МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
________ В.В. Корольський
_____________2022 р.

Реєстраційний № _______ «___»
«___» ____________ 2022р.

ГЕНЕРАЦІЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КВАДРАТУРИ ПРОЄКЦІЙ РІЗНОМАНІТНИХ ОБ'ЄКТІВ

Кваліфікаційна робота студентки групи МІм-17
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта (математика)
Римар Анжели Ігорівни
Керівник: кандидат техн. наук, професор Корольський Володимир Вікторович

Оцінка:
Національна шкала___________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Римар Анжела Ігорівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що у разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Ряди набули широкого використання під час вивчення функцій, інтегралів, диференціальних рівнянь, у ході розв’язування багатьох прикладних задач. Саме тому «Ряди» – один з найважливіших розділів математичного аналізу. Теорія рядів важлива не лише в математиці, проте й в інших галузях: економіці, інженерії, архітектурі, теорії музики, фізиці, хімії тощо. Ряди набули такого широкого спектру використання тому, що дозволяють одним з найбільш простих, проте і найпотужніших методів отримання результатів з даною точністю.

Розвитком теорії рядів займалися такі відомі науковці, як Л. Ейлер [5], Ж. Л. Даламбер [6], О. Л. Коші [14; 21], Е. Е. Кумер [7], Г. Раабе [10], П. Менгорі [1], Я. Бернулі [5] та інші.

Важливою складовою вивчення геометричних об’єктів та їх властивостей, доведення формул обчислення параметрів цих об’єктів є геометрична інтерпретація. При вивченні курсу математичного аналізу геометричні інтерпретації набули широкого застосування. Проте в одному з основних модулів математичного аналізу «Ряди» геометричні образи членів ряду майже не використовуються. За останні роки проблемі необхідності використання геометричної інтерпретації при вивченні числових рядів присвячений ряд публікацій Корольського В. В. [17; 18; 19; 20], Габ С. С. [7; 8; 9; 18; 19], Комарової А. А. [16], Няньчука В. В. [25] та Примакової О. Ю. [27], Христюк А. М. [34; 35], Романова А. М. [28]. Підручники, посібники, практикуми з математичного аналізу [30; 31; 32; 36; 37] пропонують учням теоретичний матеріал, приклади розв’язування звичайних і нестандартних завдань, методи розв’язування із методичними вказівками, пропонують системи задач для самостійної роботи. Проте роботи не передбачають розробки задач з використанням геометричних інтерпретацій, рекомендованих при вивченні числових рядів, члени яких пов’язані з площами, обмежених степеневими функціями, вписаними в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$.

Геометричні інтерпретації створюють сприятливі умови для сприйняття навчального матеріалу, поглиблення знань, реалізації нестандартного, компетентнісного, різнорівневого підходів, міжпредметних зв'язків, зв'язків з життям, родом зайнятості та іншими темами курсу математики при вивченні числових рядів. Саме тому тема «Дослідження генерації числових рядів геометричних фігур, вписаних в послідовість квадратів» є **актуальною.**

Практичне значення отриманих результатів. Добірки вправ з використанням геометричних інтерпретацій числових рядів створюють можливості для їхнього використання на факультативах, тижнях математики та подібних заходах, курсах підвищення кваліфікації, заняттях з математичного аналізу та подібних дисциплін. Такі задачі можна буде також частково використати на різних уроках алгебри в старшій школі, зокрема інтегрованих (бінарні, трансдисциплінарні).

Мета дослідження – побудова та дослідження на збіжність числових рядів, члени яких – площі геометричних фігур, вписані в квадрат.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати наукову літературу з теми дослідження.
2. Визначити сутність поняття «числовий ряд» та основні теоретичні положення та історію розвитку теорії рядів.
3. Реалізувати нестандартний, компетентнісний, різнорівневий підходи, зв'язки: міжпредметні, з життям, родом зайнятості та іншими темами курсу математики при вивченні числових рядів.
4. Використовуючи фрагменти графіків степеневих функцій побудувати геометричні фігури та обчислити їхні площі.
5. Одержання і дослідження на збіжність, обчислення частинних сум числових рядів, члени яких – площі геометричних фігур, вписані в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$.

6. Запропонувати добірки різнорівневих задач, спрямованих на розвиток ключових компетентностей, з використанням геометричних інтерпретацій, рекомендованих при вивченні числових рядів в процесі навчання математичного аналізу.
7. Запропонувати методичні рекомендації до використання запропонованих добірок вправ на інтегрованих уроках алгебри, геометрії та інших дисциплін в 10-11 класах, в програмах факультативів, математичних гуртків, на курсах підвищення кваліфікації, тижнях математики та подібних заходах. Порекомендувати методичні прийоми.

Об'єкт дослідження: числові ряди.

Предмет дослідження: застосування геометричної інтерпритації збіжних числових рядів при викладанні математичних дисциплін.

Для вирішення поставлених завдань були використані наступні **методи дослідження та ознаки збіжності рядів**:

1. Теоретичий аналіз наукової літератури з проблеми дослідження.
2. Розрахунок площ геометричних фігур.
3. Евристичний пошук числових рядів за відомою геометричною інтерпретацією.
4. Ознака Д’Аламбера.
5. Радикальна та інтегральна ознаки Коші.
6. Ознака порівняння.
7. Граничний метод порівняння.
8. Метод частинних сум.
9. Синтез нестандартного, компетентнісного, різнорівневого підходів та міжпредметні зв'язки, зв'язки з життям, родом зайнятості та іншими темами курсу математики при вивченні числових рядів.

Апробація дослідження:

1. Опублікована статття у збірнику наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти», який включено до Переліку наукових фахових видань України (Категорія «Б»).

2. Опублікована стаття у електронному збірнику наукових праць молодих учених факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених».

3. Запропоновані вправи були використані при проведенні інтегрованого заходу та занять у відокремленому структурному підрозділі «Криворізький фаховий коледж Державного університету економіки та технологій».

Структура роботи обумовлена логікою дослідження і складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, висновків, списку використаної літератури, що налічує 28 джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ РІЗНИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ.

1.1. Історія розвитку теорії рядів.

Числовими рядами були зацікавлені стародавні народи ще з часів античності.

Згідно з думкою дослідників історії розвитку математики термін «математична нескінченість», виник в давньогрецькій чи еллінській культурах в VIII – VI ст. до н.е. як зовсім новий елемент мислення. Але точно визначити, коли виникли ряди, неможливо [21].

Про теорію рядів було певне уявлення ще в Стародавньому Єгипті.

Єгипетські мудреці були зосереджені на складанні прикладних задач або завдань розважального характеру. Одна із найбільш відомих задач – «задача-мандрівниця» на геометричну прогресію, яка пройшла крізь різні епохи. У цій задачі йдеться про 7 кішок в кожному із 7 домів, кожна кішка з'їла по 7 мишей, кожна з яких з'їла по 7 колосків ячменю, кожний колос міг дати 7 мір хліба [31, с. 23]. Райнд в папірусі виклав своє представлення арифметичної прогресії.

Нескінченні ряди в математиці застосовували і греки, але намагалися представляти їх у вигляді скінченних сум: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, замість $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ [21].

Ширшого представлення уявлення про арифметичні та геометричні прогресії набули у Стародавньому Вавилоні, де знали, як знаходити суму k членів арифметичної прогресії з відомим першим і останнім членами: $S_n = \frac{a_1+a_k}{2} \cdot k$ [31, с. 40]. Крім того, вавилонянам були відомі формули для обчислення певих кінцевих сум, наприклад : $\sum_{m=1}^{k} m^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$[1, с. 163]

Зосереджували увагу на обчисленні суми рядів також і китайські математики. Для прикладу, Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» порахував, скільки предметів становлять n-шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. Чжу Ши-цзе в XIII ст. обчислив суми рядів, утворених внаслідок множення натуральних, кубічних та піднесених до другого степеня чисел із членами зростаючої або спадної прогресій [31, с. 175].

Ньютоном приблизно в 1665 р. вивів формулу бінома:

$$(1+\mathrm{x})^s = 1 + \frac{s}{1}\cdot x + \frac{s(s-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\cdot x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\cdots\cdot(s-t+1)}{t!}\cdot x^t +$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\cdots\cdot(s-t+1)(s-t)}{(t+1)!}\cdot x^{t+1} + \cdots$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2}{(s-1)!}\cdot x^{s-1} + \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2}{s!}$$
$$\cdot x^s \quad (1)$$

$$A_t = \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\cdots\cdot(s-t+2)(s-t+1)}{t!} \quad (2)$$

Як співвідносяться коефіцієнти цих двох рядів визначив Ньютон: $\mathrm{A}_{t+1} = A_t \cdot \frac{s-t}{t+1}$, де s – степінь многочлена, t – індекс многочлена. Потім таблиця Чжу Ши-цзе закінчується, проте можливо визначити конкретну закономірність, за допомогою якої вдасться записати наступні рядки: «Сумою будь-яких двох чисел, розміщених по сусідству в одному й тому самому рядку, є число, розміщене на наступному рядку між ними» (рис. 1.1).

Для прикладу, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6 тощо. За часів Чжу Ши-цзе наведені вгорі формули відомими не були, а міжчислову закономірність знаходили тільки за допомогою спостереження. Ще у 2 ст. до н. .е індійські математики знали про арифметичний трикутник [23].

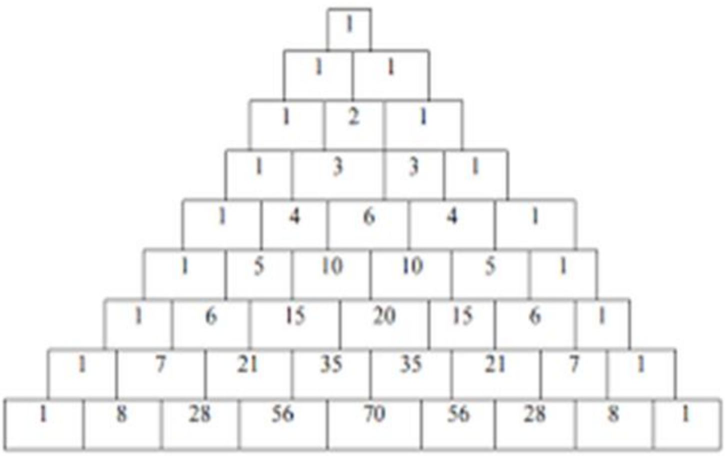


Рис. 1.1

За допомогою теорії рядів стародавні науковці обчислювали площі різних геометричних фігур. Таким чином, можемо зробити висновок про те, геометричну інтерпретацію рядів почали використовувати ще при Евдоксі й Архімеді.

За допомогою геометричної інтерпретації Евдокс розв’язав задачу на знаходження об’єму піраміди, а Архімед обчислив площу сегмента параболи, центру тяжіння трикутника та площу спіралі. Всі ці задачі залежні від інтеграла $\int x^2\,dx$, і їх можливо привести до знаходження «сум Рімана» виду $\sum an^2$. Площу спіралі Архімед обчислив за допомогою леми, яка має вид: $N^3 < 3\sum_{n=1}^{N} n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^{N} n < (N+1)^3$ [5, с. 169].

Площу сегмента Архімед обчислив, вписавши в нього трикутник з вершиною в точці дотику дотичної, паралельної до хорди сегмента, потім вписав трикутники в кожен з двох сегментів, що лишилися, так само вписав трикутники, сумою площ яких є чверть площі першого трикутника, потім в чотири нових сегмента знову вписав трикутники тощо. Архімед прийшов до такого висновку, що площою заданого сегменту є добуток площі першого трикутника та суми безкінечного ряду: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{3}{4}$. Цей метод використовував і Гюйгенс задля з’ясування меж, в яких має знаходитись площа кругового сегмента [32, с. 318].

Формального розвитку теорія рядів як бескінечнних сум конкретних доданків набула на початку XVII століття.

Геометричну інтерпретацію числових рядів досліджував відомий італійський математик П’єтро Менгорі. Він надав геометричне представлення такого числового ряду: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$ (рис. 1.2). Науковець розглянув квадрат зі стороною 1 та відповідною площею, рівною 1. Вчений розділив площу квадрата навпіл, далі одну з половин знов

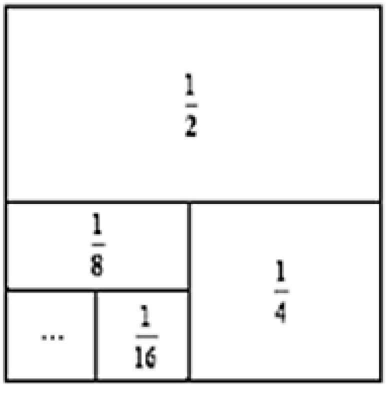


Рис. 1.2

розділив навпіл і т. п. Так одержав безкінечну кількість прямокутників з площами, що утворюють геометричну прогресію (рис. 1.2).

Менголі також довів, що гармонічний ряд розбіжний $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$. Поняття гармонічного ряду ввів у 1668 р. відомий математик У. Броункер. Ряд був названий гармонічним через те, що кожен його член, починаючи з другого, – середнє гармонічне суміжних членів [1, с. 163].

Вчення про ряди набуло поширення внаслідок виникнення потреби знаходження для певних функцій раціональних виразів, завдяки яким можна було б інтегрувати. В ході обчислення цих функцій для конкретних значень змінних виникла потреба досліджувати їх на збіжність. Але тоді вчені прагнули зберегти застосування ряду для усіх значень перемінної, виникали парадокси, тому ця потреба була втрачена.

Аж у 1715 р. П. Варіньйон наголосив на тому, що члени підходящого для застосування ряду, мають неперервно зменшуватись, а остача ряду мала бути безкінечно малою [5, с. 138].

В XVII ст. Тейлор запропонував метод для розкладу функції в ряд. По суті науковець застосував інтерполяційну формулу Ньютона, котру використав у своїх «Началах» [5, с. 140].

В 1742 р. вийшла робота «Трактат о флюксіях», де відомий англійський математик Колін Маклорен при визначені терміну «сума ряду», використав його до виведення цієї інтегральної ознаки геометрично. Він порівняв площу між кривою $y = f(x)$ і її асимптотою з площами вписаної і описаної сходчастих фігур, що дорівнюють сумам ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Цей критерій Маклорен використав для доведення розбіжності гармонічного ряду і збіжності узагальненого гармонічного ряду при $s > 1$. Через це його ознаку називають ознакою Коші-Маклорена.

Видатний науковець Ейлер виявив, що суми певних рядів обчислюються за допомого визначених інтегралів, і разом з тим визначив формулу для знаходження їхніх сум:

Якщо S є сумою перших k членів ряду і m виражається через k, то згідно з Ейлером: $S = \int mdk + \frac{m}{2} + \frac{dm}{12dk} + \frac{d^3m}{720dk^3} + \frac{d^5m}{30240dk^5} + \cdots$

Для випадку коли $m = \frac{1}{x}$, k = x Ейлер одержав рівність виду:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{x}} = \mathrm{C} + \ln(\mathrm{x}) + \frac{1}{2\mathrm{x}} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{720x^4} - \cdots$, де C – стала Ейлера з шістьма десятковими знаками, яку він вивів разом з формулою такого вигляду: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \mathrm{C} + \ln(k+1)$

В 1736 р. Ейлер обчислив суму такого числового ряду: $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots - S = \frac{1}{6} \cdot \pi^2$

Ейлер вважав необхідною та достатньою умовою збіжності ряду $\lim_{n\to\infty}(S_{kn} - S) = 0$. Проте, згодом виявилося, що ця рівність − тільки необхідна умова збіжності ряду. Більшість сучасників Ейлера були такої ж думки про збіжність рядів. [5, с. 142 - 144].

Згодом математики дійшли до висновку, що треба формулювати достатні умови збіжності числових рядів. Тож, у 1768 р. Д’Аламбер сформулював свою ознаку, потім у 1821 р. Коші ─ радикальну ознаку, у 1832 р. Жозеф Раабе ─ ознаку збіжності, засновану на порівнянні зі збіжним узагальнено гармонічним рядом і розбіжним гармонічним рядом, а у 1835 р. сформулював ознаку Кумер [21].

Потреба досліджувати ряди на збіжність стала важливою при виникненні полеміки про ряди з синусами та косинусами. Метод Ейлера, пов’язаний із застосуванням теорем про степеневі суми коренів рівняння, вважали незаконним. Тож науковець шукав методи, які б виправдали його розрахунки. Ейлер не був автором теорії розбіжних рядів, проте були виправданими його більш широке розуміння сумування ряду і методи узагальнюючого сумування, які строго обґрунтували та розвинули тільки на межі XIX ст. та XX ст. Е. Чезаро, Е. Борел, Л. Фейер та інші [5, с. 142].

1.2. Основні теоретичні положення про числові ряди у науковій літературі.

Нині термін «числовий ряд» пов'язаний з поняттям нескінченної числової послідовності. Це трохи інша форма вивчення послідовностей та їхніх границь. Тож, треба розглянути означення числового ряду в такому вигляді.

Числовий ряд – це вираз виду $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – певна безкінечна послідовність чисел – членів ряду.-

N-на часткова сума ряду – скінчена сума всіх членів ряду до n-го члена включно, тобто сума: $Sn = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

У свою чергу, суми виду $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$ – *частинні суми ряду.*

Збіжний числовий ряд – числовий ряд, для частинних сум якого існує скінчена границя послідовності: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, де число S – сума ряду, а S_n – n-ий член послідовності $\{S_n\}$.

$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$

Щоб визначити збіжність (або розбіжність) ряду не принципово враховувати всі його члени. Достатньо обмежитися членами, починаючи з певного місця або номера n [7, с. 49].

Розбіжний числовий ряд – числовий ряд, для частинних сум якого скінчена границя послідовності не існує або рівна безкінечності.

Властивості збіжних числових рядів:

1. Дистрибутивна властивість.

Збіжний ряд можна множити почленно на довільну константу. Тоді збіжність не порушиться, а сума помножиться на ту сталу. Якщо стала рівна нулеві, то ряд буде збіжний завжди [6, с. 43].

2. Збіжні ряди можна віднімати чи додавати почленно. В такому випадку збіжність не порушиться. Суми рядів додаватимуться чи відніматимуться відповідно.

3. Якщо від збіжного ряду відкинути чи додати довільну скінчену кількість доданків, то збіжність ряду не порушиться.

4. Якщо ряд збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, де $r_n = S_n - S$.

5. Вилучення або додавання скінченої кількості перших членів ряду не впливає на збіжність ряду; якщо вихідний ряд збіжний, то сума одержаного ряду буде меншою за суму початкового ряду на суму вилучених членів.

6. Асоціативна властивість.

Члени збіжного ряду можна групувати будь-яким чином, не міняючи їхнє розміщення.

Одна з основних задач теорії рядів – дослідження на збіжність. Таку задачу легше розв'язати, якщо спочатку з'ясувати виконання необхідної ознаки збіжності ряду [6, с. 31- 32].

Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ збіжний, то $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Якщо ця ознака не виконується, тоді ряд є розбіжним. У разі виконання цієї умови ряд може бути збіжним і треба розглянути достатні ознаки.

Достатня умова розбіжності ряду: ряд розбіжний, якщо його загальний член не прямує до нуля, а саме $\lim\limits_{i\to\infty} a_i \neq 0$.

Розглянемо, які є інші достатні умови збіжності рядів, проте спочатку варто навести види числових рядів.

Числові ряди поділяються на:

1. Знакододатні ряди.

2. Знакозмінні ряди.

Знакододатний числовий ряд – такий числовий ряд, членами якого є лише додатні числа.

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів:

1. Ознака порівняння.

Нехай для деякого n виконується нерівність $a_n \geq b_n$, тоді:

1) Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ теж збіжний.

2) Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ теж розбіжний.

2. Гранична ознака порівняння.

Якщо для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, де l – скінченна величина, то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Спеціальні ознаки збіжності ряду:

1. Ознака Д'Аламбера в граничній формі.

Нехай задано ряд із додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ для кожного n. І нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$:

- якщо $q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;
- якщо $q = 1$, питання збіжності залишається відкритим.

2. Радикальна ознака Коші в граничній формі.

Нехай задано ряд із додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ для кожного n та існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$:

- якщо $q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;
- якщо $q = 1$, питання збіжності залишається відкритим.

3. Інтегральна ознака Коші:

Нехай $f(x)$ неперервна, невід'ємна й монотонно спадна на $[1; +\infty)$ функція. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збігаються, або розбігаються одночасно.

4. Ознака Раабе:

Хай задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в якому $a_n > 0$, то для цього ряду справедливі такі твердження:

- якщо знайдуться число $\mathrm{r} > 0$ і номер n_0, для яких:

$\mathrm{n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$ для всіх $n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

- якщо знайдеться номер n_0 такий, що:

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$ для всіх $n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Ця ознака менш сильна, ніж ознака Бертрана.

5. Ознака Куммера:

Хай задано числову послідовність $\{c_n\}, c_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n} = +\infty$, тоді цей ряд розбіжний. Тож для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в якому $a_n > 0$, справедливо:

- якщо знайдуться число $d > 1$ і номер n_0 такі, що: $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq d$ для всіх $n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.
- якщо знайдеться номер n_0 такий, що: $c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$ для всіх $n \geq n_0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

6. Ознака Гаусса:

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в якому $a_n > 0$, знайдуться номер n_0 та числа μ, γ, $\alpha > 0$ та $C > 0$ такі, що відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ моджна представити так:

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \gamma + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}, |\theta_n| \leq C$ для всіх $n \geq n_0$, то:

- якщо $\gamma > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;
- якщо $\gamma < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний;
- якщо $\gamma = 1$ і $\mu > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;
- якщо $\gamma = 1$ і $\mu \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

7. Ознака Бертрана (логарифмічна ознака):

Якщо для $c_n = n \cdot \ln n$ побудувати варіанту

$B_n = \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \ln n \cdot (R_n - 1)$, то:

Якщо варіанта Bn має границю (скінченну або ні) B $B_n = \lim_{n\to\infty} B_n$, то при B_n >1 ряд збігається, а при B<1 – розбігається.

Знакозмінні ряди – ряди, членами яких є додатні та від’ємні числа.

Вони бувають такими:

1. Знакопереміжні ряди – ряди, члени яких послідовно змінюють знак.

Такі ряди досліджують на збіжність за *ознакою Лейбніца:*

Якщо для членів ряду виконуються такі умови:

1) монотонно спадають: $c_{n+1} < c_n$ для кожного n;

2) прямують до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$;

то ряд $\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot c_n$ збігається.

Наслідок. Залишок ряду Лейбниця по модулю не більший першого відкинутого члена ряда.

2. Довільні знакозмінні – ряди, члени яких змінюють знак не послідовно.

Такі ряди можуть бути:

- *абсолютно збіжні,* якщо ряд збіжний та збіжним є ряд з абсолютних величин цього ряду.

З абсолютної збіжності слідує просто збіжність ряду. Збіжний ряд не завжди збіжний абсолютно.

Абсолютно збіжним рядам притаманна *переставна властивість (Римана):*

Якщо ряд збіжний умовно, то для довільного числа А можна так переставити члени ряду, що сума отриманого ряду буде рівна А (А може бути рівне ∞).

- *умовно збіжні,* якщо ряд збіжний, проте ряд з абсолютних величин цього ряду є розбіжним.
- *розбіжні.*

Ознаки збіжності довільних знакозмінних рядів:

1. Ознака Абеля. Якщо виконуються такі дві умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$ збіжний;

2) числа a_n утворюють монотонну обмежену послідовність $a_n \le K$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ збіжний.

2. Ознака Дирихле. Якщо виконуються такі дві умови:

1) часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ в сукупності обмежені: $\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right| \le M$;

2) числа a_n утворюють монотонну послідовність, що прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ збігається.

Висновки до розділу 1

Аналіз основних теоретичних положеннь про числові ряди у науковій літературі, історичних матеріалів щодо їхньої появи призвів до висновку: чітких періодів розвитку теорія рядів не має і неможливо встановити точну дату їх заснування. Хоча ще в стародавніх цивілізаціях, для прикладу, в Стародавньому Єгипті, Стародавньому Вавилоні, Стародавньому Китаї знали певні відомості про обчислення суми безкінечної кількості доданків і намагались знайти їх суми. Мислителі часів Евдокса та Архімеда пробували застосувати теорію рядів задля розв’язування задач на обчислення об’єму піраміди, площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника.

Формального розвитку теорія рядів як безкінечних сум конкретних доданків набула аж на початку XVII століття, так як науковці досліджували питання, котрі неможливо розглядати без розвиненої теорії рядів. Важливий вклад до розвитку теорії рядів в XVII столітті зробили Ейлер, Броункер, Кестнер, Менгорі. Детальніше була проаналізована робота П’єтра Менгорі, адже саме він візуально демонстрував у вигляді безлічі прямокутників,що ряд: 1/2+1/2^2 +1/2^3 + ⋯ = 1. Ейлер запропонував необхідну умову збіжності ряду, проте помилково вважав її достатньою умовою. Згодом математики дійшли до висновку, що треба формулювати достатні умови збіжності числових рядів. Тож, у 1768 р. Д’Аламбер сформулював свою ознаку, потім у 1821 р. Коші ─ радикальну ознаку, у 1832 р. Жозеф Раабе ─ ознаку збіжності, засновану на порівнянні зі збіжним узагальнено гармонічним рядом і розбіжним гармонічним рядом, а у 1835 р. – Кумер.

Проаналізували сучаснішу наукову літературу по теорії рядів, досліджені їхні властивості і розглянуто достатні ознаки збіжності.

РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КВАДРАТУРИ ПРОЕКЦІЙ РІЗНОМАНІТНИХ ОБ'ЄКТІВ

В розділі пропоную добірки вправ, спрямованих на патріотичне, екологічне, моральне виховання учнів старшої школи та студентів ЗВО та на вдосконалення ключових предметних компетентностей: математичної, інформаційно-комунікаційної, екологічної, культурної, вільного володіння державною мовою, здатності спілкуватися іноземною мовою, ініціативності, навчання впродовж життя, компетентності в галузі природничих наук, техніки й технологій, громадянської та соціальної компетентності, підприємливості. Також пропонуються методичні рекомендації щодо викладання числових рядів та використання запропонованих добірок вправ.

2.1. Розв'язання базової задачі про числовий ряд площ квадратів.

Перш ніж перейти до розв’язання запропонованих мною задач, варто розглянути базову задачу. На основі цієї задачі ми будемо розв’язувати запропоновані добірки вправ.

Базова задача.

Скласти числовий ряд площ квадратів зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність.*

Спочатку наведемо геометричну інтерпретацію ряду, який треба скласти та дослідити на збіжність (рис. 1).

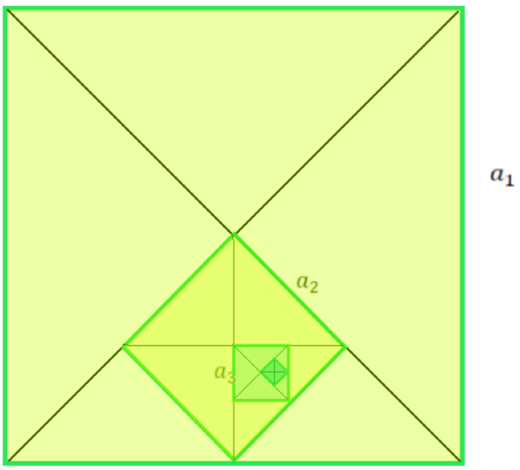


Рис. 1

Знайдемо послідовність довжин сторін квадратів.

Нехай початковий квадрат має сторону довжиною $a_1 = 1$. Тоді сторона другого квадрата буде $a_2 = a_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, третій квадрат матиме сторону: $a_3 = a_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = a_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$ і т. п.

Запишемо послідовність довжин сторін квадратів: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $a_3 = = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$, …, $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1}$. Використаємо формулу для обчислення площі квадрата: $S_n = {a_n}^2$, де $a_n -$ сторона квадрата.

Запишемо послідовність площ квадратів:

$$S_1 = (a_1)^2 = 1$$

$$S_2 = (a_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$S_3 = (a_3)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^4$$

……………

$$S_n = (a_n)^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1}\right)^2$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність. Спочатку перевіримо виконання необхідної умови: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$

Необхідна умова виконується, а тому ряд площ квадратів може бути збіжним. Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{1}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3(n-1)}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ квадратів збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_1 = 1$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму всіх членів ряду: $S = \frac{8}{7}$.

2.2. Генерація і дослідження числових рядів, які описують українську символіку.

І рівень складності

Задача 1*. Складти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму Прапора України, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.2.1. «Прапор України», вписаний в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, заданий на рис. 2.2.2. та обмежений графіками функцій з таблиці 2.2.1.:*

Таблиця 2.2.1.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AB: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25$	x є (1; 7)
2	DE: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75$	x є (1; 7)
3	BC: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9}$	x є (7; 19)
4	EF: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{295}{9}$	x є (7; 19)

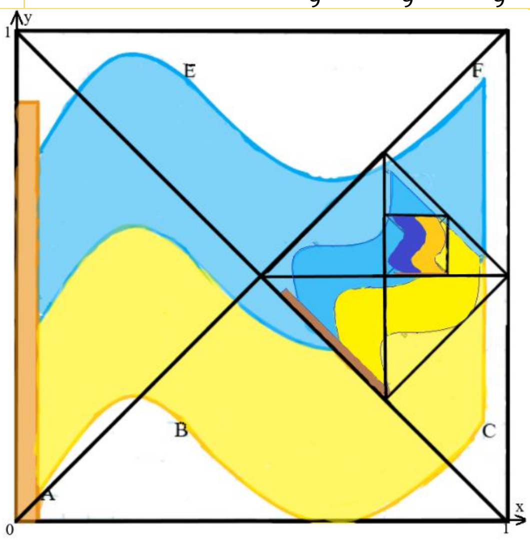


Рис. 2.2.1.

