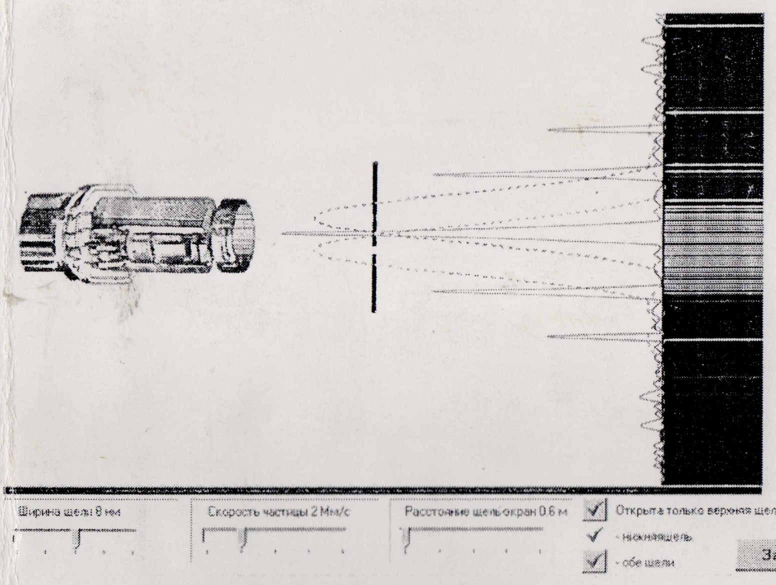
Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Том 2



Кривий Ріг
Видавничий відділ НацМетАУ
2002

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ РУХІВ У СЕРЕДОВИЩІ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ

І.О. Теплицький
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

У пропонованому матеріалі описана авторська методика вивчення факультативного курсу «Елементи комп'ютерного моделювання» [4, 5, 6] в застосуванні до задач механіки. Зокрема, розглянуто рухи тіл під дією сили всесвітнього тяжіння.

Йдеться про одне із самих далекосяжних узагальнень, зроблених будь-коли людським розумом, а саме про закон всесвітнього тяжіння:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \qquad (1)$$

Якщо до цього додати, що всяке тіло під дією прикладеної до нього сили набуває в напрямі цієї сили прискорення, величина якого пропорційна силі і обернено пропорційна масі тіла,

$$a = \frac{F}{m}, \qquad (2)$$

то, як зауважує Р. Фейнман, досвідченому математику цих відомостей цілком достатньо для виводу всіх подальших наслідків. Не претендуючи на такий високий рівень, ми зупинимося на деяких висновках і дозволимо собі дещо більш широкий погляд на ці висновки, аніж той, що пропонується в шкільному підручнику.

Насамперед зазначимо, що *вирази* (1) *і* (2) *являють собою математичну модель руху тіла під дією сили тяжіння.*

Чи не найцікавішим при вивченні таких рухів є питання про вигляд їхніх можливих траєкторій у залежності від початкових умов. Для розв'язання цього питання скористаємося можливостями комп'ютерного моделювання.

Спочатку розглянемо найпростіші моделі – рух штучного супутника навколо планети і рух планети навколо Сонця.

Далі дослідимо рух системи тіл «планета – природний супутник» (на прикладі системи «Земля – Місяць») навколо спільного центра мас.

Змінюючи умови задачі (а саме – маси тіл і відстані між ними), ми зможемо зазирнути в деякі цікаві подробиці з «життя» подвійних зірок. Тут, на відміну від попередніх прикладів, буде здійснено перехід від одиниць СІ до відносних, якими здебільшого користуються в астрономії.

У якості середовища для моделювання оберемо електронні таблиці. Докладне обґрунтування такого вибору подане в [3].

1. Рух штучного супутника планети

Фізичний аналіз задачі

Припущення 1. Будемо вважати (і не без підстав) масу супутника набагато меншою за масу планети: $m_{супутн} >> m_{пл.}$.

