

# СУЧАСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КРИЗОВИХ ЯВИЩ У СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Лега Ю.Г., Соловйов В.М., Мельник В.В.

*Анотація:* розглянуто сучасні підходи щодо кількісних методів аналізу кризових явищ у складних системах.

*Ключові слова:* глобальна фінансова криза, складні системи, нелінійна динаміка, еконофізика, мультифрактал, вейвлет-аналіз, ентропія, рекурентний аналіз, передвісники кризових явищ

**ВСТУП.** Соціально-економічні системи є складними системами, мають універсальні емерджентні властивості, які не знаходять адекватного розуміння у рамках традиційних парадигм. Тому для аналізу фінансових, економічних та соціальних систем все активніше використовуються методи та моделі фундаментальних наук, які у поєднанні з сучасними досягненнями у галузі інформаційних технологій та досить ємними базами даних забезпечили б значний прогрес у дослідженні та квантифікації природи цих систем . моделювання розвитку критичних та кризових явищ, визначення шляхів їх утворення, оцінка термінів переходу систем в нормальний режим функціонування, прогнозування можливості виникнення та дослідження передвісників виявлення критичних та кризових явищ.

Дослідження буде ґрунтуватись на концепції єдності процесів самоорганізації та управління за рахунок численних прямих та зворотних зв'язків, наявності емерджентних ефектів, кооперативної, когерентної поведінки між елементами та підсистемами на засадах апарату синергетики, нелінійної динаміки, фрактального та вейвлет аналізу. Це дозволить провести дослідження стійкості фінансово-економічних систем та сконструювати індикатори передвісників кризових станів, побудову нелінійних моделей динаміки фондових індексів як розвинених країн, так і країн, що розвиваються,

з метою аналізу процесів самоорганізації та критичних явищ, дасть можливість розробити адекватні стратегії антикризового управління та мінімізувати наслідки можливих соціально-економічних криз і потрясінь. Актуальною є діяльність щодо створення, тестування, адаптації до конкретних сегментів фінансового ринку програмно-методичного комплексу для моніторингу, раннього передбачення та попередження і сповіщення фінансових криз.

Сучасна економічна теорія вступила у нову фазу свого розвитку. Це обумовлено як глобалізацією світової економіки, так і впровадженням методів фундаментальних наук. Непередбачуваність ринків капіталу, несподівані стрибки цін і незрозумілі тренди, раптові падіння, що переживаються економікою як важкі кризи не піддаються поясненню. Ключові концепції традиційних моделей управління капіталом і традиційні аналітичні методи аналізу фінансових ринків все частіше наштовхуються на проблеми, що не мають ефективного вирішення у рамках устояних парадигм.

Традиційні підходи не пристосовані для опису і моделювання швидких змін, непредбачуваних стрибків і складних взаємодій окремих складових сучасного світового ринкового процесу, тому в економіці насущною практичною необхідністю стає синтез нових аналітичних і обчислювальних підходів, які беруть свої витoki у різних галузях людських знань. Цей синтез здійснюється у рамках теорії складності.

Теорія складності вивчає динамічні процеси у незворотних багатокомпонентних інтерактивних адаптивних системах. Вона розглядає причини і механізми виникнення нових режимів і структур, вивчає характерні масштаби і швидкості перехідних і сталих процесів, передбачає ймовірні зміни системи і вказує на те, як можна було б управляти неочікуваними динамічними режимами, що виникають в складних системах. Саме теорія складних систем зі своїм багатим міждисциплінарним арсеналом методів і алгоритмів може стати адекватним інструментом для аналізу складних динамічних процесів і систем.

В рамках застосування міждисциплінарних підходів авторами розроблено та розробляються методики, що ґрунтуються на мультифрактальному та

вейвлет-аналізі нестационарної динаміки, методики ідентифікації передкризових і шоківих станів складних систем, візуалізації складних систем. Проводяться роботи над виявленням передвісників критичних та кризових явищ на основі методів релятивістської динаміки, нелінійної динаміки, детермінованого хаосу.

Задля мінімізації наслідків дії криз активізувались дослідження, присвячені виявленню показників, які можуть завчасно вказати на вразливість економіки перед фінансовими кризами. У таких роботах дослідники намагались відібрати з множини економічних індикаторів ті, які мають найбільшу прогностичну силу – дозволяють з найбільшою вірогідністю заздалегідь виявити можливе настання фінансової нестабільності.

Відзначимо, що визначення епізодів, які можна назвати фінансовою нестабільністю або кризою, є саме по собі непростим завданням. Зокрема, цілком логічно вважати за фінансову нестабільність банкрутство декількох фінансових інститутів. Проте за деяких обставин це може бути складовою звичайної ринкової взаємодії, при якій перестають функціонувати збиткові фірми, які не змогли організувати ефективну діяльність. При інших обставинах банкрутство одного фінансового інституту може стати спусковим гачком фінансової кризи. Тому під фінансовою нестабільністю або кризою розуміють такі проблеми у фінансовій системі країни (або їх сукупність), які мають значний негативний вплив на економічну активність [3].

Впродовж багатьох років всі епізоди серйозної фінансової нестабільності укладалися в три основних типи: банківські кризи, валютні кризи і кризи на фінансових ринках (у тому числі кризи державних фінансів). Банківська криза зазвичай пов'язується з нездатністю ряду банків виконувати свої зобов'язання або з активним державним втручанням, направленим на запобігання виникаючих проблем.

Під валютною кризою розуміється така ситуація, при якій спекулятивна атака на валюту приводить до різкої девальвації національної валюти або при

якій органи державної влади запобігають девальвації шляхом продажу золотовалютних резервів, значного підвищення процентних ставок.

