумісних подій і тому $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Означення. *Законом розподілу* ймовірностей дискретних випадкових величин називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їх ймовірностями.

Закон розподілу д.в.в. записують таблицею, аналітично, або графічно.

Табличний запис закону розподілу:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
P_i	p_1	p_2	…	p_n

Для аналітичного запису закону розподілу д.в.в. потрібно знати формулу: аналітичний вираз залежності між значеннями x_i(д.в.в.) та їх ймовірностями p_i.

Для графічного зображення закону розподілу д.в.в. на прямокутній системі координат наносять точки (x_i,P_i) і з'єднують їх відрізками. Одержану фігуру називають ймовірним многокутником розподілу.

Числові характеристики дискретної випадкової величини (д.в.в.):

Математичне сподівання.

Означення. *Математичним сподіванням* M(x) д.в.в. X називають суму добутків всіх її можливих значень на їх імовірності:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсія

Означення. *Дисперсією* (розсіюванням) д.в.в. називається математичне сподівання квадрата відхилення дискретної випадкової величини від її математичного сподівання: $D(x) = M\{[x - M(x)]^2\} = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(x)]^2 p_i$.

При обчисленні дисперсії доцільно використовувати формулу: $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(x)]^2$.

Середнє квадратичне відхилення

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* д.в.в. величини X називають корінь квадратний із дисперсії $D(x)$ і позначають: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$;

Мода і медіана

Означення. *Модою* д.в.в. X називається те її значення x, ймовірність набуття якого є найбільшою.

Означення. *Медіаною* д.в.в. X називається те її значення у законі розподілу, для якого сума ймовірностей можливих значень зліва і справа від нього не перевищує 0,5.

Початкові і центральні моменти.

Означення. *Початковим моментом* s-го порядку д.в.в. X називають математичне сподівання величини X^S і позначають ν_S:

$\nu_S = M(X^s) = \sum_{i=1}^{n} x_i^S p_i$, зокрема, $\nu_1 = M(x)$, $\nu_2 = M(x^2)$ і для обчислення дисперсії маємо таку формулу: $D(x) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Означенням. *Центральним моментом* S-го порядку д.в.в. X називається математичне сподівання величини $[X - M(x)]^S$ і позначається μ_S:

$\mu_S = M\{[X - M(x)]^S\}$ або $\mu_S = \sum_{i=1}^{n} [X - M(x)]^S \cdot p_i$, зокрема: $M_1=0$; $M_2=D(x)$.

Асиметрія і ексцес.

Означення. *Асиметрією* д.в.в. X називається число A, яке обчислюється за формулою: $A = \frac{M_3}{\sigma^3}$.

Означення. *Ексцесом* д.в.в. X називається число E, яке обчислюється за формулою: $E = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$.

Неперервна одновимірна випадкова величина (н.в.в.)

Означення. *Неперервною* називається випадкова величина, яка може приймати всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Означення. *Функцією розподілу* ймовірностей (інтегральна функція) F(x) неперервної випадкової величини X називається ймовірність того, що в результаті випробування вона набуде значення, меншого за число x, тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Означення. *Густиною* (диференціальна функція) розподілу ймовірностей н.в.в. X називають функцію f(x), яка дорівнює першій похідній функції розподілу F(x), тобто: $f(x) = F'(x)$.

Числові характеристики неперервної випадкової величини (н.в.в.)

Означення. *Математичним сподіванням* (середнім значенням) н.в.в. X називають число M(X), яке визначається рівністю:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \text{ ; якщо } x \in (-\infty, \infty); \; M(x) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x)dx \text{ ; якщо } x \in (a, b).$$

Означення. *Дисперсією* $D(x)$ н.в.в. X називають математичне сподівання квадрата її відхилення X-M(X), тобто :

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx, \text{ якщо } x \in (-\infty, \infty);$$

$$D(x) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx, \text{ якщо } x \in (a, b).$$

Означення. *Середнє квадратичне відхилення* н.в.в. X визначається рівністю: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Означення. *Модою* Mo н.в.в. X називають те її можливе значення x_0, за якого густина розподілу f(x) цієї величини досягає максимуму, тобто: Mo=x_0, де $f(x) = \max f(x)$.

Означення. *Медіаною* Me н.в.в. X називають те її можливе значення, для якого виконується рівність $P(-\infty < X < M_l) = P(M_l < X < \infty)$.

Початкові і центральні моменти.

Означення. *Початковим моментом* S-го порядку ν_S, н.в.в. X називається математичне сподівання випадкової величини X^S, тобто:

$$\nu_S = \int_{-\infty}^{\infty} x^S f(x)dx \text{, якщо } X \in (-\infty, \infty);$$

$$\nu_S = \int_{a}^{b} x^S f(x)dx \text{, якщо } X \in (a,b); \quad \nu_1 = M(x).$$

Означення. *Центральним моментом* S-го порядку μ_S н.в.в. X називається математичне сподівання випадкової величини $[x - M(X)]^S$, тобто:

$$\mu_S = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^S f(x)dx \text{, якщо } X \in (-\infty, \infty);$$

$$\mu_S = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^S f(x)dx \text{, якщо } X \in (a,b);$$

$M_1=0$; $M_2=D(x)$.

Асиметрія та ексцес.

Означення. *Асиметрією* н.в.в. називається число A, яке обчислюється за формулою: $A = \frac{M_3}{\sigma^3}$.

Означення. *Ексцесом* н.в.в. називається число E, яке визначається за формулою $E = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1. Монету кидають двічі .Нехай A - подія , яка полягає в тому, що за першим разом випав герб , B - подія , яка полягає в тому, що за другим разом випав герб . З'ясувати, чи будуть незалежними події A і B.

Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту є множина $\Omega\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Тоді $A = \{ГГ, ГЦ\}$, $B = \{ГГ, ЦГ\}$, $A \cap B = \{ГГ\}$ і

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \; P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Отже, $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Тому випадкові події A і B – незалежні.

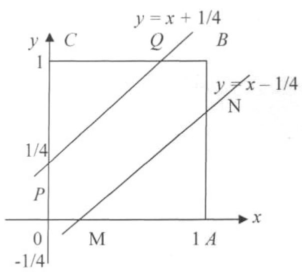
Приклад 7.2. Два студенти домовилися про зустріч у визначеному місці між 12 і 13 годинами. Студент, який приходить на місце зустрічі першим, чекає свого колегу 15 хв. і відходить. Знайти ймовірність того, що студенти зустрінуться у визначеному місці (подія *A)*, якщо кожний студент вибирає час приходу на місце зустрічі між 12 і 13 годинами навмання.

Розв'язання. Нехай 12 + x - час приходу першого студента , а 12 + y - час приходу другого студента на місце зустрічі. Очевидно, $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Простір елементарних подій Ω і події A описується рівностями:

$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$,

$A = \left\{(x, y) : |x - y| \le \frac{1}{4}\right\}$ або $A = \left\{(x, y) : x - \frac{1}{4} \le y \le x + \frac{1}{4}\right\}$ і вони зображені на рис.:

Ω - квадрат *OABC*, A – виділена фігура *OMNBQP*.



Геометричне зображення простору Ω *і події A до прикладу*

Шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{S_{OABC} - 2S_{MAN}}{S_{OABC}} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{1} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

Приклад 7.3. В урні 10 куль: 3 червоних, 5 синіх та 2 білих. Яка ймовірність того, що коли вийняти одну кулю, вона буде кольоровою?

Розв'язання. Імовірність вийняти червону кулю D(A)=3/10, синю – D(A)=5/10. Оскільки події A і B несумісні, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 0{,}8 .$$

Приклад 7.4. На клумбі ростуть 20 червоних, 30 синіх і 40 білих айстр. Визначимо ймовірність зірвати кольорову айстру за умови, що зривається лише одна квітка.

Розв’язання. Шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей зірвати червону або синю айстру, тобто:

$$P = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{5}{9}$$

Приклад 7.5. Імовірність того, що день буде дощовим, *P=0,7.* Знайдемо імовірність того, що день буде ясним.

Розв’язання. Події «день дощовий» і «день ясний» - протилежні. Тому шукана ймовірність:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Приклад 7.6. Є три однакових на вигляд ящики. У першому є дві білі миші і одна сіра, в другому – три білі й одна сіра, в третьому – дві білі і дві сірі миші. Якою є ймовірність того, що навмання вийнята з одного з ящиків миша буде білою?

Розв’язання. Позначимо через B_1 ситуацію вибору першого ящика, B_2 – другого ящика, B_3 – третього ящика, A – виймання білої миші. Оскільки всі ящики однакові, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$. Якщо вибрано перший ящик, то $P_{B_1}(A) = \frac{2}{3}$. Аналогічно: $P_{B_2}(A) = \frac{3}{4}$; $P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$. За формулою повної імовірності:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{36} \ .$$

Приклад 7.7. Бізнесмен має контакт з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий банк 7 разів, третій банк – 9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесменові кредит?

Розв'язання. Введемо позначення: подія A_i - i-ий банк виділить бізнесменові кредит, i=1,2,3; подія A – хоча б один банк виділить бізнесменові кредит. За умовою задачі, $P(A_1)$=0,6; $P(A_2)$=0,7; $P(A_3)$=0,9;

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;

$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

За формулою: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3)$,

одержуємо: $P(A) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$.

Приклад 7.8. Три робітники виготовили деталі. Перший робітник виготовив 25% всіх деталей, другий – 35%, третій – 40%. У продукції першого робітника брак становить 5%, у продукції другого – 4% і в продукції третього – 2%. Випадково вибрана для контролю деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовив другий робітник?

Розв'язання. Введемо позначення для подій: А – вибрана для контролю деталь виявилась бракованою; B_1, B_2, B_3 – деталь виготовлена відповідно першим, другим і третім робітником.

Маємо:

$P(B_1) = 0{,}25$, $P(B_2) = 0{,}35$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P_{B_1}(A) = 0{,}05$, $P_{B_2}(A) = 0{,}04$, $P_{B_3}(A) = 0{,}02$

За формулою Байеса знаходимо:

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}04}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} = \frac{28}{69}$$

Зауважимо, що формула Байеса дає змогу переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат досліду, внаслідок якого з'явилась подія А.

Приклад 7.9. У трьох коробках містяться тенісні м'ячі: в першій 10 м'ячів, з них 3 нових; у другій 15 м'ячів, з них 5 нових, і в третій 20 м'ячів, з них 6 нових. Навмання вибирається один м'яч, і він виявляється новим. Визначимо ймовірність того, що взятий м'яч належить другій коробці.

Розв'язання. Позначимо через B_1, B_2, B_3 відповідно гіпотези про те, що навмання взятий тенісний м'яч належав першій, другій, третій коробці. Тоді ймовірності цих гіпотез до проведення досліду рівні між собою і дорівнюють $\frac{1}{3}$, тобто $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$. У результаті випробування спостерігається подія А, яка полягає в тому, що навмання вибраний м'яч є новим. Умовні ймовірності цієї події при гіпотезах B_1, B_2, B_3 відповідно дорівнюють:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}3\,,\ P_{B_2}(A) = \frac{1}{3}\,,\ P_{B_3}(A) = 0{,}3\,.$$

За формулою Байеса знаходимо ймовірність гіпотези B_2 після випробування:

$$P_A(B_2) = \frac{1/3}{0{,}3 + 1/3 + 0{,}3} = \frac{5}{14}\,.$$

Приклад 7.10. У ящику є 6 червоних, 8 синіх та 4 білих кулі. Кожне випробування полягає в тому, що з ящика беруть на вдачу одну кулю, не повертаючи її назад. Знайти ймовірність того, що за першою спробою буде взята червона куля (подія *A*), за другою – синя (подія *B*), за третьою – біла (подія *C*).

Розв'язання. Так як $P(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{8}{17}$, $P(C/AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, то за формулою: $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$, маємо

$$P(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{51}\ .$$

Приклад 7.11. У кожному з трьох ящиків є по 24 деталі: при цьому у першому ящику 18, у другому – 20, а у третьому – 22 стандартні деталі. З кожного ящика взяли по одній. Знайти ймовірність того, що усі три взяті деталі виявляться стандартними.

Розв'язання.

Введемо змінну: взяті стандартні деталі з першого ящика – подія A_1, з другого – подія A_2, з третього – подія A_3, тоді

$P(A_1) = \frac{18}{24}$; $P(A_2) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$; $P(A_3) = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$ (події A_1, A_2, A_3 - незалежні),

за формулою: $P(A_1, A_2, A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_n)$, при n=3, отримуємо

$P(A_1, A_2, A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{96}$.

Приклад 7.12. Три стільця в однакових та незалежних умовах зробили по одному пострілу до однієї цілі. Імовірність поразки цілі першим стрільцем дорівнює 0,9 , другим – 0,8 , третім – 0,7. Знайти імовірності того, що:

а) тільки один із стрільців влучить в ціль;

б) тільки два стрільця влучать в ціль;

в) всі три стрільця влучать в ціль.

Розв'язання. Ведемо змінну: поразка цілі першим стрілком – A_1, другим – A_2, третім – A_3; попадання в ціль тільки першим стрілком – B_1, тільки другим – B_2, тільки третім – B_3. Нехай $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, $P(A_3)=p_3$, тоді $P(\overline{A}_1) = q_1$, $P(\overline{A}_2) = q_2$, $P(\overline{A}_3) = q_3$. Оскільки $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $B_2 = A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$, $B_3 = A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$ то події B_1, B_2, B_3 несумісні, то імовірність того, що тільки один стрілок влучить у ціль, передається формулою $P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$. Так як $P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = p_1q_2q_3$, $P(B_2) = P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3) = p_2q_1q_3$, $P(B_3) = P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2) = p_3q_1q_2$, тоді (1) $P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2$

Подія C_1 – поразка цілі тільки другим та третім стрілками, C_2 – тільки першим та третім, C_3 – тільки першим та другим, тобто $C_1 = A_2A_3\overline{A}_1$, $C_2 = A_1A_3\overline{A}_2$, $C_3 = A_1A_2\overline{A}_3$, тоді імовірність того, що тільки два стрілки влучать у ціль, передається формулою (2) $P(C_1 + C_2 + C_3) = p_2p_1q_3 + p_1p_3q_2 + p_1p_2q_3$

Імовірність того, що три стрілки влучать у ціль, передається формулою (3) $P(A_1A_2A_3)=p_1p_2p_3$

За умовою задачі p_1=0,9 , p_2=0,8 , p_3=0,7. Отже, q_1=1-p_1=0,1 , q_2=1-p_2=0,2 , q_3=1-p_3=0,3. Підставляючи ці значення у формули (1), (2) та (3), знаходимо імовірності: $P_1=P(B_1+B_2+B_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}092$

$$P_2=P(C_1+C_2+C_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}398$$

$$P_3=P(A_1A_2A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504\,.$$

Приклад 7.13. Маємо 5 ящиків з білими та чорними кулями:

2 ящика – по 2 білі та 3 чорні кулі (склад H_1),

2 ящика – по одній білій та 4 чорних кулі (склад H_2),

1 ящик – 4 білих та 1 чорна куля (склад H_3).

З одного на вдачу взятого ящика візьмуть кулю, яка виявиться чорною (подія A). Чому дорівнює імовірність того, що куля взята з ящика другого складу?

Розв'язання. За формулою Байеса $P(\frac{H_k}{A})=\dfrac{P(H_k)P(\frac{A}{H_k})}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(\frac{A}{H_i})}$, де k=2, n=3,

отримуємо формулу, якою слід користуватися в даному випадку:

$P(\frac{H_2}{A})=\dfrac{P(H_2)P(\frac{A}{H_2})}{P(H_1)P(\frac{A}{H_1})+P(H_2)P(\frac{A}{H_2})+P(H_3)P(\frac{A}{H_3})}$ Знайдемо відповідні імовірності:

$P(H_1)=\frac{2}{5}$, $P(H_2)=\frac{2}{5}$, $P(H_3)=\frac{1}{5}$, $P(\frac{A}{H_1})=\frac{3}{5}$, $P(\frac{A}{H_2})=\frac{4}{5}$, $P(\frac{A}{H_3})=\frac{1}{5}$, та підставимо їх у дану формулу:

$$P(\frac{A}{H_2})=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{\frac{8}{25}}{\frac{15}{25}}=\frac{8}{15}.$$

За аналогією можна знайти: $P(\frac{H_1}{A})=\frac{6}{15}$, $P(\frac{H_3}{A})=\frac{1}{15}$.

Приклад 7.14. Серед 30 працівників фірми випадковим чином розподілилися путівка до трьох міст: А – 17; В – 5; С – 8 путівок. Яка ймовірність того, що дві конкретні особи поїдуть до одного міста.

Розв'язання. Подія D – дві особи поїдуть до міста А;

A_1 – перша особа поїде до міста А;

A_2 – друга особа поїде до міста А;

B_1 – перша особа поїде до міста В;

B_2 – друга особа поїде до міста В;

C_1 – перша особа поїде до міста С;

C_2 – друга особа поїде до міста С.

