

Глава 8. Рух тіла в полі сили тяжіння

В цій главі йтиметься про одне із самих далекосяжних узагальнень, зроблених будь-коли людським розумом, а саме про закон всесвітнього тяжіння:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

Відкриття закону належить видатному англійському фізику І. Ньютону (1666 р.). Якщо до цього додати, що всяке тіло під дією прикладеної до нього сили набуває в напрямку цієї сили прискорення, величина якого пропорційна силі і обернено пропорційна масі тіла (другий закон Ньютона),

$$a = \frac{F}{m} \quad (2)$$

то, як говорять фахівці, досвідченому математику цих відомостей цілком вистачить для отримання всіх наступних наслідків. Не претендуючи на таке високе звання, ми зупинимось лише на деяких з них, щоб побачити і зрозуміти дещо більше, ніж у шкільному підручнику фізики.

Насамперед зазначимо, що *вирази (1) і (2) являють собою математичну модель руху під дією сили тяжіння у найбільш загальному вигляді*. Чи не найцікавішим при вивченні таких рухів є питання про форми їхніх траєкторій у залежності від початкових умов. Для вивчення цього питання скористаємося можливостями комп'ютерного моделювання (обчислювального експерименту).

При цьому спочатку ми розглянемо прості приклади – рух штучного супутника навколо планети (або рух планети навколо Сонця). В цих прикладах можна нехтувати масою тіла-супутника і розглядати тільки його рух відносно центрального тіла.

Далі дослідимо рухи системи тіл “планета – природний супутник” (на прикладі системи “Земля – Місяць”). Оскільки масою супутника в таких випадках, взагалі кажучи, нехтувати не можна, необхідно буде розглянути рухи обох тіл навколо спільного центра мас. Змінюючи умови задачі (а саме – маси тіл і відстані між ними), ми зможемо зазирнути в деякі подробиці з “життя” подвійних зірок.

Ряд результатів, пов'язаних із законами руху планет, встановленими на початку XVII ст. видатним математиком і астрономом Й. Кеплером, ми одержимо як наслідки закону всесвітнього тяжіння.

Далі з'ясуємо, якими були б рухи тіл, якби в законі тяжіння показник степеня k для відстані r між тілами мав би значення не 2, а деяке інше, тобто якби закон мав вигляд $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}$.

І, насамкінець, розглянемо рухи кількох тіл (планет) у різних системах відліку – геліоцентричній (пов'язаній із Сонцем) та геоцентричній (пов'язаній із Землею).

§.1. Рух штучного супутника планети

8.1.1. Постановка задачі

Формула (1), як і формули всіх фізичних законів, має границі застосовності. Вона справджується

- а) для матеріальних точок;
- б) у випадках, коли одне з тіл є матеріальною точкою, а інше – однорідною кулею;
- в) обидва тіла – однорідні кулі.

У двох останніх випадках r – відстань між центрами тіл (куль). Вираз “границі застосовності” означає, що результат, отриманий розрахунком за формулою, даватиме тим кращий збіг з реальним (дійсним, спостережуваним) результатом, чим краще виконуються зазначені умови.

Припущення 1. Враховуючи, що відстань між центрами планети і штучного супутника значно перевищує розміри супутника, і розглядаючи планету як однорідну кулю, вважатимемо, що забезпечено умови застосовності закону всесвітнього тяжіння (1).

Припущення 2. Будемо вважати (і не без підстав) масу супутника набагато меншою за масу планети: $m_{\text{супутни}} \ll m_{\text{пл.}}$. Це дозволить не розглядати рух самої планети, оскільки прискорення, що їх надають одне одному два тіла під час взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам.

Припущення 3. Знехтуємо опором середовища, адже реально штучні супутники рухаються у надзвичайно розріджених шарах планетних атмосфер. В такому разі на супутник діятиме єдина сила – сила всесвітнього тяжіння.

Рух штучного супутника відбувається в площині, в якій лежать вектор швидкості \mathbf{v} супутника і центр планети. В цій площині лежить і вектор \mathbf{F} сили тяжіння. Для опису такого руху потрібні дві координатні вісі. Початок координат помістимо в центрі планети (рис. 8.1).

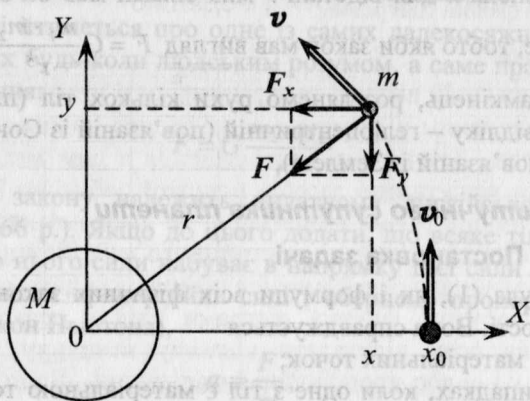


Рис. 8.1

Тут F_x і F_y – складові вектора сили тяжіння F ;

M, m – маси планети і супутника відповідно.

Положення супутника визначається двома координатами x та y ; проекції F_x і F_y мають знаки, протилежні координатам.

Нехай початковий момент «спостереження» відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис, як це показано на рис. 8.1.

З подібності трикутників витікає:

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}, \quad \frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r},$$

що разом з (1) дає

$$F_x = -GMm \frac{x}{r^3}; \quad F_y = -GMm \frac{y}{r^3}.$$

Проекції прискорення знайдемо з виразу (2):

$$a_x = -GM \frac{x}{r^3}; \quad a_y = -GM \frac{y}{r^3}. \quad (3)$$

Відстань r між тілами будемо визначати за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Система рівнянь (3) є математичною моделлю руху штучного супутника.

Якщо в напрямку, перпендикулярному до лінії дії сили, в початковий момент орбітального руху супутника надати йому *першої кос-*

лінійної швидкості $v_{1K} = GM/r$, то його орбіта буде коловою.

8.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити таблицю за зразком:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-------------|-----|
| 1 | a_x | a_y | v_x | v_y | x | y | Дано: | ШСЗ |
| 2 | | | | | | | $G=$ | |
| 3 | | | | | | | $\Delta t=$ | |
| 4 | | | | | | | $M=$ | |
| 5 | | | | | | | $m=$ | |
| 6 | | | | | | | $r=$ | |
| 7 | | | | | | | $v_x(0)=$ | |
| 8 | | | | | | | $v_y(0)=$ | |
| 9 | | | | | | | $x(0)=$ | |
| 10 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $y(0)=$ | |

2. Заповнити Ключові комірки таблиці таким умістом:

| комірки | формули / числа | примітки |
|---------|--|---------------------|
| H7 | =0 | $v_x(0)$ |
| H8 | =(H2*H4/H6)^0,5 | $v_y(0)$ |
| H9 | =H6 | $x(0)$ |
| H10 | =0 | $y(0)$ |
| A2 | =-\$H\$2*\$H\$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5 | копіювати в A3 і A4 |
| B2 | =-\$H\$2*\$H\$4*F2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5 | копіювати в B3 і B4 |
| C2 | =\$H\$7 | |
| D2 | =\$H\$8 | |
| E2 | =\$H\$9 | |
| F2 | =\$H\$10 | |
| C3 | =C2+A2*\$H\$3*0,5 | |
| D3 | =D2+B2*\$H\$3*0,5 | |
| E3 | =E2+C3*\$H\$3 | копіювати в E4 |
| F3 | =F2+D3*\$H\$3 | копіювати в F4 |
| C4 | =C3+A3*\$H\$3 | |
| D4 | =D3+B3*\$H\$3 | |

8.1.3. Обчислювальний експеримент

Конкретизуємо умову для штучного супутника Землі (ШСЗ) масою $m = 1000$ кг, що рухається коловою орбітою на висоті $h = 300$ км від земної поверхні.

Маса супутника не входить до виразу (3), але її значення забезпечує виконання умови $m_{\text{супутн}} \ll M_{\text{пл}}$. Для Землі $M = 5,976 \cdot 10^{24}$ кг.

Відстань між тілами $r = R_3 + h = 0,3 \cdot 10^6$ м + $6,4 \cdot 10^6$ м = $6,7 \cdot 10^6$ м.

Відомо, що період обертання штучного супутника Землі поблизу поверхні планети становить близько 100 хв. Таким і оберемо час

моделювання. Будемо фіксувати значення всіх кінематичних характеристик руху супутника (a , v , x , y) через малі (у порівнянні з періодом обертання) однакові проміжки часу $\Delta t = 1 \text{ хв.} = 60 \text{ с.}$

Тепер проведемо звичну процедуру підготовки таблиці до обчислювального експерименту: заповнимо комірки Н2–Н6 (“Дано:”) і решту комірок згідно наведеної вище таблиці. Всі формули четвертого рядка (від А4 по F4) скопіюємо в наступні 100 рядків.

Нагадаємо, що вміст комірки Н8 відповідає виразу для *першої космічної швидкості*: $v_x(0) = v_{1к.}$

Відповідна таблиця має вигляд, поданий на рис. 8.2.

Маючи заповнену таблицю, будуюмо траєкторію руху $y = y(x)$ – графік залежності між даними зі стовпців Е та F. На цьому ж рисунку показана *колова траєкторія* руху.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------------------|-----|
| 1 | a_x | a_y | v_x | v_y | x | y | Дано: | ШСЗ |
| 2 | -8,88 | 0,00 | 0 | 7714 | 6,70E+06 | 0,00E+00 | $G = 6,672E-11$ | |
| 3 | -8,86 | -0,61 | -266 | 7710 | 6,68E+06 | 4,63E+05 | $\Delta t = 60$ | |
| 4 | -8,80 | -1,22 | -798 | 7673 | 6,64E+06 | 9,23E+05 | $M = 5,976E+24$ | |
| 5 | -8,69 | -1,83 | -1326 | 7600 | 6,56E+06 | 1,38E+06 | $m = 1,000E+03$ | |
| 6 | -8,54 | -2,42 | -1847 | 7490 | 6,45E+06 | 1,83E+06 | $r = 6,700E+06$ | |
| 7 | -8,36 | -3,01 | -2360 | 7345 | 6,30E+06 | 2,27E+06 | $v_x(0) = 0$ | |
| 8 | -8,13 | -3,58 | -2862 | 7164 | 6,13E+06 | 2,70E+06 | $v_y(0) = 7,710E+03$ | |
| 9 | -7,86 | -4,13 | -3349 | 6950 | 5,93E+06 | 3,12E+06 | $x(0) = 6,700E+06$ | |
| 10 | -7,56 | -4,66 | -3821 | 6702 | 5,70E+06 | 3,52E+06 | $y(0) = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

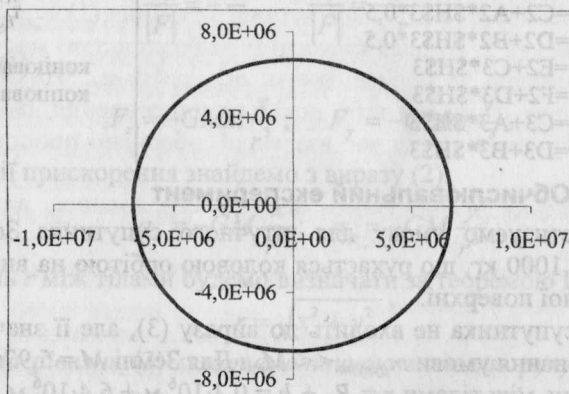


Рис. 8.2

Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника $v_x(0)$

задовольнятиме нерівності $v_{1K} < v_y(0) < \sqrt{2} \cdot v_{1K}$, то, як відомо з курсу фізики (астрономії), він рухатиметься еліптичною орбітою.

Продовжимо обчислювальний експеримент і збільшимо попередні значення початкової швидкості $v_y(0)$ у 1,2 рази. Щоб не виконувати зайвої роботи, відредагуємо формулу, введену в комірку Н8:

$$= (H2*H4/H6)^{0,5}*1,2.$$

Результат показаний на рис. 8.3.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------------|-----------|
| 1 | a_x | a_y | v_x | v_y | x | y | Дано: | ШСЗ |
| 2 | -8,88 | 0,00 | 0 | 9257 | 6,70E+06 | 0,00E+00 | $G=$ | 6,672E-11 |
| 3 | -8,83 | -0,73 | -266 | 9260 | 6,68E+06 | 5,55E+05 | $\Delta t=$ | 60 |
| 4 | -8,69 | -1,45 | -796 | 9216 | 6,64E+06 | 1,11E+06 | $M=$ | 5,976E+24 |
| 5 | -8,45 | -2,13 | -1318 | 9129 | 6,56E+06 | 1,66E+06 | $M=$ | 1,000E+03 |
| 6 | -8,13 | -2,77 | -1825 | 9001 | 6,45E+06 | 2,20E+06 | $R=$ | 6,700E+06 |
| 7 | -7,75 | -3,35 | -2313 | 8835 | 6,31E+06 | 2,73E+06 | $v_x(0)=$ | 0 |
| 8 | -7,31 | -3,86 | -2778 | 8634 | 6,14E+06 | 3,24E+06 | $v_y(0)=$ | 9,26E+03 |
| 9 | -6,82 | -4,30 | -3216 | 8402 | 5,95E+06 | 3,75E+06 | $x(0)=$ | 6,700E+06 |
| 10 | -6,31 | -4,67 | -3626 | 8144 | 5,73E+06 | 4,24E+06 | $y(0)=$ | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

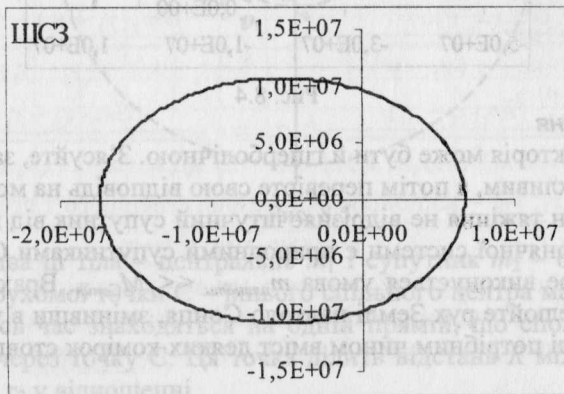


Рис. 8.3

Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення $v_y(0) = \sqrt{2} v_{1K}$, тобто вводячи до Н8 нового множника $\sqrt{2}$, одержуємо параболічну (розімкнену) траєкторію (рис. 8.4):

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------------|-----------|
| 1 | a_x | a_y | v_x | v_y | x | y | Дано: | ШСЗ |
| 2 | -8,88 | 0,00 | 0 | 10800 | 6,70E+06 | 0,00E+00 | $G=$ | 6,672E-11 |
| 3 | -8,80 | -0,86 | -266 | 10910 | 6,68E+06 | 6,48E+05 | $\Delta t=$ | 60 |
| 4 | -8,55 | -1,68 | -794 | 10858 | 6,64E+06 | 1,29E+06 | $M=$ | 5,976E+24 |
| 5 | -8,16 | -2,43 | -1307 | 10757 | 6,56E+06 | 1,93E+06 | $m=$ | 1,000E+03 |
| 6 | -7,66 | -3,07 | -1797 | 10611 | 6,45E+06 | 2,56E+06 | $r=$ | 6,700E+06 |
| 7 | -7,08 | -3,60 | -2257 | 10427 | 6,31E+06 | 3,18E+06 | $v_x(0)=$ | 0 |
| 8 | -6,45 | -4,01 | -2682 | 10211 | 6,15E+06 | 3,79E+06 | $v_y(0)=$ | 1,08E+04 |
| 9 | -5,80 | -4,30 | -3068 | 9970 | 5,97E+06 | 4,38E+06 | $x(0)=$ | 6,700E+06 |
| 10 | -5,16 | -4,48 | -3417 | 9712 | 5,76E+06 | 4,96E+06 | $y(0)=$ | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

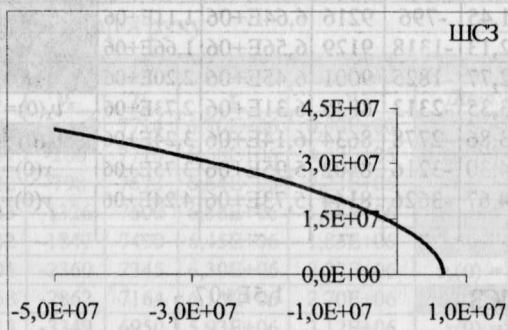


Рис. 8.4

Завдання

1. Траекторія може бути й гіперболічною. З'ясуйте, за якої умови це стає можливим, а потім переверіте свою відповідь на моделі.

2. Закон тяжіння не відрізняє штучний супутник від природного. Планети Сонячної системи є природними супутниками Сонця, і при цьому добре виконується умова $m_{\text{планети}} \ll M_{\text{Сонця}}$. Враховуючи цей факт, змодельуйте рух Землі навколо Сонця, змінивши в уже побудованій моделі потрібним чином вміст деяких комірок стовпця Н.

Висновки

1. Траекторією руху тіла, на яке діє сила всесвітнього тяжіння, може бути одна з кривих другого порядку – коло, еліпс, парабола чи гіпербола в залежності від початкових умов.

2. Всі розглянуті моделі можна об'єднати в одну групу за спільною ознакою $m_{\text{супутни}} \ll M_{\text{центр. тіла}}$. Усвідомлення цього факту є логічною умовою переходу до наступного етапу роботи.

8.2. Рух природного супутника планети та рух компонентів системи "подвійна зірка"

8.2.1. Постановка задачі

Природні супутники планет мають маси, якими не завжди можна нехтувати в порівнянні з масами самих планет, тому моделювання руху таких супутників є більш складною задачею.

Знов почнемо аналіз із найбільш простого випадку – руху вздовж колових орбіт.

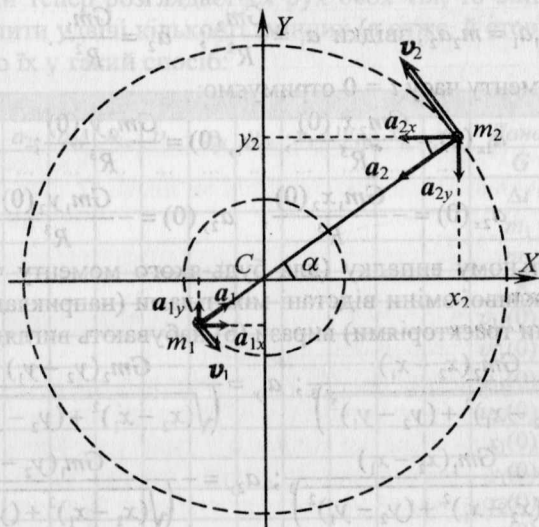


Рис. 8.5

1. Обидва ці тіла – центральне m_1 і супутник m_2 – обертаються навколо нерухокої точки С – їхнього спільного центра мас. При цьому вони весь час знаходяться на одній прямій, що сполучає тіла і проходить через точку С. Ця точка ділить відстань R між тілами на відрізки r_1 і r_2 у відношенні

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

звідки маємо:

$$r_1 = \frac{R}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad r_2 = \frac{R}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Переходячи до проекцій, маємо для моменту часу $t = 0$:

$$x_1(0) = -\frac{R}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad x_2(0) = \frac{R}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad (5)$$

де x_1, x_2 – координати тіл у системі відліку, пов'язаній зі спільним центром мас.

2. Певних уточнень вимагають також вирази для прискорень.

Сила тяжіння надає прискорень обом тілам:

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2, \text{ звідки } a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2}.$$

Для моменту часу $t = 0$ отримуємо:

$$\begin{aligned} a_{1x}(0) &= \frac{Gm_2x_1(0)}{R^3}; & a_{1y}(0) &= \frac{Gm_2y_1(0)}{R^3}; \\ a_{2x}(0) &= -\frac{Gm_1x_2(0)}{R^3}; & a_{2y}(0) &= -\frac{Gm_1y_2(0)}{R^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

В загальному випадку (для будь-якого моменту часу) з урахуванням можливої зміни відстані між тілами (наприклад, при русі тіл еліптичними траєкторіями) вирази (6) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; & a_{1y} &= \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \\ a_{2x} &= -\frac{Gm_1(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; & a_{2y} &= -\frac{Gm_1(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}, \end{aligned}$$

де $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – відповідно координати першого і другого тіла, а $R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – відстань між тілами.

В задачі про *штучний супутник* ми вже бачили, що вигляд траєкторій руху тіл визначається початковими умовами, і зокрема, початковими швидкостями $v_{1y}(0)$ і $v_{2y}(0)$. Оскільки тут розглядається рух двох тіл уздовж колових орбіт, то $v_{2y}(0) = \sqrt{\frac{Gm_1}{R}}$. Виразимо $v_{1y}(0)$ через $v_{2y}(0)$ з наступних міркувань.

Знаходячись весь час на одній прямій, обидва тіла мають однакові періоди обертання $T_1 = T_2$:

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \text{ і } T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2}, \text{ звідки } \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

що для $t = 0$ в проєкціях дає $\frac{v_{1y}(0)}{v_{2y}(0)} = \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$.

Остаточо маємо:

$$v_{1y}(0) = v_{2y}(0) \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$$

8.2.2. Обговорення алгоритму

Оскільки тепер розглядається рух двох тіл, то виникає необхідність збільшити удвічі кількості змінних (а отже, й стовпців таблиці). Розподілимо їх у такий спосіб:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|---------------|----------|
| 1 | a_{1x} | a_{1y} | a_{2x} | a_{2y} | v_{1x} | v_{1y} | v_{2x} | v_{2y} | x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | Дано: | Значення |
| 2 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $G =$ | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | $\Delta t =$ | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | $m_1 =$ | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | $m_2 =$ | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | $R =$ | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | $v_{1x}(0) =$ | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | $v_{1y}(0) =$ | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | $v_{2x}(0) =$ | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | $v_{2y}(0) =$ | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | $x_1(0) =$ | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | $y_1(0) =$ | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | $x_2(0) =$ | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | $y_2(0) =$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

Вміст комірок нової таблиці:

| комірки | формули / числа | коментарі |
|---------|--|--------------------|
| N7 | 0 | |
| N8 | =N10*N11/N13 | |
| N9 | 0 | |
| N10 | =(N2*N4*N13)^0,5/N6 | |
| N11 | =-N6/(1+N4/N5) | |
| N12 | 0 | |
| N13 | =N6/(1+N5/N4) | |
| N14 | 0 | |
| A2 | =\$N\$2*\$N\$5*((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5 | копіювати в A3, A4 |
| B2 | =\$N\$2*\$N\$5*(L2-J2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5 | копіювати в B3, B4 |
| C2 | =\$N\$2*\$N\$4*(I2-K2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5 | копіювати в C3, C4 |
| D2 | =\$N\$2*\$N\$4*(J2-L2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5 | копіювати в D3, D4 |

| комірки | формули / числа | коментарі |
|---------|-------------------|----------------|
| E2 | =A2*\$N\$3 | |
| F2 | =B2*\$N\$3 | |
| G2 | =C2*\$N\$3 | |
| H2 | =D2*\$N\$3 | |
| I2 | =E2*\$N\$3 | |
| J2 | =F2*\$N\$3 | |
| K2 | =G2*\$N\$3 | |
| L2 | =H2*\$N\$3 | |
| E3 | =E2+A2*\$N\$3*0,5 | |
| F3 | =F2+B2*\$N\$3*0,5 | |
| G3 | =G2+C2*\$N\$3*0,5 | |
| H3 | =H2+D2*\$N\$3*0,5 | |
| I3 | =I2+E3*\$N\$3 | |
| J3 | =J2+F3*\$N\$3 | копіювати в I4 |
| K3 | =K2+G3*\$N\$3 | копіювати в J4 |
| L3 | =L2+H3*\$N\$3 | копіювати в K4 |
| E4 | =E3+A3*\$N\$3 | копіювати в L4 |
| F4 | =F3+B3*\$N\$3 | |
| G4 | =G3+C3*\$N\$3 | |
| H4 | =H3+D3*\$N\$3 | |

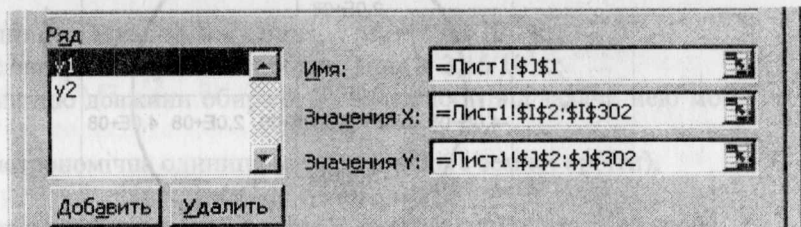
8.2.3. Алгоритм роботи

1. Додати до таблиці нові стовпці.
2. Заповнити комірки N2–N6 у відповідності з даними задачі.
3. Заповнити комірки за наведеною вище таблицею.
4. Всі формули 4-го рядка копіювати у наступні 100.
5. Побудувати графіки, користуючись парами даних зі стовпців I, J (x_1, y_1) та K, L (x_2, y_2).

Увага! Виконання цього пункту виявиться успішним, якщо правильно відкоригувати ряди даних. Опишемо це більш докладно.

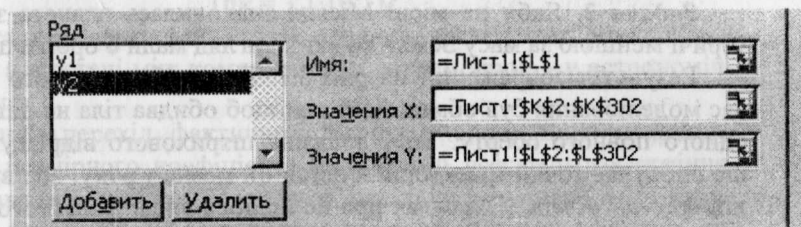
У всіх попередніх графічних побудовах нам доводилось мати справу з випадками, коли були потрібні один або декілька графіків залежності від одного й того самого аргументу (часто, але не завжди таким аргументом виявлявся час t). Зараз виникла потреба в побудові іншого характеру: згідно з п. 5 на одній координатній площині потрібні два графіки залежностей $y_1 = y_1(x_1)$ та $y_2 = y_2(x_2)$, тобто залежностей від різних аргументів. Якщо на початку побудови виділити чотири стовпці I (x_1), J (y_1), K (x_2), L (y_2), то програма *Мастер діаграм* за замовчанням сприйме в якості аргументу стовпець I – перший з виділених стовпців, – і побудує три графіки для функцій одного аргументу x_1 : $y_1 = y_1(x_1)$, $y_2 = y_2(x_1)$, $y_3 = y_3(x_1)$. Саме з цієї причини виникає потреба в редагуванні рядів даних.

Подальша робота передбачає таке: поставити покажчик миші в Область диіраммы там вивести контекстне меню (права кнопка миші), в якому обрати *Исходные данные*, там відкрити вкладку *Ряд*, а далі керуватись фрагментами вікна *Исходные данные*, зображеними нижче.



Насамперед у вікні *Ряд* слід видалити x_2 .

Для ряду y_1 зміни не потрібні, оскільки значення y_1 розміщені саме в стовпці J.



Для ряду y_2 змін потребує рядок Значения X. Адже аргументами для значень y_2 зі стовпця L є числа зі стовпця K.

8.2.4. Обчислювальний експеримент

Задача 1. Відомо, що маса Місяця (m_2) у 81 раз менша за масу Землі (m_1). Приймавши відстань R між центрами цих тіл рівною 380 тис. км ($3,8 \cdot 10^8$ м), змодельуємо рух системи Земля – Місяць.

Розв'язання.

1. Уведемо дані до комірок таблиці:

$N_4 (m_1) \rightarrow 5,98 \cdot 10^{24}$; $N_5 (m_2) \rightarrow 5,98 \cdot 10^{24}/81$; $N_6 (R) \rightarrow 3,8E+08$;
 $N_3 (\Delta t) \rightarrow 8,64E+04$ (тривалість однієї доби в секундах).

2. Побудуємо траєкторії руху кожного з тіл (рис. 8.6), якими є графіки $y_1 = y_1(x_1)$ і $y_2 = y_2(x_2)$.

Жирна "точка" в центрі рис. 8.6 в дійсності є маленьким колом. Це орбіта Землі.

Завдання. Переконайтесь, що дана модель містить у собі попередню (про рух штучного супутника) за попередніх умов.

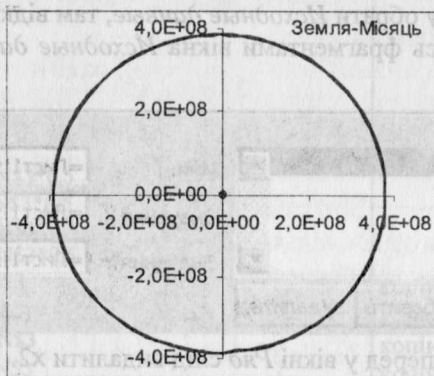


Рис. 8.6

Задача 2. Якби на місці Місяця знаходилась планета з масою, утричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти цих тіл?

Результат зображений на рис. 8.7. При побудові цього рисунку час моделювання був обмежений так, щоб обидва тіла не виконали й одного повного оберту. Тоді довжина штрихового відрізка прямої, що сполучає точки траєкторій в останній момент руху, дорівнює сталій відстані R між тілами, як про це йшлося вище. Крім того, стають зрозумілими напрямки руху кожного з тіл.

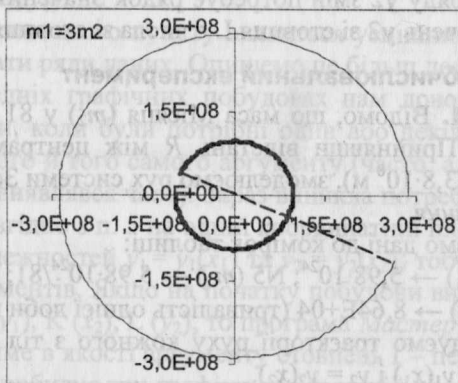


Рис. 8.7

Тут ми безпосередньо підійшли до моделювання руху компонен-

тив у системах, що зветься фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння, і обертаються по еліптичних орбітах навколо спільного центра мас. Зрозуміло, що остання модель передбачає такі об'єкти. Проте ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які є широко вживаними в астрофізиці:

- 1) одиницею маси є маса Сонця, $1 M_c = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг;
- 2) час вимірюють у земних роках, $1 \text{ рік} = 3,15 \cdot 10^7$ с;
- 3) одиницю довжини обирають в залежності від задачі, нею може бути:

– астрономічна одиниця (середній радіус земної орбіти),

$$1 \text{ A.O.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м};$$

– світловий рік (відстань, що її долає світло протягом 1 року),

$$1 \text{ св. рік} = 9,5 \cdot 10^{15} \text{ м};$$

– парсек (відстань, з якої радіус земної орбіти видно під кутом $1''$),

$$1 \text{ пк} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ м}.$$

Відстані до зірок найчастіше подають у світлових роках або в парсеках, а відстані між компонентами систем зірок – у астрономічних одиницях.

Згаданий перехід фактично стосується визначення числового значення розмірного коефіцієнта G у законі всесвітнього тяжіння. Така вправа без сумніву є корисною, оскільки розкриває зміст часто вживаної фрази: “Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць”.

Пригадайте, у який спосіб виконують подібні операції.

В разі утруднення скористайтеся допомогою:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} =$$

$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,5 \cdot 10^{11}}\right)^3 \text{ A.O.}^3}{\left(\frac{1}{1,99 \cdot 10^{30}}\right) M_c \cdot \left(\frac{1}{3,15 \cdot 10^7}\right)^2 \text{ рік}^2}$$

$$\text{Остаточнo отримуємо } G = 39 \frac{\text{A.O.}^3}{M_c \cdot \text{рік}^2}.$$

Завдання

1. Якими в даній системі одиниць є одиниці швидкості, прискорення...

рення?

2. Яких значень набуватиме стала всесвітнього тяжіння G , якщо відстань вимірювати в парсеках або у світлових роках?

3. Встановіть співвідношення між зазначеними вище одиницями довжини.

Після виконання наведених перетворень розв'яжіть задачу.

Задача 3. Побудувати орбіти компонентів системи подвійної зорки, до складу якої входять зірки з масами $1 M_{\odot}$ та $4 M_{\odot}$, відстань між якими становить $20 A.O.$

Розв'язання.

Насамперед вимагає збільшення хоча б до 300 кількість рядків, тому що помітно зростають періоди обертання компонентів системи, а просте збільшення інтервалу Δt при попередніх 100 рядках таблиці вже не забезпечує необхідної точності обчислень. У зв'язку з цим всі формули 4-го рядка слід копіювати у наступні 300.

Заповнимо комірки N2–N6:

N2 (G) – 39; N3 (Δt) – 0,15; N4 (m_1) – 4; N5 (m_2) – 1; N6 (R) – 20.

За умови, що $v_{2y}(0)$ – вміст комірки N10 – дорівнює числовому значенню швидкості, яка забезпечує рух по коловій орбіті і для штучних супутників має назву “перша космічна”, отримаємо вже знайомий результат з коловими орбітами (рис. 8.8), а у випадку її збільшення, наприклад, у 1,17 рази з одночасною зміною Δt (комірка N3) до 0,3 орбіти обох компонентів будуть еліптичними (рис. 8.9).