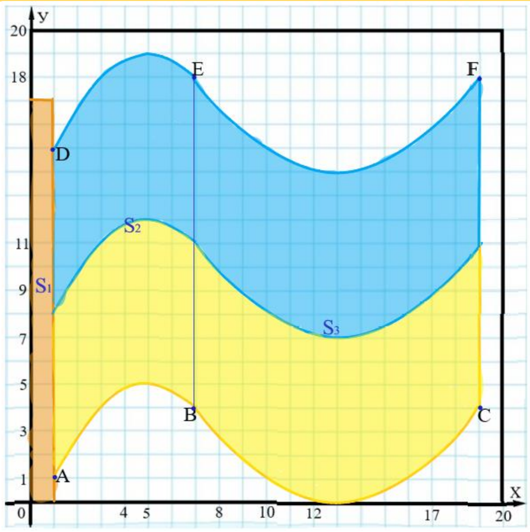


Рис. 2.2.2.

Щоб полегшити обчислення, розглянемо квадрат зі стороною 20 та відповідну криволінійну трапецію вписану в нього, які отримали гомотетією $(O\ (0;0), 20)$. Знайдемо площу «Прапора України». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 1, x = 7 та x = 19 на три менші площі. Обчислимо їх та знайдемо їх суму. Вона і буде площею шуканої криволінійної трапеції.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = 0 та y = 17, x = 0, x = 1

$$S_1 = \int_0^1 (17-0)\,dx = 17x\,_0|^1 = 17$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25$, x = 1, x = 7 та $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75$.

$$S_2 = \int_1^7 \left(-0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75 - (-0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25)\right)dx =$$

$$= \int_1^7 (19-5)\,dx = 14x\,_1|^7 = 98 - 14 = 84$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{295}{9}$ та $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9}$, x = 7, x = 19

$$S_3 = \int_7^{19} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{295}{9} - \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9}\right)\right)dx = 14x\,_7|^{19} = 168$$

$$S_{\text{прапора}} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_{\text{прапора}} = 17 + 84 + 168 = 269$$

Відношення площ гомотетичних фігур рівне коефіцієнту гомотетії, піднесеному до квадрата, тобто: $\frac{S_{\text{квадрата 20x20}}}{S_{\text{квадрата 1x1}}} = \frac{S_{\text{прапора 20x20}}}{S_{\text{прапора 1x1}}} = 20^2 = 400$. Тож, $\frac{269}{S_{\text{прапора 1x1}}} = 400$. Таким чином, площа криволінійної трапеції, що має форму «прапора», становить $\frac{269}{400}$ площі квадрата зі стороною 1 одиниця довжини.

Розглянемо геометричну інтерпретацію ряда «Прапорів України». Площа кожної криволінійної трапеції становить $\frac{269}{400}$ площі відповідного квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, ..., $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «Прапорів України», вписаних у квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\text{ прапора}} = \frac{269}{400} \cdot S_{1\text{ квадрата}} = \frac{269}{400}$$

$$S_{2\text{ прапора}} = \frac{269}{400} \cdot S_{2\text{ квадрата}} = \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\text{ прапора}} = \frac{269}{400} \cdot S_{3\text{ квадрата}} = \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\text{ прапора}} = \frac{269}{400} \cdot S_{n\text{ квадрата}} = \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ прапора}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ прапора}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{269}{400 \cdot 2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ прапорів збіжний.

Отриманий ряд – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ прапора}} = \frac{269}{400}$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ прапора}}}{1-q} = \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{269}{\cancel{400}_{50}} \cdot \frac{\cancel{8}}{7} = \frac{269}{350}$.

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму Серця України, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.2.3. «Серце України», вписане в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини та симетричне відносно прямої x = 10, задане на рис. 2.2.4. та обмежене графіками функцій з таблиці 2.2.2.:*

Таблиця 2.2.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	BC: y = $-4\sqrt{x-1}+12$	x є (1; 10)
2	BD: y = $\frac{5}{2}\sqrt{x-1}+12$	x є (1; 2)
3	DA: y = $-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+12$	x є (2; 10)

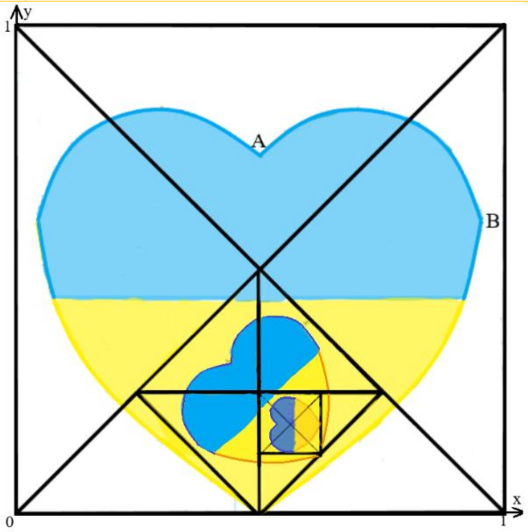


Рис. 2.2.3.

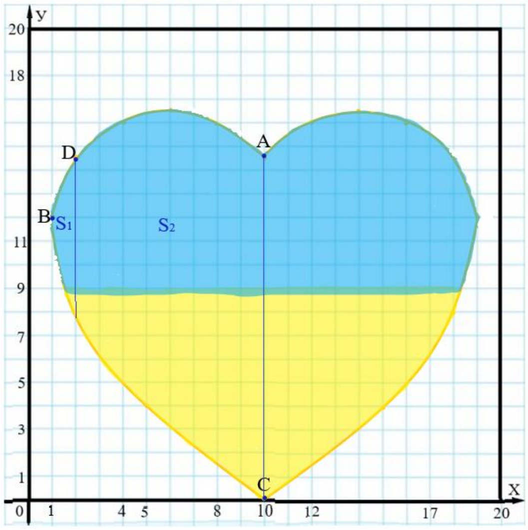


Рис. 2.2.4.

Щоб полегшити обчислення, розглянемо квадрат зі стороною 20 та відповідну криволінійну трапецію вписану в нього, який отримали гомотетією $(O\ (0;0), 20)$. Знайдемо площу «Серця України». Вона обмежена кількома графіками функцій. Умовно розіб'ємо прямими x = 2 та x = 10 площу половини серця на дві менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = $\frac{5}{2}\sqrt{x-1}+12$ та y = $-4\sqrt{x-1}+12$, x = 2, x = 1

$$S_1=\int_1^2\left(\frac{5}{2}\sqrt{x-1}+12-\left(-4\sqrt{x-1}+12\right)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{13}{2}\sqrt{x-1}\right)\,dx=$$

$$=\frac{13}{2}\int_1^2(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{13}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}{}_1|^2=\frac{13}{3}\cdot\left((2-1)^{\frac{3}{2}}-(1-1)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{13}{3}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = $-4\sqrt{x-1}+12$, y = $-\frac{1}{8}x^2+$ $+\frac{3}{2}x+12$, x = 2, x = 10.

$$S_2 = \int_2^{10} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 12 - \left(-4\sqrt{x-1} + 12 \right) \right) dx = 100$$

Фігури, симетричні щодо прямої, рівні. А рівні фігури – «половинки серця» – мають однакові площі: $S_{\text{серця}} = 2 \cdot (S_1 + S_2)$

$$S_{\text{серця}} = 2 \cdot \left(\frac{13}{3} + 100 \right) = \frac{626}{3}$$

Відношення площ гомотетичних фігур рівне коефіцієнту гомотетії, піднесеному до квадрата, тобто: $\frac{S_{\text{квадрата 20x20}}}{S_{\text{квадрата 1x1}}} = \frac{S_{\text{серця 20x20}}}{S_{\text{серця 1x1}}} = 20^2 = 400$. Тож, $\frac{626}{3S_{\text{серця 1x1}}} = 400$. Таким чином, площа криволінійної трапеції, що має форму «серця» становить $\frac{313}{600}$ площі квадрата зі стороною 1 одиниця довжини.

Розглянемо геометричну інтерпретацію ряда «Сердець України». Площа кожної криволінійної трапеції становить $\frac{313}{600}$ площі відповідного квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, ..., $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «Сердець України», вписаних у квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\ \text{серця}} = \frac{313}{600} \cdot S_{1\ \text{квадрата}} = \frac{313}{600}$$

$$S_{2\ \text{серця}} = \frac{313}{600} \cdot S_{2\ \text{квадрата}} = \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\ \text{серця}} = \frac{313}{600} \cdot S_{3\ \text{квадрата}} = \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^6}$$

…………….

$$S_{n\ \text{серця}} = \frac{313}{600} \cdot S_{n\ \text{квадрата}} = \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\ \text{серця}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim_{n\to\infty} S_{n\text{ серця}} = \lim_{n\to\infty} \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{313}{600 \cdot 2^{3n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ «сердець» збіжний.

Отриманий ряд – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ серця}} = \frac{313}{600}$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ серця}}}{1-q} = \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{313}{\cancel{600}_{75}} \cdot \frac{\cancel{8}}{7} = \frac{313}{525}$.

III рівень складності

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму карти України, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.2.5. «Карта України», вписана в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, задана на рис. 2.2.6. та обмежена графіками функцій з таблиці 2.2.3.:*

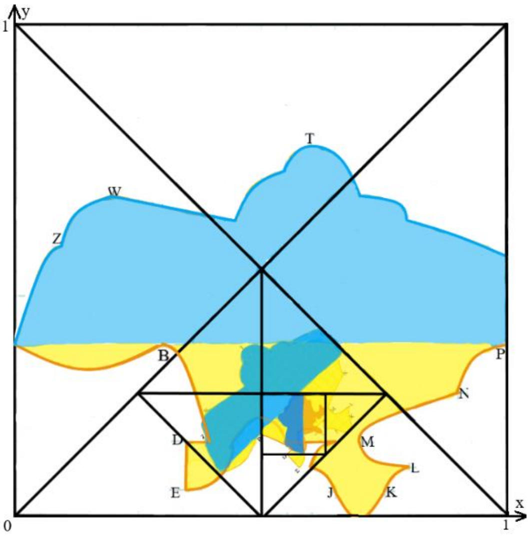
Таблиця 2.2.3.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AZ: $y = -x^2 + 4x + 7$	$x \in (0; 2)$
2	ZW: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$	$x \in (2; 4)$
3	AB: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$	$x \in (0; 6)$
4	WV: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$	$x \in (4; 9)$
5	BC: $y = -x^2 + 12x - 29$	$x \in (6; 8)$
6	EF: $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$	$x \in (7; 9)$
7	FG: $y = -x^2 + 20x - 96$	$x \in (9; 11)$
8	IM: $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 6} + 2$	$x \in (12; 14)$
9	IJ: $y = -\sqrt[3]{x - 13} + 1$	$x \in (12; 14)$
10	KL: $y = \sqrt[3]{x - 15} + 1$	$x \in (14; 16)$
11	ML: $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x - 7} + 3$	$x \in (14; 16)$
12	SR: $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 8} + 12$	$x \in (14; 16)$

Продовж. табл 2.2.3.

13	MN: $y = \sqrt{x - \mathbf{14}} + \mathbf{3}$	x є (14; 18)
14	NP: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x - 193$	x є (18; 20)
15	VU: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 11x - \frac{93}{2}$	x є (9; 11)
16	UT: $y = -x^2 + 24x - 129$	x є (11; 12)
17	TS: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 57$	x є (12; 14)
18	RQ: $y = \sqrt{-x + 20} + 10$	x є (16; 20)



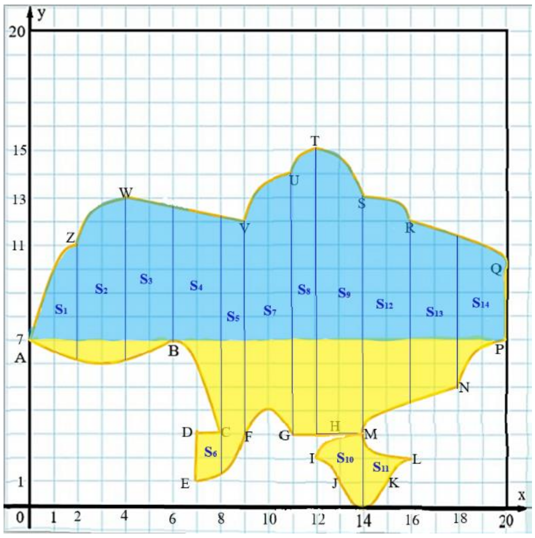


Рис. 2.2.5. Рис. 2.2.6.

Додаткові творчі завдання до задач про українську символіку. Учні отримують аркуші із зображеною там картою України. Кожен має спланувати і накреслити свою бажану майбутню подорож. Або можна запропонувати учням створити кардмейкінг – листівку для підтримки наших захисників.

Щоб полегшити обчислення, розглянемо квадрат зі стороною 20 та відповідну криволінійну трапецію вписану в нього, який отримали гомотетією $(O\ (0; 0), 20)$. Знайдемо площу «карти України». Вона обмежена багатьма графіками функцій. Умовно розіб'ємо прямими x = 0, x = 2, x = 4, x = 8, x = 10, x = 11, x = 12, x = 14, x = 16, x = 18, x = 20 площу карти на 14 менших площ.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, x = 2, x = 0 та $y = -x^2 + 4x + 7$.

$$S_1 = \int_0^2 \left(-x^2 + 4x + 7 - \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7\right)\right) dx = \frac{172}{27}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, x = 4, x = 2, y = $-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$.

$$S_2 = \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 - \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7\right)\right) dx = \frac{340}{27}$$

Аналогічно за допомогою аналітичного задання функцій отримаємо наступні частинні суми ряда: $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$.

Площа S_3 обмежена графіками функцій: y $= -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, x = 4, x = 6, y = $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, має значення $S_3 = \frac{1706}{135}$.

Площа S_4 обмежена графіками функцій: y $= -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, x = 6, x = 8, y = $-x^2 + 12x - 29$, має значення $S_4 = \frac{202}{15}$.

Площа S_5, яка обмежена графіками функцій: y = $-\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, x = 8, x = 9, y = $\frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$, має значення $S_5 = \frac{149}{15}$.

Площа S_6, яка обмежена графіками функцій: y = 3, y = $\frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$, x = 7, x = 8, має значення $S_6 = \frac{11}{6}$.

Площа S_7, яка обмежена графіками функцій: y = $-x^2 + 20x - 96$, x = 9, x = 11, y = $-\frac{1}{2}x^2 + 11x - \frac{93}{2}$, має значення $S_7 = \frac{58}{3}$.

Площа S_8, яка обмежена графіками функцій: y = 3, $-x^2 + 24x - 129$, x = 11, x = 12, має значення $S_8 = \frac{35}{3}$.

Площа S_9, яка обмежена графіками функцій: y $= -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 57$, x = 12, x = 14, y = 3, має значення: $S_9 = \frac{68}{3}$.

Площа S_{10}, яка обмежена графіками функцій: x = 12, x = 14, y = $\sqrt{\frac{1}{2}x - 6} + 2$, y = $-\sqrt[3]{x - 13} + 1$, має значення $S_{10} = \frac{29}{6}$.

Площа S_{11}, яка обмежена графіками функцій: x = 16, $y = \sqrt[3]{x-15}+1$, y = $-\sqrt{\frac{1}{2}x-7}+3$, x = 14, має значення $S_{11}=\frac{8}{3}$.

Площа S_{12}, яка обмежена графіками функцій: y = $\sqrt{x-14}+3$, x = 14, y = $\sqrt{-\frac{1}{2}x+8}+12$, x = 16, має значення $S_{12}=\frac{58-4\sqrt{2}}{3}$.

Площа S_{13}, яка обмежена графіками функцій: y = $\sqrt{x-14}+3$, x = 16, x = 18, y = $\sqrt{-x+20}+10$, має значення $S_{13}=14$.

Площа S_{14} обмежена графіками функцій: y $=-\frac{1}{2}x^2+20x-193$, y = $\sqrt{-x+20}+10$, x = 18, x = 20, має значення $S_{14}=\frac{22+4\sqrt{2}}{3}$.

$$S_{\text{карти}} = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}+S_{11}+S_{12}+$$
$$+S_{13}+S_{14}$$
$$S_{\text{карти}} = \frac{172}{27}+\frac{340}{27}+\frac{1706}{135}+\frac{202}{15}+\frac{149}{15}+\frac{11}{6}+\frac{58}{3}+\frac{35}{3}+\frac{68}{3}+\frac{29}{6}+\frac{8}{3}+$$
$$+\frac{58-4\sqrt{2}}{3}+14+\frac{22+4\sqrt{2}}{3}=\frac{512^{\backslash 5}}{27}+\frac{1706}{135}+\frac{117^{\backslash 27}}{5}+\frac{269^{\backslash 45}}{3}+$$
$$+14^{\backslash 135}=\frac{21420}{135}=158\frac{2}{3}$$

Відношення площ гомотетичних фігур рівне коефіцієнту гомотетії, піднесеному до квадрата, тобто: $\frac{S_{\text{квадрата 20x20}}}{S_{\text{квадрата 1x1}}}=\frac{S_{\text{карти 20x20}}}{S_{\text{карти 1x1}}}=20^2=400$. Тож, $\frac{476}{3S_{\text{карти 1x1}}}=400$. Таким чином, площа криволінійної трапеції, що має форму «карти» становить $\frac{119}{300}$ площі квадрата зі стороною 1 одиниця довжини.

Розглянемо геометричну інтерпретацію ряда «карт України». Площа кожної криволінійної трапеції становить $\frac{119}{300}$ площі відповідного квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1=1$, $S_2=\frac{1}{2^3}$, $S_3=\frac{1}{2^6}$, …, $S_n=\frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «карт України», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\text{ карти}} = \frac{119}{300} \cdot S_{1\text{ квадрата}} = \frac{119}{300}$$

$$S_{2\text{ карти}} = \frac{119}{300} \cdot S_{2\text{ квадрата}} = \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\text{ карти}} = \frac{119}{300} \cdot S_{3\text{ квадрата}} = \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\text{ карти}} = \frac{119}{300} \cdot S_{n\text{ квадрата}} = \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ карти}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ кр}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д’Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{119}{300 \cdot 2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ «карт» збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ карти}} = \frac{119}{300}$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ карти}}}{1-q} = \frac{119}{300} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{34}{75}$.

Вихідні дані та умови задач про числові ряди, які описують українську символіку, наведені в додатку А. Одержані результати розв'язування задач І-го рівня складності представлені в таблиці 2.2.4.

Таблиця 2.2.4.

Результати дослідження рядів, які описують українську символіку (І рівень складності)

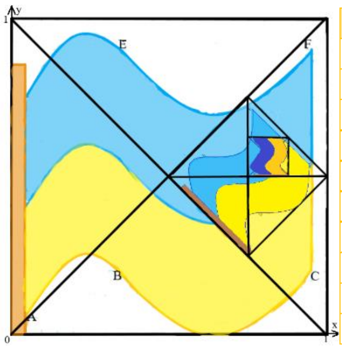
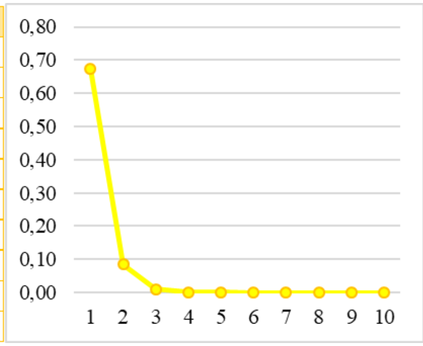
<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Прапор України</td><td>269</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{269}{400} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$</td><td>$\frac{269}{350}$</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,67250000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,08406250000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,01050781250</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00131347656</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00016418457</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00002052307</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000256538</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000032067</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000004008</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000501</td></tr>
</table>


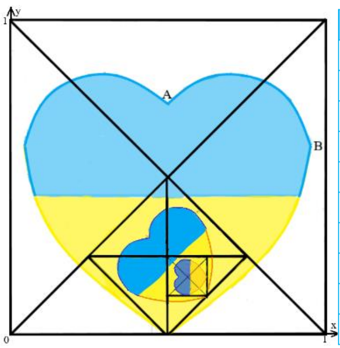
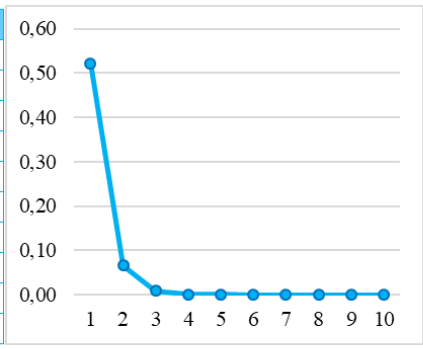
Рис. 2.2.7. Геометрична інтерпретація ряда прапорів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Серце України</td><td>$\frac{626}{3}$</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{313}{600} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$</td><td>$\frac{313}{525}$</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,52166666667</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,06520833333</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00815104167</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00101888021</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00012736003</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001592000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000199000</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000024875</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000003109</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000389</td></tr>
</table>


Рис. 2.2.8. Геометрична інтерпретація ряда сердець та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

За аналогічним алгоритмом був одержаний ряд площ «Гербів України». Одержані результати розв'язування задач ІІІ-го рівня складності представлені в таблиці 2.2.5.

Таблиця 2.2.5.

Результати дослідження рядів, які описують українську символіку (III рівень складності)

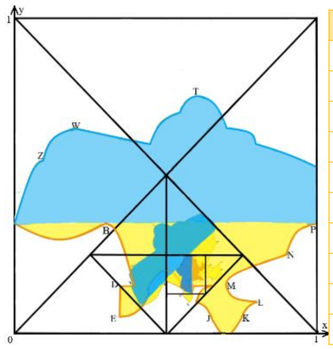
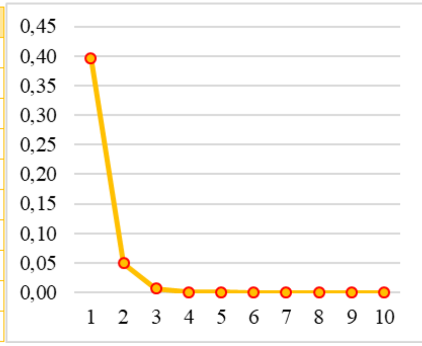
<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Карта України</td><td>$158\frac{2}{3}$</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{119}{300}\cdot\frac{1}{2^{3(n-1)}}$</td><td>$\frac{34}{75}$</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,39666666667</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04958333333</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00619791667</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00077473958</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009684245</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001210531</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000151316</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000018915</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002364</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000296</td></tr>
</table>


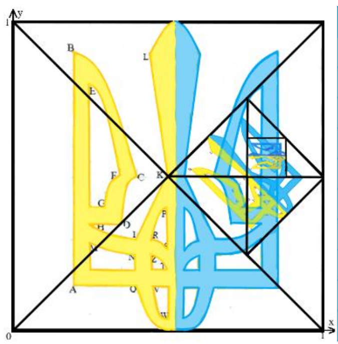
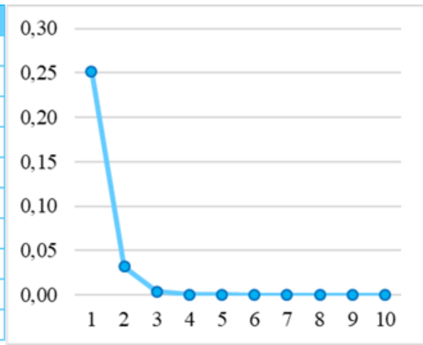
Рис. 2.2.9. Геометрична інтерпретація ряда карт та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Герб України</td><td>100,72</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2{,}014}{2^{3n}}$</td><td>0,2877</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,25175000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,03146875000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00393359375</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00049169922</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00006146240</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000768280</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000096035</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000012004</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001501</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000188</td></tr>
</table>


Рис. 2.2.10. Геометрична інтерпретація ряда гербів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

2.3. Генерація і дослідження числових рядів, які описують флору.

I рівень складності

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму тюльпана, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.3.1. «Тюльпан», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці 2.3.1. Тюльпан симетричний відносно прямої x = 0,5.*

Таблиця 2.3.1.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 5x^2 - 5{,}25x + 1{,}37825$	$x \in (0{,}525; 0{,}875)$
2	$y = 50(x - 0{,}725)^3 + 0{,}4$	$x \in (0{,}525; 0{,}825)$
3	$y = 5x^2 - 5x + 1{,}8$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
4	$y = 0{,}55$	$x \in (0{,}475; 0{,}525)$
5	$y = 0$	$x \in (0{,}475; 0{,}525)$
6	$y = -20x^2 + 24x - 6{,}25$	$x \in (0{,}55; 0{,}7)$
7	$y = -40x^2 + 40x - 9$	$x \in (0{,}5; 0{,}55)$

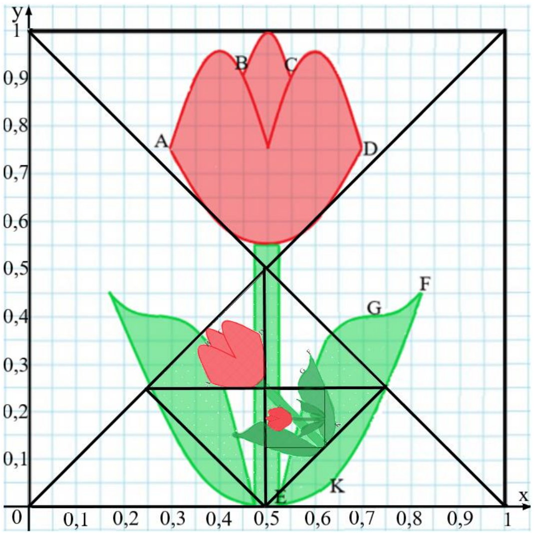


Рис. 2.3.1.

Розв'язання

Перший квадрат має площу 1. Знайдемо площу «тюльпана». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,5, x = 0,525, x = 0,55, x = 0,7, x = 0,825 на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $\mathrm{y} = -40\mathrm{x}^2 + 40\mathrm{x} - 9$ та $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 1{,}8$, x = 0,5, x = 0,55.

$$S_1 = \int_{0,5}^{0,55} (-40\mathrm{x}^2 + 40\mathrm{x} - 9 - 5\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 1{,}8)\, dx = 0{,}020625$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 1{,}8, \mathrm{x} = 0{,}7$, x = 0,55, $\mathrm{y} = -20\mathrm{x}^2 + 24\mathrm{x} - 6{,}25$.

$$S_2 = \int_{0,55}^{0,7} (-20\mathrm{x}^2 + 24\mathrm{x} - 6{,}25 - 5\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 1{,}8) dx = 0{,}039375$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^2 - 5{,}25\mathrm{x} + 1{,}37825$, x = 0,525, x = 0,825, $\mathrm{y} = 50(\mathrm{x} - 0{,}725)^3 + 0{,}4$.

$$S_3 = \int_{0,525}^{0,825} (50(\mathrm{x} - 0{,}725)^3 + 0{,}4 - 5\mathrm{x}^2 + 5{,}25\mathrm{x} - 1{,}37825)\, dx = 0{,}0562125$$

Площа S_4 обмежена графіками функцій: y = 0,55, x = 0,475, y = 0, x = 0,525, має значення $S_4 = 0{,}0275$.

$$S_{\text{тюльпана}} = 2(S_1 + S_2 + S_3) + S_4$$

$$S_{\text{тюльп.}} = 2(0{,}020625 + 0{,}039375 + 0{,}05621) + 0{,}0275 = 0{,}259925\ (\text{кв. од.})$$

$$S_{\text{тюльпана}} = 0{,}259925 \cdot S_{\text{квадрата}}$$

Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі тюльпана становить 0,259925 площі квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, …, $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «тюльпанів», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\ \text{тюльпана}} = 0{,}259925 \cdot S_{1\ \text{квадрата}} = 0{,}259925$$

$$S_{2\ \text{тюльпана}} = 0{,}259925 \cdot S_{2\ \text{квадрата}} = 0{,}259925 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\ \text{тюльпана}} = 0{,}259925 \cdot S_{3\ \text{квадрата}} = 0{,}259925 \cdot \frac{1}{2^6}$$

…………….

$$S_{n\text{ тюльпана}} = 0{,}259925 \cdot S_{n\text{ квадрата}} = 0{,}259925 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ тюльпана}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}259925 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ тюльпана}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}259925 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ «тюльпанів» може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}259925}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ «тюльпанів» збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ тюльпана}} = 0{,}259925, \quad q = \frac{1}{2^3}$.

Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ тюльпана}}}{1-q} = 0{,}259925 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = 0{,}297$.

II рівень складності

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму квітів-дзвіночків, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.3.2. «Дзвіночки», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежені графіками функцій з таблиці 2.3.2. Квіти та деякі листочки мають однакову площу.*

Таблиця 2.3.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 5x^2 - 8x + 3{,}8$	$x \in (0{,}8; 1)$
2	$y = -5x^2 + 10x - 4{,}2$	$x \in (0{,}8; 1)$
3	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}05} + 0{,}5$	$x \in (0{,}8; 1)$
4	$y = -\sqrt{0{,}05x - 0{,}04} + 0{,}6$	$x \in (0{,}8; 1)$
5	$y = \sqrt{0{,}05x} + 0{,}225$	$x \in (0; 0{,}2)$

Продовж. табл. 2.3.2.

