

УДК 330.46; 519.86

**В.М. СОЛОВЙОВ**, доктор фіз.-мат. наук, професор,  
зав. каф. економічної кібернетики

Криворізького економічного інституту ДВНЗ

«Київський національний економічний університет  
ім. Вадима Гетьмана»,

**В.В. ЩЕРБА**, здобувач каф. економічної кібернетики

## **ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬКІСНОГО АНАЛІЗУ РЕКУРЕНТНИХ ДІАГРАМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ УНІВЕРСАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КРИЗОВИХ ЯВИЩ**

**Анотація.** Рекурентні діаграми (РД) і кількісний аналіз рекурентних діаграм (КАРД) являють собою методології чисельного аналізу сигналів і здатні працювати з нелінійними і нестационарними динамічними системами. Крім того вони добре відображають зміни станів динамічної системи. Показано, що РД і КАРД виявляють універсальність критичного режиму в індексах фондового ринку перед крахом. Досліджувались часові ряди довжиною 2000 днів, у яких посередині знаходилась криза. Аналіз проведено на щоденних цінах закриття для індексів Dow Jones і S&P 500 (відповідно, крахи 1 Жовтня 1929 року та 19 жовтня 1987 року). Крах ринку NASDAQ припадає на 17 квітня 2000 року.

**Ключові слова:** рекурентна діаграма, кількісний рекурентний аналіз, аналіз нелінійних часових рядів, крах фондового ринку

**Annotation.** Recurrence Plot (RP) and Recurrence Quantification Analysis (RQA) are signal numerical analysis methodologies able to work with non linear dynamical systems and non stationarity. Moreover they well evidence changes in the states of a dynamical system. It is shown that RP and RQA detect the critical regime universality in stock market indices before a crash. It is investigational time

series by length 2000 days, which a crisis is in the meadle of. The analysis is made on DJ and S&P 500 daily closing price (crashes October 01, 1929 and October 19, 1987, respectively). The NASDAQ crash time has been estimated to be on April 17, 2000.

**Keywords:** Recurrence Plot, Recurrence Quantification Analysis, nonlinear time series analysis, stock market crash

**Вступ.** Дослідження складних систем, як природних, так і штучних, показали, що в їх основі лежать нелінійні процеси, ретельне вивчення яких необхідне для розуміння і моделювання складних систем. У останні десятиліття набір традиційних (лінійних) методик дослідження був істотно розширений нелінійними методами, одержаними з теорії нелінійної динаміки і хаосу; багато досліджень були присвячені оцінці нелінійних характеристик і властивостей процесів, що протікають в природі (скейлінг, фрактальна розмірність) [1,2]. Проте більшість методів нелінійного аналізу вимагає або достатньо довгих, або стаціонарних рядів даних, які на практиці одержати досить важко. Ситуація змінилася з появою і широким розповсюдженням аналізу рекурентних діаграм [3]

**Постановка завдання.** Розглянемо ідею і коротко теорію рекурентного аналізу, його можливості та визначимо основні переваги застосування при аналізі і прогнозування складних фінансово-економічних систем.

### 1. Фазовий простір, його реконструкція

Стан системи описується її змінними стану

$$x^1(t), x^2(t), \dots, x^d(t),$$

де верхній індекс – номер змінної. Набір із  $d$  змінних стану в момент часу  $t$  складає вектор стану  $\vec{x}(t)$  в  $d$ -вимірному фазовому просторі. Даний вектор переміщується в часі у напрямі, який визначається його вектором швидкості:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \partial_t \vec{x}(t) = \vec{F}(x) \quad (1) .$$

Послідовність векторів  $\vec{x}(t)$  утворює траєкторію у фазовому просторі, причому поле швидкості  $\vec{F}$  дотичне до цієї траєкторії. Еволюція траєкторії описує динаміку системи і її атрактор. Знаючи  $\vec{F}$ , можна одержати інформацію про стан системи в момент  $t$  шляхом інтеграції виразу (1). Оскільки форма траєкторії дозволяє судити про характер процесу (періодичні, хаотичні, трендостійкі тощо процеси мають характерні фазові портрети), то для визначення стану системи не обов'язково проводити інтеграцію, а достатньо побудувати графічне відображення траєкторії.

