

ВИКОРИСТАННЯ ЕНТРОПІЙНИХ ПОКАЗНИКІВ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ СКЛАДНОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

В.М.Соловйов, Г.Б.Данильчук

Останніми роками було використано кілька підходів для ідентифікації механізмів, що лежать в основі розвитку та функціонування складних систем. Особливо корисні результати було отримано при їх дослідженні методами теорії випадкових матриць [1], моно- та мультифрактального аналізу [2], теорії хаосу з реконструкцією траєкторії системи у фазовому просторі та визначення її параметрів, таких як кореляційна розмірність, спектр показників Ляпунова, рекурентні карти [3]. Однак, застосування деяких із методів висуває вимоги до стаціонарності досліджуваних даних, потребує довгих часових рядів та комплексного обчислення кількох параметрів.

Іншим підходом до розгляду питання вивчення особливостей складних систем є обчислення характеристик ентропії. Метою даної роботи є аналіз сучасних тенденцій використання ентропійних характеристик системи для вимірювання динамічних властивостей складних систем.

В термодинаміці величина ентропії S є мірою кількості енергії у фізичній системі, яка не може бути використана для виконання роботи і є мірою безладдя, присутнього в системі. Поняття ентропії була вперше введено у 1865 році Рудольфом Клаузіусом [4]. Він визначив зміну ентропії термодинамічної системи при оборотному процесі як відношення зміни загальної кількості тепла ΔQ до величини абсолютної температури T :

$$\Delta S = \Delta Q / T .$$

Рудольф Клаузіус дав величині S ім'я «ентропія», що походить від грецького слова *τροπή*, «зміна» (зміна, перетворення). У 1877 році Людвіг Больцман зрозумів, що ентропія системи може відноситися до кількості можливих «мікростанів» (мікроскопічних станів), що узгоджуються з їх термодинамічними властивостями [5]. Больцман постулював що,

$$S = k_B \ln \Omega ,$$

де константу $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К ми знаємо тепер як сталу Больцмана, а Ω є числом мікростанів, які можливі в наявному макроскопічному стані. Цей постулат, відомий як принцип Больцмана, може бути оцінений як початок статистичної механіки, яка описує термодинамічні системи використовуючи статистичну поведінку компонентів, із яких вони складаються. Принцип Больцмана зв'язує мікроскопічні властивості системи (Ω) з однією з її термодинамічних властивостей (S).

Згідно визначенню Больцмана, ентропія є просто функцією стану. Більш того, оскільки (Ω) може бути тільки натуральним числом (1,2,3,...), ентропія повинна бути додатньою — виходячи з властивостей логарифма.

Клод Шеннон [6] запропонував формулу для оцінки невизначеності кодової інформації в каналах зв'язку, звану ентропією Шеннона:

$$S = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i ,$$

де p_i — вірогідність того, що символ i зустрічається в коді, який містить N символів, k — розмірний множник.

Концепція термодинамічної ентропії як міри хаосу системи добре відома у фізиці, однак, останніми роками поняття ентропії було застосоване до складних систем інших об'єктів (біологічних, економічних, соціологічних тощо) [7].

Аналогія між кількістю інформації і ентропією S , визначуваною з принципу Больцмана, очевидна. Досить покласти множник k рівним постійній Больцмана k_B і використовувати натуральний логарифм. Саме з цієї причини величину I називають інформаційною ентропією. Інформаційна ентропія (кількість інформації) була визначена по аналогії із звичайною ентропією, і

вона має властивості, характерні для звичайної ентропії: адитивність, екстремальні властивості і т.д. Проте ототожнювати звичайну ентропію з інформаційною не можна, оскільки неясно, яке відношення до інформаційних систем має друге начало термодинаміки.

Нагадаємо, що екстенсивна величина - це така характеристика системи, яка росте із збільшенням розмірів системи. Строгіше визначення: якщо наша система складається з двох незалежних підсистем A і B , то ентропію всієї системи можна одержати складанням ентропій підсистем:

$$S(A + B) = S(A) + S(B).$$

Саме ця властивість і означає екстенсивність, або адитивність ентропії.

Константіно Тсалліс [8] узагальнив формулу Шеннона на випадок неекстенсивності (не адитивності) ентропії.

У статистичній фізиці ентропія трактується через число мікростанів системи. Прагнучи, проте, визначити ентропію так, щоб вона залишалася екстенсивною величиною, статистична фізика (а точніше, кінетика) вимушена привертати недоказову гіпотезу молекулярного хаосу. Ця гіпотеза полягає у тому, що будь-які молекули, що стикаються, були до зіткнення ніяк не скорельовані, тобто ніяк не відчували один одного. Для багатьох (але не для всіх!) систем це, звичайно, цілком здорова аксіома. І саме з неї виходить згаданий вище знаменитий вираз для ентропії замкнутої системи. У статистичній фізиці показується, що така певна ентропія насправді є адитивною величиною і приймає максимальне значення в стані рівноваги.