Нарешті, криза на фінансовому ринку полягає в збільшенні волатильності цін на фінансові активи або їх падінні, пов'язаному з зміною очікувань інвесторів. Інколи дані типи криз можуть відбуватися одночасно, що лише підсилює їх негативний вплив на економіку країни.

Таким чином, фінансова нестабільність того або іншого типа за визначенням є небезпечною і небажаною для успішного економічного розвитку, і розробка методології по завчасному її виявленню є дуже важливою і актуальною проблемою.

### **КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ.**

Вейвлет-аналіз є методом, що полягає у введенні відповідного базиса та характеристики сигналу шляхом розподілу амплітуд (відліків сигналу) у введеному базисі. Якщо при введенні базису висувається вимога до його ортогональності, будь-яка розглядувана функція може бути єдиним чином розкладена в ньому, причому такий розклад дозволяє відновлювати сигнал.

Дискретне вейвлет-перетворення дозволяє отримувати представлення сигналу коли його значення складаються з коефіцієнтів у послідовності вейвлетів. Такі вейвлет-коефіцієнти надають повну інформацію про сигнал та дозволяють безпосередньо отримувати локальні енергії складових сигналу на різних масштабах. Більш того, інформація може бути організована у вигляді ієрархічної схеми вкладених підпросторів, що носить назву мультимасштабного аналізу. Базою вейвлет-перетворення є деяка функція  $\psi$ , що називається материнським вейвлетом. При використанні вейвлет-перетворення часто застосовують термінологію цифрової обробки сигналів, де часовий ряд називають сигналом, а його елементи часовими відліками.

Для опису основ вейвлет-ентропії звернемось до [7] та [8].

Нехай маємо часовий ряд (сигнал)  $X$ , що складається зі значень (відліків)  $x_i, i = 1, \dots, M$ , поданих на рівномірній сітці з частотою (часом вибірки)  $\omega_s (t_s)$ .

В результаті, при використанні множини масштабів  $1, \dots, N$ , буде отримано наступне вейвлет-перетворення:

$$X(t) = \sum_{j=1}^N \sum_k C_j(k) \psi_{j,k}(t) = \sum_{j=1}^N r_j(t). \quad (9)$$

$r_j(t)$  містить інформацію про ряд  $X$  відповідно на частотах  $2^{j-1} \omega_s \leq |\omega_s| \leq 2^j \omega_s$ .

Оскільки сімейство  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  є ортонормальним базисом в  $L^2(R)$ , можна використовувати концепцію енергії з використанням відповідної термінології, взятої з теорії розкладів Фур'є. Вейвлет-коефіцієнти, що отримуються як  $C_j(k) = \langle S, \psi_{j,k} \rangle$ , дозволяють енергію на кожному масштабі  $j = 1, \dots, N$  інтерпретувати як енергію елементів ряду

$$E_j = \|r_j\|^2 = \sum_k |C_j(k)|^2. \quad (10)$$

Загальна енергія ряду може бути отримана у вигляді

$$E_{tot} = \|X\|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_k |C_j(k)|^2 = \sum_{j=1}^N E_j. \quad (11)$$

На основі отриманих значень, можна визначити нормалізовані  $p_j$  - значення, що представляють відносну вейвлет-енергію

$$p_j = \frac{E_j}{E_{tot}} \quad (12)$$

на масштабах  $j = 1, \dots, N$ . Значення  $p_j$ , взяті на різних масштабах, утворюють розподіл ймовірності енергії, тобто,

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1. \quad (13)$$

Розподіл  $\{p_j\}$  може розглядатись як часово-масштабова щільність, що є цінним інструментом для визначення та характеристик особливостей часового ряду як у часовому, так і частотному просторах.

Необхідним критерієм для аналізу та порівняння розподілу ймовірності є ентропія Шеннона. Вона надає міру інформації, що міститься в будь-якому

розподілі. Визначимо нормалізовану загальну вейвлет-ентропію (Normalized Total Wavelet Entropy, NTWE) [7], [8] як

$$E_{WT} = \frac{-\sum_{j=1}^N p_j \cdot \ln p_j}{X_{\max}}, \quad (14)$$

де  $X_{\max} = \ln N$  є нормалізаційною константою. NTWE може використовуватись як міра ступеня порядку/безпорядку часового ряду, і, таким чином, надавати корисну інформацію про приховані динамічні процеси, асоційовані з часовим рядом. Високовпорядкований процес, навпаки, може бути представлений періодичним моно частотним сигналом (часовим рядом), тобто сигналом з вузьким частотним спектром. Вейвлет-подання такого часового ряду буде використовувати лише один масштаб, тобто, всі відносні вейвлет-енергії будуть майже рівні нулю на всіх масштабах, за виключенням масштабу, що включає репрезентативну частоту ряду. На цьому масштабі відносна енергія буде майже рівною 1. Відповідно, NTWE буде набувати дуже малого значення.

Часовий ряд, що відповідає випадковому процесу, буде демонструвати надзвичайно неупорядковану поведінку. Такий вид часових рядів буде мати вейвлет-представлення з порівняно великими значеннями на всіх частотних масштабах. Більш того, можна очікувати, що всі значення будуть приблизно однакові (одного порядку). Відповідно, відносні вейвлет-енергії на всіх масштабах будуть практично рівними між собою, і NTWE буде набувати свого найбільшого можливого значення.

Логічним продовженням ускладнення алгоритмів розрахунку характеристик вейвлет-ентропії є розбиття часового ряду на вікна, що не перекриваються. Для розрахунку нових характеристик вибираються вікна довжини  $L$  та утворюються  $i$  інтервалів,  $i = 1, \dots, N_T$ , де  $N_T = \frac{M}{L}$ . На кожному інтервалі відповідні значення часового ряду асоціюються з центральною точкою часового вікна. У випадку діадичного вейвлет-розкладу кількість вейвлет-коефіцієнтів на рівні  $j$  удвічі менша за кількість на попередньому рівні,  $j + 1$ .