При дослідженні складних систем часто немає інформації про всі змінні стану, або не всі з них можливо виміряти. Як правило, є єдине спостереження, проведене через дискретний часовий інтервал  $\Delta t$ . Таким чином, вимірювання записуються у вигляді ряду часового ряду  $u_i(t)$ , де  $t = i \cdot \Delta t$ .

Взаємодії і їх кількість в складних системах такі, що навіть по одній змінній стану можна судити про динаміку всієї системи в цілому. Тобто, еквівалентна фазова траєкторія, що зберігає структури оригінальної фазової траєкторії, може бути відновлена з одного спостереження або часового ряду за теоремою Такенса методом часових затримок:

$$\vec{x}(t) = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+(m-1)\tau}) ,$$

де  $m$  – розмірність вкладення,  $\tau$  – часова затримка (реальна часова затримка визначається як  $\tau \cdot \Delta t$ ). Топологічні структури відновленої траєкторії зберігаються, якщо  $m \geq 2 \cdot d + 1$ , де  $d$  – розмірність атрактора. На практиці більшості випадків атрактор може бути відновлений і при  $m \leq 2d$ . Затримка, як правило, вибираються апріорно.

## 2. Рекурентний аналіз

Більшості процесів в природі властива яскраво виражена рекурентна поведінка, така, як періодичність або іррегулярна циклічність. Більш того, рекурентність (повторюваність) станів в значенні проходження подальшої

траєкторії достатньо близько до попередньої є фундаментальною властивістю дисипативних динамічних систем. Ця властивість була відмічена Пуанкаре ще в 80-х роках XIX століття і згодом сформульована у вигляді «теорема рекурентності»: *Якщо система зводить свою динаміку до обмеженої підмножини фазового простору, то система майже напевно, тобто з вірогідністю, практично рівною одиниці, скільки завгодно близько повертається до якого-небудь спочатку заданого режиму.*

Суть цієї фундаментальної властивості у тому, що, не дивлячись на те, що мале збурення в складній динамічній системі може привести систему до експоненціального відхилення від її стану, через деякий час система прагне повернутися до стану, деяким чином близького до попереднього, і проходить при цьому подібні етапи еволюції. Переконатися в цьому можна за допомогою графічного зображення траєкторії системи у фазовому просторі. Проте можливості такого аналізу сильно обмежені. Як правило, розмірність фазового простору складної динамічної системи більша трьох, що робить практично незручним його розгляд напряду; єдина можливість – проєкції в дво- і тривимірні простори, що часто не дає вірного уявлення про фазовий портрет.

У 1987 р. Екман (Eckmann) і співавтори запропонували спосіб відображення  $m$ -вимірної фазової траєкторії станів системи  $\vec{x}(t)$  завдовжки  $N$  на двовимірну квадратну двійкову матрицю розміром  $N \times N$ , в якій одиниця (чорна точка) відповідає повторенню стану при деякому часі  $i$  в деякий інший час  $j$ , а обидві координатні осі є осями часу. Таке представлення було назване рекурентною діаграмою (recurrence plot, RP), оскільки воно фіксує інформацію про рекурентну поведінку системи.

Математично вищесказане описується як

$$R_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \vec{x} \in \mathfrak{R}^m, i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

В (2)  $N$  – кількість даних станів,  $x_i, \varepsilon_i$  – розмір околиці точки  $\vec{x}$  у момент  $i$ ,  $\|\cdot\|$  – норма і  $\Theta(\cdot)$  – функція Хевісайда.

Непрактично і, як правило, неможливо знайти повну рекурентність у значенні  $\vec{x}_i \equiv \vec{x}_j$  (стан динамічної, а особливо – хаотичної системи не повторюється повністю еквівалентно початковому стану, а наближається до нього скільки завгодно близько). Таким чином, рекурентність визначається як достатня близькість стану  $\vec{x}_j$  до стану  $\vec{x}_i$ . Іншими словами, рекурентними є стани  $\vec{x}_j$ , які потрапляють в  $m$ -вимірну околицю з радіусом  $\varepsilon_i$  і центром в точці  $\vec{x}_i$ . Ці точки  $\vec{x}_i$  називаються *рекурентними точками* (див. рис.1).