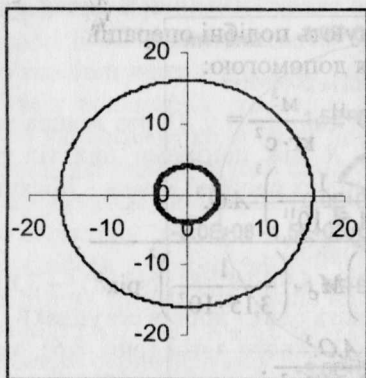


Рис. 8.8

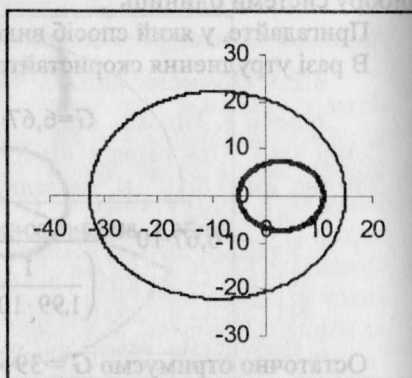


Рис. 8.9

За астрономічними даними в нашій Галактиці від 50 до 70% зірок входять до складу подвійних систем, а 10% є компонентами

ратних систем, які містять у своєму складі від 3 до 10 зірок.

З підручників фізики відомо, що в межах Сонячної системи закон всесвітнього тяжіння і решта законів Ньютона є правильними. Адже саме на основі цих законів свого часу були відкриті дві до того невідомі планети, що одержали назви Нептун (1846 р.) і Плутон (1930 р.). У наш час ці закони кладуть в основу розрахунків траєкторій космічних апаратів, і вони підтверджуються усім досвідом практичної космонавтики. Принагідно зазначимо, що польоти американських космічних апаратів до Місяця з наступним поверненням на Землю здійснювалися за найбільш економічною схемою, що її в 1927 р. обгрунтував і розрахував невизнаний за радянських часів талановитий український вчений Юрій Кондратюк. Відповідну траєкторію американські вчені називають «траєкторією Кондратюка».

Чи можна стверджувати, що на міжзоряних відстанях, значно більших за розміри Сонячної системи, ці закони також справджуються? Позитивну відповідь астрономи знаходять, фотографуючи далекі системи подвійних зірок. На рис. 8.10 подана широко відома фотографія, отримана в результаті тривалих спостережень за відносними позиціями компонентів подвійної зірки Сириус.

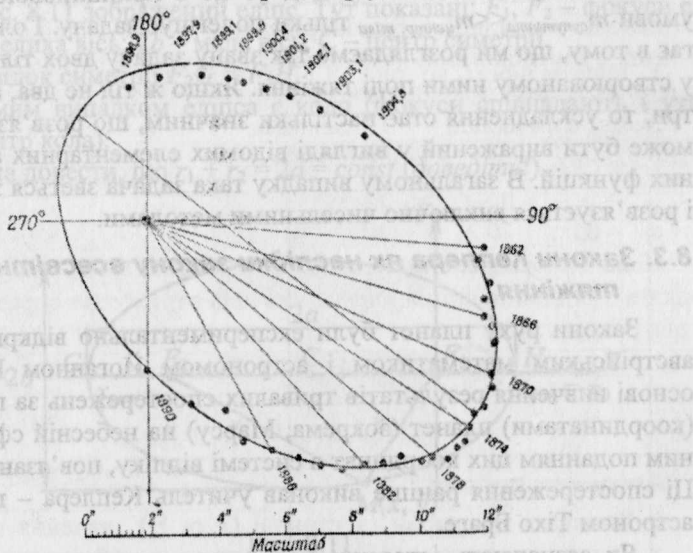


Рис. 8.10

Як говорять, коментарі зайві. Подібну картину руху можна оде-

ржати, якщо в таблиці, що відповідає рис. 8.9, реалізувати умову $m_2 \ll m_1$ і узгодити масштаби на координатних осях.

Вправи

1. Скільки років тривали спостереження згідно рис. 8.9?
2. З'ясуйте за підручниками астрономії, чому початок координат на фотографії (рис. 8.10) не знаходиться на великій вісі еліпса?

У сучасній астрофізиці закон тяжіння відіграє важливу роль при описі процесів, що відбуваються на різних стадіях еволюції зірок.

Висновки

1. З рис. 8.9 та 8.10 гарно видно, що обидва тіла обертаються в один бік відносно центра мас вздовж геометрично подібних траєкторій, які відрізняються тільки розмірами. Ці розміри обернено пропорційні масам тіл: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

2. Відрізок прямої, що сполучає тіла під час руху, завжди проходить через спільний центр мас (центр мас системи).

3. Насправді відміна §2 від §1 не є принциповою. Виконання умови $m_{\text{супутника}} \ll m_{\text{центр. тіла}}$ тільки полегшує задачу. Головне ж полягає в тому, що ми розглядаємо так звану задачу двох тіл про рухи тіл у створюваному ними полі тяжіння. Якщо ж тіл не два, а, наприклад, три, то ускладнення стає настільки значним, що розв'язок взагалі не може бути виражений у вигляді відомих елементарних або спеціальних функцій. В загальному випадку така задача зветься задачею n тіл і розв'язується виключно чисельними методами.

8.3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння

Закони руху планет були експериментально відкриті видатним австрійським математиком і астрономом Йоганном Кеплером на основі вивчення результатів тривалих спостережень за положеннями (координатами) планет (зокрема, Марсу) на небесній сфері і наступним поданням цих координат в системі відліку, пов'язаній із Сонцем. Ці спостереження раніше виконав учитель Кеплера – голландський астроном Тіхо Браге.

Як зазначають історики науки, для встановлення цих законів Кеплеру довелося виконати багато обчислень. Кожне обчислення – три сторінки великого формату, а для запобігання помилок воно повторювалося 70 разів. Збереглося 900 аркушів таких обчислень,

зиповнених дрібним кеплерівським почерком. На ці розрахунки та на осмислення їх результатів учений витратив вісімнадцять (!) років.

Закон всесвітнього тяжіння був встановлений Ньютоном помітно пізніше, ніж закони Кеплера, і, як відомо, виявився їх теоретичним уточненням і узагальненням. Закони Кеплера були сформульовані автором тільки для планет, тобто для випадків, коли маса тіла-супутника (планети) набагато менша за масу центрального тіла (Сонця). Вони передбачають тільки еліптичні орбіти.

Закон всесвітнього тяжіння описує гравітаційні взаємодії будь-яких пар тіл. Саме тому при перевірці законів Кеплера на основі закону всесвітнього тяжіння можна скористатись однією з уже розглянутих моделей з еліптичними траєкторіями, наприклад, моделлю руху штучного супутника навколо планети з §8.1.

8.3.1. Перший закон Кеплера

Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

Означення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою.

На рис. 8.11 зображений еліпс. Тут показані: F_1, F_2 – фокуси еліпса; $2a$ – велика вісь; $2b$ – мала вісь, C – центр симетрії.

Внаслідок симетрії $F_2G = F_1H$.

Окремим випадком еліпса є коло (фокуси співпадають і утворюють центр кола).

Можна довести, що $r_1 + r_2 = 2a = const$ (доведіть!).

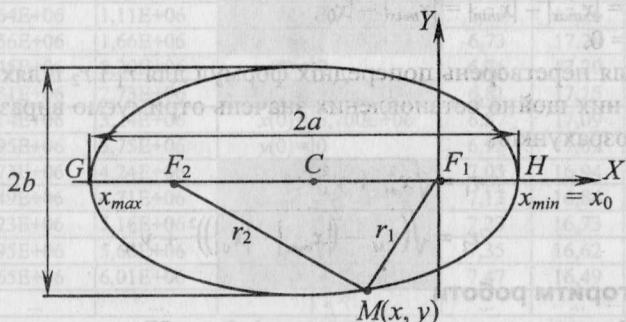


Рис. 8.11

Суть пропонованого нижче підходу відтворює наступну ідею: якщо стверджується, що траєкторією руху є одна з кривих другого порядку, то всі її точки мають задовольняти означенню даної кривої.

На наш погляд, це надійний спосіб відрізнити еліпс від овалу чи параболу від гіперболи, адже на око вони можуть бути схожими.

Те, що орбіта є еліпсом, зазвичай сприймається школярами на віру. Проте застосування комп'ютера дозволяє організувати дослідження, спрямоване на з'ясування форми траєкторії. Якщо траєкторія дійсно є еліпсом, а центральне тіло знаходиться у фокусі F_1 , то для всіх точок такої траєкторії повинна виконуватись шойно згадана рівність

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const.}$$

Цей факт і буде перевірений у обчислювальному експерименті.

Повернемося до таблиці, що відображує рух штучного супутника Землі (рис. 8.3).

Нагадаємо, що тут на основі закону тяжіння ми розрахували координати точок орбіти, що відповідають послідовним однаковим проміжкам часу Δt , і за цими координатами саму орбіту.

Відрізки r_1 і r_2 будемо визначати через координати x , y довільної точки M орбіти та координати фокусів F_1 і F_2 :

$$r_1 = \sqrt{(x_M - x_{F_1})^2 + (y_M - y_{F_1})^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x_M - x_{F_2})^2 + (y_M - y_{F_2})^2}.$$

У відповідності до рис. 8.11 конкретизуємо значення деяких змінних:

$$x_{F_1} = 0, y_{F_1} = 0;$$

$$x_{F_2} = GH - F_1H - F_2G = 2a - 2F_1H = (|x_{\max}| + |x_{\min}|) - 2|x_{\min}| = |x_{\max}| - |x_{\min}| = |x_{\max}| - |x_0|;$$

$$y_{F_2} = 0.$$

Після перетворень попередніх формул для r_1 і r_2 шляхом підстановки в них шойно встановлених значень отримуємо вирази, придатні для розрахунків:

$$r_1 = \sqrt{x_M^2 + y_M^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x_M - (|x_{\max}| - |x_0|))^2 + y_M^2}.$$

Алгоритм роботи

1. Дописати до умови (у стовпці G та H) значення параметрів x_{\max} , x_{\min} , a , та x -координат фокусів $x_{(F_1)}$ та $x_{(F_2)}$ майбутнього еліпса.

2. Додати до таблиці три нові стовпці I, J, K; у них розмістити результати розрахунків значень змінних r_1 , r_2 , та $r_1 + r_2$. Довжини відрізків r_1 та r_2 обчислювати за координатами їхніх початків та кінців.

3. Уміст комірок таблиці має бути таким:

| комірка | формули / числа | коментарі |
|---------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| H10 | =МАКС(E2:E250) | x-координата точки G |
| H11 | =МИН(E2:E250) | x-координата точки H |
| H12 | =0,5*ABS(H10-H11) | x-координата точки O |
| H13 | 0,00 | x-координата точки F ₁ |
| H14 | =H11+H10 | x-координата точки F ₂ |
| I3 | =((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000 | довжина відрізка r ₁ |
| J3 | =((\$H\$14-E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000 | довжина відрізка r ₂ |
| K3 | =I3+J3 | |

4. Формули комірок I3, J3 та K3 копіювати до самого низу таблиці (кожну у своєму стовпці), так що фактично переглядом охоплюються всі точки, за якими була побудована траєкторія.

На рис. 8.12 наведені результати дослідження.

Такі гарні результати завжди повинні викликати сумніви, однак у даному випадку приводи для сумнівів відсутні: точність кінцевого результату ($r_1 + r_2$) має бути не набагато гіршою за точність обчислення координат точок орбіти, тому що розрахунки значень r_1 і r_2 ведуться саме за цими точками.

Таким чином, при русі тіла під дією сили тяжіння траєкторія, якщо вона обмежена в просторі (фінитна) і замкнута, виявляється еліпсом, у одному з фокусів якого знаходиться центральне тіло.

| | E | F | G | H | I | J | K |
|--------|----------|----------|---------------------|-----------|----------------------|----------------|--------------------------------|
| 1 ... | x | y | Дано: ШСЗ | | Перший закон Кеплера | | |
| 2 ... | 6,70E+06 | 0,00E+00 | G= | 6,672E-11 | r ₁ | r ₂ | r ₁ +r ₂ |
| 3 ... | 6,68E+06 | 5,55E+05 | Δt= | 60 | 6,70 | 17,27 | 23,97 |
| 4 ... | 6,64E+06 | 1,11E+06 | M= | 5,976E+24 | 6,71 | 17,26 | 23,97 |
| 5 ... | 6,56E+06 | 1,66E+06 | r= | 6,700E+06 | 6,73 | 17,24 | 23,97 |
| 6 ... | 6,45E+06 | 2,20E+06 | v _x (0)= | 0 | 6,76 | 17,20 | 23,97 |
| 7 ... | 6,31E+06 | 2,73E+06 | v _y (0)= | 9,26E+03 | 6,81 | 17,15 | 23,97 |
| 8 ... | 6,14E+06 | 3,24E+06 | x(0)= | 6,700E+06 | 6,87 | 17,09 | 23,97 |
| 9 ... | 5,95E+06 | 3,75E+06 | y(0)= | 0 | 6,95 | 17,02 | 23,97 |
| 10 ... | 5,73E+06 | 4,24E+06 | x _{max} = | 6,70E+06 | 7,03 | 16,94 | 23,97 |
| 11 ... | 5,49E+06 | 4,71E+06 | x _{min} = | -1,73E+07 | 7,13 | 16,84 | 23,97 |
| 12 ... | 5,23E+06 | 5,16E+06 | a= | 1,20E+07 | 7,23 | 16,73 | 23,97 |
| 13 ... | 4,95E+06 | 5,60E+06 | x _(F1) = | 0,00 | 7,35 | 16,62 | 23,97 |
| 14 ... | 4,65E+06 | 6,01E+06 | x _(F2) = | -1,06E+07 | 7,47 | 16,49 | 23,97 |
| ... | ... | ... | | | ... | ... | ... |

Рис. 8.12

8.3.2. Другий закон Кеплера

Напрявлений відрізок, що сполучає Сонце й планету (радіус-вектор планети) за однакові проміжки часу описує (замітає) рівні

площі (рис. 8.13).



Рис. 8.13

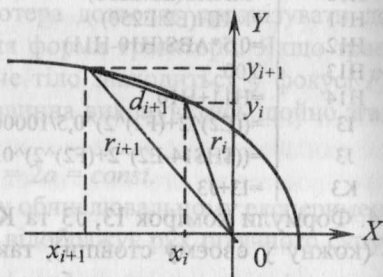


Рис. 8.14

Експериментальна перевірка другого закону Кеплера є не менш цікавою та корисною, ніж попередня.

На рис. 8.14 показані два радіуси-вектори r_i і r_{i+1} , що відповідають початку і кінцю i -го проміжку часу Δt . Дугу, що стягує їхні кінці, з достатнім наближенням можна замінити хордою d_{i+1} . Шукану площу знайдемо за трьома сторонами r_i, r_{i+1}, d_{i+1} (за формулою Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{1}{2}(r_i + r_{i+1} + d_{i+1})$ – напівпериметр трикутника.

Завдання

1. Як можна обчислити r_i, r_{i+1} та d_{i+1} ?

Алгоритм роботи

Добавимо до таблиці п'ять нових стовпців L, M, N, O, P. У них будуть заноситися результати обчислення сторін трикутника r_i, r_{i+1}, d_{i+1} , півпериметра p_i та площі S_i .

Довжини всіх відрізків, як і раніше, обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців. Уміст комірок таблиці має бути таким:

| комірка | формули / числа |
|---------|--|
| L3 | $=((E2)^2+(F2)^2)^{0,5}/1000000$ |
| M3 | $=((E3)^2+(F3)^2)^{0,5}/1000000$ |
| N3 | $=((E3-E2)^2+(F3-F2)^2)^{0,5}/1000000$ |
| O3 | $=0,5*(L3+M3+N3)$ |
| P3 | $=(O3*(O3-L3)*(O3-M3)*(O3-N3))^{0,5}$ |

Дільник 1000000 спрощує виведення результатів у таблиці.

На рис. 8.15 подано відповідний фрагмент доповненої таблиці:

| | ... | L | M | N | O | P |
|-----|-----|-----------------------------|-----------|-----------|-------|-------------|
| 1 | ... | <i>Другий закон Кеплера</i> | | | | |
| 2 | ... | r_i | r_{i+1} | d_{i+1} | p_i | S_i |
| 3 | ... | 6,70 | 6,71 | 0,56 | 6,98 | 1,86 |
| 4 | ... | 6,71 | 6,73 | 0,55 | 7,00 | 1,86 |
| 5 | ... | 6,73 | 6,76 | 0,55 | 7,02 | 1,86 |
| 6 | ... | 6,76 | 6,81 | 0,55 | 7,06 | 1,86 |
| 7 | ... | 6,81 | 6,87 | 0,55 | 7,12 | 1,86 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Рис. 8.15

Отже, перевірка другого закону Кеплера засобами обчислювального експерименту підтверджує його справедливість.

Завдання. Поверніться до рис. 8.10. У якому з років – 1896 чи 1874 – компонент меншої маси (тіло-супутник) рухався з більшою швидкістю?

8.3.3. Третій закон Кеплера

Нагадаємо, що закони руху планет були встановлені Й. Кеплером на основі опрацювання даних із спостережень. На відміну від двох перших законів, де йдеться про особливості руху тіла-супутника (планети) відносно центрального тіла (Сонця), в третьому законі розглядаються *дві довільні пари тіл*, в кожній з яких тіла взаємодіють із силою всесвітнього тяжіння. У формулюванні Кеплера (для планет) *квадрати періодів обертання будь-яких двох планет відносяться як куби їх середніх відстаней від Сонця*:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Середньою відстанню R тіла-супутника від центрального тіла є половина великої осі орбіти – так звана велика піввісь.

Перевірку закону можна здійснити, маючи таблицю, побудовану для двох пар тіл (“Сонце – планета1” і “Сонце – планета2”), або одержати його як *теоретичний* наслідок закону всесвітнього тяжіння, що ми й виконаємо для найбільш простого випадку – колових орбіт.

Як було зазначено раніше, сила тяжіння надає прискорень обом

тілам: $\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2$, звідки

$$a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2} \quad (7)$$

З іншого боку, $a = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, так що

$$a_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}; \quad a_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2} \quad (8)$$

Поєднуючи відповідні вирази із (7) та (8), отримуємо

$$\frac{Gm_2}{R^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}, \quad \frac{Gm_1}{R^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2} \quad (9)$$

Додамо обидва рівняння з (9), і, оскільки $T_1 = T_2$, будемо мати

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{R^2} = \frac{4\pi^2(r_1 + r_2)}{T^2}$$

або

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

що можна записати у вигляді

$$(m_1 + m_2) \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Тут m_1, m_2 – маси тіл, що взаємодіють.

Переходячи до пари “планета–Сонце”, одержимо

$$(m + M) \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Для двох будь-яких пар тіл, в кожній з яких між тілами діють сили всесвітнього тяжіння, зазвичай записують

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{m_1 + M_1}{m_2 + M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad (10)$$

Вираз (10) є уточненням третього закону Кеплера, зробленим Ньютоном на основі закону всесвітнього тяжіння:

Квадрати періодів обертання тіл-супутників навколо центральних тіл, помножені на суму мас відповідної пари тіл, відносяться як куби великих півосей орбіт.

Цей вираз дає надійний спосіб для порівняння мас небесних тіл.

Ще раз наголошуємо, що всі закони Кеплера описують поведінку будь-якої пари тіл, між якими діє сила всесвітнього тяжіння. Прикладами таких пар є Сонце – планета, Сонце – комета, планета – природний (або штучний) супутник тощо. Дуже цікавими небесними об'єктами є комети, що мають вигляд хвостатої зірки або просто туманної плями, яка переміщується на фоні зоряного неба.

Мабуть, самою знаменитою періодичною кометою є комета Галлея. Записи про її появи вдалося прослідкувати аж до 239 р. до н.е. Її назвали на честь англійського вченого Едмунда Галлея, котрий у

1705 р. першим припустив, що комети, які спостерігалися в 1456, 1531, 1607 та 1682 рр., були повторними поверненнями одного й того самого об'єкта. Він висловив передбачення, що комета знову повернеться в 1758 р., і її повернення в 1758 р., вже після смерті вченого, довело, що вона є членом сонячної системи. Коли комета Галлея повернулася в 1910 р., Земля пройшла крізь її хвіст, що на той час стало джерелом надзвичайно сильного хвилювання серед населення, хоч проходження комети не спричинило в природі ніяких наслідків. У 1986 р. спостерігалася чергова поява комети Галлея. Це було її сьоме і поки що останнє повернення з подорожі навколо Сонця, якщо вести рахунок від тих днів 1456 р., коли перелякані люди возносили молитви, благаючи захистити їх від “диявола, турка і комети”.

Задача. Відомо, що під час сьомого проходження комети через перигелій була визначена відстань між нею й Сонцем, яка виявилась рівною $0,6 \text{ А.О.}$ (астрономічних одиниць).

1. Змодельуйте рух комети Галлея й оцініть за моделлю відстань, на яку відходить комета від Сонця в афелії.

2. Результат перевірте розрахунком. Прийняти період обертання комети $T = 75,5$ років, а її масу $m = 10^{14}$ кг.

Примітка. Для розрахунку слід скористатись виразом третього закону згідно формулювання, даного Кеплером. Його зручно записати для двох пар тіл: “Сонце – комета” і “Сонце – Земля”. Одиницею відстані взяти 1 А.О. , а одиницею часу – 1 земний рік.

3. Яким стане розрахунок, якщо другою парою тіл буде не “Сонце – Земля”, а “штучний супутник – Земля”?

8.4. Узагальнення закону тяжіння на випадок довільного показника степеня k для відстані r між тілами

8.4.1. Постановка проблеми. План роботи

Далі йдеться про узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного значення показника степеня k для відстані r між тілами:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k} \quad (7)$$

Поставлену проблему можна сформулювати і так: як би рухалися тіла Сонячної системи, якби гравітаційна взаємодія відбувалася за законом (7) при довільному k ?

Така постановка проблеми виходить за межі шкільних курсів фізики й математики і є об'єктом курсу теоретичної фізики. Тому дослідження комп'ютерної моделі виявляється єдиним методом, що дозволяє усунути ускладнення, пов'язані з обмеженим математичним

апаратом школярів.

Спочатку розглянемо згаданий вище простий випадок, коли $m_{\text{спутн}} \ll m_{\text{центр.тіло}}$ і відстань між центрами тіл значно перевищує їхні розміри (вважаємо тіла матеріальними точками), будемо також нехтувати впливом на них інших тіл Сонячної системи і опором середовища. Тоді на тіло-спутник діятиме тільки одна сила всесвітнього тяжіння (рис. 6.1). Її проекції на вісі x , y відповідно дорівнюватимуть

$$F_x = -\frac{GMmx}{r^{k+1}}; \quad F_y = -\frac{GMmy}{r^{k+1}},$$

а проекції прискорення за аналогією з (3) будуть

$$a_x = -\frac{GMmx}{r^{k+1}}; \quad a_y = -\frac{GMmy}{r^{k+1}} \quad (8)$$

Відстань r між тілами, як і раніше, будемо визначати за теоремою Піфагора: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тому

$$a_x = GMx(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}; \quad a_y = GM y(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}} \quad (9)$$

Система рівнянь (9) є математичною моделлю руху тіла-спутника.

Знов дослідимо рух Землі навколо Сонця, але вже за новим, модифікованим законом. Пригадаємо, що тіло стає супутником і рухається коловою орбітою, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості v_{1k} , значення якої звичайно знаходять за умови, що сила тяжіння забезпечує необхідне доцентрове (нормальне) прискорення:

$$\frac{GMm}{r^k} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки

$$v_y(0) = v_{1k} = \sqrt{\frac{GM}{r^{(k-1)}}} \quad (10)$$

8.4.2. Обчислювальний експеримент

У зв'язку з появою ще однієї змінної величини – показника степеня k – деяких змін має зазнати зовнішній вигляд таблиці:

Не повторюючи всіх подробиць, зазначимо тільки головне.

1. Обчислення координат x , y точок орбіти будемо виконувати за циклічною схемою *прискорення* \rightarrow *швидкість* \rightarrow *координата*.

2. Початкові значення змінних $v_x(0)$, $v_y(0)$, $x(0)$ та $y(0)$ будемо зберігати в комітках, розташованих під умовою, причому значення $v_y(0)$ обчислюватиметься автоматично за модифікованою формулою (10), яку необхідно буде створити в Н9.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|----------|----------|----------|----------|-------|-------|--------------|---|
| 1 | a_{2x} | a_{2y} | v_{2x} | v_{2y} | x_2 | y_2 | Дано: | |
| 2 | | | | | | | $G=$ | |
| 3 | | | | | | | $\Delta t=$ | |
| 4 | | | | | | | $m_1=$ | |
| 5 | | | | | | | $m_2=$ | |
| 6 | | | | | | | $r=$ | |
| 7 | | | | | | | $k=$ | |
| 8 | | | | | | | $v_{2x}(0)=$ | |
| 9 | | | | | | | $v_{2y}(0)=$ | |
| 10 | | | | | | | $x_2(0)=$ | |
| 11 | | | | | | | $y_2(0)=$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

Зазначимо вхідні дані та початкові ($t = 0$) умови:

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}, m = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}, r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}, x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, x_2(0) = r, \\ y_2(0) = 0, v_{1x}(0) = 0, v_{2x}(0) = 0, v_{1y}(0) = 0, v_{2y}(0) = v_{1k}$$

І знов індекси 1 віднесемо до центрального тіла (Сонця), а індекс 2 – до тіла-супутника (Землі).

Крок зміни часу Δt будемо добирати експериментально.

Ключові комірки цієї таблиці мають такий уміст:

| комірка | формули / числа | примітки |
|---------|---|---------------------------|
| H7 | =2 | значення k |
| H8 | =0 | |
| H9 | =(H2*H4/H6^(H7-1))^0,5 | v_{1k} – перша космічна |
| H10 | =H6 | |
| H11 | =0 | копіювати в A3 і A4 |
| A2 | =-H\$2*\$H\$4*\$E2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1)) | копіювати в B3 і B4 |
| B2 | =-H\$2*\$H\$4*\$F2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1)) | |
| C2 | =H\$7 | |
| D2 | =H\$8 | |
| E2 | =H\$9 | |
| F2 | =H\$10 | |
| C3 | =C2+A2*\$H\$3*0,5 | |
| D3 | =D2+B2*\$H\$3*0,5 | копіювати в E4 |
| E3 | =E2+C3*\$H\$3 | копіювати в F4 |
| F3 | =F2+D3*\$H\$3 | |
| C4 | =C3+A3*\$H\$3 | |
| D4 | =D3+B3*\$H\$3 | |

Порядок роботи

1. Заповнити комірки H2–H7.
2. Заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.
3. Всі формули 4-го рядка (від A4 по F4) копіювати в наступні 200 рядків.
4. За даними стовпців E та F побудувати траєкторію руху.

Враховуючи, що в досліджуваній моделі формули для прискорень a_x і a_y та для першої космічної швидкості $v_{1к}$ модифіковані, маємо розглядати рис. 8.16 як тест на перевірку нових формул при звичайному значенні $k = 2,0$.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------------|-----|
| 1 | a_{2x} | a_{2y} | v_{2x} | v_{2y} | x_2 | y_2 | Дано: | |
| 2 | -5931 | 0 | 0 | 943186 | 1,50E+08 | 0,00E+00 | $G = 6,67E-11$ | |
| 3 | -5927 | -205 | -16309 | 943186 | 1,50E+08 | 5,19E+06 | $\Delta t = 5,5$ | |
| 4 | -5916 | -410 | -48908 | 942058 | 1,50E+08 | 1,04E+07 | $M = m_1 = 2,0E+30$ | |
| 5 | -5899 | -614 | -81449 | 939803 | 1,49E+08 | 1,55E+07 | $m_2 = 6,0E+24$ | |
| 6 | -5874 | -818 | -113892 | 936424 | 1,49E+08 | 2,07E+07 | $r = 1,5E+08$ | |
| 7 | -5842 | -1021 | -146199 | 931926 | 1,48E+08 | 2,58E+07 | $k = 2,0$ | |
| 8 | -5803 | -1222 | -178331 | 926312 | 1,47E+08 | 3,09E+07 | $v_{2x}(0) = 0$ | |
| 9 | -5758 | -1422 | -210249 | 919591 | 1,46E+08 | 3,60E+07 | $v_{2y}(0) = 9,43E+05$ | |
| 10 | -5705 | -1620 | -241916 | 911770 | 1,44E+08 | 4,10E+07 | $x_2(0) = 1,5E+08$ | |
| 11 | -5645 | -1817 | -273293 | 902859 | 1,43E+08 | 4,59E+07 | $y_2(0) = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

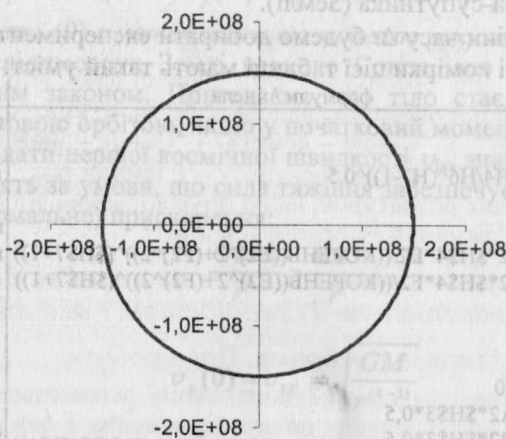


Рис. 8.16

Поклавши $k = 1,5$ і $\Delta t = 0,05$ с, отримуємо схожий результат.

Можна переконатися в тому, що формально колова траєкторія існує для будь-яких значень k . Зокрема, при $k = 1$ слід було б узяти $\Delta t \approx 0,0005$ с, а при $k = 2,2$ інтервал $\Delta t \approx 50$ і т.д. Висновок про існування колових траєкторій є дійсно формальним. Якщо простежити за тим, яких значень набуває $v_{1к}$ в описаних експериментах (комірка Н9), то виявляється, що в міру зменшення k відбувається швидке зростання орбітальної швидкості аж до $c = 3 \cdot 10^8$ м/с і більше, а це

принципово неможливо.

Таким чином, модель перестає адекватно описувати досліджуване явище. Такі занадто великі значення u_k ми маємо сприймати лише як результати обчислень за наведеною формулою і ні в якому разі не приписувати об'єкту властивості неадекватної моделі.

Знов виконаємо тестування. Показник степеня залишимо з попереднім значенням $k = 2$, проте збільшимо орбітальну швидкість тіла-спутника $v_{y2}(0)$ так, щоб задовольнялась умова замкнутої траєкторії $u_{1k} < v_y(0) < \sqrt{2} u_{1k}$. Орбіта має набути еліптичної форми. Нагадаємо, що тут $u_{1k} = \sqrt{2} u_k$ — друга космічна швидкість.

То ж збільшимо попереднє значення $v_y(0)$, наприклад, в 1,25 рази. Для цього, як і раніше, відредагуємо формулу в комірці Н9. А саме:

$$=(H2*H4/H6^(H7-1))^0,5*1,25. \quad (11)$$

Результат показаний на рис. 8.17.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------------|---|
| 1 | a_{2x} | a_{2y} | u_{2x} | u_{2y} | x_2 | y_2 | Дано: | |
| 2 | -5931 | 0 | 0 | 1178983 | 1,50E+08 | 0,00E+00 | $G = 6,672E-11$ | |
| 3 | -5806 | -920 | -59307 | 1178983 | 1,49E+08 | 2,36E+07 | $\Delta t = 20$ | |
| 4 | -5451 | -1755 | -175418 | 1160585 | 1,45E+08 | 4,68E+07 | $m_1 = 2,00E+30$ | |
| 5 | -4920 | -2442 | -284431 | 1125480 | 1,40E+08 | 6,93E+07 | $m_2 = 6,00E+24$ | |
| 6 | -4283 | -2948 | -382824 | 1076641 | 1,32E+08 | 9,08E+07 | $r = 1,50E+08$ | |
| 7 | -3609 | -3273 | -468482 | 1017680 | 1,23E+08 | 1,11E+08 | $k = 2,00$ | |
| 8 | -2951 | -3438 | -540652 | 952223 | 1,12E+08 | 1,30E+08 | $u_{2x}(0) = 0$ | |
| 9 | -2345 | -3475 | -599664 | 883468 | 9,98E+07 | 1,48E+08 | $u_{2y}(0) = 1,18E+06$ | |
| 10 | -1809 | -3419 | -646555 | 813966 | 8,69E+07 | 1,64E+08 | $x_2(0) = 1,500E+08$ | |
| 11 | -1349 | -3300 | -682729 | 745585 | 7,32E+07 | 1,79E+08 | $y_2(0) = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |

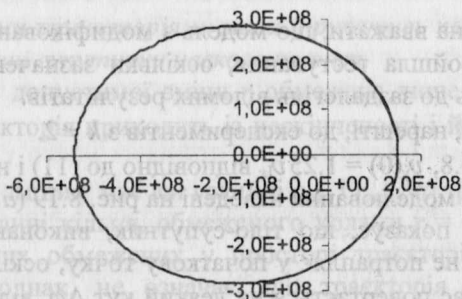


Рис. 8.17

Якщо початковій швидкості надати значення $u_y(0) = \sqrt{2} u_{1k}$, тоб-

то ввести до Н9 нового множника $= (H2 * H4 / H6^{(H7-1)})^{0,5} * 2^{0,5}$, одержуємо параболічну траєкторію (рис. 8.18).