Тому найменша довжина відповідного вікна буде включати щонайменше один вейвлет-коефіцієнт на кожному масштабі.

Вейвлет-енергія на масштабі  $j$  для часового вікна  $i$  розраховується за формулою

$$E_j^{(i)} = \sum_{k=(i-1)L+1}^{iL} |C_j(k)|^2, \quad i=1, \dots, N_T. \quad (15)$$

Загальна енергія у цьому часовому вікні буде рівна

$$E_{tot}^{(i)} = \sum_{j=-N}^{-1} E_j^{(i)}. \quad (16)$$

Зміна з часом відносної вейвлет-енергії та нормалізованої загальної вейвлет ентропії буде отримана за формулою:

$$p_j^{(i)} = \frac{E_j^{(i)}}{E_{tot}^{(i)}}, \quad (17)$$

$$E_{WT}^{(i)} = - \sum_{j=-N}^{-1} p_j^{(i)} \cdot \frac{\ln p_j^{(i)}}{X_{\max}}.$$

## II Алгоритми розрахунків

При розрахунку коефіцієнтів використовуються наступні типи вейвлет-перетворень:

- неперервне вейвлет-перетворення – розрахунок неперервних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду  $t$  на цілих додатніх масштабах з використанням в якості материнського вейвлета похідної 8-го порядку функції Гауса;
- дискретне вейвлет-перетворення – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду  $t$  на дійсних додатніх масштабах у просторі з ортонормованим базисом із сімейства материнських функцій Морле з шістьма хвилями та періодами, що є дійсними степенями двійки;
- дискретне вейвлет-перетворення з цілими масштабами – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду  $t$  на цілих додатніх

масштабах у просторі з базисом із сімейства материнських функцій, що є похідними 2-го порядку функції Гауса.

При виконанні вейвлет-перетворення до вихідного ряду зліва та справа додавались його екземпляри, що дозволило отримувати однакову кількість вейвлет-коефіцієнтів на всіх масштабах. Тому в подальшому для позначення вейвлет-коефіцієнтів (та відповідних енергій) використовуватимемо нижні індекси виду  $C_{ij}$ , де  $i$  – номер масштабу,  $j$  – номер точки.

В якості базової формули розрахунку значення ентропії нами було обрано ентропію Шеннона внаслідок досить простого методу отримання розподілу щільності ймовірності енергії сигналу.

На основі енергій вейвлет-коефіцієнтів було визначено два показники вейвлет-ентропії – масштабової та точкової ентропії. У випадку розрахунку масштабової вейвлет-ентропії формула Шеннона застосовується до оброблених даних по масштабам, в іншому випадку обробка даних проводиться по часовій шкалі.

При розрахунку обох показників вейвлет-ентропії спочатку знаходиться поле енергій вейвлет-коефіцієнтів  $E_{ij} = C_{ij}^2$ , яке нормалізується середнім квадратичним відхиленням вихідного часового ряду  $\tilde{E}_{ij} = \frac{E_{ij}}{\sigma_t}$ . Подальші кроки залежать від виду розраховуваної ентропії.

Для розрахунку масштабової ентропії визначається розподіл щільності ймовірності енергій  $p_{ij} = \frac{\tilde{E}_{ij}}{\tilde{E}_{tot}}$ , де  $E_{tot} = \sum_i \sum_j \tilde{E}_{ij}$ . Значення ентропії знаходяться

за формулою  $E_{WS} = -\sum_i \left( \left( \sum_j p_{ij} \right) \cdot \frac{\log_2 \sum_j p_{ij}}{\log_2 N} \right)$ , де  $\log_2 N$  – константа, що є

нормалізуючим множником,  $N$  – кількість елементів часового ряду.



Для розрахунку точкової ентропії визначаються суми енергій на кожному масштабі  $\tilde{E}_i = \sum_i \tilde{E}_{ij}$  та знаходиться розподіл щільності ймовірності енергій шляхом ділення енергій вейвлет-коефіцієнтів на сумарну енергію відповідного масштабу  $p_{ij} = \frac{\tilde{E}_{ij}}{\tilde{E}_i}$ . Значення ентропії у кожній точці знаходиться за формулою

$$\text{Шеннона } E_{WP} = -\sum_i \left( \left( \sum_j p_{ij} \right) \cdot \frac{\log_2 \sum_j p_{ij}}{\log_2 N} \right).$$

**Рекурентний аналіз.** Більшість методів нелінійного аналізу вимагає або достатньо довгих, або стаціонарних рядів даних, які на практиці одержати досить важко. Ситуація змінилася з появою і широким розповсюдженням аналізу рекурентних діаграм [3]

**Постановка завдання.** Розглянемо ідею і коротко теорію рекурентного аналізу, його можливості та визначимо основні переваги застосування при аналізі і прогнозування складних фінансово-економічних систем.

### 1. Фазовий простір, його реконструкція

Стан системи описується її змінними стану

$$x^1(t), x^2(t), \dots, x^d(t),$$

де верхній індекс – номер змінної. Набір із  $d$  змінних стану в момент часу  $t$  складає вектор стану  $\vec{x}(t)$  в  $d$ -вимірному фазовому просторі. Даний вектор переміщується в часі у напрямі, який визначається його вектором швидкості:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \partial_t \vec{x}(t) = \vec{F}(x) \quad (1).$$

Послідовність векторів  $\vec{x}(t)$  утворює траєкторію у фазовому просторі, причому поле швидкості  $\vec{F}$  дотичне до цієї траєкторії. Еволюція траєкторії описує динаміку системи і її атрактор. Знаючи  $\vec{F}$ , можна одержати інформацію про стан системи в момент  $t$  шляхом інтеграції виразу (1). Оскільки форма траєкторії дозволяє судити про характер процесу (періодичні, хаотичні, трендостійкі тощо процеси мають характерні фазові портрети), то для

визначення стану системи не обов'язково проводити інтеграцію, а достатньо побудувати графічне відображення траєкторії.