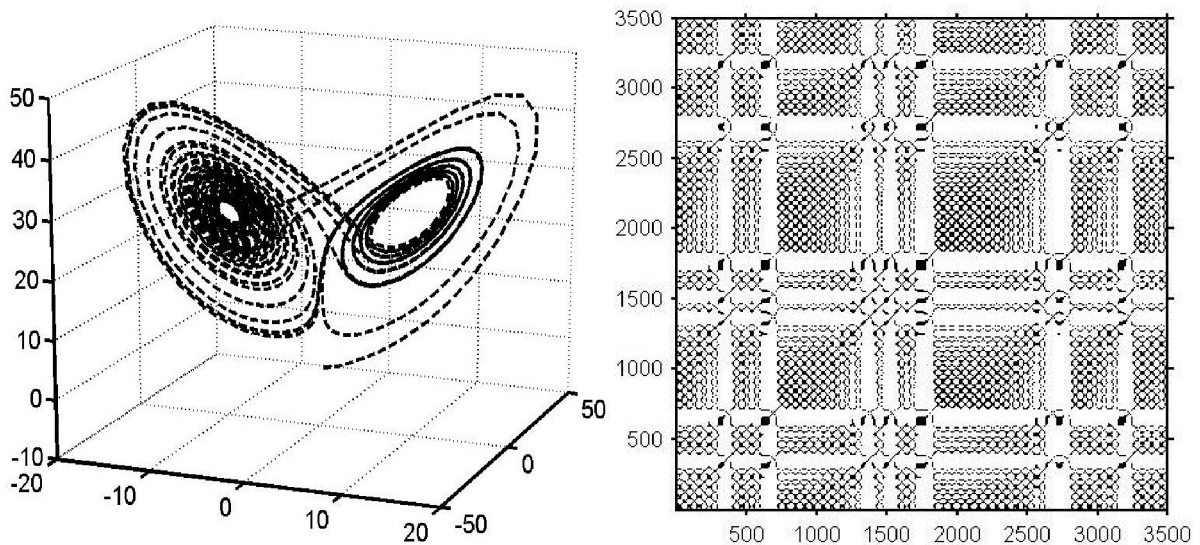


Рис.1. Атрактор Лоренця (зліва) і його рекурентна карта (справа)

На рисунку 1 для прикладу наведена система Лоренця (атрактор – зліва) і відповідна їй рекурентна карта. Рекурентні точки на рисунку спривділені чорним кольором.

Оскільки  $R_{i,i} = 1 (i = 1, \dots, N)$  за визначенням, то рекурентна діаграма завжди під кутом  $\pi/4$  до осей координат містить чорну діагональну лінію – лінію ідентичності. Відмітимо, що довільно узята рекурентна точка не несе якої-небудь корисної інформації про стани в часи  $i$  і  $j$ . Тільки вся

сукупність рекурентних точок дозволяє відновити властивості системи. При цьому зовнішній вигляд рекурентної діаграми дозволяє судити про характер процесів, які протікають в системі, наявності і впливі шуму, станів повторення і завмирання (ламінарності), здійсненні в ході еволюції системи різких змін стану (екстремальних подій).

### 3. Аналіз діаграм

Очевидно, що процеси різної поведінки даватимуть рекурентні діаграми з різним малюнком. Таким чином, візуальна оцінка діаграм може дати уявлення про еволюцію досліджуваної траєкторії.

Виділяють два основних класи структур зображення: *топология*, що представляється крупномасштабними структурами, і *текстура*, що формується дрібномасштабними структурами.