6	$y = \frac{x}{\mathbf{2}} + \mathbf{0,225}$	$x \in (\mathbf{0}; \mathbf{0,2})$
7	$y = 3\sqrt{0{,}01x}$	$x \in (0; 0{,}8)$
8	$y = 3\sqrt{0{,}01x} + 0{,}05$	$x \in (0; 0{,}8)$
9	$y = -20x^2 + 30x - 10{,}75$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$
10	$y = 20x^2 - 26x + 8{,}75$	$x \in (0{,}65; 0{,}7)$
11	$y = 20x^2 - 30x + 11{,}55$	$x \in (0{,}7; 0{,}75)$

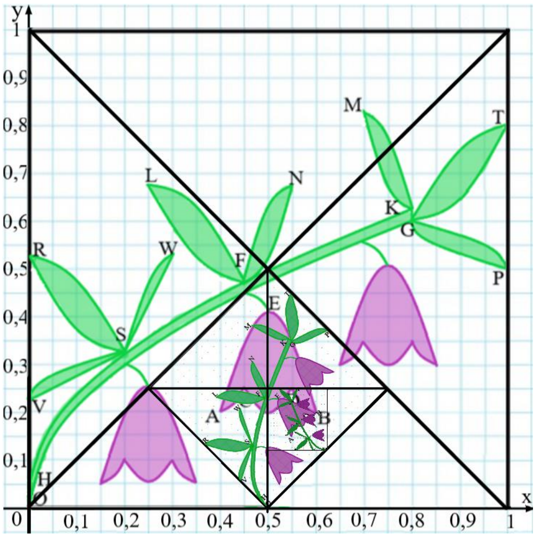


Рис. 2.3.2.

Розв'язання

Використовуючи аналогічний алгоритм, були обчисленні менші площі, на які ми умовно розбили малюнок квітів: $S_1 = 0{,}00(6)$, $S_2 = 0{,}00(3)$, $S_3 = 0{,}01(3)$, $S_4 = 0{,}00(3)$, $S_5 = 0{,}04$, $S_6 = 0{,}008(3)$.

$S_{дзвіночків} = 3(S_1 + S_3) + 2S_2 + 6(S_4 + S_6) + S_5 = 0{,}17(6) \approx 0{,}177$ (кв. од.)

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{28}{25 \cdot 2^{3n}}$

Дослідивши цей ряд на збіжність за ознакою порівняння, отримали, що ряд збіжний.

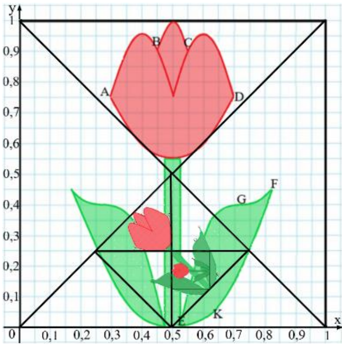
Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\,дзвіночків} = 0{,}177$, $q = \frac{1}{2^3}$.

Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\,дзвіночків}}{1 - q} = 0{,}177 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = 0{,}201$.

За аналогічним алгоритмом були отримані ряди площ різноманітних об'єктів флори. У розробленій добірці 14 задач. В таблиці 2.3.3. представлені результати дослідження ряда тюльпанів та ряда гілкок. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.3.

Результати дослідження ряда тюльпанів та ряда гілок

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Тюльпан</td><td>0,259925</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,0794}{2^{3n}}$</td><td>0,297</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ий член	Частинні суми
1	0,25992500000
2	0,03249062500
3	0,00406132813
4	0,00050766602
5	0,00006345825
6	0,00000793228
7	0,00000099154
8	0,00000012394
9	0,00000001549
10	0,00000000194

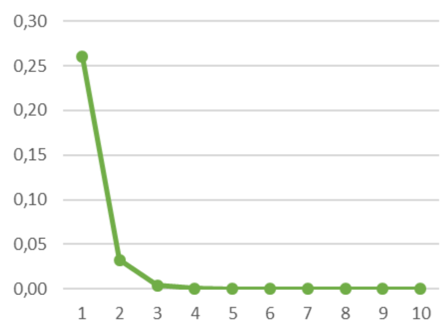
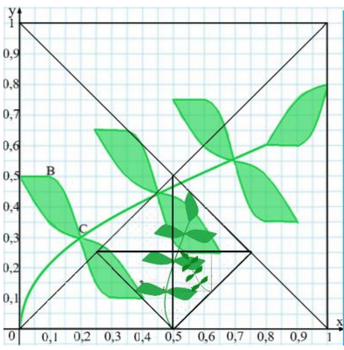


Рис. 2.3.3. Геометрична інтерпретація ряда тюльпанів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гілка</td><td>0,14</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{28}{25 \cdot 2^{3n}}$</td><td>$\frac{4}{25}$</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ий член	Частинні суми
1	0,14000000000
2	0,01750000000
3	0,00218750000
4	0,00027343750
5	0,00003417969
6	0,00000427246
7	0,00000053406
8	0,00000006676
9	0,00000000834
10	0,00000000104

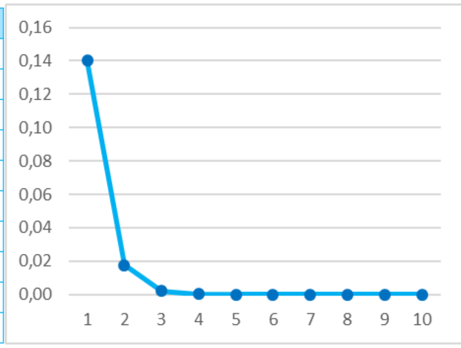
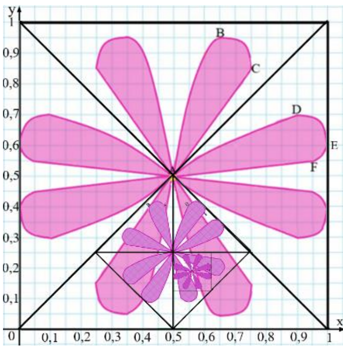


Рис. 2.3.4. Геометрична інтерпретація ряда гілок та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

У таблиці 2.3.4. представлені результати дослідження ряда космей та ряда конюшин. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.4.

Результати дослідження ряда космей та ряда конюшин

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Skp</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Космея</td><td>0,385</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3{,}08}{2^{3n}}$</td><td>0,44</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,38500000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04812500000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00601562500</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00075195313</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009399414</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001174927</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000146866</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000018358</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002295</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000287</td></tr>
</table>

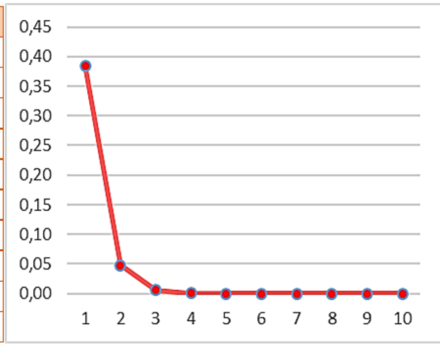
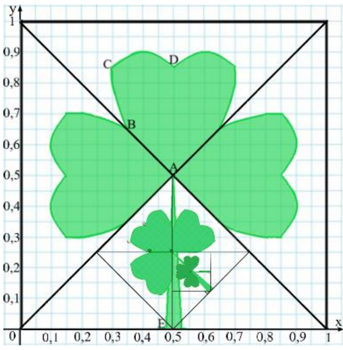



Рис. 2.3.5. Геометрична інтерпретація ряда космей та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Конюшина</td><td>0,34</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{,}72}{2^{3n}}$</td><td>0,39</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,34000000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04250000000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00531250000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00066406250</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00008300781</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001037598</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000129700</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000016212</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002027</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000253</td></tr>
</table>

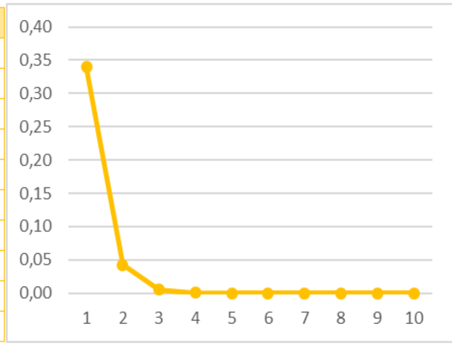



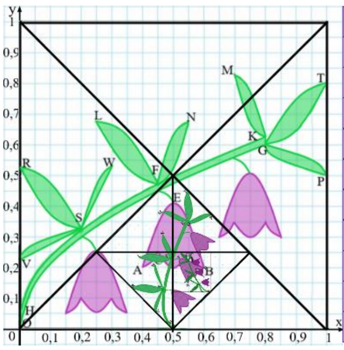
Рис. 2.3.6. Геометрична інтерпретація ряда конюшин та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

Результати дослідження ряда дзвіночків та ряда квітів ломинісу представлені в таблиці 2.3.5. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.5.

Результати дослідження ряда дзвіночків та ряда ломинісів

Об'кт	*Skp*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Дзвіночки	0,177	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,408}{2^{3n}}$	0,201	Збіжний	II
Квітка ломинісу	0,487	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3,896}{2^{3n}}$	0,5566	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,14260000000
2	0,01782500000
3	0,00222812500
4	0,00027851563
5	0,00003481445
6	0,00000435181
7	0,00000054398
8	0,00000006800
9	0,00000000850
10	0,00000000106

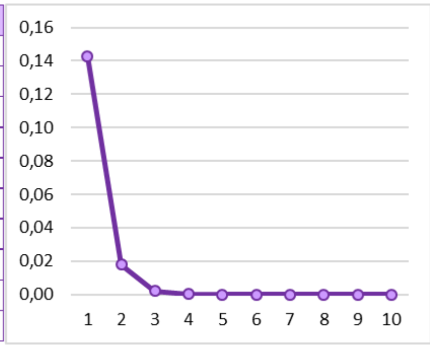
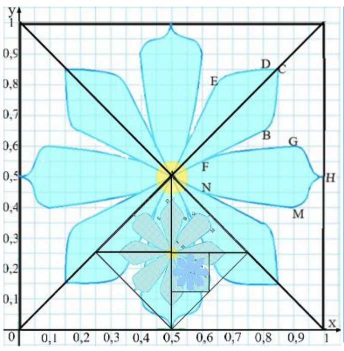


Рис. 2.3.7. Геометрична інтерпретація ряда дзвіночків та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків



n-ий член	Частинні суми
1	0,48700000000
2	0,06087500000
3	0,00760937500
4	0,00095117188
5	0,00011889648
6	0,00001486206
7	0,00000185776
8	0,00000023222
9	0,00000002903
10	0,00000000363

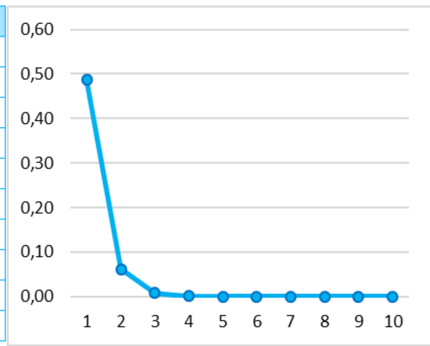


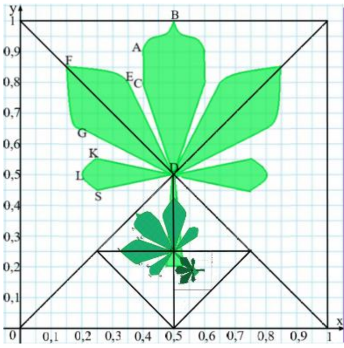
Рис. 2.3.8. Геометрична інтерпретація ряда квітів ломинісу та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

У таблиці 2.3.6. представлені результати дослідження рядів листків каштана та дуба. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.6.

Результати дослідження рядів листків каштана та дуба

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Листок каштана	0,2125	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,7}{2^{3n}}$	0,243	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,21250000000
2	0,02656250000
3	0,00332031250
4	0,00041503906
5	0,00005187988
6	0,00000648499
7	0,00000081062
8	0,00000010133
9	0,00000001267
10	0,00000000158

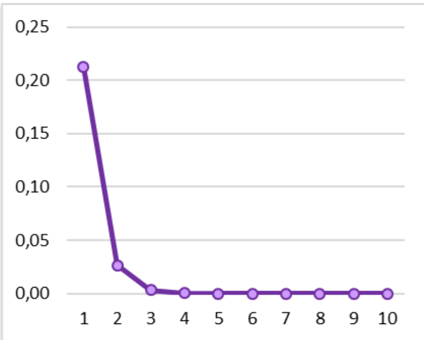
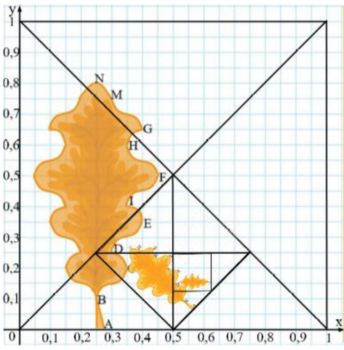


Рис. 2.3.9. Геометрична інтерпретація ряда листків каштана та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Листок дуба	0,1462	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,1696}{2^{3n}}$	0,167	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,14620000000
2	0,01827500000
3	0,00228437500
4	0,00028554688
5	0,00003569336
6	0,00000446167
7	0,00000055771
8	0,00000006971
9	0,00000000871
10	0,00000000109

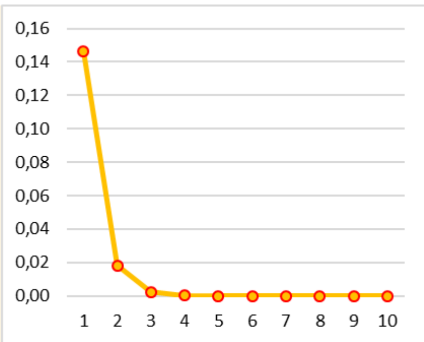
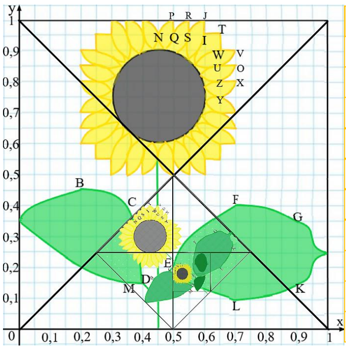


Рис. 2.3.10. Геометрична інтерпретація ряда листків дуба та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Результати дослідження рядів соняшників та квітів маку представлені в таблиці 2.3.7. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.7.

Результати дослідження рядів соняшників та квітів маку

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Соняшник</td><td>0,38</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3,046}{2^{3n}}$</td><td>0,43524</td><td>Збіжний</td><td>ІІІ</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,38075000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04759375000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00594921875</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00074365234</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009295654</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001161957</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000145245</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000018156</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002269</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000284</td></tr>
</table>

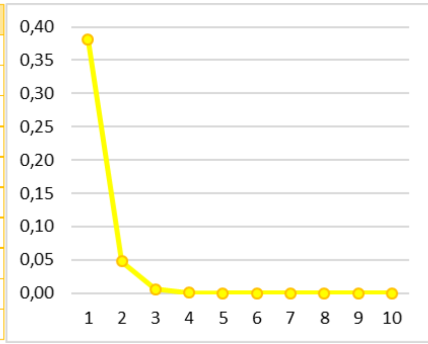
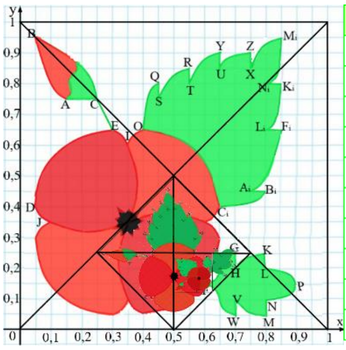


Рис. 2.3.11. Геометрична інтерпретація ряда соняшників та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Мак</td><td>0,53342</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4,2674}{2^{3n}}$</td><td>0,61</td><td>Збіжний</td><td>ІІІ</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,27250000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,03146875000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00393359375</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00049169922</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00006146240</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000768280</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000096035</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000012004</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001501</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000188</td></tr>
</table>

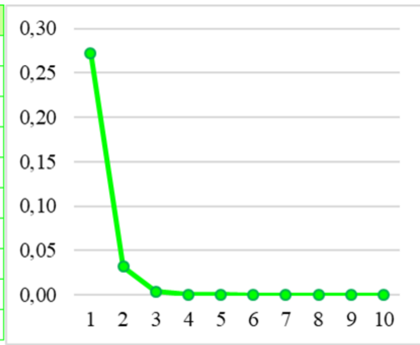
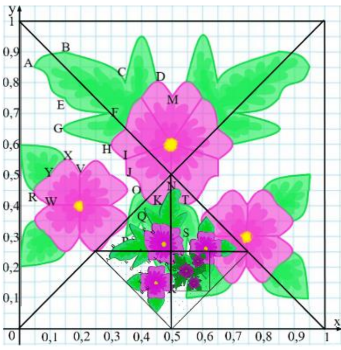


Рис. 2.3.12. Геометрична інтерпретація ряда квітів маку та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

У таблиці 2.3.8. представлені результати дослідження рядів мальв та колосків пшениці. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.8.

Результати дослідження рядів мальв та колосків пшениці

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Skp</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Мальви</td><td>0,488</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3,9}{2^{3n}}$</td><td>0,5575</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ний член	Частинні суми
1	0,48750000000
2	0,06093750000
3	0,00761718750
4	0,00095214844
5	0,00011901855
6	0,00001487732
7	0,00000185966
8	0,00000023246
9	0,00000002906
10	0,00000000363

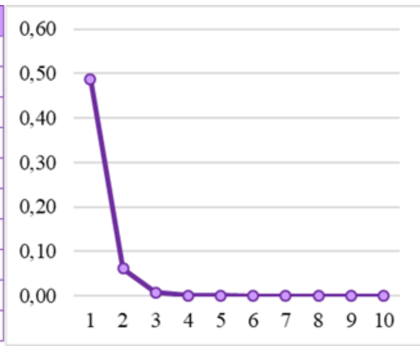
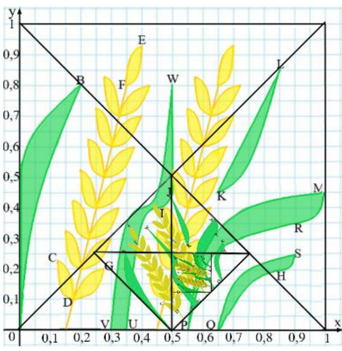


Рис. 2.3.13. Геометрична інтерпретація ряда мальв та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Колоски пшениці</td><td>0,2</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1,6}{2^{3n}}$</td><td>0,23</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ний член	Частинні суми
1	0,20125000000
2	0,02515625000
3	0,00314453125
4	0,00039306641
5	0,00004913330
6	0,00000614166
7	0,00000076771
8	0,00000009596
9	0,00000001200
10	0,00000000150

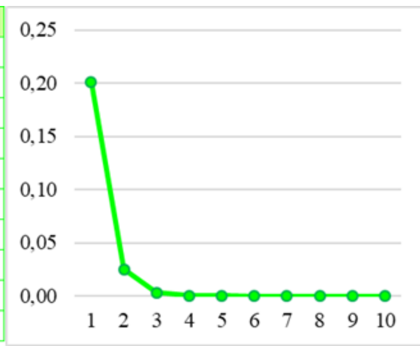
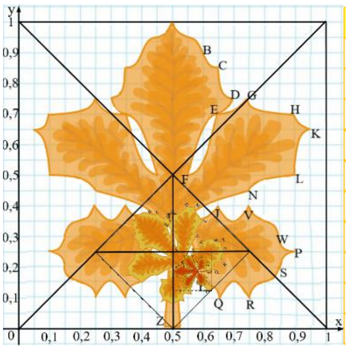


Рис. 2.3.14. Геометрична інтерпретація ряда колосків пшениці та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

Результати дослідження рядів соняшників та квітів маку представлені в таблиці 2.3.9. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Б.

Таблиця 2.3.9.

Результати дослідження рядів кленових листків та барвінку

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Листок клена</td><td>0,42</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3,35}{2^{3n}}$</td><td>0,478</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


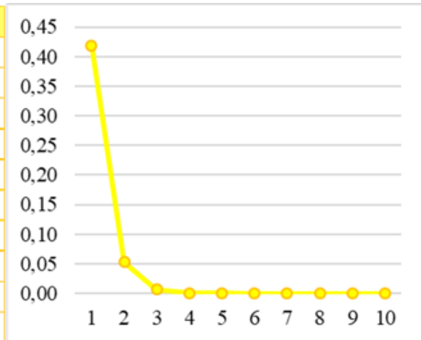
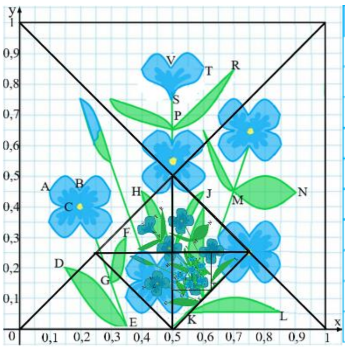
<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,41875000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,05234375000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00654296875</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00081787109</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00010223389</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001277924</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000159740</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000019968</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002496</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000312</td></tr>
</table>


Рис. 2.3.15. Геометрична інтерпретація ряда кленових листків та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Барвінок</td><td>0,2725</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2,18}{2^{3n}}$</td><td>0,3114</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


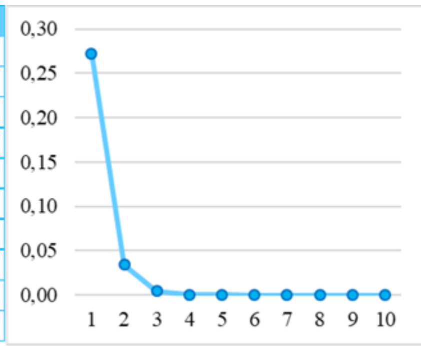
<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,27250000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,03406250000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00425781250</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00053222656</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00006652832</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000831604</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000103951</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000012994</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001624</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000203</td></tr>
</table>


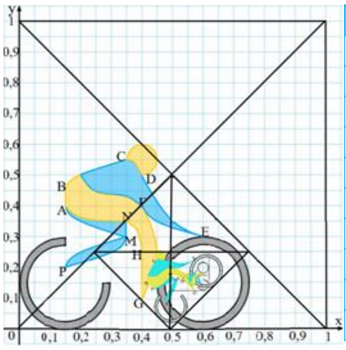
Рис. 2.3.16. Геометрична інтерпретація ряда квітів барвінку та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

2.4. Генерація і дослідження числових рядів, які описують різноманітні види спорту.

За аналогічним алгоритмом були отримані ряди площ спортсменів, зображення яких були вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини. У розробленій добірці 5 задач. В таблиці 2.4.1. представлені результати дослідження рядів велосипедистів та лучників. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку В.

Таблиця 2.4.1.

Результати дослідження рядів велосипедистів та лучників

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Велосипедист</td><td>0,1736</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,389}{2^{3n}}$</td><td>0,1984</td><td>Збіжний</td><td>II</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,17362500000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,02170312500</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00271289063</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00033911133</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00004238892</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000529861</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000066233</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000008279</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001035</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000129</td></tr>
</table>

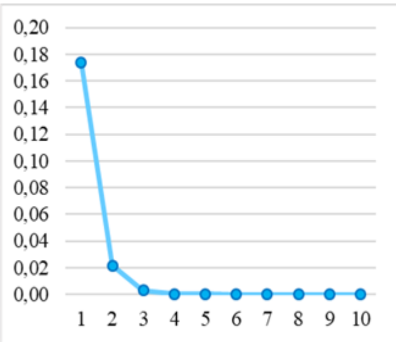
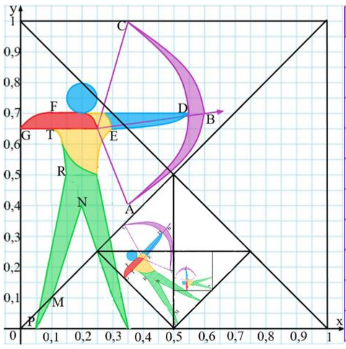


Рис. 2.4.1. Геометрична інтерпретація ряда велосипедистів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Лучник</td><td>0,11</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,88}{2^{3n}}$</td><td>0,1257</td><td>Збіжний</td><td>II</td></tr>
<tr><td colspan="5">


<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,11000000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,01375000000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00171875000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00021484375</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00002685547</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000335693</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000041962</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000005245</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000000656</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000082</td></tr>
</table>

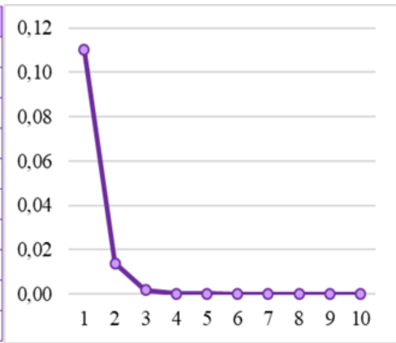


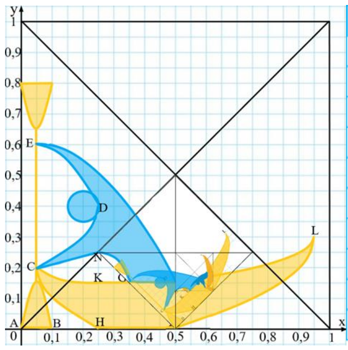
Рис. 2.4.2. Геометрична інтерпретація ряда лучників та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

Результати дослідження рядів каякерів та плавців представлені в таблиці 2.4.2. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку В.

Таблиця 2.4.2.

Результати дослідження рядів каякерів та плавців

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Каякер</td><td>0,16875</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,35}{2^{3n}}$</td><td>0,19286</td><td>Збіжний</td><td>II</td></tr>
<tr><td colspan="5">



n-ий член	Частинні суми
1	0,16875000000
2	0,02109375000
3	0,00263671875
4	0,00032958984
5	0,00004119873
6	0,00000514984
7	0,00000064373
8	0,00000008047
9	0,00000001006
10	0,00000000126

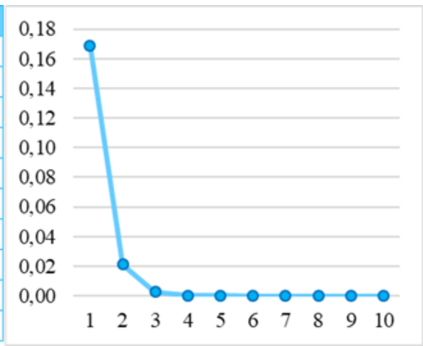
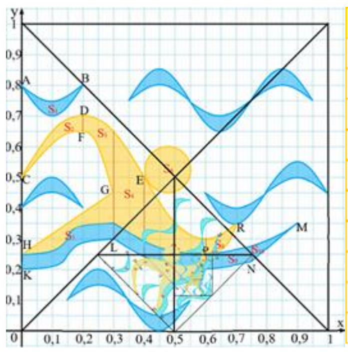


Рис. 2.4.3. Геометрична інтерпретація ряда каякерів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Плавець</td><td>0,19</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,52}{2^{3n}}$</td><td>0,217</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">



n-ий член	Частинні суми
1	0,19000000000
2	0,02375000000
3	0,00296875000
4	0,00037109375
5	0,00004638672
6	0,00000579834
7	0,00000072479
8	0,00000009060
9	0,00000001132
10	0,00000000142

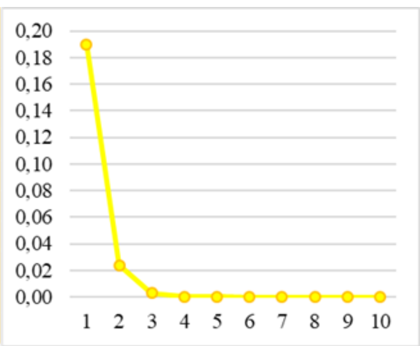


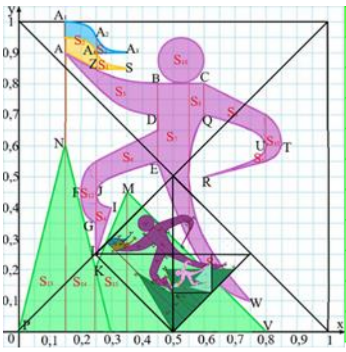
Рис. 2.4.4. Геометрична інтерпретація ряда плавців та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

</td></tr>
</table>

Результати дослідження ряда скелелазів представлені в таблиці 2.4.3. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку В.

Таблиця 2.4.3.

Результати дослідження рядів каякерів та плавців

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Скелелаз</td><td>0,373</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,984}{2^{3n}}$</td><td>0,4263</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">
<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,37300000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04662500000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00582812500</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00072851563</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009106445</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001138306</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000142288</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000017786</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002223</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000278</td></tr>
</table>

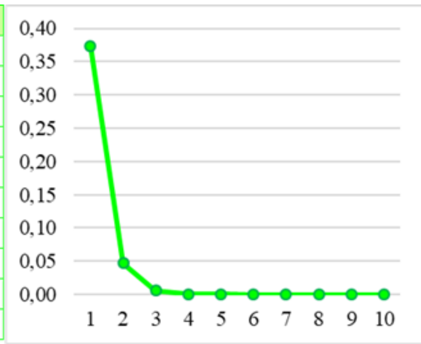



Рис. 2.4.5. Геометрична інтерпретація скелелазів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків</td></tr>
</table>

Поміркуйте

1. Чому рекорд з бігу на 100 метрів становить близько 10 секунд, а рекорд з плавання на 100 метрів – 50 секунд?
2. Як у старовину українці називали кораблі? – Арха

Запропоновані задачі спрямовані популяризувати здоровий спосіб життя, зокрема заняття спортом, показати міжпредметний зв'язок з фізичною культурою та основами здоров'я.

2.5. Генерація і дослідження числових рядів, які описують продукти правильного харчування.

У розробленій добірці 15 задач. Створюючи задачі, я прагнула популяризувати правильне харчування та привернути увагу до проблеми здорового способу життя, реалізувати компетентнісний, нестандартний підходи та міжпредметні вз'язки з: іноземними мовами, основами здоров'я, біологією, мистецтвом, українською та зарубіжною літературою, географією тощо. Для цього наведено також методичні прийоми, які спрямовані також на розвиток логіки, креативності учнів тощо.