При дослідженні складних систем часто немає інформації про всі змінні стану, або не всі з них можливо виміряти. Як правило, є єдине спостереження, проведене через дискретний часовий інтервал  $\Delta t$ . Таким чином, вимірювання записуються у вигляді ряду часового ряду  $u_i(t)$ , де  $t = i \cdot \Delta t$ .

Взаємодії і їх кількість в складних системах такі, що навіть по одній змінній стану можна судити про динаміку всієї системи в цілому. Тобто, еквівалентна фазова траєкторія, що зберігає структури оригінальної фазової траєкторії, може бути відновлена з одного спостереження або часового ряду за теоремою Такенса методом часових затримок:

$$\vec{x}(t) = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+(m-1)\tau}) ,$$

де  $m$  – розмірність вкладення,  $\tau$  – часова затримка (реальна часова затримка визначається як  $\tau \cdot \Delta t$ ). Топологічні структури відновленої траєкторії зберігаються, якщо  $m \geq 2 \cdot d + 1$ , де  $d$  – розмірність атратора. На практиці більшості випадків атратор може бути відновлений і при  $m \leq 2d$ . Затримка, як правило, вибираються апріорно.

## 2. Рекурентний аналіз

Більшості процесів в природі властива яскраво виражена рекурентна поведінка, така, як періодичність або іррегулярна циклічність. Більш того, рекурентність (повторюваність) станів в значенні проходження подальшої траєкторії достатньо близько до попередньої є фундаментальною властивістю дисипативних динамічних систем. Ця властивість була відмічена Пуанкаре ще в 80-х роках XIX століття і згодом сформульована у вигляді «теорема рекурентності»: *Якщо система зводить свою динаміку до обмеженої підмножини фазового простору, то система майже напевно, тобто з вірогідністю, практично рівною одиниці, скільки завгодно близько повертається до якого-небудь спочатку заданого режиму.*

Суть цієї фундаментальної властивості у тому, що, не дивлячись на те, що мале збурення в складній динамічній системі може привести систему до

експоненціального відхилення від її стану, через деякий час система прагне повернутися до стану, деяким чином близького до попереднього, і проходить при цьому подібні етапи еволюції. Переконатися в цьому можна за допомогою графічного зображення траєкторії системи у фазовому просторі. Проте можливості такого аналізу сильно обмежені. Як правило, розмірність фазового простору складної динамічної системи більша трьох, що робить практично незручним його розгляд напряду; єдина можливість – проєкції в дво- і тривимірні простори, що часто не дає вірного уявлення про фазовий портрет.

У 1987 р. Екман (Eckmann) і співавтори запропонували спосіб відображення  $m$ -вимірної фазової траєкторії станів системи  $\vec{x}(t)$  завдовжки  $N$  на двовимірну квадратну двійкову матрицю розміром  $N \times N$ , в якій одиниця (чорна точка) відповідає повторенню стану при деякому часі  $i$  в деякий інший час  $j$ , а обидві координатні осі є осями часу. Таке представлення було назване рекурентною діаграмою (recurrence plot, RP), оскільки воно фіксує інформацію про рекурентну поведінку системи.

Математично вищесказане описується як

$$R_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \vec{x} \in \mathfrak{R}^m, i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

В (2)  $N$  – кількість даних станів,  $x_i, \varepsilon_i$  – розмір околиці точки  $\vec{x}$  у момент  $i$ ,  $\|\cdot\|$  – норма і  $\Theta(\cdot)$  – функція Хевісайда.

Непрактично і, як правило, неможливо знайти повну рекурентність у значенні  $\vec{x}_i \equiv \vec{x}_j$  (стан динамічної, а особливо – хаотичної системи не повторюється повністю еквівалентно початковому стану, а наближається до нього скільки завгодно близько). Таким чином, рекурентність визначається як достатня близькість стану  $\vec{x}_j$  до стану  $\vec{x}_i$ . Іншими словами, рекурентними є стани  $\vec{x}_j$ , які потрапляють в  $m$ -вимірну околицю з радіусом  $\varepsilon_i$  і центром в точці  $\vec{x}_i$ . Ці точки  $\vec{x}_i$  називаються *рекурентними точками*. При цьому зовнішній вигляд рекурентної діаграми дозволяє судити про характер процесів, які протікають в системі, наявності і впливі шуму, станів повторення і завмирання

(ламінарності), здійсненні в ході еволюції системи різких змін стану (екстремальних подій).

### 3. Аналіз діаграм

Очевидно, що процеси різної поведінки даватимуть рекурентні діаграми з різним малюнком. Таким чином, візуальна оцінка діаграм може дати уявлення про еволюцію досліджуваної траєкторії.

Виділяють два основних класи структур зображення: *топология*, що представляється крупномасштабними структурами, і *текстура*, що формується дрібномасштабними структурами.

Топологія дає загальне уявлення про характер процесу. Виділяють чотири різних класи:

- *однорідні* рекурентні діаграми типові для стаціонарних і автономних систем, в яких час релаксації малий у порівнянні з довжиною ряду;
- *періодичні* структури, що повторюються (діагональні лінії, узор у шаховому порядку). Вони відповідають різним осцилюючим системам з періодичністю в динаміці;
- *дрейф* присутній у систем з параметрами, що поволі змінюються. Це робить білими лівий верхній і правий нижній кути рекурентної діаграми;
- *різкі зміни* в динаміці системи, рівно як і екстремальні ситуації, обумовлюють появу білих областей або смуг. Тому рекурентні діаграми спрощують виявлення екстремальних і рідкісних подій.