Причина цього в тому, що у більшості систем сили взаємодії між частинами системи короткодіючі: кожна молекула відчуває лише декілька найближчих сусідів. Саме звідси слідує те, що термодинаміка таких макроскопічних систем — екстенсивна. Саме такі системи оточують нас в повсякденному житті. Але в природі є і далекодіючі сили: гравітаційні, інформаційні та ін. Виявляється, що в складних системах еволюція системи в даний момент часу залежить не тільки від параметрів системи в цей конкретний момент часу, але і від її параметрів якийсь час назад. Ефекти пам'яті можуть легко привести до порушення гіпотези молекулярного хаосу. Дійсно, вони можуть означати, що окремі частинки перед зіткненням "пам'ятають" одне одного, їх рух не є повністю некорельованим. А як ми пам'ятаємо, припущення молекулярного хаосу лежить в основі больцманівського виразу для ентропії. Значить, цей вираз не годиться для систем з пам'яттю. Отже головний висновок для нас полягає в наступному твердженні. Існують системи, в яких є сильні кореляції, сильна взаємодія між всіма частинами системи. Це приводить до порушення термодинамічної адитивності системи, тому їх не вдається описати больцманівською статистикою і термодинамікою. Значить, необхідний інший підхід, який якимсь чином зумів би справитися з режимом сильного зв'язку між всіма частинками системи.

Весь цей підхід базується на сміливій ідеї Тсалліса: цілком можливо, що сильна взаємодія в термодинамічно аномальних системах настільки міняє картину, що приводить до абсолютно нових ступенів свободи, до абсолютно іншої статистичної фізики не-больцманівського типу. Сьогодні ця гіпотеза не доведена. Більш того, досконало незрозуміло, що це за нові ступені свободи. Тому це твердження залишається поки лише гіпотезою. Але з другого боку, інтуїція підказує, що такий перехід в тому або іншому вигляді насправді може мати місце і важливо зрозуміти, до чого це може привести.

Якщо майже нічого невідоме про ці нові ступені свободи, то як же тоді можна одержати щось конструктивне? Тсалліс запропонував наступне. Наша єдина зачіпка полягає у тому, що статистика буде не-больцманівська. Це значить, що вираз для ентропії буде вже іншим. Так давайте придумавемо яку-небудь формулу для ентропії, яка, по-перше, переходила б в стандартну формулу в межі слабого зв'язку, а по-друге, змогла б описати неекстенсивні системи. З цією метою Тсалліс узяв стандартний вираз для ентропії і замість логарифма ввів нову функцію — степеневу:

$$\ln(x) \Rightarrow \ln_q(x) \Rightarrow (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$$

з числовим параметром q . Якщо q прямує до 1, $\ln_q(x)$ переходить в справжній логарифм, у чому можна переконатися простим диференціюванням. Нова формула для q -ентропії виглядає так:

$$S_q = -\sum_i (p_i^q \ln_q(p_i)) = (1 - \sum p_i^q) / (q - 1).$$

Якщо $q \rightarrow 1$, то q -ентропія переходить в стандартну больцманівську ентропію.

Головний наслідок такої заміни: q -ентропія є вже неекстенсивною функцією. Якщо всю систему розбити на дві незалежні підсистеми A і B (нагадаємо, що ми вже перейшли до нових невзаємодіючих, а значить, і незалежним ступеням свободи!), то ми одержимо:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B).$$

Отже, параметр q — це міра неекстенсивності системи.

В останні роки було показано, що часові ряди, які характеризують фінансово-економічні системи характеризуються не екстенсивними величинами [9].

Не менш різноманітні і приклади застосування поняття ентропії. Ідеологія всіх таких додатків пов'язана з екстремальними принципами природознавства – зростаюче значення ентропії параметризує зміну стану систем самої різної природи в процесі їх “природної” еволюції. Відповідний принцип розвитку одержав назву “принцип максимуму ентропії”. Для закритих термодинамічних систем їх ентропія зростає (“друге начало” термодинаміки). Розповсюдження “другого начала” на Всесвіт і всі процеси в ньому привело до уявлення про ентропійну “стрілу часу”. Принцип максимуму ентропії застосовується, зокрема, у фізиці, лінгвістиці, екології, математиці, механіці, економіці і інформатиці.

Надзвичайно важливим є використання різних видів ентропійних показників щодо економічних часових рядів, дослідження їх можливостей і схем використання.

Для визначення ентропійних характеристик часових рядів, які відповідають складним системам в останні роки найчастіше використовуються декілька різних визначень ентропії: ентропії подібності (Approximate entropy) [10, 11], ентропії шаблонів (Sample entropy) [11, 12], багатомасштабної ентропії (Multiscale entropy) [13, 14] та вейвлет-ентропії [15, 16].