І рівень складності.

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму яблука, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.1. «Apple», вписане в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задане на рис. 2.5.2. та обмежене графіками функцій з таблиці 2.5.1. Гіпантія яблука симетрична відносно прямої x = 0,5:*

Таблиця 2.5.1.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AC: $y = \frac{7}{400x}$	x є (0,05; 0,35)
2	PD: $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}8$	x є (0,05; 0,35)
3	FK: y = 0,95	x є (0,5; 0,55)
4	EK: $y = \frac{1}{2}\sqrt{5(x-0{,}5)} + 0{,}7$	x є (0,5; 0,55)
5	KNL: $y = -\frac{5}{4}(x-0{,}8)^2 + 1$	x є (0,6; 1)
6	KML: $y = 5(x-0{,}8)^2 + 0{,}75$	x є (0,6; 1)
7	DE: $y = \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}5)} + 0{,}7$	x є (0,35; 0,5)
8	AB: $y = -\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}5)} + 0{,}1$	x є (0,35; 0,5)

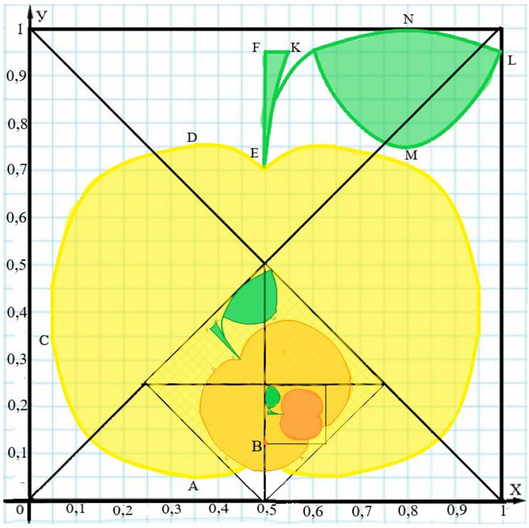


Рис. 2.5.1.

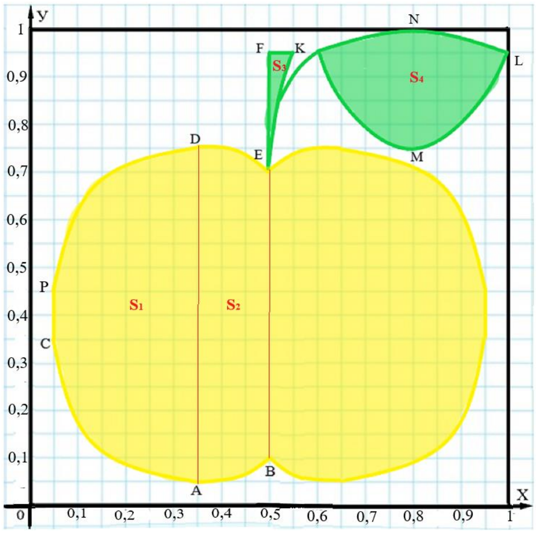


Рис. 2.5.2.

Інтелектуальна розминка

1. В яких літературних чи музичних творах, які ви вивчали або читали, згадуються яблука? Хто є авторами цих творів? – драма Фрідріха Шиллера «Вільгельм Телль», однойменна опера Джоаккіно Россіні, вірш Андрія Малишка «Яблука», новела Коцюбинського «Цвіт яблуні»,..

2. Яке з відомих міст світу мало прізвисько «Велике яблуко»? – Нью-Йорк.

3. Чому яблука увійшли в раціон космонавтів? – Бо легко переносять космічні швидкості. Тоді як лимони та апельсини в стратосфері «вибухають», утворюючи дрібні шматки.

4. Як пов'язані яблука та канцелярське приладдя? – З відходів від виробництва яблуневого соку можна виготовляти канцелярське приладдя.

5. У кого з відомих зарубіжних поетів запах гнилих яблук викликав творчий підйом? – Фрідріха Шиллера.

6. Чому яблуко має кулясту форму? – Так насіння найзахищеніше. Така форма найзручніша для отримання світла, тепла та повітря.

Хвилинка креативності

Складіть кілька питань, поєднавши два слова: ряд і яблуко. – Скільки числових рядів можна отримати, знайшовши площу одного яблука? Чи можна підібрати яблука таким чином, щоб після розташування у певній послідовності їхні площі утворили числовий ряд?

«Коло ідей»

1. Стиглі яблука падають з дерева на тюльпани сусідки. Через це виникла сварка. Одна сусідка просить спиляти яблуню, а інша зрізати тюльпани. Як помирити сусідок?

Відповідь. Проблеми не існує в реальному житті. Адже тюльпани квітнуть навесні, а яблука достигають аж влітку. Тож ця подія не могла відбутися.

Методичний коментар. Ідеї учнів вчитель записує на дошці або онлайн-дошці.

2. Фруктам якої колірної гами треба надавати перевагу і чому?

Різноманітної, оскільки у фруктах та овочах однієї кольорової гами наявні однакові вітаміни. Щоб організм людини отримав багато різних вітамінів, треба вживати фрукти різних кольорів.

«Що спільного?»

Що спільного у яблука та бінома? – Ісаак Ньютон. Цей вчений відкрив закон всесвітнього тяжіння завдяки яблуку та біном, який згодом назвали на його честь.

Розв'язання

Перший квадрат має площу 1. Знайдемо площу «яблука». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,05, x = 0,35, x = 0,5, x = 0,55, x = 0,6, x = 1 на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $y = \frac{7}{400x}$ та $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}8$, x = 0,05, x = 0,35.

$$S_1 = \int_{0{,}05}^{0{,}35} \left(-\frac{7}{400x} + 0{,}8 - \frac{7}{400x}\right) dx = \left(-\frac{7}{200}\ln|x| + 0{,}8x\right)_{0{,}05}\Big|^{0{,}35} = \frac{2379}{10000}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $y = \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x - 0{,}5)} + 0{,}7$, x = 0,35, $y = -\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x - 0{,}5)} + 0{,}1$, x = 0,5.

$$S_2 = \int_{0,35}^{0,5} \left(\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(\text{x} - 0,5)} + 0,7 + \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(\text{x} - 0,5)} - 0,1 \right) dx =$$

$$= \int_{0,35}^{0,5} \left(\frac{1}{5}\sqrt{-\frac{5}{3}(\text{x} - 0,5)} + 0,6 \right) dx = \frac{1}{10}$$

Площа S_3 (плодоніжка яблука) обмежена графіками функцій: у $= \frac{1}{2}\sqrt{5(\text{x} - 0,5)} + 0,7$, х = 0,5, у = 0,95, х = 0,55.

$$S_3 = \int_{0,5}^{0,55} \left(0,95 - \frac{1}{2}\sqrt{5(\text{x} - 0,5)} - 0,7 \right) dx = \frac{1}{240}$$

Площа S_4 (листок яблука) обмежена графіками функцій: у $= -\frac{5}{4}(\text{x} -$ $- 0,8)^2 + 1$, х = 0,6, у = $5(\text{x} - 0,8)^2 + 0,75$, х = 1.

$$S_4 = \int_{0,6}^{1} \left(-\frac{5}{4}(\text{x} - 0,8)^2 + 1 - \ 5(\text{x} - 0,8)^2 - 0,75 \right) dx =$$

$$= \int_{0,6}^{1} \left(-\frac{25}{4}(\text{x} - 0,8)^2 + 0,25 \right) dx = \frac{1}{15}$$

$$S_{\text{яблука}} = 2(S_1 + S_2) + S_3 + S_4$$

$$S_{\text{яблука}} = 2\left(\frac{2379}{10000} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{240} + \frac{1}{15} = \frac{3379}{5000} + \frac{17}{240} = \frac{22399}{30000}$$

$$S_{\text{яблука}} = \frac{22399}{30000} \cdot S_{\text{квадрата}}$$

Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі яблука становить $\frac{22399}{30000}$ площі квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, …, $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «яблук», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\ \text{яблука}} = \frac{22399}{30000} \cdot S_{1\ \text{квадрата}} = \frac{22399}{30000}$$

$$S_{2\text{ яблука}} = \frac{22399}{30000} \cdot S_{2\text{ квадрата}} = \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\text{ яблука}} = \frac{22399}{30000} \cdot S_{3\text{ квадрата}} = \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\text{ яблука}} = \frac{22399}{30000} \cdot S_{n\text{ квадрата}} = \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ яблука}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ яблука}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ «яблук» може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{22399}{30000 \cdot 2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ «яблук» збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ яблука}} = \frac{22399}{30000}$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ яблука}}}{1-q} = \frac{22399}{30000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{22399}{26250}$.

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму апельсина, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.3. «Orange», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. 2.5.4. та обмежений графіками функцій з таблиці 2.5.2. Плід симетричний відносно прямої x = 0,35:*

Таблиця 2.5.2.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: y = $\frac{7}{400x}$	x є (0,05; 0,35)
2	BC: y = $-\frac{7}{400x} + 0,7$	x є (0,05; 0,35)

Продовж. табл. 2.5.2.

3	CM: $y = 2x - \frac{1}{20}$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$
4	KH: $y = -\frac{4}{45} \cdot (5x - 1)^2 + 0{,}75$	$x \in (0{,}05; 0{,}35)$
5	KL: $y = \frac{4}{45} \cdot (5x - 1)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}05; 0{,}35)$
6	DEF: $y = \frac{1}{20} \cdot (5x - 3)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}4; 0{,}8)$
7	DGF: $y = -\frac{1}{10} \cdot (5x - 3)^2 + 0{,}8$	$x \in (0{,}4; 0{,}8)$
8	NM: $y = 0{,}75$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$

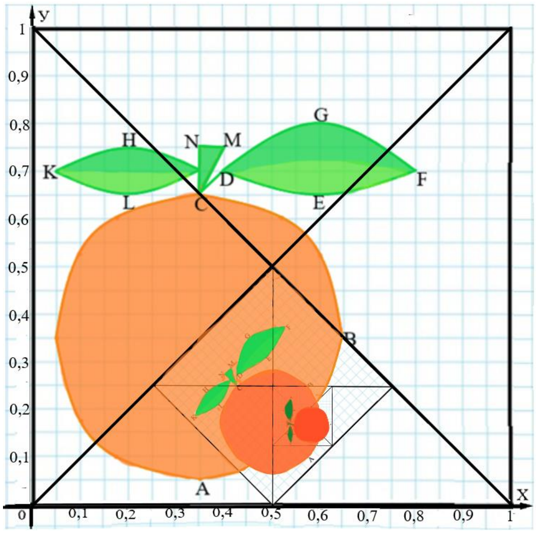


Рис. 2.5.3.

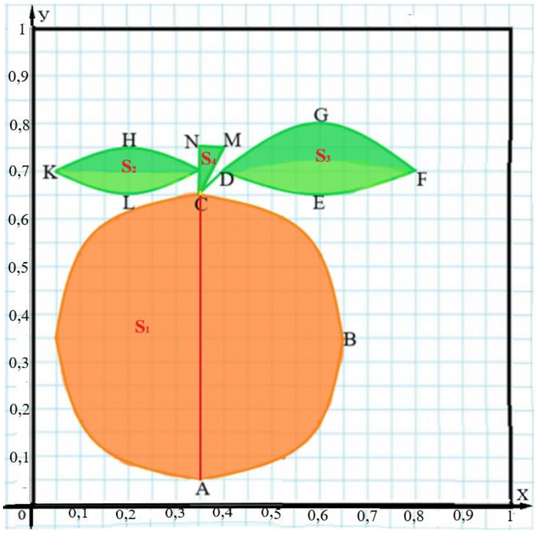


Рис. 2.5.4.

Брейнстормінг

1. До якого роду відносять апельсин? – Цитрус.

2. В якому літературному творі йде мова про апельсин та хто його автор? – У вірші А. Качан «Апельсин»,.. Вчитель може підказати.

3. Чи можуть вирости кілька дерев з однієї апельсинової насінини? – Так.

4. Чому деякі апельсини швидко тонуть? – Вони найсолодші.

Міф чи реальність?

1. Чи може апельсин «вибухнути»? Якщо так, то чому? – Так. Якщо він перебуватиме на борту космічного корабля, що рухається з космічною швидкістю. Також, якщо приймати ванну з апельсиновою кислотою, змішаною з маслами для ванн.

2. Чи миють підлогу апельсинами? Якщо так, то в яких країнах? – Так, на Ямайці та в Афганістані, оскільки апельсиновий сік добре очищає підлогу від жиру та олії.

Розв'язання

Перший квадрат має площу 1. Знайдемо площу «апельсина». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,05, x = 0,35, x = 0,4, x = 0,8 на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = $\frac{7}{400\text{x}}$ та y = $-\frac{7}{400\text{x}} + 0{,}7$, x = 0,05, x = 0,35.

$$S_1 = \int_{0,05}^{0,35} \left(-\frac{7}{400\text{x}} + 0{,}7 - \frac{7}{400\text{x}}\right) dx = 0{,}1418931$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = $\frac{4}{45} \cdot (5\text{x} - 1)^2 + 0{,}65$, x = 0,35, x = 0,5, y = $-\frac{4}{45} \cdot (5\text{x} - 1)^2 + 0{,}75$.

$$S_2 = \int_{0,35}^{0,5} \left(-\frac{4}{45} \cdot (5\text{x} - 1)^2 + 0{,}75 - \frac{4}{45} \cdot (5\text{x} - 1)^2 - 0{,}65\right) dx = 0{,}02$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: y = $\frac{1}{20} \cdot (5\text{x} - 3)^2$ + 0,65, x = 0,4, y = $-\frac{1}{10} \cdot (5\text{x} - 3)^2$ + 0,8, x = 0,8.

$$S_3 = \int_{0,4}^{0,8} \left(-\frac{1}{10} \cdot (5\text{x} - 3)^2 + 0{,}8 - \frac{1}{20} \cdot (5\text{x} - 3)^2 - 0{,}65\right) dx = 0{,}04$$

Площа S_4 обмежена графіками функцій: y = 2x $- \frac{1}{20}$, x = 0,35, y = 0,75, x = 0,4.

$$S_4 = \int_{0,35}^{0,4} (0{,}75 - 2\text{x} + 0{,}05)\, dx = 0{,}0025$$

$$S_{\text{апельсина}} = 2S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_{\text{апельсина}} = 2 \cdot 0{,}1418931 + 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}025 = 0{,}3687862$$

$$S_{\text{апельсина}} \approx 0{,}36879 \cdot S_{\text{квадрата}}$$

Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі апельсина становить 0,36879 площі квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1, S_2 = \frac{1}{2^3}, S_3 = \frac{1}{2^6}, \ldots, S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$.

Запишемо послідовність площ «апельсинів», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\text{ апельсина}} = 0{,}36879 \cdot S_{1\text{ квадрата}} = 0{,}36879$$

$$S_{2\text{ апельсина}} = 0{,}36879 \cdot S_{2\text{ квадрата}} = 0{,}36879 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\text{ апельсина}} = 0{,}36879 \cdot S_{3\text{ квадрата}} = 0{,}36879 \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\text{ апельсина}} = 0{,}36879 \cdot S_{n\text{ квадрата}} = 0{,}36879 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ апельсина}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}36879 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ апельсина}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}36879 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}36879}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ «апельсинів» збіжний. Це ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ апельсина}} = 0{,}36879$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ апельсина}}}{1-q} = 0{,}36879 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} \approx 0{,}42147$

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму граната, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.5. «Pomegranate»,* *вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. 2.5.6. та обмежений графіками функцій з таблиці 2.5.3. Фігура симетрична відносно прямої x = 0,4:*

Таблиця 2.5.3.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AK: $y = \frac{7}{400x}$	x є (0,05; 0,35)
2	AB: $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}7$	x є (0,05; 0,35)
3	KL: y = 0,05	x є (0,35; 0,45)
4	BC: y = − 4x + 2,05	x є (0,3; 0,35)
5	CD: $y = -20(x - 0{,}3)^2 + 0{,}85$	x є (0,3; 0,35)
6	EF: $y = -20(x - 0{,}35)^2 + 0{,}85$	x є (0,35; 0,4)

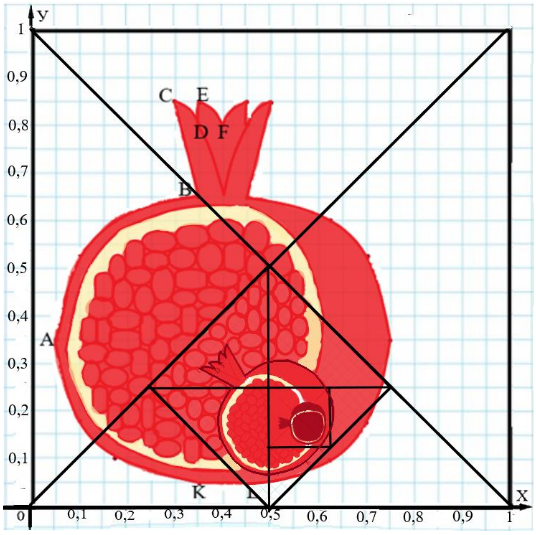


Рис. 2.5.5.

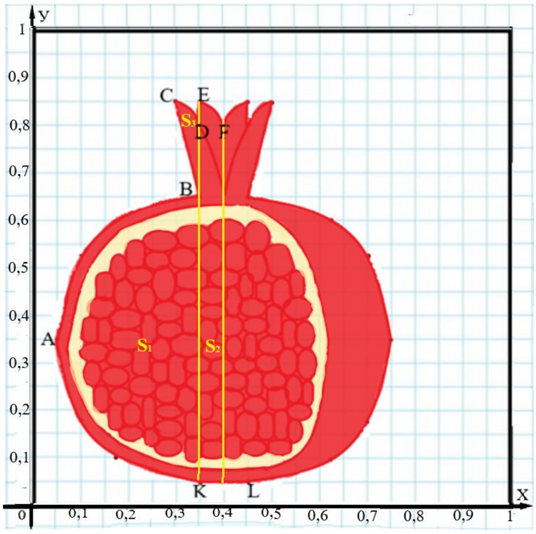


Рис. 2.5.6.

Міні-вікторина

1. До якої родини відноситься гранатове дерево?» – Плакунові.
2. Елементом геральдики яких зарубіжних міст є гранат? – Франції та Іспанії.
3. Чи справді гранат зупиняє кровотечу? – Так.

Правда чи брехня?

Майже всі стародавні єгиптяни поховані разом з гранатом. – Це правда.

Це цікаво!

Біля міста Виноградів на Чорній горі (Закарпаття) є плантація граната.

Розв'язанння

Перший квадрат має площу 1. Знайдемо площу «граната». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,05, x = 0,3, x = 0,35, x = 0,4, на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = $\frac{7}{400x}$ та y = $-\frac{7}{400x} + 0{,}7$, x = 0,05, x = 0,35.

$$S_1 = \int_{0,05}^{0,35} \left(-\frac{7}{400x} + 0{,}7 - \frac{7}{400x}\right) dx = 0{,}1418931$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = 0,05, x = 0,35, x = 0,4, y = $-20(x - 0{,}35)^2 + 0{,}85$.

$$S_2 = \int_{0,35}^{0,4} (-20(x - 0{,}35)^2 + 0{,}85 - 0{,}05) dx = 0{,}0391(6)$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: y = $-4x + 2{,}05$, x = 0,35, y = $-20(x - 0{,}3)^2 + 0{,}85$, x = 0,3.

$$S_3 = \int_{0,3}^{0,35} (-20(x - 0{,}3)^2 + 0{,}85 + 4x - 2{,}05)\, dx = 0{,}0041(6)$$

$$S_{\text{граната}} = 2(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$S_{\text{граната}} = 2(0{,}1418931 + 0{,}0391(6) + 0{,}0041(6)) \approx 0{,}37045 \approx 0{,}37$$

$$S_{\text{граната}} = 0{,}37 \cdot S_{\text{квадрата}}$$

Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі граната становить 0,37 площі квадрата.

Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, …, $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$. Запишемо послідовність площ «гранатів», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\ \text{граната}} = 0{,}37 \cdot S_{1\ \text{квадрата}} = 0{,}37$$

$$S_{2\ \text{граната}} = 0{,}37 \cdot S_{2\ \text{квадрата}} = 0{,}37 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\ \text{граната}} = 0{,}37 \cdot S_{3\ \text{квадрата}} = 0{,}37 \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\ \text{граната}} = 0{,}37 \cdot S_{n\ \text{квадрата}} = 0{,}37 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\ \text{граната}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}37 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\ \text{граната}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}37 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}37}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ криволінійних трапецій збіжний. Це ряд геометричної прогресії, $S_{1\ \text{граната}} = 0{,}37$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\ \text{граната}}}{1-q} = 0{,}37 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = 0{,}423.$

Задача 4. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму груші, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.7. «Pear», вписана в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, задана на рис. 2.5.8. та обмежена графіками функцій з таблиці 2.5.4. Плід груші симетричний відносно прямої x = 10:*

Таблиця 2.5.4.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	FG: y = $-\frac{2}{3}(x-10)^2 + 16$	x є (7; 10)
2	MH: y = $\frac{2}{x-4}$	x є $\left(4\frac{81}{200};\ 10\right)$
3	HG: y = $(x-6)^3 + 9$	x є $\left(4\frac{81}{200};\ 7\right)$
4	FE: y = $3(x-5) + 1$	x є (10; 11)

Продовж. табл. 2.5.4.

5	ABC: $y = -\left(\frac{1}{4}(x - \mathbf{16})\right)^{2} + \mathbf{19}$	x є (12; 20)
6	ADC: $y = \left(\frac{1}{2}(x - 16)\right)^{2} + 14$	x є (12; 20)

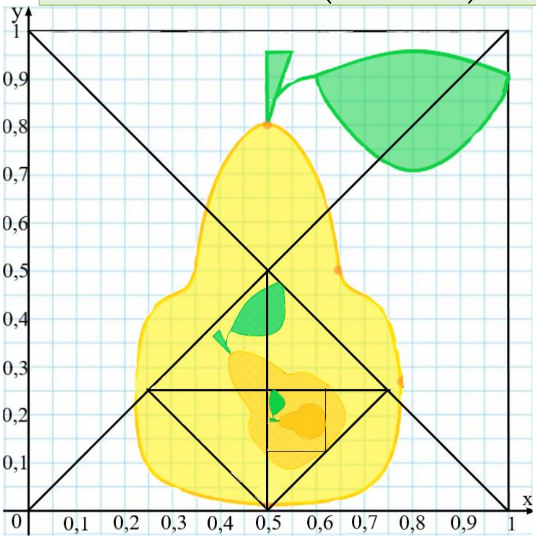


Рис. 2..5.7.

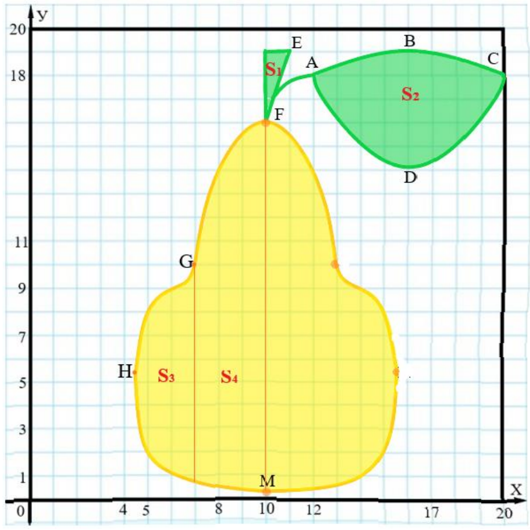


Рис. 2.5.8.

Інтелектуальна хвилинка

1. У якому творі родини двох братів посварились через грушу і помирились лише тоді, коли дерево засохло? – У повісті І. С. Нечуя-Левицького «Кайдашева сім'я».

2. Який художник мінінатюрморист малював груші? – Луїс Мелендес.

3. В якому літературному творі груша – «дар богів»? – В давньогрецькому епосі Гомера «Одіссея».

4.Хто найближчий родич груші? – Шипшина.

5. Де цукру більше: в грушах чи яблуках? – В яблуках. Хоча груші за смаком солодші, містять менше цукру.

«Недремне око»

Росло двоє верб, кожна з яких мала по двоє гілок. На кожній з гілок росли по троє груш. Скільки всього груш? – Нуль. Груші на вербі не ростуть.

«Дійсність чи фантастика?»

1. Килими фарбують грушами. – Правда. Для цього використовують камбіальний шар

2. Чи правда, що з груш виготовляють борошно? Якщо так, то в якій країні? – Правда. У Дагестані з сушених груш роблять борошно. Його змішують з кукурудзяним та ячмінним. Із суміші, що називається «чілікані», готують млинці та печиво.

3. Груші – сурогат кави та чаю. – Правда. Сухі груші – чудовий замінник кави та чаю.

4. З груш роблять гірчицю. – Правда. Так роблять в Італії.

5. Листочки на гілках грушевих дерев зростають суворо впорядкованими. Вони нахилні під кутом 135^0 та перебувають на однаковій відстані один відносно іншого. – Правда. Це потрібно, щоб здобути якомога більше вологи та світла.

Творча хвилинка

Складіть кілька питань, поєднавши два слова: функція і груша. – Скількома фрагментами графіків функцій можна намалювати грушу? Якими функціями можна описати грушу?

Розв'язання

Щоб полегшити обчислення, розглянемо квадрат зі стороною 20 та відповідну криволінійну трапецію вписану в нього, які отримали гомотетією $(O\ (0;0), 20)$. Знайдемо площу «груші». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = $4\frac{81}{200}$, x = 7, x = 10, x = 11, x = 12 та x = 20 на менші площі. Обчислимо їх та знайдемо їх суму. Вона і буде площею шуканої криволінійної трапеції.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = 19 та y = $3x - 14$, x = 10, x = 11.

$$S_1 = \int_{10}^{11} (19 - 3\text{x} + 14)\, dx = \left(-\frac{3}{2}\text{x}^2 + 33\text{x}\right)_{10}|^{11} = \frac{3}{2}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = $\left(\frac{1}{2}(\text{x} - 16)\right)^2 + 14$, x = 12, x = 20 та y = $-\left(\frac{1}{4}(\text{x} - 16)\right)^2 + 19$.

$$S_2 = \int_{12}^{20} \left(-\left(\frac{1}{4}(\text{x} - 16)\right)^2 + 19 - \left(\frac{1}{2}(\text{x} - 16)\right)^2 - 14 \right) dx = \frac{80}{3}$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: у = $(\text{x} - 6)^3 + 9$, х = 7, х = $\frac{881}{200}$, та у = $\frac{2}{\text{x}-4}$.

$$S_3 = \int_{\frac{881}{200}}^{7} \left((\text{x} - 6)^3 + 9 - \frac{2}{\text{x} - 4} \right) dx \approx 17{,}98198419 \approx 17{,}982$$

Площа S_4 обмежена графіками функцій: у = $-\frac{2}{3}(\text{x} - 10)^2 + 16$, у = $\frac{2}{\text{x}-4}$, х = 7 та х = 10.

$$S_4 = \int_{7}^{10} \left(-\frac{2}{3}(\text{x} - 10)^2 + 16 - \frac{2}{\text{x} - 4} \right) dx \approx 40{,}6137$$

$$S_{\text{груші}} = S_1 + S_2 + 2 \cdot (S_3 + S_4)$$

$$S_{\text{груші}} = 1{,}5 + \frac{80}{3} + 2 \cdot (17{,}982 + 40{,}6137) \approx 145{,}358$$

Відношення площ гомотетичних фігур рівне коефіцієнту гомотетії, піднесеному до квадрату, тобто: $\frac{S_{\text{квадрата 20x20}}}{S_{\text{квадрата 1x1}}} = \frac{S_{\text{груші 20x20}}}{S_{\text{груші 1x1}}} = 20^2 = 400$. Тож, $\frac{145{,}358}{S_{\text{груші 1x1}}} = 400$. Таким чином, площа криволінійної трапеції, що має форму «груші» становить $\frac{145{,}358}{400} \approx 0{,}3634$ площі квадрата зі стороною 1 одиниця довжини.

Розглянемо геометричну інтерпритацію ряда «груш». Площа кожної криволінійної трапеції становить 0,3634 площі відповідного квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, … , $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «Груш», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\text{ груші}} = 0{,}3634 \cdot S_{1\text{ квадрата}} = 0{,}3634$$

$$S_{2\ \text{груші}} = 0{,}3634 \cdot S_{2\ \text{квадрата}} = 0{,}3634 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\ \text{груші}} = 0{,}3634 \cdot S_{3\ \text{квадрата}} = 0{,}3634 \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\ \text{груші}} = 0{,}3634 \cdot S_{n\ \text{квадрата}} = 0{,}3634 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\ \text{груші}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3634 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\ \text{груші}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}3634 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д'Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}3634}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд площ груш збіжний.

Отриманий ряд – ряд геометричної прогресії, $S_{1\ \text{груші}} = 0{,}3634$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = 0{,}3634 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = 0{,}415314 \approx 0{,}4153$.