І спосіб

Ймовірність того, що особа поїде до міста А: $P(A_1)=\frac{17}{30}$ перша особа поїде до міста А; якщо друга особа поїде теж до цього міста $P(A_2)=\frac{16}{29}$.

Аналогічно до міст В і С: $P(B_1)=\frac{5}{30}$, $P(B_2)=\frac{4}{29}$; $P(C_1)=\frac{8}{30}$, $P(C_2)=\frac{7}{29}$.

$P(A_1 \cdot A_2)$ - подія дві конкретні особи поїдуть до міста А.

$P(B_1 \cdot B_2)$ і $P(C_1 \cdot C_2)$ - події, що дві конкретні особи поїдуть до міст С та В відповідно.

Останні три події несумісні.

Отже,

$$P(D)=P(A_1\cdot A_2)+P(B_1\cdot B_2)+P(C_1\cdot C_2)=$$

$$=P(A_1)P(\frac{A_2}{A_1})+P(B_1)P(\frac{B_2}{B_1})+P(C_1)P(\frac{C_2}{C_1})=$$

$$=\frac{17}{30}\cdot\frac{16}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}+\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}=\frac{17}{15}\cdot\frac{8}{29}+\frac{2\cdot 5}{15\cdot 29}+\frac{29}{29\cdot 15}=\frac{174}{435}\approx 0{,}4$$

Відповідь: P(D)=0,4.

ІІ спосіб

$n=C_{30}^2=\frac{30!}{28!\cdot 2!}=\frac{29\cdot 30}{2}=435$ - елементарних подій.

$m_1 = C_{17}^2 = 136$; $m_2 = C_8^2 = 28$; $m_3 = C_5^2 = 10$

$$P(D) = \frac{136}{435} + \frac{28}{435} + \frac{10}{435} = \frac{174}{435} \approx 0,4$$

Відповідь: 0,4.

Приклад 7.15. У регіоні 75% фермерів мають річний прибуток, що перевищує 1 млн. гривень. Навмання вибирають 400 фермерів. Знайти ймовірність того, що в їх числі виявиться: а) 270, б) 300, в) 320 фермерів, річний прибуток яких перевищує 1 млн. гривень.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що навмання вибраний фермер має річний прибуток, більший за 1 млн. грн. За умовою задачі , n=400, p=0,75, q=0,25, m=270 або 300, або 320. Шукані ймовірності $P_{400}(270)$, $P_{400}(300)$, $P_{400}(320)$ обчислюємо за формулою Муавра-Лапласса

$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0)$, $x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, бо використання формули Бернуллі призводить до громіздких обчислень:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = \sqrt{75} \approx 8,7;$$

а) $x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{270 - 400 \cdot 0,75}{8,7} = \frac{-30}{8,7} = -3,45$;

за таблицями *додатка* знаходимо $\varphi(3,45) = 0,0010$ і обчислюємо:

$$P_{400}(270) = \frac{\varphi(-3,49)}{8,7} = \frac{\varphi(3,49)}{8,7} = \frac{0,0010}{8,7} = 0,0001;$$

б) $x_0 = \frac{300 - 400 \cdot 0,75}{8,7} = \frac{300 - 300}{8,7} = 0$;

за таблицями *додатка* маємо, що $\varphi(0) = 0,3989$, і обчислюємо:

$$P_{400}(300) = \frac{\varphi(0)}{8,7} = \frac{0,3989}{8,7} = 0,0458;$$

в) $x_0 = \frac{320 - 400 \cdot 0,75}{8,7} = \frac{320 - 300}{8,7} = \frac{20}{8,7} = 2,3$;

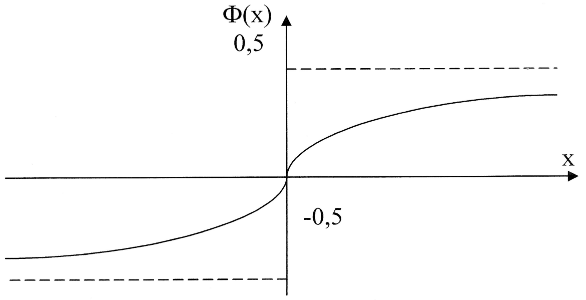
за таблицями маємо, що $\varphi(2,3) = 0,0283$, і обчислюємо:

$P_{400}(320) = \frac{\varphi(2{,}3)}{8{,}7} = \frac{0{,}0283}{8{,}7} = 0{,}0033$.

Отже, імовірність того, що серед навмання вибраних 400 фермерів 270, 300, 320 фермерів мають річний прибуток, більший за 1 млн. грн., відповідно, становлять: 0,0001; 0,0458; 0,0033.

Приклад 7.16. Ймовірність кожної людини захворіти на грип під час епідемії становить 0,2. Яка ймовірність того, що серед 400 навмання перевірених осіб хворими на грип виявляться від 70-ти до 100 осіб?

Розв'язання. Нехай подія A – вибрана навмання особа – хвора на грип. За умовою задачі, $p - P(A) = 0{,}2$, $q = P(\overline{A}) = 0{,}8$, $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$.



Графік функції Лапласа

Для обчислення шуканої ймовірності $P_{400}(10 \le m \le 100)$ використаємо формулу $P_n(K_1 \le m \le K_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$. Спочатку обчислимо:

$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{64} = 8$;

$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = \frac{-10}{8} = -1{,}25$; $x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = \frac{20}{8} = -2{,}5$.

за таблицями *додатка* знаходимо Φ(2,5) = 0,4938 і Φ(-1,25)=-Φ(1,25)=-0,3944 і одержуємо, що:

$P_{400}(10 \le m \le 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$

Приклад 7.17. Молокозавод має договори на постачання молока з трьома фермерами і двома агрофірмами. Імовірність виконання договору одним фермером становить 0,8, а однією агрофірмою – 0,6. Знайти середню кількість постачальників сировини, які виконають договори.

Розв’язання. Нехай X – число фермерів і Y – число агрофірм, що виконають договори. Складемо закони розподілу цих дискретних випадкових величин. для випадкової величини X маємо: px=0,8, qx=0,2 і можливі значення $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Імовірності p_{ix} обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$p_{0x} = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}008;$$

$$p_{1x} = C_3^1 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096;$$

$$p_{2x} = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2 = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$$

$$p_{3x} = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}512.$$

Перевірка:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1.$$

Закон розподілу випадкової величини X має форму такої таблиці:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P=p_{ix}$	0,008	0,096	0,384	0,512

$M(X) = 0 \cdot 0{,}008 + 1 \cdot 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 0{,}096 + 0{,}768 + 1{,}536 = 2{,}4$ Для випадкової величини Y маємо: $p_y = 0{,}6$, $q_y = 0{,}4$ і можливі значення $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Імовірності p_{ji} обчислимо також за формулою Бернуллі:

$$p_{0y} = C_2^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}16;$$

$$p_{1y} = C_2^1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48;$$

$$p_{2y} = C_2^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^0 = 0{,}36.$$

Перевірка:

$$p_{0y} + p_{1y} + p_{2y} = 0{,}16 + 0{,}48 + 0{,}36 = 1.$$

Закон розподілу випадкової величини Y має вигляд:

$Y=y_i$	0	1	2
$P=p_{iy}$	0,16	0,48	0,36

$M(Y) = 0 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}36 = 0{,}48 + 0{,}72 = 1{,}2$.

За імовірнісним змістом математичного сподівання середнє число $\overline{X+Y}$ постачальників молока наближено дорівнює *M(X+Y)*, тобто

$\overline{X+Y} \approx M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 2{,}4 + 1{,}2 = 3{,}6$.

Отже, середнє число постачальників дорівнює 3-4.

Приклад 7.18. Електронна пошта банку підтримує зв'язки із сотнею абонентів. Імовірність того, що за одиницю часу на електронну пошту надійде повідомлення від абонента, становить 0,02. Написати закон розподілу величини *X* – числа надходження сигналів від абонентів. Яка при цьому з подій є більш імовірною: *B* – за одиницю часу надійдуть сигнали від 3 абонентів, *C* – за одиницю часу надійдуть сигнали від 4 абонентів?

Розв'язання. У даному випадку проводиться *n=100* випробувань за схемою Бернуллі і випадкова величина *X* може набувати значень $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, ..., $x_{100} = 100$. Імовірність події *A* – надходження сигналу від одного абонента є мала, а число *n=100* є велике і $\lambda = 100 \cdot 0{,}02 = 2$, тому відповідні ймовірності обчислюємо за формулою:

$$P_n(k) = \frac{\lambda k}{k!} e^{-\lambda}, \ (\lambda = np) \text{ - теорема Пуассона.}$$

$p_0 = P_{100}(0) \approx e^{-2} \approx 0{,}1353$;

$p_1 = P_{100}(1) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707$;

$p_2 = P_{100}(2) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707$;

$p_3 = P_{100}(3) \approx \frac{4}{3} e^{-2} \approx 0{,}1804$;

$p_4 = P_{100}(4) \approx \frac{2}{3} e^{-2} \approx 0{,}0902$;

....

$p_{100} = P_{100}(100) = 1 - \sum_{m=0}^{99} P_{100}(m)$.

Закон розподілу описаної в задачі дискретної випадкової величини *X* записуємо у формі таблиці:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	...
$P=p_i$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	...

Із наведеної таблиці видно, що *P(B)*= 0,1804 і *P(C)*= 0,0902, тобто більш імовірно, що сигнали надійдуть від 3 абонентів, ніж від 4.

Приклад 7.19. Дискретна випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей, що заданий таблицею:

$X=x_i$	-2	1	4	6
$P=p_i$	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти функцію розподілу і нарисувати її графік.

Розв'язання.

Якщо $x \le -2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$, бо подія $X < x$ неможлива.

Якщо $-2 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2$, бо подія $X < x$ є рівносильна події X=-2, яка має ймовірність 0,2.

Якщо $1 < x \le 4$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$, бо подія $X < x$ є сумою двох несумісних подій: X=-2, що має ймовірність 0,2, і X=1, яка має ймовірність 0,1.

Якщо $4 < x \le 6$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}6$, бо подія $X < x$ у даному випадку є сумою трьох несумісних подій: X=-2, яка має ймовірність 0,2, X=1, яка має ймовірність 0,1, і X=4, яка має ймовірність 0,3.

Якщо $x > 6$, то $F(x) = P(X < x) = 1$, бо подія $X < x$ є вірогідною.

Отже, функція розподілу заданої дискретної випадкової величини має такий аналітичний вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 0{,}2, & -2 < x \le 1; \\ 0{,}3, & 1 < x \le 4; \\ 0{,}6, & 4 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графік цієї функції показує, функція розподілу дискретної випадкової величини має «східчастий» характер.

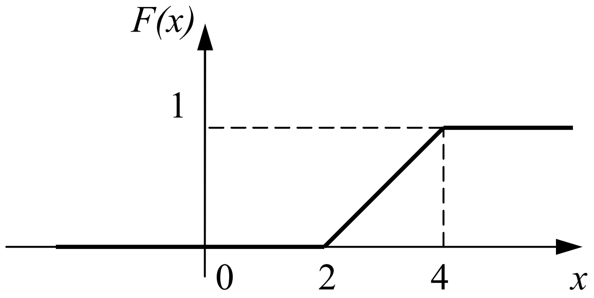
Приклад 7.20.

Випадкову величину *X* задано функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x}{2}-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Побудувати її графік та обчислити ймовірності: $P(0<X<3)$, $P\left(\frac{5}{2}\le X<5\right)$.

Розв’язання. Будуємо графік *F(x)*- графік функції розподілу до прикладу



Шукані ймовірності обчислюємо за формулою:

$$P(0<X<3)=F(3)-F(0)=\left(\frac{3}{2}-1\right)-0=\frac{1}{2};$$

$$P\left(\frac{5}{2}\le X<5\right)=F(5)-F\left(\frac{5}{2}\right)=1-\left(\frac{5}{4}-1\right)=\frac{3}{4}.$$

Із наведених обчислень випливає, що ймовірність попадання значень випадкової величини *X* у проміжок $\left[\frac{5}{2},5\right)$ є більшою, ніж в інтервал (0, 3).

Приклад 7.21. Закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини заданий густиною:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \cos x & 0<x<\pi/2\\ 0 & x>\pi/2\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x)*, побудувати графіки функцій *f(x), F(x)* та обчислити ймовірності $P\left(\pi/6<X<\pi/3\right)$, $P\left(\pi/6<X<\pi\right)$.

Розв'язання. За формулою, маємо:

1) якщо $x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$;

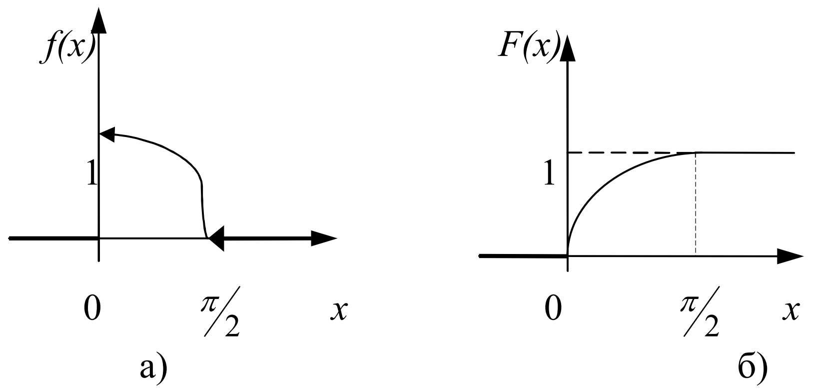
2) якщо $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} \cos t dt = \sin t \Big|_0^x = \sin x$;

3) якщо $x > \frac{\pi}{2}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{\pi/2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^{x} 0 \cdot dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1$.

Отже, функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Графіки густини *f(x)* і функції *F(x)* зображені на рис.



Із графіків функцій *f(x)* і *F(x)* видно, що густина розподілу має розрив у точці $x = 0$, а в точці $x = \frac{\pi}{2}$ - неперервна.

Графіки густини і функції розподілу до прикладу

Далі за формулою обчислюємо:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 0{,}366;$$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \pi\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \cdot dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Приклад 7.22. Густину розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ax^2 & 0<x<\sqrt{3}\\ 0 & x>\sqrt{3}\end{cases}$$

Виконати такі дії: 1) визначити *a* і *F(x)*; 2) нарисувати графіки *f(x)* і *F(x)*; 3) обчислити *M(X)*, *D(X)*, $\sigma(X)$,*Mo*, *Me*.

Розв'язання. 1) Значення параметра *a* обчислюємо з умови, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow a\int_0^{\sqrt{3}} x^2dx=1 \Rightarrow a\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}=1 \Rightarrow a\sqrt{3}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Оскільки можливі значення випадкової величини *X* зосереджені в інтервалі (0, $\sqrt{3}$), то функція розподілу $F(X)=0$ при $x\le 0$ і $F(X)=1$ при $x>\sqrt{3}$ (див. властивості функції розподілу). Вигляд функції *F(x)* на проміжку (0, $\sqrt{3}$] обчислюємо за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x t^2dt=\frac{t^3}{3\sqrt{3}}\Big|_0^x=\frac{x^3}{3\sqrt{3}}.$$

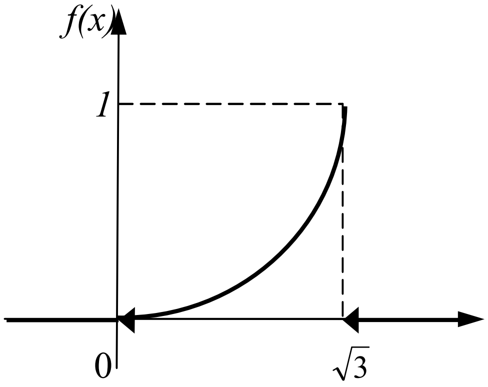
Отже, густина *f(x)* і функція *F(x)* розподілу мають, відповідно, такий вигляд:

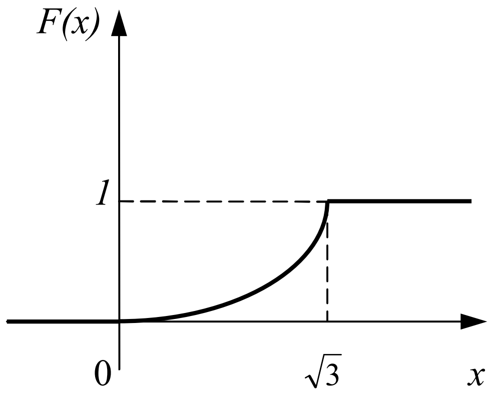
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 & 0<x<\sqrt{3}\\ 0 & x>\sqrt{3}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3\sqrt{3}}x^3, & 0<x\le\sqrt{3};\\ 1, & x>\sqrt{3}.\end{cases}$$

2) Будуємо графіки *f(x)* і *F(x)*.