Докладний розгляд рекурентних діаграм дозволяє виявити дрібномасштабні структури – текстуру, яка складається з простих точок, діагональних, горизонтальних і вертикальних ліній. Комбінації вертикальних і горизонтальних ліній формують прямокутні кластери точок:

- самотні, окремо розташовані рекурентні точки з'являються в тому разі, коли відповідні стани рідкісні, або нестійкі в часі, або викликані сильною флуктуацією. При цьому вони не є ознаками випадковості або шуму;
- діагональні лінії  $R_{i+k, j+k} = 1$  (при  $k = 1..l$  де  $l$  – довжина діагональної лінії) з'являються у разі, коли сегмент траєкторії у фазовому просторі пролягає

паралельно іншому сегменту, тобто траєкторія повторює саму себе, повертаючись в одну і ту ж область фазового простору у різний час. Довжина таких ліній визначається часом, протягом якого сегменти траєкторії залишаються паралельними; напрям (кут нахилу) ліній характеризує внутрішній час підпроцесів, відповідних даним сегментам траєкторії. Проходження ліній паралельно лінії ідентичності свідчить про однаковий напрям сегментів траєкторії, перпендикулярно – про протилежний («відображені» сегменти), що може також бути ознакою реконструкції фазового простору з невідповідною розмірністю вкладення. Нерегулярна поява діагональних ліній є ознакою хаотичного процесу;

- вертикальні (горизонтальні) лінії  $R_{i,j+k} = 1$  (при  $k = 1..v$ , де  $v$  – довжина вертикальної або горизонтальної лінії) виділяють проміжки часу, в котрі стан системи не змінюється або змінюється трохи (система як би «заморожена» на цей час), що є ознакою «ламінарих» станів.

Саме ці комбінації використовуються для обчислення мір *кількісного аналізу* рекурентних діаграм (recurrence quantification analysis, RQA). Збілут і Веббер (див. для деталей огляд [1]) розробили інструмент обчислення ряду мір на основі підрахунку густини рекурентних точок і побудови частотного розподілу довжин діагональних ліній: *recurrence rate* (RR, коефіцієнт самоподібності), *determinism* (DET, передбачуваність), *divergence* (DIV, зворотна величина максимальної довжини діагональної лінії), *entropy* (ENTR, ентропія) і *trend* (TREND, тренд). Обчислення цих мір в підматрицях рекурентної діаграми уздовж лінії ідентичності показує поведінку цих мір у часі. Дослідження даних мір показали, що їх застосування може сприяти виявленню точок біфуркації, переходів «хаос–порядок» і т.і.

Пізніше були запропоновані міри, що використовують густину вертикальних (або горизонтальних) структур: *laminarity* (LAM, ламінарність), *trapping time* (TT, час затримки), що дозволяють виявляти переходи «хаос–хаос». Слід зазначити також нечутливість цих мір до вимог стаціонарності і довжини досліджуваних часових рядів.

**Результати.** Введемо кількісні характеристики введених мір. Для цього визначимо величини

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ рекурентні,} \\ 0 \text{ інакше} \end{cases},$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ та } (i+1, j+1) \text{ або } (i-1, j-1) \text{ рекурентні,} \\ 0 \text{ інакше} \end{cases},$$

Тепер коефіцієнти самоподібності і передбачуваності будуть, відповідно, рівні

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{ij}, \quad (3)$$

$$DET = \frac{\sum_{i,j=1}^N D_{ij}}{\sum_{i,j=1}^N R_{ij}}. \quad (4)$$

Якщо  $N_l$  - число діагональних ліній, а  $l_i$  - довжина  $i$ -тої діагональної лінії, то довжина найдовшої діагональної лінії визначається виразом  $L = \max(l_i; i = 1, \dots, N_l)$ .

Ентропія Шеннона для функції  $f(x)$  має вигляд

$$H(x) = -\sum_x f(x) \log f(x), \text{ а для розподілу}$$

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$

Для розподілу  $p(l)$  довжини діагональних ліній ентропія Шеннона дорівнює

$$ENTR = -\sum_{l=1}^{N_l} p(l) \ln p(l). \quad (5)$$

Наявність діагональної лінії довжини  $l$  означає, що сегмент траєкторії близький протягом  $l$  кроків часу до іншого сегменту траєкторії в інший час; тому ці лінії пов'язані з дивергенцією сегментів траєкторії. Середня довжина діагональної лінії

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P(l)} \quad (6)$$

є середнім часом, протягом якого два сегменти траєкторії близькі один одному, і може бути інтерпретований як середній час прогнозу.

Попередні міри відносяться до діагональних (горизонтальних) ліній на рекурентній карті. В той же час існують і вертикальні лінії з відповідними мірами.

Повне число вертикальних ліній довжини  $v$  на в РД дається гістограмою

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}.$$

Аналогічно визначенню детермінізму, (рівняння (2)), може бути обчислено відношення рекурентних точок, які формують вертикальні структури до повного набору рекурентних точок

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)}. \quad (7)$$

Ця міра називається *ламінарністю*. Обчислення LAM проводяться для тих  $v$ , які перевищують мінімальну довжину  $v_{\min}$ . Для рекурентних карт часто приймають  $v_{\min} = 2$ . Величина LAM зменшується, якщо РД складається з більш поодиноких рекурентних точок, ніж вертикальні структури.