В даній роботі ми використовуємо тільки ентропію подібності і вейвлет-ентропію. Такий вибір інструментів пов'язаний із специфікою досліджень критичних і кризових явищ. Такими є найбільш відомі кризи фондового ринку 1929, 1987, 2000 рр., а також фінансова криза 2008 року, динаміка і наслідки якої поки що непередбачені.

Метод розрахунку ентропії подібності подано в [10]. Ентропія подібності ($ApEn$) є “статистикою регулярності”, що визначає можливість передбачувати флуктуації в часових рядах. Інтуїтивно вона означає, що наявність повторюваних шаблонів (послідовностей певної довжини, побудованих із чисел ряду, що слідує одне за іншим) флуктуацій у часовому ряді призводить до більшої передбачуваності часового ряду порівняно із рядами, де повторюваності шаблонів немає. Порівняно велике значення $ApEn$ показує ймовірність того, що подібні між собою шаблони спостережень не будуть слідувати один за одним. Іншими словами, часовий ряд, що містить велику кількість повторюваних шаблонів, має порівняно мале значення $ApEn$, а значення $ApEn$ для менш передбачуваного (більш складного) процесу є більшим.

При розрахунку $ApEn$ для даного часового ряду S_N , що складається із N значень $t(1)$, $t(2)$, $t(3)$, ..., $t(N)$, вибираються два параметри, m та r . Перший з цих параметрів, m , вказує довжину шаблону, а другий – r – визначає критерій подібності. Досліджуються підпоследовності елементів часового ряду S_N , що складаються з m чисел, взятих, починаючи з номера i , і називаються векторами $p_m(i)$. Два вектори (шаблони) $p_m(i)$ та $p_m(j)$ будуть подібними, якщо всі різниці пар їх відповідних координат є меншими за значення r , тобто якщо

$$|t(i + k) - t(j + k)| < r \text{ для } 0 \leq k < m.$$

Для розглядуваної множини P_m всіх векторів довжини m часового ряду S_N можна обраховуються значення

$$C_{im}(r) = \frac{n_{im}(r)}{N - m + 1},$$

де $n_{im}(r)$ – кількість векторів у P_m , що подібні вектору $p_m(i)$ (враховуючи вибраний критерій подібності r). Значення $C_{im}(r)$ є часткою векторів довжини m , що мають схожість із вектором такої ж довжини, елементи якого починаються з номера i . Для даного часового ряду обраховуються значення $C_{im}(r)$ для кожного вектора у P_m , після чого знаходиться середнє значення $C_m(r)$, яке виражає розповсюдженість подібних векторів довжини m у ряду S_N . Безпосередньо ентропія подібності для часового ряду S_N з використанням векторів довжини m та критерію подібності r визначається за формулою:

$$ApEn(S_N, m, r) = \ln \left(\frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)} \right),$$

тобто як натуральний логарифм відношення повторюваності векторів довжиною m до повторюваності векторів довжиною $m+1$.

Таким чином, якщо знайдуться подібні вектори у часовому ряді, $ApEn$ оцінить логарифмічну ймовірність того, що наступні інтервали після кожного із векторів будуть відрізнятись. Менші значення $ApEn$ відповідають більшій ймовірності того, що за векторами слідує подібні їм. Якщо часовий ряд дуже нерегулярний – наявність подібних векторів не може бути передбачуваною і значення $ApEn$ є порівняно великим.

Важливо відслідковувати зміну $ApEn$ з часом. Для цього ентропія знаходиться для фіксованого проміжку часу (вікна), потім вікно зміщується з певним кроком і процедура розрахунку повторюється, поки не вичерпується вихідний часовий ряд.

На рисунку 1 наведені результати розрахунків $ApEn$ для індексів фондових ринків США: Dow Jones (dj 1929, dj 1987, dj 2008) та NASDAQ (nq 2000). Ентропія шаблонів використана для аналізу особливостей динаміки складної системи, яка містить кризу. Часові ряди на рис. 1а побудовані так, що вказані кризи припадають на середину ряду, загальна довжина якого 2000 точок. Якщо ширина вікна дорівнює 250 днів (як на рис. 1а), а крок зміщення вікна становить 5 днів, то криза припадає на 150 день, як і вказано на рисунку. Видно, що наближення кризи призводить до помітного зростання складності системи. При цьому результат носить універсальний характер і не залежить від природи кризи.