Густина розподілу заданої випадкової величини *X*, як бачимо, має розрив у $x=\sqrt{3}$.





Графіки густини і функції розподілу до прикладу

3) Математичне сподівання *M(X)* обчислюємо за формулою

$$M(X)=\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{x^2}{\sqrt{3}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} x^3dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}299$$

Дисперсію *D(X)* обчислимо за формулою

$$D(X)=\int_0^{\sqrt{3}} x^2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{3}}dx-\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} x^4dx-\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^{\sqrt{3}}-\frac{27}{16}=\frac{9}{5}-\frac{27}{16}=0{,}1125$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}1125}\approx 0{,}3354.$$

Моду *Mo* визначаємо з умови. Очевидно,

$$\max f(x)=f(\sqrt{3})\Rightarrow Mo\approx\sqrt{3}\approx 1{,}7.$$

Медіану *Me* визначимо з рівняння

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}(Me)^3=0{,}5\Rightarrow (Me)^3=2{,}598\Rightarrow Me=\sqrt[3]{2{,}598}\approx 1{,}37.$$

Задачі для самостійної роботи

7.1. Серед 10 пар взуття, які розміщенні на полиці магазину, 6 пар 41-го розміру. З полиці беруть двічі навмання по одній парі взуття, не повертаючи їх назад. Подія А – перша пара взуття 41-го розміру, подія В – друга пара взуття 41-го розміру. Виконати такі дії:

а) з’ясувати сумісність і залежність події А і В;

б) обчислити ймовірність події В.

7.2. Теоретична частина предмета складається з трьох розділів, у кожному з яких по 10 питань. Студент знає 5 питань з першого розділу, 6 питань -

із другого розділу і 8 питань - із 3-го. Викладач дає студентові навмання по одному питанню з кожного розділу. Знайти ймовірність того, що:

а)студент знає відповідь на всі три питання;

б)студент знає відповіді на питання другого і третього розділів і не знає відповіді на питання першого розділу;

в) студент не знає відповіді на жодне з трьох питань.

7.3. Ймовірність того, що ціна акції зростатиме протягом ділового дня, становить 0,4. Якщо тенденція зміни ціни акції будь-якого дня є незалежною від того, що сталося напередодні, то яка ймовірність, що ціна акції:

а) буде зростати чотири дні поспіль;

б) залишиться також чи спадатиме три дні поспіль?

7.4. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. І ймовірність того, що перший банк не відмовить йому в наданні кредиту, становить 0,7, другий - 0,85. Знайти ймовірність того, що:

а) перший або другий банк дасть згоду на кредитування;

б) обидва банки відмовляться надати кредит.

7.5. Карти вибирають навмання з колоди з 52 карт без повернення їх назад. Визначити ймовірність того, що:

а) перші дві карти - піки;

б) один за одним виберуть чотири тузи.

7.6 Імовірність того, що в річній декларації про сукупний оподатковуваний дохід подано не всі джерела доходів, становить 0,2. Яка ймовірність того, що серед вибраних навмання п'яти декларацій хоча б в одній подано не всі джерела доходів?

7.7. Подія А може відбутися за умови появи однієї і тільки однієї з трьох подій - Гіпотез H_1, H_2, H_3, при цьому $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$. Умовні імовірності події А: $P_{H1}(A) = 0,2$, $P_{H2}(A) = 0,4$, $P_{H3}(A) = 0,5$. Обчислити а) $P(A)$; б) $P_A(H_2)$.

7.8. Потрібний товар можна придбати на ринку у двох фірмових кіосках. Імовірність того, що у першому кіоску товар якісний, становить 0,9 , у другому кіоску - 0,8. Знайти ймовірність того, що товар, придбаний навмання в будь-якому з двох кіосків, якісний.

7.9. Фінансовий звіт фірми складається з 20-и таблиць, які готували два економісти. Перший економіст підготував 12 таблиць, другий - 8 таблиць. Імовірність помилки при складанні таблиць із боку першого економіста 0,1, із боку другого економіста -0,2. У вибраній навмання таблиці допущено помилку. Яка ймовірність, що цю таблицю готував другий економіст?

7.10. Із двох близнюків перший є хлопчик. Яка ймовірність, що другий – також хлопчик, якщо ймовірність народження двох хлопчиків становить 0,27, двох дівчаток - 0,23, а для різностатевих близнюків імовірність народження першим для обох статей однакова?

7.11. Стрілець виконує 100 пострілів по мішені. Імовірність попадання ним у мішень становить *p.* Чи правильні твердження: а) описані випробовування є незалежні стосовно події А - стрілець попадає в ціль; б) серія описаних випробувань проводиться за схемою Бернуллі?

7.12. У коробці є 100 деталей серед яких 80 стандартних. Із коробки послідовно виймають по одній деталі. Чи правильні твердження: а) описані випробування незалежні стосовно події *A* - вийнята деталь стандартна; б) послідовність описаних випробувань проводиться за схемою Бернуллі?

7.13. Імовірність народження хлопчика (подія *A*) дорівнює $p = P(A) = 0{,}51$. У сім’ї п'ятеро дітей. Яка ймовірність того, що серед них - два хлопчики?

7.14. Імовірність того, що власник квартири не має заборгованості в оплаті за використання електроенергії (подія *A),* дорівнює $p = P(A) = 0{,}6$. Яка ймовірність, що з 2 400 власників квартир 1 400 не мають названої заборгованості?

7.15. Імовірність хибного виклику пожежної команди (подія *А)* дорівнює *p= P(A)* =0,2. Яка ймовірність, що серед 100 викликів число хибних викликів виявиться від 20 до 40?

7.16. Імовірність появи події *А* в кожному 900 незалежних експериментів *p= P(A)*=0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події *А* відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

7.17. Прядильниця обслуговує 1 000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини становить 0,004. Знайди ймовірність того ,що протягом однієї хвилини обірвуться 5 ниток.

7.18. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна - 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

7.19. Унаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції - 0,8. Знайти ймовірність реалізації не менше ніж 75% із чотирьох навмання вибраних одиниць продукції.

7.20. У місцевій лікарні 55% усіх новонароджених - хлопчики. Одного дня народилося п'ять малюків. Яка найімовірніша серед них кількість хлопчиків?

7.21. Якими повинні бути числа *p1* і *p5*, щоб таблиця

$X=x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	*p*	*0,*	*0,*	*0,*	*p*

$=p_i$	$_1$	1	3	2	$_5$

відображала закон розподілу випадкової величини X, якщо p_1-p_5=0,2?

7.22. У сейфі лежать 100 банкнот, з яких 20 - по 100 грн., 30 - по 5 грн., і 50 - по 20 грн. Із сейфа навмання виймають одну банкноту. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – вартості вийнятої банкноти у формі таблиці:

$X=$ x_i	1 00	5 0	2 0
$P=$ p_i	p_1	p $_2$	p $_3$

7.23. Метеослужба міста, для прогнозування кількості снігових буранів протягом поточного року, переглянула статистичні відомості за останні 50 років і результати розподілу цих буранів подала у такій таблиці:

Кількість буранів	0	1	2	3	4	5
Частота к-сть років	2	4	8	12	14	10

Написати закон розподілу статистичних ймовірностей випадкової величини *X* - кількості можливих снігових буранів у поточному році і знайти ймовірність того, що поточного року їх буде не менше ніж три (подія *A)*.

7.24. Статистика свідчить, що 20% сімей мають кабельне телебачення. Навмання вибирають три сім'ї. Напишіть біномний закон розподілу випадкової величини *X* - числа сімей, які мають кабельне телебачення, із трьох навмання вибраних, і обчисліть імовірність події *A* - не більше ніж одна сім'я із трьох навмання вибраних має кабельне телебачення.

7.25 Фірма відвантажила споживачеві 5000 якісних виробів. Імовірність того, що під час транспортування один виріб буде пошкоджений, становить 0,0002.

Випадкова величина X - число пошкоджених виробів - розподілена за біномним законом із параметрами n=5000, p =0,0002. Обчислити перші три ймовірності цього розподілу $p_{5000}(0)$, $p_{5000}(1)$, використовуючи асимптотичну формулу Пуассона. Указати на імовірнісний зміст числа $\frac{2}{e}$.

7.26. Незалежні випадкові величини X і Y задані такими законами розподілу:

$X=x_3$	-2	2
$P=p_3$	…	0,7

$Y=y_3$	1	2	3
$Q=q_3$	0,4	…	0,5

Заповніть порожні клітинки й обчисліть $M(X \bullet Y)$.

7.27. Незалежні випадкові величини X і Y задані такими законами розподілу:

$X=x_3$	-3	5	6
$P=p_3$	0,6	...	0,2

$Y=y_3$	1	2
$Q=q_3$	0,7	…

Заповніть порожні клітинки й обчисліть D=.

7.28. У пологовій лікарні протягом одного дня народилося п’ятеро дітей. Яке середнє число серед них хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика (подія A) дорівнює 0,52?

7.29. Випадкова величина Х може набувати двох можливих значень x_1, x_2 з ймовірностями p_1, p_2, відповідно. Знайти x_1 і x_2, якщо p_3=0,7 , M(X)=2,4 , $\sigma(\widetilde{0}) = \sqrt{0,21}$ і $x_1 < x_2$.

7.30. Дисперсія кожного із 36 незалежних вимірювань деякої величини дорівнює 12 см. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного результатів цих вимірювань.

<u>Відповіді:</u>

7.1. а) сумісні і залежні;

б) 0,6.

7.2.. а) 0,24;

б)студент знає відповіді на питання ІІ і ІІІ розділів і не знає відповіді на жодне з трьох питань;

в) 0,04.

7.3.. а) 0,0256; б) 0,216.

7.4. а) 0,955; б) 0,045.

7.5. а) $\frac{1}{17}$; б) 0,0000035.

7.6. 0,67232.

7.7. а) 0,385; б) 0,26.

7.8. 0,85.

7.9. 0,57.

7.10. 0,5192.

7.11. так.

7.12. а) ні; б) ні.

7.13. 0,31.

7.14. 0,0041.

7.15. 0,5.

7.16. 0,7698.

7.17. 0,1563.

7.18. 8.

7.19. 0,8192.

7.20. 2.

7.21. $p_1 = 0,2$; $p_5 = 0,2$.

7.22. $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,5$.

7.23. Р(А)=0,28.

7.24. 0,896, не більше ніж один вибір буде пошкоджено.

7.25. $M(X \cdot Y) = 1,68$.

7.26. 0,9076.

7.27. 2,6.

7.28. x_1=2,1; x_2=3,1.

7.29. $\frac{1}{3}$.

Індивідуальні завдання
на тему: «Елементи теорії ймовірностей»

Завдання 1.

1. Оператор обслуговує три верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом однієї години не потребуватиме уваги оператора перший верстат дорівнює p_1, другий – p_2, третій – p_3. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години:
   a) рівно один верстат вимагатиме уваги оператора;
   b) рівно два верстати вимагатимуть уваги оператора;
   c) хоча б один верстат вимагатиме уваги оператора.
2. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом k попередніх років перший банк погодився надати кредит k_1 разів; другий банк k_2 разів, третій банк k_3 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесменові кредит?
3. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з 4 кас. Відповідні ймовірності дорівнюють p_1, p_2, p_3, p_4. Ймовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно b_1, b_2, b_3, b_4. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у касі № ?
4. При перевірці насіння встановили, що ймовірність проростання кожної насінини дорівнює p_1. Яка ймовірність того, що :
   a) з N посіяних зернин зійде k насінин;
   b) знайти ймовірність того, що кількість насінин, що зійдуть буде лежати в межах від k_1 до k_2.

5. В партії з N деталей k – стандартні. Навмання вибрали k_1 деталь. Знайти :

a) ряд розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних;

b) функцію розподілу F(x), побудувати графік;

c) побудувати многокутник розподілу випадкових величин X.

№ завдання \ варіант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	P_1	0,2	0,3	0,5	0,2	0,3	0,5	0,6	0,4	0,4	0,3	0,7	0,6	0,5	0,6	0,4	0,2	0,8	0,6	0,5	0,4	0,4	0,7	0,3	0,9	0,2	0,4	0,4	0,6	0,1	0,6
	P_2	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,1	0,3	0,7	0,4	0,4	0,3	0,2	0,4	0,8	0,1	0,8	0,9	0,8	0,4	0,3	0,4
	P_3	0,6	0,6	0,7	0,8	0,7	0,4	0,3	0,6	0,9	0,8	0,5	0,7	0,2	0,3	0,8	0,1	0,4	0,3	0,2	0,2	0,9	0,1	0,2	0,6	0,5	0,8	0,1	0,9	0,5	0,2
2	K_1	5	6	7	8	9	10	9	8	7	5	4	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	1	10	9	2	2	1	8	7	1
	K_2	2	5	2	3	7	6	2	3	4	4	3	4	5	3	7	8	9	4	3	6	3	9	6	2	9	4	3	5	2	9
	K_3	4	4	5	5	5	7	6	7	2	3	2	5	4	2	5	3	8	3	2	5	5	5	4	5	5	6	5	3	9	3
	K	3	3	6	6	4	3	4	5	6	4	1	3	4	6	6	7	4	5	4	3	6	2	1	8	1	8	7	7	4	6
3	P_1	0,3	0,2	0,3	0,2	0,4	0,6	0,5	0,4	0,3	0,1	0,7	0,6	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3	0,3	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,7	0,6	0,2	0,5
	P_2	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,3	0,2
	P_3	0,1	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,5	0,4	0,4	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2
	P_4	0,4	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,6	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,4	0,1	0,1	0,4	0,1
	b_1	0,5	0,1	0,8	0,7	0,5	0,4	0,4	0,3	0,2	0,3	0,8	0,5	0,4	0,8	0,9	0,5	0,8	0,5	0,6	0,9	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,4	0,2	0,8	0,5	0,9
	b_2	0,6	0,3	0,5	0,8	0,9	0,2	0,8	0,6	0,7	0,8	0,3	0,1	0,5	0,5	0,6	0,4	0,3	0,9	0,8	0,3	0,4	0,6	0,1	0,3	0,4	0,8	0,9	0,1	0,3	0,4
	b_3	0,4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,7	0,1	0,9	0,3	0,5	0,7	0,4	0,7	0,3	0,8	0,8	0,1	0,1	0,5	0,8	0,5	0,9	0,4	0,1	0,5	0,6	0,1	0,5	0,8	0,5
	b_4	0,2	0,5	0,9	0,3	0,1	0,9	0,5	0,8	0,5	0,4	0,6	0,9	0,1	0,7	0,1	0,2	0,6	0,7	0,3	0,2	0,8	0,7	0,5	0,5	0,1	0,1	0,5	0,7	0,2	0,1
	N	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	1	4	3	2	3	4	2	1	3	2	4	3	2	1	1	4
4	N	10	20	30	40	20	50	10	5	10	30	15	25	40	50	10	20	35	10	5	20	10	50	30	20	40	15	20	25	30	35
	P_1	0,2	0,01	0,3	0,8	0,9	0,02	0,2	0,3	0,01	0,03	0,3	0,9	0,5	0,3	0,2	0,4	0,6	0,3	0,1	0,5	0,1	0,4	0,2	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,2
	K	5	7	8	20	10	30	8	3	8	25	10	15	25	35	7	15	30	8	4	10	6	40	20	15	30	9	10	20	25	20
	K_1	2	2	5	10	2	20	3	1	2	4	5	10	10	25	2	8	16	3	2	4	2	25	6	3	25	4	3	14	12	8
	K_2	8	18	28	30	18	40	10	5	8	30	12	20	35	45	10	20	30	10	5	20	10	50	30	18	30	10	17	20	30	29
5	N	20	10	15	30	35	40	100	200	300	20	30	40	25	19	36	26	78	36	15	45	237	453	65	20	40	60	30	50	70	30
	K	10	8	5	6	7	8	10	15	40	4	9	3	7	5	9	5	7	4	5	3	20	50	6	9	10	15	7	15	9	3
	K_1	4	5	3	4	5	4	4	5	4	2	5	3	4	3	5	2	4	2	4	2	7	9	3	4	5	6	4	6	3	2

Завдання 2

Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$, ймовірність того, що X прийме значення в інтервалі (α,β). Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

01. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x^2-1}{8}, & 1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ α=2, β=3

02. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ α=2, β=3

03. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{x+3}{6}, & -3 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ α=-1, β=2

04. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ α=0, β=0,5

05. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ α=1, β=2

06. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ α=1, β=2

07. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{x^2-4}{12}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ α=3, β=4

08. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ α=$\frac{\pi}{6}$, β=$\frac{\pi}{2}$

09. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2+x}{12}, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ α=0, β=2

10. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \frac{x^2-9}{12}, & 3 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$ α=4, β=5

$$\textbf{11.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=1, β=2

$$\textbf{12.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x+2}{5}, & -2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$ α=-1, β=2

$$\textbf{13.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^3}{8}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=1, β=2

$$\textbf{14.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=1, β=1,5

$$\textbf{15.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2+2x}{8}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=0, β=1

$$\textbf{16.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x-1}{2}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$ α=2, β=3

$$\textbf{17.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=1, β=1,5

$$\textbf{18.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2+x}{6}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=1, β=2

$$\textbf{19.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x+2}{4}, & -2<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=0, β=1

$$\textbf{20.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{(x-1)^2}{4}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$ α=2, β=3

$$\textbf{21.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{3x+6}{15}, & -2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$ α=-1, β=2

$$\textbf{22.}F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{2x+2}{6}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ α=0, β=2

23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2+3x}{10}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ α=0, β=1

24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ (x-3)^2, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ α=3, β=3,5

25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x^3-1}{26}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$ α=2, β=3

26. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$ α=2,5, β=3

27. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^3+x}{10}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ α=1, β=2

28. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{x+1}{4}, & -1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$ α=0, β=2

29. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ α=1, β=1,5

30. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^4, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ α=0,5, β=1

Завдання 3.

Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)*. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*. Знайти функцію розподілу *F(x)*.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x}{4}, & 1<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 2(x-2), & 2<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{2x+3}{10}, & 0<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x-1}{2}, & 1<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$

$$5. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{2x+1}{6}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases} \qquad 6. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \frac{2x}{3}, & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

$$7. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{x+1}{4}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases} \qquad 8. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

$$9. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2x, & 0<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases} \qquad 10. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ 2(x-3), & 3<x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$$

$$11. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{3x^2}{8}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases} \qquad 12. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ \frac{x}{8}, & 3<x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$$

$$13. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{2x+1}{12}, & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases} \qquad 14. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ \frac{x}{6}, & 2<x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$$

$$15. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases} \qquad 16. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$$

$$17. f(x)-\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 3x^2, & 0<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases} \qquad 18. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \frac{2x-1}{2}, & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

$$19. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ \frac{1}{4}, & -1<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases} \qquad 20. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ \frac{1}{2}, & 2<x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$$

$$21. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2 \\ \frac{1}{5}, & -2<x\le 32 \\ 0, & x>3 \end{cases} \qquad 22. f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \qquad 24. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 2(x-1), & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \qquad 26. f(x) - \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 3x^2, & -1 < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \qquad 28. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{3x^2}{26}, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$29.\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{8}, & 1 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases} \qquad 30. f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3x^2+1}{10}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Завдання 4

Відомо математичне сподівання *a* і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої величини *X*. Знайти ймовірність того, що *X* прийме значення з інтервалу *(α,β)*.

01.a=9, σ=5, α=5, β=14.

02.a=8, σ=4, α=2, β=13.

03.a=7, σ=2, α=3, β=10.

04.a=6, σ=3, α=2, β=11.

05.a=5, σ=1, α=1, β=12.

06.a=4, σ=5, α=2, β=11.

07.a=3, σ=2, α=3, β=10.

08.a=2, σ=5, α=4, β=9.

09.a=2, σ=4, α=6, β=10.

10.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=6$.

11.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

12.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

13.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=3$, $\beta=6$.

14.$a=3$, $\sigma=3$, $\alpha=3$, $\beta=7$.

15.$a=3$, $\sigma=3$, $\alpha=3$, $\beta=8$.

16.$a=4$, $\sigma=4$, $\alpha=4$, $\beta=7$.

17.$a=4$, $\sigma=4$, $\alpha=5$, $\beta=7$.

18.$a=4$, $\sigma=4$, $\alpha=5$, $\beta=8$.

19.$a=3$, $\sigma=3$, $\alpha=5$, $\beta=8$.

20.$a=3$, $\sigma=3$, $\alpha=5$, $\beta=9$.

21.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=2$, $\beta=6$.

22.$a=3$, $\sigma=4$, $\alpha=0$, $\beta=6$.

23.$a=5$, $\sigma=3$, $\alpha=5$, $\beta=10$.

24.$a=3$, $\sigma=2$, $\alpha=5$, $\beta=9$.

25.$a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=0$, $\beta=5$.

26.$a=2$, $\sigma=3$, $\alpha=2$, $\beta=4$.

27.$a=3$, $\sigma=3$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

28.$a=1$, $\sigma=3$, $\alpha=1$, $\beta=6$.

29.$a=1$, $\sigma=3$, $\alpha=3$, $\beta=7$.

30.$a=10$, $\sigma=4$, $\alpha=2$, $\beta=13$.

Питання для самоконтролю

1. Які події називаються вірогідною, неможливою, випадковою?
2. Сформулювати теорему суми двох подій *A* і *B*:

   а) для сумісних подій;

   б) несумісних подій.
3. Добутком двох подій *A* і *B* називається подія *C*, яка полягає в тому, що ...
4. Дати означення попарно несумісних подій.
5. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу, якщо ...
6. Згідно з класичним означенням імовірністю $P(A)$ події *A* називається ...
7. Дати геометричне означення імовірності $P(A)$ події *A*.
8. Статистична ймовірність $P(A)$ події *A* – це ...
9. Події *A* і *B* називаються незалежними, якщо ..
10. Якщо події *A* і *B* незалежні, то $P(A \cap \overline{B}) = \dots$; $P(\overline{A} \cap B) = \dots$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dots$.
11. Якщо випадкові події *A* і *B* сумісні і незалежні, то ймовірність їх суми $A \cup B$ обчислюється за формулою ...
12. Сформулювати і записати формулу повної ймовірності.
13. Формули Байеса мають вигляд ...
14. Якщо події *A* і *B* залежні, то ймовірність добутку $A \cap B$ обчислюється за формулою ...
15. Якщо події *A* і *B* незалежні, то ймовірність добутку $A \cap B$ обчислюється за формулою ...
16. Записати формулу Бернуллі (появи події *A* *m* разів у *n* випробуваннях).
17. Сформулювати і записати теорему Пуассона.
18. Локальна теорема Муавра-Лапласа має вигляд ...
19. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа має вигляд ...
20. Найімовірніше число *m* появи події *A* в серії з *n* випробувань за схемою Бернуллі задовольняє нерівність ..
21. Випадкова величина *X* називається дискретною, якщо ...
22. Випадкова величина *X* називається неперервною, якщо ...
23. Закон розподілу дискретної випадкової величини – це ...

24. Який закон розподілу дискретної випадкової величини називається біномним?
25. Який закон розподілу дискретної випадкової величини називається розподілом Пуассона?
26. Запишіть формулу математичного сподівання для дискретної випадкової величини $M(x)=$...
27. Дисперсією $D(x)$ дискретної випадкової величини X називається ... і вона обчислюється за формулами: ...
28. Сформулювати властивості математичного сподівання дискретної випадкової величини.
29. Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини X називається ...
30. Запишіть формулу функції розподілу ймовірностей випадкової величини X.
31. Густина (щільність) розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X –це ...
32. Математичне сподівання $M(x)$ неперервної випадкової величини X обчислюється за формулою ...
33. Дисперсія $D(x)$ неперервної випадкової величини X обчислюється за формулами ...

РОЗДІЛ VIII.
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 8
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Студент повинен знати :

- методи систематизації, опрацювання та аналізу емпіричних числових даних;
- закономірності масових явищ та їх взаємозв'язків;
- означення основаних понять математичної статистики.

Студент повинен уміти :

- будувати емпіричний ряд розподілу випадкової величини та обчислювати її характеристики;
- застосувати вибіркову сукупність значень випадкової величини для вивчення її властивостей та аналізу економічних ситуацій;
- моделювати та досліджувати економічні задачі за допомогою статистичних методів.

Довідковий матеріал :

Математична статистика – розділ математики, присвячений розробленню методів систематизації, опрацювання та аналізу емпіричних числових даних, вивченню закономірностей масових явищ та їх взаємозв'язків.

Основне завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на основі результатів обмеженого числа спостережень за масовим явищем виявити закономірності його поведінки, які дають можливість подальшого прогнозування.

В сучасних соціально-економічних системах неможна проводити експерименти, тому отримані дані мають пасивні спостереження за процесами, що відбуваються, наприклад: курс валют на біржі протягом місяця, врожайність пшениці в господарстві за 30 років і т.д. Результати спостережень, в загальному випадку, - це ряд чисел, які до вивчення необхідно упорядковувати (проранжувати).

Операція, зміст якої полягає в розміщенні ознаки за не спаданням, називається *ранжирування* дослідних даних.

Після ранжирування дослідні данні можна згрупувати так, щоб у кожній групі ознака приймала одне й теж значення, яке має назву *варіантом* ***(x_i)***, число елементів у кожній групі називається *частотою* варіанти ***(n_i)***.

Вибірка - відібрана для спостереження частина генеральної сукупності об'єктів.

Генеральна сукупність - це множина однорідних об'єктів, які підлягають статистичному аналізу.

Розмахом вибірки називається число

$W = x_{max} - x_{min}$, де x_{max} - найбільша варіанта; x_{min} - найменша варіанта.

Сума усіх частот рівна визначеному числу її, яке називається *об'ємом сукупності:* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_k = n (1)$

Відносна частота даної варіанти до об'єму сукупності називається *відносною частотою* ***(wi)*** або *частотою* цієї варіанти:

$$w_i = \frac{n_i}{n} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad (3)$$

Послідовність варіант, розміщених у зростаючій послідовності, називається *варіаційним рядом.*

Варіаційні ряди бувають дискретні і неперервні.

Дискретним варіаційним рядом називається ранжована послідовність варіант з відповідними частотами.

Якщо число значень признака велике або признак є неперервним, тобто може приймати будь-яке значення в проміжку деякого інтервалу, в цьому випадку вводять *інтервальний варіаційний ряд (неперервний варіаційний ряд).*

Графічне зображення варіаційних рядів.

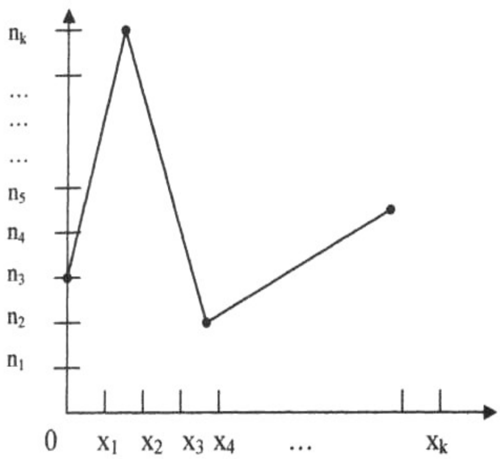
Варіаційні ряди зображуються за допомогою полігона і гістограми.

Полігон частот – це ламана, відрізки якої поєднують точки: (x_i і n_i).

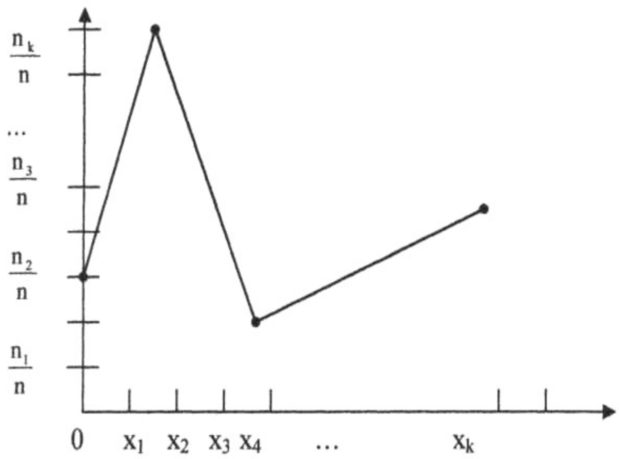
Полігон відносних частот — це ламана, відрізки якої поєднуються точками

$$\left(x_1 i\frac{n_i}{n}\right),\left(x_2 i\frac{n_2}{n}\right),....,\left(x_r i\frac{n_i}{n}\right)$$

Полігон частот

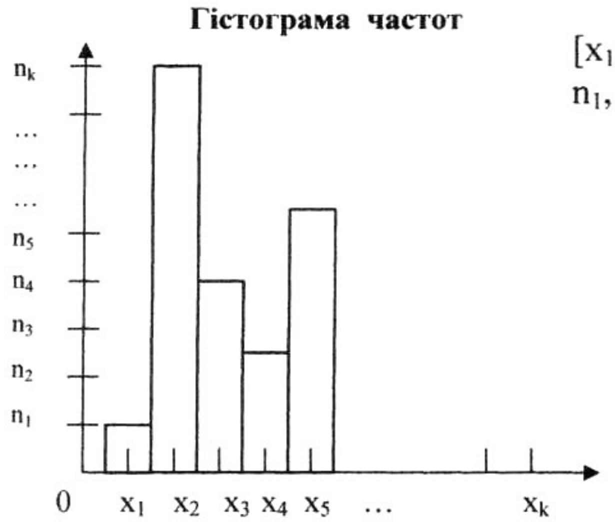


Полігон відносних частот



Гістограма частот – фігура, яка складається із прямокутників з основою **n** і висотою $\mathbf{n_i}$.

Гістограма відносної частоти — це фігура, яка складається із прямокутників з основою $\mathbf{h_i}$ і висотою $\frac{n_i}{n}$.



$[x_1, x_2],[x_2, x_3]\dots[x_{k-1},x_k]$ – інтервали
$n_1, n_2,\dots, n_k$ – частоти

Якщо даний графік стиснути у $\frac{n_i}{n}$ раз то отримаємо гістограму відносних частот.

Числові характеристики варіаційних рядів.

Варіаційні ряди дозволяють отримати перші представлення про вивчення розподілу. Далі необхідно дослідити числові характеристики розподілу (аналогічні характеристики розподілу теорії ймовірностей): характеристика положення (середнє арифметичне, мода, медіана), характеристики розсіювання (дисперсія, середнє квадратичне, коефіцієнт варіації), характеристика міри зкошення (коефіцієнт асиметрії) і гостровершинність (ексцес) розподілу.

Означення. *Вибірковим середнім* $\bar{x}$ дискретного варіаційного ряду називається відношення суми добутків варіантів на відповідні частоти до об'єму сукупності.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum x_i n_i}{n} \quad (4)$$

Означення. *Модою (M_o (x))* дискретного варіаційного ряду називається варіант, який має найбільшу частоту.

Означення. *Медіаною* ***(M_e (x))*** дискретного варіаційного ряду називається варіант, який ділить ряд на дві рівні частини.

Якщо дискретний варіаційний ряд має **2n** членів: x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...,x_{2n},.....

$$Me(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad (5)$$

Якщо дискретний варіаційний ряд має **2n+1** членів: x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...,x_{2n}, x_{2n+1} ,.....

$$Me(x) = x_{n+1}.$$

Для інтервальних варіаційних рядів маємо такі формули:

Медіана:

$$Me(x) = x_{Me} + h \cdot \frac{o{,}5n - S_{Me-1}}{n_{Me}} \quad (6),$$

де : x_{Me} — початок медіанного інтервалу;

h - довжина часткового інтервалу;

n - об'єм сукупності;

S_{Me-1} - накопичена частота інтервалу, яка передує медіанному;

N_{Me} - частота медіанного інтервалу.

Мода:

$$Mo(x) = x_{Mo} + h \cdot \frac{(n_{Mo} - n_{Mo-1})}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})} \quad (7),\ \text{де}$$

x_{Mo} - початок модального інтервалу;

h - довжина часткового інтервалу;

n_{Mo}- частота модального інтервалу;

n_{Mo-1} - частота предмодального інтервалу;

n_{Mo+1} - частота післямодального інтервалу.

Вибіркова дисперсія $\overline{D}(x)$ статистичного розподілу вибірки обчислюється за формулою: $\overline{D}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i$,

для обчислення вибіркової дисперсії, часто використовують іншу формулу :

$$\overline{D}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} n_i - \left(\overline{x}\right)^2 \ .$$

<u>Вибіркове середнє квадратичне відхилення</u> визначається рівністю:

$$\overline{\sigma}\,(\mathrm{x}) = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i} \qquad (\ 8\ );$$

<u>Вибірковий початковий емпіричний момент</u> S-го порядку розраховується за формулою: $\overline{\nu_s} = \overline{x^s} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^s n_i$ (9) якщо $s = 1$ то $\overline{\nu} = \overline{x}$ - вибірковому середньому.

<u>Вибірковий центральний емпіричний момент</u> S-го порядку розраховується за формулою: $\overline{\mu_s} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^s n_i$ (10), якщо $s = 0$ $\overline{\mu_0} = 1$; $s = 1$ $\overline{\mu_1} = 0$; $s = 2$ $\overline{\mu_2} = \overline{D}(x)$.