II рівень складності

Задача 5. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму вишень, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.9. «Cherries», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задані на рис. 2.5.10. та обмежені графіками функцій з таблиці 2.5.5. Плоди та плодоніжки вишень симетричні відносно прямої x = 0,475:*

Таблиця 2.5.5.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: $y = -10(x - 0{,}175)^2 + 0{,}3$	$x \in (0{,}075;\ 0{,}225)$
2	AD: $y = \frac{1}{200(x-0{,}05)}$	$x \in (0{,}075;\ 0{,}25)$
3	BE: $y = x + 0{,}05$	$x \in (0{,}225;\ 0{,}275)$
4	EH: $y = -20(x - 0{,}475)^2 + 0{,}725$	$x \in (0{,}275;\ 0{,}475)$
5	BC: $y = 0{,}275$	$x \in (0{,}225;\ 0{,}275)$
6	CF: $y = -20(x - 0{,}475)^2 + 0{,}675$	$x \in (0{,}275;\ 0{,}475)$
7	HK: $y = -20(x - 0{,}575)^2 + 0{,}925$	$x \in (0{,}475;\ 0{,}575)$
8	HL: $y = \frac{3}{2}(x - 0{,}525) + 0{,}8$	$x \in (0{,}475;\ 0{,}575)$
9	NPM: $y = -\frac{5}{2}(x - 0{,}725)^2 + 0{,}9$	$x \in (0{,}525;\ 0{,}925)$
10	NSM: $y = \frac{5}{2}(x - 0{,}725)^2 + 0{,}7$	$x \in (0{,}525;\ 0{,}925)$

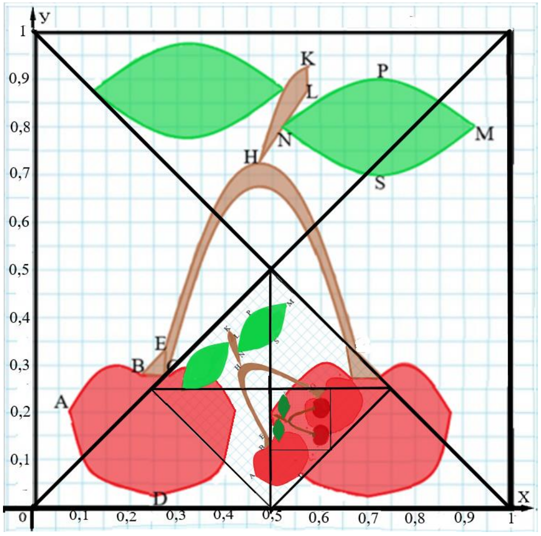


Рис. 2.5.9.

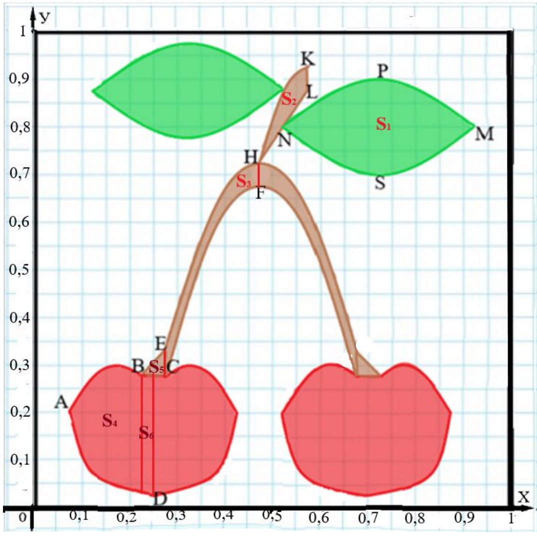


Рис. 2.5.10.

Бліц-вікторина

1. До якої родини відноситься вишневе дерево? – Трояндові.

2. Хто найближчий родич вишні? – Слива.

3. Як називають плід вишні? – Кістянка.

4. Кого називали королем українського сміху? – Остапа Вишню.

5. У яких літературних творах згадуються вишні? – У вірші «Садок вишневий коло хати» Тараса Шевченка, також у вірші «Любіть Україну» Володимира Сосюри є словосполучення «вишневу свою Україну»…

Легенда чи дійсність?

У Японії існує традиція перегляду квітів цвіту вишні, вік яких – 1000 років. – Це правда. Традиція називається ханамі.

Задача 6. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму грибів, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.11. «Mushrooms», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задані на рис. 2.5.12. та обмежені графіками функцій з таблиці 2.5.6. Капелюшки всіх трьох грибів мають однакову площу:*

Таблиця 2.5.6.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	ABC: $y = -5(x-0{,}25)^2 + 0{,}45$	x є (0,05; 0,45)
2	AC: $y = 1{,}25(x-0{,}25)^2 + 0{,}2$	x є (0,05; 0,45)
3	DE: $y = 20(x-0{,}3)^2$	x є (0,2; 0,3)
4	GF: $y = 20(x-0{,}4)^2$	x є (0,3; 0,4)
5	FK: $y = 60(x-0{,}4)^2$	x є (0,4; 0,5)
6	ML: $y = 60(x-0{,}5)^2$	x є (0,5; 0,6)
7	NP: $y = 40(x-0{,}65)^2$	x є (0,65; 0,75)
8	SR: $y = 40(x-0{,}75)^2$	x є (0,75; 0,85)

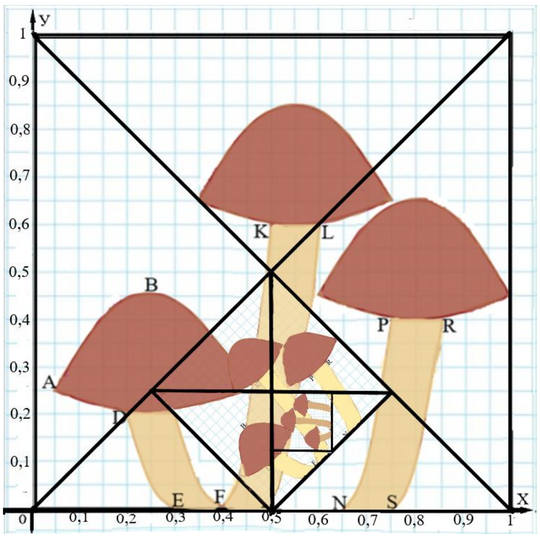


Рис. 2.5.11.

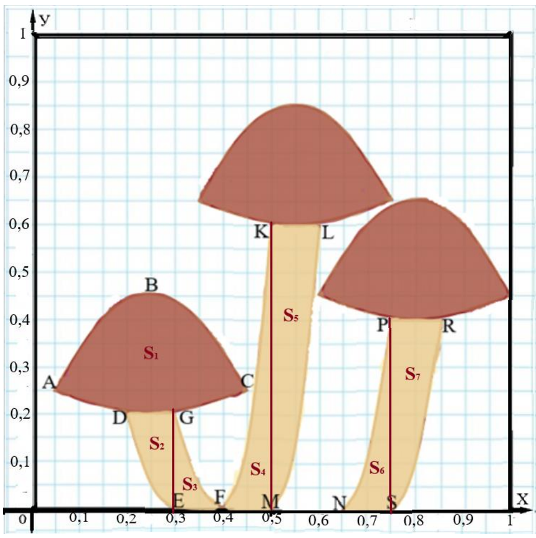


Рис. 2.5.12.

Міні-квестія

1. До якого класу відносять зображені гриби? Поясніть, чому. – Клас «вищі», оскільки мають плодове тіло, що складається з капелюшка та ніжки.

2. У яких літературних творах згадуються гриби? – У вірші Ліни Костенко «Ліс на світанку» йдеться про опеньки, «Про гриби» – вірш Наталії Забіли. Вчитель може підказати.

Фантастика чи правда?

1. Існує гриб, здатний утилізувати пластик за кілька тижнів. – Це правда.

2. Гриби – найдавніші мешканці Землі, вони можуть вижити при ядерній катастрофі. – Це правда.

3. Гриб може пробити навіть мармур. – Це правда.

4. Гриби можуть виростати вище дерев. – Це правда. Проте це відбувається лише в тундрі.

Задача 7 (І рівень складності). *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму помідора, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.13. «Tomato», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. 2.5.14. та обмежений графіками функцій з таблиці 2.5.7.:*

Таблиця 2.5.7.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: $y = 0{,}75$	$x \in (0{,}4; 0{,}45)$
2	BC: $y = \frac{1}{5}\sqrt{5(x - 0{,}4)} + 0{,}65$	$x \in (0{,}4; 0{,}45)$
3	DC: $y = \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x - 0{,}4)} + 0{,}65$	$x \in (0{,}25; 0{,}4)$
4	DG: $y = 20(x - 0{,}3)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}25; 0{,}3)$
5	FG: $y = -\frac{3}{200x} + 0{,}7$	$x \in (0{,}05; 0{,}3)$
6	FM: $y = \frac{1}{50x}$	$x \in (0{,}05; 0{,}4)$

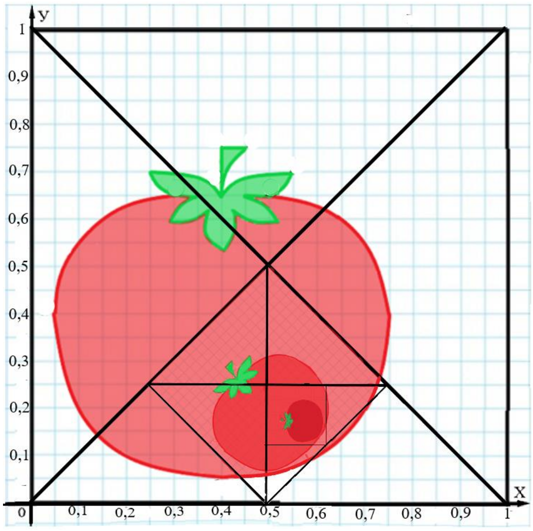


Рис. 2.5.13.

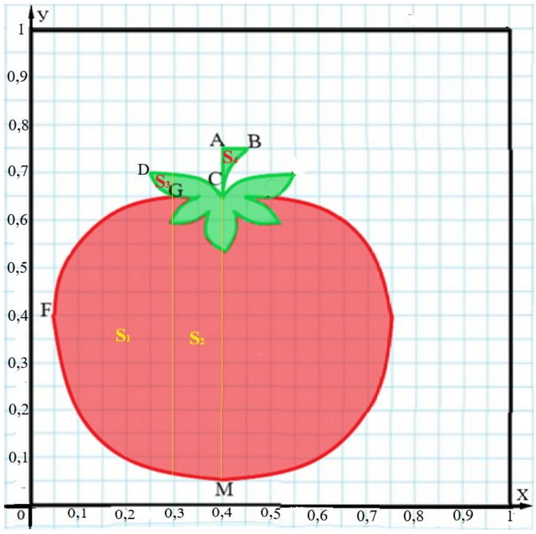


Рис. 2.5.14.

Архаїстична хвилинка

Як раніше українські селяни називали помідори? – «Псинки».

Intellectual quiz

1. Що є плодом помідора? – Ягода.

2. Томатна столиця України – місто Кам'янка-Дніпровська.

3. Як звучить італійською мовою слово «помідор» - «золоте яблуко».

4. В італійців та іспанців популярно вживати холодні супи з томатів. Як називається такий суп? – Гаспачо.

5. Щороку в Іспанії приходить час грандіозного бою томатами, який називається … (Ла Томатіна)

True or false?

1. Помідори раніше підкладались в їжу як отрута. – Правда. Таке було в США та країнах Західної Європи.

2. Томатний сік є офіційним напоєм. – Правда. В Огайо, що в США.

3. Помідор – найближчий родич картоплі та тютюну. – Це правда.

Розв'язання

Перший квадрат має площу 1. Знайдемо площу «помідора». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,05, x = 0,3, x = 0,4, x = 0,45, x = 0,25 на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: у $=-\frac{3}{200x}+0{,}7$ та у $=\frac{1}{50x}$, x = 0,05, x = 0,3.

$$S_1 = \int_{0,05}^{0,3} \left(-\frac{3}{200x} + 0{,}7 - \frac{1}{50x}\right) dx = \int_{0,05}^{0,3} \left(-\frac{7}{200x} + 0{,}7\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{7}{200}\ln|x| + 0{,}7x\right)_{0,05}\Big|^{0,3} = \frac{-7(\ln 0{,}3 + \ln 0{,}05)}{200} + \frac{7}{40} \approx 0{,}1122884 \approx$$

$$\approx 0{,}1123$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: у $=\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}4)}+0{,}65$, x = 0,3, у $=\frac{1}{50x}$, x = 0,4.

$$S_2 = \int_{0,3}^{0,4} \left(\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}4)} + 0{,}65 - \frac{1}{50x}\right) dx = \frac{\ln 0{,}75}{50} + \frac{\sqrt{6}}{900} + \frac{13}{20} =$$

$$= 0{,}06196802 \approx 0{,}062$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: у $=\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}4)}+0{,}65$, x = 0,25, у = $20(x-0{,}3)^2+0{,}65$, x = 0,3.

$$S_3 = \int_{0,25}^{0,3} \left(\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}4)} + \cancel{0{,}65} - 20(x-0{,}3)^2 - \cancel{0{,}65}\right) dx = \frac{1}{240} - \frac{\sqrt{6}}{900}$$

$$S_3 = 0{,}001445$$

Площа S_4 обмежена графіками функцій: у $=\frac{1}{5}\sqrt{5(x-0{,}4)}+0{,}65$, x = 0,4, у = 0,75, x = 0,45.

$$S_4 = \int_{0,4}^{0,45} \left(0{,}75 - \frac{1}{5}\sqrt{5(x-0{,}4)} - 0{,}65\right) dx = \int_{0,4}^{0,45} \left(0{,}1 - \frac{1}{5}\sqrt{5(x-0{,}4)}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{600} = 0{,}001(6)$$

$$S_{\text{помідора}} = 2(S_1 + S_2 + S_3) + S_4$$

$$S_{\text{помідора}} = 2(0{,}1122884 + 0{,}061968 + 0{,}001445) + 0{,}001666 \approx 0{,}353$$

$$S_{\text{помідора}} = 0{,}353 \cdot S_{\text{квадрата}}$$

Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі помідора становить 0,353 площі квадрата.

Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{2^3}$, $S_3 = \frac{1}{2^6}$, … , $S_n = \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «помідорів», вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\text{ помідора}} = 0{,}353 \cdot S_{1\text{ квадрата}} = 0{,}353$$

$$S_{2\text{ помідора}} = 0{,}353 \cdot S_{2\text{ квадрата}} = 0{,}353 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\text{ помідора}} = 0{,}353 \cdot S_{3\text{ квадрата}} = 0{,}353 \cdot \frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\text{ помідора}} = 0{,}353 \cdot S_{n\text{ квадрата}} = 0{,}353 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n\text{ помідора}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}353 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\text{ помідора}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}353 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ криволінійних трапецій може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д’Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}353}{2^{3n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$$

Ряд площ криволінійних трапецій збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\text{ помідора}} = 0{,}353$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\text{ помідора}}}{1-q} = 0{,}353 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} \approx 0{,}4$.

III рівень складності

Задача 8. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму ананасів, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.15. «Pineapple», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. 2.5.16. та обмежений графіками функцій з таблиці 2.5.8:*

Таблиця 2.5.8.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	Еліпс: $x^2 + y^2 - 0{,}18xy - 0{,}6x - 0{,}6y + 0{,}09 = 0$	x є (0; 0,6593)
2	$A_5E: y = -\frac{2}{3}x + 0{,}95$	x є (0,45; 0,6)
3	$A_5A_4: y = -\frac{20}{3}(x - 0{,}6)^2 + 0{,}55$	x є (0,6; 0,75)
4	$A_3A_4: y = -3x + 2{,}65$	x є (0,7; 0,75)
5	$A_3A_2: y = -\frac{5}{2}(x - 0{,}7)^2 + 0{,}55$	x є (0,7; 0,9)
6	$A_1A_2: y = -5(x - 0{,}7)^2 + 0{,}65$	x є (0,7; 0,9)
7	$A_1X: y = 0{,}65$	x є (0,7; 1)
8	$ZX: y = \sqrt{-\frac{1}{30}(x - 1)} + 0{,}65$	x є (0,7; 1)
9	$ZP: y = -\sqrt{-\frac{1}{30}(x - 1)} + 0{,}85$	x є (0,7; 1)
10	$UP: y = \frac{1}{12}(x - 0{,}7) + 0{,}825$	x є (0,7; 1)
11	UQ: $y = 0{,}7x + 0{,}41$	x є (0,7; 0,95)
12	TQ: $y = 0{,}4x + 0{,}62$	x є (0,7; 0,95)
13	MW: $y = x + 0{,}3$	x є (0,6; 0,7)
14	NM: $y = -10(x - 0{,}5)^2 + 1$	x є (0,5; 0,6)
15	$KL: y = -\frac{1}{3}(x - 0{,}5) + 0{,}9$	x є (0,35; 0,5)
16	$KH: y = \sqrt{-\frac{1}{10}(x - 0{,}45)} + 0{,}85$	x є (0,35; 0,45)
17	FH: $y = 0{,}85$	x є (0,3; 0,45)
18	$FG: y = \sqrt{-\frac{1}{15}(x - 0{,}45)} + 0{,}75$	x є (0,3; 0,45)
19	$A_6G: y = 0{,}75$	x є (0,25; 0,45)
20	$A_6E: y = \sqrt{-\frac{1}{20}(x - 0{,}45)} + 0{,}65$	x є (0,25; 0,45)

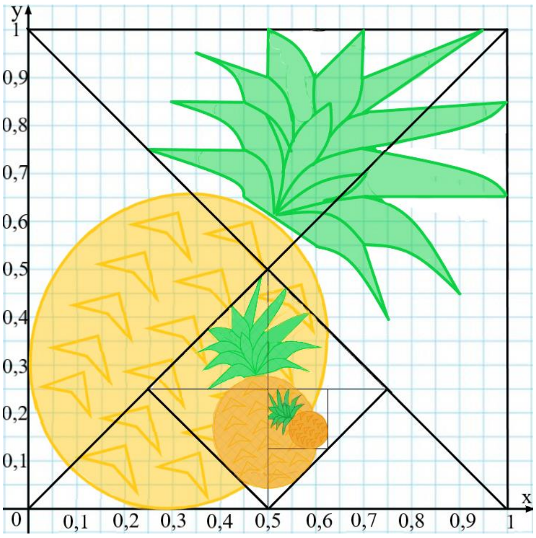


Рис. 2.5.15.

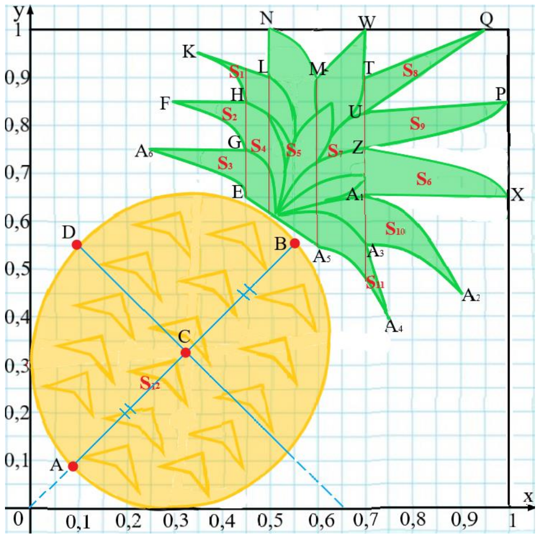


Рис. 2.5.16.

Міні-опитування

1. До якого типу відносять плід ананаса? Поясніть, чому – Тип супліддя, адже він утворений внаслідок зрощення плодів одного чи кількох суцвіть.

2. На гербах яких країн зображений ананас? – Ямайки, Антигуа і Барбуди. Педагог може підказати.

Істина чи хиба?

1. З ананаса в деяких країнах Європи виготовляють тканину та взуття. – Правда.

2. Колір квітів ананаса може змінюватись протягом доби. – Правда.

3. Оноре де Бальзак будував теплиці, щоб вирощувати ананаси. – Правда, проте ця затія так і не допомогла йому розбагатіти.

В задачі обчислюється площа еліпса, який був повернутий на певний кут. Тому доцільно повторити перед розв'язанням теоретичний матеріал про еліпс, зокрема його елементи. Також варто згадати поворот ліній II-го порядку, формули довжини відрізка та координат його середини, перетворення графіків функцій.

Підказка. Площу еліпса простіше знайти за формулою:

$$S = \pi \cdot a \cdot b, \tag{2.1}$$

де *a, b* – відповідно довжини великої та малої півосі. Щоб знайти ці довжини, треба з'ясувати кут повороту осей системи координат.

Щоб не виконувати громіздких обчислень, використаємо на деяких етапах розв'язання задачі графічний кайкулятор, наприклад, Desmos або GeoGebra.

Розв'язання

Оскільки в рівнянні $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 0{,}18\mathrm{xy} - 0{,}6\mathrm{x} - 0{,}6\mathrm{y} + 0{,}09 = 0$ є добуток xy, то буде виконуватись поворот системи координат. Нам треба знайти кут повороту.

Нагадаємо, загальне рівняння лінії другого порядку має вид:

$$\gamma\colon a_{11}\mathrm{x}^2 + a_{22}\mathrm{y}^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{2.2}$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ – дійсні числа;

x, y – змінні.

Характеристичне рівняння має вид:

$$\gamma^2 - (a_{11} + a_{22})\gamma + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \tag{2.3}$$

де γ – змінна.

Тангенс кута повороту осей системи координат обчислюється за формулою:

$$tg\alpha = \frac{\gamma_1 - a_{11}}{a_{12}}, \tag{2.4}$$

де γ_1 – дійсне число, корінь квадратного рівняння (2.3)

1. Складемо характеристичне рівняння: $\gamma^2 - 2\gamma + 0{,}9919 = 0$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 0.9919} = \sqrt{0{,}0324} = 0{,}18$$

$$\left[\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2 + 0{,}18}{2} = 1{,}09, \\ \gamma_2 &= \frac{2 - 0{,}18}{2} = 0{,}91. \end{aligned}\right.$$

2. Запишемо тангенс кута повороту: $tg\alpha = \frac{1{,}09 - 1}{0{,}09} = 1$

$\alpha = 45^\circ$. Це означає, кут між великою піввіссю еліпса та додатнім напрямом системи координат становить 45°. Такий самий кут з додатнім напрямом системи координат утворює пряма y = x. Отже, велика піввісь – частина прямої y = x. Побудуємо пряму та еліпс в графічному кайкуляторі Desmos. Програма покаже координати точок перетину прямої та еліпса, які будуть кінцями відрізка (рис. 2.5.17).

Довжина відрізка обчислюється за формулою:

$$\overline{|AB|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (2.5)$$

де $x_1,\ y_1$ — кординати початку відрізка,

$x_2,\ y_2$ — кординати кінця відрізка.

$$\overline{|AB|} = \sqrt{(0{,}573 - 0{,}0863)^2 + (0{,}573 - 0{,}0863)^2} \approx 0{,}6883$$

Довжина великої піввісі рівна половині довжини отриманого відрізка. Позначимо її a = 0.34415.

Мала піввісь перпендикулярна до великої і вона є частиною прямої, що перпендикулярна до y = x. Такою буде пряма, симетрична до y = x відносно ОУ, паралельно перенесена вправо на 0,6593 одиниці довжини. Запишемо її рівняння: y = – (x – 0,6593)

y = – x + 0,6593

Побудуємо і цю пряму теж в графічному кайкуляторі Desmos. Дві перпендикулярні прямі перетинаються в центрі еліпса, за допомогою програми з’ясовуємо координати центру еліпса та точок перетину прямої та еліпса, які є кінцями відрізка – малої піввісі (рис. 2.5.18.).

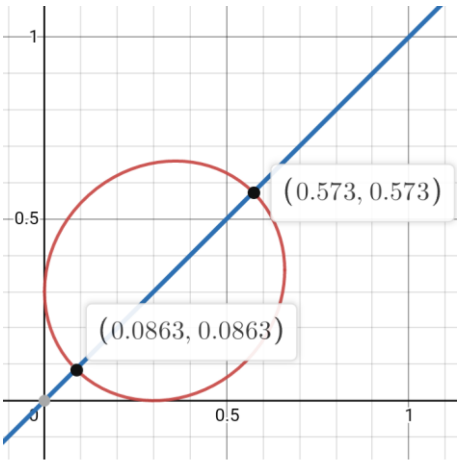


Рис. 2.5.17.

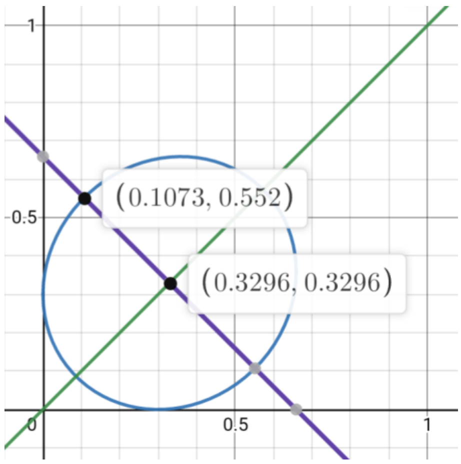


Рис. 2.5.18.

Можемо обчислити довжину малої півосі, яку позначимо b, за формулою (2.5).

$\overline{|b|} = \sqrt{(0{,}3296 - 0{,}1073)^2 + (0{,}3296 - 0{,}552)^2} \approx 0{,}31445$

Обчислимо площу еліпса за формулою (2.1): S = $\pi \cdot 0{,}34415 \cdot 0{,}31445 \approx 0{,}33997 \approx 0{,}34$

Знайдемо площу «ананаса» з використанням мобільного додатку Integral Calculator. Вона обмежена багатьма графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0,25, x = 0,3, x = 0,35, x = 0,45, x = 0,5, x = 0,6, x = 0,7, x = 0,75, x = 0,9, x = 0,95, x = 1 на менші площі.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{3}(x - 0{,}5) + 0{,}9$, x = 0,35, y = $\sqrt{-\frac{1}{10}(x - 0{,}45)} + 0{,}85$, x = 0,45.

$$S_1 = \int_{0{,}35}^{0{,}45} \left(-\frac{1}{3}(x - 0{,}5) + 0{,}05 - \sqrt{-\frac{1}{10}(x - 0{,}45)} \right) dx = 0{,}0065$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: y = $\sqrt{-\frac{1}{15}(x - 0{,}45)} + 0{,}75$, x = 0,3, x = 0,45, y = 0,85.

$$S_2 = \int_{0{,}3}^{0{,}45} \left(0{,}1 - \sqrt{-\frac{1}{15}(x - 0{,}45)} \right) dx = 0{,}005$$

Площа S_3 обмежена графіками функцій: y = $\sqrt{-\frac{1}{20}(x - 0{,}45)} + 0{,}65$, y = 0,75, x = 0,25, x = 0,45.

$$S_3 = \int_{0{,}25}^{0{,}45} \left(0{,}1 - \sqrt{-\frac{1}{20}(x - 0{,}45)} \right) dx = \frac{1}{150}$$

Площа S_4 обмежена графіками функцій: $y = -\frac{2}{3}x + 0{,}95$, x = 0,45, $y = -\frac{1}{3}(x - 0{,}5) + 0{,}9$, x = 0,5.

$$S_4 = \int_{0,45}^{0,5} \left(-\frac{1}{3}(\mathrm{x}-0,5)+0,9+\frac{2}{3}\mathrm{x}-0,95\right)dx \approx -0,00291667$$

Площа S_5 обмежена графіками функцій: $y = -\frac{2}{3}\mathrm{x}+0,95$, x = 0,5, x = 0,6, y= $-10(\mathrm{x}-0,5)^2+1$

$$S_5 = \int_{0,5}^{0,6} \left(-10(\mathrm{x}-0,5)^2+0,05+\frac{2}{3}\mathrm{x}\right)dx \approx 0,0383333(6)$$

Площа S_6 обмежена графіками функцій: y = $\sqrt{-\frac{1}{30}(\mathrm{x}-1)}+0,65$, x = 0,7, x = 1, y $=0,65$.

$$S_6 = \int_{0,7}^{1} \left(\sqrt{-\frac{1}{30}(\mathrm{x}-1)}\cancel{+0,65-0,65}\right)dx = 0,02$$

Площа S_7 обмежена графіками функцій: y $= -\frac{20}{3}(\mathrm{x}-0,6)^2+0,55$, x = 0,6, y = x + 0,3, x = 0,7.

$$S_7 = \int_{0,6}^{0,7} \left(\mathrm{x}+\frac{20}{3}(\mathrm{x}-0,6)^2-0,25\right)dx = 0,04(2)$$

Площа S_8 обмежена графіками функцій: y = 0,7x + 0,41, y = 0,4x + 0,62, x = 0,95, x = 0,7.

$$S_8 = \int_{0,7}^{0,95} (0,4\mathrm{x} + 0,62 - 0,7\mathrm{x} - 0,41)dx = -0,009375$$

Площа S_9 обмежена графіками функцій: y = $-\sqrt{-\frac{1}{30}(\mathrm{x}-1)}+0,85$, x = 1, x = 0,7, y = $\frac{1}{12}(\mathrm{x}-0,7)+0,825$.

$$S_9 = \int_{0,7}^{1}\left(\frac{1}{12}(\mathrm{x}-0,7)+\sqrt{-\frac{1}{30}(\mathrm{x}-1)}-0,025\right)dx = 0,01625$$

Площа S_{10} обмежена графіками функцій: y $= -\frac{5}{2}(\mathrm{x}-0,7)^2+0,55$, y $= -5(\mathrm{x}-0,7)^2+0,65$, x = 0,7, x = 0,9.

$$S_{10}=\int_{0,7}^{0,9}\left(-5(\mathrm{x}-0,7)^2+0,1+\frac{5}{2}(\mathrm{x}-0,7)^2\right)dx=0,01(3)$$

Площа S_{11} обмежена графіками функцій: $\mathrm{y}=-\frac{20}{3}(\mathrm{x}-0,6)^2+0,55$, $\mathrm{y}=-3\mathrm{x}+2,65$, x = 0,7, x = 0,75.

$$S_{11}=\int_{0,7}^{0,75}\left(-3\mathrm{x}+2,1+\frac{20}{3}(\mathrm{x}-0,6)^2\right)dx=0,0015278$$

$$S_{\text{ананаса}}=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}+S_{11}+S_{12}$$

$$S_{\text{ананаса}}=0,0065+0,005+\frac{1}{150}-0,00291667+0,0383333(6)+0,02+$$

$$+0,04(2)-0,009375+0,01625+0,01(3)+0,0015278+0,34\approx$$

$$\approx 0,4775417155326\approx 0,48$$

$$S_{\text{ананаса}}=0,48\cdot S_{\text{квадрата}}$$

Перший квадрат має площу 1. Таким чином, площа кожної криволінійної трапеції у формі ананаса становить 0,48 площі квадрата. Послідовність площ квадратів нам відома із базової задачі: $S_1=1$, $S_2=\frac{1}{2^3}$, $S_3=\frac{1}{2^6}$, …, $S_n=\frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Запишемо послідовність площ «ананасів», вписаних в квадрат зі стороною $a_n=\frac{d_n}{4}$, де $\mathrm{d_n}$ – довжина діагоналі n-го квадрата:

$$S_{1\ \text{ананаса}}=0,48\cdot S_{1\ \text{квадрата}}=0,48$$

$$S_{2\ \text{ананаса}}=0,48\cdot S_{2\ \text{квадрата}}=0,48\cdot\frac{1}{2^3}$$

$$S_{3\ \text{ананаса}}=0,48\cdot S_{3\ \text{квадрата}}=0,48\cdot\frac{1}{2^6}$$

……………

$$S_{n\ \text{ананаса}}=0,48\cdot S_{n\ \text{квадрата}}=0,48\cdot\frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Маємо ряд виду: $\sum_{n=1}^{\infty}S_{n\ \text{ананаса}}=\sum_{n=1}^{\infty}0,48\cdot\frac{1}{2^{3(n-1)}}$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Спочатку перевіримо виконання необхідної умови:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{n\,\text{яблука}} = \lim\limits_{n\to\infty} 0{,}48 \cdot \frac{1}{2^{3(n-1)}} = 0$ – необхідна умова виконується, а тому ряд площ «ананасів» може бути збіжним.