Середня довжина вертикальних структур дається виразом

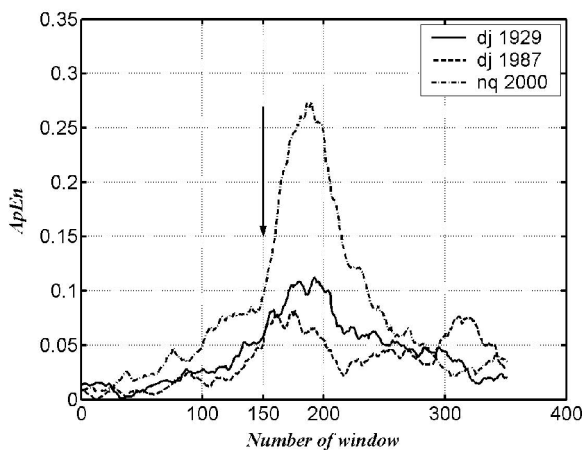
$$TT = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^N P(v)} \quad (8)$$

і називається часом затримки (захвату). Його обчислення вимагає також розгляду мінімальної довжини  $v_{\min}$ , як і у випадку з LAM. Міра TT оцінює середній час, що система перебуватиме в певному стані, або як довго цей стан буде захоплений. На відміну від кількісних мір, заснованих на діагональних лініях, введені щойно міри можуть застосовуватись до переходів «хаос-хаос».

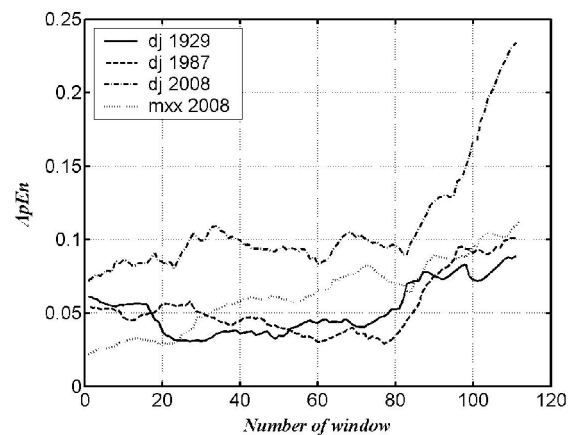
## МОДЕЛЮВАННЯ КРИЗОВИХ ЯВИЩ.

Важливо відслідковувати зміну  $ApEn$  з часом. Для цього ентропія знаходиться для фіксованого проміжку часу (вікна), потім вікно зміщується з певним кроком і процедура розрахунку повторюється, поки не вичерпується вихідний часовий ряд.

На рисунку 1 наведені результати розрахунків  $ApEn$  для індексів фондових ринків США: Dow Jones (dj 1929, dj 1987, dj 2008) та NASDAQ (nq 2000). Ентропія шаблонів використана для аналізу особливостей динаміки складної системи, яка містить кризу. Часові ряди на рис. 1a побудовані так, що вказані кризи припадають на середину ряду, загальна довжина якого 2000 точок. Якщо ширина вікна дорівнює 250 днів (як на рис. 1a), а крок зміщення вікна становить 5 днів, то криза припадає на 150 день, як і вказано на рисунку. Видно, що наближення кризи призводить до помітного зростання складності системи. При цьому результат носить універсальний характер і не залежить від природи кризи.



a)



b)

Рис.1. Порівняльний аналіз ентропії подібності для часових рядів, які містять кризу (a) та у випадку, коли криза можлива у майбутньому (b)

Рис. 1b побудований так. Візьмемо часові ряди для відомих криз 1929, 1987 років довжиною 800 днів у період за 200 днів до кризи (такий вибір часових проміжків стане зрозумілим пізніше при розрахунку вейвлет-ентропії).



Аналогічно для часових рядів, які характеризують кризу 2008 року, також виділимо проміжки довжиною 800 днів до 3 березня 2008 року включно. З рисунку 1 видно, що поведінка ентропії подібності в даний момент корелює з передкризовою поведінкою для відомих криз. МХХ – індекс мексиканського фондового ринку, вибраний для прикладу серед аналогічних індексів фондових ринків, які демонструють подібну поведінку *ApEn*.

Таким чином, ентропія подібності може слугувати передвісником кризового явища, яке формується на фінансовому ринку.

На рисунку 2 наведені типові приклади залежності від часу (time) енергетичної поверхні на різних масштабах (scale) (a) та масштабової вейвлет-ентропії (дискретний аналіз) для вказаних криз (b).

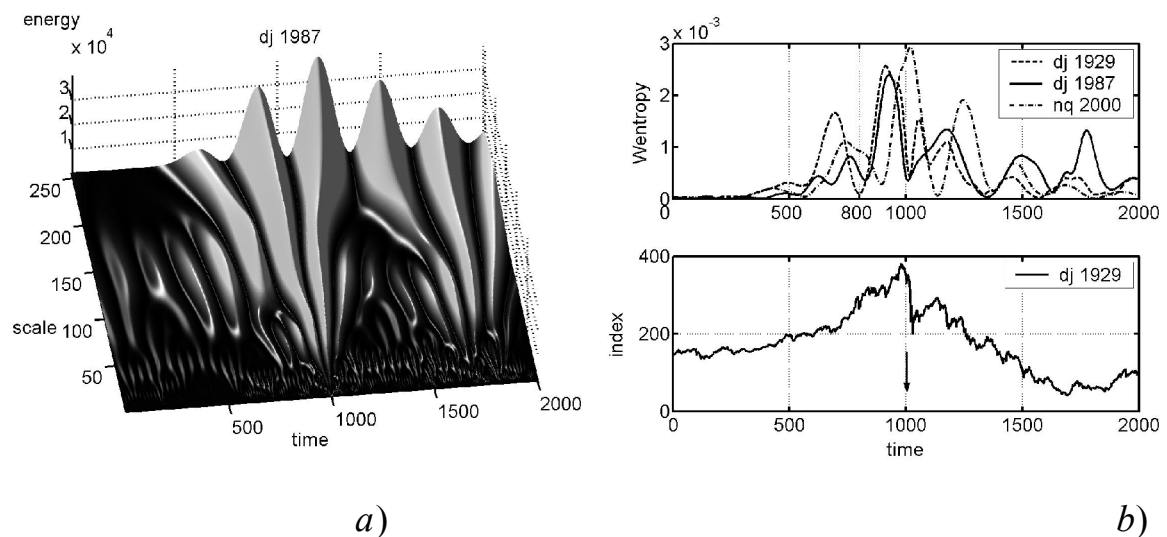


Рис.2. Енергія і вейвлет-ентропія для рядів, які містять кризу в точці 1000.