<u>Коефіцієнт варіації</u> визначається формулою : $V = \dfrac{\overline{\sigma}}{\overline{x}} \cdot 100\%$. (11)

<u>Коефіцієнт асиметрії</u> визначається формулою : $A = \dfrac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^3 n_i}{n\sigma^3}$. (12)

<u>Ексцес</u> або коефіцієнт крутості визначається рівністю:

$$E_k = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^4 n_i}{n\sigma^4} - 3. \quad (13)$$

<u>Приклади розв'язання задач:</u>

Приклад 8.1. В результаті тестування групи із 24 чоловік набрані бали: 4, 0, 3, 4, 1, 0, 3, 1, 0, 4, 0, 0, 3, 1, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 1, 2. Побудувати дискретний варіаційний ряд.

Розв'язання.

Пропонуємо вихідний ряд, пропонуємо частоту варіантів і отримаємо дискретний варіаційний ряд. Результати зазначимо у таблиці.

Бал, x_i	Число студентів, n_i	Відносна частота, w_i ,
0	6	6/24
1	7	7/24
2	3	3/24
3	5	5/24
4	3	3/24
$\sum$	24	1

Для знаходження w_I застосуємо формулу (2):

$W_i = \frac{n_i}{n}$; $W_i = \frac{6}{24}$, і так відповідно до кожного x_i.

Побудуємо полігон частот і полігон відносних частот для отриманих результатів.

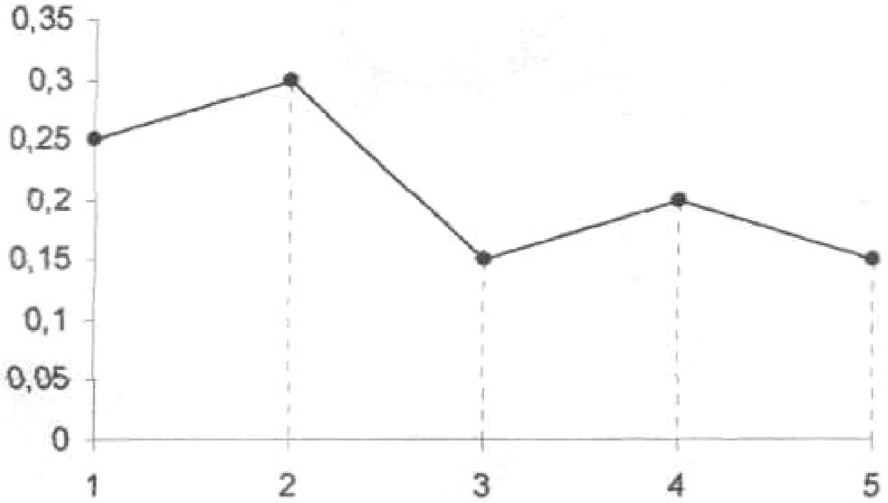


Рис. 8.1.1. Полігон відносних частот

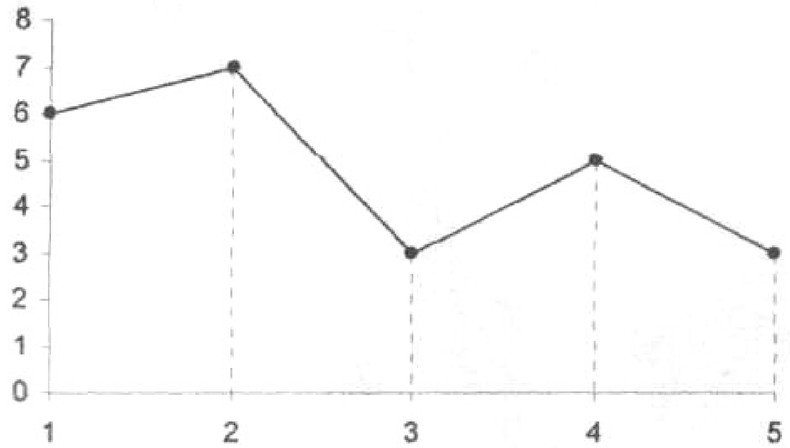


Рис.8.1.2. Полігон частот

Визначимо середнє арифметичне $\bar{x}$ за формулою (4):

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 6 + 1\cdot 7 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3}{24} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

Мода цього ряду, за означенням, буде рівна $M_0(x) = 1$, а медіана $M_e(x)=1$.

За формулою (7) визначимо дисперсію.

$$\bar{D}(x) = \frac{162{,}9141}{24} = 6{,}7881$$

А за формулою (8) встановимо середнє квадратичне відхилення.

$$\bar{\sigma}(x) = \sqrt{6{,}7881} = 2{,}6053$$

Коефіцієнт варіації за формулою (11):

$$V = \frac{2.6053}{1.67}\cdot 100 = 156.01\%$$

Приклад 8.2. Нехай дано ряд розподілу господарств по кількості працівників на 100 га с/г угідь (n=60).

Побудувати інтервальний варіаційний ряд.

12	6	8	6	10	11	7	10	12	8	7	7	6	7	8
9	10	11	9	10	7	8	8	8	11	9	8	7	5	9
9	8	7	4	7	5	5	10	7	7	5	8	10	10	15
11	15	6	6	7	10	11	7	10	9	14	13	11	11	12

Розв'язання :

Для визначення числа груп підставимо значення n=60 у формулу Стерджесса: $k=1+3.322 \lg n$, $k \in [6;12]$

$$k=1+3{,}322 \lg 60 \approx 6{,}907, k=7.$$

Знайдемо довжину часткового інтервалу:

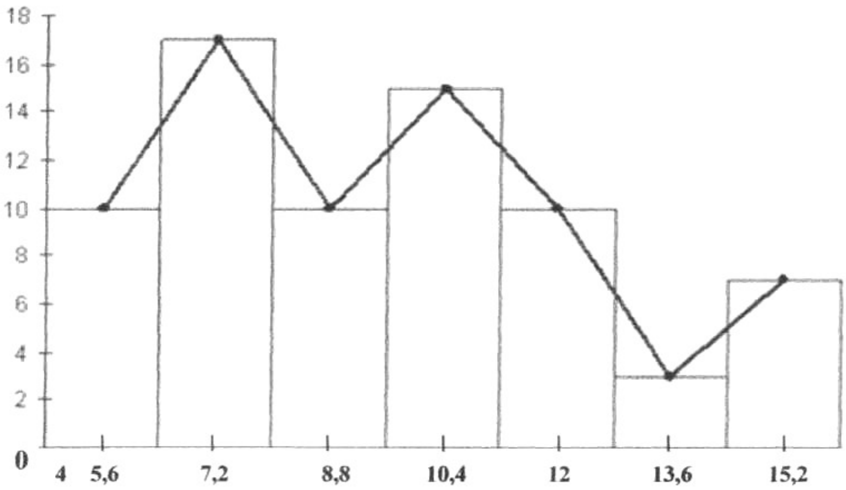
$$h=\frac{w}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

$$h=\frac{15-4}{k7} \approx 1{,}6$$

Побудуємо інтервальний (неперервний) варіаційний ряд, для цього візьмемо початкове значення $x_{\min}=4$. Розіб'ємо інтервал варіації з кроком h=1,6 і відрахуємо кількість робітників на 100 ґа с/г угідь в кожному інтервалі.

Групи господарств по кількості робітників на 100 га с/г угідь.	Число господарств в групі (ni)	Накопичене число господарств (Si)	Відносна частота (wi)
4 – 5.6	5	5	6/60
5.61 – 7.2	17	22	17/60
7.21 – 8.8	9	31	8/60
8.81 –10.4	15	46	16/60
10.41 - 12.0	10	56	10/60
12.01 – 13.6	1	57	1/60
13.61 – 15.2	3	60	3/60
Всього:	60		

Зауваження: якщо кількість значень в одному інтервалі менше 3-5, то зазвичай об'єднують сусідні інтервали, переходячи до ряду з неперервними інтервалами, або зменшують число інтервалів.
Скориставшись означенням гістограми побудуємо гістограму частот, а також полігон частот.



Графік гістограми відносних частот отримується із графіка гістограми частот шляхом стиснення у 60 разів впродовж осі ординат. За формулами (6) і (7) визначимо моду і медіану відповідно:

$$\text{Me} = 7{,}2 + 1{,}6\frac{0.5\cdot 60 - 22}{9} = 8{,}62$$

$$\text{Mo} = 5{,}6 + 1{,}6\cdot\frac{(17-5)}{(17-5)+(17-9)} = 6{,}56$$

Підрахуємо середнє арифметичне, дисперсію, коефіцієнт асиметрії й ексцес за допомогою побудови допоміжної таблиці:

Групи підриємств по кіл.% на 100 га	Серед значен. інтер., (xi)	Кіл-сть госп.в групі, (ni)	xini	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i$	$\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^3 n_i$	$\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^4 n_i$
4 - 5.6	4.8	5	24	-3.813	72.708	-4.559	-18.956	29.554
5.61 – 7.2	6.4	17	108.8	-2.213	83.280	-0.905	-12.601	11.404
7.21 – 8.8	8	9	72	-0.613	3.386	-0.251	-0.142	0.036
8.81– 10.4	9.6	15	144	-0.987	14.603	0.403	0.985	0.397
10.41-12.0	11.2	10	112	2.587	66.908	1.058	11.832	12.514
12.01-13.6	12.8	1	12.8	4.187	17.528	1.712	5.017	8.588
13.6115.2	14.4	3	43.2	5.787	100.457	2.366	39.740	94.030
Всього:	-	60	516.8	-	358.869	-	25.876	156.523

Середнє значення складає:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{516.8}{60} = 8.163$$

Дисперсія, середнє квадратичне значення:

$$\overline{D}(x) = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{n} = \frac{358.869}{60} = 5.981$$

$$\overline{\sigma}\,(\text{x}) = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{n}} = \sqrt{5.981} = 2.446$$

Коефіцієнт варіації:

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}}\cdot 100\% = \frac{2.446}{8.613}\cdot 100\% = 28.4\%$$

Таким чином середня щільність робітників на 100га с/г угідь по досліджуваній сукупності господарств складає 8.61 чол. Щільність працівників в середньому коливається в проміжку $\overline{x} \pm \sigma = 8.61 \pm 2.45$, тобто від

6.16 до 11.06 чол. на 100га с/г угідь. Цей інтервал, а також коефіцієнт варіації показує, що існує велика різниця в забезпеченні господарств робочою силою.

Коефіцієнт асиметрії:

$$A = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^3 n_i}{n\sigma^3} = \frac{25.876}{60} = 0.43$$

Ексцес :

$$E_k = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^4 n_i}{n\sigma^4} - 3 = \frac{156.523}{60} - 3 = -0.39$$

Знайдене значення коефіцієнта асиметрії показує, що розподіл не є симетричним. Ексцес також відмінний від нуля, що вказує на те, що можливо розподіл відмінний від нормального.

Приклад 8.3.

Для вивчення прибутків генеральної сукупності підприємств регіону(у % до обсягів виробництва) утворено вибірку, яка характеризується такими даними: 8, 7, 6, 9, 10, 9, 11, 8, 9, 10, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 10, 12, 7. Виконати такі вправи:

1) записати дискретний статистичний розподіл вибірки, побудувати полігони частот та емпіричну функцію розподілу;
2) обчислити числові характеристики вибірки: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, середнє квадратичне відхилення, розмах і коефіцієнт варіації – і зробити висновки про генеральні сукупність;
3) записати інтервальну таблицю частот і відносних частот, поділивши проміжок на 4 рівні частини, і побудувати гістограму та емпіричну функцію розподілу;
4) на підставі інтервальної таблиці розподілу частот обчистили вибіркові емпіричні початкові і центральні моменті 1-го, 2, 3 і 4 порядків, а також асиметрію та ексцес.

Розв'язання. У цьому прикладі величина X – відсоткове відношення прибутку до обсягу виробництва одного підприємства.

Обсяг вибірки

1) Записуємо варіаційний ряд варіант, визначаємо частоти та відносні частоти варіант і результати заносимо в таблицю:

x_i	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	3	4	5	4	1	1
W є n_i/n	2/20	3/20	4/20	5/20	4/20	1/20	1/20

Будуємо полігон частот, як ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_{i,}\ n_i)$, і полігон відносних частот – ламану, відрізки якої з'єднують точки$(x_{i,}\ n_i/n)$ на координатній площині

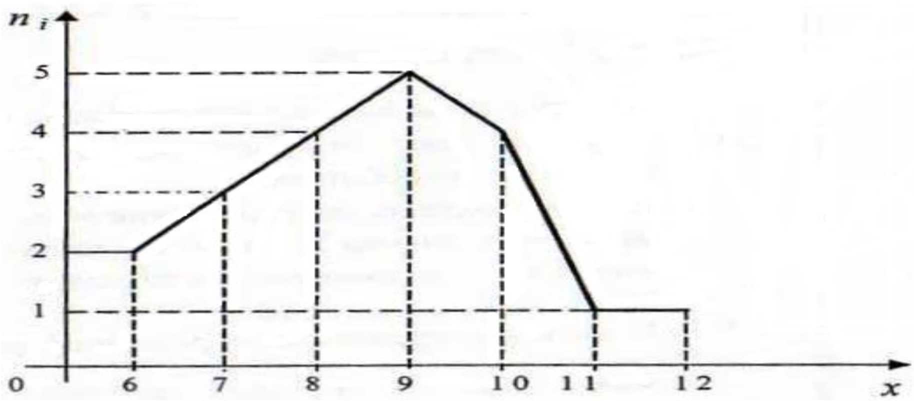


Рис. 8.3.1. Полігон частот

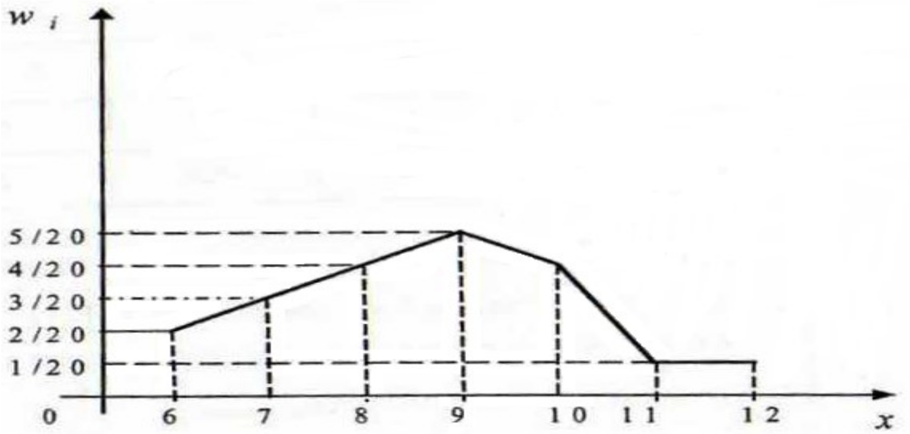


Рис. 8.3.2. Полігон відносних частот

Емпірична функція розподілу має такий вигляд:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 6 \\ 2/20, & 6<x\le 7 \\ 5/20, & 7<x\le 8 \\ 9/20, & 8<x\le 9 \\ 14/20, & 9<x\le 10 \\ 18/20, & 10<x\le 11 \\ 19/20, & 11<x\le 12 \\ 1, & x>12 \end{cases}$$

Далі отримуємо графічне зображення емпіричної функції розподілу

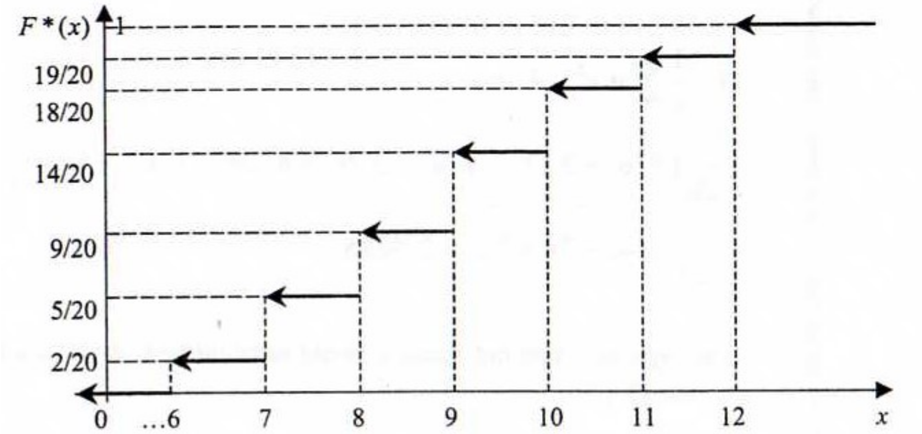


Рис.8.3.3. Зображення емпіричної функції розподілу

2) Обчислюємо числові характеристики вибірки:

а) вибіркове середнє

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i=\frac{1}{20}(2\cdot 6+3\cdot 7+4\cdot 8+5\cdot 9+4\cdot 10+1\cdot 11+1\cdot 12)=\frac{1}{20}\cdot 173=8{,}65\,;$$

б) вибіркову дисперсію обчислюємо за формулою:

$$\overline{D}(x)=\frac{1}{n}\sum n_i(x_i-\overline{x}\;)^2=\frac{1}{20}\left[2(-2{,}65)^2+3(-1/65)^2+4(-0{,}65)^2+5\cdot 0{,}35^2+4\cdot 1{,}35^2+1\cdot 2{,}35^2+1\cdot 3{,}35^2\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot 48{,}55=2{,}4275$$

або за формулою::

$$\overline{D}(x)=\frac{1}{n}\sum n_i x_i^2-\overline{(x)}^2=\frac{1}{20}(2\cdot 6^2+3\cdot 7^2+4\cdot 8^2+5\cdot 9^2+4\cdot 10^2+1\cdot 11^2+1\cdot 12^2)-8{,}65^2=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot 1545-74{,}8225=2{,}4275;$$

в) вибіркове середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою:

$$\overline{\sigma}(x)=\sqrt{\overline{D}(x)}=\sqrt{2{,}4275}=1{,}558;$$

г) розмах варіації R (різниця між найбільшим і найменшим значенням варіант) становить: R=12-6=6; коефіцієнт варіації $V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\% = 18\%$.