Дослідимо ряд на збіжність за ознакою Д’Аламбера. Для цього запишемо: $S_{n+1} = \frac{0{,}48}{2^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{2^3} < 1$ – ряд збіжний.

Ряд, отриманий нами – ряд геометричної прогресії, $S_{1\,\text{ананаса}} = 0{,}48$, $q = \frac{1}{2^3}$. Обчислимо суму членів ряду: $S = \frac{S_{1\,\text{ананаса}}}{1-q} = 0{,}48 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} \approx 0{,}548$.

Задача 9. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму грони винограду, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. 2.5.19. «Bunch of grapes», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задана на рис. 2.5.20. та обмежена графіками функцій з таблиці Г.15., що наведена в додатку Г.*

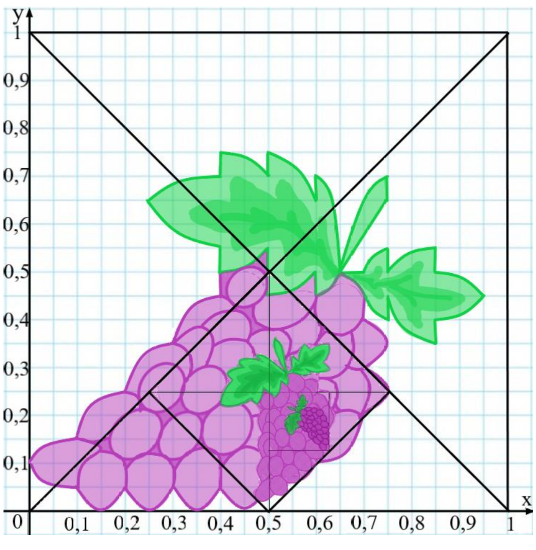


Рис. 2.5.19.

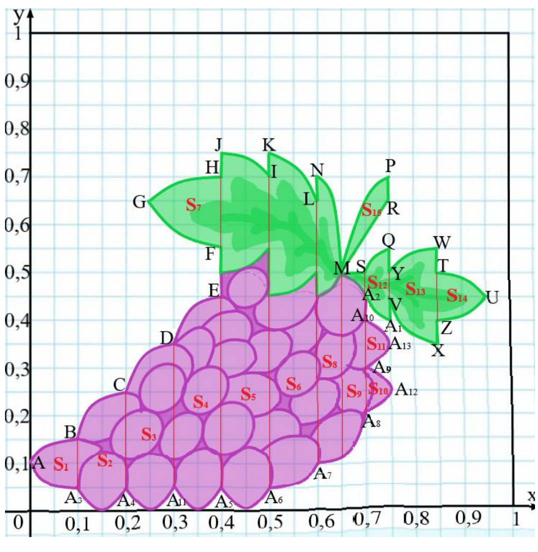


Рис. 2.5.20.

Інтелектуальний крос

1. Елементом геральдики яких українських міст був виноград? – Чугуїв, Ізюм, Білгород-Дністровський, Ялта.

2. Наведіть приклад відомої картини, де зображений виноград – На картині Франческо дель Косса «Осінь» зображений виноград. Вчитель може підказати.

3. Символом якої країни є виноград? – Вірменії.

4. У якій давньогрецькій епічній поемі пишеться про виноград? – «Одіссея» Гомера.

Факт чи фейк?

Португальці та іспанці останні 12 секунд до нового року з'їдають 12 виноградин, загадуючи 12 бажань. – Правда. Існує така традиція.

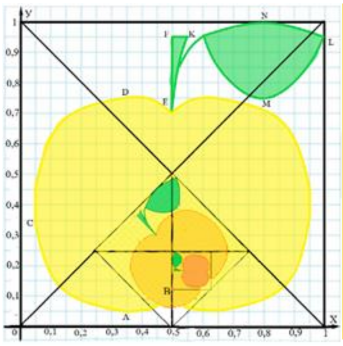
Першим обрізувачем винограду був віслюк. – Правда.

За аналогічним алгоритмом були отримані такі ряди площ різноманітних продуктів правильного харчування: яблука, апельсина, граната, груші, помідора, лимона, баклажана, банана, буряка, вишень, полуниць, грибів, моркви, ананаса, винограда. У таблиці 2.5.9. наведені результати дослідження ряда яблук. Вихідні дані та умови задач, QR-коди на цікаві доповнення наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.9.

Результати дослідження ряда яблук

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Яблуко	0,7467	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5,97}{2^{3n}}$	0,853	Збіжний	I



n-ий член	Частинні суми
1	0,74625000000
2	0,09328125000
3	0,01166015625
4	0,00145751953
5	0,00018218994
6	0,00002277374
7	0,00000284672
8	0,00000035584
9	0,0000004448
10	0,0000000556

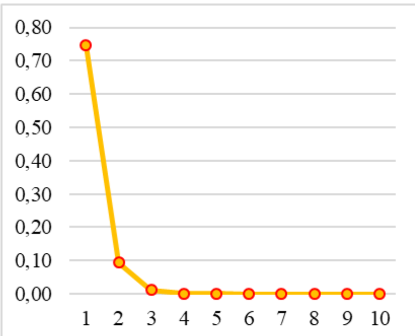


Рис. 2.5.21. Геометрична інтерпретація ряда яблук та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Результати дослідження рядів апельсинів та гранатів представлені в таблиці 2.5.10. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.10.

Результати дослідження рядів апельсинів та гранатів

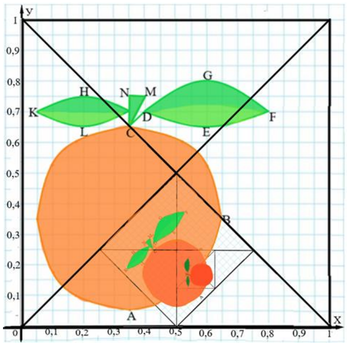
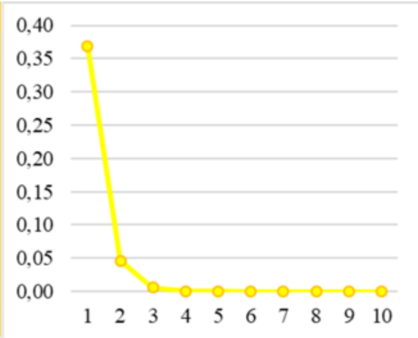
<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Апельсин</td><td>0,3688</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,95}{2^{3n}}$</td><td>0,4215</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,36875000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04609375000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00576171875</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00072021484</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009002686</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001125336</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000140667</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000017583</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002198</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000275</td></tr>
</table>


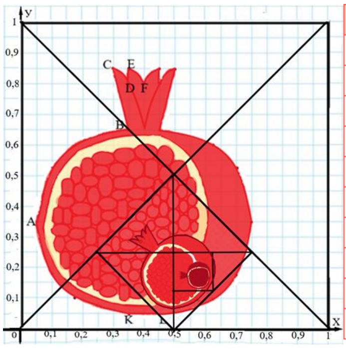
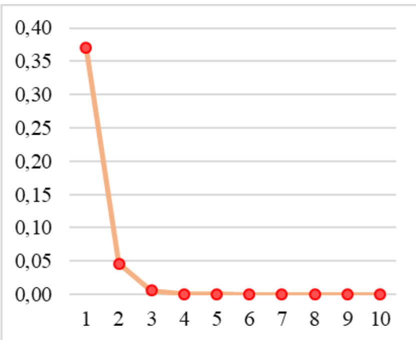
Рис. 2.5.22. Геометрична інтерпретація ряда апельсинів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гранат</td><td>0,37</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,96}{2^{3n}}$</td><td>0,423</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">

<table>
<tr><th>n-ий член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,37000000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,04625000000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00578125000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00072265625</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00009033203</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00001129150</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000141144</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000017643</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000002205</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000276</td></tr>
</table>


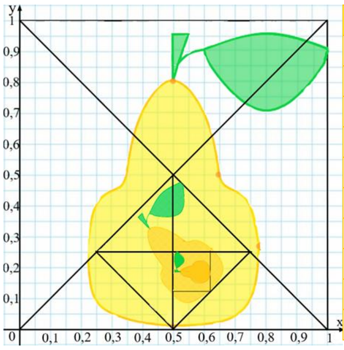
Рис. 2.5.23. Геометрична інтерпретація ряда гранатів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

У таблиці 2.5.11. представлені результати дослідження рядів груш та помідорів. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.11.

Результати дослідження рядів груш та помідорів

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Sкр</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Груша</td><td>0,3634</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,9072}{2^{3n}}$</td><td>0,4153</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">



n-ий член	Частинні суми
1	0,36340000000
2	0,04542500000
3	0,00567812500
4	0,00070976563
5	0,00008872070
6	0,00001109009
7	0,00000138626
8	0,00000017328
9	0,00000002166
10	0,00000000271

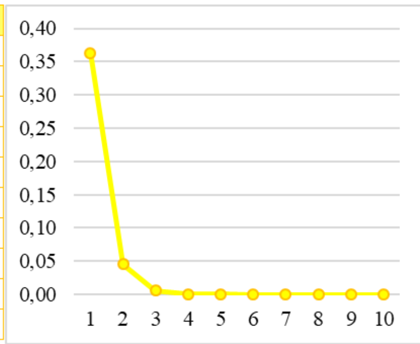
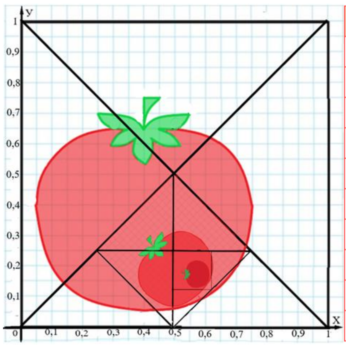


Рис. 2.5.24. Геометрична інтерпретація ряда груш та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Помідор</td><td>0,353</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,824}{2^{3n}}$</td><td>0,4</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">



n-ий член	Частинні суми
1	0,35300000000
2	0,04412500000
3	0,00551562500
4	0,00068945313
5	0,00008618164
6	0,00001077271
7	0,00000134659
8	0,00000016832
9	0,00000002104
10	0,00000000263

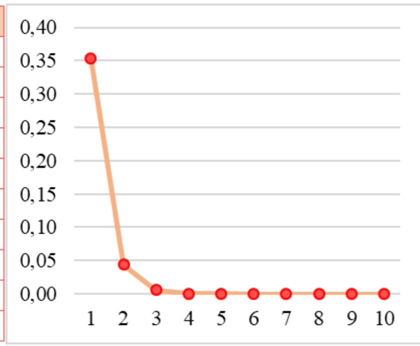


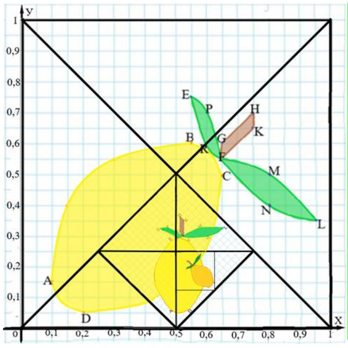
Рис. 2.5.25. Геометрична інтерпретація ряда помідорів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

</td></tr>
</table>

Результати дослідження рядів лимонів та баклажанів представлені в таблиці 2.5.12. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.12.

Результати дослідження рядів лимонів та баклажанів

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Skp</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Лимон</td><td>0,2574</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{,}06}{2^{3n}}$</td><td>0,294</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


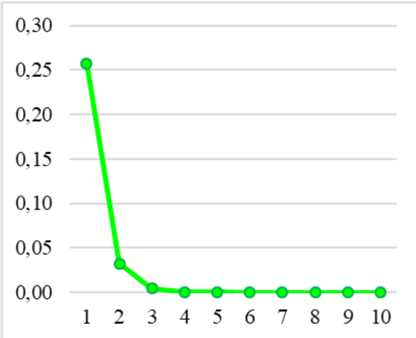
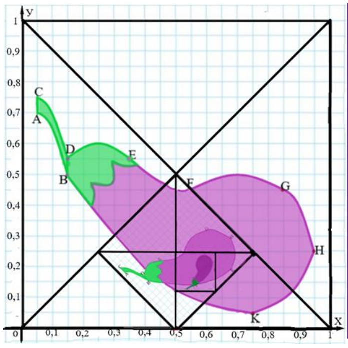
<table>
<tr><th>n-ний член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,25750000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,03218750000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00402343750</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00050292969</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00006286621</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000785828</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000098228</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000012279</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001535</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000192</td></tr>
</table>


Рис. 2.5.26. Геометрична інтерпретація ряда лимонів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Баклажан</td><td>0,278</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{,}2266}{2^{3n}}$</td><td>0,3181</td><td>Збіжний</td><td>I</td></tr>
<tr><td colspan="5">


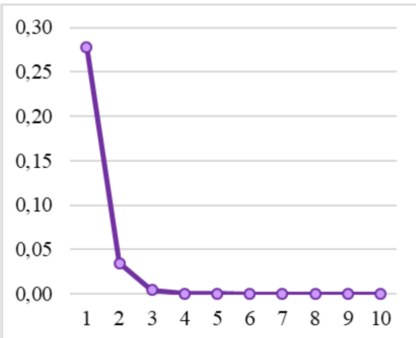
<table>
<tr><th>n-ний член</th><th>Частинні суми</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,27832500000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,03479062500</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,00434882813</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,00054360352</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,00006795044</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,00000849380</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,00000106173</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,00000013272</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,00000001659</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,00000000207</td></tr>
</table>


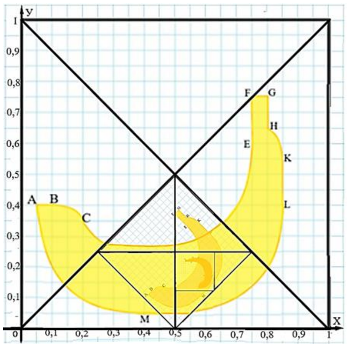
Рис. 2.5.27. Геометрична інтерпретація ряда баклажанів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

У таблиці 2.5.13. представлені результати дослідження рядів бананів і буряків. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.13.

Результати дослідження рядів бананів і буряків

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Банан	0,205	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,641}{2^{3n}}$	0,2343	Збіжний	I



n-ий член	Частинні суми
1	0,20512500000
2	0,02564062500
3	0,00320507813
4	0,00040063477
5	0,00005007935
6	0,00000625992
7	0,00000078249
8	0,00000009781
9	0,00000001223
10	0,00000000153

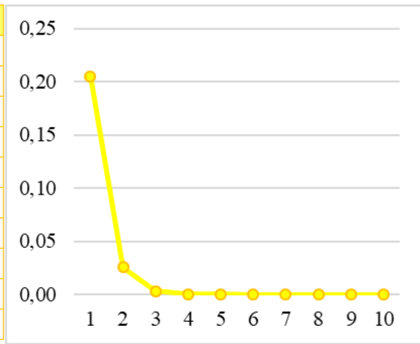
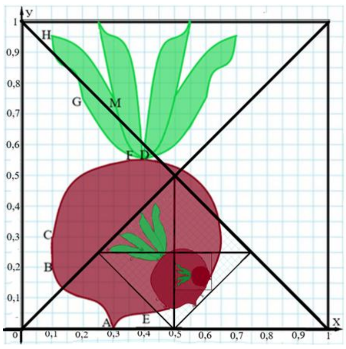


Рис. 2.5.28. Геометрична інтерпретація ряда бананів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Буряк	0,393	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3,14}{2^{3n}}$	0,449	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,39250000000
2	0,04906250000
3	0,00613281250
4	0,00076660156
5	0,00009582520
6	0,00001197815
7	0,00000149727
8	0,00000018716
9	0,00000002339
10	0,00000000292

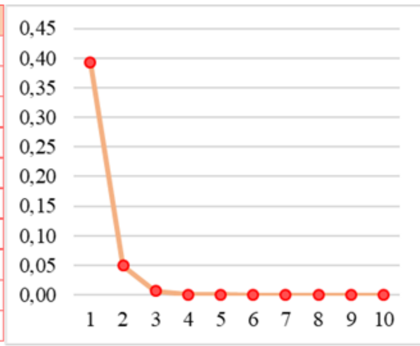


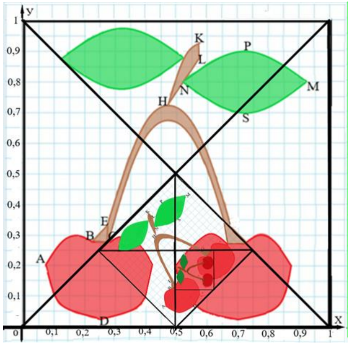
Рис. 2.5.29. Геометрична інтерпретація ряда буряків та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Результати дослідження рядів вишень і полуниць представлені в таблиці 2.5.14. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.14.

Результати дослідження рядів вишень і полуниць

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Вишні	0,3158	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,5264}{2^{3n}}$	0,361	Збіжний	II
Полуниці	0,22308	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,7847}{2^{3n}}$	0,255	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,31580000000
2	0,03947500000
3	0,00493437500
4	0,00061679688
5	0,00007709961
6	0,00000963745
7	0,00000120468
8	0,00000015059
9	0,00000001882
10	0,00000000235

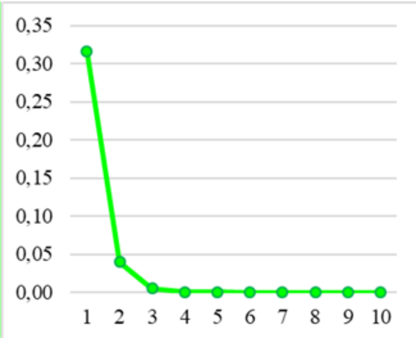
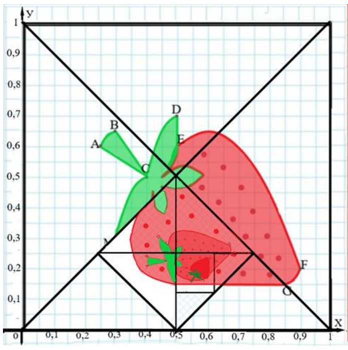


Рис. 2.5.30. Геометрична інтерпретація ряда вищень та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків



n-ий член	Частинні суми
1	0,22308750000
2	0,02788593750
3	0,00348574219
4	0,00043571777
5	0,00005446472
6	0,00000680809
7	0,00000085101
8	0,00000010638
9	0,00000001330
10	0,00000000166

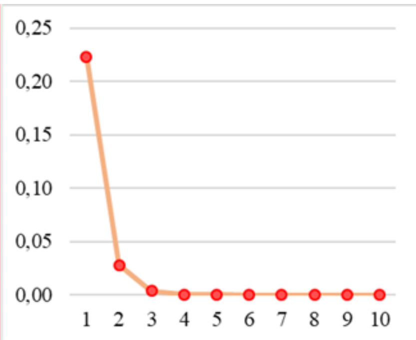


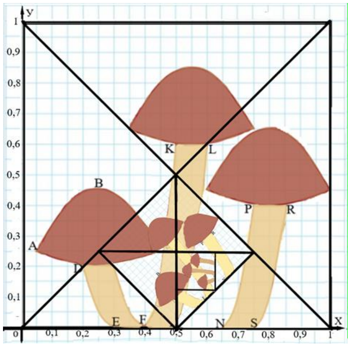
Рис. 2.5.31. Геометрична інтерпретація ряда полуниць та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

У таблиці 2.5.15. представлені результати дослідження рядів грибів і моркви. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.15.

Результати дослідження рядів грибів і моркви

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Гриби	0,32	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,56}{2^{3n}}$	0,366	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,32000000000
2	0,04000000000
3	0,00500000000
4	0,00062500000
5	0,00007812500
6	0,00000976563
7	0,00000122070
8	0,00000015259
9	0,00000001907
10	0,00000000238

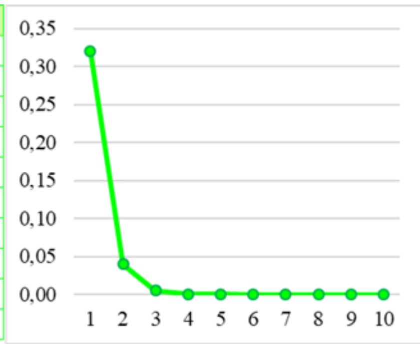
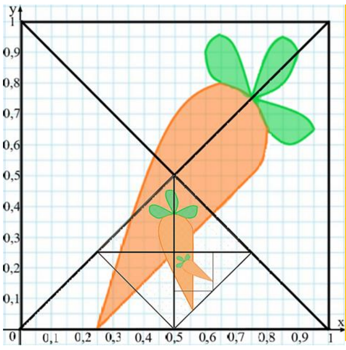


Рис. 2.5.32. Геометрична інтерпретація ряда грибів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Об'кт	*Sкр*	*Сігма-модель ряда*	*Сума ряда*	*Збіжність, розбіжність*	*Рівень складності задачі*
Морква	0,3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2,4}{2^{3n}}$	0,34323	Збіжний	II



n-ий член	Частинні суми
1	0,30000000000
2	0,03750000000
3	0,00468750000
4	0,00058593750
5	0,00007324219
6	0,00000915527
7	0,00000114441
8	0,00000014305
9	0,00000001788
10	0,00000000224

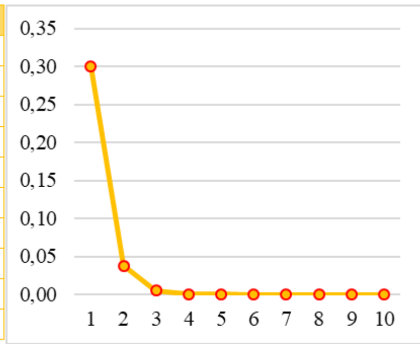
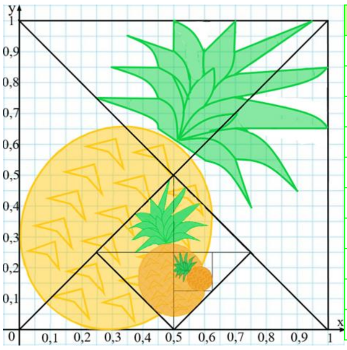


Рис. 2.5.33. Геометрична інтерпретація ряда моркви та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків

Результати дослідження рядів ананасів і грони винограду представлені в таблиці 2.5.16. Вихідні дані та умови задач наведені в додатку Г.

Таблиця 2.5.16.

Результати дослідження рядів ананасів і грон винограду

<table>
<tr><th>Об'кт</th><th>Skp</th><th>Сігма-модель ряда</th><th>Сума ряда</th><th>Збіжність, розбіжність</th><th>Рівень складності задачі</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ананас</td><td>0,48</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3,84}{2^{3n}}$</td><td>0,548</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ий член	Частинні суми
1	0,48000000000
2	0,06000000000
3	0,00750000000
4	0,00093750000
5	0,00011718750
6	0,00001464844
7	0,00000183105
8	0,00000022888
9	0,00000002861
10	0,00000000358

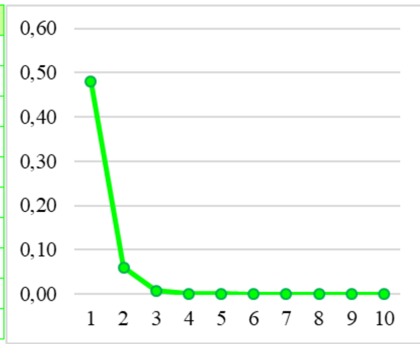
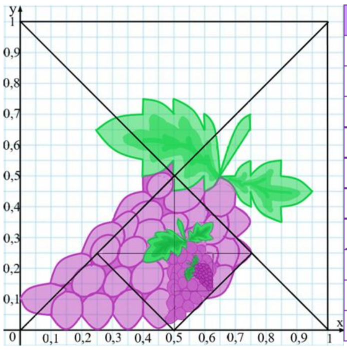


Рис. 2.5.34. Геометрична інтерпретація ряда ананасів та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Грона винограду</td><td>0,32</td><td>$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2,56}{2^{3n}}$</td><td>0,366</td><td>Збіжний</td><td>III</td></tr>
<tr><td colspan="5">


n-ий член	Частинні суми
1	0,32000000000
2	0,04000000000
3	0,00500000000
4	0,00062500000
5	0,00007812500
6	0,00000976563
7	0,00000122070
8	0,00000015259
9	0,00000001907
10	0,00000000238

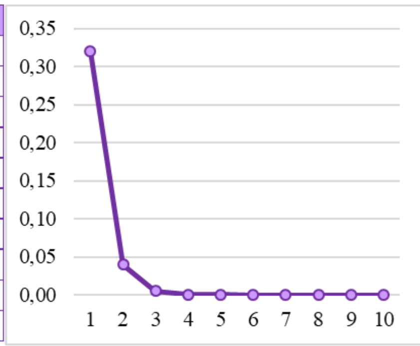


Рис. 2.5.34. Геометрична інтерпретація ряда грон винограду та графік залежності частинних сум ряда від кількості доданків
</td></tr>
</table>

2.6. Авторські методичні рекомендації до викладання числових рядів та використання запропонованих добірок вправ.

Учні та студенти повинні мати більше можливостей проявити і розвинути свою творчість і креатив. В свою чергу і викладач має бути креативним, творчим і сучасним. На мою думку, при викладанні числових рядів обов’язково має бути застосовано:

1. *Нестандартний підхід.*

Створюючи конспекти та матеріали до уроків, я намагаюсь, щоб кожен урок містив елементи нестандартності, або був повністю нестандартним. Звісно, підготовка потребуватиме витат часу педагога. Проте такі уроки дуже подобаються студентам і учням, вони дають безліч можливостей для розвитку їхньої творчості, креативу, різних видів мислення, уяви, уваги, ключових компетентностей та багато-багато іншого. Це сучасний стиль викладання.

2. *Компетентнісний підхід.*

Розроблені добірки вправ спрямовані на патріотичне, екологічне, моральне виховання учнів старшої школи та студентів ЗВО та на вдосконалення *ключових предметних компетентностей: математичної*, *інформаційно-комунікаційної* (учні задають одне одному питання під час захисту проєктів, комунікують під час роботи над задачами, збирають, аналізують і синтезують інформацію до проєктів), *екологічної, культурної* (учні залучені до мистецької творчості – створюють та розмальовують геометричні фігури, використовуючи різне програмне забезпечення або вручну – образотворче мистецтво, розробляють дизайн блогу, сайту, буклету, презентації, доповіді – мистецтво оформлення)*, вільного володіння державною мовою, здатності спілкуватися іноземною мовою, ініціативності, навчання впродовж життя* (виконуючи роботу над проєктом, учні вдосконалюють вміння монтувати відео, створювати та оформлювати в певному стилі сайт, блог, буктет, презентацію або доповідь; ці знання знадобляться в подальшому навчанні у ЗВО, професійній діяльності та житті), *компетентності в галузі природничих наук, техніки й технологій* (робота над проєктами), *громадянської та соціальної компетентності* (один з підрозділів моєї кваліфікаційної роботи присвячений вихованню патріотизму, а, працюючи над проєктами в групках, студенти співпрацюють з іншими особами для досягнення спільної мети), *підприємливості* (учні розвивають ініціативність, готовність брати відповідальність за власні рішення, вміння організовувати свою діяльність для досягнення цілей, прийняття власних рішень, коли виконують роботу над проєктами та розв'язують задачі) та інші.

3. *Міжпредметні зв'язки та зв'язки з життям, родом зайнятості.*

В розроблених мною задачах та планах-конспектах уроків наявні зв'язки з такими предметами, родом зайнятості та з життям:

- *Біологія.*

Студенти мають одержати та дослідити на збіжність, обчислити частинні суми числових рядів, члени яких – площі геометричних фігур, вписані в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$, де $d_n -$ діагональ $n -$ го квадрата. Геометричні фігури, утворені з фрагментів графіків степеневих функцій, є рідкісними рослинами, або рослинами-символами України. При розв'язуванні задачі згадується, зокрема, структура, вид рослини. Також геометричні фігури показують рідкісних та унікальних представників тваринного світу. Після розв'язання кожної задачі є кілька QR-кодів, відсканувавши які, учні можуть прочитати цікаву та корисну інформацію на відповідних сторінках мого блогу, сайту, соціальної мережі Facebook, слайдах презентації, буклеті чи подивитись відео на ютуб-каналі про об'єкт, наведений на геометричній інтерпритації ряда.