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------------|---|
| 1 | a_{2x} | a_{2y} | v_{2x} | v_{2y} | x_2 | y_2 | Дано: | |
| 2 | -5931 | 0 | 0 | 1330000 | 1,50E+08 | 0,00E+00 | $G = 6,672E-11$ | |
| 3 | -5919 | -263 | -14827 | 1330000 | 1,50E+08 | 6,67E+06 | $\Delta t = 5$ | |
| 4 | -5884 | -523 | -44422 | 1328687 | 1,50E+08 | 1,33E+07 | $m_1 = 2,00E+30$ | |
| 5 | -5827 | -777 | -73844 | 1326075 | 1,49E+08 | 2,00E+07 | $m_2 = 6,00E+24$ | |
| 6 | -5749 | -1025 | -102981 | 1322187 | 1,49E+08 | 2,66E+07 | $r = 1,50E+08$ | |
| 7 | -5650 | -1263 | -131725 | 1317062 | 1,48E+08 | 3,32E+07 | $k = 2,00$ | |
| 8 | -5533 | -1490 | -159975 | 1310747 | 1,47E+08 | 3,98E+07 | $v_{2x}(0) = 0$ | |
| 9 | -5398 | -1703 | -187638 | 1303299 | 1,46E+08 | 4,63E+07 | $v_{2y}(0) = 1,33E+06$ | |
| 10 | -5249 | -1902 | -214631 | 1294784 | 1,45E+08 | 5,28E+07 | $x_2(0) = 1,500E+08$ | |
| 11 | -5087 | -2086 | -240877 | 1285275 | 1,44E+08 | 5,93E+07 | $y_2(0) = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

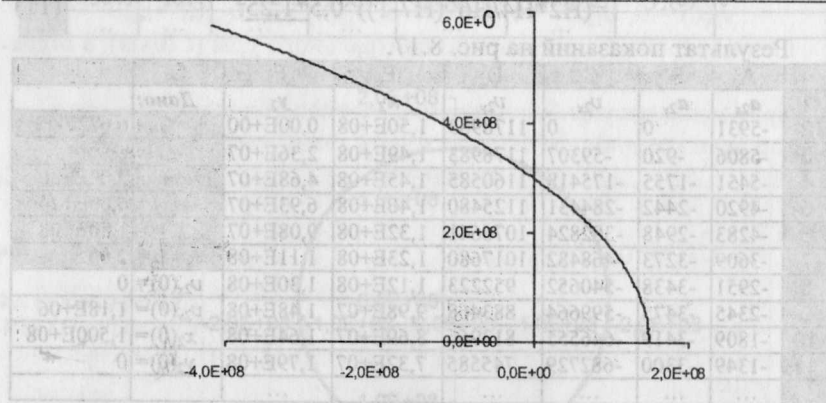


Рис. 8.18

Отже, можна вважати, що модель з модифікованими формулами (1), (4), (5) пройшла тестування, оскільки зазначені формули при $k = 2$ приводять до заздалегідь відомих результатів.

Перейдемо, нарешті, до експериментів з $k \neq 2$.

Нехай $k = 1.8$, $v_y(0) = 1.25 v_{yk}$ відповідно до (11) і нехай $\Delta t = 3$ с.

Результати моделювання наведені на рис. 8.19 (а – г)

Рис. 8.19а показує, що тіло-супутник, виконавши один оберт уздовж еліпса, не потрапляє у початкову точку, оскільки велика вісь еліпса за цей час повертається на деякий кут $\Delta\phi$ відносно центрального тіла – точки (0; 0).

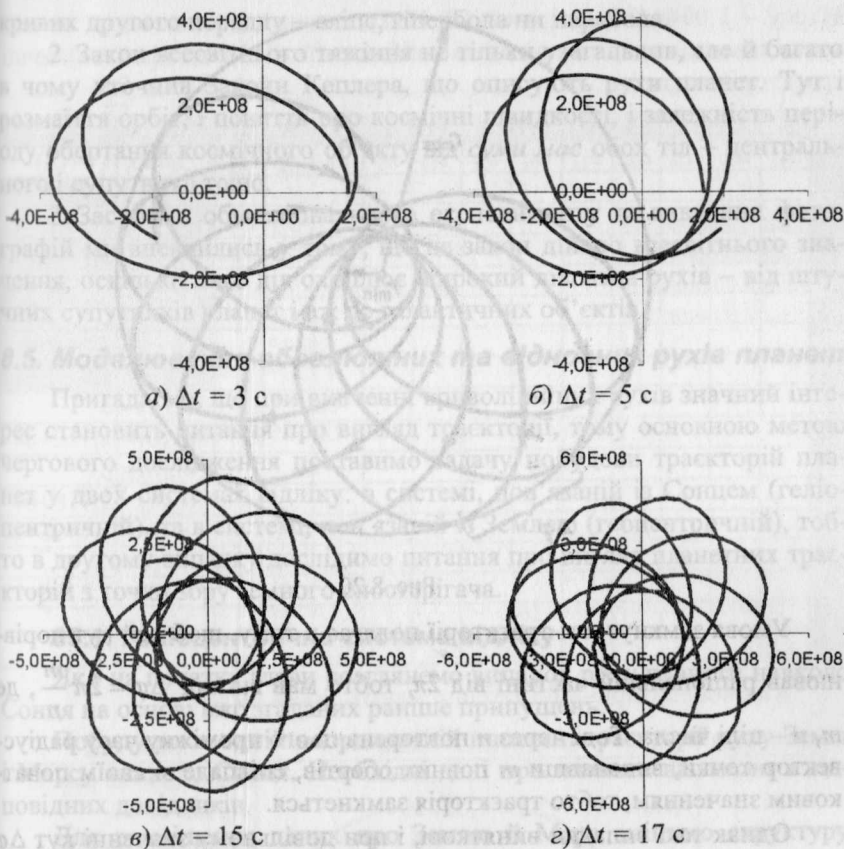


Рис. 8.19

Саме за такими траєкторіями мали б рухатись планети навколо Сонця або штучні супутники навколо планет.

Якщо область допустимої зміни r обмежена лише однією умовою $r \geq r_{max}$ то траєкторія приходить із нескінченності і йде на нескінченність.

Якщо область зміни r має дві границі r_{min} і r_{max} , то траєкторія цілком лежить всередині кільця, обмеженого колами $r = r_{max}$ і $r = r_{min}$ (рухи вздовж таких обмежених у просторі траєкторій називають фінітними). Це, однак, не означає, що траєкторія неодмінно є замкнутою кривою. За час, протягом якого r змінюється від r_{max} до r_{min} і потім знову до r_{max} , радіус-вектор повертається на кут $\Delta\varphi$.

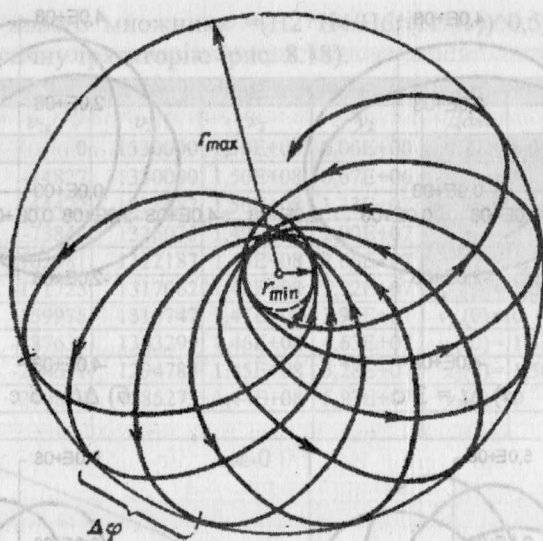


Рис. 8.20

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб цей кут дорівнював раціональній частині від 2π , тобто мав вигляд $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$, де m, n – цілі числа. Тоді через n повторень цього проміжку часу радіус-вектор точки, виконавши m повних обертів, співпадає зі своїм початковим значенням, тобто траєкторія замкнеться.

Однак такі випадки виняткові, і при довільному значенні кут $\Delta\varphi$ не є раціональною частиною від 2π . Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не замкнута. Вона нескінчену кількість разів проходить через мінімальну і максимальну відстань (як, наприклад, на рис. 8.20) і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними колами.

Існують лише два типи центральних полів, у яких всі траєкторії рухів замкнені. Це поля, в яких потенціальна енергія частинки пропорційна $1/r$ або r^2 . Перший з цих випадків відповідає $k = 2$ (світ, у якому ми живемо).

Висновки

1. Якщо тіло рухається під дією сили всесвітнього тяжіння, то траєкторією його руху в залежності від початкових умов є одна з

кривих другого порядку – еліпс, гіпербола чи парабола.

2. Закон всесвітнього тяжіння не тільки узагальнив, але й багато в чому уточнив Закони Кеплера, що описують рухи планет. Тут і розмаїття орбіт, і поняття про космічні швидкості, і залежність періоду обертання космічного об'єкту від суми мас обох тіл – центрального і супутника тощо.

3. Засобами обчислювального експерименту та вивчення фотографій ми впевнились у тому, що це закон дійсно всесвітнього значення, оскільки його дія охоплює широкий діапазон рухів – від штучних супутників планет і аж до галактичних об'єктів.

8.5. Моделювання абсолютних та відносних рухів планет

Пригадаємо, що при вивченні криволінійних рухів значний інтерес становить питання про вигляд траєкторії, тому основною метою чергового дослідження поставимо задачу побудови траєкторій планет у двох системах відліку: в системі, пов'язаній із Сонцем (геліоцентричній), та в системі, пов'язаній із Землею (геоцентричній), тобто в другому випадку дослідимо питання про вигляд планетних траєкторій з точки зору земного спостерігача.

85.1. Геліоцентрична система відліку

Як і на початку глави розглянемо випадок руху планети навколо Сонця на основі вже згаданих раніше припущень.

Побудуємо в одній координатній площині траєкторії руху Землі і Марсу навколо Сонця. Необхідні дані про планети візьмемо з відповідних довідників.

Для розміщення даних про Землю й Марс змінимо структуру таблиці (кількість стовпців зростає внаслідок розгляду двох планет).

Нехай для визначеності індекси 1 відповідають Землі, а індекси 2 – Марсу.

Вибір у якості початкових швидкостей $v_{1y}(0)$, $v_{2y}(0)$, розрахованих за виразом для першої космічної швидкості $v_{1K} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, забез-

печує колові траєкторії руху планет. Це є спрощенням їх реального руху (особливо це стосується Марсу), оскільки в дійсності планетні орбіти є еліпсами. При моделюванні для перетворення колових орбіт на еліптичні, як ми вже бачили, треба вираз для v_{1K} помножити на деяке число b , що задовольняє умові $1 > b > \sqrt{2}$. З астрономії відомо, що для Землі потрібний коефіцієнт має становити 1,020204, а для

Марсу – 1,094442 (комірки N10, N12). Розраховані значення початкових швидкостей відповідають найближчій до Сонця (фокуса) точки траєкторії – афелію.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|--------------|-----------|
| 1 | a_{1x} | a_{1y} | a_{2x} | a_{2y} | v_{1x} | v_{1y} | v_{2x} | v_{2y} | x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | Дано: | (CI) |
| 2 | | | | | | | | | | | | | $G=$ | 6,672E-11 |
| 3 | | | | | | | | | | | | | $\Delta t=$ | 172800 |
| 4 | | | | | | | | | | | | | $M=$ | 1,990E+30 |
| 5 | | | | | | | | | | | | | $m_1=$ | 5,976E+24 |
| 6 | | | | | | | | | | | | | $m_2=$ | 6,429E+23 |
| 7 | | | | | | | | | | | | | $r_1=$ | 1,496E+11 |
| 8 | | | | | | | | | | | | | $r_2=$ | 2,279E+11 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | $v_{1x}(0)=$ | 0 |
| 10 | | | | | | | | | | | | | $v_{1y}(0)=$ | 2,98E+04 |
| 11 | | | | | | | | | | | | | $v_{2x}(0)=$ | 0 |
| 12 | | | | | | | | | | | | | $v_{2y}(0)=$ | 2,41E+04 |
| 13 | | | | | | | | | | | | | $x_1(0)=$ | 1,496E+11 |
| 14 | | | | | | | | | | | | | $y_1(0)=$ | 0 |
| 15 | | | | | | | | | | | | | $x_2(0)=$ | 2,279E+11 |
| 16 | | | | | | | | | | | | | $y_2(0)=$ | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

Ключові комірки цієї таблиці мають такий зміст:

| комірка | формули / числа | примітки |
|---------|------------------------------------|----------------------|
| N9 | =0 | відповідно до рис. 1 |
| N10 | =(N2*N4/N7)^0,5*1,020204 | v_{1K} для Землі |
| N11 | =0 | відповідно до рис. 1 |
| N12 | =(N2*N4/N8)^0,5*1,094442 | v_{1K} для Марсу |
| N13 | =N7 | |
| N14 | =0 | |
| N15 | =N8 | |
| N16 | =0 | |
| A2 | =-N\$2*N\$4*I2/((I2)^2+(J2)^2)^1,5 | копіювати в A3, A4 |
| B2 | =-N\$2*N\$4*J2/((I2)^2+(J2)^2)^1,5 | копіювати в B3, B4 |
| C2 | =-N\$2*N\$4*K2/((K2)^2+(L2)^2)^1,5 | копіювати в C3, C4 |
| D2 | =-N\$2*N\$4*L2/((K2)^2+(L2)^2)^1,5 | копіювати в D3, D4 |
| E2 | =N9 | |
| F2 | =N10 | |
| G2 | =0 | |
| H2 | =N12 | |
| I2 | =N13 | |

J2 =N14
 K2 =N8
 L2 =0
 E3 =E2+A2*\$N\$3*0,5
 F3 =F2+B2*\$N\$3*0,5
 G3 =G2+C2*\$N\$3*0,5
 H3 =H2+D2*\$N\$3*0,5
 I3 =I2+E3*\$N\$3
 J3 =J2+F3*\$N\$3
 K3 =K2+G3*\$N\$3
 L3 =L2+H3*\$N\$3
 E4 =E3+A3*\$N\$3
 F4 =F3+B3*\$N\$3
 G4 =G3+C3*\$N\$3
 H4 =H3+D3*\$N\$3

копіювати в I4
 копіювати в J4
 копіювати в K4
 копіювати в L4

Порядок роботи

1. Заповнити комірці N2–N8.
2. Заповнити комірці згідно наведеної вище таблиці.
3. Всі формули 4-го рядка копіювати в наступні 365 рядків.
4. За даними стовпців I, J та K, L побудувати орбіти планет – графіки залежності y_1 від x_1 та y_2 від x_2 (рис. 8.21).

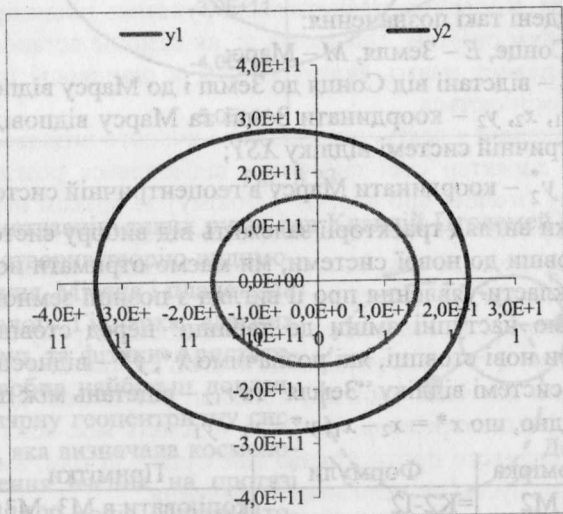


Рис. 8.21

8.5.2. Геоцентрична система відліку

Перехід від геліоцентричної системи відліку XSU до геоцентричної системи X^*EY^* виконаємо паралельним перенесенням початку координат із центру Сонця у центр Землі, як це показано на рис. 8.22.

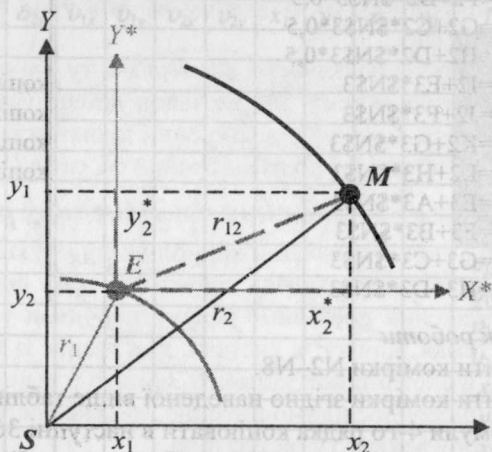


Рис. 8.22

Тут уведені такі позначення:

- S – Сонце, E – Земля, M – Марс;
- r_1, r_2 – відстані від Сонця до Землі і до Марсу відповідно;
- x_1, y_1, x_2, y_2 – координати Землі та Марсу відповідно в геліоцентричній системі відліку XSU ;
- x_2^*, y_2^* – координати Марсу в геоцентричній системі відліку.

Оскільки вигляд траєкторії залежить від вибору системи відліку, то, перейшовши до нової системи, ми маємо отримати нову траєкторію. Щоб скласти уявлення про її вигляд з позиції земного спостерігача, внесемо наступні зміни до таблиці: перед стовпцем “Дано” вставимо три нові стовпці, які позначимо x^*, y^* – відносні координати Марсу в системі відліку “Земля” та r_{12} – відстань між планетами. З рис. 8.22 видно, що $x^* = x_2 - x_1; y^* = y_2 - y_1$

| комірка | Формули | Примітки |
|---------|----------------|---------------------|
| M2 | =K2-I2 | копіювати в M3–M366 |
| N2 | =L2-J2 | копіювати в N3–N366 |
| O2 | =(M2^2+N2)^0,5 | копіювати в O3–O366 |

Рис. 8.23 відображує видиму з Землі траєкторію руху Марсу на небесній сфері. Зверніть увагу на той факт, що поява петлеподібних траєкторій є не динамічним ефектом, а є ефектом суто кінематичним, обумовленим переходом до іншої системи відліку. Саме такі петлеподібні рухи планет спостерігали ще давні астрономи Шумеру, Єгипту, Китаю, Давньої Греції.

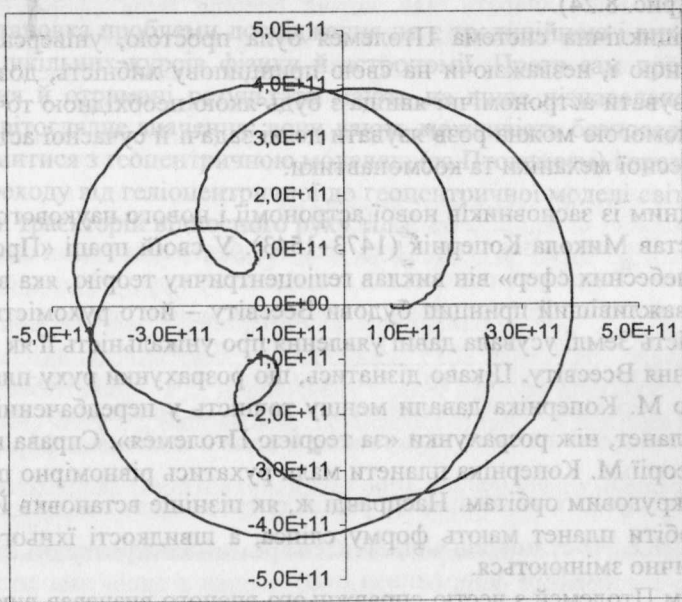


Рис. 8.23

Систематизацію таких рухів дав Клавдій Птолемей (100–165 рр. н.е.), який створив теорію видимо-го руху Сонця, Місяця і планет. На основі каталогу Гіппарха, власних спостережень та фізики Аристотеля він розробив найбільш докладну й популярну геоцентричну систему світу, яка визначала космологічні уявлення вчених на протязі наступних 1500 років. Праця Птолемея “Велика математична побудова астрономії” (в арабському

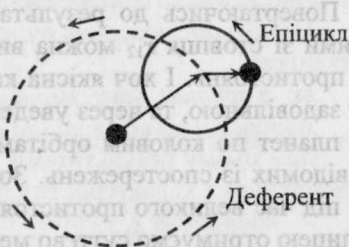


Рис. 8.24

перекладі “Альмагест”) у тринадцяти книгах стала науковою астрономічною енциклопедією давнини та Середньовіччя.

За теорією Птолемея Земля нерухома та знаходиться в центрі світу, а всі решта планети разом із Сонцем і Місяцем рівномірно обертаються навколо Землі по коловим орбітам. Для пояснення руху планет Птолемей застосував систему гармонічних епіциклів та деферентів (рис. 8.24).

Епіциклічна система Птолемея була простою, універсальною, економною і, незважаючи на свою принципову хибність, дозволяла прогнозувати астрономічні явища з будь-якою необхідною точністю. З її допомогою можна розв’язувати деякі задачі й сучасної астрометрії, небесної механіки та космонавтики.

Одним із засновників нової астрономії і нового наукового світогляду став Микола Копернік (1473–1543). У своїй праці «Про обертання небесних сфер» він виклав геліоцентричну теорію, яка висунула найважливіший принцип будови Всесвіту – його рухомість. Планетарність Землі усувала давні уявлення про унікальність її як центра обертання Всесвіту. Цікаво дізнатись, що розрахунки руху планет за теорією М. Коперніка давали меншу точність у передбаченні положень планет, ніж розрахунки «за теорією Птолемея». Справа в тому, що в теорії М. Коперніка планети мали рухатись рівномірно по ідеальним круговим орбітам. Насправді ж, як пізніше встановив Й. Кеплер, орбіти планет мають форму еліпса, а швидкості їхнього руху періодично змінюються.

Сам Птолемей з честю справжнього вченого визнавав виключно прикладний характер свої системи і відмовлявся розглядати її як космологічну (вчення про всесвіт у цілому) за браком переконливих доказів на користь гео- чи геліоцентричної теорії світу.

Повертаючись до результатів моделювання, зазначимо, що за даними зі стовпця r_{12} можна визначити відстань між планетами під час протистоянь. І хоч якісна картина відносного руху Марсу є цілком задовільною, та через введені до моделі спрощення (рівномірний рух планет по коловим орбітам) кількісні результати відрізняються від відомих із спостережень. Зокрема, відстань між Землею та Марсом під час великого протистояння має бути ~56 млн. км, тоді як за таблицею отримуємо суттєво менше значення.

Завдання

1. Чому відкриття М. Коперніка вважається науковим подвигом?
2. Підготуйте декілька коротких повідомлень з історії станов-

лення наукового світогляду в природознавстві (Птолемей, Копернік, Кеплер, Ньютон).

3. Марс відносять до зовнішніх планет Сонячної системи, орбіти яких розташовані поза орбітою Землі. Змодельуйте рух Венери (внутрішньої планети) в системі відліку, пов'язаній із Землею.

Висновок

Постановка проблеми дослідження не є традиційною і виходить за межі шкільних курсів фізики й астрономії. Проте сам процес її вирішення й отримані результати мають не лише пізнавальне, а й велике світоглядне значення: вони дають можливість безпосередньо познайомитися з геоцентричною моделлю (за Птолемеєм) і зрозуміти ідею переходу від геліоцентричної до геоцентричної моделі світу для побудови траєкторій відносного руху тіл.

Якщо тіло рухається по колу з постійною швидкістю, то його прискорення, як це має місце в даному випадку, то дією центральної сили F_c направленої до осі обертання. Якщо ж швидкість змінюється, то виникає ще й тангенціальне прискорення a_t , яке викликає тангенціальну силу F_t .

Прискорення, що його набуває тіло, рухаючись по колу, можна знайти за допомогою формули

$$a = \frac{F_c + F_t}{m} = \frac{F_c}{m} + \frac{F_t}{m} = a_c + a_t$$

На рис. 9 зображено рух тіла по колу з постійною швидкістю. Тіло рухається по колу з постійною швидкістю v . Швидкість v направлена вздовж дотичної до кола в кожен момент часу.

Тіло рухається по колу з постійною швидкістю v . Швидкість v направлена вздовж дотичної до кола в кожен момент часу.

Згідно з теоремою Жуковського...

Глава 9. Задача про політ паперового літачка

9.1. Рух тіла під дією декількох сил: загальні зауваження

Задача про політ паперового літачка є окремим найпростішим випадком більш загальної задачі про некерований політ безмоторного літального апарату. Ця задача вперше була сформульована і розв'язана видатним російським вченим, засновником аеродинаміки М.Є. Жуковським (1847–1921). Тут ми розглянемо лише той її варіант, який сам Жуковський назвав “задачею про планер”.

Починаючи дослідження, насамперед уточнимо визначення у попередній главі

9.1.1. План майбутньої роботи

1. Спочатку дослідимо рух тіла під дією лише однієї сили – сили тяжіння. Такий рух вивчається в шкільному курсі фізики, і це дослідження має на меті здійснити *тестування* моделі, тобто з'ясувати, чи даватиме модель заздалегідь відомі результати.

2. Далі розглянемо рух під дією двох сил – сили тяжіння й сили опору середовища. Стосовно сили опору в шкільному підручнику наведені деякі загальні міркування й одна з можливих формул для її обчислення.

3. Нарешті, включимо до розгляду третю силу – піднімальну.

9.1.2. Постановка задачі. Створення концептуальної моделі

Отже, нехай у повітряному середовищі рухається симетричний планер, тобто планер з розподілом мас, симетричним відносно вертикальної площини, що проходить через його центр мас. У цій самій площині лежить і вектор швидкості.

Метою дослідження будемо вважати розв'язання головної задачі механіки:

як із плином часу змінюються координати тіла і вектор його миттєвої швидкості (за модулем та напрямком)?

При цьому результатами дослідження мають бути значення всіх кінематичних характеристик рухомого тіла у довільні моменти часу:

- координат x , y ;
- проєкцій швидкості u_x , u_y ;
- модуля швидкості v та кута α його нахилу до горизонту;
- проєкцій прискорення a_x , a_y .

Крім того, значна увага буде приділена аналізу графічної інтерпретації залежностей між основними характеристиками процесу.

Таким чином, ми ставимо перед собою типову задачу прогнозування поведінки об'єкту з плином часу, тобто маємо створити *динамічну модель* об'єкту (процесу).

9.1.3. Математична модель

Нагадаємо, що метод моделювання передбачає прийняття певних спрощуючих припущень, які мають бути обґрунтованими. Тому, обираючи з багатьох діючих на тіло сил лише декілька, ми зобов'язані визначити, за яких умов такий вибір є виправданим. Адже, насамперед, необхідно, щоб одержані результати задовільно узгоджувалися з експериментальними даними. У зв'язку з цим відмітимо, що найбільш суттєву дію на тіло чинять Земля та навколишнє середовище (повітря), в якому це тіло рухається. Отже силами, що суттєво діють на тіло, є

- сила тяжіння F_m , напрямлена вертикально вниз;
- аеродинамічна сила, що проявляє себе через свої складові – силу лобового опору F_{on} , напрямлену проти вектора швидкості \mathbf{v} , та піднімальну силу F_n , напрямлену перпендикулярно до вектора швидкості;
- архімедова (виштовхувальна) сила F_A , що напрямлена вертикально вгору.

Якщо густина речовини тіла значно перевищує густину середовища, як це має місце в даному випадку, то дією архімедової сили в порівнянні з іншими силами можна знехтувати.

Будемо розглядати всі три згадані сили F_m , F_{on} та F_n прикладеними до центру мас, що знаходиться в площині симетрії планера.

Прискорення, що його надає тілу рівнодійна всіх сил, будемо визначати за другим законом Ньютона:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{on} + \mathbf{F}_n}{m}$$

На рис. 9.1 зображене рухоме тіло і сили, що діють на нього, а також відповідні прискорення.

Сила тяжіння F_m , як відомо, надає всім тілам незалежно від їхньої маси однакового прискорення g , середнє значення якого поблизу земної поверхні становить приблизно $9,81 \text{ м/с}^2$:

$$F_m = mg$$

Згідно з теоремою Жуковського обидві складові аеродинамічної

сили пропорційні квадратів швидкості:

$$F_{on} = kv^2, \quad F_n = bv^2,$$

де k і b – постійні коефіцієнти, що визначаються геометрією тіла (його формою та розмірами) і фізичними властивостями середовища.

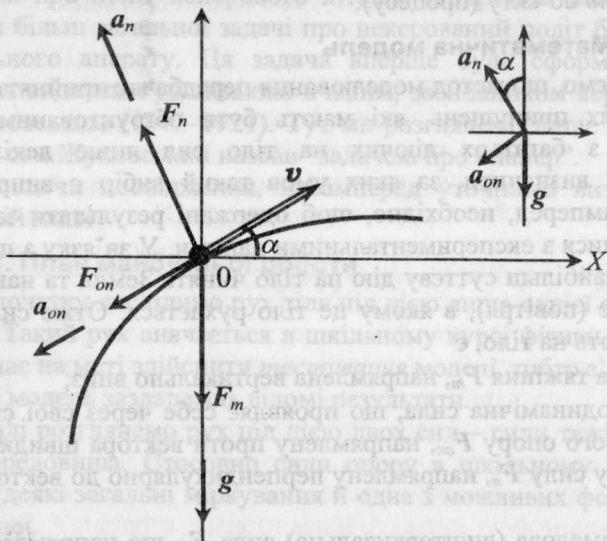


Рис. 9.1

У проєкціях на вісі координат одержимо:

$$a_x = \frac{F_{onx} + F_{nx}}{m} = \frac{-F_{on} \cos \alpha - F_n \sin \alpha}{m}$$

і остаточно

$$a_x = -\frac{k}{m}v^2 \cos \alpha - \frac{b}{m}v^2 \sin \alpha.$$

Так само

$$a_y = \frac{F_{my} + F_{ony} + F_{ny}}{m} = \frac{-mg - kv^2 \sin \alpha + bv^2 \cos \alpha}{m}$$

і, нарешті,

$$a_y = -g - \frac{k}{m}v^2 \sin \alpha + \frac{b}{m}v^2 \cos \alpha.$$

Вводячи позначення $R = k/m$ і $Q = b/m$, будемо мати

$$a_x = -v^2(R \cos \alpha + Q \sin \alpha) \quad (1)$$

$$a_y = -g + v^2(Q \cos \alpha - R \sin \alpha) \quad (2)$$

9.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи

з моделлю

З виразів (1) і (2) видно, що величина прискорення не є постійною, оскільки залежить від швидкості v та кута α , які, у свою чергу, змінюються з плином часу. При вивченні механічних коливань ми вже бачили, що в межах шкільного курсу математики задачі з таким складним типом залежностей між змінними аналітично не розв'язуються. Тому і в новій ситуації скористаємось чисельним методом розв'язування, тобто виконаємо його шляхом покрокових обчислень за тим самим алгоритмом:

1. Розіб'ємо весь час руху на достатньо малі проміжки Δt такі, щоб на протязі кожного такого проміжку зміна прискорення була настільки малою, аби ми могли вважати рух рівноприскореним.

2. Обчислимо швидкість \mathbf{v}_1 наприкінці першого проміжку Δt :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \Delta t,$$

де \mathbf{v}_0 , \mathbf{a}_0 – відповідно вектори швидкості та прискорення у початковий момент часу $t = 0$.

У проєкціях на вісі координат це дає:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x} \Delta t,$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_{1y} \Delta t.$$

При обчисленні швидкості наприкінці будь-якого інтервалу Δt ми і надалі будемо використовувати значення прискорення із попереднього інтервалу:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{a}_i \Delta t,$$

де \mathbf{v}_{i-1} – кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі Δt , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.

3. Модуль вектора швидкості v_i визначимо за формулою

$$v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}.$$

4. Напрямок вектора \mathbf{v}_i , тобто кут α_i знайдемо за рис. 9.1:

$$\alpha_i = \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} \cdot \text{sgn}(v_{iy}).$$

Для довільного моменту

$$\alpha_i = \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} \cdot \text{sgn}(v_{iy}).$$

Пригадаємо, що множник $\text{sgn}(v_y)$ дає можливість одержувати від'ємні значення кутів у тих випадках, коли тіло матиме вертикальну складову швидкості v_y , напрямлену донизу, і додатні значення –

для v_x , напрямленої вгору.

Зручніше працювати лише з додатними значеннями кутів, наприклад, замість $\alpha = -90^\circ$ мати $\alpha = 270^\circ$, тому рівняння доведеться дещо змінити, а саме:

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{v_x}{v} & \text{для } v_y \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \frac{v_x}{v} & \text{для } v_y < 0 \end{cases}$$

5. Нове положення тіла (нові координати) наприкінці першого проміжку Δt знайдемо за рівняннями

$$x_1 = x_0 + v_{1x}\Delta t,$$

$$y_1 = y_0 + v_{1y}\Delta t.$$

При обчисленні координат наприкінці будь-якого інтервалу часу Δt будемо використовувати значення середньої швидкості із цього самого інтервалу:

$$x_i = x_{i-1} + v_{icx}\Delta t,$$

$$y_i = y_{i-1} + v_{icy}\Delta t,$$

де x_{i-1}, y_{i-1} – координати тіла наприкінці попереднього інтервалу Δt .

Запитання

1. Обчислити заздалегідь час польоту за відомих початкових умов (v_0, α_0, y_0) у межах шкільного курсу фізики можна в єдиному випадку – при дії на тіло однієї лише сили тяжіння. Чому?

2. Яка з кінематичних характеристик рухомого тіла дозволяє вирішити, знаходиться тіло в польоті чи політ завершено?

Як завжди, значення проміжку Δt має задовольняти двом вимогам: забезпечувати необхідну адекватність результатів розрахунків і стійкість алгоритму роботи моделі (обчислювального алгоритму).