Топология дає загальне уявлення про характер процесу. Виділяють чотири різних класи:

- *однорідні* рекурентні діаграми типові для стаціонарних і автономних систем, в яких час релаксації малий у порівнянні з довжиною ряду;
- *періодичні* структури, що повторюються (діагональні лінії, узори у шаховому порядку). Вони відповідають різним осцилюючим системам з періодичністю в динаміці;
- *дрейф* присутній у систем з параметрами, що поволі змінюються. Це робить білими лівий верхній і правий нижній кути рекурентної діаграми;
- *різкі зміни* в динаміці системи, рівно як і екстремальні ситуації, обумовлюють появу білих областей або смуг. Тому рекурентні діаграми спрощують виявлення екстремальних і рідкісних подій.

Докладний розгляд рекурентних діаграм дозволяє виявити дрібномасштабні структури – текстуру, яка складається з простих точок, діагональних, горизонтальних і вертикальних ліній. Комбінації вертикальних і горизонтальних ліній формують прямокутні кластери точок:

- самотні, окремо розташовані рекурентні точки з'являються в тому разі, коли відповідні стани рідкісні, або нестійкі в часі, або викликані сильною флуктуацією. При цьому вони не є ознаками випадковості або шуму;

- діагональні лінії  $R_{i+k,j+k} = 1$  (при  $k = 1..l$  де  $l$  – довжина діагональної лінії) з'являються у разі, коли сегмент траєкторії у фазовому просторі пролягає паралельно іншому сегменту, тобто траєкторія повторює саму себе, повертаючись в одну і ту ж область фазового простору у різний час. Довжина таких ліній визначається часом, протягом якого сегменти траєкторії залишаються паралельними; напрям (кут нахилу) ліній характеризує внутрішній час підпроцесів, відповідних даним сегментам траєкторії. Проходження ліній паралельно лінії ідентичності свідчить про однаковий напрям сегментів траєкторії, перпендикулярно – про протилежний («відображені» сегменти), що може також бути ознакою реконструкції фазового простору з невідповідною розмірністю вкладення. Нерегулярна поява діагональних ліній є ознакою хаотичного процесу;

- вертикальні (горизонтальні) лінії  $R_{i,j+k} = 1$  (при  $k = 1..v$ , де  $v$  – довжина вертикальної або горизонтальної лінії) виділяють проміжки часу, в котрі стан системи не змінюється або змінюється трохи (система як би «заморожена» на цей час), що є ознакою «ламінарих» станів.

Саме ці комбінації використовуються для обчислення мір *кількісного аналізу* рекурентних діаграм (recurrence quantification analysis, RQA). Збілут і Веббер (див. для деталей огляд [1]) розробили інструмент обчислення ряду мір на основі підрахунку густини рекурентних точок і побудови частотного розподілу довжин діагональних ліній: *recurrence rate* (RR, коефіцієнт самоподібності), *determinism* (DET, передбачуваність), *divergence* (DIV, зворотна величина максимальної довжини діагональної лінії), *entropy* (ENTR, ентропія) і *trend* (TREND, тренд). Обчислення цих мір в підматрицях

рекурентної діаграми уздовж лінії ідентичності показує поведінку цих мір у часі. Дослідження даних мір показали, що їх застосування може сприяти виявленню точок біфуркації, переходів «хаос–порядок» і т.і.

Пізніше були запропоновані міри, що використовують густину вертикальних (або горизонтальних) структур: *laminarity* (LAM, ламінарність), *trapping time* (ТТ, час затримки), що дозволяють виявляти переходи «хаос–хаос». Слід зазначити також нечутливість цих мір до вимог стаціонарності і довжини досліджуваних часових рядів.

**Результати.** Введемо кількісні характеристики введених мір. Для цього визначимо величини

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ рекурентні,} \\ 0, \text{ інакше} \end{cases},$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ та } (i+1, j+1) \text{ або } (i-1, j-1) \text{ рекурентні,} \\ 0, \text{ інакше} \end{cases},$$

Тепер коефіцієнти самоподібності і передбачуваності будуть, відповідно, рівні

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{ij}, \quad (3)$$

$$DET = \frac{\sum_{i,j=1}^N D_{ij}}{\sum_{i,j=1}^N R_{ij}}. \quad (4)$$

Якщо  $N_l$  - число діагональних ліній, а  $l_i$  - довжина  $i$ -тої діагональної лінії, то довжина найдовшої діагональної лінії визначається виразом  $L = \max(l_i; i = 1, \dots, N_l)$ .