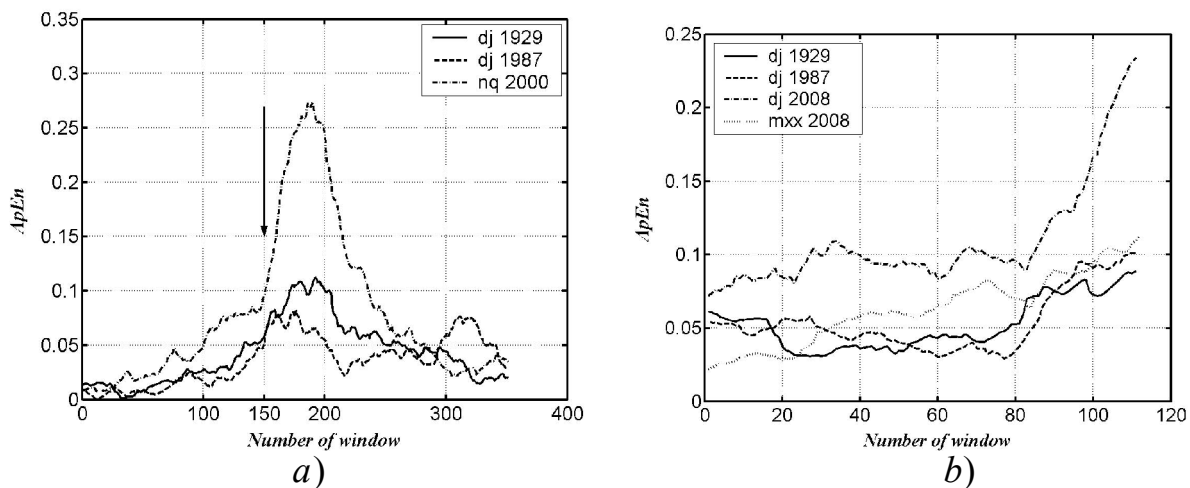


Рис. 1. Порівняльний аналіз ентропії подібності для часових рядів, які містять кризу (а) та у випадку, коли криза можлива у майбутньому (b)

Рис. 1b побудований так. Візьмемо часові ряди для відомих криз 1929, 1987 років довжиною 800 днів у період за 200 днів до кризи (такий вибір часових проміжків стане зрозумілим пізніше при розрахунку вейвлет-ентропії). Аналогічно для часових рядів, які характеризують кризу 2008 року, також виділимо проміжки довжиною 800 днів до 3 березня 2008 року включно. З рисунку 1 видно, що поведінка ентропії подібності в даний момент корелює з передкризовою

поведінкою для відомих криз. МХХ – індекс мексиканського фондового ринку, вибраний для прикладу серед аналогічних індексів фондових ринків, які демонструють подібну поведінку $ApEn$.

Таким чином, ентропія подібності може слугувати передвісником кризового явища, яке формується на фінансовому ринку.

Детальні дослідження часових рядів за допомогою ентропії подібності показали, що:

- $ApEn$ сильно залежить від довжини розглядуваного шаблону (вектора) і є нижчою, ніж очікується, для векторів малої розмірності;
- $ApEn$ не враховує відносну щільність даних.

Враховуючи вказані обмеження, розроблена для розрахунку інша характеристика – ентропія шаблонів $SampEn$ [11, 12]. При розрахунку $SampEn$, на відміну від алгоритму $ApEn$, додаються дві умови:

- не враховується подібність вектора самому собі;
- при розрахунку значень умовних ймовірностей $SampEn$ не використовується довжина векторів.

Використання $SampEn$ не змінює суттєво зроблених вище висновків при моделюванні кризи.

Вейвлет-ентропія заснована на вейвлет-перетворенні вихідного ряду. Вейвлет-аналіз є методом, що полягає у введенні відповідного базису та характеристикі сигналу шляхом розподілу амплітуд (відліків сигналу) у введеному базисі. Якщо при введенні базису висувається вимога до його ортогональності, будь-яка розглядувана функція може бути єдиним чином розкладена в ньому, причому такий розклад дозволяє відновлювати сигнал. При цьому дискретне вейвлет-перетворення дозволяє отримувати представлення сигналу, коли його значення складаються з коефіцієнтів у послідовності вейвлетів. Такі вейвлет-коефіцієнти надають повну інформацію про сигнал та дозволяють безпосередньо отримувати локальні енергії складових сигналу на різних масштабах. Більш того, інформація може бути організована у вигляді ієрархічної схеми вкладених підпросторів, що носить назву мультимасштабного аналізу. Базою вейвлет-перетворення є деяка функція ψ , що називається материнським вейвлетом. При використанні вейвлет-перетворення часто застосовують термінологію цифрової обробки сигналів, де часовий ряд називають сигналом, а його елементи часовими відліками.