Це дозволить не брати до розгляду рух самої планети.

Вираз (1), як відомо, справджується для матеріальних точок або для випадку сферичних тіл із сферично-симетричним розподілом густини за умови, що r – відстань між центрами тіл. У зв'язку з цим приймемо

Припущення 2. Зважаючи на той факт, що відстань між центрами планети й штучного супутника значно перебільшує розміри принаймні одного з тіл, вважатимемо тіла матеріальними точками.

Припущення 3. Будемо нехтувати опором середовища, адже реально штучні супутники рухаються у надзвичайно розріджених шарах атмосфери. В такому разі на супутник діятиме єдина сила – сила всесвітнього тяжіння.

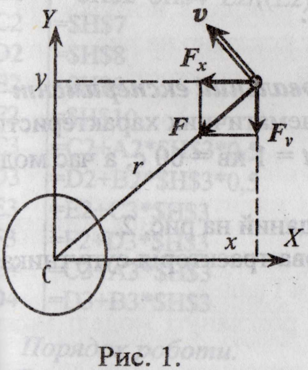


Рис. 1.

Рух штучного супутника відбувається в площині, у якій лежать вектор швидкості супутника і центр планети. В цій самій площині лежить і вектор $\boldsymbol{F}$ сили тяжіння. Для опису такого руху потрібні дві координатні вісі. Початок координат помістимо в центрі планети (рис. 1).

Тут $\boldsymbol{F}_x$ і $\boldsymbol{F}_y$ – складові вектора сили тяжіння $\boldsymbol{F}$.

Положення супутника визначатиметься двома координатами

x та y, причому проекції F_x і F_y мають знаки, протилежні координатам.

З подібності трикутників маємо: $\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}$, $\frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r}$, що разом з (1) дає

$$F_x = -GMm\frac{x}{r^3}; \;\; F_y = -GMm\frac{y}{r^3}.$$

Для визначення проекцій прискорення скористаємось виразом (2):

$$a_x = -GM\frac{x}{r^3}; \;\; a_y = -GM\frac{y}{r^3}. \qquad (3)$$

Відстань r між тілами визначатимемо за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (4)$$

Система рівнянь (3), (4) *є математичною моделлю руху штучного супутника.*

Конкретизуємо умову для штучного супутника Землі масою m = 1000 кг, що рухається вздовж колової орбіти на висоті h = 300 км.

Маса супутника не входить до виразу (3), але її значення забезпечує виконання умови $m_{супутн} << m_{пл}$.

Відстань між тілами $r = R_З + h = 0{,}3 \cdot 10^7$ м $+ 6{,}4 \cdot 10^7$ м $= 6{,}7 \cdot 10^7$ м.

Для того, щоб орбіта була коловою, необхідно у початковий момент орбітального руху супутника надати йому першої космічної швидкості $\upsilon_{2y}(0) = \upsilon_{пк} = \sqrt{\frac{Gm_З}{r}}$.

Обговорення алгоритму. Обчислювальний експеримент

Будемо фіксувати значення всіх кінематичних характеристик руху супутника через інтервали часу Δt = 1 хв = 60 с, а час моделювання оберемо рівним ~100 хв.

Відповідна таблиця має вигляд, поданий на рис. 2.

На цьому ж рисунку показана колова траєкторія супутника – графік залежності $y = y(x)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_{2x}	a_{2y}	υ_{2x}	υ_{2y}	x_2	y_2	*Дано:*	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	7714	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11
3	-8,86	-0,61					$\Delta t=$	60
4	-8,80	-1,22					$m_1=$	5,976E+24
5	-8,69	-1,83					$m_2=$	1,000E+03
6	-8,54	-2,42					$r=$	6,700E+06
7	-8,36	-3,01					$\upsilon_{2x}(0)=$	0
8	-8,13	-3,58					$\upsilon_{2y}(0)=$	7,71E+03
9	-7,86	-4,13					$x_2(0)=$	6,700E+06
10	-7,56	-4,66					$y_2(0)=$	0
11	-7,21	-5,17						
12	-6,84	-5,66						
...	...	...	...	...	...	...		