На рисунку справа у випадку кризи dj 1929 точка кризи вказана стрілкою

Можна побачити, що на енергетичній поверхні кризовий період характеризується специфічним наростанням, а потім убуттям певних «хвиль», максимальна (третя) з яких приходить на кризу (точка 1000), попередня (друга) на точку 800.

Використавши вказану методику для прогнозування можливої кризи 2008 року, ми визначили за даними індексів Доу Джонса (DJ) і Лондонської біржі

(FTSE 100) дату кризи як жовтень-листопад 2009 року, що добре співпало з даними ре

Ми дослідили чутливість кількісних мір аналізу рекурентних діаграм до кризових станів фондових ринків [4-6]. При цьому у якості тестових рядів вибрані різні індекси, які містять кризи, що відбулися у той чи інший період і навіть мали різні причини виникнення. До таких відносяться кризи жовтня 1929 року за даними індексу Dow Jones, жовтня 1987 року за даними S&P 500 та крах ринку NASDAQ, який припадає на квітень 2000 року. Для порівняння особливостей мір рекурентного аналізу для різних криз ми вибрали ряди однієї довжини (2000 днів). При цьому криза знаходиться посередині ряду.

У якості інструментарію рекурентного аналізу вибрано пакет програм, створений групою нелінійної динаміки Постдамського університету - Cross Recurrence Plot Toolbox for Matlab (<http://tocsy.agnld.uni-postdam.de>). Нами модифіковано тільки модуль `srqa(a)` для більш зручного інтерфейсу роботи з окремими мірами кількісного аналізу. Для модуля задається часове вікно (у нашому випадку воно дорівнює 500 днів), для якого розраховуються показники (3)-(8). Після цього часове вікно зміщується з кроком  $\Delta t$  ( $\Delta t=1$ ) до тих пір, поки не вичерпується динамічний ряд [7-8].

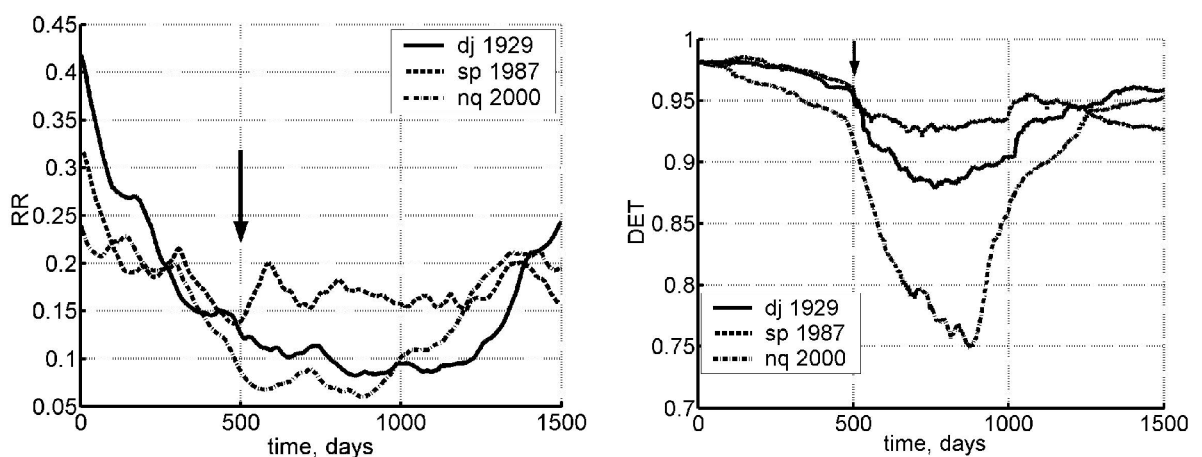


Рис. 2. Динаміка коефіцієнтів самоподібності і передбачуваності при наближенні до точки кризи (вказана стрілкою)

Результати розрахунків основних мір рекурентного аналізу для тестових рядів зображені на рисунках 2-4.

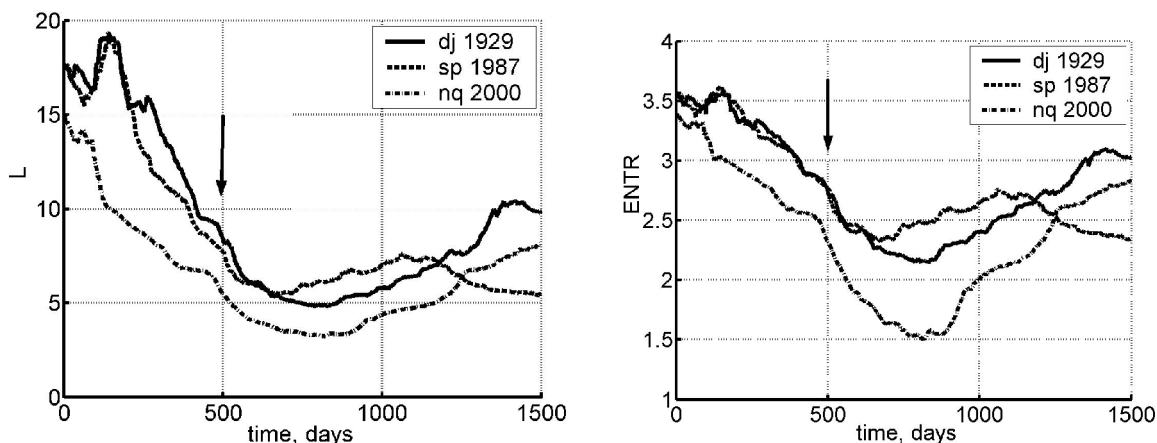


Рис.3. Зміни мір рекурентного аналізу L та ENTR для вибраних часових рядів, які містять кризи