Нехай маємо часовий ряд (сигнал) X , що складається зі значень (відліків) x_i , $i = 1, \dots, M$, поданих на рівномірній сітці з частотою (часом вибірки) $\omega_s (t_s)$. В результаті, при використанні множини масштабів $1, \dots, N$, буде отримано наступне вейвлет-перетворення:

$$X(t) = \sum_{j=1}^N \sum_k C_j(k) \psi_{j,k}(t) = \sum_{j=1}^N r_j(t).$$

$r_j(t)$ містить інформацію про ряд X відповідно на частотах $2^{j-1} \omega_s \leq |\omega_s| \leq 2^j \omega_s$.

Оскільки сімейство $\{\psi_{j,k}(t)\}$ є ортонормальним базисом в $L^2(R)$, можна використовувати концепцію енергії з застосуванням відповідної термінології, взятої з теорії розкладів Фур'є. Вейвлет-коефіцієнти, що отримуються як $C_j(k) = \langle S, \psi_{j,k} \rangle$, дозволяють енергію на кожному масштабі $j = 1, \dots, N$ інтерпретувати як енергію елементів ряду

$$E_j = \|r_j\|^2 = \sum_k |C_j(k)|^2.$$

Загальна енергія ряду може бути отримана у вигляді

$$E_{tot} = \|X\|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_k |C_j(k)|^2 = \sum_{j=1}^N E_j.$$

На основі отриманих значень, можна визначити нормалізовані p_j -значення, що представляють відносну вейвлет-енергію $p_j = \frac{E_j}{E_{tot}}$ на масштабах $j = 1, \dots, N$. Значення p_j , взяті на різних масштабах, утворюють розподіл ймовірності енергії, тобто,

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1.$$

Розподіл $\{p_j\}$ може розглядатись як часово-масштабова щільність, що є цінним інструментом для визначення та характеристик особливостей часового ряду як у часовому, так і частотному просторах.

Необхідним критерієм для аналізу та порівняння розподілу ймовірності є ентропія Шеннона. Вона надає міру інформації, що міститься в будь-якому розподілі. Визначимо нормалізовану загальну вейвлет-ентропію (Normalized Total Wavelet Entropy, NTWE) [15, 16] як

$$E_{WT} = \frac{-\sum_{j=1}^N p_j \cdot \ln p_j}{X_{\max}},$$

де $X_{\max} = \ln N$ є нормалізаційною константою. NTWE може використовуватись як міра ступеня порядку/безпорядку часового ряду, і, таким чином, надавати корисну інформацію про приховані динамічні процеси, асоційовані з часовим рядом. Високо впорядкований процес, навпаки, може бути представлений періодичним моно частотним сигналом (часовим рядом), тобто сигналом з вузьким частотним спектром. Вейвлет-подання такого часового ряду буде використовувати лише один масштаб, тобто, всі відносні вейвлет-енергії будуть майже рівні нулю на всіх масштабах, за виключенням масштабу, що включає репрезентативну частоту ряду. На цьому масштабі відносна енергія буде майже рівною 1. Відповідно, NTWE буде набувати дуже малого значення.

Часовий ряд, що відповідає випадковому процесу, буде демонструвати надзвичайно невпорядковану поведінку. Такий вид часових рядів буде мати вейвлет-представлення з порівняно великими значеннями на всіх частотних масштабах. Більш того, можна очікувати, що всі значення будуть приблизно однакові (одного порядку). Відповідно, відносні вейвлет-енергії на всіх масштабах будуть практично рівними між собою, і NTWE буде набувати свого найбільшого можливого значення.

Логічним продовженням ускладнення алгоритмів розрахунку характеристик вейвлет-ентропії є розбиття часового ряду на вікна, що не перекриваються (як і у випадку ентропії подібності). Для розрахунку нових характеристик вибираються вікна довжини L та утворюються

i інтервалів, $i = 1, \dots, N_T$, де $N_T = \frac{M}{L}$. На кожному інтервалі відповідні значення часового

ряду асоціюються з центральною точкою часового вікна. У випадку діадичного вейвлет-розкладу кількість вейвлет-коефіцієнтів на рівні j удвічі менша за кількість на попередньому рівні, $j + 1$.

Тому найменша довжина відповідного вікна буде включати щонайменше один вейвлет-коефіцієнт на кожному масштабі.