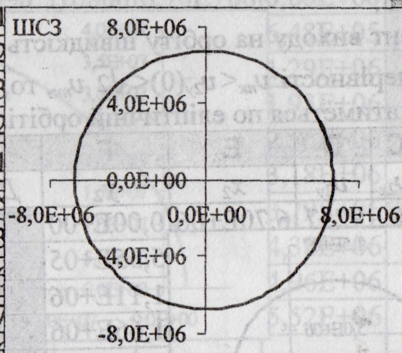


Рис. 2.

Ключові комірки цієї таблиці мають такий вміст:

комірка	формули / числа	примітка
H7	=0	
H8	=(H2*H4/H6)^0,5	
H9	=H6	
H10	=0	
A2	=-$H$2*$H$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в A3 і A4
B2	=-$H$2*$H$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в B3 і B4
C2	=$H$7	
D2	=$H$8	
E2	=$H$9	
F2	=$H$10	
C3	=C2+A2*$H$3*0,5	
D3	=D2+B2*$H$3*0,5	
E3	=E2+C3*$H$3	копіювати в E4
F3	=F2+D3*$H$3	копіювати в F4
C4	=C3+A3*$H$3	
D4	=D3+B3*$H$3	

Порядок роботи.

1. Спочатку заповнюються комірки H2–H6.
2. Далі слід заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.

3. Після цього всі формули 4-го рядка (від A4 по F4) копіюються у наступні до 100-го включно.
4. Маючи заповнену таблицю, будуємо графік за даними стовпців E та F.

Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника $\upsilon_{2y}(0)$ задовольнятиме нерівності $\upsilon_{пк} < \upsilon_{2y}(0) < \sqrt{2}\ \upsilon_{пк}$, то, як відомо з курсу фізики, він рухатиметься по еліптичній орбіті.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_{2x}	a_{2y}	υ_{2x}	υ_{2y}	x_2	y_2	*Дано:*	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	9257	6,70E+06	0,00E+00	G=	6,672E-11
3	-8,83					5,55E+05	Δt=	60
4	-8,69					1,11E+06	m_1=	5,976E+24
5	-8,45					1,66E+06	m_2=	1,000E+03
6	-8,14					2,20E+06	r=	6,700E+06
7	-7,75					2,73E+06	$\upsilon_{2x}(0)$=	0
8	-7,31					3,24E+06	$\upsilon_{2y}(0)$=	9,26E+03
9	-6,82					3,75E+06	$x_2(0)$=	6,700E+06
10	-6,31					4,24E+06	$y_2(0)$=	0
11	-5,79					4,71E+06		
...	...	...	...	...	...	...		

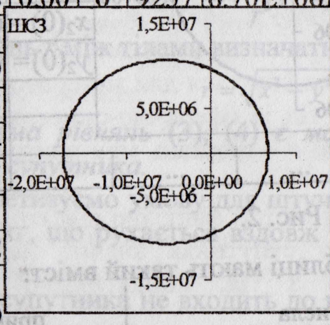


Рис. 3.

Продовжимо обчислювальний експеримент і збільшимо попереднє значення $\upsilon_{2y}(0)$ в 1,2 рази. Щоб не виконувати обчислень, відредагуємо формулу, введену раніше в комірку H8. А саме : = (H2*H4/H6)^0,5<u>*1,2</u>. Результат показано на рис. 3.

Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення $\upsilon_{2y}(0) = \sqrt{2}\ \upsilon_{пк}$ (тобто вводячи до H8 нового множника =H2*H4/H6)^0,5<u>*2^0,5</u>), одержуємо параболічну траєкторію (рис. 4):

Завдання 1. Змоделюйте рух Землі навколо Сонця, змінивши потрібним чином вміст відповідних комірок стовпця H.

Завдання 2. Змоделюйте рух комети Галлея.