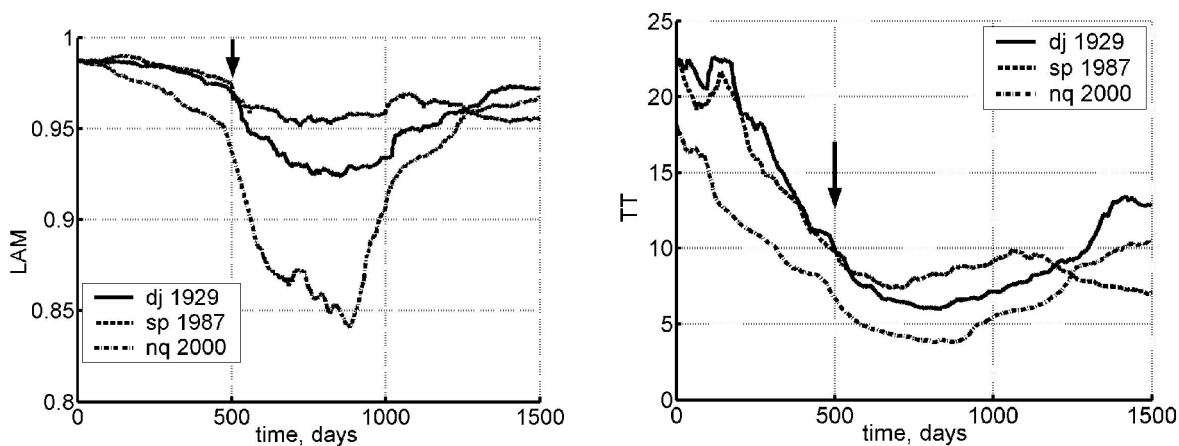


Рис. 4. Зміна показника ламінарності і часу затримки по мірі наближення до кризи

Аналіз отриманих результатів вказує на можливості використання кількісних мір рекурентного аналізу для моніторингу та передбачення кризових змін на фінансових ринках. Дійсно, не дивлячись на дату та причини кризи, використані нами міри помітно змінюються при наближенні до точки кризи. При цьому різні міри проявляють і різні рівні чутливості. Так, міри RR, L, ENTR і TT змінюються у кризовий період на 300-400% у порівнянні з до кризовим. В той же час міри DET і LAM змінюються всього на 15-20%. Тому

перша група показників повинна використовуватись для передбачення кризових станів у першу чергу.

**ВИСНОВКИ.** Отже, розглянуті види ентропійних показників можуть використовуватися для кількісної оцінки можливих структурних і динамічних змін в економічних системах. Більш того, вони проявляють характерну поведінку у передкризовий період, яка дозволяє будувати передвісники кризових явищ.

Перспективним напрямком нам представляється використання ідеї Тсалліса щодо не екстенсивності економічних даних, яка дійсно проявляється на практиці. Подальших досліджень вимагає застосування ідей нерівноважної термодинаміки для складних систем [17]. Ці та інші результати стосовно фінансової кризи, яка наближається, планується опублікувати найближчим часом.

Таким чином, рекурентний аналіз може слугувати для кількісної оцінки критичних і кризових явищ на фінансових ринках. Розглянуті закономірності поведінки вказаних мір мають універсальний характер і не залежать від виду кризової системи. Так, аналогічні результати одержані для відомих криз фондового, валютного, енергетичного ринків.

Одержані результати також можна використати для побудови експертних систем, наприклад, на базі нечіткої логіки, нейронних мереж тощо [9].

### **Список використаної літератури**

1. Boccaletti S., Latorab V., Morenod Y., Chavezf M., Hwanga D.-U. Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports, 2006. v.424.-P.175 – 308.
2. Ganchuk A., Derbentsev V., Soloviev V. Multifractal properties of the Ukraine stock market // arXiv:physics/0608009 v1 1 Aug 2006.
3. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // Phys.Rep., 2007, v.438.-P.237-329.

4. Fabretti A., Ausloos M. Recurrence Plot and Recurrence Quantification Analysis Techniques for detecting a critical regime. Examples from financial market indices // Int. Journ. Mod. Phys., 2005, v. C 16.-P. 134-148
5. Fabretti A., Ausloos M. Recurrence analysis of the NASDAQ crash of April 2000 // arXiv:physics/0505170 v1 24 May 2005.
6. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах.- М.: Интернет-трейдинг, 2003.- 400 с.
7. Дербенцев В.Д., Соловйов В.М., Сердюк О.В. Передвісники критичних явищ в складних економічних системах – Новое в экономической кибернетике: (Сб. науч. ст.) Под общ. ред. Ю.Г.Лысенко; Донецкий нац. ун-т // Моделирование нелинейной динамики экономических систем.- Донецк: ДонНУ, 2005.-№1.-С.5-13
8. Соловйов В. М, Кононенко В.В., Сердюк О.А. Виявлення передвісників кризових явищ. // Вісник Криворізького технічного університету. Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: КТУ, 2005. – Вип.. 8. – С.224 – 228.
9. Матвійчук А.В. Моделювання та аналіз економічних систем на підґрунті теорії нечіткої логіки // Автореф. дис. докт. екон. н., К.: КНЕУ, 2007.-33 с.