Вейвлет-енергія на масштабі j для часового вікна i розраховується за формулою

$$E_j^{(i)} = \sum_{k=(i-1)L+1}^{iL} |C_j(k)|^2, \quad i = 1, \dots, N_T.$$

Загальна енергія у цьому часовому вікні буде рівна

$$E_{tot}^{(i)} = \sum_{j=-N}^{-1} E_j^{(i)}.$$

Зміна з часом відносної вейвлет-енергії та нормалізованої загальної вейвлет-ентропії буде отримана за формулою:

$$p_j^{(i)} = \frac{E_j^{(i)}}{E_{tot}^{(i)}},$$

$$E_{WT}^{(i)} = - \sum_{j=-N}^{-1} p_j^{(i)} \cdot \frac{\ln p_j^{(i)}}{X_{\max}}.$$

При розрахунку коефіцієнтів використовуються наступні типи вейвлет-перетворень:

- неперервне вейвлет-перетворення – розрахунок неперервних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду t на цілих додатніх масштабах з використанням в якості материнського вейвлета похідної 8-го порядку функції Гауса;
- дискретне вейвлет-перетворення – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду t на дійсних додатніх масштабах у просторі з ортонормованим базисом із сімейства материнських функцій Морле з шістьма хвилями та періодами, що є дійсними степенями двійки;
- дискретне вейвлет-перетворення з цілими масштабами – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду t на цілих додатніх масштабах у просторі з базисом із сімейства материнських функцій, що є похідними 2-го порядку функції Гауса.

При виконанні вейвлет-перетворення до вихідного ряду зліва та справа додавались його екземпляри, що дозволило отримувати однакову кількість вейвлет-коефіцієнтів на всіх масштабах. Тому в подальшому для позначення вейвлет-коефіцієнтів (та відповідних енергій) використовуватимемо нижні індекси виду C_{ij} , де i – номер масштабу, j – номер точки. В якості базової формули розрахунку значення ентропії нами було обрано ентропію Шеннона внаслідок досить простого методу отримання розподілу щільності ймовірності енергії сигналу.

На основі енергії вейвлет-коефіцієнтів було визначено два показники вейвлет-ентропії – масштабової та точкової ентропії. У випадку розрахунку масштабової вейвлет-ентропії формула Шеннона застосовується до оброблених даних по масштабам, в іншому випадку обробка даних проводиться по часовій шкалі.

При розрахунку обох показників вейвлет-ентропії спочатку знаходиться поле енергій вейвлет-коефіцієнтів $E_{ij} = C_{ij}^2$, яке нормалізується середнім квадратичним відхиленням вихідного часового ряду $\tilde{E}_{ij} = \frac{E_{ij}}{\sigma_t}$. Подальші кроки залежать від виду розраховуваної ентропії.

Для розрахунку масштабової ентропії визначається розподіл щільності ймовірності енергій $p_{ij} = \frac{\tilde{E}_{ij}}{\tilde{E}_{tot}}$, де $E_{tot} = \sum_i \sum_j \tilde{E}_{ij}$. Значення ентропії знаходяться за формулою

$$E_{WS} = - \sum_i \left(\left(\sum_j p_{ij} \right) \cdot \frac{\log_2 \sum_j p_{ij}}{\log_2 N} \right),$$

де $\log_2 N$ – константа, що є нормалізуючим

множником, N – кількість елементів часового ряду.

Для розрахунку точкової ентропії визначаються суми енергій на кожному масштабі $\tilde{E}_i = \sum_j \tilde{E}_{ij}$ та знаходиться розподіл щільності ймовірності енергій шляхом ділення енергій

вейвлет-коефіцієнтів на сумарну енергію відповідного масштабу $p_{ij} = \frac{\tilde{E}_{ij}}{\tilde{E}_i}$. Значення ентропії у

кожній точці знаходиться за формулою Шеннона, яка в даному випадку має вигляд:

$$E_{WP} = -\sum_i \left(\left(\sum_j p_{ij} \right) \cdot \frac{\log_2 \sum_j p_{ij}}{\log_2 N} \right)$$

На рисунку 2 наведені типові приклади залежності від часу (time) енергетичної поверхні на різних масштабах (scale) (a) та масштабової вейвлет-ентропії (дискретний аналіз) для вказаних криз (b).