- *Інформатика*

Один з розроблених мною нестандартних уроків – захист проєктних робіт. За місяць до його проведення студенти розподілились на 4-5 команд. Кожна команда має створити і розробити дизайн презентації з анімаціями, або сайту, або блогу, або буклету, або доповіді, змонтувати відеодоповнення, створити карти знань з теоретичного матеріалу. Також, працюючи над проєктами, студенти мають будувати фігури з використанням графічних кайкуляторів.

- *Геометрія.* При розв'язуванні задач учні пригадують перетворення ліній II-го порядку (поворот еліпса) та геометричних фігур: симетрію, паралельне перенесення, поворот, гомотетію. Також, згадують паралельність прямих, геометричну фігуру квадрат та його властивості, діагональ, площу, відрізки та криві лінії, коло та його площу, вектор (довжина та середина).

- *Історія України.*

Геометрична фігура в одній із розроблених задач є гербом України. До задачі є цікаве відеодоповнення, в якому розповідається про походження герба на основі архівних даних.

- *Шкільний курс алгебри та курс математичного аналізу*

Розв'язуючи запропоновані мною задачі, учні пригадують відношення, числові проміжки, перетворення графіків функцій (розтяг, стиск, симетрія, паралельне перенесення), десяткові та звичайні дроби, зокрема, зведення до спільного знаменника. Крім того, учні обчислюють інтеграли, згадується геометрична прогресія та її сума, вони вчаться розбивати фігури на фрагменти, будувати й задавати графіки функцій.

- *Українська мова*

Розв'язуючи задачу, учні використовують в реченнях розділові знаки, лапки, звороти. Також, домашнім завданням до одного з моїх нестандартних уроків є написання есе «Що було найцікавішим на занятті?» обсягом одна сторінка зошита з використанням однорідних членів речення, крім того студенти мають підкреслити всі дієслова. На початку одного з розроблених уроків я пропоную учням охарактеризувати свій настрій за допомогою дієслова або прикметника. Починаючи інше заняття, пропоную скласти речення з використанням омонімів про їхню роботу над проєктами. Наприклад, учень може скласти таке речення: «Перед початком роботи над проєктами наша команда склала *графік* роботи *(план роботи)*, потім ми будували фрагменти *графіків* степеневих функцій, після чого наш *графік* *(художник)* дуже красиво розфарбував отримані геометричні фігури». Це завдання також розвиває мислення.

- *Українська та зарубіжна література*

Наприклад, при розв'язуванні задачі про вишні або мальви, чи мак, або соняшник, або пшеницю, барвінок, або конюшину учням (студентам) можна задати питання, в яких віршах або творах, котрі вони вивчали або читали в шкільному рурсі української або зарубіжної літератури, згадуються перелічені рослини. Наприклад, «Садок вишневий коло хати» Тараса Шевченка, також у вірші Володимира Сосюри «Любіть Україну» є словосполучення «вишневу свою Україну», вірш Тараса Шевченка «Барвінок цвів і зеленів», «Балада про соняшник» Івана Драча. Квіти згадуються у вірші Лесі Українки «Без надії сподіваюсь», ластівка згадується у вірші Миколи Леонтовича «Щедрик, щедрик, щедрівочка…», «Байка про котів» Григорія Сковороди, собаки – в «Інтермеццо» Коцюбинського, де серед дійових осіб є три білих вівчарки та інші.

В розробці одного із занять згадується оксиморон (в проєктах мають бути органічно представлені тема та треба привернути увагу до важливої проблеми, які зовсім різні та навіть контрастні)

- *Музичне мистецтво*

Розв'язуючи задачу про мальви можна, наприклад, нагадати учням про пісню «Балада про мальви» композитора Володимира Івасюка. Аналогічно можна зробити при розв'язуванні інших задач.

- *Англійська (німецька) мова*

В умовах деяких задач назва геометричної фігури подана англійською або німецькою мовою. Також в розробках уроків теми звучать англійською мовою. Студенти мають перекласти на українську.

- *Мистецтво*

Студенти, виконуючи роботу над проєктами, залучені до мистецтва оформлення (а це вид декоративного мистецтва), образотворчого мистецтва (створюють малюнки до придуманих ними задач).

- *Фізична культура* (підрозділ моєї кваліфікаційної роботи присвячений задачам на види спорту, зокрема олімпійські, про які є багато цікавої інформації в доповненнях до задач)
- *Екологія*

У двох підрозділах кваліфікаційної роботи наявні задачі, спрямовані привернути увагу учнів до проблем екології та захисту довкілля. Наприклад, є задача про зелену черепаху та інших мешканців океанів і річок, суходолу, занесених до червоної книги. Вони часто гинуть через сміттєві острови та пластикові пляшки, викинуті в річку чи океан, через забруднення довкілля. В цікавих доповненнях до деяких задач йде мова й про рідкісні рослини.

Дизайн одного з проєктів, які мали підготувати студенти в розробці одного з уроків, спрямований привернути увагу до проблеми збереження довкілля, інший – здорового способу життя, наступний – проблеми безпритульних тварин та жорстокого поводження з ними.

Оформлення однієї вправи на повторення та проєкту спрямоване привернути увагу до дотримання правил природоохоронної поведінки, ощадного використання природних ресурсів.

- *Географія* (в одному з планів-конспектів уроків йтиме мова про різні регіони України, тобто учні згадають географію нашої Батьківщини)
- *Основи здоров'я* (один з підрозділів присвячений задачам, спрямованим популяризувати правильне харчування, зокрема вживання фруктів та овочів)
- *Зв'язок з родом діяльності (майбутньою професією, або видом спорту яким займається учень)*

Досить часто учні не зацікавлені у вивченні математики, оскільки їхня майбутня професія не буде з нею пов'язана. У наступних добірках вправ я прагнула зацікавити учнів та студентів вивчати математику, показавши зв'язок зокрема інтегралів та числових рядів з різними професіями. Цьому присвячено підрозділ моєї кваліфікаційної роботи. Інший підрозділ присвячений задачам про різні види спорту, адже багато учнів та студентів займаються або захоплюються певною спортивною діяльністю.

- *Зв'язок з життям* (задачі одного з підрозділів спрямовані показати, що математика оточує нас всюди, навіть в буденному житті).

- *Історія математики або історія розвитку математичної освіти*

В розробці одного з моїх уроків є коротенька історична довідка про числові ряди, а в іншій розробці є вправа на повторення вивченого теоретичного матеріалу, в якій згадується історичний факт про числові ряди.

4. Різнорівневі завдання. Розроблені мною добірки вправ містять задачі трьох рівнів складності. Тож кожен учень (студент) може самостійно обрати посильне для нього завдання.

5. Різне програмне забезпечення.

Малюнки до задач створені в paint 3D. Також для цього можна використовувати графічні калькулятори Desmos або Geogebra, проте там площі фігур не зафарбовуються кольорами.

Нині дуже багато цікавих сервісів для створення завдань, зокрема на закріплення вивченого матеріалу. Я рекомендую використовувати такі сервіси, як Google Classroom, Blogger, Google Sites та Google Forms, сервіси Classtime, Draw.io, Kahoot, Pixton та LearningApps, платформу графічного дизайну Canva, XMind. Не варто забувати про таке програмне забезпечення, як Microsoft Word, Microsoft PowerPoint, Microsoft Paint 3D. Ці програми здатні на чудові речі.

6. Різні форми роботи на уроці.

Дуже важливо, щоб на уроках реалізовувалися різні форми роботи:

- *Індивідуальна*

Наприклад, кожен студент на парі може самостійно розв'язувати задачу першого рівня складності. Виконання вправ на повторення теоретичного матеріалу, написання есе, учні створюють карти знань, які розміщують у своєму блозі, сайті, буклеті чи презентації.

- *Групова*

В розробці одного із занять з математичного аналізу група ділиться на команди, які змагаються одна з одною. Також, в іншій розробці студенти мають захищати свої проєкти, над якими працювали команди з 4 студентів однієї групи.

- *Парна*

Для прикладу, задачі другого рівня складності зручно розв'язувати в парі. Крім того, по двоє учнів з кожної команди розробляють дизайн та наповнюють інформацією свій блог, сайт, буклет чи презентацію (залежно від команди)

7. Врахування індивідуальних особливостей і здібностей групи чи класу.

Для учнів або студентів, котрі мають розвинене арифметичне мислення буде зручно обчислювати площі фігур, вписаних у квадрат зі стороною 1. Проте, якщо обчислювальна культура не на високому рівні, то вони можуть використовувати електронний калькулятор. Також, для зручності та щоб полегшити розв'язання, в деяких задачах спочатку пропоную обчислити площу криволінійної трапеції, вписаної у квадрат зі стороною 20 одиниць довжини. Функції, якими вона обмежена, можуть бути відомі або невідомі, чи відомі частково учням за умовою. Площа криволінійної трапеції становитиме певну частину a від площі квадрата. Тобто, це можна записати так: $S_{\text{кр}} = a \cdot S_{\text{квадрата}}$. Якщо зменшити квадрат та вписану в нього криволінійну трапецію у 20 разів чи більше, то вона становитиме ту саму частину a від площі відповідного квадрата, в який вона вписана. А ряд площ квадратів нам відомий із базової задачі, тож ми легко зможемо знайти ряд площ даних криволінійних трапецій та дослідити його на збіжність і обчислити його суму.

<u>Ідеї використання розроблених задач:</u>

1. *<u>Заняття з математичного аналізу або подібних дисциплін у ЗВО:</u>*

Задачі можна розв'язувати, наприклад, поділивши учнів або студентів на групи та влаштувавши змагання. Зокрема, це стосується задач третього рівня складності. Учасники кожної групи обирають капітана, який дає кожному учаснику команди певне завдання. Наприклад, кілька учасників обчислюють площу кожного фрагмента криволінійної трапеції, інший учасник знаходить суму обчислених площ, яка і буде площею шуканої криволінійної трапеції. Наступний учасник команди записує послідовність площ шуканих криволінійних трапецій, а інший – досліджує ряд на збіжність. А капітан, наприклад, обчислює суму ряда.

Якщо це студенти фізико-математичних спеціальностей, або дуже здібна група, то вони можуть отримати геометричну фігуру, проте функції можуть бути відомі учням частково, або невідомі взагалі. Студенти, дивлячись на фігуру та згадавши перетворення графіків функцій, мають самостійно з'ясувати аналітичне задання функцій. Або, наприклад, в умові задачі в деяких аналітичних заданнях пропущені цифри, або є невеличка помилка. Студентам треба заповнити пропуски або виправити помилку.

Виконуючи роботу над проєктами, студенти мають придумати свої фігури, підібрати аналітичне задання та побудувати графіки фрагментів функцій, а далі – обчислити площі фрагментів, одержати і дослідити на збіжність, обчислити частинні суми числових рядів, члени яких – площі геометричних фігур, вписані в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$. Таке завдання можна давати здібним групам. Трохи слабшим у математиці групам можна запропонувати аналітичне задання функцій, числові проміжки, в межах яких вони мають будувати графіки. Побудувавши фрагменти графіків функцій, у студентів має вийти певна геометрична фігура, яку вони мають розмалювати. Побудову та розфарбовування можна робити або в зошиті, або, наприклад, в Paint 3D. Крім того, студенти розбиватимуть фігуру на фрагменти самостійно або з допомогою вчителя, або фігура буде розбита на фрагменти ще в умові задачі. Або такі групи можуть виконувати завдання другого рівня складності. Все залежить від математичних здібностей групи.

Побудовані та розмальовані геометричні фігури, дослідження та теоретичний матеріал про числові ряди, цікаву інформацію про геометричну фігуру, відеодоповнення учні мають викласти в своєму блозі, на сайті, продемонструвати на слайдах презентації, або сторінках доповіді. Фігури привертають увагу до важливої проблеми чи цінності, правильного способу життя і спрямована на розвиток компетентності.

Задачі першого рівня складності можна давати як індивідуальне завдання на парі. Якщо студент дуже здібний, то йому можна запропонувати обрати якусь задачу другого рівня складності.

2. Уроки алгебри в класах, що навчаються за профільним рівнем, факультативні курси, тижні математики, інші позакласні заходи з математики.

Задачі першого рівня складності можна давати як індивідуальне завдання на уроці. Загалом, можна давати такі ж завдання, як і на заняттях з математичного аналізу, проте учні мають працювати лише із завданнями першого та другого рівнів складності. Але, оскільки учні не вивчають тему числові ряди, вони не зможуть складати та досліджувати ряди на збіжність. В ході нестандартного уроку можна поділити учнів на команди і запропонувати їм обчислити площі фігур із задач другого рівня складності, наведених на малюнку. Розбиття на фрагменти може бути віломе учням або вони мають самостійно розбити фігуру на частини.

Командам можна запропонувати аналітичне задання функцій, числові проміжки, в межах яких вони мають будувати графіки. Побудувавши фрагменти графіків функцій, у них має вийти певна геометрична фігура із задач ІІ-го рівня складності, яку вони мають розмалювати та обчислити площу.

Можна дати учням фігуру із задачі першого чи другого рівня складності, утворену з фрагментів графіків функцій. Вони, дивлячись на фігуру та згадавши перетворення графіків функцій, мають самостійно з'ясувати аналітичне задання функцій. Або, наприклад, в умові задачі в деяких аналітичних заданнях пропущені цифри, або є невеличка помилка. Їм треба заповнити пропуски або виправити помилку.

3. <u>Уроки алгебри в класах, що навчаються за рівнем стандарту.</u>

Навчаючись за рівнем стандарту, учні не вивчають тему числові ряди. Проте, вони вивчають побудову та перетворення графіків функцій, інтеграли. Тому вони не зможуть складати та досліджувати ряди на збіжність.

Наприклад, при проведенні нестандартного уроку можна поділити учнів на команди і запропонувати їм обчислити площі фігур із задач першого рівня складності, наведених на малюнку. Розбиття на фрагменти може бути віломе учням або вони мають самостійно розбити фігуру на частини. Для таких учнів буде зручніше працювати з системою координат 20х20 одиниць при обчисленні площі фігури, оскільки при цьому більш прості обчислення і легко бачити в аналітичному заданні функції перетворення (стиск, розтяг, паралельне перенесення, симетрія графіка функції).

Командам можна запропонувати аналітичне задання функцій, числові проміжки, в межах яких вони мають будувати графіки. Деякі фрагменти можуть бути заздалегідь побудовані. Побудувавши фрагменти графіків функцій, у них має вийти певна геометрична фігура із задач першого рівня складності, яку вони мають розмалювати та обчислити площу, або лише створити малюнок.

Можна дати учням фігуру, утворену з фрагментів графіків функцій. Вони, дивлячись на фігуру та згадавши перетворення графіків функцій, мають самостійно з'ясувати аналітичне задання функцій. Або, наприклад, в умові задачі в деяких аналітичних заданнях пропущені цифри, або є невеличка помилка. Їм треба заповнити пропуски або виправити помилку.

4. Курси підвищення кваліфікації, інтегровані (бінарні, трансдисциплінарні) уроки.

До кожної задачі пропонуються різні методичні прийоми.

<u>Варіанти творчих додаткових завдань для другого розділу.</u>

Створіть:

- *соціальну рекламу* України, здорової їжі чи способу життя, спорту, захисту тварин, рослин (залежить від обраних до розв’язування на занятті задач);

- *мем* про числовий ряд (на уроці можна провести конкурс мемів);
- *хайку,* чи *сенкан,* або *акровірш* про числовий ряд (конкурс віршів);
- *головоломку* чи *мальопис*, *інфографіку, клоуз-тест, інтерв'ю* про ряди;
- *кластер* з теорії, або *карту знань*, або *хмарку ключових слів*;
- *буклет* або *кросворд (сканворд, чайнворд)* з теорії (на занятті учні поміняються з сусідом по парті і розгадуватимуть, згадаючи так теорію);
- *есе* з теми «Що було цікаво на уроці?».

Варіанти групових завдань до другого розділу.

Створіть:

- *Печворк* – групування фактів з ілюстраціями про життєвий шлях і наукову діяльність одного чи кількох засновників теорії рядів (Леонард Ейлер, Д'Аламбер, Раабе, Коші, Гаусс, Абель, Дирихле, Колін Маклорен,..).
- *Лепбук* – виготовлена власноруч інтерактивна папка чи зошит, де зібрані та яскраво оформлені теоретичні відомості про числові ряди чи розповідається про життя та науковий внесок певного вченого в теорію рядів.
- *Пантбук* – намальована книжка про життєвий шлях і наукову діяльність одного з основоположників теорії рядів.
- *Інтерактивний плакат* про числові ряди.
- *Комікс* про числові ряди.
- *Кластер* про числові ряди.
- *Відчит* про числові ряди з використанням кластерів, інфографіки, ілюстрацій.
- *Дизайнерська презентація* з використанням анімацій, переходів, SmartArt-об’єктів про числові ряди або про одного з основоположників теорії рядів.
- *Блог або сайт* про числові ряди.

Висновки до розділу 2

Проведені дослідження підтверджують той факт, що числові ряди можна інтерпретувати за допомогою великої кількості геометричних об’єктів.

Одержано, досліджено на збіжність числові ряди, члени яких пов’язані з площами різних фігур, обмежених степеневими функціями, вписаними в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$. Всі ряди збіжні. Це ряди геометричної прогресії. Також обчислено суми отриманих рядів.

Наведено приклади задач з використанням геометричних інтерпретацій, рекомендованих при вивченні числових рядів в процесі навчання математичного аналізу та подібних дисциплін. Частково задачі можна використати на інтегрованих уроках алгебри, геометрії та інших дисциплін в 10-11 класах, в програмах факультативів, математичних гуртків, на курсах підвищення кваліфікації, тижнях математики та подібних заходах; продемонстровані основи реалізації дидактичного принципу наочності при вивченні розділу «Ряди» студентами математичних спеціальностей.

В задачах та запропонованих конспектах занять реалізовано: нестандартний підхід, компетентнісний, міжпредметні зв'язки, зв'язки з життям, родом зайнятості.

Запропоновані добірки вправ містять задачі трьох рівнів складності, які розв'язуються з використанням на деяких етапах різного програмного забезпечення. Вправи можна використовувати при організації різних форм роботи (індивідуальної, парної, групової).

Задачі розроблені так, щоб зацікавити вивчати математику та показати, що вона оточує людину всюди. Тому в задачах використовується геометрична інтерпритація числових рядів, які описують: українську символіку, флору та фавну, різні роди занять (зокрема, види спорту) та продукти правильного харчування. До кожної задачі є цікаве доповнення, яке можна переглянути, відсканувавши QR-код. Також перед розв’язанням кожної задачі пропонується брейнстормінг та інші методичні прийоми.

ВИСНОВКИ

Проаналізувавши основні теоретичні положення про числові ряди у науковій літературі, а ще історичні матеріали стосовно їхнього виникнення було з’ясовано:

1. Чітких періодів розвитку теорія рядів не має і неможливо встановити точну дату їх заснування. Хоча ще в стародавніх цивілізаціях, для прикладу, в Стародавньому Єгипті, Стародавньому Вавилоні, Стародавньому Китаї знали певні відомості про обчислення суми безкінечної кількості доданків і намагались знайти їх суми.

2. Мислителі часів Евдокса та Архімеда пробували застосувати теорію рядів задля розв’язування задач на обчислення об’єму піраміди, площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника.

3. Формального розвитку теорія рядів як безкінечних сум конкретних доданків набула аж на початку XVII століття, так як науковці досліджували питання, котрі неможливо розглядати без розвиненої теорії рядів.

4. Визначено сутність поняття «числовий ряд».

5. Досліджені властивості і розглянуто необхідні та достатні ознаки збіжності числових рядів.

6. Реалізовано нестандартний, компетентнісний, різнорівневий підходи, зв'язки: міжпредметні, з життям, родом зайнятості та іншими темами курсу математики при вивченні числових рядів.

7. Одержано і досліджено на збіжність, обчислені частинні суми числових рядів геометричних фігур, утворених фрагментами графіків степеневих функцій, вписаними в послідовність квадратів зі сторонами $a_n = \frac{d_n}{4}$.

8. Запропоновані добірки різнорівневих задач, спрямованих на розвиток ключових компетентностей, з використанням геометричних інтерпретацій, рекомендованих при вивченні числових рядів в процесі навчання математичного аналізу.

9. Запропоновано методичні рекомендації до використання запропонованих добірок вправ на інтегрованих уроках алгебри, геометрії та інших дисциплін в 10-11 класах, в програмах факультативів, математичних гуртків, на курсах підвищення кваліфікації, тижнях математики та подібних заходах; продемонстровані основи реалізації дидактичного принципу наочності при вивченні розділу «Ряди» студентами математичних спеціальностей. Також вправи можна використовувати при організації різних форм роботи (індивідуальної, парної, групової).

10. Пропонуються плани-конспекти нестандартного уроку та позакласного заходу (додаток Д), де показано, як можна використати розроблені задачі.

Задачі розроблені так, щоб зацікавити вивчати математику та показати, що вона оточує людину всюди. Тому в задачах використовується геометрична інтерпритація числових рядів, які описують: українську символіку, флору та фавну, різні роди занять (зокрема, види спорту) та продукти правильного харчування.

До кожної задачі є цікаве доповнення, яке можна переглянути, відсканувавши QR-код. Також перед розв’язанням задач пропонується брейнстормінг та інші методичні прийоми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Архіпов Г. І. «Лекції з математичного аналізу».: Підручник для університетів і пед. вузів/ Під. ред. Г. І Архіпов. В. А Садовничий. В. Н. Чубариков − Вища шк. 1999. − 695 с.
2. Бермант А. Ф. Курс математичного аналізу, В 2-х томах / Під. ред. А. Ф. Бермант. Физматліт, 1959.
3. Бобирь В. Д. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів / В. Д. Бобирь, В. В. Корольський // Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.): матер. тез – Чернігів, 2019.
4. Бобирь В. Д. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, В. В. Корольський // Молоді вчені 2019 – від теорії до практики: X Міжнародна конференція молодих вчених (Дніпро, 7 березня 2019 р.): матер. тез. – Дніпро, 2019. – с. 249-252.
5. Бурбакі Н. Нариси з історії математики / Н. Бурбакі; пер. с фр. І. Г. Башмакова. – М.: Вид-тво іноземної літератури, 1963. – 292 с.
6. Габ С. С. Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з фракталами / С. С. Габ // Матеріали XIV Международної науково-практичної конференції молодих вчених «Співдружність наук. Барановичі-2018» (Барановичі, 17 травня 2018 р.). – Барановичі, 2018. – с. 50-51.
7. Габ С. С. Числові ряди, які пов’язані з парадоксом Шварца / С. С. Габ // Актуальні аспекти фундаменталізації математичної підготовки в сучасних вищих навчальних закладах. Погляд студентів та молодих вчених: Всеукр. науково-практична конф. здобувачів вищої освіти та молодих вчених (Харків, 12-13 квітня 2018 р.): матер. доповідей та виступів. – Харків, 2018. – с. 114-117.
8. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 01404 середня освіта (математика) / С. С. Габ: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2018. – 100 с.

9. Жалдак М. І. Математичний аналіз функції: навч. посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ: НПУ, 2007. – 429 с.
10. Замятін В. Н. Числові і функціональні ряди: навчально-методичний посібник / В. Н. Замятін, С. М. Шаова. – Майкоп: АГУ, 2010. – 69 с.
11. Істер О. С. Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.
12. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата «тангарам»: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 01404 середня освіта (математика) / А. А. Комарова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2020. – 100 с.
13. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. / редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – с. 57-63.
14. Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання / В. В. Корольський, С. С. Габ. // Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. / редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – с. 67-73.
15. Корольський В. В. Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра / В. В. Корольський, С. С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал / за ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – с. 39-45.
16. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб / редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – с. 59-66.
17. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013. – № 6. – с. 117-120.

18. Кудрявцев Л. Д. Курс математичного аналізу. Т.2. Ряди. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. [Електронний ресурс] / Л. Д. Кудрявцев – Режим доступу: http://alleng.org/d/math/math98.htm
19. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 01404 середня освіта (математика) / В. В. Няньчук: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2021. – 97 с.
20. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 01404 середня освіта (математика) / О. Ю. Примакова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2021. – 84 с.
21. Романов А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 01404 середня освіта (математика) / А. М. Романова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.
22. Савельєва Р. Ю. Вища математика. Теорія рядів. / Р. Ю. Савельєва М.: Вища школа, 1982
23. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник. / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б. Ковальчук – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 138 с.
24. Харді Г. Розбіжні ряди / Г. Харді; пер. з англ. Д. А. Райкова. – М.: Вид-во іноземної літератури, 1951. – 498 с.
25. Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І., 2019. – 280 с.
26. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // X Міжнародна конференція

молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. – 404 с.

27. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч II: Посібник для пед. інститутів. / М. І. Шкіль – Київ: Вища школа. Головне видав., 1981. – 456 с.

28. Щоголєв С. А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Задачі про числові ряди, які описують українську символіку

I рівень складності

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму Прапора України, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. А.1. «Прапор України», вписаний в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, заданий на рис. А.2. та обмежений графіками функцій з таблиці А.1.:*

Таблиця А.1.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AB: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25$	x є (1; 7)
2	DE: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75$	x є (1; 7)
3	BC: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9}$	x є (7; 19)
4	EF: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{295}{9}$	x є (7; 19)

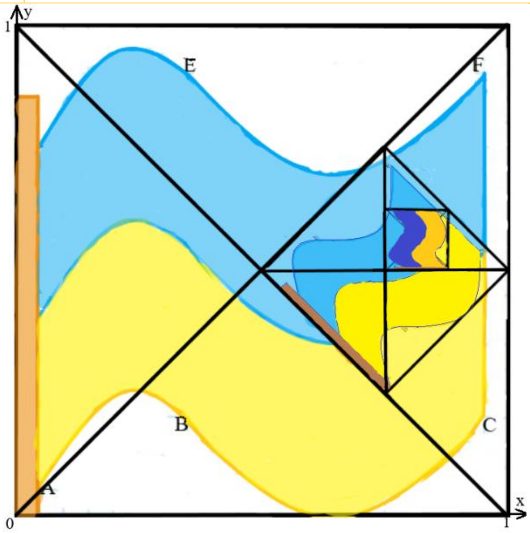


Рис. А.1.

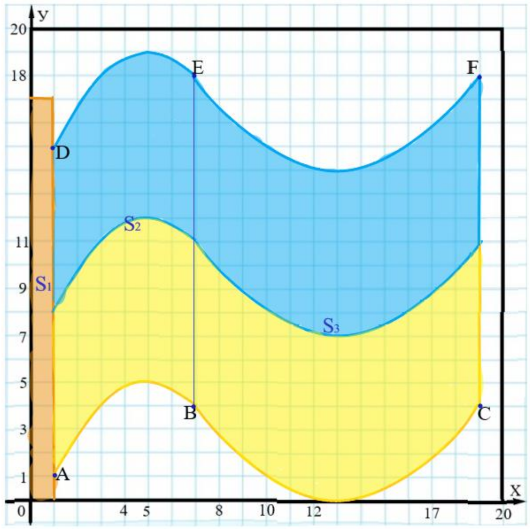


Рис. А.2.

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму Серця України, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата.*

Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. А.3. «Серце України», вписане в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини та симетричне відносно прямої x = 10, задане на рис. А.4. та обмежене графіками функцій з таблиці А.2.:

Таблиця А.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	BC: y = $-4\sqrt{x-1}+12$	x є (1; 10)
2	BD: y = $\frac{5}{2}\sqrt{x-1}+12$	x є (1; 2)
3	DA: y = $-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+12$	x є (2; 10)

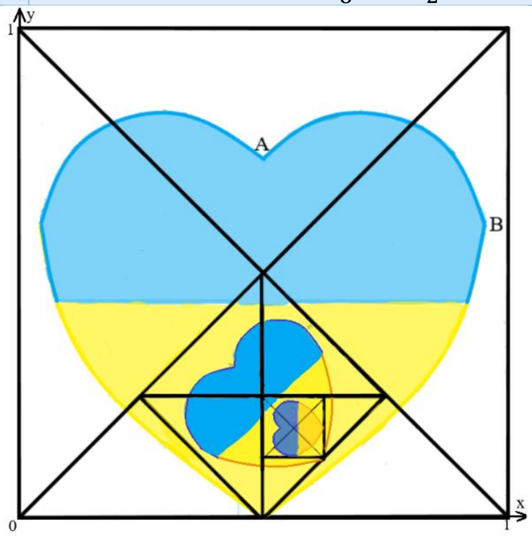


Рис. А.3.

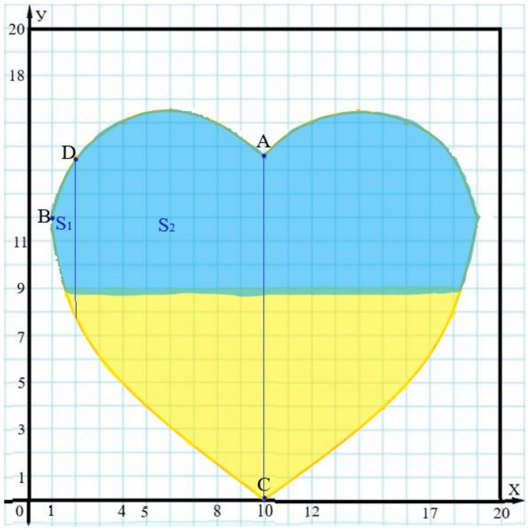


Рис. А.4.