Завдання 3. За якою ознакою всі розглянуті моделі можна об'єднати в одну групу?

Примітки.

Виконання першого з цих завдань має здебільшого репродуктивний характер, оскільки орбіта Землі з високим ступенем наближення може вважатися коловою.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_{2x}	a_{2y}	υ_{2x}	υ_{2y}	x_2	y_2	*Дано:*	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	10800	6,70E+06	0,00E+00	G=	6,672E-11
3	-8,80					6,48E+05	Δt=	60
4	-8,56					1,29E+06	m_1=	5,976E+24
5	-8,18					1,93E+06	m_2=	1,000E+03
6	-7,69					2,56E+06	r=	6,700E+06
7	-7,12					3,18E+06	$\upsilon_{2x}(0)$=	0
8	-6,50					3,79E+06	$\upsilon_{2y}(0)$=	1,08E+04
9	-5,87					4,38E+06	$x_2(0)$=	6,700E+06
10	-5,23					4,96E+06	$y_2(0)$=	0
11	-4,62					5,52E+06		
...	...	...	...	...	...	...		

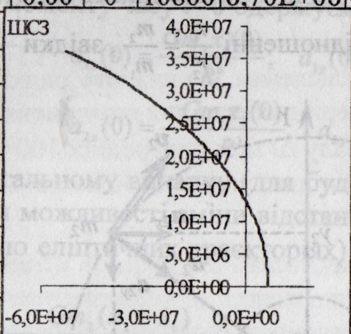


Рис. 4.

Друге завдання від самого початку передбачає еліптичну орбіту; воно потребує творчого підходу і прийняття певних самостійних рішень (зокрема, стосовно початкових значень параметрів кометної орбіти, збільшення часу моделювання тощо). Не виключено, що воно може спричинити необхідність проведення додаткових обчислювальних експериментів.

Останнє завдання спрямоване на актуалізацію таких мислительних операцій, як аналіз, синтез, конкретизація й узагальнення, завдяки яким учні мають сформулювати коротку відповідь: $m_{супутн} >> m_{пл}$. Усвідомлення цього факту є логічною передумовою переходу до наступного питання.

2. Рух природного супутника планети та компонентів системи «подвійна зірка»

Фізичний аналіз задачі

Природні супутники планет мають маси, якими не завжди можна нехтувати в порівнянні з масами самих планет, моделювання руху таких супутників є більш складною задачею. Знов почнемо аналіз із найпростішого випадку.

Припущення 4. Нехай тіла масами m_1 і m_2 рухаються по колових орбітах з радіусами r_1 і r_2 і відстань R між ними під час руху не змінюється (рис. 5).

1. Обидва ці тіла – центральне m_1 і супутник m_2 – обертаються навколо нерухомої точки C – їхнього спільного центра мас. При цьому вони весь час знаходяться на одній прямій, що сполучає тіла і проходить через точку С, яка ділить відстань R між тілами на відрізки r_1 і r_2 у відношенні $\frac{r_1}{r_2}=\frac{m_2}{m_1}$, звідки

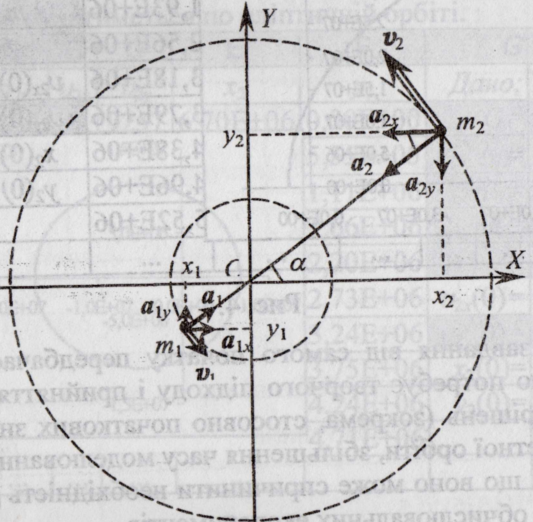


Рис. 5.