Ентропія Шеннона для функції  $f(x)$  має вигляд

$$H(x) = -\sum_x f(x) \log f(x), \text{ а для розподілу}$$

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$



Для розподілу  $p(l)$  довжини діагональних ліній ентропія Шеннона дорівнює

$$ENTR = -\sum_{l=1}^{N_l} p(l) \ln p(l). \quad (5)$$

Наявність діагональної лінії довжини  $l$  означає, що сегмент траєкторії близький протягом  $l$  кроків часу до іншого сегменту траєкторії в інший час; тому ці лінії пов'язані з дивергенцією сегментів траєкторії. Середня довжина діагональної лінії

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P(l)} \quad (6)$$

є середнім часом, протягом якого два сегменти траєкторії близькі один одному, і може бути інтерпретований як середній час прогнозу.

Попередні міри відносяться до діагональних (горизонтальних) ліній на рекурентній карті. В той же час існують і вертикальні лінії з відповідними мірами.

Повне число вертикальних ліній довжини  $v$  на в РД дається гістограмою

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}.$$

Аналогічно визначенню детермінізму, (рівняння (2)), може бути обчислено відношення рекурентних точок, які формують вертикальні структури до повного набору рекурентних точок

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)}. \quad (7)$$

Ця міра називається *ламiнарністю*. Обчислення LAM проводяться для тих  $v$ , які перевищують мінімальну довжину  $v_{\min}$ . Для рекурентних карт

часто приймають  $v_{\min} = 2$ . Величина LAM зменшується, якщо РД складається з більш поодиноких рекурентних точок, ніж вертикальні структури.

Середня довжина вертикальних структур дається виразом

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^N P(v)} \quad (8)$$

і називається часом затримки (захвату). Його обчислення вимагає також розгляду мінімальної довжини  $v_{\min}$ , як і у випадку з LAM. Міра TT оцінює середній час, що система перебуватиме в певному стані, або як довго цей стан буде захоплений. На відміну від кількісних мір, заснованих на діагональних лініях, введені щойно міри можуть застосовуватись до переходів «хаос-хаос».

Ми дослідили чутливість кількісних мір аналізу рекурентних діаграм до кризових станів фондових ринків [4-6]. При цьому у якості тестових рядів вибрані різні індекси, які містять кризи, що відбулися у той чи інший період і навіть мали різні причини виникнення. До таких відносяться кризи жовтня 1929 року за даними індексу Dow Jones, жовтня 1987 року за даними S&P 500 та крах ринку NASDAQ, який припадає на квітень 2000 року. Для порівняння особливостей мір рекурентного аналізу для різних криз ми вибрали ряди однієї довжини (2000 днів). При цьому криза знаходиться посередині ряду.

У якості інструментарію рекурентного аналізу вибрано пакет програм, створений групою нелінійної динаміки Постдамського університету - Cross Recurrence Plot Toolbox for Matlab (<http://tocsy.agnld.uni-postdam.de>). Нами модифіковано тільки модуль `crqa(a)` для більш зручного інтерфейсу роботи з окремими мірами кількісного аналізу. Для модуля задається часове вікно (у нашому випадку воно дорівнює 500 днів), для якого розраховуються показники (3)-(8). Після цього часове вікно зміщується з кроком  $\Delta t$  ( $\Delta t=1$ ) до тих пір, поки не вичерпується динамічний ряд [7-8].