Нагадаємо, що послідовність розрахунків можна показати знайомою схемою:

→ **прискорення** → **швидкість** → **координата**

повторювати n разів

Після всіх наведених міркувань запишемо

9.1.5. Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю за зразком:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-----|-----|-------|-------|-----|----------|-------|-------|-----|-----|--------------|---|
| 1 | t | u_x | u_y | v | α | a_x | a_y | x | y | Дано: | |
| 2 | | | | | | | | | | $x_0 =$ | |
| 3 | | | | | | | | | | $y_0 =$ | |
| 4 | | | | | | | | | | $v_0 =$ | |
| 5 | | | | | | | | | | $\alpha_0 =$ | |
| 6 | | | | | | | | | | $\Delta t =$ | |
| 7 | | | | | | | | | | $g =$ | |
| 8 | | | | | | | | | | $R =$ | |
| 9 | | | | | | | | | | $Q =$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

2. Увести вхідні дані для моменту часу $t = 0$, тобто заповнити стовпець J (“Дано:”) і заповнити перший рядок таблиці іменами змінних, а стовпець K – їхніми числовими значеннями згідно умови задачі:

- x_0, y_0 – початкові координати;
- v_0 – початкова швидкість;
- α_0 – початковий кут нахилу вектора \mathbf{u}_0 до горизонту;
- $g = 9,81$ – прискорення сили тяжіння;
- R – фактор сили опору;
- Q – фактор піднімальної сили.

3. Заповнити другий рядок (для $t = 0$):

- $t = 0$;
- $u_x = v_0 \cos \alpha_0$; $u_y = v_0 \sin \alpha_0$; $v = v_0$;
- $\alpha = \alpha_0$;
- $a_x = -v^2(R \cos \alpha + Q \sin \alpha)$; $a_y = -g + v^2(Q \cos \alpha - R \sin \alpha)$
- $x = x_0$; $y = y_0$.

Комірки таблиці матимуть такий уміст:

| комірки | формули / числа |
|---------|---|
| A2 | 0 |
| B2 | =K4*COS(K5*ПИ()/180) |
| C2 | =K4*SIN(K5*ПИ()/180) |
| D2 | =K4 |
| E2 | =K5 |
| F2 | =(D2^2)*(K8*COS(E2*ПИ()/180)+K9*SIN(E2*ПИ()/180)) |
| G2 | =-K7+D2^2*(K9*COS(E2*ПИ()/180)-K8*SIN(E2*ПИ()/180)) |
| H2 | =K2 |
| I2 | =K3 |

Примітки.

а) при обчисленні прямих та обернених тригонометричних фун-

кцій (для комірок B2, C2, F2 та G2) електронні таблиці, як і переважна більшість інших програмних засобів, працюють з радіанною мірою кутів, проте для школярів більш звичним та наочним є використання градусної міри. У зв'язку з цим скористаємося формулою переходу від градусної міри до радіанної: $\phi(\text{рад}) = \alpha(\text{град}) \cdot \pi / 180$.

б) комірки B2 та C2 містять значення v_{0x}, v_{0y} – проєкцій вектора початкової швидкості \mathbf{v}_0 на вісі координат.

4. Заповнити третій рядок (для кінця першого проміжку Δt , тобто для моменту часу $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, де $i = 1$):

$$- v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t; \quad v_{iy} = v_{(i-1)y} + a_{iy}\Delta t$$

$$- v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$$

$$- \alpha_i = \begin{cases} \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} & \text{для } v_{iy} \geq 0 \\ 360^\circ + \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} & \text{для } v_{iy} < 0 \end{cases}$$

$$- a_{ix} = -v_i^2(R \cos \alpha_i + Q \sin \alpha_i);$$

$$- a_{iy} = -g + v_i^2(Q \cos \alpha_i - R \sin \alpha_i)$$

$$- x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t; \quad y_i = y_{i-1} + v_{iy}\Delta t$$

Відповідно у таблиці

| комірка | формули / числа |
|---------|--|
| A3 | =A2+K\$6 |
| B3 | =B2+F2*K\$6 |
| C3 | =C2+G2*K\$6 |
| D3 | =(B3^2+C3^2)^0,5 |
| E3 | =ЕСЛИ(C3>=0;ACOS(B3/D3)*180/ПИ(); 360-ACOS(B3/D3)*180/ПИ()) |
| F3 | =(D3^2)*(K\$8*COS(E3*ПИ()/180)+K\$9*SIN(E3*ПИ()/180)) |
| G3 | =-K\$7+D3^2*(K\$9*COS(E3*ПИ()/180)-K\$8*SIN(E3*ПИ()/180)) |
| H3 | =H2+B3*K\$6 |
| I3 | =I2+C3*K\$6 |

5. Копіювати третій рядок у n наступних рядків ($n = t_{\text{польоту}} / \Delta t$).

9.2. Рух тіла під дією сили тяжіння (тестування моделі)

У відповідності до загального плану роботи розглянемо приклади руху тіл під дією однієї лише сили тяжіння F_m , знайомі нам зі шкільного курсу механіки. Оскільки в цих випадках дією середовища на тіло звичайно нехтують, то й ми покладемо $Q = 0$ і $R = 0$, тобто виключимо з розгляду обидва фактори аеродинамічної сили.

1. Спочатку дослідимо рух тіла, кинутого вертикально.

Нехай тіло починає рухатись над плоскою горизонтальною поверхнею з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с з точки, що має координати $x_0 = 0$, $y_0 = 20$ м. Рух тіла відбувається

1.1. вертикально вгору ($\alpha_0 = 90^\circ$);

1.2. вертикально вниз ($\alpha_0 = 270^\circ$ або $\alpha_0 = -90^\circ$);

1.3. без початкової швидкості ($v_0 = 0$).

Вправа. По черзі виведіть на екран і розгляньте три таблиці за пп. 1.1–1.3.

У кожній з таблиць можна побачити, що час підйому та повний час польоту повністю відповідають розрахованим заздалегідь за формулами

$$v_y = v_{0y} - gt,$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2.$$

Перша з цих формул дає час підйому при $v_y = 0$ (коли спливає час підйому, вертикальна складова швидкості зменшується до нуля, тобто у верхній точці траєкторії тіло завмирає).

Наступна формула дає повний час польоту при $y = 0$. Дійсно, коли закінчується повний час польоту, тіло виявляється на поверхні землі. *До речі, наша модель цих формул не передбачає.*

У випадках 1.2 і 1.3 кут α автоматично перетворюється на $\alpha = 270^\circ$, а у випадку $v_0 = 0$, це має місце за будь-яких значень α_0 (!).

Той факт, що у всіх стовпцях, де розташовані проекції змінних на вісь Ox , з'являються нулі, повністю узгоджується з умовою, що α_0 – прямий кут і, отже, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 0$. Це зрозуміло з фізичних міркувань, але зараз ми маємо нагоду впевнитися в тому, що даний результат одержано на основі прийнятої моделі.

2. Продовжимо тестування. Розглянемо рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.

2.1. Почнемо з прикладу, коли *тіло кидають горизонтально* ($\alpha_0 = 0$). Початкові значення координат x_0 , y_0 і швидкості v_0 залишимо попередніми.

Вправи

1. Доведіть, що при відсутності в алгоритмі помилок нулі мають залишитись тільки у стовпці для значень a_x .

2. За таблицею встановіть, що будь-яким однаковим послідовним проміжкам часу відповідають однакові прирости Δx , а прирости для Δy послідовно зростають (спадають) на одну й ту саму величину. Отже залежність y від x не є лінійною. згадану властивість має тільки

квадратична функція.

3. Беручи аргументами значення змінних із стовпця x , побудуйте траєкторію тіла – графік залежності $y = y(x)$, як показано на рис. 9.2.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-----|------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|------|-------|------------------|---|
| 1 | t | v_x | v_y | v | α | a_x | a_y | x | y | Дано: | |
| 2 | 0,00 | 10,00 | 0,00 | 10,00 | 0 | 0,00 | -9,81 | 0,00 | 20,00 | $x_0 = 0$ | |
| 3 | 0,10 | 10 | -1 | 10 | 354 | 0 | -10 | 1,00 | 19,90 | $y_0 = 20$ | |
| 4 | 0,20 | 10 | -2 | 10 | 349 | 0 | -10 | 2,00 | 19,71 | $v_0 = 10$ | |
| 5 | 0,30 | 10 | -3 | 10 | 344 | 0 | -10 | 3,00 | 19,41 | $\alpha_0 = 0$ | |
| 6 | 0,40 | 10 | -4 | 11 | 339 | 0 | -10 | 4,00 | 19,02 | $\Delta t = 0,1$ | |
| 7 | 0,50 | 10 | -5 | 11 | 334 | 0 | -10 | 5,00 | 18,53 | $g = 9,81$ | |
| 8 | 0,60 | 10 | -6 | 12 | 330 | 0 | -10 | 6,00 | 17,94 | $R = 0$ | |
| 9 | 0,70 | 10 | -7 | 12 | 326 | 0 | -10 | 7,00 | 17,25 | $Q = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

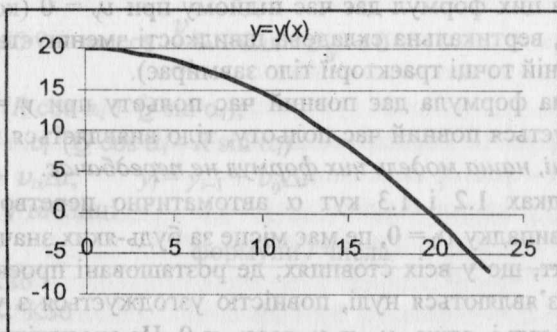


Рис. 9.2

Перевіримо модель на прикладі стандартної задачі.

Задача. Літак летить горизонтально на висоті 100 м із швидкістю 100 м/с. Від літака відокремлюється вантаж, який починає падати вниз. Нехтуючи опором повітря, знайти:

- скільки часу вантаж перебуватиме в польоті?
- на якій відстані від місця призначення (вздовж вісі Ox) треба звільнити вантаж, щоб він потрапив у це місце?
- з якою швидкістю вантаж торкнеться землі?

Змінимо згідно умови вміст комірок у попередній таблиці:

| комірки | числа | коментарі |
|---------|-------|---------------------------|
| K3 | 100 | початкова висота y_0 |
| K4 | 100 | початкова швидкість v_0 |

Порівнюючи відповіді, одержані розв'язанням за допомогою фізичних формул, з даними, одержаними за допомогою моделі (таблиці та графіка $y = y(x)$), можна перекоонатись, що вони добре узгоджуються.

2.2. Поширимо тестування на довільні кути.

Нехай, для визначеності, з точки, що має координати $x_0=0, y_0=0$ (початкові координати), з пружинного пістолета вистрілюють кульку під кутом $\alpha_0 = 60^\circ$ з початковою швидкістю $v_0 = 5$ м/с (рис. 9.3).

З отриманої таблиці маємо можливість побачити, що

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-----|------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|------|------|-----------------|---|
| 1 | t | v_x | v_y | v | α | a_x | a_y | x | y | Дано: | |
| 2 | 0,00 | 2,5 | 4,330 | 5,000 | 60 | 0 | -9,81 | 0,00 | 0,00 | $x_0=0$ | |
| 3 | 0,05 | 2,5 | 3,840 | 4,582 | 57 | 0 | -9,81 | 0,13 | 0,19 | $y_0=0$ | |
| 4 | 0,10 | 2,5 | 3,349 | 4,179 | 53 | 0 | -9,81 | 0,25 | 0,36 | $v_0=5$ | |
| 5 | 0,15 | 2,5 | 2,859 | 3,798 | 49 | 0 | -9,81 | 0,38 | 0,50 | $\alpha_0=60$ | |
| 6 | 0,20 | 2,5 | 2,368 | 3,444 | 43 | 0 | -9,81 | 0,50 | 0,62 | $\Delta t=0,05$ | |
| 7 | 0,25 | 2,5 | 1,878 | 3,127 | 37 | 0 | -9,81 | 0,63 | 0,71 | $g=9,81$ | |
| 8 | 0,30 | 2,5 | 1,387 | 2,859 | 29 | 0 | -9,81 | 0,75 | 0,78 | $R=0$ | |
| 9 | 0,35 | 2,5 | 0,897 | 2,656 | 20 | 0 | -9,81 | 0,88 | 0,83 | $Q=0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

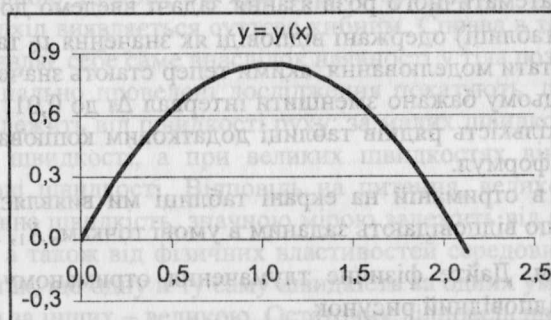


Рис. 9.3

– часи підйому і падіння, а також повний час польоту співпадають з розрахованими теоретично;

– миттєві значення змінних a_x, v_x, v, y та α у межах усталеної точності є симетричними відносно моменту часу, що відповідає максимальній висоті підйому тіла.

Далі звернемося до задачі нестандартної.

Задача. Згідно з легендою відомий своєю влучністю Робін Гуд, маючи на меті передати листа в'язневі Ноттінгемського замку, загнув у цей лист камінь і кинув його так, що камінь перелетів огорожу і точно потрапив у вікно в'язниці. Вважаючи, що камінь був кинутий з відстані d від огорожі висотою h і що вікно в'язниці знаходилося на відстані D від місця кидання (вздовж горизонталі) і було на висоті H , знайти, під яким кутом і з якою мінімальною початковою швидкістю був кинутий камінь? У момент кидання камінь знаходився на висоті Z . Опором повітря знехтувати.

Виконаємо теоретичний розрахунок за такими даними:

$$x_0 = 0, y_0 = Z = 2 \text{ м};$$

$$x_1 = d = 8 \text{ м}; y_1 = h = 6,8 \text{ м};$$

$$x_2 = D = 13 \text{ м}; y_2 = H = 5,5 \text{ м}.$$

Спростимо розв'язування, поклавши $Z = 0$.

Примітка. Оскільки зазначені три точки знаходяться на одній траєкторії (параболі), то, написавши двічі рівняння траєкторії для $x_1 = d, y_1 = h$ та для $x_2 = D, y_2 = H$, після перетворень можна одержати систему двох рівнянь з двома невідомими u_0 та α_0 . Ця система являтиме собою математичну (не комп'ютерну) модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

Після математичного розв'язання задачі введемо до комп'ютерної моделі (таблиці) одержані відповіді як значення u_0 та α_0 і перевіримо результати моделювання, якими тепер стають значення змінних x та y . При цьому бажано зменшити інтервал Δt до 0,01, збільшивши відповідно кількість рядків таблиці додатковим копіюванням останнього рядка формул.

Дійсно, в отриманій на екрані таблиці ми виявляємо дві пари координат, що відповідають заданим в умові точкам: X_1, Y_1 та X_2, Y_2 .

Завдання. Дайте фізичне тлумачення отриманому результату, виконайте відповідний рисунок.

Короткі підсумки тестування

1. Можна було б стверджувати, що з пізнавальної точки зору розв'язки майже усіх попередніх задач особливої цінності не мають: всі вони заздалегідь відомі зі шкільного курсу фізики. Проте цінність має сама модель як узагальнення всіх можливих задач на рух під дією сили тяжіння.

2. Після численних перевірок прийшов момент, коли ми маємо прийняти і приймаємо рішення про відсутність у моделі помилок, а

також рішення про те, що у межах зазначених вище припущень вона є адекватною розглянутим процесам.

3. Якщо раніше результати, що їх ми отримували за допомогою моделі, перевірялися розрахунками за точними формулами фізики, то відтепер ми надаємо собі право довіряти результатам, що їх буде давати наша модель. І при тому довіряти настільки, що саме за цими результатами будемо робити певні висновки про рухи, які ми моделюємо. Інакше кажучи, настав момент, коли *модель із об'єкту, що підлягав перевірці, стає інструментом дослідження.*

4. Проте не будемо перебільшувати ролі окремої моделі: адже модель – це усього лише наближений образ реального об'єкту (явища, процесу). І врахувати вона здатна тільки ті властивості об'єкту, які є істотними саме на *наш* погляд.

9.3. Рух тіла під дією сили тяжіння та сили опору середовища

Тепер до складу суттєвих факторів включимо вплив середовища, в якому відбувається рух тіла. Насамперед, звернемо тут увагу на принциповий факт: якщо у випадку дії однієї лише сили тяжіння можна було нехтувати формою та розмірами тіла і вважати його матеріальною точкою, то при спробі врахувати вплив середовища такий підхід виявляється суттєво хибним. Справа в тому, що середовище виявляє себе саме внаслідок наявності у тіла розмірів та форми.

Спеціально проведені дослідження показують, що модуль сили опору залежить від швидкості руху: за малих швидкостей він пропорційний швидкості, а при великих швидкостях він пропорційний квадратові швидкості. Відповідь на питання, великою чи малою є деяка певна швидкість, значною мірою залежить від форми та розмірів тіла, а також від фізичних властивостей середовища. Тому може статися так, що одну й ту саму швидкість за одних умов слід вважати малою, а за інших – великою. Остаточну відповідь про вид залежності $F_{on} = F_{on}(v)$ може дати лише натурний експеримент.

Залежність сили опору від форми тіла характеризують спеціальним терміном – *обтічність*. Форму, при якій сила опору набуває меншого значення, називають більш обтічною. Саме такі форми намагаються надавати транспортним засобам, снарядам і кулям у вогнепальній зброї та ракетам. У сучасній техніці обтічність тіл досліджують у спеціальних установках – аеродинамічних трубах, де рухається не саме тіло (або його фізична модель), а повітря. Обтічність водних засобів досліджують у випробувальних каналах. Зразки обті-

чних форм у живій природі дають птахи, риби, дельфіни й інші істоти, які існують завдяки великим швидкостям руху.

Запитання

1. З якою метою намагаються максимально покращити аеро- або гідродинамічні якості згаданих об'єктів?
2. Наведіть приклади ефективності обтічних форм у деяких видах спорту.
3. З'ясуйте, якими проблемами переймається наука *біоніка*.

Напрямок сили опору завжди протилежний до напрямку вектора швидкості, а наведені вище міркування необхідні для того, щоб при створенні моделі прийняти певне припущення про характер залежності сили опору від швидкості. То ж будемо вважати, що ця залежність є прямою пропорційною. Це означатиме, що ми плануємо досліджувати рухи з невеликими швидкостями.

На основі прийнятого припущення запишемо

$$F_{op} = -k\mathbf{v},$$

де k – розмірний коефіцієнт пропорційності, який враховує геометричні характеристики тіла і фізичні властивості середовища.

Вправа. Визначте, якою є розмірність коефіцієнта пропорційності k в міжнародній системі одиниць вимірювання фізичних величин (СІ) згідно наведеної формули.

Прискорення, що його надають тілу сили тяжіння й опору, будемо визначати за другим законом Ньютона.

Переходячи до проекцій і у відповідності з рис. 9.1, можна записати:

$$a_x = -\frac{k}{m}v \cos \alpha,$$

$$a_y = -g - \frac{k}{m}v \sin \alpha.$$

Як зазначалося при обговоренні алгоритму, обидві проекції прискорення a_x і a_y залежать від модуля швидкості v та кута α , а тому вектор прискорення є змінним у часі.

В цій ситуації ми фактично позбавлені можливості здійснити кількісну перевірку нової моделі (за відсутності у нас відповідних точних формул) і тому маємо задовольнитися лише перевіркою якісною: будемо порівнювати з даними досліду не числові значення, а поведінку досліджуваних величин.

Обчислювальний експеримент

Зауважимо, що тимчасова зміна залежності сили опору від швидкості з квадратичної (за алгоритмом) на пряму пропорційну вимагає відповідної заміни формул для проекцій прискорення в стовпцях F і G:

| комірки | формули |
|---------|--|
| F2 | $= -D2^{*}I^{*}(K\$8^{*}COS(E2^{*}ПИ()/180)+K\$9^{*}SIN(E2^{*}ПИ()/180))$ |
| G2 | $= -K\$7+D2^{*}I^{*}(K\$9^{*}COS(E2^{*}ПИ()/180)-K\$8^{*}SIN(E2^{*}ПИ()/180))$ |

Примітки.

- фрагмент “ I ” можна не вводити, він записаний тільки з метою показати зміни у формулах;
- уміст комірок F2 і G2 слід скопіювати у всі наступні рядки до самого низу таблиці.

У наступних обчислювальних експериментах знов будуть розглянуті чотири випадки рухів тіл під дією сили тяжіння, але з *урахуванням опору середовища*; вони відрізнятимуться тільки початковими умовами:

1. Рух без початкової швидкості.
2. Рух з початковою швидкістю, напрямленою вниз.
3. Рух з початковою швидкістю, напрямленою вгору.
4. Рух з початковою швидкістю, напрямленою під кутом до горизонту.

1. Дослідимо рух тіла, яке з деякої висоти зі стану спокою починає рухатись вертикально вниз за наявності сили опору повітря.

Введемо вхідні дані:

$$x_0 = 0, y_0 = 100 \text{ м}, v_0 = 0, \alpha_0 = 270^\circ, g = 9,81 \text{ м/с}^2, \Delta t = 0,1 \text{ с.}$$

Прийmemo $R = 0,6$ (це значення збільшене проти реального з метою зменшення кількості рядків таблиці).

Завдання. Встановіть розмірність коефіцієнта R .

Кількість рядків таблиці будемо обирати експериментально. При цьому критерій достатності визначатиметься змістом того конкретного питання, на яке ми шукатимемо відповідь.

Найбільший інтерес у розглядуваному русі являє питання про залежність швидкості від часу.

Введемо на екран таблицю з новими даними і новими формулами в F2 і G2 (рис. 9.4).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|-----|-----|-------|-------|------|----------|-------|-------|------|--------|------------------|---|
| 1 | t | v_x | v_y | v | α | a_x | a_y | x | y | Дано: | |
| 2 | 0,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 270 | 0,00 | -9,81 | 0,00 | 100,00 | $x_0 = 0$ | |
| 3 | 0,1 | 0,00 | -0,98 | 0,98 | 270 | 0,00 | -9,22 | 0,00 | 99,90 | $y_0 = 100$ | |
| 4 | 0,2 | 0,00 | -1,90 | 1,90 | 270,0 | 0,00 | -8,67 | 0,00 | 99,71 | $v_0 = 0$ | |
| 5 | 0,3 | 0,00 | -2,77 | 2,77 | 270,0 | 0,00 | -8,15 | 0,00 | 99,43 | $\alpha_0 = 270$ | |
| 6 | 0,4 | 0,00 | -3,58 | 3,58 | 270,0 | 0,00 | -7,66 | 0,00 | 99,08 | $\Delta t = 0,1$ | |
| 7 | 0,5 | 0,00 | -4,35 | 4,35 | 270,0 | 0,00 | -7,20 | 0,00 | 98,64 | $g = 9,81$ | |
| 8 | 0,6 | 0,00 | -5,07 | 5,07 | 270,0 | 0,00 | -6,77 | 0,00 | 98,13 | $R = 0,6$ | |
| 9 | 0,7 | 0,00 | -5,75 | 5,75 | 270,0 | 0,00 | -6,36 | 0,00 | 97,56 | $Q = 0$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

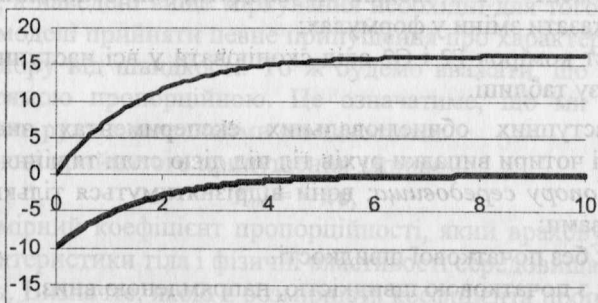


Рис. 9.4

З таблиці бачимо, що проекції всіх векторів на вісь x , як і сама координата x , весь час дорівнюють нулю (стовпці В, F, H). Було б дивно, якби ми отримали щось інше.

Та головне полягає в тому, що модуль швидкості v руху весь час монотонно зростає, але спостерігаючи зміну швидкості за послідовні однакові проміжки часу, виявляємо, що темп цього зростання монотонно уповільнюється і швидкість перестає змінюватись. Отже *рух за наявності опору середовища не є рівноприскореним*, як цього і слід було чекати. Одночасно із стовпця G для значень a_y видно, що модуль цієї складової прискорення поступово зменшується, наближаючись до нуля. Це означає, що рух, врешті, перетворюється на рівномірний.

Кількість рядків таблиці має бути такою, щоб можна було бачити перехід y -координати через нуль (момент закінчення падіння).

Повчальним та інформативним щодо аналізу процесу є порівняння графіків залежності v_x та a_y від часу (рис. 9.5).

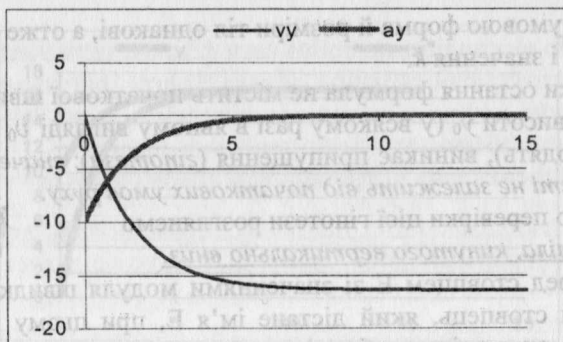


Рис. 9.5

До речі, саме у такий спосіб рухаються у повітрі парашутисти за відсутності вітру.

Наша модель може статись у нагоді для перевірки результату розв'язування цікавої фізичної задачі.

Задача. Чому при падінні зі стану спокою двох однакових за розмірами, але різних за масами кульок більшу кінцеву швидкість має кулька більшої маси?

Примітка. Умова однакових розмірів при різних масах означає, що кулька більшої маси має більшу середню густину.

Розв'язування.

При падінні на кожну кульку діють дві протилежно направлені сили: постійна сила тяжіння $F_m = mg$ і змінна сила опору повітря $F_{on} = -kv$.

На початку руху $F_{on} = 0$ (оскільки $u_0 = 0$), а у міру зростання швидкості сила F_{on} також зростає. Модуль рівнодійної цих сил $Z = F_m - F_{on}$, а отже і результуюче прискорення a_y , поступово зменшуються. Нарешті, у той момент, коли сила опору стає рівною силі тяжіння, прискорення кульки a_y стає рівним нулю і рух стає рівномірним. Починаючи з цього моменту, весь наступний час польоту $F_{on} = F_m$, тобто $kv_{max} = mg$. Тут v_{max} – швидкість усталеного рівномірного руху. Звідси

$$v_{max} = m \frac{g}{k}.$$

Тепер видно, що внаслідок існування опору швидкість усталеного руху падаючих у повітрі тіл дійсно більша для тіла більшої маси,

оскільки за умовою форма й розміри тіл однакові, а отже однаковими мають бути і значення k .

Оскільки остання формула не містить початкової швидкості v_0 та початкової висоти y_0 (у всякому разі в явному вигляді v_0 й y_0 до формули не входять), виникає припущення (*гіпотеза*): значення *усталеної швидкості не залежить від початкових умов руху*.

З метою перевірки цієї гіпотези розглянемо

2. Рух тіла, кинутого вертикально вниз.

2.1. Перед стовпцем Е зі значеннями модуля швидкості v вставимо новий стовпець, який дістане ім'я Е, при цьому колишній Е стане F і т.д. аж до кінця таблиці.

2.2. У стовпець К (“Дано:”) введемо змінені початкові умови: $y_0 = 250$ м, $v_0 = 10$ м/с, $\alpha_0 = 270^\circ$. Інтервал Δt зменшимо удвічі, тобто візьмемо $\Delta t = 0,05$ с.

Усі комірки стовпця D скопіюємо *без формул* у новий (Е) в режимі “Правка” → “Спеціальна вставка” → “Значення”. Після копіювання попередні дані стовпця К міняємо на нові: $y_0 = 350$, $v_0 = 0$. У стовпці D з’являться нові значення модуля швидкості v .

Таким чином, ми маємо можливість одночасно працювати (у тому числі й будувати графіки) з двома стовпцями – активним D (з формулами) і пасивним Е (без формул). Зрозуміло, і в цьому легко впевнитись експериментально, що на будь-які зміни у стовпці “Дано:” реагувати будуть тільки значення стовпця D.

Нагадаємо, що ознакою закінчення руху є перехід y -координати через нуль. Коли при порівнянні швидкостей ми не виявимо виходу на режим усталення, то причина цього може полягати або в тому, що тіло ще не завершило політ, або в тому, що недостатньою була початкова висота y_0 .

Порівнюючи значення швидкостей у сусідніх стовпцях D і Е, а також відповідні графіки, бачимо, що значення усталених швидкостей *майже* однакові, хоч усталення цих величин відбувається у різні моменти часу. Тому можна відмітити, що наша гіпотеза *майже* підтверджується (рис. 9.6). Щоб позбавитись цього “майже”, при формулюванні гіпотези слід було вказати, що *початкова висота має бути достатньою для того, щоб процес перейшов на усталений режим*. У даній таблиці, зокрема, для забезпечення точності у два десяткових розряди при зазначених вище даних довелося створити *майже* 160 рядків.

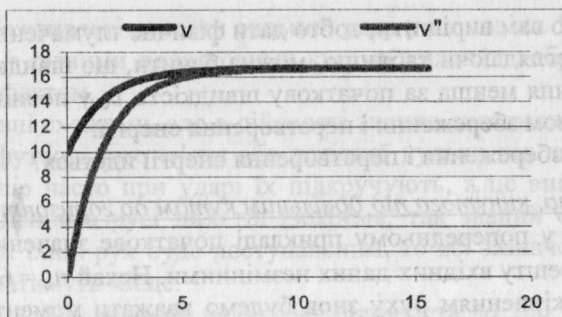


Рис. 9.6

Запитання

1. Якби опір середовища був відсутній, то чи спостерігали б ми результат, про який щойно було сказано словами: "...значення ustalених швидкостей майже однакові, хоч усталення ... відбувається у різні моменти часу"?

2. Як впливає значення початкової швидкості на час виходу миттєвої швидкості на усталений режим? Залучіть до своїх міркувань дані обчислювального експерименту.

Далі слід видалити спочатку графік, а потім – вставлений стовпець.

3. Тепер розглянемо рух тіла, кинутого вертикально вгору за такими початковими даними:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, v_0 = 10 \text{ м/с}, \alpha_0 = 90^\circ, \\ \Delta t = 0,025 \text{ с}, g = 10 \text{ м/с}^2, R = 0,6 \text{ кг/с}.$$

Відповідно до цих даних отримаємо таблицю, за якою порівняємо тривалості підйому і падіння.

Умова $y \geq 0$ перестає виконуватись на 69 рядку, якому відповідає повний час польоту $t_{\text{польоту}} = 1,675 \text{ с}$.

Час підйому відповідає максимальному значенню у-координати. За таблицею $y_{\text{max}} = 3,392 \text{ м}$, а $t_{\text{підйому}} = 0,650 \text{ с}$.

Оскільки час падіння $t_{\text{падіння}} = t_{\text{польоту}} - t_{\text{підйому}}$, маємо:

$$t_{\text{падіння}} = 1,675 \text{ с} - 0,650 \text{ с} = 1,025 \text{ с}.$$

Отже за наявності сили опору середовища час падіння завжди більший за час підйому.

Завдання

1. Обґрунтування цього факту становить окреме завдання, яку ми

й пропонуємо вам вирішити, тобто дати фізичне тлумачення.

2. Переглядаючи таблицю, можна бачити, що швидкість тіла у момент падіння менша за початкову швидкість u_0 у повній відповідності із законом збереження і перетворення енергії.

Про яке збереження і перетворення енергії йдеться?

4. Рух тіла, кинутого під довільним кутом до горизонту.

Змінимо у попередньому прикладі початкове значення кута α_0 , залишаючи решту вхідних даних незмінними. Нехай $\alpha_0 = 60^\circ$.

Якщо закінченням руху знов будемо вважати момент переходу у-координати через нуль, то орієнтовна кількість рядків таблиці становитиме 30. Нарешті у стовпцях В, F та I таблиці з'являються ненульові значення.

4.1. Шукатимемо спочатку відповідь на питання про вигляд траєкторії. З цією метою розглянемо стовпці H та I зі значеннями координат x та y . З таблиці видно, що x -координата найвищої точки траєкторії більша за $x_{max}/2$. Це означає, що тепер траєкторія руху не є параболою хоч би з тієї причини, що вона не є симетричною відносно вертикальної прямої, проведеної через точку максимального підйому, як це було при дії на тіло однієї сили тяжіння.

До того ж в цьому легко впевнитися, якщо вивести на екран траєкторію руху – графік залежності $y = y(x)$. Траєкторію ілюструє рис. 9.7: підйом тіла відбувається вздовж пологої ділянки траєкторії, а зниження – вздовж крутішої.