$$r_1=\frac{R}{1+\frac{m_1}{m_2}};\quad r_2=\frac{R}{1+\frac{m_2}{m_1}}.$$

Переходячи до проекцій, маємо для моменту часу t=0:

$$x_1(0)=-\frac{R}{1+\frac{m_1}{m_2}};\quad x_2(0)=\frac{R}{1+\frac{m_2}{m_1}},\tag{5}$$

де x_1, x_2 – координати тіл у системі відліку, пов'язаній із центром мас.

2. Певних уточнень вимагають також вирази для прискорень. Сила тяжіння надає прискорень обом тілам:

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2 \text{, звідки}$$

$$a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2}.$$

Для моменту часу $t=0$ одержуємо:

$$a_{1x}(0) = \frac{Gm_2 x_1(0)}{R^3}; \quad a_{1y}(0) = \frac{Gm_2 y_1(0)}{R^3};$$

$$a_{2x}(0) = -\frac{Gm_1 x_2(0)}{R^3}; \quad a_{2y}(0) = -\frac{Gm_1 y_2(0)}{R^3}.$$

В загальному випадку (для будь-якого моменту часу) з урахуванням можливості зміни відстані між тілами (наприклад, при русі тіл по еліптичних траєкторіях) вирази (6) набувають вигляду:

$$a_{1x} = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \quad a_{1y} = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{2x} = -\frac{Gm_1(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \quad a_{2y} = -\frac{Gm_1(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3},$$

де (x_1, y_1), (x_2, y_2) – відповідно координати першого та другого тіл, а $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – відстань між ними в довільний момент часу.

В задачі про штучний супутник ми вже бачили, що вигляд траєкторій руху тіл визначається початковими умовами, і зокрема, початковими швидкостями $\upsilon_{1y}(0)$ і $\upsilon_{2y}(0)$. Оскільки розглядається рух тіл по колових орбітах, то $\upsilon_{2y}(0) = \sqrt{\frac{Gm_1}{R}}$. Знаходячись весь час на одній прямій, обидва тіла мають однакові періоди обертання $T_1 = T_2$. Але $T_1 = \frac{2\pi r_1}{\upsilon_1}$ і $T_2 = \frac{2\pi r_2}{\upsilon_2}$, звідки $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{r_1}{r_2}$, що в проекціях на вісь Y дає $\frac{\upsilon_{2y}(0)}{\upsilon_{1y}(0)} = \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$. Остаточно маємо: $\upsilon_{1y}(0) = \upsilon_{2y}(0)\frac{x_1(0)}{x_2(0)}$.

Обговорення алгоритму

Оскільки тепер розглядається рух *двох* тіл, то виникає необхідність у збільшенні вдвічі кількості змінних (а отже, й стовпців таблиці). Розподілимо їх у такий спосіб:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	a_{1x}	a_{1y}	a_{2x}	a_{2y}	v_{1x}	v_{1y}	v_{2x}	v_{2y}	x_1	y_1	x_2	y_2	*Дано:*	Значення
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Крім того, вимагає збільшення й кількість рядків (до 300), тому що помітно зростає період обертання компонентів системи, а просте збільшення інтервалу Δt при попередніх 100 рядках таблиці вже не забезпечує необхідної точності обчислень.