Із наведених обчислень можна зробити такі висновки:

- середній прибуток одного підприємства становить 8, 65% від обсягу виробництва;
- середнє квадратичне відхилення відсоткового прибутку будь-якого підприємця – 1,56%, тобто типовий відсотковий прибуток підприємців міститься в межах від 7,09% до 10,21%.

3) Будуємо інтервальний варіаційний ряд, поділивши проміжок [6,12] на 4 рівних частини довжиною $\frac{R}{4} = 1{,}5$, і одержуємо інтервальну таблицю частот і відносних частот:

$[z_{i-1}, z_i)$	[6; 7,5)	[7,5; 9)	[9; 10,5)	[10,5; 12]
n_i	5	4	9	2
w_i	5/20	4/20	9/20	2/20

(Останній проміжок є замкненим, бо $z_m = x_{max}$ і варіанта $x_7 = 12$ не попадала б у проміжок [10,5; 12])

Гістограмою є східчаста фігура, яка складається з прямокутників з основами $[z_{i-1}, z_i)$ і висотами $h_1 = \frac{5}{1{,}5} = 3{,}3;\ h_2 = \frac{4}{1{,}5} = 2{,}7;\ h_3 = \frac{9}{1{,}5} = 6;\ h_4 = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}3;$

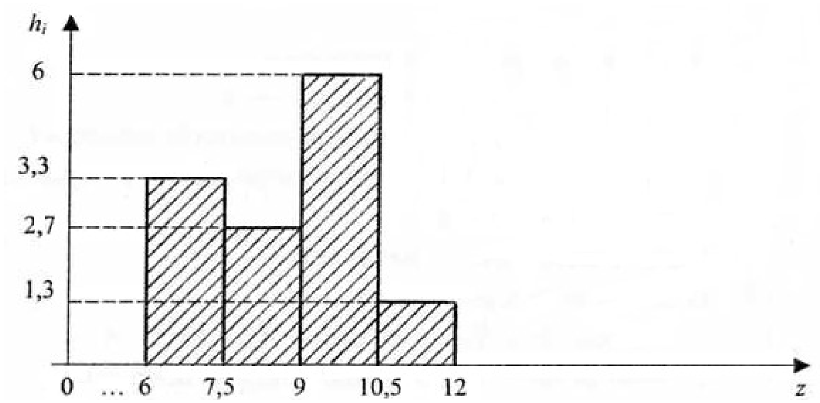


Рис.8.3.4. Гістограма.

Емпірична функція розподілу, визначена на підставі інтервальної таблиці частот записується так:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 6 \\ \frac{5}{20\cdot 1{,}5}(x-6), & 6<x\le 7{,}5 \\ \frac{4}{20\cdot 1{,}5}(x-7{,}5)+\frac{5}{20}, & 7{,}5<x\le 9 \\ \frac{9}{20\cdot 1{,}5}(x-9)+\frac{9}{20}, & 9<x\le 10{,}5 \\ \frac{2}{20\cdot 1{,}5}(x-10{,}5)+\frac{18}{20}, & 10{,}5<x\le 12 \\ 1, & x>12 \end{cases}$$

Далі будуємо графік цієї функції

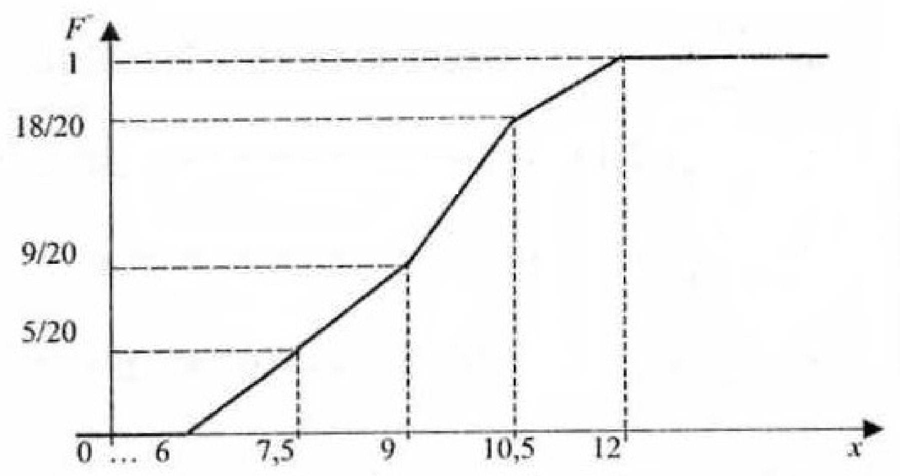


Рис.8.3.5. Графік емпіричної функції розподілу.

4) Початковий емпіричний момент s-го порядку обчислюється за формулою (9). Якщо таблиця розподілу частот дискретна, то x_i є значення варіант, а у випадку інтервальної таблиці частот за x_i вибирають середини відповідних інтервалів. У даному прикладі:

$$\overline{V}_1=\frac{1}{20}(6{,}75\cdot 5+8{,}25\cdot 4+9{,}75\cdot 9+11{,}25\cdot 2)=8{,}85=M(x);$$

$$\overline{V}_2=\frac{1}{20}(6{,}75^2\cdot 5+8{,}25^2\cdot 4+9{,}75^2\cdot 9+11{,}25^2\cdot 2)=80{,}4375;$$

$$\overline{V}_3 = \frac{1}{20}(6{,}75^3 \cdot 5 + 8{,}25^3 \cdot 4 + 9{,}75^3 \cdot 9 + 11{,}25^3 \cdot 2) = 748{,}66;$$

$$\overline{V}_4 = \frac{1}{20}(6{,}75^4 \cdot 5 + 8{,}25^4 \cdot 4 + 9{,}75^4 \cdot 9 + 11{,}25^4 \cdot 2) = 7113{,}89;$$

Центральний емпіричний момент S-го порядку обчислюємо за формулою (10). Для заданого інтервального розподілу маємо:

$$\overline{\mu_1} = \frac{1}{20}\left[(-2{,}1)\cdot 5 + (-0{,}6)\cdot 4 + 0{,}9\cdot 9 + 2{,}4\cdot 2\right] = 0;$$

$$\overline{\mu_2} = \frac{1}{20}\left[(-2{,}1)^2 \cdot 5 + (-0{,}6)^2 \cdot 4 + 0{,}9^2 \cdot 9 + 2{,}4^2 \cdot 2\right] = 2{,}115 = D(x);$$

$$\overline{\mu_3} = \frac{1}{20}\left[(-2{,}1)^3 \cdot 5 + (-0{,}6)^3 \cdot 4 + 0{,}9^3 \cdot 9 + 2{,}4^3 \cdot 2\right] = -0{,}648;$$

$$\overline{\mu_4} = \frac{1}{20}\left[(-2{,}1)^4 \cdot 5 + (-0{,}6)^4 \cdot 4 + 0{,}9^4 \cdot 9 + 2{,}4^4 \cdot 2\right] = 8{,}50;$$

За формулою для обчислення асиметрії(12), одержимо:

$$\overline{\text{A}} = \frac{0{,}648}{\sqrt{2{,}115^3}} = -\frac{0{,}648}{3{,}076} = -0{,}21,$$

а за формулою для обчислення ексцесу (13)маємо:

$$\overline{E} = \frac{8{,}5}{\sqrt{2{,}115^4}} - 3 = \frac{8{,}5}{2{,}115^2} - 3 = -1{,}1.$$

Приклад 8.4.

У деякому комерційному банку встановлені відсоткові ставки за кредити що видаються, в залежності від кількості днів, на які видаються кредити:

Кількість діб	0	4	10	15	21	29	36	51	Max
Відсоткова ставка , %	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	max

0 означає що кредит відається «на ніч»; max – максимальна тривалість відстрочки виплати кредиту – 68 діб (при цьому %-на ставка складає 125,1%). Вважаючи, що відсоткова ставка лінійно залежить від кількості діб,знайти рівняння лінійної регресії та обчислити вибірковий коефіцієнт за вибіркою, побудувати лінію кореляції.

Порядок виконання роботи

1) У відповідності до свого варіанту заповнюється таблиця статистичних даних.
2) Вибирається відповідна аналітична форма моделі, будується діаграма розсіювання(кореляційне поле), записується рівняння регресії.
3) Для знаходження невідомих параметрів регресії використовується метод найменших квадратів(МНК).
4) Розраховується коефіцієнт парної кореляції і робиться відповідний висновок.
5) На діаграмі розсіювання будується теоретична пряма регресії, робляться висновки.

Розв'язання

1) Заповнюємо таблицю статистичних даних:

x_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y_i	67	71	76	81	86	93	99	113	125

2) Діаграма точок x_i, y_i (1) підтверджує , що залежність між результативною ознакою у і факторною ознакою х є лінійна Y=aX+b
3) Застосовуючи (МНК), заповнимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (2)$$

З якої визначаємо коефіцієнти a і b. Складаємо таблицю:

№	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0	61	0	3721	0
2	4	71	16	5041	284
3	10	76	100	5776	760
4	15	81	225	6561	1215
5	21	86	441	7396	1806
6	29	93	841	8649	2697
7	36	99	1296	9801	3564
8	51	113	2601	12769	3763
9	68	125	4624	15625	8500
$\sum_{i=1}^{9}$	234	805	10144	75339	24589

У результаті система рівнянь (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 10144a + 234b = 24589 \\ 234a + 9b = 805 \end{cases}$$

Розв’язок одержаної системи a=0,87 b=65,5.

рівняння регресії має вигляд: y=0,87x + 65,5

4) Щоб переконатися в тому, що наше припущення про лінійність зв’язку між x і y було правильним обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою:

$\bar{z}_{xy} = \bar{z}_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$, в нашому випадку.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\cdot 234 = 23{,}4$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{10}\cdot 805 = 80{,}5$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{10}\cdot 24589 = 2458{,}9$$

$$\bar{\sigma}_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{10}\cdot 10144 - 23{,}4^2 = 101{,}4 - 547{,}56 = 466{,}84$$

$$\bar{\sigma}_x = 21{,}6$$

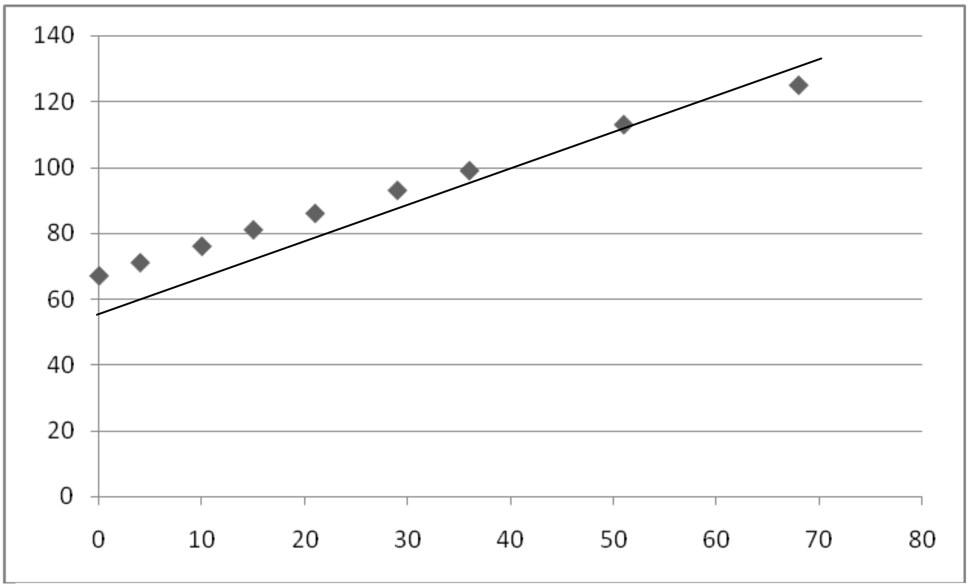
$$\bar{\sigma}_y{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2 = \frac{1}{10}\cdot 75339 - 80{,}5^2 = 7533{,}9 - 6480{,}25 = 1053{,}65$$

$$\bar{\sigma}_y = 21{,}6$$

отже

$$\bar{z}_{xy} = \frac{2458{,}9 - 23{,}4 \cdot 80{,}5}{21{,}6 \cdot 32{,}46} = \frac{2458{,}9 - 1883{,}7}{701{,}136} = \frac{575{,}2}{701{,}136} = 0{,}82$$

Оскільки випадковий коефіцієнт кореляції $\bar{z}_{xy}$ є досить близьким до одиниці,наше припущення про лінійний зв'язок між x і y – правильне.
5) Будуємо теоретичну пряму регресії.



<u>Задачі для самостійної роботи.</u>

8.1. Визначити числові характеристики вибірки.

Кількість продажів, здійснених компанією А за 30 робочих днів, представлена вибіркою:

Таблиця 8.1.

63	47	41	72	65	61	27	33	49	21
45	26	31	48	18	74	20	29	49	44
26	19	78	64	36	47	52	50	24	35

1) Проранжувати вибірку.

2) Побудуйте дискретний варіаційний ряд, до якого включені колонки
відносних частот та кумулятивних частот.

3) Побудуйте полігон.

*8.2***.** Знайти числові характеристики вибірки. Для вивчення попиту на закупівлю газет власник кіоску спостерігає щоденну кількість проданих газет протягом ста днів:

Таблиця 8.2

2	10	15	18	21	23	26	29	32	37
3	10	15	18	21	23	26	29	32	38
4	11	15	18	21	23	26	29	33	38
5	12	16	19	21	24	26	29	33	39
12	16	19	22	24	27	30	34	40	
12	16	19	22	24	27	30	34	40	
13	17	19	22	24	27	31	35	42	
14	17	20	22	25	28	31	35	43	
9	14	17	20	22	25	28	31	36	46
9	14	17	20	23	25	28	32	37	49

Проаранжувати вибірку

Знайти статистичний розподіл ідеї вибірки з кроками h=10 і h=5.

Побудувати гістограму частот.

8.3. Знайти числові характеристики вибірки.

Група банків України, загальною кількістю 50, розташованих у Київській області досліджувались за числом засновників цих банків (юридичні та фізичні особи). Результати розподілились таким чином:

Таблиця 8.3.

Число засновників	8	9	10	11	12	13	14	15
Число банків	3	5	12	10	9	6	3	2

1) Побудуйте полігон частот та полігон кумулятивних частот.

8.4. Ціни на сільськогосподарську продукцію, зафіксовані, подано в таблиці.

Таблиця 8.4.

Продукт	Ціна, грн				
	Ринок А	Ринок В	Ринок С	Ринок Д	Ринок Е
М'ясо(за 1 кг)	15.0	14.5	14.0	15.0	15.5
Масло (за 1 кг)	7.5	8.0	8.5	8.0	9.0
Молоко (за 1 л)	1.0	1.2	1.1	0.9	0.8
Яйця(10 шт)	2.5	2.6	2.4	2.3	2.7

Знайти максимальну, мінімальну і середню ціну кожного з продуктів. На якому ринку краще купувати весь набір продуктів?

1) побудуйте полігон.
2) Знайти числові характеристики вибірки.

8.5. При дослідженні 50 членів сімей робітників та службовців встановлена наступна кількість членів сім'ї: 5;3;2;1;4;6;3;7;9;1;3;2;5;6;8;2;5;2;3;6;8;3;4;4;5;6;5;4;7;5;6;4;8;7;4;5;7;8;6;5;7; 5;6;6;7;3;4;6;5;4. Складіть варіаційний ряд розподілу частот. Побудуйте полігон розподілу частот, кумуляту. Визначте середнє число членів сім'ї. Охарактеризуйте коливання розміру сім'ї за допомогою показників варіації.

8.6. Є дані фірми, про кількість проданих комп'ютерів за кожну неділю: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582. Складіть варіаційний ряд. Знайдіть середню кількість проданих комп'ютерів. Розрахуйте показники варіації.

*8.7.*Адміністрацію магазину цікавить частота придбання калькуляторів. Менеджер протягом січня реєстрував дані про придбання МК и зібрав наступні дані: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8. Побудуйте варіаційний ряд, визначте його числові характеристики. Які рекомендації ви б дали адміністрації універсаму?