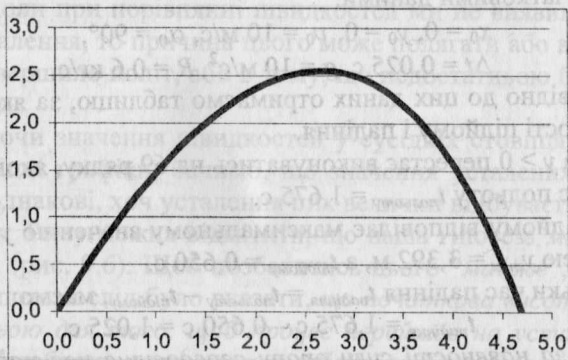


Рис. 9.7

За такою траєкторією рухається після удару волан у бадмінтоні. Знавці цієї гри часто виконують високі подачі, після яких волан знижується на полі суперника майже вертикально, що позбавляє супер-

ника можливості нанести сильний удар у відповідь. Експерименти на моделі з різними початковими кутами кидання добре узгоджуються із цим фактом.

Зовні схожими, але в дійсності значно складнішими, є траєкторії рухів футбольного м'яча або тенісної кульки під час гри. Справа в тому, що часто при ударі їх підкручують, а це викликає додаткові ускладнення в русі цих тіл (зокрема, так званий *ефект Магнуса*). Якщо ж їхній рух буде поступальним, то всі зазначені вище особливості матимуть місце.

4.2. Збільшуючи початкову швидкість до 100 м/с, можна одержати безперечно цікаву інформацію, що її дають виведені разом на екран графіки залежності v_x , v_y та v від часу: із плином часу всі компоненти швидкості руху перестають змінюватись (рис. 9.8). Орієнтовна кількість рядків таблиці у цьому випадку становить 200.

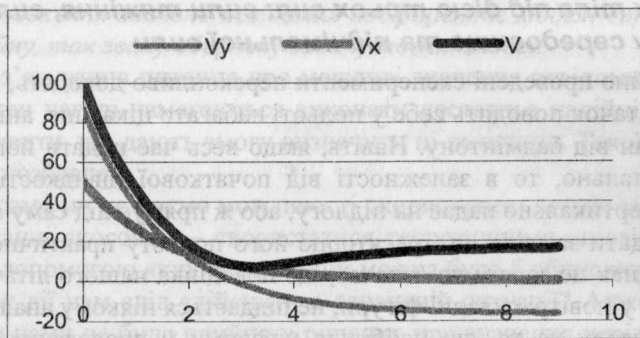


Рис. 9.8

Завдання. Дайте фізичне тлумачення зображеним залежностям.

На завершення цієї версії знов сформулюємо

Висновки

1. У цій версії моделі була здійснена спроба включення до розгляду сили опору середовища. Обговорюючи питання про фактори, від яких ця сила залежить, ми прийняли припущення, згідно з яким сила опору пропорційна швидкості: саме на це були розраховані розглянуті нами приклади.

2. У межах прийнятого припущення було встановлено, що — за достатньої тривалості часу, протягом якого відбувається рух, має місце усталення (стабілізація) значення швидкості і, як

довела перевірка, за достатньої початкової висоти цей факт не залежить від початкових умов;

– час підйому і час падіння до початкового рівня не однакові:

$$t_{\text{підйому}} < t_{\text{падіння}}$$

– траєкторія руху не є параболою, її висхідна частина більш пологіста, ніж спадна.

На якісному рівні результати моделювання добре узгоджуються з відомими дослідними фактами.

Тут на деякий час доцільно відкласти читання і вимкнути комп'ютер. З аркушу паперу зробіть літачок і поспостережіть за тими викрутасами, які він виконує у повітрі, якщо його запускати з різними швидкостями і під різними кутами. Це, по-перше, дасть можливість трохи відпочити, а по-друге, після таких експериментів стане набагато цікавіше працювати з остаточною версією моделі.

9.4. Рух тіла під дією трьох сил: сили тяжіння, сили опору середовища та піднімальної сили

Щойно проведені експерименти переконливо доводять, що паперовий літачок поводить себе у польоті набагато цікавіше, аніж камінь або волан від бадмінтону. Навіть, якщо весь час кидати його строго горизонтально, то в залежності від початкової швидкості він або майже вертикально падає на підлогу, або ж прямує під саму стелю.

Вгадати заздалегідь траєкторію його польоту практично неможливо, однак це зовсім не означає, що поведінка нашого літачка, який виписує у повітрі складні фігури, не піддається ніякому аналізу.

З огляду на те, що найбільш цікавими у проведених дослідах виявилися саме траєкторії руху, головною, але не єдиною метою подальшого дослідження вважатимемо побудову цих траєкторій. При цьому будемо мати на увазі, що (як вище вже зазначалося) тими спрощеними підходами, які ми застосовуємо до аналізу складних фізичних явищ, найбільшим, чого ми зможемо досягти, має бути не кількісний, а *лише якісний результат*. Це означає, що очікуваним підсумком дослідження буде загальна картина перебігу процесів. Проте, як стане видно з наступного, і цього не буде замало.

Нагадаємо, що переважну дію на літачок спричиняють Земля і середовище, а відповідними силами є сила тяжіння F_m та аеродинамічна сила, яка проявляє себе через свої складові – силу лобового опору F_{on} та піднімальну силу F_n .

Згідно із загальним планом роботи, розглянемо тепер повну версію моделі. З цією метою врахуємо вплив на тіло піднімальної сили,

тобто перейдемо до умови $Q \neq 0$. Значення Q добиратимемо експериментально.

Здавалося б, можна переходити до обчислювального експерименту, та варто ще раз оцінити ситуацію, у якій ми опинилися. Отже, ми будемо модель, що має враховувати вплив на тіло трьох сил, кожна з яких спричиняє певного прискорення. Два з них – прискорення сили лобового опору та прискорення піднімальної сили визначаються через коефіцієнти R та Q , значення яких нам невідомі. І хоч вони при роботі з моделлю можуть добиратися експериментально (шляхом поступового збільшення від нуля), проте, як виявляється, це не так просто. Якщо до того ж додати, що так само без відповіді поки що залишається питання про значення інтервалу часу Δt , який впливає на точність обчислень та на стійкість алгоритму, то можна у повній або, принаймні, у певній мірі відчувати типовий стан, у якому часто опиняється дослідник, котрий займається моделюванням.

Знаходження значень невідомих коефіцієнтів моделі становить самостійну, так звану обернену задачу моделювання.

Для з'ясування питання про можливі значення невідомих коефіцієнтів при нагоді намагаються виконати достатньо надійні натурні експерименти, що дають змогу визначити ці величини. Такої можливості ми позбавлені.

Так само ми не маємо можливості скористатися іншим відомим у моделюванні способом – скористатися теоретичними співвідношеннями, за допомогою яких ці величини можна було б обчислити.

Які ж дії нам слід здійснити в означеній ситуації? Адже до тих пір, поки нами не буде прийняте рішення про значення невідомих R , Q та Δt , ми не зможемо зрушити з місця. Залишається останнє: вдатися до спрощеної оцінки невідомих параметрів. У певний мірі це краще, ніж блукати навмання.

Можливо, має рацію пропозиція скористатися відповідними значеннями невідомих із попередньої моделі? Та більш-менш детальний аналіз доводить, що робити цього не варто. Адже значення R свого часу було обрано за умови лінійної залежності сили опору від швидкості, нині ж ця залежність є квадратичною. Це означає, що тепер за тих самих значень швидкості сила опору зростатиме помітно швидше. Тому нове значення R має бути меншим, приміром, $R=0,2-0,3$. Що ж стосується значення Q , то, враховуючи, що залежність піднімальної сили від швидкості також є квадратичною, спробуймо прийняти його більшим за R , наприклад, $Q=0,5-0,7$: у такий спосіб ми

сподіваємося більш рельєфно проявити вплив піднімальної сили на рух тіла.

Оскільки траєкторії, що їх виписував ваш паперовий літачок, інколи виявлялися досить складними, то прийнятною вбачається пропозиція про необхідність брати достатньо малі значення Δt для побудови більш-менш точної траєкторії (хотілося б не загубити навіть дрібні деталі). Крім того, зменшення інтервалів Δt сприяє покращенню адекватності моделі. Пам'ятаючи, однак, якою ціною даються такі вдосконалення (насамперед, додаткові витрати пам'яті та збільшення часу обчислень), ми повинні шукати компромісу між нашими бажаннями і платнею за них. То ж з метою задоволення зазначених вимог замість $\Delta t = 0,1$ с приймемо $\Delta t = 0,05$ с.

Ще раз зауважимо, що добір заздалегідь невідомих значень величин R , Q та Δt був здійснений на основі наших інтуїтивних уявлень про виучуване явище. Отже надійної гарантії успіху дати тут не можна, тобто не можна цілком покладатися на них. Ці значення є лише орієнтовними і для їхнього уточнення необхідно виконати декілька попередніх обчислювальних експериментів з моделлю.

Обчислювальний експеримент

Після декількох спроб можна одержати, наприклад, такі прийнятні вхідні дані:

$x_0 = 0$, $y_0 = 4$ м, $v_0 = 6$ м/с, $\alpha_0 = 30^\circ$, $\Delta t = 0,05$ с, $R = 0,2$ м⁻¹, $Q = 0,6$ м⁻¹.

Відповідно до цих даних будується траєкторія (рис. 9.9).

Поступово збільшуючи початкову швидкість v_0 , наприклад, на 1 м/с, ми з часом одержимо таке її значення, при якому характерною прикметою графіка стане "надлом" у найвищій точці (рис. 9.10).

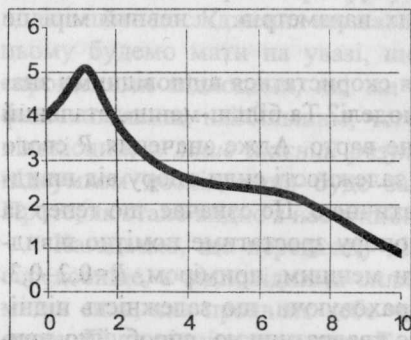


Рис. 9.9

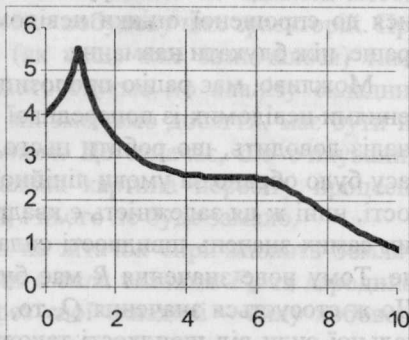


Рис. 9.10

Цікаво, як відреагує модель на подальше збільшення швидкості? Невже наша украй спрощена модель здатна на щось більш складне? Ситуація дійсно інтригує! Тут нам нічого не залишається, як продовжити збільшення початкової швидкості.

І ось вона – нагорода за наполегливу працю і терпіння: наш літачок описав саму справжню “мертву петлю”! Ця дивовижна картинка (рис. 9.11) здатна будь-кого привести у захват.

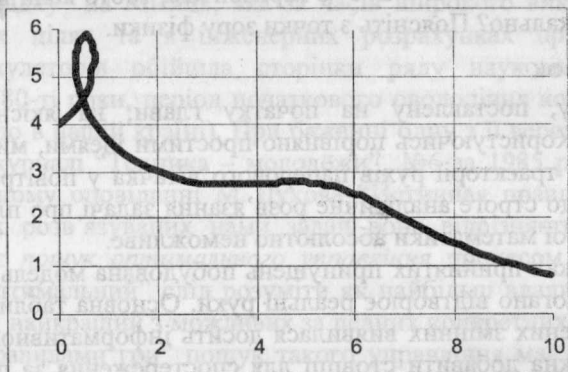


Рис. 9.11

Заспокоймо, однак, емоції і поставимо питання: а чи можна сказати, буде чи не буде виконана петля, якщо не будувати графік, а тільки аналізувати таблицю? Виявляється, так. Необхідна інформація міститься у стовпці для значень кута α , що його утворює вектор швидкості v з додатним напрямком осі Ox .

Адже у криволінійному русі вектор швидкості завжди напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в кожній її точці (у кожний момент часу). Саме тому надійною ознакою петлеподібного руху є монотонне зростання кута α з переходом через 360° (або через 0°).

Такий спосіб не єдиний, але найзручніший. Для порівняння розглянемо ще один, згідно з яким тієї ж мети буде досягнуто, якщо, наприклад, спочатку з'ясувати для себе, яким чином з плином часу мають змінюватися координати x та y рухомого тіла, якщо воно описує петлеподібну траєкторію, а потім спробувати в таблиці виявити подібні фрагменти.

4. Досвід попередньої роботи станеться вам у нагоді, якщо ви перейдете до дослідження моделі при помітно більших (порядку 20 м/с і більше) початкових швидкостях. Виконуючи такі експерименти, ви неодмінно потрапите в ситуацію, коли порушиться стійкість

алгоритму і необхідним стане прийняття рішення про зміну (зменшення) зазначених вище параметрів задля “рятування” моделі.

Вправа

1. Виконайте завдання, запропоновані у пп. 3 і 4, користуючись останньою таблицею.

2. Що утримує літак у той момент, коли вектор швидкості утворює кут $\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 270^\circ$ з горизонтом, тобто коли він направлений вертикально? Поясніть з точки зору фізики.

Висновок

1. Задачу, поставлену на початку глави, на якісному рівні розв’язано. Користуючись порівняно простими ідеями, ми одержали різноманітні траєкторії рухів паперового літачка у повітрі, незважаючи на те, що строге аналітичне розв’язання задачі про планер засобами шкільної математики абсолютно неможливе.

2. В межах прийнятих припущень побудована модель на якісному рівні непогано відтворює реальні рухи. Основна таблиця за кількістю виведених змінних виявилася досить інформативною, але при бажанні можна додати стовпці для спостереження за поведінкою миттєвих значень модуля прискорення та рівнодійної всіх сил, що діють на тіло.

3. Та все одно видається випадковим везінням, що порівняно проста модель здатна давати такі цікаві результати, нехай і на якісному рівні. Тим більше, що про конкретну форму рухомого тіла в ній взагалі не говориться нічого. Невже і насправді так легко примусити тіло невизначеної форми описати “мертву петлю”?

Справа в тому, що використані нами формули математичного запису теореми Жуковського *вже передбачають* наявність відповідних аеродинамічних характеристик (форми та розмірів) рухомого тіла – планера. Дійсною проблемою є саме створення реального об’єкту з необхідними характеристиками.

Глава 10. Задача про м'яку посадку на Місяць

10.1. Передмова

Сюжетною основою моделювання тут є відома задача-гра про “м'яку посадку” на Місяць, яка за часів широкого використання у навчальних цілях та в інженерних розрахунках програмованих мікрокалькуляторів обійшла сторінки ряду науково-популярних журналів (80-ті роки, період початкового оволодіння комп'ютерною грамотністю в нашій країні). При бажанні одну з її версій ви можете знайти в журналі “Техніка – молодёжи”, №6 за 1985 р. у цікавому фантастичному оповіданні М. Пухова “Истинная правда”. Від усіх попередніх розв'язуваних нами задач вона відрізняється тим, що передбачає пошук оптимального управління процесом (посадкою). Термін “оптимальний” слід розуміти як найбільш вдалий, найбільш доцільний, найкращий з можливих за певних конкретних умов.

За “правилами гри” пошук такого управління має здійснювати дослідник (гравець) методом багаторазових спроб та помилок, покладаючись на власну інтуїцію.

Оскільки цією задачею завершується розділ “Моделювання механічних рухів” нашого посібника, то тут принагідно будуть зроблені певні узагальнення стосовно застосування чисельного методу розв'язування задач механіки, і, крім того, вирішуватимуться нові проблеми, пов'язані, зокрема, зі створенням зручного інтерфейсу користувача.

10.2. Постановка задачі

З метою доставки і розміщення на поверхні Місяця апаратури для наукових досліджень планується запуск космічного корабля. Схема його посадки передбачає декілька послідовних фаз:

1) виведення корабля з корисним вантажем на колову селеноцентричну орбіту, тобто корабель має стати штучним супутником Місяця;

2) відділення від корабля вантажу і перетворення його на самостійний орбітальний модуль;

3) здійснення м'якої посадки модуля на поверхню Місяця.

Заключна третя фаза має пройти у два етапи:

– спочатку за допомогою маневрових двигунів відбудеться гасіння швидкості модуля відносно Місяця, внаслідок чого він зійде з

колової орбіти й у певний момент над потрібним місцем посадки на короткий час зависне на деякій висоті h_0 над поверхнею Місяця;

– щоб уникнути подальшого вільного падіння, в цей момент увімкнуться двигуни м'якої посадки, що й забезпечить керований плавний спуск модуля до поверхні.

Уточнимо основні технічні умови здійснення другого етапу – безпосередньо посадки.

1. Запас пального, призначеного для роботи двигунів м'якої посадки, є обмеженим (саме цей факт у найбільшій мірі обумовлює необхідність пошуку *оптимального* управління).

2. Передбачається, що швидкість апарату під час опускання можна регулювати, змінюючи витрату пального, що подається до камер згоряння, оскільки реактивна сила тяги гальмівних двигунів залежить від маси пального, що згорає в камерах за одиницю часу.

3. Щоб запобігти руйнуванню цих двигунів під час роботи, витрата пального за одиницю часу не повинна перебільшувати деякого максимально дозведеного значення.

4. При здійсненні посадки швидкість витікання реактивного струменя (продуктів згоряння) через сопло підтримується сталою.

5. Сталою також вважається і маса модуля без маси пального.

При моделюванні завершення посадки вважатиметься момент, коли значення висоти h над поверхнею Місяця переходить через нуль. При цьому м'якою вважатиметься така посадка, коли швидкість апарату в цей момент (при переході h через нуль) не перебільшуватиме деякого певного значення, наприклад, 1 м/с.

Задача полягає в тому, щоб за умови обмеженої маси пального виявити такий режим подавання його до камер згоряння, тобто таке управління, яке забезпечить м'яку посадку.

За цілком зрозумілих причин конструктори не можуть провести реальні експерименти. Єдиний придатний спосіб знаходження необхідного управління полягає в підготовці й проведенні відповідного *обчислювального експерименту* на ЕОМ на основі математичної моделі заключного етапу операції.

10.2.1. Формалізація задачі та побудова моделі

Уведемо позначення:

M – маса модуля без урахування маси пального (за умовою п. 5 величина стала).

m – змінна маса пального. У початковий момент $m = m_0$.

r – витрата пального, тобто маса пального, що спалюється в

камерах згоряння двигунів м'якої посадки за проміжок часу від моменту t до $t + \Delta t$, тобто за проміжок часу Δt . Оскільки припускається, що витрату можна регулювати в ході зниження, то r є невідомою і шуканою функцією часу: $r = r(t)$.

Зазначене вище обмеження на витрату пального (п. 3 технічних умов) можна записати у вигляді нерівності $0 \leq r(t) \leq r_{max}$.

$v = v_t$ – миттєва швидкість модуля під час опускання. Початкова умова “зависання” виражається рівністю $v_0 = 0$. Умова м'якої посадки – одночасне виконання нерівностей $0 \geq v \geq -1$ і $h \leq 0$.

u – швидкість витікання реактивного струменя; величина стала згідно п. 4 технічних умов.

h_t – миттєве значення висоти над поверхнею Місяця, причому $h = h_0$ при $t = 0$.

Решту позначень будемо вводити в міру необхідності.

10.2.2. Аналіз умови й обговорення плану роботи

1. Рух, що його ми збираємось дослідити, з фізичної точки зору являє собою неперервний у часі й просторі процес. Дійсно, тут неперервно відбуваються зміни значень всіх динамічних і кінематичних характеристик рухомого об'єкта: маси, рівнодійної всіх діючих сил, прискорення, швидкості, імпульсу, координати тощо. Згадаємо, що математичні моделі, створені для опрацювання за допомогою комп'ютера (комп'ютерні математичні моделі), повинні бути дискретними, оскільки сам комп'ютер є дискретним пристроєм, тобто виконує операції за окремими кроками. Тому при комп'ютерному опрацюванні неперервних аналітичних моделей завжди існує потреба в уведенні до моделі елементів дискретизації.

Ця потреба реалізується на основі чисельних методів шляхом переходу від неперервної математичної моделі до рівнянь, записаних у формі скінчених різниць. З попереднього досвіду ви вже знаєте, що для дискретизації неперервного в часі процесу, яким, зокрема, є механічний рух, весь час руху розбивають на окремі достатньо малі інтервали Δt . При цьому вважають, що протягом такого інтервалу характеристики руху (значення відповідних змінних) залишаються постійними, а їхні зміни відбуваються миттєво (стрибокподібно) в моменти часу, що відповідають кінцю або середині кожного такого інтервалу. Ці моменти, а також тривалість проміжків Δt обирає дослідник. При послідовному зменшенні Δt результати, одержані на дискретній моделі, наближаються до результатів, що їх дає аналітич-

не розв'язування за неперервною моделлю, якщо воно існує і відоме.

З метою спрощення подальших міркувань приймемо такі припущення.

Припущення 1. Протягом проміжку часу Δt аж до його останньої миті повна маса модуля $m + M$ і його швидкість v залишаються незмінними. В останній момент миттєво спалюється пальне масою r і це приводить до одночасної зміни значень згаданих характеристик. Ці нові значення стають початковими для наступного інтервалу Δt , адже, як уже багаторазово зазначалося, кінець даного інтервалу є початком наступного.

Розглянемо окремі елементарні моделі, при об'єднанні яких буде побудована загальна математична модель м'якої посадки модуля. В основу побудови покладемо рис. 10.1.



Рис. 10.1

1. Модель вигорання пального.

$$m_t = m_{t-\Delta t} - r_{t-\Delta t}, \quad (1)$$

де $0 \leq r_t \leq r_{max}$;

m_t – маса пального в момент t ;

$m_{t-\Delta t}$ – маса пального в момент $(t-\Delta t)$, тобто на попередньому проміжку Δt ;

$r_{t-\Delta t}$ – витрата пального на проміжку, що був на Δt раніше за момент часу t , або маса пального, що згоріло за попередній проміжок часу Δt .

2. Модель гравітаційного притягання Місяця.

$$F_{тяж} = (m_t + M) \cdot g, \quad (2)$$

де $g = 1,62 \text{ м/с}^2$ – прискорення сили тяжіння поблизу поверхні Місяця.

3. Модель реактивної сили тяги.

Реактивна сила тяги $F_{\text{реакт}}$, що діє на модуль, дорівнює швидкості зміни імпульсу модуля:

$$F_{\text{реакт}} = \frac{((M + m_{t+\Delta t})v_{t+\Delta t}) - ((M + m_t)v_t)}{\Delta t} = \frac{\Delta((M + m)v)}{\Delta t}.$$

Згідно закону збереження імпульсу для замкнутої системи "модуль – реактивна струміна" зміна імпульсу модуля за абсолютною величиною дорівнює зміні імпульсу струмини:

$$\Delta((M + m) \cdot v) = \Delta m \cdot u = r_{t-\Delta t} \cdot u,$$

де $\Delta m = m_{t-\Delta t} - m_t = r_{t-\Delta t}$ – маса струмини, що витікає за проміжок часу Δt згідно (1).

Таким чином,

$$F_{\text{реакт}} = \frac{r_{t-\Delta t} \cdot u}{\Delta t}. \quad (3)$$

4. Модель руху модуля.

Внаслідок відсутності на Місяці атмосфери силу опору рухові з боку середовища можна не включати до розгляду. Тому на активній ділянці спуску, коли працюють тільки двигуни м'якої посадки, на модуль діють тільки дві сили: сила гравітаційного притягання Місяця $F_{\text{тяж}}$ і протилежно напрямлена реактивна сила тяги $F_{\text{реакт}}$. За другим законом Ньютона рівнодійна цих сил надає модулеві прискорення:

$$F_{\text{тяж}} - F_{\text{реакт}} = (m_t + M) \cdot a,$$

де $a = a_t$ – прискорення апарату, яке змінюється з часом.

Підставляючи (2) і (3) в останній вираз, будемо мати:

$$a_t = \frac{u \cdot r_{t-\Delta t}}{(m_t + M) \cdot \Delta t} - g. \quad (4)$$

Оскільки розглядається рух тіла змінної маси, то прискорення виявляється складною функцією часу.

Припущення 2. Прийємо наближено, що прискорення $a(t)$ залишається сталим на кожному малому інтервалі Δt , тобто рух апарату на кожному часовому інтервалі є рівноприскореним. Тоді миттєва швидкість модуля v_t наприкінці інтервалу може бути визначена з виразу

$$v_t = v_{t-\Delta t} + a_t \cdot \Delta t. \quad (5)$$

Висота h_t над поверхнею Місяця може бути задана виразом

$$h_t = h_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{a_t \cdot \Delta t^2}{2}. \quad (6)$$

Система рівнянь (1), (4), (5), (6) являє собою математичну модель м'якої посадки на Місяць.

Суттєвого спрощення подальшої роботи можна досягти, прийнявши тривалість інтервалу Δt рівною одиниці часу: $\Delta t = 1$. Проте платнею за таке спрощення стане погіршення точності результатів. На якісному рівні, однак, модель залишатиметься задовільною. З урахуванням сказаного запишемо систему:

$$\begin{cases} m_t = m_{t-1} - r_{t-1} \\ a_t = \frac{u \cdot r_{t-1}}{m_t + M} - g \\ v_t = v_{t-1} + a_t \\ h_t = h_{t-1} + v_{t-1} + \frac{a_t}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Цю систему рівнянь відносно m_t , a_t , v_t , h_t будемо розв'язувати методом послідовних підстановок. Суть методу полягає в такому. Нехай обрано деяке припустиме управління апаратом, тобто є заданою послідовність значень r_0, r_1, \dots, r_t , така, що $r_0 + r_1 + \dots + r_t \leq m_0$. При $t = 0$ нам уже відомі значення m_0, a_0, v_0, h_0 і, отже, можна обчислити значення правих частин у рівняннях системи (7), тобто знайти m_1, a_1, v_1, h_1 . У свою чергу, їх можна використати для обчислення значень m_2, a_2, v_2, h_2 і т.д.

Послідовність значень r стане відомою лише після того, як ми відшукаємо її під час роботи з моделлю, тобто під час "гри".

Процес обчислень має тривати до моменту виконання умови $h_{t+1} \leq 0$, тобто досягнення поверхні. Якщо при цьому одночасно виявиться, що $-1 \leq v_{t+1} \leq 0$, то посадку будемо вважати м'якою.

Вправа

1. Поясніть, чому досягнення поверхні ми описуємо умовою $h \leq 0$, а не більш жорсткою $h = 0$?
2. Поясніть необхідність подвійної нерівності в умові для кінцевої швидкості м'якої посадки.

Система рівнянь (7) є рекурентною. Алгоритм її розв'язування передбачає виконання однотипних обчислень при $t = 0, t = 1, \dots$. Зрозуміло, що з подібною одноманітною роботою комп'ютер вправляється краще за людину. При математичному моделюванні реальних процесів і явищ на сучасних ЕОМ доводиться розв'язувати системи численних рекурентних рівнянь з багатьма невідомими.

10.3. Обчислювальний експеримент

1. Створимо електронну таблицю, перший рядок якої заповнимо іменами стовпців, стовпець G (“Дано:”) – іменами змінних, стовпець H – їх початковими значеннями, а комірки A2 – F2 (для моменту часу $t = 0$) – посиланнями на відповідні комірки стовпця H (рис. 10.2):

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|-----|-----|-------|------|-------|-----|-------------------------------|------|
| 1 | | m | a | v | h | r | Дано: | |
| 2 | 0 | 100 | -1,62 | 0,00 | 10,00 | 0 | $M_0, \text{кг} =$ | 100 |
| 3 | | | | | | | $g, \text{м/с}^2 =$ | 1,62 |
| 4 | | | | | | | $v_0, \text{м/с} =$ | 0 |
| 5 | | | | | | | $u, \text{м/с} =$ | 200 |
| 6 | | | | | | | $M, \text{кг} =$ | 1000 |
| 7 | | | | | | | $h_0, \text{м} =$ | 10 |
| 8 | | | | | | | $r_{\text{max}}, \text{кг} =$ | 10 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |

Рис. 10.2

2. Заповнимо третій рядок необхідними формулами.

| комірки | формули / числа |
|-------------|-------------------------------|
| A3 | =A2+1 |
| B3 | =B2-F2 |
| C3 | =\$H\$5*F2/(B3+\$H\$6)-\$H\$3 |
| D3 | =D2+C3 |
| E3 | =E2+D2+C3/2 |
| F3, F4, ... | Заповнюються з клавіатури |

3. Скопіюємо формули третього рядка у наступні рядки. Таблиця набуває вигляду, показаного на рис. 10.3:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-----|-------------------------------|------|
| 1 | t | m | a | v | h | r | Дано: | |
| 2 | 0 | 100 | -1,62 | 0,00 | 10,00 | 0 | $m_0, \text{кг} =$ | 100 |
| 3 | 1 | 100 | -1,62 | -1,62 | 8,38 | | $g, \text{м/с}^2 =$ | 1,62 |
| 4 | 2 | 100 | -1,62 | -3,24 | 5,14 | | $v_0, \text{м/с} =$ | 0 |
| 5 | 3 | 100 | -1,62 | -4,86 | 0,28 | | $u, \text{м/с} =$ | 200 |
| 6 | 4 | 100 | -1,62 | -6,48 | -6,20 | | $M, \text{кг} =$ | 1000 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $h_0, \text{м} =$ | 10 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $r_{\text{max}}, \text{кг} =$ | 10 |

Рис. 10.3

З таблиці видно таке: коли не працюють двигуни м'якої посадки ($r = 0$), модуль вільно падає, і вже наприкінці четвертої секунди досягає поверхні в аварійному режимі ($h = -6,2$ м, $v = -6,48$ м/с). Наступні значення величин швидкості (після D6) і висоти (після E6)

являють собою результати обчислень за введеними формулами і в даному випадку не відображують реальний процес.

4. Будемо послідовно заповнювати комірки стовпця F довільними значеннями змінної r – витрати пального за однакові проміжки часу $\Delta t = 1$ с.

5. Після заповнення кожної чергової комірки спостерігаємо за значеннями у комірках наступного рядка для стовпців D (швидкість) та E (висота).

6. З'ясуємо, чи не відбулася м'яка посадка.

Якщо при деякому черговому значенні r одночасно виконуватимуться умови $h \leq 0$ і $-1 \leq v \leq 0$, то задачу вважаємо розв'язаною і припиняємо обчислювальний експеримент.

Запитання. Поясніть, чому значення інтервалу $\Delta t = 1$ суттєво спрощує роботу з моделлю?

Виявляється, що “здійснити” м'яку посадку – зовсім не проста справа. Вона ще більше ускладнюється, коли додається умова *зеконотити при цьому якомога більше пального.*

Вправи

1. Спробуйте “здійснити” економну м'яку посадку при початковій масі пального 100 кг.

2. На рис. 3 подано одне з можливих удалих управлінь (послідовність значень витрати пального r) для $m_0 = 100$ кг; дане управління забезпечує економію 44 кг пального.

| | | | | | | | | |
|-----|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| r | 0 | 6 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |
| v | 0 | -1,62 | -2,14 | -1,92 | -1,68 | -1,42 | -1,14 | -0,84 |
| h | 10 | 9,19 | 7,31 | 5,28 | 3,48 | 1,93 | 0,66 | -0,33 |

Рис. 10.4

3. Перевірте експериментально запропонований на рис. 10.4 режим управління посадкою.

4. Не виконуючи експерименту, скажіть, чи виявиться посадка за рис. 10.4 м'якою, якщо початкову масу пального взяти не 100 кг, а з урахуванням економії $100 - 44 = 56$ кг? Свою відповідь обґрунтуйте.

5. Тепер виконайте перевірку на моделі. Якщо результат перевірки не співпаде з очікуванням, поверніться до попереднього п. 4.

10.4. Поліпшення інтерфейсу користувача

Створена таблиця має чимало суттєвих вад.

1. Насамперед, у ній відсутня інформація про результат процесу посадки після введення кожного чергового значення витрати r . Цю

інформацію ми поки що вимушені отримувати шляхом безпосереднього перегляду значень швидкості й висоти та порівнянням їх з умовами м'якої посадки. З метою автоматизації цієї справи виконаємо таке:

- після стовпця F створимо новий стовпець, який одержить ім'я G, а стовпець "Дано:" і наступний – відповідно H, I;
- у комірці G1 запишемо "Процес";
- залишаючи комірку G2 пустою, уведемо до комірки G3 формулу

$$=ЕСЛИ(И(D3>=-1;D3<=0;E3<=0);"Ok!";ЕСЛИ(И(D3<-1;E3<0);"Аварія";"")),$$
яку скопіюємо у комірки (G4–G12).

Завдання. Прокоментуйте запропоновану формулу.

2. Згідно умови в моделі існує обмеження $0 \leq r_t \leq r_{max}$, яке поки що не враховане. Реалізуємо його шляхом уведення до комірки H9 такої формули:

$$=ЕСЛИ(ИЛИ(F3>=1;F4>=1;B5>=1;F6>=1;F7>=1;F8>=1;F9>=1;F10>=1;F11>=1;F12>=1);"Дивись І8 !";"").$$

Тепер при введенні до будь-якої з комірок B3–B13 значень, що перебільшують вміст комірки I8 (обмеження на r), у H9 матимемо повідомлення "Дивись І8 !". У випадку допустимих значень змінної r комірка H9 буде порожньою.

Вправа. Доопрацюйте наведену формулу так, щоб у ній додатково враховувалася ще й умова $r \geq 0$.