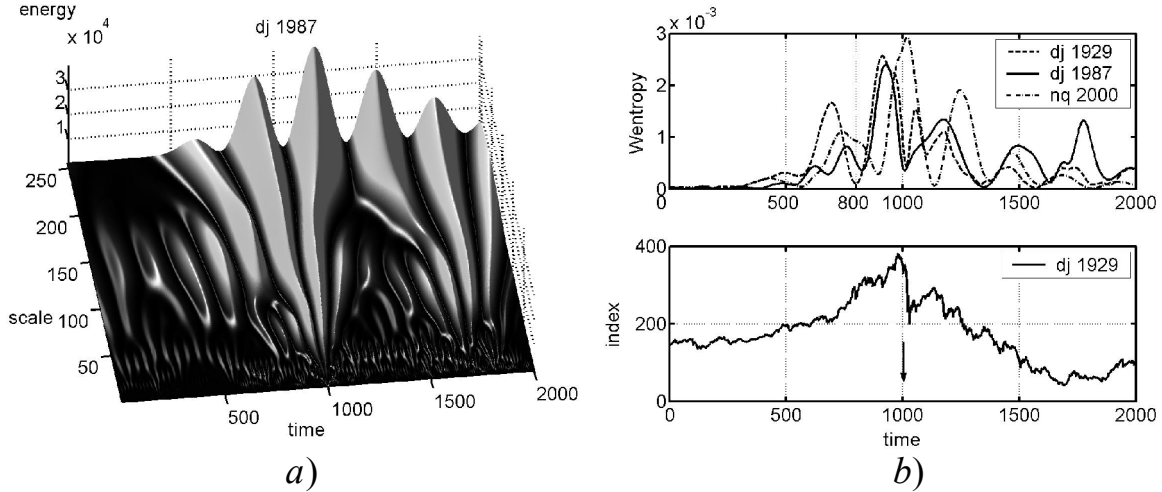


Рис.2. Енергія і вейвлет-ентропія для рядів, які містять кризу в точці 1000. На рисунку справа у випадку кризи dj 1929 точка кризи вказана стрілкою

Можна побачити, що на енергетичній поверхні кризовий період характеризується специфічним наростанням, а потім убуттям певних «хвиль», максимальна (третя) з яких приходить на кризу (точка 1000), попередня (друга) на точку 800. Те що друга хвиля припадає на точку 800 днів у випадку штучних рядів із 2000 днів підтверджує і рис. 3.

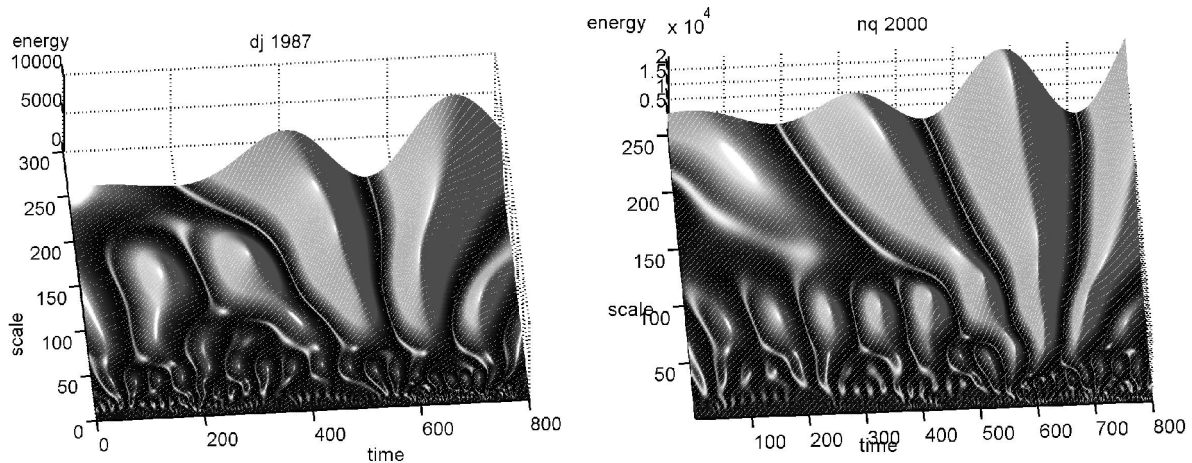


Рис. 3. Характерна поведінка вейвлет-енергії для часових рядів довжиною 800 днів, які містять відому кризу у точці 1000

З рисунку 3 видно, що приблизно в околі точки 800 має місце друга хвиля на поверхні вейвлет-енергії. Якщо ми порівняємо аналогічну картину для вейвлет-енергії та вейвлет-ентропії наведеного рисунку з побудованими для 800-денними даними для поточної динаміки, одержимо надзвичайно подібні результати, відображені на рисунку 4. До речі, стає зрозумілою і довжина часових рядів на рисунку 1, які використовувалися при розрахунку динаміки ентропії подібності для поточного часового ряду.