Вміст комірок цієї таблиці:

комірки	формули / числа	коментарі
N7	0	
N8	=N10*N11/N13	
N9	0	
N10	=(N2*N4*N13)^0,5/N6	
N11	=-N6/(1+N4/N5)	
N12	0	
N13	=N6/(1+N5/N4)	
N14	0	
A2	=$N$2*$N$5*(K2-I2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в A3, A4
B2	=$N$2*$N$5*(L2-J2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в B3, B4
C2	=$N$2*$N$4*(I2-K2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в C3, C4
D2	=$N$2*$N$4*(J2-L2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в D3, D4
E2	=$N$7	
F2	=$N$8	
G2	=$N$9	
H2	=$N$10	
I2	=$N$11	
J2	=$N$12	
K2	=$N$13	
L2	=$N$14	
E3	=E2+A2*$N$3*0,5	
F3	=F2+B2*$N$3*0,5	
G3	=G2+C2*$N$3*0,5	
H3	=H2+D2*$N$3*0,5	

комірки	формули / числа	коментарі
I3	=I2+E3*$N$3	копіювати в I4
J3	=J2+F3*$N$3	копіювати в J4
K3	=K2+G3*$N$3	копіювати в K4
L3	=L2+H3*$N$3	копіювати в L4
E4	=E3+A3*$N$3	
F4	=F3+B3*$N$3	
G4	=G3+C3*$N$3	
H4	=H3+D3*$N$3	

Порядок роботи.

1. Заповнити комірки N2–N6 у відповідності до даних задачі.
2. Заповнити комірки за наведеною вище таблицею.
3. Всі формули 4-го рядка копіювати у наступні до 300-го включно.
4. Побудувати графіки за даними стовпців I, J, K, L.

Увага! Виконання цього пункту виявиться успішним, якщо правильно відкоригувати ряди даних.

Обчислювальний експеримент

Задача 1. Відомо, що маса Місяця (m_2) у 81 раз менша за масу Землі (m_1). Прийнявши відстань R між центрами цих тіл рівною 380 тис. км ($3{,}8\cdot\ 10^8$ м), змоделювати рух Місяця й Землі.

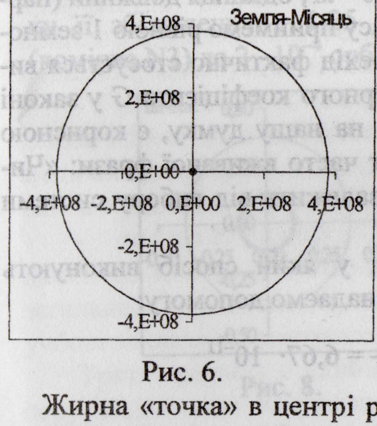
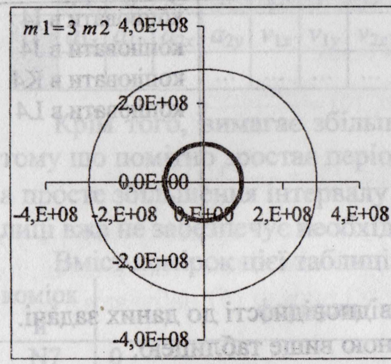


Рис. 6.

1. Уведемо ці дані до таблиці:
   комірка N4 =$5{,}98\cdot\ 10^{24}$;
   комірка N5 =$5{,}98\cdot\ 10^{24}/81$ (скопіюємо значення N4 як значення m_2 і поділимо його на 81);
   комірка N6=3,8E+08;
   комірка N3 =8,64E+04 (1 доба в секундах).
2. Побудуємо графіки $y_1=y_1(x_1)$ і $y_2=y_2(x_2)$ – траєкторії руху (рис. 6).

Жирна «точка» в центрі рис. 6 в дійсності є маленьким колом. Це орбіта Землі. Тут видно, що її центр знаходиться трохи лівіше від точки перетину осей – центра мас системи.

Завдання 3. Переконайтесь, що дана модель містить у собі попередню (про рух штучного супутника), якщо перейти до попередніх умов.



Завдання 4. Самостійно розв'яжіть задачу.

Задача 2. *Якби на місці Місяця знаходилась планета з масою, утричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти цих тіл?*

Результат подано на рис. 7.

Рис. 7.