3. Оскільки початковий запас пального m_0 для двигунів м'якої посадки є обмеженим (комірка I2), то бажано також виводити на екран повідомлення про закінчення пального. Таке повідомлення можна здійснити, наприклад, у комірці H10 за допомогою формули

$$=ЕСЛИ(СУММ(F2:F12)>=1;"ЗАКІНЧИЛОСЯ ПАЛЬНЕ !";"").$$

Вправа

1. Виконайте в попередній таблиці всі зміни, описані в пп. 1-3.
2. Уведіть початкову масу пального $m_0 = 70$ кг.
3. Починайте обчислювальний експеримент, дотримуючись поданої нижче схеми управління витратою пального

| | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|----|----|----|---|---|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| r | 0 | 6 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 8 | 6 |

Ваша таблиця набуває дуже цікавого вигляду (рис. 10.5).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | G | K |
|----|-----|-----|-------|-------|-------|-----|--------|------------------|---|---|---|
| 1 | t | m | a | v | h | r | Процес | Дано: | | | |
| 2 | 0 | 70 | -1,62 | 0,00 | 10,00 | 0 | | $m_0 = 70$ | | | |
| 3 | 1 | 70 | -1,62 | -1,62 | 9,19 | 8 | | $g_{mic} = 1,62$ | | | |
| 4 | 2 | 62 | -0,11 | -1,73 | 7,51 | 9 | | $v_0 = 0$ | | | |
| 5 | 3 | 53 | 0,09 | -1,64 | 5,82 | 9 | | $I = 200$ | | | |
| 6 | 4 | 44 | 0,10 | -1,54 | 4,23 | 10 | | $M = 1000$ | | | |
| 7 | 5 | 34 | 0,31 | -1,23 | 2,85 | 10 | | $h_0 = 10$ | | | |
| 8 | 6 | 24 | 0,33 | -0,89 | 1,79 | 10 | | $r_{max} = 10$ | | | |
| 9 | 7 | 14 | 0,35 | -0,54 | 1,07 | 8 | | | | | |
| 10 | 8 | 6 | -0,03 | -0,57 | 0,52 | 6 | | | | | |
| 11 | 9 | 0 | -0,42 | -0,99 | -0,26 | | Ок! | | | | |

Рис. 10.5

Тут видно, що при $m_0 = 70$ кг і управліннях $r = 0, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 8, 6$ пальне закінчується в останній момент вдалої посадки.

Вправи

1. Запропонуйте інші можливі варіанти такої перевірки.
2. Перевірте нові можливості таблиці шляхом тестування за пп.1-3.
3. Доцільним доповненням до інтерфейсу користувача є графічне відображення залежностей змінних величин від часу. Як відомо, така задача легко реалізується засобами електронних таблиць. На рис. 10.6 маємо графіки залежності від часу основних характеристик процесу у відповідності до рис. 10.5.

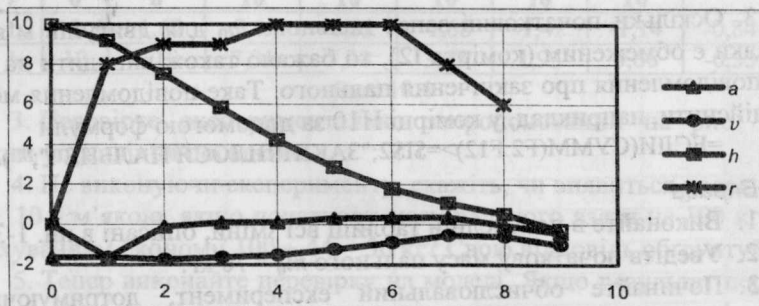


Рис. 10.6

4. В даній моделі за домовленістю зміна значень всіх характеристик руху відбувається наприкінці кожного інтервалу Δt .

Побудуйте модель, у якій ці характеристики змінюватимуться в середині інтервалу Δt .

5. Проведіть серед бажаючих змагання за критерієм “витрата пального x час посадки”. Перемагає гравець, в якого цей критерій виявиться найменшим.

Висновки

1. Головна мета моделювання в даній задачі-грі полягає у відшуванні оптимального управління м'якою посадкою спускного модуля космічної станції. На рівні гри цієї мети досягнуто. Рис. 10.6, на якому показана динаміка зміни всіх характеристик руху, можна розглядати як компактний підсумок виконаної роботи. Достатньо у “бортовий комп'ютер” увести програму управління режимом роботи гальмівних двигунів згідно з експериментально знайденою залежністю $r = r(t)$, і процес посадки буде автоматизовано. Отже наступна гра з тими самими даними закінчиться успішно.

2. Розглянута модель є прикладом постановки задачі оптимізації управління. Пошук оптимального управління здійснювався тут людиною-гравцем методом багаторазових спроб та помилок. Сьогодні такі задачі розв'язуються на основі спеціальних математичних методів, які забезпечують автоматизований пошук оптимальної стратегії. Їх вивчає комплексна математична дисципліна, що має назву “Дослідження операцій”. Деякі з цих методів мають досить прості і надійні комп'ютерні реалізації. У наступному розділі ми познайомимося з прикладом автоматизованого розв'язування задачі оптимального управління на виробництві.

Розділ 5. Імітаційне моделювання

Сьогодні існує два головних напрями використання ЕОМ. У межах першого дослідник намагається якомога далі просунути розв'язання задачі ще до використання ЕОМ, і перед тим, як звернутись до комп'ютера, він уже уявляє собі основні закономірності вивчаного явища (наприклад, у вигляді системи рівнянь, нерівностей-обмежень, логічних виразів тощо), а машина стає при нагоді лише як ефективний обчислювальний інструмент.

Проте поява ЕОМ і практика їх використання привели до цікавого і принципово важливого феномену: витвір людського розуму – комп'ютер – почав здійснювати зворотний вплив на стиль мислення людини. Цей факт виявився віддзеркаленням більш загальної закономірності: інструменти, які люди створюють для своїх цілей, впливають своїм устроєм і обмеженнями на формування людських уявлень про світ. Інструмент створюється для вирішення конкретної проблеми, але в міру застосування і вдосконалення інструмент підказує інші способи його використання.

Зокрема, в моделюванні це проявилось появою нового напрямку, суть якого визначається двома ознаками. По-перше, дослідник бере до розгляду тільки основні закономірності тієї галузі знань, у якій він працює. По-друге, цей підхід заздалегідь передбачає наявність комп'ютера як основного інструмента-партнера для створення моделі і подальшої роботи з нею. Згодом такий підхід одержав навіть спеціальну назву – *імітаційне моделювання*.

Слово "*імітація*" походить від латинського *imitatio* і означає наслідування когось чи чогось (рос. – *подражание*). У моделюванні цим терміном позначають відтворення всіх або частини функцій та властивостей реального об'єкту за допомогою моделі. У англійських країнах або у тих, що перейняли їхню термінологію, застосовують інший термін *simulation* – симуляція. Тут можна пригадати відомого героя Я. Гашека – бравого солдата Швейка, який дуже майстерно імітував (симулював) божевілья.

Імітаційне комп'ютерне моделювання – це штучний експеримент на екрані дисплея, при якому з метою зрозуміти поведінку системи або порівняти різні стратегії управління нею замість натурних випробувань на реальній складній системі експериментують з її комп'ютерною моделлю.

Строго кажучи, будь-яка комп'ютерна модель є імітаційною, але

цей термін закріпився за моделями *складних систем*, коли внутрішні закони досліджуваних явищ невідомі або визначаються *випадковими* чинниками.

Результат еволюції таких систем можливо змоделювати лише шляхом прямої покрокової імітації, оскільки не існує жодного способу передбачити наслідки дії численних випадкових факторів. Треба просто вести обчислювальний експеримент і чекати до тих пір, коли еволюція відбудеться. Для дослідження складних природних, економічних, виробничих систем сьогодні відомі лише два способи: 1) натурний експеримент, який може виявитись занадто коштовним, небезпечним, шкідливим чи нездійсненним і 2) обчислювальний експеримент з математичною моделлю досліджуваної системи.

Глава 11. Моделювання за допомогою випадкових чисел

11.1. Детерміновані й стохастичні моделі

Усі без винятку попередні моделі мають одну спільну особливість – хід процесів у них визначається строгими й чіткими закономірностями, тобто між значеннями характеристик об'єкту чи деякої системи об'єктів у певний момент часу і значеннями цих характеристик у будь-який наступний (або попередній) момент існував строгий однозначний зв'язок. Цей зв'язок встановлювався математичним записом закономірностей у вигляді точних формул. Явища, що описуються такими величинами, мають назву *детермінованих* (від латинського *determino* – визначаю), таку ж назву мають і відповідні моделі.

Однак, окрім детермінованих об'єктів (процесів, явищ) у природі й суспільстві існують і такі, що для них неможливо за допомогою точних формул врахувати численні й різноманітні впливи випадкових факторів, наприклад, майже всі виробничі процеси, а також об'єкти, характеристики яких за своєю природою можуть набувати лише випадкових значень. Наприклад, денна кількість пасажирів на різних видах транспорту, тривалість проміжків часу між ремонтами техніки, ряд властивості об'єктів мікросвіту, зміни в часі симпатій виборців тощо. Величини з наведених прикладів називають випадковими або *стохастичними*. Цю ж назву – “стохастичні” – мають і математичні моделі, що містять такі величини.

Якщо в детермінованих явищах багаторазово відтворювати ті самі початкові умови, то обов'язково відтворюватимуться ті самі результати. У випадку стохастичних величин результати кожного разу будуть новими. За потреби тут часто вдаються до усереднення результатів.

11.2. Метод Монте-Карло

Існують різні підходи до моделювання систем, що містять стохастичні характеристики, але найбільш поширеним є *метод випадкової вибірки*, відомий ще під назвою методу Монте-Карло. Створення цього методу пов'язане з роботою видатного американського математика, одного із засновників кібернетики Джона фон Неймана, котрий наприкінці 40-х років увів цей термін при розв'язуванні проблеми екранування (захисту) від ядерних випромінювань.

Назва методу походить від назви столиці князівства Монако, відомої у всьому світі своїми гральними домами, де значне місце посідає рулетка. Якщо рулетка гарно збалансована, кулька (або стрілка-показчик) може зупинитись у будь-якому положенні, тому ймовірність одержання будь-якого числа однакова для всіх чисел на барабані.

Поглянемо на рулетку з позиції дослідника. Уявімо, що на диску містяться цілі числа з деякого інтервалу, наприклад, $[0, 9]$. Після кожного випробування будемо в прямокутній системі координат на вісі ординат відкладати ці числа, а на вісі абсцис – відповідно порядкові номери їхньої появи. Тоді за достатньо великої кількості випробувань ми одержимо множину точок, майже рівномірно розподілених на координатній площині.

Інший метод одержання рівномірно розподілених випадкових чисел – використання лототрону.

За необхідності одержати m -розрядні числа можна було б m разів підряд пустити рулетку або вилучити з лототрону підряд m куль (зрозуміло, повертаючи їх знов після кожного випробування до лототрону). Рівномірний розподіл випадкових чисел – це ідеалізоване математичне поняття і фактично не зустрічається на практиці.

В дійсності немає потреби багаторазово обертати рулетку або барабан лототрону, оскільки випадкові числа давно визначені і зведені до спеціальних таблиць. Фрагмент такої таблиці для $m = 4$ наведений нижче.

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 3513 | 6976 | 9847 | 1722 | 3874 | 6793 | 5587 | 4268 | 7740 | 2544 |
| 1247 | 4679 | 1275 | 7556 | 5297 | 2883 | 0882 | 4311 | 2741 | 2020 |
| 6904 | 7243 | 1157 | 9490 | 1043 | 2749 | 7881 | 3774 | 3275 | 6238 |
| 5675 | 2501 | 7238 | 0945 | 7257 | 0283 | 3170 | 7628 | 7272 | 3355 |

Таблиця чотиризначних ($m = 4$) випадкових чисел.

Коли випадкові числа добирають з таблиці, то не обов'язково починати із самого першого числа: до таблиці можна входити з будь-якого місця. Однак надалі треба використовувати певну регулярність. Наприклад, брати числа підряд уздовж рядків, зміщуючись весь час праворуч чи ліворуч, або вздовж стовпців (вгору чи вниз), нічого не пропускаючи, тобто не можна надавати перевагу "гарним" числам і пропускати "незручні", наприклад, дуже малі.

У природних і виробничих умовах, у суспільних і багатьох інших явищах спостерігаються розподіли нерівномірні. Такими є розподіли, характерні для коливань купівельного попиту, для

величини врожаю у різні роки, для виробничих похибок та похибок вимірювань, для рівня перешкод при передаванні інформації тощо. Відомі й інші види нерівномірних розподілів випадкових величин. Всі їх вивчає окрема теорія – *математична статистика*.

При моделюванні випадкових величин їх розподіл визначають одним із двох способів:

1) за певним теоретичним законом методами математичної статистики;

2) на основі даних, отриманих за результатами спеціально поставленого натурального експерименту, і саме цей спосіб ми далі використаємо.

Для роботи ЕОМ з випадковими числами спочатку були здійснені спроби вводити ці числа до машини ззовні. Вводили у пам'ять готові таблиці, будували прилади на основі випадкових фізичних процесів (наприклад, радіоактивного розпаду або підрахунку кількості електронів, що вилітають за деякий фіксований проміжок часу з гарячого катоду), і одержані на цих приладах числа також вводили у пам'ять. Однак і те, й інше працювало однаково погано: таблиці випадкових чисел в ЕОМ швидко вичерпувалася, а випадкове фізичне явище взагалі не можна відтворити з тією самою послідовністю чисел для перевірки розрахунків.

Саме в цій ситуації Джон фон Нейман придумав алгоритм генерування (створення) чисел, дуже схожих на випадкові і рівномірно розподілені у інтервалі $[0, 1]$. Ці числа ще називають *псевдовипадковими* (нібито, майже випадковими), оскільки їхня послідовність є, нажаль, періодичною. Кількість чисел у періоді намагаються збільшувати шляхом удосконалення алгоритму їх утворення. У сучасних мовах програмування такі алгоритми реалізують у спеціальних стандартних функціях. Так, відома функція $RND(X)$ генерує рівномірно розподілену в інтервалі $[0, 1]$ послідовність псевдовипадкових чисел. Назва функції походить від англійського *random* – випадковий. В електронних таблицях також є відповідна функція.

Ідея методу Монте-Карло полягає в тому, що при побудові стохастичних моделей деякі суттєві параметри моделі визначають за допомогою випадкових чисел. Основна проблема тут зводиться до пошуку зручного та надійного джерела (генератора) таких чисел.

У безмашинному варіанті ці числа, як зазначалося вище, беруть зі спеціальних таблиць, а за наявності комп'ютера користуються стандартним генератором псевдовипадкових чисел.

Розглянемо деякі прості приклади моделювання з використанням випадкових чисел.

11.3. Моделювання броунівського руху (найпростіша модель)

Пригадаємо, що броунівським рухом називають неупорядкований рух дрібних частинок, завислих у рідині чи газі, під впливом ударів молекул навколишнього середовища. Вперше це явище спостерігав у мікроскоп англійський ботанік Роберт Броун у 1827 р., розглядаючи рух частинок квіткового пилку, завислих у краплі воді.

Як згодом було встановлено, причиною руху броунівської частинки є тепловий рух молекул середовища і відсутність точної просторової компенсації ударів, що їх зазнає частинка з боку оточуючих її молекул. Ці некомпенсовані удари, будучи безладними, приводять і частинку у неупорядкований рух: швидкість її весь час різко змінюється і за величиною, і за напрямком. Якщо фіксувати положення довільної частинки через невеликі однакові проміжки часу, то побудована у такий спосіб траєкторія виявляється надзвичайно складною й заплутаною ламаною лінією. На рис. 11.1 показані фотографії рухів трьох броунівських частинок радіусом 0,52 мкм у воді. Точками відмічені положення частинок через кожні 30 с. Відстань між поділками сітки 3,4 мкм.

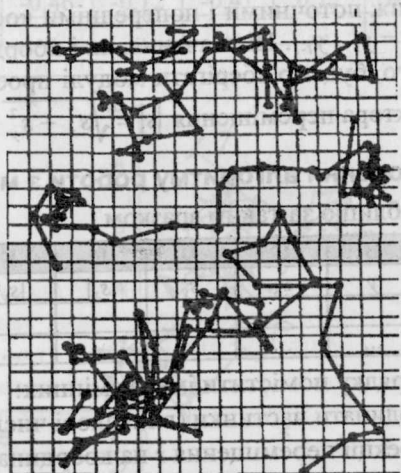


Рис. 11.1

У другій половині XIX ст. броунівський рух виявився найбільш переконливим експериментальним підтвердженням основних поло-

жень молекулярно-кінетичної теорії (про хаотичний тепловий рух атомів і молекул речовини): хоч молекули в оптичний мікроскоп безпосередньо і не видні, та рух броунівських частинок *опосередковано* свідчить про рух молекул. Повну теорію броунівського руху дали в 1905 – 1906 рр. Альберт Ейнштейн і Маріан Смолуховський.

Поставимо за мету моделювання ламаної траєкторії руху броунівської частинки.

11.3.1. Комп'ютерна модель броунівського руху

Оскільки координати x та y такої частинки у будь-який довільний момент часу заздалегідь передбачити неможливо, то моделювати їх будемо парами випадкових чисел, які в середовищі електронних таблиць в інтервалі $[0; 1]$ продукує функція СЛЧИС(). Прийmemo до уваги, що всі напрямки руху однаково ймовірні. Саме тому такий рух називають випадковим блуканням. Для того, щоб координати могли набувати як додатних значень, так і від'ємних, випадкові числа мають змінюватись від -1 до $+1$. Такі числа даватиме функція $2 * \text{СЛЧИС}() - 1$ (доведіть!).

Нову координату x_{i+1} частинки будемо знаходити, додаючи до її попередньої координати x_i випадкове число з інтервалу $[-1; 1]$:

$$x_{i+1} = x_i + (2 * \text{СЛЧИС}() - 1).$$

Значення проєкцій окремих послідовних переміщень s_x, s_y отримаємо як різниці між поточними і попередніми координатами частинки: $s_x = x_i - x_{i-1}; s_y = y_i - y_{i-1}$. Ці значення, як і координати x, y будемо зберігати. Крім того, будемо зберігати модулі проєкцій переміщення $|s_x|, |s_y|$ і модуль вектора переміщення $|s| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$.

11.3.2. Обговорення алгоритму роботи з моделлю

1. Створити таблицю за таким зразком

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|-----|-----|-------|-------|---------|---------|-------|
| 1 | x | y | s_x | s_y | $ s_x $ | $ s_y $ | $ s $ |
| 2 | | | | | | | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

2. У першому рядку помістити імена змінних:

- x, y – координати частинки (випадкові числа);
- s_x, s_y – проєкції переміщення s на координатні осі x, y ;
- $|s_x|, |s_y|$ – модулі проєкцій переміщення на ці осі;
- $|s|$ – модуль вектора переміщення;
- для зручності початкові координати частинки прийняти

рівними нулю: $x_0 = 0, y_0 = 0$;

Вміст комірок має бути наступним:

| комірки | формули / числа |
|---------|-------------------|
| A2 | =0 |
| A3 | =A2+(2*СЛЧИС()-1) |
| B2 | =0 |
| B3 | =B2+(2*СЛЧИС()-1) |
| C2 | пуста |
| C3 | =A3-A2 |
| D3 | =ABS(C3) |

3. Комірки E3, F3 і G3 заповнити самостійно.

4. Третій рядок копіювати в наступні 100 рядків, тобто до рядка з номером 102.

5. Побудувати траєкторію руху частинки, тобто графік залежності координати у від координати x.

11.3.3. Обчислювальний експеримент

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|------|-------|-------|-------|---------|---------|------|
| 1 | x | y | s_x | s_y | $ s_x $ | $ s_y $ | s |
| 2 | 0,00 | 0,00 | | | | | |
| 3 | 0,20 | -0,03 | 0,20 | -0,03 | 0,20 | 0,03 | 0,21 |
| 4 | 0,27 | -0,05 | 0,07 | -0,02 | 0,07 | 0,02 | 0,07 |
| 5 | 0,16 | -0,46 | -0,12 | -0,41 | 0,12 | 0,41 | 0,43 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

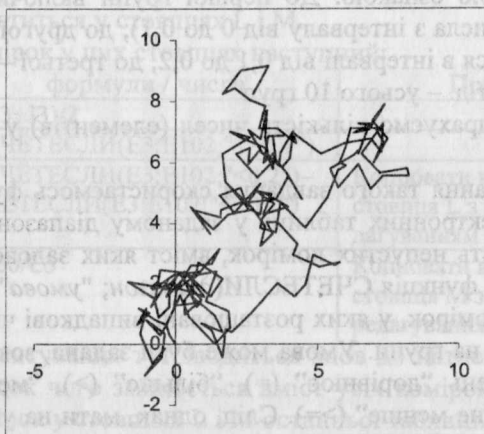


Рис. 11.2

Натискання на клавішу F9 приводить до перерахунку за новими

даними (новими випадковими числами). Відповідно до цього змінюється вигляд траєкторії руху броунівської частинки. Отримувати у такий спосіб картинку будуть нагадувати сюжети з рис. 11.1.

11.3.4. Статистичний аналіз результатів експерименту

Здавалося б, гарна модель, і дає вона правдоподібні результати. Проте це тільки на перший погляд. Результати за моделлю не узгоджуються з тими, що спостерігаються в реальних (натурних) експериментах. Про яке ж неспівпадіння йдеться?

Кожен стовпець нашої таблиці містить випадкові числа, але не всі вони є зручними для дослідження. Так, значення координат x та y лежать в широкому діапазоні і помітно виходять за межі інтервалу від -1 до $+1$, що якраз і не є зручним. Зручнішими для аналізу є значення проєкцій переміщення на осі координат s_x , або s_y , які всі потрапляють у зазначений інтервал. Не менш зручними виявляються модулі цих проєкцій $|s_x|$ і $|s_y|$, адже вони розташовані в іще більш вузькому інтервалі від 0 до $+1$.

То ж виконаємо нескладне *статистичне дослідження* отриманих послідовностей випадкових чисел, якими для визначеності нехай будуть значення $|s_x|$ зі стовпця E. В результаті моделювання у всіх стовпцях таблиці, а отже, й у стовпці E з'являється невпорядкована купа числового матеріалу, що потребує систематизації.

1. Насамперед виконаємо першу і обов'язкову процедуру статистичної обробки даних – їхнє *групування*, тобто розчленування на групи за певною ознакою. До першої групи включимо всі числа, менші за $0,1$ (числа з інтервалу від 0 до $0,1$); до другої – ті, значення яких знаходяться в інтервалі від $0,1$ до $0,2$, до третьої – числа з інтервалу $0,2 - 0,3$ і т.д. – усього 10 груп.

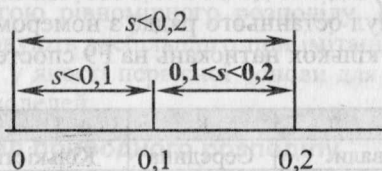
2. Далі підраховуємо кількість чисел (елементів) у кожній із цих десяти груп.

Для виконання такого завдання скористаємось функцією, яка в середовищі електронних таблиць у заданому діапазоні комірок підраховує кількість непустих комірок, вміст яких задовольняє заданій умові. Такою є функція СЧЕТЕСЛИ(*діапазон*; "*умова*"). Тут діапазоном є адреси комірок, у яких розташовані випадкові числа, що їх ми маємо розбити на групи. Умова може бути задана, зокрема, за допомогою відношень "дорівнює" (=), "більше" (>), "менше" (<), "не більше" (<=), "не менше" (>=). Слід, однак, мати на увазі, що умова не може бути складеною, наприклад, не може бути ">5 і <10", вона має бути тільки простою.

Саме тому для підрахунку кількості елементів, які належать інтервалу від 0,1 до 0,2 виявляється неможливим створити, наприклад, конструкцію СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;">0,1;<0,2"), а проблему вирішує конструкція

СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;"<0,2") –
– СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;"<0,1").

Останню формулу ілюструє рисунок



2.2. Створимо ще одну таблицю (рис. 11.3)

| | I | J | K | L | M |
|-----|--------------|----------|-----------|-----------|-------------|
| 1 | Інтер | вали | Середина | Кількість | в інтервалі |
| 2 | від $s \geq$ | до $s <$ | інтервалу | абсолютна | Відносна |
| 3 | 0,0 | 0,1 | 0,05 | 11 | 0,110 |
| 4 | 0,1 | 0,2 | 0,15 | 13 | 0,130 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Рис. 11.3

У стовпцях I та J показані границі інтервалів для кожної з десяти груп (дані у цих стовпцях уведені з клавіатури), стовець K містить середини відповідних інтервалів, проте найбільш цікава й важлива інформація міститься у стовпцях L і M.

Вміст комірок у цих стовпцях наступний:

| комірки | формули / числа | Примітки |
|---------|--|--|
| K3 | $= (I3+J3)/2$ | |
| L3 | $= \text{СЧЕТЕСЛИ}(E3:E102;"<=0,1")$ | |
| L4 | $= \text{СЧЕТЕСЛИ}(E3:E102;"<0,2") - \text{СЧЕТЕСЛИ}(E3:E102;"<=0,1")$ | Копіювати в решту комірок стовпця L з наступним редагуванням |
| M3 | $= 100/C3$ | Копіювати в решту комірок стовпця M з наступним редагуванням |

Експериментування тут зводиться знов до натискання на клавішу F9, внаслідок чого змінюється вміст усіх комірок обох таблиць, зокрема, і комірок у стовпцях L і M останньої таблиці.

3. Уміст стовпця L, нажаль, не дозволяє зробити ніяких висновків про яку-небудь певну закономірність у розподілі випадкових

величин у групах. Той самий результат при бажанні можна побачити і на гістограмі, побудованій за даними стовпця L.

Тут зауважимо, що *математична статистика вивчає численні сукупності елементів, і чим більше елементів містить сукупність, тим більш надійними й адекватними виявляються результати статистичного дослідження*. Саме тому кількість рядків (елементів) у всіх стовпцях А – G попередньої таблиці 11.2 доцільно збільшити, як показують досліди, від 100 до хоч би 5000. Як завжди, здійснимо це копіюванням формул останнього рядка з номером 102 до рядка з номером 5002. Після кількох натискань на F9 спостерігаємо таке чи подібне:

| | I | J | K | L | M |
|----|--------------|----------|-----------|-----------------------|----------|
| 1 | Інтервали | | Середина | Кількість в інтервалі | |
| 2 | від $s \geq$ | до $s <$ | інтервалу | абсолютна | відносна |
| 3 | 0,00 | 0,10 | 0,05 | 535 | 0,107 |
| 4 | 0,10 | 0,20 | 0,15 | 497 | 0,099 |
| 5 | 0,20 | 0,30 | 0,25 | 480 | 0,096 |
| 6 | 0,30 | 0,40 | 0,35 | 519 | 0,104 |
| 7 | 0,40 | 0,50 | 0,45 | 480 | 0,096 |
| 8 | 0,50 | 0,60 | 0,55 | 519 | 0,104 |
| 9 | 0,60 | 0,70 | 0,65 | 522 | 0,104 |
| 10 | 0,70 | 0,80 | 0,75 | 470 | 0,094 |
| 11 | 0,80 | 0,90 | 0,85 | 459 | 0,092 |
| 12 | 0,90 | 1,00 | 0,95 | 519 | 0,104 |

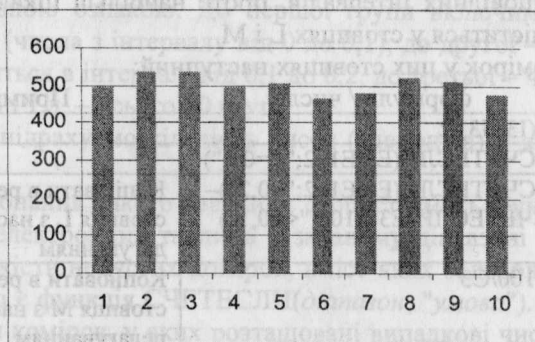


Рис. 11.4

Тепер остання таблиця має поновлений вигляд, і нарешті ця таблиця разом з відповідною гістограмою (рис. 11.4) дозволяють встановити, що розподіл випадкових чисел за визначеними десятима

групами є *рівномірним*. Таким самим рівномірним є розподіл випадкових чисел у всіх решта стовпцях попередньої таблиці (координат, проекцій переміщення, модулів цих проекцій тощо).

Отже, маємо зробити висновок, що *випадкові числа, які продукує комп'ютер, є рівномірно розподіленими, тобто будь-якому значенню випадкової величини відповідає одна й та сама ймовірність появи*.

У природі зазвичай усяка мінливість розподіляється нерівномірно, і, скоріш за все, не існує фізичних процесів, які б могли бути описані за допомогою рівномірного розподілу. На практиці такий розподіл використовують здебільшого при імітаційному моделюванні складних систем у якості первісної основи для отримання потрібних статистичних моделей.

11.3.5. Приклад природного розподілу

В кабінеті шкільного лікаря зберігаються медичні карти кожного школяра, де міститься чимало медичних і фізіологічних показників. Серед цих показників розглянемо один – зріст. Візьмемо навмання групу учнів деякого класу, і зріст (у сантиметрах) кожного з 30 школярів упишемо до таблиці, але не за абеткою, а задалегідь впорядкувавши.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 143 | 150 | 155 | 158 | 163 |
| 144 | 151 | 155 | 160 | 164 |
| 146 | 152 | 156 | 161 | 166 |
| 147 | 153 | 156 | 161 | 168 |
| 148 | 153 | 156 | 161 | 169 |
| 150 | 155 | 157 | 162 | 171 |

Рис. 11.5

Виконаємо поділ отриманих даних на групи шириною 5 см: перша від 140 до 144 см, друга від 145 до 149 см і т.д.

Примітка. Задавати інтервали рекомендують так, щоб їхня кількість k була не меншою 6 і не більшою 20.

Тепер заповнимо наступну таблицю:

| | А | В | С | Д | Е |
|---|--------------|----------|-----------|-----------|-------------|
| 1 | Інтервали | | Середина | Кількість | в інтервалі |
| 2 | від $s \geq$ | до $s <$ | інтервалу | абсолютна | відносна |
| 3 | 140 | 144 | 142 | 2 | 0,067 |
| 4 | 145 | 149 | 147 | 3 | 0,100 |
| 5 | 150 | 154 | 152 | 6 | 0,200 |
| 6 | 155 | 159 | 157 | 8 | 0,267 |
| 7 | 160 | 164 | 162 | 7 | 0,233 |
| 8 | 165 | 169 | 167 | 3 | 0,100 |
| 9 | 170 | 174 | 172 | 1 | 0,033 |

Рис. 11.6.

Комірки у стовпцях А, В, С таблиці заповнюються з клавіатури згідно з даними таблиці за рис. 11.5. Стовпець D можна заповнювати або за формулами стовпця L таблиці з рис. 11.3, або простим підрахунком за таблицею на рис. 11.5 завдяки малій кількості елементів у ній. Формули у комірках стовпця Е не повинні викликати утруднень.

Будуючи гістограму за даними стовпця D таблиці 11.6, отримуємо наступний розподіл росту за сьома визначеними групами (рис.11.6 а). Цей природний розподіл докорінно відрізняється від рівномірного, він є ближчим до так званого *нормального* розподілу або розподілу Гауса. Такий розподіл є так само ідеалізованим як і розглянутий перед цим рівномірний, функція цього розподілу має вигляд симетричної дзвіноподібної кривої, що асимптотично наближається до вісі абсцис (рис. 11.6б).

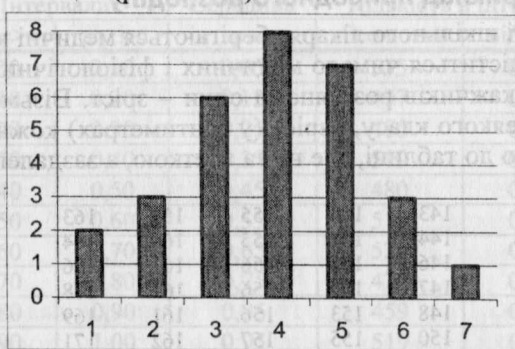


Рис. 11.6а

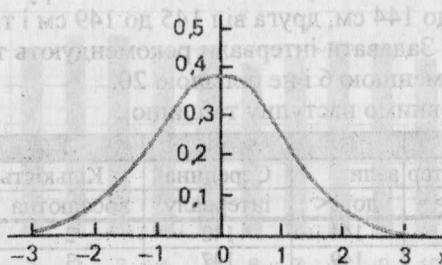


Рис. 11.6б

Значимо основні властивості такого розподілу:

– випадкові величини групуються навколо деякого числа і чим меншим за абсолютною величиною є відхилення від цього числа, тим частіше це число з'являється, тобто малі відхилення більш імо-

вірні, аніж великі;

– однакові за величиною, але протилежні за знаком відхилення виникають однаково часто;

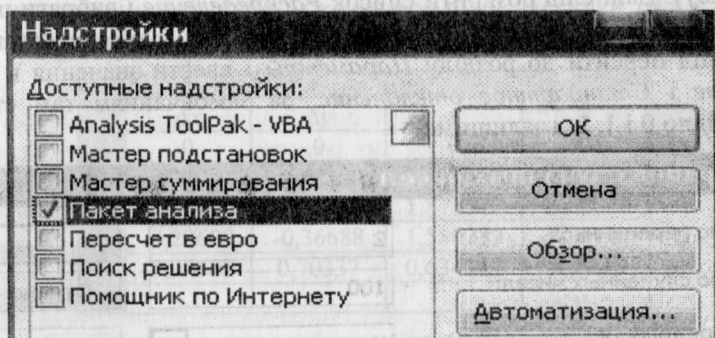
– максимальне значення випадкових відхилень не перебільшує деякої величини, яка зветься граничною похибкою.

