Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск V

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2005

ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ

П.І. Ульшин, О.В. Гаркава
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет.

На сучасному етапі розвитку освіти вчитель повинен не лише мати великий запас знань з різних розділів математики, але і вміти застосовувати їх на практиці та творчо реалізовувати свої здібності. На наш погляд важливим засобом при вивченні геометрії є використання нестандартних задач у навчальному процесі.

До нестандартних відносяться задачі, які розв'язуються нетрадиційними методами, тобто не за розробленими схемами чи побудованими алгоритмами або "шаблонами", а потребують творчого підходу, оригінального підбору методів, формул, правил; використання цікавих геометричних фактів тощо.

Нестандартний підхід до розв'язування геометричних задач пропагувався багатьма математиками: вченими і педагогами. В першу чергу слід назвати авторів відомих чудових книг з математики: Я.І. Перельмана, З.А. Скопця, П.А. Гальперіна, Б.А. Кордемського, Д.О. Шклярського, А.І. Маркушевича, Г.М. Бермана, І.Ф. Шаригіна, К.А. Рибнікова. Більшість з них вважали, що нестандартні задачі можна розв'язувати і традиційними методами, проте нестандартні підходи швидше і оригінальніше приводять до результату [1, 2].

Такі задачі пропонується розв'язувати як на уроках математики, так і при виконанні учнями домашніх завдань. Особливу увагу слід приділяти розв'язуванню нестандартних задач при підготовці учнів до участі в математичних олімпіадах, в конкурсах наукових робіт, під час гурткової роботи, в темах для науково-дослідницького пошуку, а також при підготовці учнів до конкурсних екзаменів.

Використання нестандартних задач на уроках геометрії сприяє активізації розумової діяльності учнів, розширенню їх уяви, спрямуванню уваги; викликає інтуїцію і створює творчий підхід до розв'язування проблеми.

Підбір і розв'язування нестандартних задач проводиться вчителем в залежності від теми уроку. Частіше такі задачі пропонуються при встановленні взаємозв'язків між певними геометричними величинами, що вивчаються в окремих темах; при повторенні матеріалу, вивченого за чверть, за півріччя або за рік; при підготовці до контрольної роботи, математичної олімпіади або до участі в конкурсах з математики, при виконанні учнями домашніх завдань і науково-дослідницьких робіт.

Розглянемо на прикладах деякі випадки доцільності використання нестандартних задач у навчальному процесі.

При вивченні властивостей вписаних і описаних кіл відносно трикутника важливо встановити певні залежності між радіусами кіл і сторонами трикутника, щоб потім використовувати їх при розв'язуванні складніших задач. Для цього пропонуються такі задачі на доведення тверджень.

№1. Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів.

№2. Довести, що в будь-якому трикутнику радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола пов'язані з відстанню l між центрами цих кіл таким співвідношенням: $l^2 = R^2 - 2Rr$.

№3. Довести, що в будь-якому трикутнику добуток двох його сторін дорівнює добутку висоти, проведеної до третьої сторони, на діаметр описаного навколо трикутника кола: $a \cdot b = h_c \cdot 2R$..

№4. Довести, що у гострокутному трикутнику сума відстаней від центра описаного кола до сторін трикутника дорівнює сумі радіусів вписаного і описаного кіл: $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$.

Кожна із запропонованих задач характеризується різними підходами до розв'язання з використанням відомих положень з геометрії, алгебри і тригонометрії. Завдання вчителя полягає у спрямуванні думки учнів при знаходженні результату.

Для прикладу розглянемо розв'язання задачі №4.

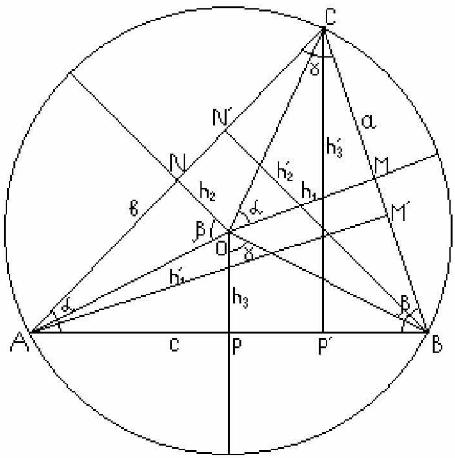

Рис. 1.

Нехай дано гострокутний ΔABC, в якому $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, O – центр описаного кола, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника, $OA=OB=OC=R$ – радіус описаного кола. Серединами сторін BC, AC і AB є точки M, N, P (рис. 1). Побудуємо трикутники: BOC, AOC і AOB і позначимо їх висоти відповідно: $OM=h_1$, $ON=h_2$, $OP=h_3$.

Очевидно, що площа трикутника дорівнює сумі площ його частин.

Площі трикутників BOC, AOC і AOB будемо визначати за формулою: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, а площу ΔABC визначимо через добуток радіуса r вписаного кола на півпериметр. Тоді

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 = r(a + b + c). \qquad (1)$$

Позначимо у ΔABC кути при вершинах: $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Визначимо тепер кожну сторону даного трикутника через дві інші: побудуємо висоти з кожної вершини даного трикутника і за допомогою пар прилеглих до висот h_1', h_2' і h_3' ($AM' = h_1'$, $BN' = h_2'$, $CP' = h_3'$) прямокутних трикутників, суми катетів яких утворюють одну із сторін даного трикутника. Запишемо рівності:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta, \\ b &= a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha, \\ c &= b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta. \end{aligned} \qquad (2)$$

Додавши почленно рівності (2) і домноживши їх на R, одержимо:

$$(a + b)R \cos\gamma + (a + c)R\cdot\cos\beta + (b + c)R\cdot\cos\alpha = R(a + b + c) \qquad (3)$$

Оскільки вписаний кут $\angle BAC=\alpha$ опирається на дугу BC, то центральний кут $\angle BOC=2\alpha$ (згідно теореми про вимірювання вписаних кутів). Так як пряма (OM) ділить навпіл хорду і дугу, відповідну цій хорді, то $\angle COM=\angle BOM=\alpha$.

Аналогічно, $\angle BOP=\angle AOP=\gamma$, і $\angle AON=\angle CON=\beta$.

Із прямокутних трикутників BOM, AON, AOP визначимо висоти:

$$h_1 = R\cdot\cos\alpha,\ h_2 = R\cdot\cos\beta,\ h_3 = R\cdot\cos\gamma. \qquad (4)$$

Враховуючи формули (4), додамо почленно рівняння (1) і (3). Після елементарних перетворень одержимо:

$$h_1 + h_2 + h_3 = R + r.$$

Задачу розв'язано.

Нестандартність задачі полягає в тому, що при її розв'язанні використовувалися відомі твердження з різних розділів математики: різні формули площі трикутника, властивості вписаних і описаних кіл відносно трикутника, представлення сторін трикутника через тригонометричні вирази, властивості вписаних і центральних кутів, алгебраїчні перетворення рівнянь.

Розв'язування таких задач ставить потребу перед учнями регулярно повторювати пройдений матеріал з усіх розділів математики і швидко орієнтуватись в його застосуванні.

Такий підхід до проведення навчального процесу розвиватиме розумову діяльність учнів, викликатиме в них творчу ініціативу і сприятиме всебічному їх розвитку.

Література:

1. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Михайловський В.І. Збірник республіканських математичних олімпіад. – К.: Вища школа, 1975. – 172 с.
3. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.