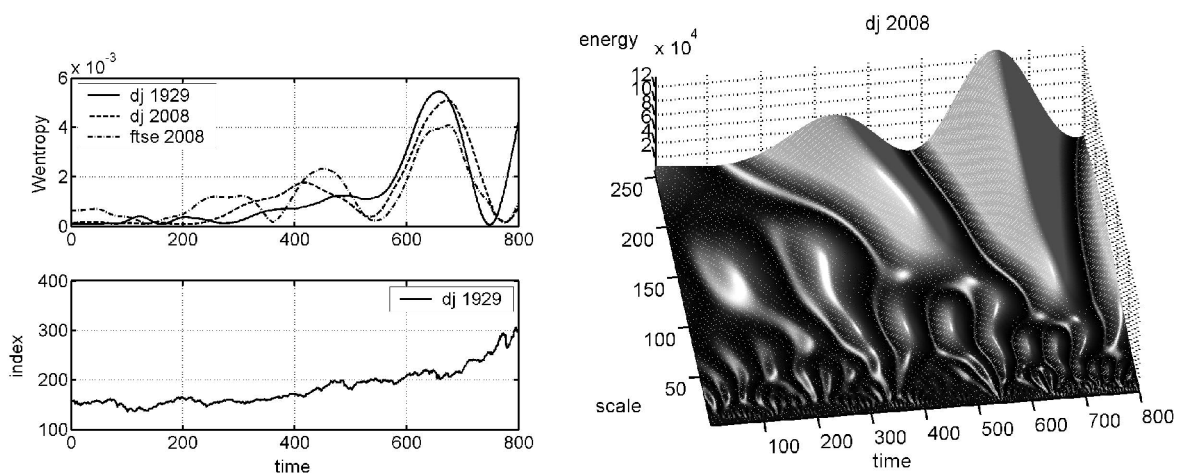


Рис. 4. Вейвлет-ентропія і вейвлет-енергія 800-денних часових рядів різних індексів, криза яких відбудеться в точці 1000 (dj 1929), або може відбутися (dj 2008, ftse 2008)

Цікаво, що можлива фінансова криза, характерною ознакою якої є третя хвиля, за даними рисунка 4 може відбутися в жовтні-листопаді 2008 року.

Отже, розглянуті види ентропійних показників можуть використовуватися для кількісної оцінки можливих структурних і динамічних змін в економічних системах. Більш того, вони проявляють характерну поведінку у передкризовий період, яка дозволяє будувати передвісники кризових явищ.

Перспективним напрямком нам представляється використання ідеї Тсалліса щодо не екстенсивності економічних даних, яка дійсно проявляється на практиці. Подальших досліджень вимагає застосування ідей нерівноважної термодинаміки для складних систем [17]. Ці та інші результати стосовно фінансової кризи, яка наближається, планується опублікувати найближчим часом.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (№ Ф25/659-2007 від 3.09.2007 р., № держреєстрації 0107U010947).

Література

1. Піскун О.В., Сердюк О.А., Триус В.Ю. Кореляційні та спектральні властивості світового валютного ринку // Фінансова система України. Збірник наукових праць. – Острог: Видавництво “Національний університет “Острозька академія”, 2006. – Вип. 8. – Ч.3. – С. 449-454.
2. Сердюк О.А. Моделирование предвестников кризовых явищ фінансових ринків // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: Збірник наукових праць. Т. 18. – Суми: УАБС НБУ, 2006. – С. 315-321.
3. Макаренко О.І., Мезенцев О.М., Соловійов В.М. Рекурентний аналіз критичних явищ на валютному ринку // Тези доповідей XII Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми економічної кібернетики». 3-5 жовтня 2007 р. м. Львів, Вид-во ЛНУ, с.137-138.
4. Clausius R. Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie // Ann. Phys. Folge 2, 1865. -Bd. 125.- S. 353-400.
5. Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // Sitzber. Acad. Wiss. Wien. 1872,- Bd. 66.- S. 275-376.
6. Shannon C.E. A mathematical theory of communications // Bell Systems Tech. J., 1948. -V. 27. - P.623-656.
7. Осипов А.И., Уваров А.В. Энтропия и ее роль в науке // Соросовский образовательный журнал, 2004.- Т.8.- №1. – С.70-79.
8. Tsallis C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Braz.J.Phys., 1999.-V.29, -№1. - P. 1-35.
9. Borland L. Long-range memory and nonextensivity in financial markets // Econophysics news, 2005.-

V.36.- №6. - P.228-231.

10. Pincus S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity // Proc. Natl. Acad. Sci., 1991.- V.88.- P. 2297-2301.
11. Joshua S., Richman J., Moorman R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy // Am J Physiol Heart Circ Physiol, 2000.- V.278. – P.2039-2049.
12. Douglas E. Lake, Joshua S. Richman, M. Pamela Griffin, Moorman R. Sample entropy analysis of neonatal heart rate variability // Am. J. Physiol. Integr. Comp. Physiol. 2002.- V.283. – P.789-797.
13. Madalena Costa, Ary L. Goldberger, C.-K. Peng. Multiscale entropy analysis of biological signals // Phys Rev E, 2005. -V.71. – P.021906.
14. Madalena Costa, Ary L. Goldberger, C.-K. Peng. Multiscale entropy analysis of physiologic signals // Phys Rev Lett, 2002.- V.89. – P.062102.
15. Perez D.G., Zunino L., Garavaglia M., Rosso O.A. Wavelet entropy and fractional Brownian motion time series // arXiv:physics/0501105 v1 19 Jan 2005.
16. Zunino L., Perez D.G., Garavaglia M., Rosso O.A. Wavelet entropy of stochastic processes // arXiv:physics/0603144 v1 17 Mar 2006.
17. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов // Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.-160 с.