11.4. Моделювання за допомогою нормально розподілених випадкових чисел

11.4.1. Як отримати такий розподіл в середовищі електронних таблиць?

Електронні таблиці дозволяють генерувати не тільки рівномірно розподілені випадкові числа, але й випадкові числа за деякими іншими найчастіше вживаними розподілами. Зокрема, в Microsoft Excel це здійснюється у наступний спосіб.

1. Виконати команду *Сервис* → *Надстройки*.
2. Після появи діалогового вікна *Надстройки* встановити прапорець послуги *Пакет аналіза*.



3. Якщо в діалоговому вікні *Настройки* така послуга відсутня, то це означає, що вона не була встановлена при інсталяції і її слід встановити. Після повернення до робочого аркушу на екрані не відбудеться ніяких змін, але в меню *Сервис* з'явиться нова команда *Анализ данных*.

Щоб встановити параметри випадкових величин, виконаємо команду *Сервис* → *Анализ данных*. З'явиться діалогове вікно *Анализ данных*. У списку *Инструменты анализа* виберіть послугу *Генерация случайных чисел*.

Анализ данных

Инструменты анализа

Корреляция
Ковариация
Описательная статистика
Экспоненциальное сглаживание
Двухвыборочный F-тест для дисперсии
Анализ Фурье
Гистограмма
Скользющее среднее
Генерация случайных чисел
Ранг и перцентиль

OK

Отмена

Справка

У текстовому полі *Число переменных* уведемо кількість стовпців, що їх ми хочемо заповнити, а в полі *Число случайных чисел* – кількість випадкових чисел, що мають розміститися в кожному стовпці. Уведемо відповідно числа 2 і 100 (два стовпця по 100 чисел в кожному). Далі слід розкрити список *Распределение* і вибрати потрібний розподіл (в нашому випадку розподіл має бути нормальним). Далі слід перейти до розділу *Параметры* і ввести значення в поля *Среднее* і *Стандартное отклонение*. За замовчанням там стоять відповідно 0 і 1, їх і залишимо.

Генерация случайных чисел

Число переменных:

2

OK

Число случайных чисел:

100

Отмена

Распределение:

Нормальное

Справка

Параметры

Среднее =

0

Стандартное отклонение =

1

Случайное наименование:

Отримані у такий спосіб випадкові числа мають нормальний розподіл, але на відміну від чисел, що їх продукує функція СЛЧИС(), натискання на клавішу F9 не змінює поточний набір

випадкових чисел. Щоб отримати новий набір таких чисел, слід знов повторити команди *Сервис* → *Анализ данных* і всі наступні, а цей новий набір з'явиться на новому аркуші даної книги. Таким чином, якщо раніше для виконання, скажімо, п'яти варіантів обчислювального експерименту треба було п'ять разів натискати на F9, то тепер з цією метою необхідно п'ять разів повторити всю описану вище процедуру.

11.4.2. Картини броунівського руху з нормальним розподілом окремих випадкових переміщень

Отже, створимо два стовпця нормально розподілених випадкових чисел по сто чисел у кожному. Ці числа моделюватимуть переміщення Δx і Δy броунівської частинки. Координати x_i та y_i частинки на будь-якому проміжку часу з номером i , як і раніше, знайдемо так:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x; \quad y_i = y_{i-1} + \Delta y.$$

Ці координати розташуємо у двох наступних стовпцях таблиці.

Наведемо можливий варіант заповнення такої таблиці і за даними стовпців x і y побудуємо траєкторію руху частинки, яка є графіком залежності $y = y(x)$.

| | A | B | C | D |
|-----|------------|------------|----------|----------|
| 1 | Δx | Δy | x | y |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1,60072 | -1,45557 | 1,60072 | -1,45557 |
| 4 | 0,275593 | -0,42472 | 1,876313 | -1,88029 |
| 5 | -0,29607 | -0,36688 | 1,580239 | -2,24717 |
| 6 | -0,94592 | 0,70337 | 0,634317 | -1,5438 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

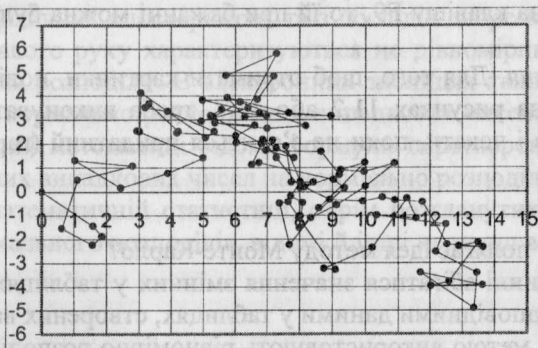


Рис. 11. 7а

Повторюючи процедуру отримання нормально розподілених випадкових чисел (переміщень Δx і Δy), у нових таблицях можна так само побудувати стовпці C і D для поточних координат x та y і вивести на екран нові траєкторії.

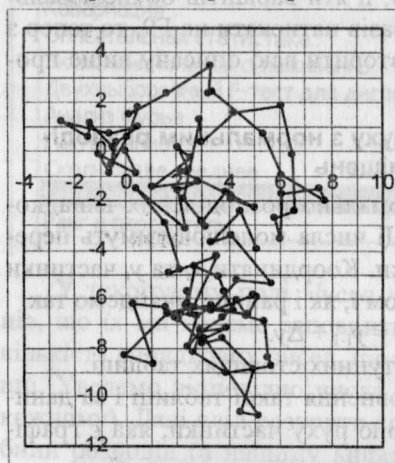


Рис. 11. 7б

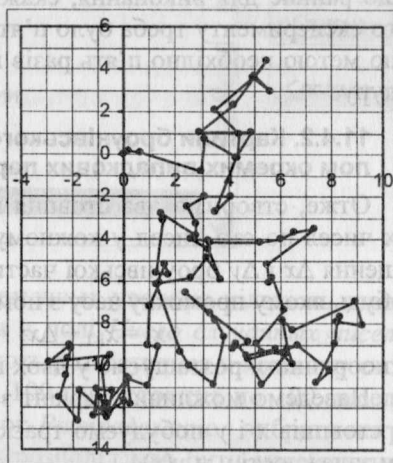


Рис. 11. 7в

Картини на трьох останніх рисунках знов нагадують сюжети з рис. 11.1. Візуальне порівняння цих рисунків з рис. 11.2 не виявляє суттєвої різниці між ними. Тому можна констатувати, що для ілюстрування броунівського руху генерування випадкових чисел за рівномірним або нормальним розподілом не є вирішальним фактором. Але оскільки функція для рівномірного розподілу СЛЧИС() реалізується простіше і здатна до автоматичного перерахунку всього лише одним натисканням на клавішу F9, то їй при бажанні можна було б віддати перевагу.

Зауваження. Для того, щоб отримати картинки, подібні до тих, що наведені на рисунках 11.2 або 11.7, треба виконувати декілька експериментів і чекати, поки не з'явиться придатний (гарний) рисунок.

Вправи.

1. У чому полягає ідея методу Монте-Карло?
2. Чи повинні збігатися значення змінних у таблицях цієї глави посібника з відповідними даними у таблицях, створених вами?
3. З якою метою використовують рівномірно розподілені випадкові числа?

4. У яких випадках вдаються до використання нормально розподілених випадкових чисел?

5. Запропонуйте функцію для отримання в електронних таблицях однозначних цілих випадкових чисел в інтервалі $[-9; 9]$ за допомогою функції СЛЧИС().

6. Побудуйте полігон частот і відносних частот для значень зі стовпців С і D таблиці 11.6.

Для побудови полігону в прямокутній системі координат на осі абсцис у довільно обраному масштабі відкладають значення аргументу, а на осі ординат також у довільно обраному масштабі – значення частот чи відносних частот. Масштаб обирають такий, щоб була забезпечена потрібна наочність, і щоб рисунок мав бажаний розмір. Далі в цій системі координат будують точки, координатами яких є пари відповідних чисел з варіаційного ряду. Отримані точки послідовно сполучають прямими відрізками.

7. Виконайте статистичне дослідження даних зі стовпця G таблиці 11.6.

Висновки

1. Випадкові числа, які продукує комп'ютер, зокрема в середовищі електронних таблиць за допомогою функції СЛЧИС(), є рівномірно розподіленими, тобто будь-якому значенню випадкової величини відповідає одна й та сама ймовірність. На практиці такий розподіл використовують при комп'ютерному моделюванні складних систем у якості основи при побудові стохастичних моделей.

2. Побудована нами модель броунівського руху із застосуванням рівномірно розподілених випадкових чисел виявилася вдалою тільки на перший погляд, тільки на якісному рівні. Адже з опрацювання результатів фізичних спостережень та з дослідів добре відомо, що особливості такого руху характеризуються не рівномірним, а *нормальним* законом розподілу. В електронних таблицях також є засоби генерування нормально розподілених випадкових чисел. До речі, в обчислювальній математиці відомі формули перетворення рівномірно розподілених випадкових чисел на нормально розподілені.

3. В математичній статистиці, окрім розглянутих тут рівномірного і нормального розподілів, відомі й інші не менш важливі.

Глава 12. Задача дослідження операцій

12.1. Вступ

У найрізноманітніших галузях людської діяльності – організації промислового чи сільськогосподарського виробництва, на транспорті, в освіті, охороні здоров'я, телефонному й поштовому зв'язку, торгівлі й громадському харчуванні – виникають задачі, схожі за постановкою. Вони мають ряд спільних ознак і розв'язуються схожими методами. Специфіка цих задач полягає в такому: якщо деякий захід (найчастіше організаційний) можна здійснити різними способами, то при цьому виникає необхідність у прийнятті рішення, який із цих способів слід обрати. Кожний варіант має певні переваги й недоліки, а внаслідок складних обставин не зовсім ясно, який з усіх можливих (і чому саме він) кращий за інші. Сьогодні з цією метою застосовуються математичні підходи, результати яких мають допомогти відповідальним особам зробити *науково обґрунтований вибір*.

Уперше наукові методи обґрунтування рішень були застосовані під час другої світової війни. Вони засновувалися на математичних розрахунках і показували можливі результати різних варіантів військових операцій. Тому всі ці методи отримали назву *дослідження операцій*. Їх вивчає спеціальний розділ математики.

Згодом стало зрозуміло, що *операції як послідовність цілеспрямованих дій, об'єднаних спільним задумом і спрямованих на досягнення певної цілі*, мають місце не лише у військовій справі, а й у багатьох інших галузях людської діяльності.

Прийняття рішення безпосередньо не входить у дослідження операцій, його здійснює особа, котрій офіційно надається це право.

Застосування швидкодіючих ЕОМ привело до стрімкого росту ефективності досліджень і значного розширення кола таких задач.

12.2. Постановка задачі

Проілюструємо застосування методу Монте-Карло на прикладі розв'язання задачі пошуку оптимальної стратегії обслуговування виробничого устаткування на основі дослідження операцій.

На виробничій дільниці було помічено, що відмови устаткування найчастіше відбувається внаслідок виходу з ладу одного з чотирьох потужних транзисторів, які входять до електронного пристрою управління. При відмові обладнання одразу вживаються ремонтні заходи. На виклик механіка, виявлення зіпсованого транзистора та його заміну йде 1 година, і протягом цього часу дільниця продукцію не випускає. Будемо вважати, що за кожну годину простою підпри-

емство терпить збиток 100 у.о., вартість одного транзистора прийме-мо рівною 5 у.о.

Необхідно оцінити збитки, що їх несе підприємство протягом року внаслідок відмов обладнання, та відшукати шляхи зменшення економічних втрат, пов'язаних з такими відмовами.

Якщо устаткування експлуатується у дві зміни (16 годин на добу), а в одному році 52 тижні по 5 робочих днів, то на 1 рік час, що його треба буде моделювати, становитиме $16 \cdot 52 \approx 4200$ годин.

Строки безвідмовної роботи кожного з транзисторів є випадковими величинами, тому використання будь-яких точних формул тут втрачає сенс. Для аналізу проблеми доцільно скористатися імітаційним моделюванням і для розігрування означених вище випадкових величин застосувати метод Монте-Карло. При моделюванні випадкових величин – строків безвідмовної роботи кожного з транзисторів необхідно знати їх *реальний розподіл*, який визначають на основі дослідних даних, одержуваних шляхом проведення спеціально спланованих натурних експериментів.

12.3. Обговорення алгоритму розв'язування задачі

Розглянемо основні етапи розв'язання поставленої задачі.

У лабораторії підприємства було здійснене випробування великої партії (500 шт.) транзисторів необхідного типу. Результати цього випробування подані в таблиці на рис. 12.1, де наводиться розподіл строків безвідмовної роботи транзисторів.

| № | Години роботи | | Відмов | Разом | Відносна частота відмов |
|---|---------------|------|--------|-------|-------------------------|
| | від | до | | | |
| 0 | 0 | 200 | 0 | 0 | 0,000 |
| 1 | 201 | 400 | 4 | 4 | 0,008 |
| 2 | 401 | 600 | 41 | 45 | 0,090 |
| 3 | 601 | 800 | 92 | 137 | 0,274 |
| 4 | 801 | 1000 | 173 | 310 | 0,620 |
| 5 | 1001 | 1200 | 151 | 461 | 0,922 |
| 6 | 1201 | 1400 | 35 | 496 | 0,992 |
| 7 | 1401 | 1600 | 4 | 500 | 1,000 |

Рис. 12.1

1. З таблиці видно, що реальні строки безвідмовної роботи транзисторів можуть набувати значень від 201 до 1600 годин.

2. За даними цієї таблиці побудуємо криву розподілу відносних частот (ймовірностей) відмов транзисторів (рис. 12.2).

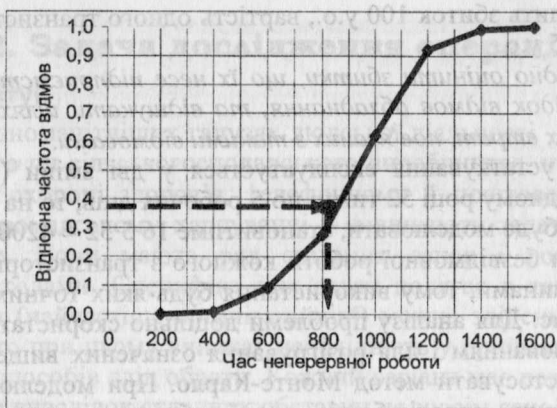


Рис. 12.2

На вісі абсцис відкладені значення моментів виходу транзисторів із ладу, а на вісі ординат – відносні частоти відмов.

Засобами електронних таблиць ламану лінію графіка можна було б згладити, проте для спрощення подальшої роботи ми залишимо саме ламану. До того ж, від даного методу не вимагається високої точності.

3. Будемо моделювати час, через який відбуватимуться відмови обладнання протягом року (4200 годин).

Можливий строк роботи кожного окремого транзистора визначатимемо за допомогою генератора випадкових чисел та кривої розподілу.

За відсутності комп'ютера звичайно роблять так:

3.1. Криву розподілу креслять на аркуші міліметрового паперу достатньо великого розміру, а випадкові числа беруть із таблиць.

3.2. На вісі ординат обирають точку, що відповідає випадковому числу, і з неї проводять горизонтальну лінію до перетину з кривою розподілу.

3.3. З цієї точки опускають перпендикуляр на вісь абсцис і одержане там число приймають за розіграну випадкову величину із законом розподілу, що відповідає експериментальним даним.

3.4. Кроки 3.2 і 3.3 повторюють для всіх випадкових чисел у порядку їх отримання до тих пір, поки сумарна тривалість роботи кожного транзистора з урахуванням всіх замін не стане більшою за 4200 годин.

12.4. Побудова математичної моделі

З метою автоматизувати цю нецікаву й стомлюючу роботу, доручивши її комп'ютеру, проведемо деякі міркування з використанням рис. 2.

1. Одержана крива розподілу складається з $i = 7$ прямих відрізків з різними кутовими коефіцієнтами. Нам потрібно, щоб за випадковим числом y_i (відносна частота відмов) автоматично обчислювалося відповідне значення x – момент відмови. Це значення може знаходитись у будь-якому із семи *однакових* інтервалів на вісі абсцис. Проте випадкові числа y_i , які будуть генеруватися комп'ютером, потраплятимуть в один із семи *неоднакових* відповідних інтервалів на вісі ординат, оскільки вся крива розподілу *в цілому* не є лінійною функцією. Тому й розміри інтервалів на вісі ординат будуть різними. Отже, обчислення x мають виконуватися за різними даними в залежності від номера інтервалу. Ось чому кожного разу, одержуючи випадкове число y , необхідно буде виявляти, якому інтервалу з рис. 2 воно належить.

2. Кожен із семи елементів ламаної є відрізком прямої, що проходить через три точки згідно рівняння

$$\frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 7) \quad (1)$$

де $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$ – координати початку та кінця i -го відрізка;

x, y – поточні координати, $x \in [x_i, x_{i+1}[$; $y \in [y_i, y_{i+1}[$.

Розв'язуючи рівняння (1) відносно x , одержимо:

$$x = \frac{y - y_i}{k_i} + x_i, \quad (2)$$

де $k_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ – кутовий коефіцієнт відрізка з номером i . (3)

3. Маючи кутові коефіцієнти k_i та обираючи в якості змінної y_i випадкові числа з проміжку $[0; 1]$, можна за допомогою рівняння (2) знайти відповідні значення змінної x – часів безвідмовної роботи обладнання.

12.5. Обчислювальний експеримент

Зважаючи на специфіку цієї задачі, вхідні дані, таблиці й діаграми пропонуємо розташувати дещо інакше, ніж при роботі з попередніми моделями. Зокрема, вигляд перших шести рядків буде таким:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|--|---|---|---|---|-----|
| 1 | ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ | | | | | |
| 2 | Втрати від 1 год. простою обладнання - | | | | | 100 |
| 3 | Вартість 1 транзистора - | | | | | 5 |
| 4 | Кількість випробуваних транзисторів, N - | | | | | 500 |
| 5 | Крок нарощування часу, год., h - | | | | | 200 |
| 6 | | | | | | |

1. На початку роботи перейдіть в режим ручного управління обрахунками. Зокрема, в MS Excel це робиться так: *Сервіс* → *Параметри* → *Вычисления*. Далі користуйтеся клавішею F9.

У перших п'яти рядках помістимо заголовки та вхідні дані.

Шостий рядок залишимо порожнім, він буде відокремлювати умову від наступних робочих таблиць.

Наступні рядки 7–19 містять Таблицю 1.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--|---------------|-------|--------|-------|----------------|
| 7 | Таблиця 1. Розподіл строків роботи транзисторів | | | | | |
| 8 | | Години роботи | | Відмов | Разом | Відносна |
| 9 | | від | до | | | частота відмов |
| 10 | 0 | 0 | 200 | 0 | 0 | 0,000 |
| 11 | 1 | 201 | 400 | 4 | 4 | 0,008 |
| 12 | 2 | 401 | 600 | 41 | 45 | 0,090 |
| 13 | 3 | 601 | 800 | 92 | 137 | 0,274 |
| 14 | 4 | 801 | 1000 | 173 | 310 | 0,620 |
| 15 | 5 | 1001 | 1200 | 151 | 461 | 0,922 |
| 16 | 6 | 1201 | 1400 | 35 | 496 | 0,992 |
| 17 | 7 | 1401 | 1600 | 4 | 500 | 1,000 |
| 18 | i | | x_i | | n_i | y_i |

Внесемо уточнення.

1.1. Комірки 11-го рядка разом з групою D11–D18 заповнюються з клавіатури згідно Таблиці 1. Винятком є C11 і F11:

| комірки | формули |
|---------|-------------|
| C11 | =\$F\$5 |
| F11 | =E11/\$F\$4 |

1.2. Вміст комірок 12-го рядка має бути таким:

| комірки | формули | примітки |
|---------|-------------|---------------------|
| A12 | =A11+1 | копіювати в A13–A18 |
| B12 | =C11+1 | копіювати в B13–B18 |
| C12 | =C11+\$F\$5 | копіювати в C13–C18 |
| E12 | =D12+E11 | копіювати в E13–E18 |
| F12 | =E12/\$F\$4 | копіювати в F13–F18 |

2. За даними комірок C11–C18 (аргументи або в термінології таблиць – категорії) і F11–F18 (значення) побудуємо криву розподілу

відносних частот (ймовірностей) виходу з ладу транзисторів у відповідності з рис. 2. Розташуємо цю діаграму праворуч від умови і таблиці 1 орієнтовно в області комірок H2–M20.

3. Нижче, у рядках 21–32 створимо дві допоміжні таблиці (Таблицю 2 і Таблицю 3). В Таблиці 2 помістимо значення кутових коефіцієнтів k_i , що будуть обчислюватись згідно виразу

$$k_i = (y_{i+1} - y_i) / h = n_i / (h \cdot N),$$

а в Таблиці 3 розташуємо рівномірно розподілені псевдовипадкові числа y_i з інтервалу [0, 1], генеровані спеціальною функцією, вбудованою в будь-які електронні таблиці.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|---|-----------------------|-------------------------|---|--|------------|------------|------------|------------|
| 21 | Таблиця 2. Визначення | | | | | | | | |
| 22 | кутових коефіцієнтів k_i | | | | | | | | |
| 23 | $k_i = (y_{i+1} - y_i) / h = n_i / (h \cdot N)$ | | | | Таблиця 3. Випадкові числа y_i | | | | |
| 24 | | i | k_i | | | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й |
| 25 | | 0 | 0,00000 | | | 0,530 | 0,603 | 0,038 | 0,407 |
| 26 | | 1 | 0,00004 | | | 0,260 | 0,937 | 0,310 | 0,911 |
| 27 | | 2 | 0,00041 | | | 0,195 | 0,810 | 0,140 | 0,807 |
| 28 | | 3 | 0,00092 | | | 0,312 | 0,891 | 0,704 | 0,140 |
| 29 | | 4 | 0,00173 | | | 0,564 | 0,395 | 0,049 | 0,177 |
| 30 | | 5 | 0,00151 | | | 0,294 | 0,823 | 0,598 | 0,849 |
| 31 | | 6 | 0,00035 | | | 0,779 | 0,378 | 0,994 | 0,034 |
| 32 | | 7 | 0,00004 | | | 0,139 | 0,907 | 0,302 | 0,972 |

Всі комірки Таблиці 3 заповнюються однаково:

| комірка | формула | примітки |
|---------|----------|---------------------|
| F25 | =СЛЧИС() | копіювати в F25–I32 |

4. Будемо моделювати час, через який відбуватимуться відмови обладнання протягом року. Відповідну до цього Таблицю 4 помістимо в рядки 34–45 (комірки з області A34–I45):

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|-------------|--------|-------------|
| 34 | Таблиця 4. Моделювання тривалості роботи обладнання | | | | | | | | |
| 35 | № | 1-й транзист. | 2-й транзист. | 3-й транзист. | 4-й транзист. | | | | |
| 36 | заміни | Години | Всього | Години | Всього | Години | Всього | Години | Всього |
| 37 | | роботи | годин | роботи | годин | роботи | годин | роботи | годин |
| 38 | 0 | 948 | 948 | 990 | 990 | 474 | 474 | 877 | 877 |
| 39 | 1 | 785 | 1733 | 1242 | 2232 | 821 | 1295 | 1193 | 2070 |
| 40 | 2 | 714 | 2447 | 1126 | 3357 | 655 | 1950 | 1124 | 3194 |
| 41 | 3 | 822 | 3269 | 1180 | 4537 | 1056 | 3006 | 655 | 3849 |
| 42 | 4 | 968 | 4236 | 870 | 0 | 501 | 3506 | 695 | 4543 |
| 43 | 5 | 812 | 0 | 1135 | 0 | 987 | 4494 | 1152 | 0 |
| 44 | 6 | 1105 | 0 | 860 | 0 | 1448 | 0 | 464 | 0 |
| 45 | 7 | 653 | 0 | 1190 | 0 | 816 | 0 | 1342 | 0 |

4.1. Стовпець А заповнюється зовсім просто:

| комірки | формули / числа |
|---------|--------------------------------------|
| A38 | 0 |
| A39 | =A38+1 (копіювати у комірки A40-A45) |

4.2. Складніше зі стовпцем В (D, F, H). Саме в його комірках реалізується автоматичне обчислення строків безперервної роботи першого (другого, третього, четвертого) транзистора, тобто інтервалів часу між його послідовними замінами. Тут перевіряється, якому із семи інтервалів належить випадкове число u_1 (комірка F25), і у відповідності до цього обчислюється час безперервної роботи транзистора за формулою (2):

| комірка | формула |
|---------|---|
| B38 | =F\$5+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$11;F25<F\$12);(F25-F\$12)/\$C\$26+\$C\$11)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$12;F25<F\$13);(F25-F\$13)/\$C\$27+\$C\$12)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$13;F25<F\$14);(F25-F\$14)/\$C\$28+\$C\$13)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$14;F25<F\$15);(F25-F\$15)/\$C\$29+\$C\$14)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$15;F25<F\$16);(F25-F\$16)/\$C\$30+\$C\$15)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$16;F25<F\$17);(F25-F\$17)/\$C\$31+\$C\$16)+ ЕСЛИ(И(F25>=F\$17;F25<F\$18);(F25-F\$18)/\$C\$32+\$C\$17) |

Примітка. Для прискорення набору цієї формули можна, набравши вираз першої функції ЯКЦО (“ЕСЛИ”) і знак додавання, скопіювати їх шість разів і виконати необхідне редагування всього виразу. Аналогічно можна діяти при заповненні решти комірок цього стовпця. Після заповнення стовпця В всі його формули (комірки) слід помітити і одночасно скопіювати у стовпці D, F і H. Далі слід виконати необхідне редагування.

4.3. У стовпцях С, Е, G, I для кожного з чотирьох транзисторів, по-перше, здійснюється нагромадження загального часу роботи з урахуванням усіх виконаних замін і, по-друге, при переході цього часу через 4200 год. значення його обнуляється. Комірки С38, Е38, G38, I38 містять посилання на своїх сусідок зліва (замін іще не було):

| комірки | формули |
|---------|---------|
| C38 | =B38 |
| E38 | =D38 |
| G38 | =F38 |
| I38 | =H38 |

Формули в С39, Е39, G39, I39 мають вигляд:

| комірки | формули |
|---------|--|
| C39 | =ЕСЛИ(ИЛИ(И(C38<5800;C38>4200);C38=0);0;C38+B39) |
| E39 | =ЕСЛИ(ИЛИ(И(E38<5800;E38>4200);E38=0);0;E38+D39) |
| G39 | =ЕСЛИ(ИЛИ(И(G38<5800;G38>4200);G38=0);0;G38+F39) |
| I39 | =ЕСЛИ(ИЛИ(И(I38<5800;I38>4200);I38=0);0;I38+H39) |

Кожна з цих формул має копіюватись у решту комірок свого стовпця.

Примітка. При аналізі вмісту комірки C39 може скластися думка, що логічна операція АБО, до складу якої входить перевірка умови $C38 = 0$, зайва (в C38 завжди буде число, більше за 200). Це ж саме стосується і комірок E39, G39 та I39. Але як же тоді в декількох останніх комірках згаданих стовпців могли б з'явитись нулі? Тим більше, що кількість нульових комірок заздалегідь невідома.

Вправа

1. Прокоментуйте рядок:

=ЕСЛИ(ИЛИ(И(C38<5800;C38>4200);C38=0);0;C38+B39)

2. З яких міркувань, на вашу думку, з'явилось верхнє обмеження 5800 (4200 + 1600)?

4.4. З Таблиці 4 видно, що 2-й транзистор набере більше, ніж 4200 годин роботи після третьої заміни, 1-й і 4-й транзистори – після четвертої заміни, а 3-й прийдеться міняти п'ять разів. Тільки після всіх цих замін загальний час роботи кожного транзистора перебільшить 4200 годин, тобто чергові відмови обладнання відбудуться вже у наступному році.

5. Для більшої наочності дані про кількість заміни кожного транзистора подамо у підсумковій Таблиці 5.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--|--------------------------------|---------------|-------------|-------------|---|
| 47 | Таблиця 5. Кількість заміни кожного транзистора | | | | | |
| 48 | | № | Кількість | | | |
| 49 | | транзист. | замін | | | |
| 50 | | 1 | 4 | | | |
| 51 | | 2 | 3 | | | |
| 52 | | 3 | 5 | | | |
| 53 | | 4 | 4 | | | |
| 54 | | <i>разом:</i> | 16 | | | |
| 55 | | | | | | |
| 56 | | | | | | |
| 57 | | | | | | |
| 58 | | | | | | |
| 59 | | <i>Втрати від простоев -</i> | | | 1600 | |
| 60 | | <i>Вартість транзисторів -</i> | | | 80 | |
| 61 | | | <i>разом:</i> | 1680 | | |

Розглянемо вміст комірок цієї таблиці.

5.1. Комірки C50–C53 та C54:

| Комірки | формули |
|---------|---------------------------|
| C50 | =СЧЁТЕСЛИ(C38:C45;">0")-1 |
| C51 | =СЧЁТЕСЛИ(E38:E45;">0")-1 |
| C52 | =СЧЁТЕСЛИ(G38:G45;">0")-1 |
| C53 | =СЧЁТЕСЛИ(I38:I45;">0")-1 |
| C54 | =СУММ(C50:C53) |

Після копіювання слід відредагувати формули в C51, C52, C53.

Таким чином, протягом року може відбутися 16 відмов, і стільки ж транзисторів доведеться замінити. То ж підрахуємо втрати:

5.2. Комірки E59–E61:

| комірки | формули |
|---------|----------------|
| E59 | =C54*F2 |
| E60 | =C54*F3 |
| E61 | =СУММ(E59:E60) |

від простоїв $100 \cdot 16 = 1600$ у.о.;

вартість транзисторів $5 \cdot 16 = 80$ у.о.;

разом – 1680 у.о.

5.3. Дані про моменти відмов кожного транзистора зобразимо на діаграмі “Календарний графік ремонтів”.

Примітка. Для успішної побудови цієї діаграми слід виконати наступні дії:

а) виділити комірки B38:B45, D38:D45, F38:F45, H38:H45;

б) вибрати тип діаграми *Линейчатая*;

в) обравши опцію *Исходные данные*, на вкладинці *Диапазон данных* встановити:

Диапазон:

Ряды в: строках

столбцах

а на вкладинці *Ряд* взяти 8 рядів: від Ряд 1 по Ряд 8;

г) на отриманій діаграмі обрати опцію *Формат оси* і у відповідному вікні на вкладці *Шкала* встановити

| | |
|------------------------|------|
| мінімальне значення | 0 |
| максимальне значення | 4200 |
| ціна основних поділок | 500 |
| ціна проміжних поділок | 100 |

Нижче подано результат:



6. Тепер з'ясуємо, чи можна так організувати обслуговування, аби зменшити час простою обладнання, тобто кількість ремонтів. Пропозиція про підвищення надійності транзисторів виключається відразу, оскільки підприємство одержує їх готовими.

6.1. Проаналізуємо, що буде, коли за кожної відмови деякого одного транзистора, механік буде міняти не лише дефектний, а одразу всі чотири, тобто весь блок. Результат такої операції заздалегідь передбачити складно, оскільки *тепер заміна відбуватиметься після відмови транзистора із самим коротким строком служби.*

Якщо вважати, що за нової системи обслуговування будуть використовуватися ті самі транзистори, або точніше, з тими самими строками служби, то з метою одержання необхідної інформації можна скористатися даними з таблиці 4. Однак тепер з неї треба брати дані про строк безвідмовної роботи після 1-го, 2-го і т.д. ремонтів. Той транзистор, у якого цей строк після чергового ремонту буде найменшим, і визначатиме момент наступної відмови (заміни) і, отже, наступного ремонту. Одержані результати зведені до Таблиці 6:

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---|---|-------------|--------|--------|----------|
| 63 | | Таблиця 6. Кількість ремонтів за новою | | | | |
| 64 | | організацією обслуговування – | | | | 5 |
| 65 | | № | № | Строк | Всього | |
| 66 | | ремонту | транзистора | роботи | годин | |
| 67 | | 0 | 3 | 758 | 758 | |
| 68 | | 1 | 3 | 487 | 1244 | |
| 69 | | 2 | 1 | 759 | 2003 | |
| 70 | | 3 | 3 | 670 | 2673 | |
| 71 | | 4 | 4 | 782 | 3455 | |
| 72 | | 5 | 1 | 843 | 4298 | |
| 73 | | 6 | 3 | 460 | 0 | |
| 74 | | 7 | 4 | 407 | 0 | |

6.2. Комірки Таблиці 6 мають такий уміст:

| комірка | формула |
|---------|---|
| C67 | =ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=В38;1; ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=D38;2; ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=F38;3;4))) |

Примітка. Вміст С67 копіювати в решту комірок стовпця.

| комірки | формули | примітки |
|---------|--|---------------------|
| D67 | =МИН(В38;D38;F38;H38) | копіювати в С68–С74 |
| E67 | =МИН(С38;Е38;G38;I38) | |
| E68 | =ЕСЛИ(ИЛИ(И(Е67<5800;Е67>4200); Е67=0);0;Е67+D68) | копіювати в Е69–Е74 |
| F64 | =7-(ЕСЛИ(Е74=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е73=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е72=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е71=0;1;0)) | |

6.2. Підсумкові результати формуємо у такий спосіб:

| | G | H | I | J | K |
|----|---------------------------------------|---|---|---|------|
| 66 | <i>Втрати від простоїв -</i> | | | | 500 |
| 67 | <i>Вартість транзисторів -</i> | | | | 100 |
| 68 | <i>разом:</i> | | | | 600 |
| 69 | | | | | |
| 70 | <i>Ефективність нової організації</i> | | | | |
| 71 | <i>обслуговування -</i> | | | | 2,80 |

Уміст комірок такий:

| комірка | формула |
|---------|----------------|
| K66 | =F64*F2 |
| K67 | =4*F64*F3 |
| K68 | =СУММ(K66;K67) |
| K71 | =E61/K68 |

7.2. З Таблиці 6 видно, що за рік тепер відбудеться п'ять ремонтів. За тих самих умов обчислення втрат це складе:

внаслідок простоїв: $100 \cdot 5 = 500$ у.о.;

вартість транзисторів: $5 \cdot (4 \cdot 5) = 100$ у.о.;

разом – 600 у.о.