*8.8.*Кількість пасажирів одного з рейсів за 30 днів складає: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129. Складіть варіаційний ряд. Знайдіть середню кількість пасажирів в рейсі. Розрахуйте показники варіації. Зробіть аналіз отриманих результатів.

*8.9.*Є дані про річну потужність підприємств у 2003 році:

Побудуйте гістограму, кумуляту. Розрахуйте середню потужність підприємств. Знайдіть дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації. Зробіть аналіз отриманих результатів.

Таблиця 8.9.

Підприємства з річною потужністю, тис.т	Кількість підприємств
до 500	27
500-1000	11
1000-2000	8
2000-3000	8
більше 3000	2

*8.10.*По даним вибіркового обстеження отримано наступний розподіл по середньому прибутку населення. Побудуйте гістограму, кумуляту. Розрахуйте середню потужність підприємств. Знайдіть дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації. Зробіть аналіз отриманих результатів.

Таблиця 8.10.

Середній прибуток сім'ї в місяць у.о	до 25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150 и выше
Кількість досліджених сімей	46	236	250	176	102	78	12

*8.11.*Побудуйте гістограму частот, знайдіть середню заробітну платню робітників одного з цехів «Азоту»

Таблиця 8.11.

Заробітна платня у.о.	50-75	75-100	125-150	150-175	175-200	200-225
Кількість робітників	12	23	37	19	15	6

Розрахуйте середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації заробітної платні.

*8.12.*Продаж акцій на аукціоні характеризується наступними даними:

Таблиця 8.12.

Продажа акцій у %	9-15	15-21	21-27	27-33
Кількість аукціон. Тов.	3	5	4	2

Побудуйте гістограму розподілу частот. Знайдіть середній відсоток продажу акцій. Охарактеризуйте коливання відсотку продажу акцій за допомогою відповідних показників.

8.13. Для оцінювання стану ділової активності підприємств булі проведені дослідження та отримані наступні результати:

Таблиця 8.13.

Показник ділової активності	0-8	8-16	16-24	24-32
Кількість підприємств	10	15	8	5

Побудуйте гістограму розподілу частот. Знайдіть середнє значення показника ділової активності, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації. Зробіть аналіз отриманих результатів.

*8.14.*Є дані про кількість операцій підписаних брокерськими фірмами:

Побудуйте гістограму розподілу частот. Знайдіть середню кількість операцій, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт, розмах варіації.

Таблиця 8.14.

Кільк. операцій	10-30	30-50	50-70	70-90
Кількість фірм	20	18	12	5

Пояснить отримані результати.

*8.15.*В коледжі зібрані дані про кількість годин пропущених по не поважній причині студентами третього курсу:

Таблиця 8.15.

Кількість пропущених годин в поточному місяці	0	1	2	3	4	5
Число студентів	10	27	25	28	30	17

Побудуйте полігон розподілу частот. Знайдіть середню кількість пропущених днів, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації. Чи є розподіл симетричним?

*8.16.*Побудуйте гістограму частот, знайдіть середнє арифметичне, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації для даних про денний прибуток та в магазині електроніки.

Таблиця 8.16.

Прибуток в у.о.	0-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
Кількість днів	3	5	9	14	8	3

8.17. дані про віковий склад безробітних по Україні:

Таблиця 8.17.

Вік	16-20	20-24	25-29	30-49	50-54	55-59	60-65
Чоловіки	7,7	17,0	11,9	50,9	4,2	5,7	2,6
Жінки	11,2	18,5	11,7	49,5	4,0	3,8	1,3

Зробіть висновок. Знайдіть середній вік безробітних чоловіків та жінок, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації. Оцініть різницю показників вікового складу безробітних чоловіків та жінок. Зробіть висновок.

8.18. Проаналізуйте дані річних рівнів прибутку трьох компаній.

Таблиця 8.18.

Рік	Cherry Computers	Lemon Motors	Orange electronics
1994	12.3	13.3	-10.3
1995	-16.2	-8.4	40.3
1996	15.4	27.3	5.4
1997	17.2	28.2	6.2
1998	10.3	14.5	10.2
1999	-6.3	-2.4	13.8
2000	-7.8	-3.1	11.5
2001	3.4	15.6	-6.2
2002	12.2	18.2	27.5

Знайдіть середнє значення та стандартне відхилення для кожної з компаній. Порівняйте результати їх діяльності за 9 років. Діяльність якої з компаній найбільш успішна?

8.19. Побудуйте інтервальний ряд, гістограму, складіть таблицю розрахунку середнього арифметичного, дисперсію та середнє квадратичне відхилення, тобто знайти числові характеристики або скласти математичну модель різних соціологічних досліджень.

Таблиця 8.19.

1	2 5 3 4 1 3 6 2 4 3 4 1 3 5 2 3 4 4 3 3 2 5 3 4 4 3 3 4 4 3 2 5 3 1 4 3 4 2 5 6 2 3 1 6 4 3 3 2 1 7
2	17,5 17,8 18,6 18,3 19,1 19,9 20,6 22 20,1 21,4 17,5 18,5 21 19 20 22 20,6 19,1 18,6 17,9 22 19,1 17,5 22 22,6 18 21,4 19 17,8 18,3 19,9 20,1 21,4 20 18,5 20,6 18,6 21,4 21,4 21 20 18 18 17,5 18,6 19,1 20 20,6 18,6 17,5
3	4 4 3 5 2 3 3 4 4 3 2 5 3 1 4 3 4 2 6 3 1 4 3 5 2 7 7 1 2 3 3 4 3 5 1 1 3 4 4 3 2 3 4 5 6 7 1 3 3 2
4	190 191 192 194 196 198 206 202 200 198 193 190 220 195 215 193 201 203 215 220 195 2 00 195 201 198 191 193 220 199 210 205 213 200 213 210 212 215 199 201 215 199 200 20 3 212 212 198 215 190 200
5	45 48 54 60 58 59 47 49 57 59 64 53 57 59 49 64 58 53 49 47 48 60 53 60 62 60 63 50 45 60 55 50 47 45 63 49 45 49 47 60 62 45 55 47 59 48 53 60 54 48
6	16 21 26 31 36 41 46 19 45 18 35 37 42 20 17 18 22 33 43 19 20 29 16 46 44 16 30 26 18 30 40 46 44 21 39 40 37 32 41 40 27 21 32 41 19 44 35 16 43 37
7	1,0 2,5 2,7 3,0 3,6 4,4 1,3 2,1 5,0 4,9 6,0 1,1 2,3 5,9 3,6 1,3 3,7 4,9 5,6 1,3 2,0 4,3 1,9 4,0 3,7 5,3 4,2 2,5 2,7 3,6 4,8 6,0 1,7 2,5 4,9 3,2 4,0 4,3 2,8 3,8 1,0 4,2 4,8 4,9 5,0 1,9 2,6 1,7 6,0 5,7
8	3 3 3 5 8 6 7 4 8 8 9 5 6 4 4 3 5 5 3 6 4 3 6 7 4 4 5 3 3 8 4 7 7 9 9 3 8 4 8 5 6 6 5 8 9 3 5 6 9 9
9	1,75 1,78 1,86 1,83 1,91 1,99 2,06 2,01 2,20 2,14 1,75 1,85 2,1 1,90 2,00 2,2 2,06 1,91 1,86 1,79 1,91 2,20 1,90 1,75 2,20 2,01 2,14 1,90 1,78 1,83 1,99 2,01 2,14 1,85 2,00 2,06 2,14 2,26 1,8 2,10 2,00 1,80 1,80 1,75 1,86 1,91 2,06 1,86
10	25,6 36,7 16,0 27,9 22,6 32,0 25,2 32,0 21,5 35,0 23,0 23,4 22,1 18,0 17,0 28,8 24,4 30,0 30,1 37,0 26,7 23,1 25,3 29,0 30,8 24,0 27,0 29,6 21,0 25,7 25,8 25,0 15,0 16,0 23,5 30,8 36,5 25,3 31,5 31,7 29,0 20,5 30,4 28,5 24,7 26,2 27,4 18,0 23,4 28,5

Індивідуальні завдання

Завдання 1.

Вибірка, зроблена випадковим способом, за акціями 50 різних підприємств задається даними наведеними в таблиці. За цими даними потрібно:

1. Побудувати варіаційний ряд, полігон частот (для дискретного ряду) або гістограмму частот (для інтегрального ряду), емпіричну функцію $F_0(x)$ та її графік.
2. Обчислити числові характеристики варіаційного ряду:

а) показники середнього рівня ознаки (середнє значення X, моду M_0, медіану Me);

б) показники варіації ознаки (розміри варіації, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, середнє лінійне відхилення, коефіцієнт варіації).

3. Обчислити надійний інтервал для генеральної середньої, вважаючи довірчу ймовірність рівною 0,95.
4. Перевірити узгодженість варіаційного ряду нормальному закону розподілу (за допомогою критеріїв Пірсона, вважаючи рівень надійності α = 0,05).
5. Обчислити асиметрію та ексцес розподілу.

Вариант 1

22	23	24	23	23	24	23	25	26	27	25	25
23	22	21	24	21	23	24	27	27	26	26	27
24	24	22	21	24	22	22	26	26	29	27	26
24	21	24	23	23	24	24	28	28	27	26	28
24	22	23	21	23	24	23	26	26	26	27	26
22	24	24	22	23	24	21	27	23	28	26	27
23	22	21	23	24	23	24	26	28	26	24	25
24	24	22	24	23	22	23	24	25	25	28	26
23	23	24	24	24	24	24	27	27	28	27	24
21	22	21	23	22	23	22	27	25	27	25	26
23	24	22	24	27	24	25	28	24	21	20	29

Вариант 2

14	12	16	12	12	11	12	19	18	12	12	11
14	11	10	10	19	12	14	11	16	10	19	12
12	10	13	11	12	10	16	10	13	11	12	16
11	18	19	18	13	11	11	18	19	13	13	11
13	13	11	14	12	12	13	13	11	16	12	12
12	11	10	12	14	13	11	12	15	12	14	13
12	17	12	10	11	19	12	17	12	10	11	19
13	12	13	12	13	11	13	12	13	12	13	11
14	11	11	11	10	12	14	14	11	11	10	12
12	12	11	12	10	12	12	12	11	12	12	10
12	19	18	12	12	11	14	11	10	10	19	12

Вариант 3

22	20	22	22	28	28	22	20	22	22	28	28
20	22	20	28	22	20	20	22	20	28	22	20
24	28	28	20	20	22	24	28	28	20	20	22
26	26	20	26	28	28	26	26	20	26	28	28
20	20	24	20	26	28	20	20	24	20	26	28
26	28	28	24	20	26	26	28	28	24	20	26
24	28	20	20	26	28	24	28	20	20	28	28
20	28	28	20	28	28	20	28	28	20	28	28
22	28	20	28	29	20	22	28	20	28	28	20
22	20	22	28	24	28	22	20	22	28	24	28
22	23	20	21	25	26	25	23	28	26	27	29

Вариант 4

15	16	17	15	15	16	15	16	17	15	15	16
17	17	16	16	17	10	16	16	19	37	16	19
17	17	16	16	17	10	16	16	19	17	16	19
18	18	17	16	18	18	18	18	17	16	18	18
16	16	16	17	16	10	16	16	16	17	16	10
17	13	18	16	17	18	17	13	18	16	17	18
16	18	16	14	15	19	16	18	16	14	15	19
14	15	15	18	16	17	14	15	15	18	16	17
17	17	18	17	14	18	17	17	18	17	14	18
17	15	17	15	16	19	17	15	17	15	16	19
17	16	19	10	16	16	15	13	12	11	18	19

Вариант 5

0	0	0	2	8	8	2	0	2	2	8	8
0	2	0	8	2	0	0	2	0	8	52	0
4	8	8	0	0	2	4	8	8	0	8	2
6	6	0	6	6	6	6	6	0	4	8	8
0	0	4	0	6	8	0	0	4	8	8	0
6	8	8	4	0	6	6	8	8	4	0	6
4	8	0	0	8	8	4	8	5	0	8	8
0	8	8	0	8	8	0	8	8	0	8	6
2	8	0	4	8	0	2	8	0	8	8	0
4	2	2	8	4	8	2	0	2	8	4	8
4	6	3	6	9	0	2	5	3	6	2	6

Вариант 6

27	26	27	25	23	26	23	26	25	26	25	26
27	26	27	25	23	27	26	23	25	26	27	26
26	27	26	25	23	27	27	23	25	24	26	24
26	25	26	27	24	26	27	24	24	24	26	28
25	25	26	27	22	25	25	24	23	24	24	21
24	24	25	27	26	24	25	24	27	23	24	28
23	24	24	24	27	23	24	26	27	23	23	25
26	24	24	24	24	26	24	26	26	24	23	21
26	26	24	23	25	26	23	26	25	24	24	23
28	27	28	25	25	25	25	22	21	21	24	28
21	20	23	28	25	21	26	22	27	21	23	21

Вариант 7

11	15	12	10	14	10	12	15	13	12	16	10
11	12	12	10	15	10	12	12	12	12	12	10
10	12	13	11	12	10	13	13	11	10	14	10
10	13	14	11	12	12	14	11	12	10	15	14
12	11	12	11	13	11	15	10	12	12	14	13
12	11	12	12	13	11	17	10	11	12	11	12
13	11	11	12	11	11	11	12	11	11	11	12
13	10	11	12	11	11	12	11	13	11	11	12
14	10	11	12	10	10	13	11	13	11	12	12
14	11	10	12	10	10	14	11	12	13	10	11
14	12	13	14	16	12	10	17	13	13	15	19

Вариант 8

60	60	68	62	60	61	62	69	68	61	61	68
62	62	61	62	69	68	62	62	61	60	62	60
64	61	60	60	69	68	62	62	60	62	66	66
60	69	62	64	61	60	60	69	62	64	65	60
62	60	63	65	62	68	62	60	63	61	63	65
61	66	60	62	60	63	61	62	60	61	69	63
61	68	69	68	63	61	66	68	69	61	60	69
68	63	61	61	68	69	68	63	61	60	66	65
63	63	61	64	62	62	63	63	61	62	67	66
64	66	62	63	63	61	64	62	62	62	64	68
60	61	60	62	64	63	60	62	60	62	60	69

Вариант 9

45	46	47	45	45	46	45	46	47	45	46	36
47	47	46	46	47	40	47	47	46	46	47	40
46	46	49	47	46	46	49	47	46	49	46	49
48	48	47	46	48	48	48	48	47	46	48	43
46	46	46	47	46	40	46	46	46	47	46	40
41	43	48	46	47	48	47	43	48	46	47	48
46	48	46	44	35	49	46	48	46	44	45	49
44	45	45	48	46	47	44	45	45	48	46	47
47	47	48	47	44	48	47	47	48	47	44	48
47	45	47	45	46	39	47	45	47	45	45	46
42	43	44	43	43	44	43	43	42	41	44	42

Вариант 10

13	10	12	16	12	11	12	14	15	12	17	14
13	10	12	14	12	10	12	14	17	12	16	13
12	15	12	13	12	10	11	13	14	13	17	11
12	13	11	12	13	10	11	13	13	13	11	16
12	12	11	10	12	12	1	12	13	11	12	12
1	12	11	10	12	12	11	12	12	11	14	19
12	12	11	10	17	13	12	12	11	12	15	17
11	13	13	10	16	14	13	11	11	12	16	14
11	12	13	12	11	15	12	11	11	11	18	14
11	10	12	11	11	16	11	11	11	11	17	13
12	11	16	18	19	14	16	15	18	15	11	11

Вариант 11

24	25	24	23	24	24	23	24	24	25	22	23
24	25	24	22	24	24	23	24	24	24	24	23
24	24	24	22	24	25	24	24	25	24	29	25
25	24	24	25	24	23	22	25	23	25	20	26
25	24	25	25	25	23	24	25	22	23	22	25
22	24	24	25	25	22	24	25	25	22	29	23
23	23	24	22	25	24	24	23	24	24	23	22
23	23	24	22	23	24	23	23	24	24	25	28
24	23	23	22	23	24	25	24	23	22	26	20
24	22	23	25	24	23	23	24	24	25	21	22
22	27	28	29	22	21	20	27	28	29	22	21

Вариант 12

77	73	74	73	73	74	73	75	76	72	75	75
76	72	71	74	71	73	74	77	77	73	76	77
79	74	72	71	74	72	72	76	76	74	77	76
77	71	74	73	73	74	74	78	78	74	76	78
76	72	73	71	73	74	73	76	76	74	77	76
76	74	74	72	73	74	71	77	73	72	76	77
76	72	71	73	74	73	74	76	78	73	74	75
75	74	72	74	73	72	73	74	75	74	78	76
78	73	74	74	74	74	74	77	77	73	77	74
77	72	71	73	72	73	72	77	75	71	75	76
71	71	77	79	70	75	75	71	78	73	72	71