Таким чином, ми безпосередньо підійшли до моделювання руху компонентів у системах, що звуться фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння, і обертаються по еліптичних орбітах навколо спільно центра мас. Зрозуміло, що остання модель передбачає такі об'єкти. Проте ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які є вживаними в зоряній астрономії: одиниця маси дорівнює масі Сонця 1 M_C – 1,99· 10^{30} кг, одиниця довжини (парсек) 1 пк – 3,08· 10^{14} м, одиницю часу приймемо рівною 1 земному року – 3,15· 10^{7} с. Згаданий перехід фактично стосується визначення числового значення розмірного коефіцієнта G у законі всесвітнього тяжіння. Така вправа, на нашу думку, є корисною для учнів, оскільки розкриває зміст часто вживаної фрази: «Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць».

Пропонуємо учням пригадати, у який спосіб виконують подібні операції. В разі утруднення надаємо допомогу:

$$G=6{,}67\cdot\ 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}=6{,}67\cdot\ 10^{-11}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{3{,}08\cdot 10^{14}}\right)^3 пк^3}{\left(\dfrac{1}{1{,}99\cdot 10^{30}}\right) M_C\cdot\left(\dfrac{1}{3{,}15\cdot 10^{7}}\right)^2 рік^2}.$$

Остаточно маємо $G=67{,}6\ \dfrac{пк^3}{M_C\cdot рік^2}$.

Після виконання наведених перетворень пропонуємо розв'язати задачу:

Задача 3. Змоделювати орбіти компонентів системи подвійної зірки за умови, що до її складу входять зірки з масами 1 M_C та 3 M_C, розташовані на відстані 0,5 пк.

Пропонуючи учням виконати моделювання у новій системі одиниць, уточнюємо разом з ними вміст комірок N2–N6:

комірка N2 =67,6;
комірка N3 $=4{,}5\cdot 10^{-4}$;
комірка N4 =3;
комірка N5 =1;
комірка N6 =0,5.

За умови, що $\upsilon_{2y}(0)$ – вміст комірки N10 – дорівнює числовому значенню швидкості, яка забезпечує рух по коловій орбіті і для штучних супутників має назву «перша космічна», матимемо вже знайомий результат з коловими орбітами (рис. 8), а у випадку її збільшення в 1,25 рази з одночасним збільшенням Δt (комірка N3) до $2\cdot 10^{-4}$ орбіти будуть еліптичними (рис. 9).

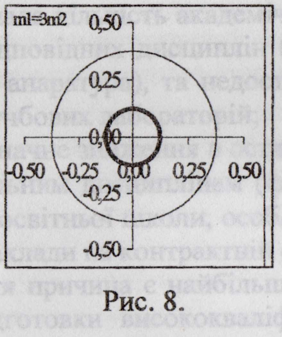


Рис. 8.

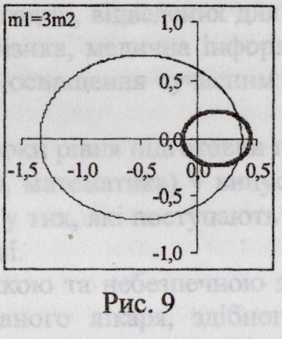


Рис. 9

Зауваження. Моделювання за допомогою 300-рядкової таблиці декількох обертів системи подвійної зірки є недоцільним, оскільки похибка обчислень у цьому випадку призводить до хибних висновків про поведінку системи. Для одержання достатньої точності обчислень необхідно було б збільшити кількість рядків мінімум на порядок з відповідним зменшенням проміжку Δt. У [3] показано, що у цьому випадку доцільним є перехід від електронних таблиць до іншого середовища моделювання.

Література:

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 267 с.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
3. Кабардин О.Ф. и др. Факультативный курс физики. 8 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1973. – 206 с.
4. Соловйов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2000. – №2. – С. 28–32.
5. Теплицький І.О. Застосування електронних таблиць на уроках фізики // Фізика та астрономія в школі. – 2001. – №2.
6. Теплицький І.О. Комп'ютерне моделювання в школі як засіб розвитку творчого мислення учнів // Рідна школа. – 2000. – №9. – С. 63–66.