Отже, за нової системи обслуговування загальні втрати складатимуть 600 у.о. проти 1680 у.о., тобто *без будь-яких додаткових коштів, а виключно завдяки іншій організації обслуговування втрати можна зменшити більше, ніж у 2 рази.*

Вправа

1. Прокоментуйте формули в комірках C50–C53, C67, D67, E67, E68, F64

2. . Переведіть електронну таблицю з автоматичного на ручний режим перерахунків.

3. Повторюючи багаторазово пп. 4–7 перерахуванням таблиць 2–6 (з новими значеннями випадкових чисел – F9), отримуємо *середнє значення показника ефективності* обслуговування, яке має підтвердити отриманий вище результат.

4. За якої умови ефективність нової організації обслуговування залишиться попередньою, тобто не зміниться?

5. Виконайте від самого початку дослідження за умови, що час моделювання, який становив 4200 годин протягом року, стане величиною змінною. Це дозволить міняти графік роботи підприємства (кількість змін, кількість робочих годин протягом зміни тощо).

Висновки

1. В ході розв'язування задачі було проведено дослідження двох операцій, пов'язаних з організацією технічного обслуговування виробничого обладнання. У першій операції була реалізована схема: “відмова одного елемента → його заміна”, у другій операції схема була змінена: “відмова елемента → заміна всього блоку”. Якщо в якості критерію ефективності технічного обслуговування прийняти відношення виробничих втрат внаслідок відмов за попередньою і новою схемами, то, зрозуміло, особа, котра приймає рішення, надасть перевагу організації ремонтів за другою схемою. Якби критерій ефективності був інший, наприклад, вартість транзисторів, то перевага була б віддана першій схемі.

2. Таким чином, *імітаційне моделювання в управлінській діяльності часто дозволяє відрізнити потенційно продуктивні рішення, що ведуть до успіху, від помилкових.*

Слід, однак, пам'ятати, що будь-яка модель завжди є спрощеним образом об'єкту, і результатам моделювання можна довіряти лише після того, як вони будуть підтверджені хоча б одним із доступних способів: натурними спостереженнями (або ще краще – натурним експериментом), іншими моделями того самого об'єкту, висновками відповідної теорії, бажано перевіреною попередньою практикою і т.п.

3. Привабливість та ефективність методу Монте-Карло полягає в тому, що з допомогою рівномірно розподілених випадкових (псевдо-випадкових) чисел і за відомим законом розподілу можна моделюва-

ти реальні випадкові події. Вся історія цього методу, численні приклади його ефективного застосування на практиці показують, що цей порівняно простий метод є дуже популярним в практиці імітаційного комп'ютерного моделювання.

Цікаво відмітити, що випадкові числа, які з філософської точки зору часто являють собою відображення нашого незнання, кладуться в основу методів, за допомогою яких дослідники пізнають поведінку складних систем.

4. При моделюванні випадкових величин їх реальний розподіл визначають або за певним теоретичним законом методами математичної статистики, або на основі дослідних даних, які одержують шляхом здійснення спеціального натурального експерименту.

5. Основу управління і взагалі всіх "розумних" дій комп'ютера становлять логічні операції. Як ми переконалися, створення таких команд потребує уваги і досвіду.

Післямова

При задовільній простоті та наочності електронних таблиць слід розуміти, що вони є придатним середовищем для моделювання тільки на початковому етапі. Так, вже при спробах розв'язання задач, що передбачають організацію циклів з великою кількістю повторень, звичайне копіювання формул у все нові рядки з метою здійснення нових розрахунків та утримання даних для подальшої побудови графіків (тобто організація великих масивів даних) викликає значні утруднення, позбавляючи користувача змоги простежити динаміку зміни значень будь-якої величини переглядом відповідного стовпця таблиці. Нарешті, електронні таблиці стають зовсім непридатними для задач, що вимагають засобів візуального спостереження динаміки процесу, тобто візуалізації поточних станів об'єкту. Такі задачі традиційно розв'язують з використанням середовищ, створених на основі мов програмування високого рівня. Отже одним із критеріїв необхідності відмови від електронних таблиць як середовища моделювання є ситуація, коли сама таблиця перестає використовуватись для аналізу даних, залишаючи користувачеві можливість лише графічного подання залежностей між даними.

Наприклад, у задачі на побудову траєкторії руху планети навколо Сонця повна таблиця містить близько 400 рядків, і це дійсно утруднює аналіз даних. Розгляд усіх дев'яти планет разом із Сонцем вимагатиме вже близько 90500 рядків, що об'єктивно зумовлює потребу в іншому середовищі.

Ось чому повний курс основ комп'ютерного моделювання після початкового етапу включає ще дві важливі частини: вивчення методів ефективного використання ресурсів комп'ютера для розв'язання задач моделювання та вивчення об'єктно-орієнтованого підходу до моделювання динамічних систем, де засоби і методи спрямовуються на опанування все більш досконалих прийомів роботи, які можна здійснити в середовищі мови програмування. І хоч перехід від електронних таблиць до мови програмування позбавляє зручності миттєвої зміни параметрів моделі та наочності процесу розрахунків, проте надає ряд нових можливостей: 1) групування подібних між собою змінних у масиви; 2) зняття обмежень на кількість ітерацій та послаблення обмежень на кількість змінних; 3) графічна інтерпретація динаміки моделі в процесі розрахунків (а не після їх закінчення, як в електронних таблицях).

Насправді існує можливість, залишаючись у середовищі електронних таблиць, використати вбудовану мову програмування, наприклад, Visual Basic – внутрішню мову електронних таблиць Excel. Такий крок дозволяє об'єднати переваги електронних таблиць та мов програмування високого рівня, проте орієнтація на мову програмування лише однієї фірми неминуче ставить користувача у залежність від стратегії розвитку мови, а ця стратегія обирається фірмами переважно з комерційних міркувань. До того ж значна швидкість еволюції такої мови, відсутність інваріантного (незмінного) ядра та переобтяженість додатковими можливостями підвищують вимоги до техніки і утруднюють вивчення такої мови в школі.

Тому в якості наступного середовища для моделювання ми використовуємо процедурну мову високого рівня. Однією з найпоширеніших мов високого рівня, що користується великою популярністю у системі освіти США, Франції, Німеччини та інших країн, є мова С. Доступність некомерційних та ліцензованих для закладів освіти операційних систем і компіляторів цієї мови дозволяє використовувати їх майже на всіх типах техніки, встановлених у наших школах.

Перехід до моделювання у середовищі мови програмування так само, як і перехід від паперових розрахунків до електронних таблиць, є еволюційним кроком, спрямованим на підвищення ефективності процесу розв'язання задач моделювання.

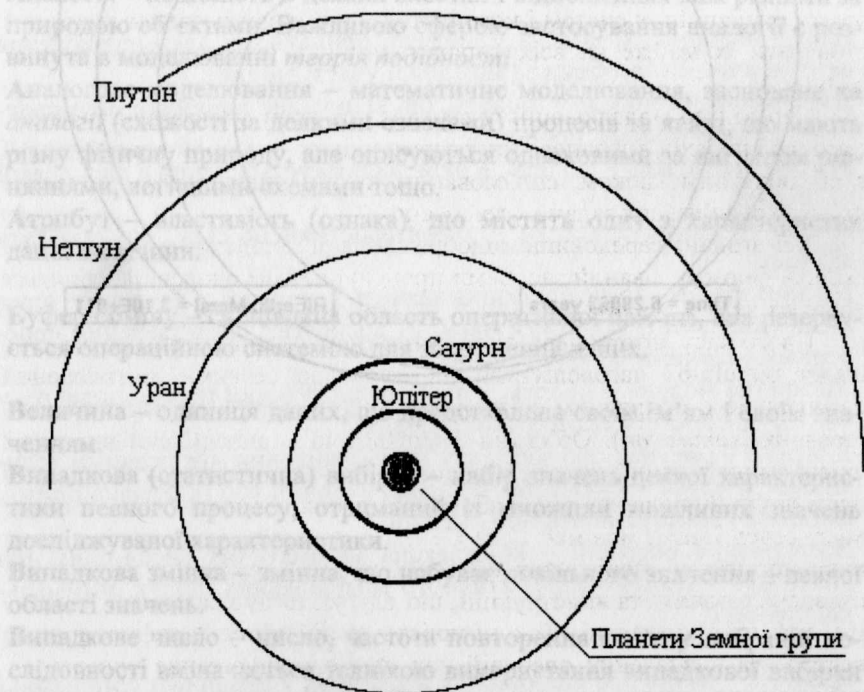
Усі згадані середовища відображають не стільки саму модель, скільки формалізований засобами процедурної методології алгоритм роботи з нею.

Свого часу автори першої об'єктно-орієнтованої мови програмування Simula-67 наголошували на тому, що об'єктно-орієнтоване середовище є природним середовищем для розв'язання задач моделювання (*simulation*). Об'єктно-орієнтований підхід (ООП) вносить якісні зміни у самий процес моделювання, надаючи потужні можливості щодо підвищення рівня абстракції даних. Сьогодні такі можливості серед інших мов має мова С++, яка легко пристосовується для використання у спеціальних областях шляхом створення на її базі складених понять та конструкцій, що слугують будівельними блоками при програмуванні. Так наявність у ній типу “арифметичний вектор” та визначених операцій над ним спрощує запис програми, наближуючи його до алгоритмічного. До того ж об'єктно-орієнтоване середовище дозволяє від групування зазначених вище

параметрів за ознакою спільності фізичного змісту перейти до групування за ознакою “бути планетою”. В такому разі ми розглядатимемо Сонячну систему як набір планет (вважаючи Сонце однією з них), а не як сукупність прискорень, швидкостей, координат тощо.

Групування даних за ознакою “бути планетою” не є прерогативою ООП, воно можливе і в процедурній методології. Але принциповою перевагою ООП є те, що об’єкти не лише зберігають свої дані, а й змінюють їх, обмінюються інформацією, взаємодіють тощо. В даному випадку взаємодія об’єктів типу “планета” є інформаційною моделлю фізичної взаємодії. Об’єктно-орієнтоване середовище моделювання у найбільшій мірі відображує підходи сучасного комп’ютерного моделювання та є ефективним інструментом не лише при навчанні, а й у професійній діяльності.

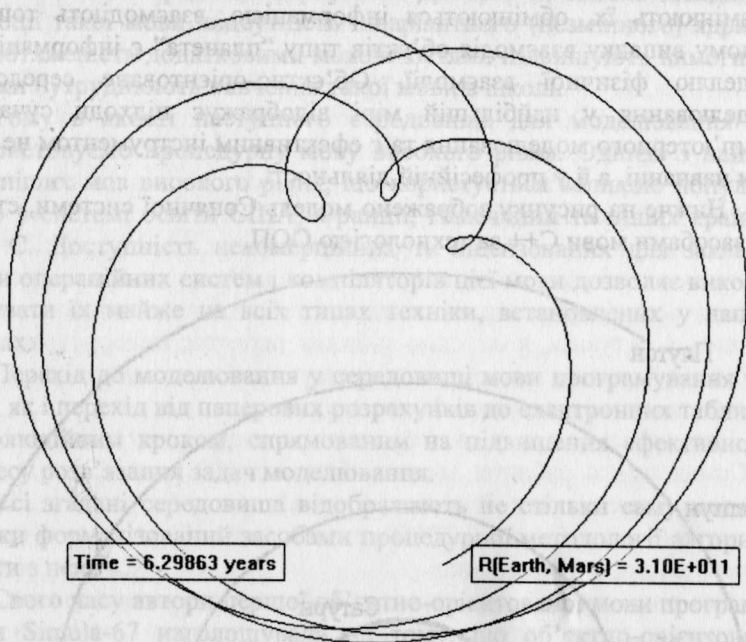
Нижче на рисунку зображено модель Сонячної системи, створену засобами мови C++ за технологією ООП.



Стан Сонячної системи на момент завершення Ураном повного оберту

На наступному рисунку подані результати моделювання руху Марсу з точки зору земного спостерігача (в системі відліку, пов'язаній із Землею). Розрахунок показує, що за 6 років відбулося три протистояння, і останнє з них виявилось великим – обчислена мінімальна відстань склала 56 млн. 135 тис. км.

$$\min_r(\text{Earth, Mars}) = 5.613492\text{E}+010$$



$$\text{Time} = 6.29863 \text{ years}$$

$$R(\text{Earth, Mars}) = 3.10\text{E}+011$$

Термінологічний словник

Абстракція – одна з форм пізнання, що полягає в мисленому відволіканні від ряду властивостей предметів і відношень між ними й виокремленні деякої властивості або відношення.

Автоматизована система управління (АСУ) – система, заснована на комплексному використанні економіко-математичних методів і технічних засобів обробки інформації для розв'язування задач керування виробничо-господарською діяльністю.

Адекватність моделі – правильне відтворення моделлю властивостей, зв'язків і відношень оригінала.

Адреса даних – адреса поля пам'яті, в якому розміщені дані.

Алгоритм – набір інструкцій для виконавця, що дає можливість розв'язати конкретну задачу або клас задач.

Аналогія – подібність в деяких якостях і відношеннях між різними за природою об'єктами. Важливою сферою застосування аналогії є розвинута в моделюванні *теорія подібності*.

Аналогове моделювання – математичне моделювання, засноване на *аналогії* (схожості за деякими ознаками) процесів та явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються однаковими за виглядом рівняннями, логічними схемами тощо.

Атрибут – властивість (ознака), що містить одну з характеристик даної величини.

Буфер обміну – спеціальна область оперативної пам'яті, яка резервується операційною системою для збереження даних.

Величина – одиниця даних, що представлена своїм ім'ям і своїм значенням.

Випадкова (статистична) вибірка – набір значень деякої характеристики певного процесу, отриманий із множини можливих значень досліджуваної характеристики.

Випадкова змінна – змінна, що набуває довільного значення з певної області значень.

Випадкове число – число, частота повторення якого у вибраній послідовності визначається технікою використання випадкової вибірки з множини допустимих значень.

Вихідні дані – результат виконання програми.

Вхідні дані – дані, що вводяться до програми для обробки або зберігання.

Гістограма – один з видів статистичних розподілів за кількісною ознакою; являє собою сукупність суміжних прямокутників, побудованих на одній прямій; площа кожного з них пропорційна частоті знаходження даної величини в інтервалі, на якому побудований прямокутник.

Графік – засіб відображення функціональної залежності між змінними, може слугувати основою для відкриття нових властивостей, співвідношень и закономірностей.

Групування (статистичне) – розчленування елементів статистичної сукупності на окремі групи за певною ознакою. Завдяки групуванню матеріал спостережень набуває впорядкованого (систематизованого) вигляду.

Дані – інформація, подана у вигляді, придатному для опрацювання автоматичними засобами за можливої участі людини.

Детермінована модель – модель, що відповідає причинно обумовленому об'єкту (явищу, процесу).

Динамічна модель – модель, в якій досліджується зміна в часі деякої величини.

Динамічні характеристики – характеристики об'єкту, що залежать від часу.

Дискретизація – 1) вимірювання значень неперервної величини через певні (дискретні) проміжки часу; 2) дискретне представлення неперервної величини; 3) квантування.

Дискретна модель – модель, у якій досліджуваний процес подають у вигляді дискретної послідовності подій.

Діаграма – рисунок, що зображує співвідношення між певними величинами; умовне зображення числових величин або їх співвідношень, виконане геометричними побудовами.

Дослідження операцій – комплексна математична дисципліна, що досліджує методами математичного моделювання пошук оптимальної стратегії.

Екологія – наука про відношення рослинних і тваринних організмів і утворених ними співтовариств між собою та з навколишнім оточенням. Сучасна екологія, крім того, займається розробкою теорети-

чних і практичних методів контролю (моніторингу) за станом навколишнього середовища.

Електронна таблиця – інтерактивна система обробки даних. Являє собою прямокутну таблицю, її комірки можуть містити числові й рядкові типи даних або формули (які задають залежність значення в даній комірці від умісту інших комірок).

Закон розподілу – див. *Розподіл*.

Зворотний зв'язок – вплив вихідної величини деякої системи на вихід цієї самої системи. Може бути позитивним (віддаляє систему від стану рівноваги) і негативним (повертає систему до рівноваги).

Змінна – програмний об'єкт, що має ім'я і значення, яке програма може одержати і змінити.

Знакове моделювання – використання в якості моделі знакових перетворень будь-якого виду: схем, графіків, креслень, формул, наборів символів та інших умовних позначень.

Значення – зміст, що присвоюється даному.

Зображувальна точка – будь-яка точка на площині змінних $x, y/\omega$, яка зображує стан системи, зокрема коливної.

Інтерпретація 1) *заг.* – представлення, тлумачення; 2) *інформат.* – трансляція і виконання кожної команди початкової мови машинної програми.

Інтерфейс – сукупність правил, що встановлюють єдині принципи взаємодії пристроїв ЕОМ.

Інтерфейс користувача – програмні й апаратні засоби взаємодії оператора або користувача з програмою або комп'ютером.

Інформатика – наука, що вивчає закони, методи і засоби нагромадження, обробки, збереження, передачі й представлення інформації.

Інформаційна модель – 1) подання у відповідному вигляді процесу циркуляції інформації, що має бути автоматично оброблена в системі управління; 2) подання даних і відношень між ними математичними та програмними засобами.

Інформація – відображення предметного світу з допомогою сигналів (знаків, символів, жестів, звуків тощо), міра (характеристика, ознака) розмаїтості довкілля (об'єктів у ньому).

Кібернетика – наука про керування, а також про одержання, передавання і перетворення інформації в кібернетичних системах.

Кібернетична система – сукупність зв'язаних одне з одним об'єктів (елементів системи), спроможних сприймати, зберігати, переробляти інформацію, а також обмінюватися інформацією.

Коефіцієнти моделі – параметри математичної моделі, що є коефіцієнтами біля змінних

Комп'ютерна модель – це інформаційна модель, реалізована засобами тієї чи іншої комп'ютерної технології.

Комп'ютерне моделювання – моделювання об'єкта (процесу, явища) за допомогою програми, що реалізується обчислювальною системою.

Комплекс – сукупність компонентів, що утворюють у певному розумінні єдине ціле.

Константа – величина, що не змінює своє значення в процесі виконання алгоритму (програми).

Концептуальна модель – змістова структура об'єкту з деякої предметної галузі.

Концепція – набір основних ідей чи теоретичних положень, сукупність взаємопов'язаних уявлень, поглядів стосовно деякої проблеми.

Кореляція (в математичній статистиці) – ймовірнісна чи статистична залежність. На відміну від функціональної залежності кореляція виникає, коли залежність однієї ознаки від іншої ускладнюється через наявність ряду випадкових факторів.

Космологія – вчення про всесвіт у цілому.

Критерій подібності – (основне поняття *теорії подібності*) безрозмірна комбінація фізичних величин – характеристик деякого явища, складена за певними правилами.

Лінійчата діаграма – діаграма, що складається із сукупності горизонтальних смуг і використовується для демонстрування значень окремих груп даних.

Логічна змінна – змінна, яка набуває одного з двох логічних значень – “істина” або “хибність”.

Логічна операція – 1) машинна операція, що реалізує функції алгебри логіки; 2) дія над логічними величинами з одержанням логічного значення.

Математична екологія – сучасна наука, що поєднує математичні моделі й методи вирішення проблем екології.

Математична модель – система математичних співвідношень, яка описує об'єкт (процес або явище).

Математичне моделювання – процес побудови і дослідження математичних моделей різних явищ.

Меню – відображений на екрані список команд, повідомлень, питань або варіантів відповідей, з яких користувач обирає потрібне, вводячи його номер, букву або вказуючи на нього курсором.

Метод випадкової вибірки (метод Монте-Карло) – загальна назва обчислювальних методів, у яких використовується ймовірнісна інтерпретація обчислюваних величин з допомогою випадкових чисел.

Моделювання – особлива форма дослідження, що полягає у вивченні об'єкта не безпосередньо, а на його моделі.

Модель – фізична система (або математичний опис), що відображає істотні властивості або характеристики об'єкта (процесу, явища).

Мозковий штурм – оперативний метод колективного вирішення проблеми на основі стимулювання творчої активності, при якому учасникам обговорення пропонують висловлювати якомога більшу кількість варіантів розв'язання, в тому числі найфантастичніших. Далі із загальної кількості висловлених ідей відбирають найбільш вдалі, які можуть бути використані на практиці; є одним з методів експертного оцінювання.

Надання – призначення змінній деякого значення.

Налагодження програми – виявлення, локалізація й усунення помилок у програмі.

Натурний експеримент – експеримент з природним об'єктом.

Обчислювальна математика – 1) розділ математики, що вивчає методи чисельного розв'язування математичних задач на ЕОМ; 2) теорія чисельних методів розв'язування типових математичних задач.

Обчислювальна система – сукупність апаратних засобів обчислювальної техніки і відповідного програмного забезпечення, яка функціонує як одне ціле і призначена для розв'язування певного класу задач.

Обчислювальний експеримент – технологія теоретичних досліджень, заснована на вивченні поведінки і властивостей моделі за допомогою обчислювальної системи.

Операнд – 1) величина у виразі, над якою виконується операція; 2) аргумент операції; частина машинної команди, що визначає об'єкт, над яким виконується операція.

Оптимізація – 1) процес приведення системи в найкращий за даних

умов (оптимальний) стан; 2) у дослідженні операцій – знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) функції при заданих обмеженнях.

Опція – параметр програми, що задає режим її роботи.

Парадигма – система поглядів, закладена в конкретну технологію.

Параметр – значення, надане змінній або на початку операції, або перед обчисленням виразу програмою.

Подібність фізична – два фізичних процеси подібні, якщо вони якісно однакові, а їхні критерії подібності – попарно рівні.

Полігон – графічне зображення співвідношень між значеннями ознаки й відповідними чи відносними частотами її повторення. Часто використовують для зображення дискретних рядів.

Поняття – цілісна сукупність суджень, в яких що-небудь стверджується про відмітні ознаки досліджуваного об'єкта.

Популяція – це група особин одного виду, що існує на певному ареалі і характеризується багатьма спільними ознаками.

Постановка задачі – початковий етап процесу побудови моделі; на змістовому рівні передбачає виявлення всіх суттєвих факторів і зв'язків між ними і шуканим результатом.

Похибка вимірювання – відхилення результатів вимірювання від дійсного значення вимірюваної величини.

Похибка обчислень – методична помилка, що виникає при обчисленнях на ЕОМ.

Предметна область – частина реального світу, що є середовищем визначення і реалізації конкретного процесу або групи процесів.

Прикладна задача – задача, що має частковий, прикладний характер.

Прикладна математика – математика в аспекті її додатків до розв'язання задач, постановка яких найчастіше не пов'язується з потребами самої математики.

Принцип відповідності – твердження, згідно з яким нова теорія, що претендує на охоплення більш широкої області застосування, ніж попередня, має включати останню як окремий або граничний випадок.

Програма – алгоритм, записаний мовою програмування, зрозумілою для ЕОМ.

Псевдовипадкове число – число, частота повторення якого у вибраній послідовності визначається технікою використання випадкової вибірки з множини допустимих значень.

Рекурентна формула – формула, що виражає наступні члени послідовності через попередні.

Розподіл ймовірностей – одне з основних понять теорії ймовірностей і математичної статистики. Це функція, яка зіставляє з множиною можливих значень випадкової величини ймовірності цих значень.

Середовище – оточення, в якому функціонує об'єкт.

Середовище для моделювання – інструментальні засоби, що охоплюють весь цикл розробки й функціонування моделі.

Система – сукупність об'єктів і відношень між ними, яка утворює єдине ціле.

Системний підхід – комплексний послідовний розгляд усіх факторів, шляхів і методів розв'язання задачі в їхньому взаємному зв'язку.

Стійкість моделі – здатність обчислювального алгоритму не руйнуватися за певних значень вхідних даних.

Стохастика – синонім до “теорія ймовірностей”.

Стохастична модель – математична модель, що містить випадкові (стохастичні) величини.

Структурна схема – умовне зображення процесів, способів організації, аналізу чи плану розв'язування задачі (використовують спеціальні графічні позначення для операцій, потоків даних, пристроїв).

Таблиця – спосіб формалізованого подання даних у вигляді двовимірного масиву.

Теорія – система основних ідей у тій або іншій галузі знань.

Теорія подібності – вчення про умови подібності фізичних явищ; спирається на вчення про розмірності фізичних величин і слугує основою фізичного моделювання. Має на меті встановлення критеріїв подібності для різноманітних фізичних явищ.

Тестування моделі – етап створення моделі, полягає в тому, що обчислювальний експеримент спрямовують на підтвердження очевидних і задалегідь відомих властивостей об'єкту.

Технології 1) промислові – послідовність етапів перероблення природної сировини (руди, нафти тощо) або одержаних з неї напівфабрикатів (металів, комплектуючих до виробів); 2) соціальні – зміни, спрямовані на людину, на перетворення або набуття деяких її властивостей; ці технології за організацією і здійсненням значно складніші за промислові. Кінцевим результатом обох видів технологій є продукт із заданими властивостями.

Точність – 1) міра можливості розрізняти майже рівні значення; 2) характеристика розрядності машинного подання чисел з рухомою крапкою; 3) атрибут даних, що визначає їх повну довжину і довжину дробової частини; 4) властивість програми видавати числові дані в межах припустимих відхилень.

Трансляція – перетворення програми, поданої однією мовою програмування, в еквівалентну програму на іншій мові.

Тривіальний – позбавлений новизни, не оригінальний.

Умова – правило для вибору однієї з альтернативних гілок алгоритму.

Фазова площина – декартова система координат, в якій на вісі абсцис відкладають зміщення x , а на вісі ординат – його похідну, тобто швидкість руху v (краще величину v/ω).

Фазова траєкторія – лінія, що її описує на фазовій площині (у фазовому просторі) зображувальна точка.

Фінітна траєкторія – траєкторія, обмежена в просторі (колова, еліптична на відміну від параболічної, гіперболічної).

Формалізація – процес подання інформації про об'єкт (процес, явище) у певній формі для формального виконавця.

Функція – 1) змінна величина, значення якої залежить від значень іншої величини (величин); 2) одне з призначень пристрою, програми, системи; 3) у мовах програмування – процедура, внаслідок виконання якої формується деяке значення і виклик якої може бути використаний як операнд у виразі.

Чисельні методи (матем.) – методи наближеного розв'язування математичних задач, що дозволяють звести розв'язання до скінченної кількості арифметичних дій над числами.

Швидкодія – показчик швидкості роботи ЕОМ та її продуктивності в одиницю часу.

Література

1. Абрамов С. А., Гнездилова Г. Г., Капустина Е. Н., Селюн М. И. Задачи по программированию. – М. : Наука, 1988.
2. Авилов В. Физика + Математика + ЭВМ // Квант. – 1985. – № 11.
3. Алминдеров В., Поповичева О. Международный турнир «Компьютерная физика» // Квант. – 1999. – № 3.
4. Белонучкин В. Е. Кеплер, Ньютон и все-все-все... – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 128 с. – (Б-чка "Квант"; Вып. 78)
5. Богданов К. Как быстрее спуститься на лифте в час пик. // Квант. – 2004. – № 1.
6. Брудно А., Каплан Л. Московские олимпиады по программированию. – 2-е изд. – М. : Наука, 1990.
7. Бурсиан Э. В. Задачи по физике для компьютера : Учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М. : Просвещение, 1991.
8. Верлань А. Ф., Распопов В. Б. Основы применения вычислительной техники : Пробное учебн. пособие для 10 кл. ср. шк. – К : Рад. шк., 1986.
9. Вершинин О. Е. За страницами учебника информатики : Кн. для учащихся 10–11 кл. ср. шк. – М. : Просвещение, 1992.
10. Вершинин О. Е. Компьютер для менеджера. – М. Высш. шк., 1990.
11. Водолаженко А. В. Деловые применения компьютеров. (Раздел "Моделирование"). – Харьков : Харьковский педагогический университет, РЦ НИТ, 1994.
12. Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках : Пер. с нем. – 2-е изд. – М. : Мир, 1987. – 215 с. – (В мире науки и техники.)
13. Глушков В. М., Валах В. Я. Что такое ОГАС? – М. : Наука, 1981.
14. Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М. : Знание, 1991.
15. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Ч 1, 2. – М. : Мир, 1990.
16. Жалдак М. И. Компьютер на уроках математики : Пособие для учителей. Издание 2-е, переработанное и дополненное. – К. : РУНЦ «ДИНИТ», 2004. – 327 с.
17. Жалдак М. І. Про лінійне програмування. Сер. У світі математики, вип. 2. – К. : Радянська школа, 1970.

18. Жалдак М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики : Посібник для самоосвіти вчителів. – К. : Радянська школа, 1984.
19. Жалдак М. І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером : Посібник для вчителів. – К. : РРНЦ «ДИНИТ», 2004. – 255 с.
20. Информатика : Энциклопедический словарь для начинающих / Сост. Д. А. Пospelов. – М. : Педагогика-Пресс, 1994.
21. Информатика та обчислювальна техніка : Короткий глумачний словник / В. П. Гондюл, А. Г. Дерев'янку, В. В. Матвеев, Ю. З. Прохур; За ред. проф. В. П. Гондюла. – К. : Либідь, 2000. – 320 с.
22. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / Авт. пред. А. А. Самарский. – М. : Наука, 1988.
23. Кочергин А. Задача о слухах // Информатика и образование. – 1989. – № 5.
24. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб. : ВHV – Санкт-Петербург, 1997.
25. Линднер Г. Картины современной физики. – М. : Мир, 1977. – 272 с.
26. Лишевский В. П. Рассказы об ученых. – М. : Наука, 1986. – 168 с. (Серия “История науки и техники”).
27. Марочник Л. С. Свидание с кометой. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 208 с. (Библиотечка “Квант”. Вып. 47)
28. Математическое моделирование / Редакторы Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун. – М. : Мир, 1979.
29. Матюшкин-Герке А. Учебно-прикладные задачи в курсе информатики // Информатика и образование, 1992, №№ 3–6.
30. Мичи Д., Джонстон Р. Компьютер-творец. – М. : Мир, 1987.
31. Моисеев Н. Н. Математик задаёт вопросы... / Приглашение к диалогу /. – М. : Знание, 1974.
32. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. – М. : Физматлит, 1994.
33. Островская Е. М. Моделирование на компьютере. // Информатика и образование. – 1998. – №8.
34. Пак В. В. Инженер, математик и другие : Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов / Донецкий гос. техн. ун-т. – Донецк, 1995.
35. Першиков В. И., Савинков В.М. Толковый словарь по информа-

- тике. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 543 с.
36. Простое и сложное в программировании / Авт. предисл. Е. П. Велихов. – М. : Наука, 1988.
 37. Распопов В. Б. Імітаційні алгоритми // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1999. – № 2.
 38. Румянцев А. Ю., Серветник Т. А. Астрономия : Учебно-методическое пособие / Под ред. А.В. Усовой. – Магнитогорск : МаГУ, 2003. – 309 с.
 39. Самарский А. А., Михайлов А. П. Компьютеры и жизнь (Математическое моделирование). – М. : Педагогика, 1987.
 40. Соколов И. М. Фракталы // Квант. – 1989. – № 5.
 41. Струве О., Линдс Б., Пилланс Э. Элементарная астрономия. – М. : Главн. ред. физ.-мат. лит., 1964. 468 с.
 42. Українсько-Англійсько-Німецько-Російський словник фізичної лексики. / упорядн. В. Козирський, В. Шендеровський. – К. : “Рада”, 1996. – 934 с.
 43. Уолфрем С. Современный компьютер. / Сб. научно-популярных статей. Раздел “Научные исследования”. – М. : Мир, 1986.
 44. Федер Е. Фракталы. (Пер. с англ.) – М. : Мир, 1991.
 45. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М. : Мир, 1967. – Т. 1. – 267 с.
 46. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М. : Мир, 1969. – 624 с.
 47. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Сов. энциклопедия : В 4-х томах. – 1988.
 48. Хилькевич С. С., Зайцева О. А. Как построить траекторию? // Квант, 1987. – № 7.
 49. Хургин Я. И. Да, нет или может быть ... – 2-е изд. – М. : Наука, 1983.
 50. Хургин Я. И. Ну и что? – М. : Молодая гвардия, 1970.
 51. Шнейдеров В. С. Занимательная информатика или ... – СПб. : Политехника, 1994.
 52. Шпилевский А. Фрактальные кластеры // Информатика и образование. – 1989. – № 5.
 53. Эфрос А. Что такое теория протекания // Квант. – 1982. – № 2.

Навчальний посібник

Теплицький Ілля Олександрович

ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Видання друге, виправлене і доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України