Вариант 13

82	83	81	83	81	83	82	83	82	81	82	85
82	82	81	82	89	88	82	82	81	88	85	88
84	81	80	80	89	88	82	82	80	85	84	85
80	89	82	84	81	80	80	89	82	85	81	87
82	80	83	81	82	80	82	80	83	87	85	84
81	86	80	82	80	83	81	82	80	89	82	87
81	88	89	88	83	81	86	88	89	88	84	80
88	83	81	81	88	89	83	83	81	89	80	89
83	83	81	84	82	82	83	83	81	89	89	87
84	82	82	83	83	81	84	82	82	86	88	89
80	81	80	82	84	83	80	82	80	88	87	88

Вариант 14

52	50	52	52	48	48	52	50	52	52	48	48
50	52	50	48	50	50	50	52	50	48	52	52
54	48	48	50	52	52	54	48	48	50	50	50
56	46	50	46	48	48	56	46	50	46	48	48
50	50	54	50	58	48	50	50	54	50	56	56
56	48	48	44	56	46	56	48	48	44	50	50
54	48	50	40	48	48	54	48	50	50	48	46
50	48	48	50	48	48	50	48	48	50	48	48
52	48	50	48	50	50	52	48	50	48	48	49
52	50	52	48	48	48	52	50	52	48	54	54
56	57	55	54	53	51	53	55	56	58	59	59

Вариант 15

40	40	40	42	48	48	42	40	42	42	48	48
40	42	40	48	42	40	40	42	40	48	42	40
44	48	84	40	40	42	44	48	48	40	40	42
46	46	40	46	46	46	46	46	40	44	48	48
40	40	44	40	46	48	40	40	44	48	46	40
46	48	48	44	40	46	46	48	48	44	40	46
44	48	40	40	48	48	44	48	40	40	48	48
40	48	48	40	48	48	40	48	48	40	48	46
42	48	40	44	48	40	42	48	40	48	48	40
44	40	42	48	44	48	42	42	42	48	44	48
45	44	46	43	43	44	41	46	40	45	41	42

Вариант 16

23	23	24	24	24	24	24	23	27	22	28	20
22	20	24	21	23	23	24	22	26	26	21	21
24	22	21	24	20	4	22	26	23	29	22	26
21	24	20	23	24	24	24	28	22	20	24	26
22	23	24	21	23	29	29	29	20	22	29	29
24	24	22	23	24	22	21	20	24	24	25	27
22	21	23	24	23	23	24	21	26	21	27	20
24	22	20	23	22	24	28	22	21	22	22	22
24	24	22	23	24	22	23	27	23	20	24	27
22	21	23	22	23	21	22	26	22	28	26	23
22	23	24	23	23	24	23	26	29	22	21	26

Вариант17

23	25	23	21	24	22	25	21	25	24	20	29
23	25	23	21	24	22	22	21	25	24	22	27
23	21	23	21	24	25	23	21	22	22	26	22
23	21	24	22	22	21	23	22	22	22	23	24
22	21	24	22	22	21	32	22	22	22	22	25
22	22	24	22	23	21	22	23	21	22	28	29
22	22	23	22	23	21	22	23	25	23	21	22
23	22	23	22	23	24	22	23	21	23	29	21
23	23	22	23	23	24	24	23	21	23	23	25
24	23	21	23	23	25	24	24	25	23	27	29
26	22	25	27	26	26	26	25	25	27	23	27

Вариант18

22	22	24	23	25	23	25	24	23	24	20	28
22	21	24	23	25	23	26	24	23	42	22	25
24	21	24	23	24	23	27	24	23	25	24	29
26	23	23	23	24	22	27	26	21	25	25	22
24	23	23	22	24	22	26	26	21	24	21	25
25	23	22	22	25	24	22	25	21	24	29	27
25	23	25	12	25	24	22	27	22	42	21	20
24	22	26	21	25	24	23	21	22	25	22	22
24	22	26	23	24	22	23	21	22	26	26	20
24	24	26	23	24	21	23	22	22	22	28	20
20	23	29	26	20	25	27	22	26	29	28	28

Вариант19

2	2	34	2	34	2	3	2	3	4	3	3
2	1	4	1	3	3	4	3	2	1	4	5
2	2	1	4	2	4	2	4	4	2	1	4
1	4	3	3	4	4	4	4	1	4	0	3
2	3	4	1	3	4	3	0	2	3	1	3
4	4	2	3	0	2	1	2	4	4	2	3
2	1	3	4	3	3	4	3	2	1	3	4
4	2	4	3	2	4	3	4	4	2	4	3
3	4	4	4	4	3	4	3	3	4	4	4
2	3	3	2	3	1	2	1	2	1	3	2
2	5	7	5	8	4	6	5	2	1	2	0

Варіант 20

30	34	29	33	34	32	33	32	32	32	32	32
32	31	34	31	33	33	34	31	34	30	35	38
34	32	29	34	32	34	32	34	34	34	38	34
31	34	33	30	34	34	34	36	32	39	39	37
32	33	34	31	33	34	33	39	32	39	32	33
34	34	32	33	32	34	31	30	36	32	36	39
30	31	33	34	33	33	34	32	39	36	37	33
34	32	34	29	32	34	33	38	38	30	37	34
33	34	34	34	34	33	34	30	30	35	37	36
32	31	33	32	33	31	32	39	34	32	31	31
32	33	34	30	33	34	33	32	30	33	39	36

Вариант 21

30	34	29	33	34	32	33	34	33	37	39	38
32	31	34	31	33	33	34	35	32	33	37	32
34	32	29	34	32	34	32	32	37	32	32	33
31	34	33	30	34	34	34	34	33	39	35	36
32	33	34	31	33	34	33	35	37	37	31	37
33	32	31	33	34	33	34	38	30	35	32	36
30	31	33	34	33	33	34	38	37	31	37	34
34	32	34	29	32	34	33	33	36	32	33	36
33	34	34	34	34	33	34	30	35	39	39	32
32	31	33	32	33	31	32	32	33	36	35	33
32	33	34	30	33	34	33	37	33	34	34	37

Вариант 22

30	34	30	33	29	32	33	30	31	32	32	37
32	30	34	31	33	33	34	32	36	33	34	35
34	32	31	34	30	34	32	34	32	39	35	36
31	34	30	33	34	34	34	36	36	38	32	37
32	33	34	31	33	29	29	39	39	37	35	37
34	34	32	33	34	32	31	31	36	36	34	35
32	31	33	34	33	33	34	34	30	30	36	34
34	32	30	33	32	34	28	38	32	30	36	37
33	34	34	34	34	33	34	37	39	32	38	31
32	31	33	32	33	31	32	34	30	36	36	31
32	33	34	33	33	34	33	37	36	36	33	39

Вариант 23

5	8	6	1	0	0	1	5	1	4	5	1
5	5	4	8	5	9	7	8	8	8	9	7
6	1	7	5	0	7	5	5	4	4	6	3
8	5	4	7	1	4	9	8	8	6	9	6
3	1	6	5	5	9	2	3	2	3	1	3
3	3	1	3	3	1	7	6	7	7	8	7
7	7	5	6	5	4	7	4	4	3	5	3
4	2	3	3	3	7	1	3	5	8	6	6
7	5	6	4	6	9	7	8	4	1	3	5
1	5	4	5	5	6	4	4	7	7	3	1
3	4	6	5	5	3	4	9	7	3	6	6

Вариант 24

81	81	81	83	80	81	84	85	82	83	87	86
86	84	87	85	89	88	85	84	89	85	87	84
86	83	86	84	82	89	85	86	85	84	89	86
88	88	89	83	88	80	85	80	84	89	87	85
85	89	87	86	83	85	83	84	88	82	85	84
84	80	83	83	87	80	85	85	84	88	85	87
87	87	89	88	84	86	80	83	86	84	84	85
84	85	85	85	86	87	82	88	80	83	84	87
85	83	86	89	85	84	84	85	85	88	83	87
85	83	83	80	87	84	86	80	89	80	82	86
83	81	81	87	84	87	88	84	85	84	89	89

Вариант 25

67	69	64	62	68	63	68	67	63	63	65	63
65	65	61	64	65	67	64	64	69	61	68	67
64	62	68	69	64	63	64	69	63	65	63	68
68	60	69	65	66	63	67	66	69	62	69	65
62	63	60	69	67	69	64	64	67	63	65	68
69	61	60	68	65	60	64	67	64	66	69	63
61	60	65	62	69	61	67	64	69	64	63	68
67	62	68	65	68	64	63	61	63	68	69	69
66	67	65	65	60	64	65	65	62	63	63	63
69	63	62	68	63	63	64	63	63	64	69	65
63	60	63	63	65	61	65	67	69	64	65	68

Завдання 2.

Знайти рівняння лінійної регресії та обчислити вибірковий коефіцієнт за вибіркою. Побудувати лінію кореляції.

Варіант №1

X	-25	-21	-20	-17	-15	-12	-8	-4	4	8	10	17	19	21	22
Y	-15	-13	-12	-11	-10	-7	-5	2	3	2	3	6	7	9	12

Варіант №2

X	-20	-17	-15	-9	-7	-5	-3	-2	-1	3	5	8	10	13	15
Y	-12	-10	-9	-7	-5	-4	-2	-1	2	3	4	6	8	10	11

Варіант №3

X	-11	-10	-5	-4	-2	-0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	-10	-9	-6	-5	-3	-1	1	1	2	5	5	6	8	8,5	9

Варіант №4

X	-5	-3	-1	1	2	3	5	7	9	11	13	15	19	20	22
Y	15	10	5	2	-2	-4	-10	-16	-23	-29	-32	-35	-51	-54	-71

Варіант №5

X	7	6	5	3	2	1	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Y	-35	-30	-20	-13	-8	-1	7	9	20	18	19	25	37	38	41

Варіант №6

X	-10	-8	-7	-5	-4	-1	1	2	4	5	8	11	14	16	20
Y	23	20	18	16	15	13	10	9	8	6	2	-2	-5	-7	-10

Варіант №7

X	-15	-13	-10	-7	-5	-3	-1	1	5	8	9	11	15	18	17
Y	-2	1	3	5	8	9	11	13	15	16	18	20	21	25	23

Варіант №8

X	-15	-14	-12	-5	-4	. -2	0	3	4	5	6	7	10	11	12
Y	7	4	-3	-10	-11	-16	-20	-25	-26	-29	-34	-35	-39	-41	-42

Варіант №9

X	-3	-1	0.5	2	3	5	8	12	15	20	22	25	28	30
Y	-35	-33	-29	-30	-27	-25	-19	-16	-14	-5	-3	2	4	6

Варіант №10

X	-20	-18	-15	-13	-10	-5	-2	1	5	8	10	15	17	20
Y	2	1	0	-3	-4	-6	-8	-9	-10	-12	-13	-15	-16	-17

Варіант №11

X	-15	-10	-7	-6	-2	-2	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	-25,	-19	-18	-16	-12	-10	-10	-8	-10	-5	-7	-5	-3	-6

Варіант №12

X	-24	-20	-19	-18	-17	-15	-10	0	1	2	5	6	7	8
Y	0	2	. 3	4	3	5	5	6,5	7	8	9	8	10	9

Варіант №13

X	-20	-15	-10	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	10	11
Y	-6	-3	0,5	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13

Варіант №14

X	-18	-16	-15	-12	-10	-8	-5	0	0	4	6	8	10	15
Y	28	27	26	24	22	21	18	15	13	12	11	9	8	4

Варіант №15

X	-9	-8	-7	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4	5	6
Y	-14	-9	-6	0	4	8	11	17	20	24	28	30	32	34

Варіант №16

X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	31	28	24	21	18	14	11	6	3	0	-4	-7	-10	-13

Варіант №17

X	-10	-9	-7	-5	-4	-3	-2	0	2	3	5	8	10	11
Y	-23	-22	-19	-17	-15	-14	-13	-10	-8	-6	-4	0	3	4

Варіант №18

X	-20	-18	-15	-14	-10	-8	-5	-4	-2	0	2	4	8	10
Y	-19	-17	-15	-13	-9	-7	-5	-4	-2	0	2	5	8	11

Варіант №19

X	-10	-8	-6	-4	-2	-1	0	2	3	4	7	8	9	10
Y	-18	-17	-14	-11	-8	-7	-6	-3	-2	0	2	4	5	6

Варіант №20

X	-4	-3	-1	0	1	5	7	10	13	15	20	21	22	25
Y	-20	-18	-14	-15	-13	-10	-11	-7	-5	-3	2	4	5	6

Варіант №21

X	-1	1	2	3	5	6	8	10	13	14	15	17	20	21
Y	20	17	10	8	4	-2	-10	-16	-24	-26	-28	-43	-55	-59

Варіант №22

X	-11	-9	-8	-7	-6	-5	-3	-1	2	3	5	5	6	8
Y	-10	-9	-5	0	1	3	7	13	17	20	25	27	27	35

Варіант №23

X	-1	-1	0	1	2	4	6	7	10	11	12	15	17	19
Y	35	32	31	28	25	23	15	10	-1	-4	-7	-14	-20	-25

Варіант №24

X	-10	-9	-6	-5	-2	-1	1	2	3	5	10	12	15	17
Y	-19	-17	-14	-10	-8	-5	-2	0	3	5	9	15	20	21

Варіант №25

X	-5	-5	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	45	44	34	32	31	30	24	18	11	10	11	10	7	8

Варіант №26

X	-11	-10	-7	-5	-2	0	1	3	4	5	8	10	13	15
Y	-20	-18	-13	-9	-5	-4	-2	2	3	4	6	8	10	11

Варіант №27

X	3	2	1	-1	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
Y	-15	-8	-5	4	6	10	20	18	19	26	35	38	40	42

Варіант №28

X	4	10	16	23	29	33	40	51	54	61	64	71	76	80
Y	3	5	7	9	11	13	15	19	20	22	23	25	27	29

Варіант № 29

X	-3	-2	-1	3	5	8	10	13	15	17	20	23	25	26
Y	-2	-1	2	3	4	6	8	10	11	13	16	19	21	22

Варіант № 30

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	1	8	2	5	5	6	8	2	9	15	10	12	13	14

Варіант №31

X	3	5	7	9	11	13	15	19	20	22	23	25	27	29
Y	-4	-10	-16	-23	-29	-15	-35	-51	-54	-71	-64	-75	-76	-80

Варіант №32

X	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14
Y	7	9	20	18	19	25	37	38	41	43	46	48	51	58

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні задачі математичної статистики.
2. Назвіть основні поняття математичної статистики.
3. Генеральна сукупність – це ...
4. Вибіркою з генеральної сукупності називається ...
5. Варіаційним рядом називається...
6. Інтервальний варіаційний ряд – це ...
7. Дискретним статистичним розподілом вибірки є ...
8. Що таке полігон, гістограма?
9. Дати означення емпіричної функції розподілу частот та навести її властивості.
10. Вибірковим середнім статистичного розподілу вибірки називається...
11. Розмах вибірки – це ...
12. Вибірковою дисперсією називається ...
13. Коефіцієнт варіації статистичного розподілу вибірки – це ...
14. Вибірковим ексцесом статистичного розподілу вибірки називається.
15. Вказати методику побудови полігона частот.
16. Вказати методику побудови гістограми частот.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Баврин И.И. Курс высшей математики. – М.: Просвещение, 1992. – 400с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– М.: Наука, 1985. – 384 с.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976.
4. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: Професіонал, 2007.
5. Булдак Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Вышейшая школа, 1989.
6. Валь О. Теорія ймовірностей. – Чернівці: Книги – XXI, 2005.
7. Васильченко П.П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454 с.
8. Вентцель В.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
9. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн.2 – 368с.
10. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ, 2003.
11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Вышейшая школа, 2003.
12. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969.
13. Гончаренко Ю.В. Короткий довідник з курсу вищої математики. – К.: Допомога, 2005. – 44с.
14. Горелов Г.Б. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2002.
15. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 600с.
16. Липовик В.В., Максимов А.В. Математичний аналіз / навчальний посібник. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. – 199с.
17. Липовик В.В., Максимов А.В., Коломойцева А.В. Теорія ймовірностей / навчальний посібник. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2005. – 200с.
18. Липовик В.В., Максимов А.В., Радовський В.Д. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії / навчальний посібник. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2005. – 272с.
19. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. – К.: Техніка, 2004. – 792с.
20. Практические занятия по высшей математике, часть I – V. / И.А.Каплан. – Х.: Издательство Харьковского университета, 1972.
21. Руководство к решению задач по математическому аналізу / Г.И.Запорожец. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
22. Сухольский Г.В. Основы математической статистики для технологов. – Л.: Изд-во Ленинградского университета,1972.
23. Свердан П.Л. Вища математика. – Львів: Світ, 1998.
24. Черняк О.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Знання, 2002.

Зміст

Навчальне видання

Ірина Василівна Лов’янова

Людмила Романівна Корольська

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Посібник