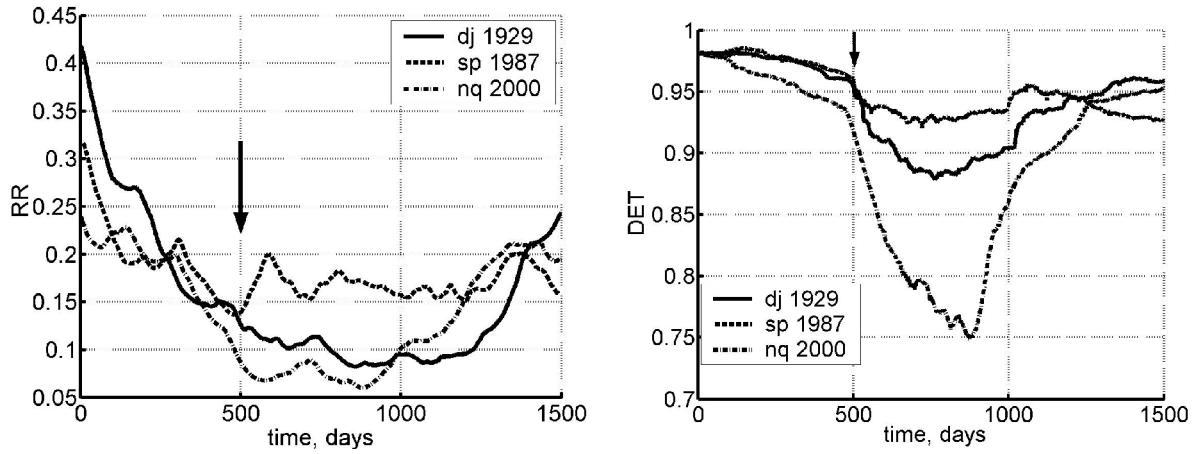


Рис. 2. Динаміка коефіцієнтів самоподібності і передбачуваності при наближенні до точки кризи (вказана стрілкою)

Результати розрахунків основних мір рекурентного аналізу для тестових рядів зображені на рисунках 2-4.

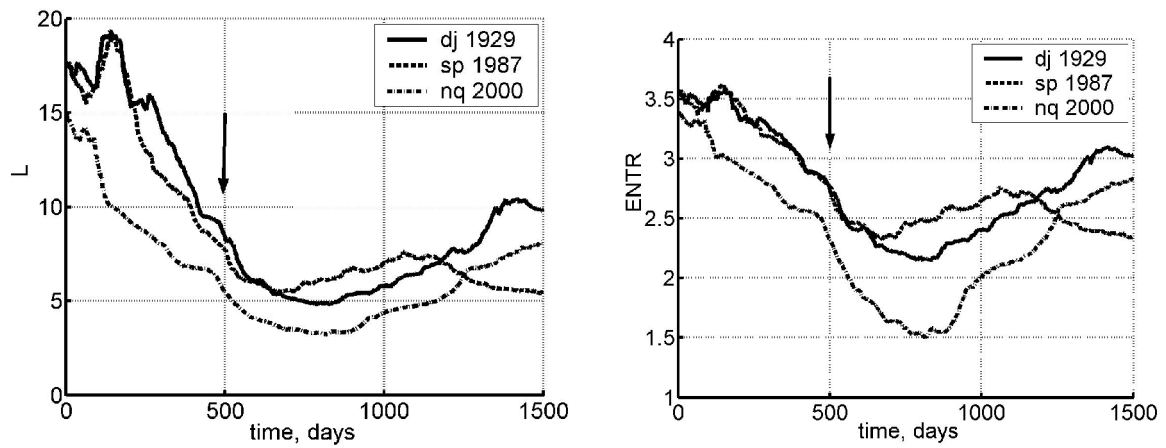


Рис.3. Зміни мір рекурентного аналізу L та ENTR для вибраних часових рядів, які містять кризи

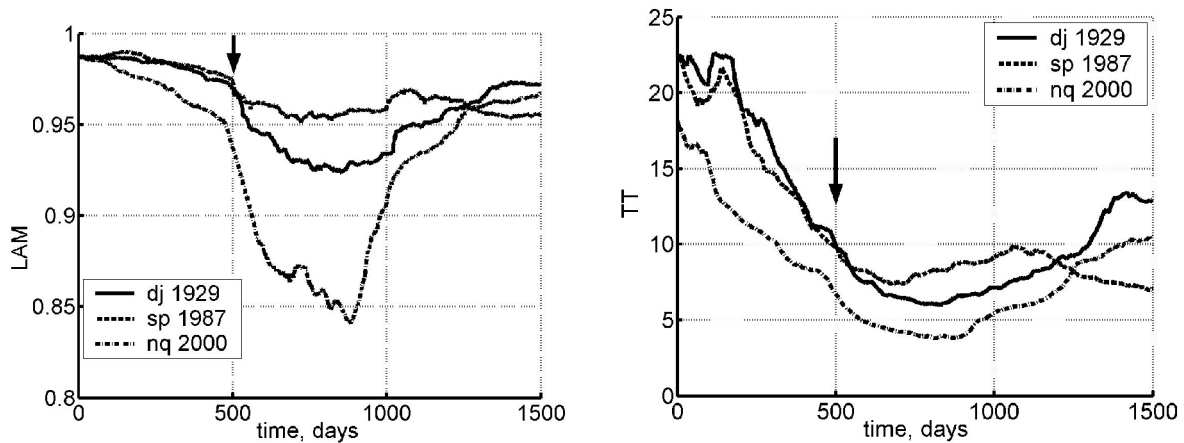


Рис. 4. Зміна показника ламінарності і часу затримки по мірі наближення до кризи

Аналіз отриманих результатів вказує на можливості використання кількісних мір рекурентного аналізу для моніторингу та передбачення кризових змін на фінансових ринках. Дійсно, не дивлячись на дату та причини кризи, використані нами міри помітно змінюються при наближенні до точки кризи. При цьому різні міри проявляють і різні рівні чутливості. Так, міри RR, L, ENTR і TT змінюються у кризовий період на 300-400% у порівнянні з до кризовим. В той же час міри DET і LAM змінюються всього на 15-20%. Тому перша група показників повинна використовуватись для передбачення кризових станів у першу чергу.

**Висновки.** Таким чином, рекурентний аналіз може слугувати для кількісної оцінки критичних і кризових явищ на фінансових ринках. Розглянуті закономірності поведінки вказаних мір мають універсальний характер і не залежать від виду кризової системи. Так, аналогічні результати одержані для відомих криз фондового, валютного, енергетичного ринків.

Одержані результати також можна використати для побудови експертних систем, наприклад, на базі нечіткої логіки, нейронних мереж тощо [9].

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (№Ф25/659-2007 від 3.09.2007 р., № держреєстрації 0107U010947).

### Література

1. Boccaletti S., Latorab V., Morenod Y., Chavezf M., Hwanga D.-U. Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports, 2006. v.424.-P.175 – 308.
2. Ganchuk A., Derbentsev V., Soloviev V. Multifractal properties of the Ukraine stock market // arXiv:physics/0608009 v1 1 Aug 2006.
3. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // Phys.Rep., 2007, v.438.-P.237-329.
4. Fabretti A., Ausloos M. Recurrence Plot and Recurrence Quantification Analysis Techniques for detecting a critical regime. Examples from financial market indices // Int. Journ. Mod. Phys., 2005, v. C 16.-P. 134-148
5. Fabretti A., Ausloos M. Recurrence analysis of the NASDAQ crash of April 2000 // arXiv:physics/0505170 v1 24 May 2005.
6. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах.- М.: Интернет-трейдинг, 2003.- 400 с.
7. Дербенцев В.Д., Соловійов В.М., Сердюк О.В. Передвісники критичних явищ в складних економічних системах – Новое в экономической кибернетике: (Сб. науч. ст.) Под общ. ред. Ю.Г.Лысенко; Донецкий нац. ун-т // Моделирование нелинейной динамики экономических систем.- Донецк: ДонНУ, 2005.-№1.-С.5-13
8. Соловійов В. М, Кононенко В.В., Сердюк О.А. Виявлення передвісників кризових явищ. // Вісник Криворізького технічного університету. Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: КТУ, 2005. – Вип.. 8. – С.224 – 228.

9. Матвійчук А.В. Моделювання та аналіз економічних систем на підґрунті теорії нечіткої логіки // Автореф. дис. докт. екон. н., К.: КНЕУ, 2007.-33 с.