ІІІ рівень складності

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму карти України, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. А.5. «Карта України», вписана в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, задана на рис. А.6. та обмежена графіками функцій з таблиці А.3.*

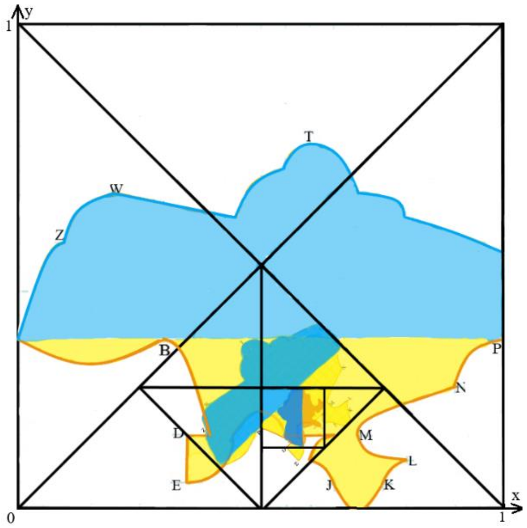


Рис. А.5.

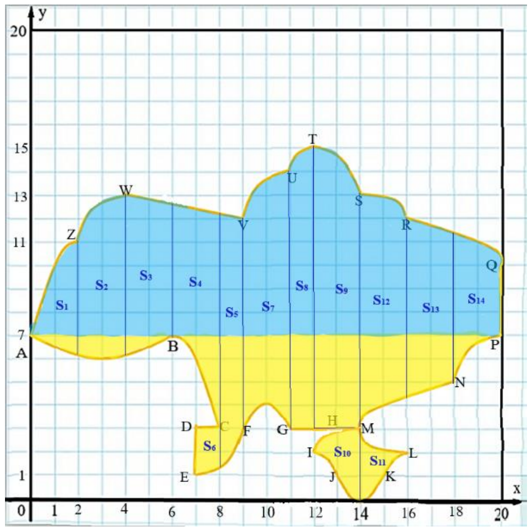


Рис. А.6.

Таблиця А.3.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AZ: $y = -x^2 + 4x + 7$	$x \in (0; 2)$
2	ZW: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$	$x \in (2; 4)$
3	AB: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$	$x \in (0; 6)$
4	WV: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$	$x \in (4; 9)$
5	BC: $y = -x^2 + 12x - 29$	$x \in (6; 8)$
6	EF: $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$	$x \in (7; 9)$
7	FG: $y = -x^2 + 20x - 96$	$x \in (9; 11)$
8	IM: $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 6} + 2$	$x \in (12; 14)$
9	IJ: $y = -\sqrt[3]{x - 13} + 1$	$x \in (12; 14)$
10	KL: $y = \sqrt[3]{x - 15} + 1$	$x \in (14; 16)$
11	ML: $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x - 7} + 3$	$x \in (14; 16)$
12	SR: $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 8} + 12$	$x \in (14; 16)$
13	MN: $y = \sqrt{x - 14} + 3$	$x \in (14; 18)$
14	NP: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x - 193$	$x \in (18; 20)$
15	VU: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 11x - \frac{93}{2}$	$x \in (9; 11)$
16	UT: $y = -x^2 + 24x - 129$	$x \in (11; 12)$
17	TS: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 57$	$x \in (12; 14)$
18	RQ: $y = \sqrt{-x + 20} + 10$	$x \in (16; 20)$

Задача 4. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму Герба України, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де*

d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. А.7. «Герб України», вписаний в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини та симетричний відносно прямої $x = 10{,}5$, заданий на рис. А.8. та обмежений графіками функцій з таблиці А.4.

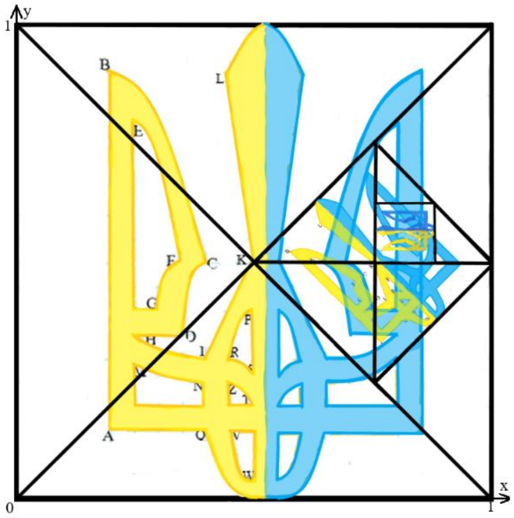


Рис. А.7.

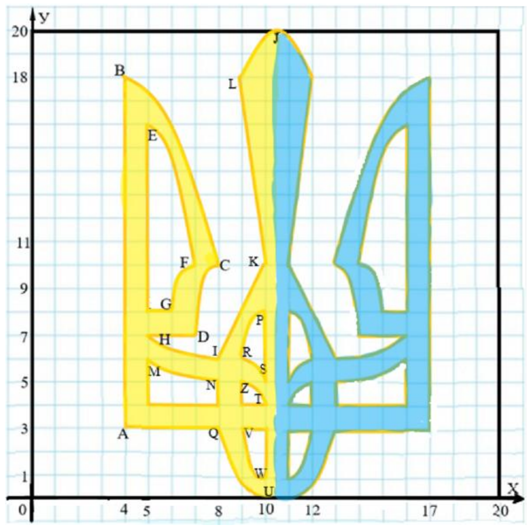


Рис. А.8.

Таблиця А.4.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 3$	$x \in (4; 10)$
2	$y = 4$	$x \in (5; 10)$
3	$y = x^2 - 20x + 100$	$x \in (8; 10)$
4	$y = 2x^2 - 40x + 201$	$x \in (9; 10)$
5	$y = \sqrt{-x + 10} + 4$	$x \in (9; 10)$
6	$y = \sqrt{-x + 10} + 5$	$x \in (9; 10)$
7	$y = -\sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}} + 6$	$x \in (5; 8)$
8	$y = -\sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}} + 7$	$x \in (5; 8)$
9	$y = 7$	$x \in (5; 7)$
10	$y = 8$	$x \in (5; 6)$
11	$y = -3x^2 + 48x - 182$	$x \in (7; 8)$
12	$y = -2x^2 + 28x - 88$	$x \in (6; 7)$
13	$y = -1{,}5x^2 + 15x - 21{,}5$	$x \in (5; 7)$
14	$y = -0{,}5x^2 + 4x + 40$	$x \in (4; 8)$
15	$y = 2x - 10$	$x \in (8; 10)$
16	$y = -\frac{8}{9}(x - 10{,}5)^2 + 20$	$x \in (9; 10{,}5)$
17	$y = 8x + 90$	$x \in (9; 10)$

Додаток Б
Задачі про числові ряди, які описують флору

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму тюльпана, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.1. «Тюльпан», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.1. та симетричний відносно прямої x = 0,5.*

Таблиця Б.1.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 5x^2 - 5{,}25x + 1{,}37825$	$x \in (0{,}525; 0{,}875)$
2	$y = 50(x - 0{,}725)^3 + 0{,}4$	$x \in (0{,}525; 0{,}825)$
3	$y = 5x^2 - 5x + 1{,}8$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
4	$y = 0{,}55$	$x \in (0{,}475; 0{,}525)$
5	$y = 0$	$x \in (0{,}475; 0{,}525)$
6	$y = -20x^2 + 24x - 6{,}25$	$x \in (0{,}55; 0{,}7)$
7	$y = -40x^2 + 40x - 9$	$x \in (0{,}5; 0{,}55)$

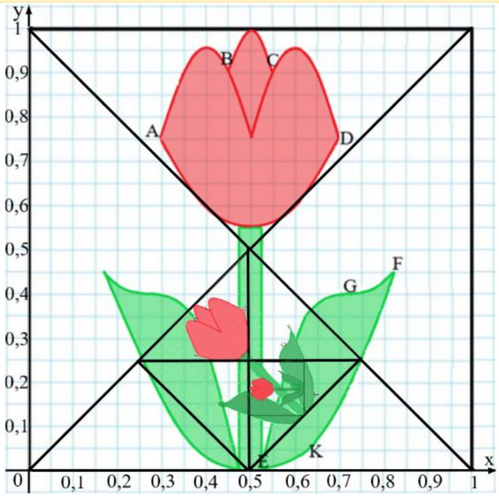


Рис. Б.1.

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму гілки, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда дана (рис. Б.2.).*

«Гілка», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежена графіками функцій з таблиці Б.2. Всі листочки мають однакову площу.

Таблиця Б.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 0,5$	$x \in (0; 0,1)$
2	$y = 5x^2 - 2x + 0,5$	$x \in (0; 0,2)$
3	$y = -20x^2 + 4x + 0,3$	$x \in (0,1; 0,2)$

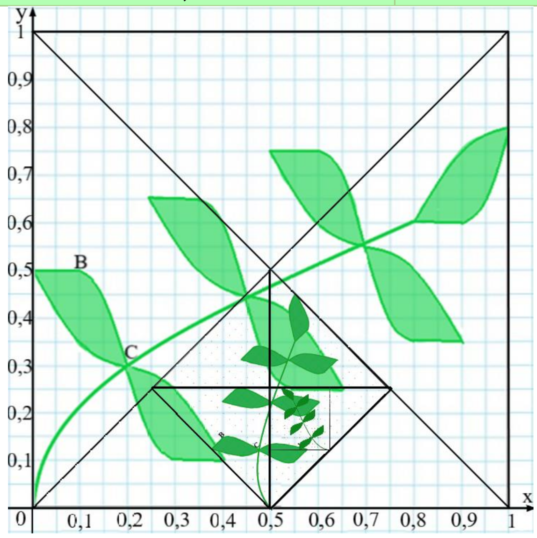


Рис. Б.2.

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму квітки космеї, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.3. «Космея», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежена графіками функцій з таблиці Б.3. Квітка симетрична відносно точки (0,5; 0,5) та відносно прямої x = 0,5.*

Таблиця Б.3.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = \frac{7}{5}x - 0,2$	$x \in (0,5; 0,75)$
2	$y = \sqrt{-0,1x + 0,075} + 0,85$	$x \in (0,65; 0,75)$
3	$y = -20x^2 + 26x - 7,5$	$x \in (0,5; 0,65)$
4	$y = -0,05\sqrt{-10x + 10} + 0,6$	$x \in (0,9; 1)$

Продовж. табл. Б.3.

5	$y = \sqrt{\mathbf{-0,1}x + \mathbf{0,1}} + \mathbf{0,6}$	$x \in (\mathbf{0,9; 1})$
6	$y = \frac{1}{8}x + \frac{7}{16}$	$x \in (0,5; 0,9)$
7	$y = 0,1\sqrt{10x - 5} + 0,5$	$x \in (0,5; 0,9)$

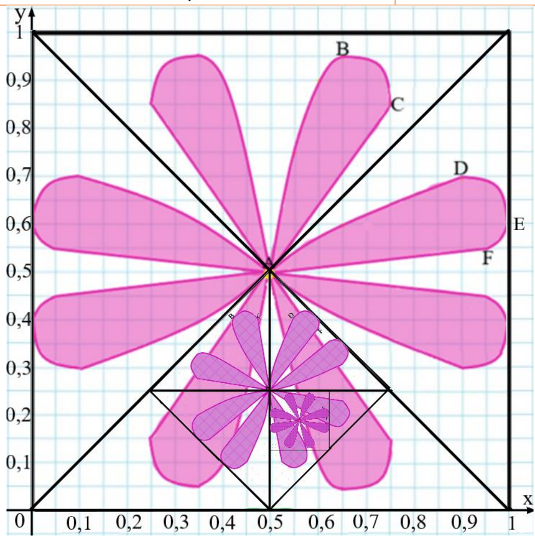


Рис. Б.3.

Задача 4. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму листка конюшини, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.5. «Листок конюшини», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.4. та симетричний відносно прямої y = 0,5. Листочки мають однакову площу.*

Таблиця Б.4.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = -0,2\sqrt{20x - 6} + 0,85$	$x \in (0,3; 0,35)$
2	$y = -x + 1$	$x \in (0,35; 0,5)$
3	$y = -5x^2 + 4x + 0,1$	$x \in (0,3; 0,5)$
4	$y = 10x - 4,5$	$x \in (0,475; 0,5)$
5	$y = 0$	$x \in (0,475; 0,5)$

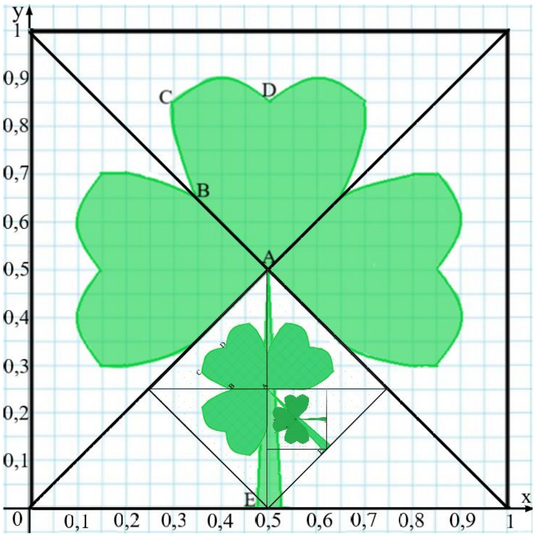


Рис. Б.4.

II рівень складності

Задача 5. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму квітів-дзвіночків, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.5. «Дзвіночки», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежені графіками функцій з таблиці Б.5. Квіти та деякі листочки мають однакову площу.*

Таблиця Б.5.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 5x^2 - 8x + 3{,}8$	$x \in (0{,}8; 1)$
2	$y = -5x^2 + 10x - 4{,}2$	$x \in (0{,}8; 1)$
3	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}05} + 0{,}5$	$x \in (0{,}8; 1)$
4	$y = -\sqrt{0{,}05x - 0{,}04} + 0{,}6$	$x \in (0{,}8; 1)$
5	$y = \sqrt{0{,}05x} + 0{,}225$	$x \in (0; 0{,}2)$
6	$y = \frac{x}{2} + 0{,}225$	$x \in (0; 0{,}2)$
7	$y = 3\sqrt{0{,}01x}$	$x \in (0; 0{,}8)$
8	$y = 3\sqrt{0{,}01x} + 0{,}05$	$x \in (0; 0{,}8)$
9	$y = -20x^2 + 30x - 10{,}75$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$
10	$y = 20x^2 - 26x + 8{,}75$	$x \in (0{,}65; 0{,}7)$
11	$y = 20x^2 - 30x + 11{,}55$	$x \in (0{,}7; 0{,}75)$

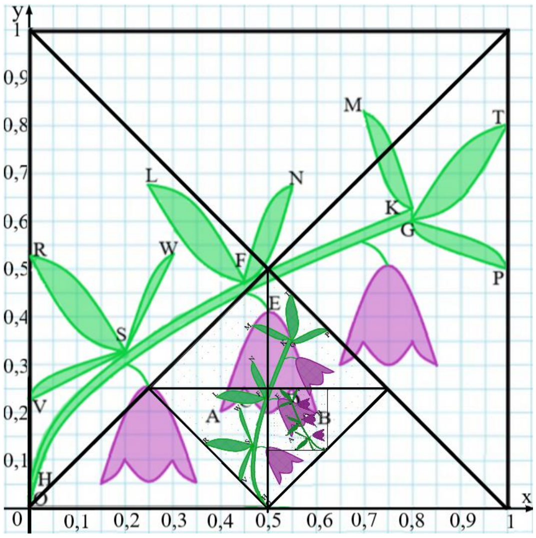


Рис. Б. 5.

Задача 6. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають формуківтки ломинісу, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.6. «Квітка ломинісу», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежена графіками з таблиці Б.6. та симетрична відносно точки (0,5; 0,5).*

Таблиця Б.6.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 2x - 0{,}5$	$x \in (0{,}5; 0{,}65)$
2	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}65}{60}} + 0{,}8$	$x \in (0{,}65; 0{,}8)$
3	$y = 0{,}85$	$x \in (0{,}8; 0{,}85)$
4	$y = 80x^2 - 128x + 51{,}85$	$x \in (0{,}8; 0{,}85)$
5	$y = 0{,}5x + 0{,}25$	$x \in (0{,}5; 0{,}8)$
6	$y = -0{,}5x + 0{,}75$	$x \in (0{,}5; 0{,}8)$
7	$y = -\sqrt[3]{\frac{x - 0{,}95}{400}} + 0{,}55$	$x \in (0{,}9; 1)$
8	$y = \sqrt[3]{\frac{x - 0{,}95}{400}} + 0{,}45$	$x \in (0{,}9; 1)$
9	$y = \frac{5}{9}x^2 - x + \frac{17}{20}$	$x \in (0{,}6; 0{,}9)$
10	$y = -\frac{5}{9}x^2 + x + 0{,}15$	$x \in (0{,}6; 0{,}9)$

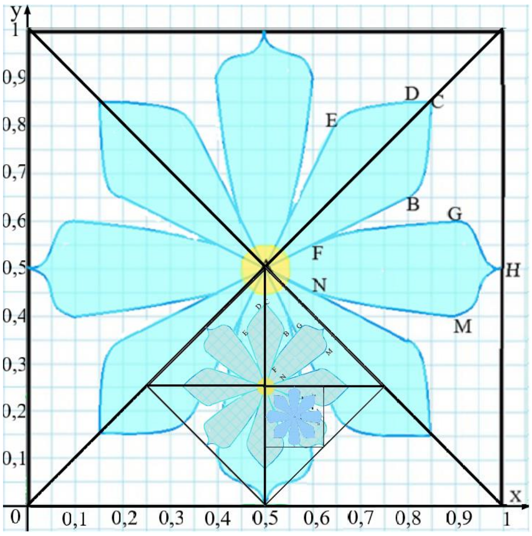


Рис. Б.6.

Задача 7. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму листка каштана, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.7. «Листок каштана», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками з таблиці Б.7. та симетричний відносно прямої x = 0,5.*

Таблиця Б.7.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 2x - 0{,}5$	$x \in (0{,}5; 0{,}65)$
2	$y = \sqrt{\frac{x-0{,}65}{60}} + 0{,}8$	$x \in (0{,}65; 0{,}8)$
3	$y = 0{,}85$	$x \in (0{,}8; 0{,}85)$
4	$y = 80x^2 - 128x + 51{,}85$	$x \in (0{,}8; 0{,}85)$
5	$y = 0{,}5x + 0{,}25$	$x \in (0{,}5; 0{,}8)$
6	$y = 3x - 1$	$x \in (0{,}5; 0{,}6)$
7	$y = -400(x - 0{,}55)^3 + 0{,}95$	$x \in (0{,}5; 0{,}6)$
8	$y = 0{,}2x + 0{,}4$	$x \in (0{,}5; 0{,}75)$
9	$y = -0{,}2x + 0{,}6$	$x \in (0{,}5; 0{,}75)$
10	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}04} + 0{,}5$	$x \in (0{,}75; 0{,}8)$
11	$y = -12x + 6{,}5$	$x \in (0{,}5; 0{,}525)$
12	$y = \mathbf{0{,}2}$	$x \in (\mathbf{0{,}5}; \mathbf{0{,}525})$

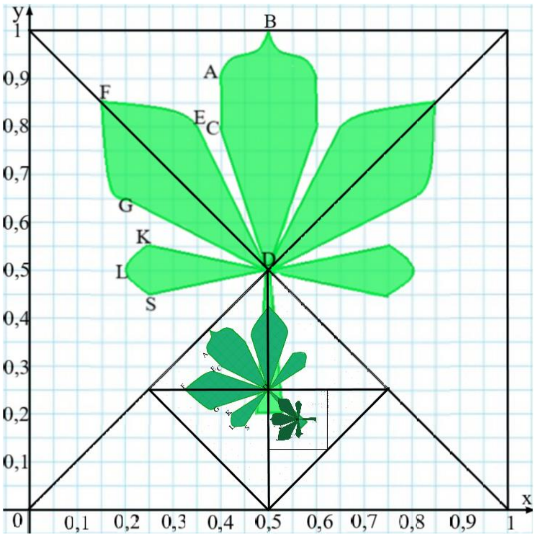


Рис. Б.7.

Задача 8. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму листка дуба, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.8. «Листок дуба», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.8.:*

Таблиця Б.8.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = -20x^2 + 12x - 1{,}65$	$x \in (0{,}25; 0{,}3)$
2	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}0175} + 0{,}2$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
3	$y = -20x^2 + 14x - 2{,}15$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
4	$y = 20x^2 - 14x + 3{,}15$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
5	$y = -40x^2 + 20x - 1{,}7$	$x \in (0{,}25; 0{,}3)$
6	$y = -4x + 1{,}1$	$x \in (0{,}25; 0{,}275)$
7	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}02} + 0{,}65$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$
8	$y = \sqrt{0{,}05x - 0{,}0175} + 0{,}6$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$
9	$y = -400(x - 0{,}4)^3 + 0{,}55$	$x \in (0{,}35; 0{,}45)$
10	$y = 400(x - 0{,}4)^3 + 0{,}45$	$x \in (0{,}35; 0{,}45)$

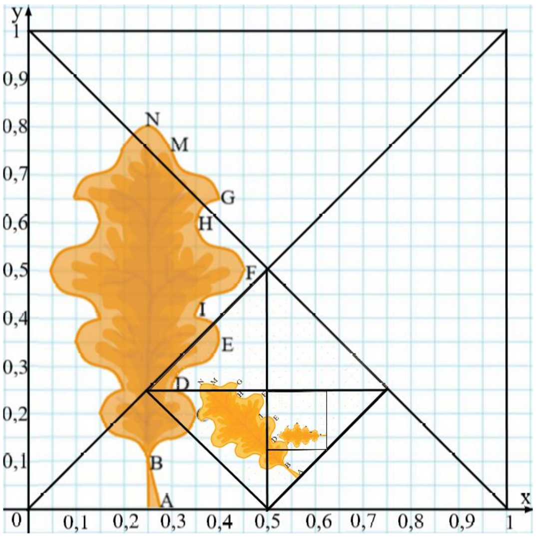


Рис. Б.8.

III рівень складності

Задача 9. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму соняшника, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.9. «Соняшник», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.9. Квітка соняшника симетрична відносно точки (0,45; 0,75)*

Таблиця Б.9.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = \sqrt{0{,}05x} + 0{,}35$	$x \in (0; 0{,}2)$
2	$y = 1{,}25x^2 - x + 0{,}35$	$x \in (0; 0{,}4)$
3	$y = \sqrt{-\frac{x - 0{,}35}{60}} + 0{,}4$	$x \in (0{,}2; 0{,}35)$
4	$y = \sqrt{-1{,}25(x - 0{,}4)} + 0{,}15$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$
5	$y = \sqrt{0{,}2x - 0{,}1} + 0{,}2$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
6	$y = -\sqrt{0{,}05x - 0{,}025} + 0{,}2$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
7	$y = -1{,}25x^2 + 1{,}75x - 0{,}2125$	$x \in (0{,}7; 0{,}9)$
8	$y = 1{,}25x^2 - 1{,}75x + 0{,}7125$	$x \in (0{,}7; 0{,}9)$
9	$y = \sqrt[3]{\frac{x - 0{,}95}{400}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}9; 1)$

Продовж. табл. Б.9.

10	$y = -\sqrt[3]{\frac{x-\mathbf{0,95}}{\mathbf{400}}} + \mathbf{0,3}$	$x \in (\mathbf{0,9}; \mathbf{1})$
11	$y = -20x^2 + 20x - 4$	$x \in (0{,}45; 0{,}5)$
12	$y = 0{,}95$	$x \in (0{,}45; 0{,}5)$

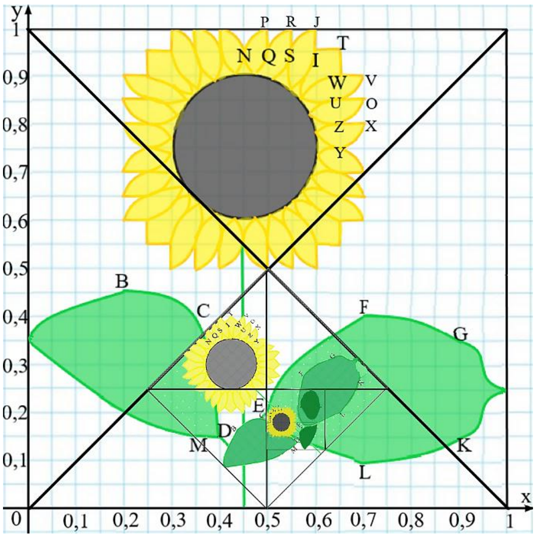


Рис. Б.9.

Задача 10. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму маку, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.10. «Мак», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.10.*

Таблиця Б.10.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = -\frac{3}{200x} + 0{,}7$	$x \in (0{,}05; 0{,}3)$
2	$y = 20x^2 - 4x + 0{,}55$	$x \in (0{,}05; 0{,}1)$
3	$y = 0{,}35$	$x \in (0{,}1; 0{,}35)$
4	$y = 0{,}75$	$x \in (0{,}15; 0{,}25)$
5	$y = \sqrt{-\frac{x-0{,}3}{5}} + 0{,}75$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
6	$y = 20x^2 - 6x + 1{,}2$	$x \in (0{,}05; 0{,}15)$
7	$y = -20x^2 + 12x - 1{,}15$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
8	$y = 5x^2 - 8x + 3{,}3$	$x \in (0{,}8; 0{,}9)$

Продовж. табл. Б.10.

9	$y = -\mathbf{5}x^{\mathbf{2}} + \mathbf{8}x - \mathbf{3}$	$x \in (\mathbf{0,8}; \mathbf{0,9})$
10	$y = -5x^2 + 8x - 2{,}95$	$x \in (\mathbf{0},7; 0{,}8)$
11	$y = 5x^2 - 8x + 3{,}25$	$x \in (0{,}7; 0{,}8)$
12	$y = \sqrt[3]{\frac{x - 0{,}65}{400}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}6; 0{,}7)$
13	$y = -\sqrt[3]{\frac{x - 0{,}65}{400}} + 0{,}1$	$x \in (0{,}6; 0{,}7)$
14	$y = 3\sqrt{\frac{x - 0{,}4}{20}} + 0{,}65$	$x \in (0{,}4; 0{,}45)$
15	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}45}{10}} + 0{,}75$	$x \in (0{,}45; 0{,}55)$
16	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}55}{10}} + 0{,}8$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$
17	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}65}{40}} + 0{,}85$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$
18	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}75}{10}} + 0{,}85$	$x \in (0{,}75; 0{,}85)$
19	$y = 60x^2 - 96x + 39{,}2$	$x \in (0{,}8; 0{,}85)$
20	$y = 20x^2 - 30x - 12{,}05$	$x \in (0{,}75; 0{,}85)$
21	$y = \frac{20}{9}(x - 0{,}65)^2 + 0{,}64$	$x \in (0{,}65; 0{,}8)$

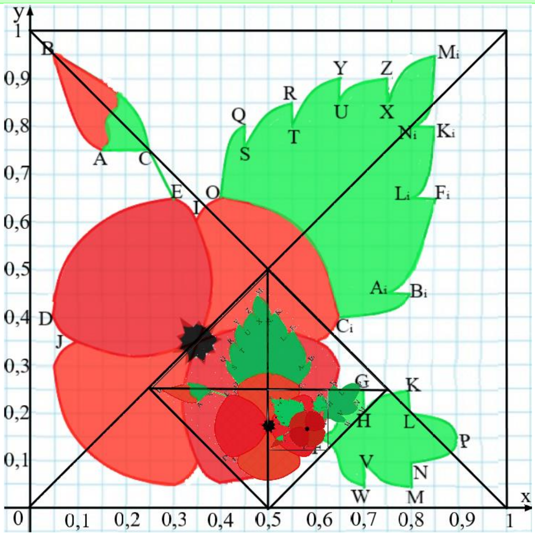


Рис. Б.10.

Задача 11. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму квітів мальви, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.11. «Мальви», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежені графіками функцій з таблиці Б.11.*

Таблиця Б.11.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = \sqrt{-\frac{x-0{,}15}{60}} + 0{,}55$	$x \in (0,;0{,}15)$
2	$y = 60x^2 - 15x + 0{,}6$	$x \in (0;0{,}05)$
3	$y = \sqrt{\frac{x-0{,}05}{20}} + 0{,}45$	$x \in (0{,}05;0{,}1)$
4	$y = 0{,}4$	$x \in (0{,}1;0{,}2)$
5	$y = -20x^2 + 6x + 0{,}1$	$x \in (0{,}1;0{,}2)$
6	$y = -60x^2 + 48x - 9{,}15$	$x \in (0{,}35;0{,}4)$
7	$y = 20x^2 - 14x + 2{,}75$	$x \in (0{,}35;0{,}4)$
8	$y = 20x^2 - 20x + 5{,}15$	$x \in (0{,}4;0{,}5)$
9	$y = 60x^2 - 60x + 15{,}15$	$x \in (0{,}5;0{,}55)$
10	$y = 20x^2 - 22x + 6{,}45$	$x \in (0{,}5;0{,}55)$
11	$y = \sqrt{-\frac{x-0{,}4}{20}} + 0{,}45$	$x \in (0{,}35;0{,}4)$
12	$y = \sqrt{-\frac{x-0{,}5}{20}} + 0{,}75$	$x \in (0{,}45;0{,}5)$
13	$y = -60x^2 + 48x - 8{,}65$	$x \in (0{,}35;0{,}45)$
14	$y = \sqrt{-\frac{x-0{,}35}{20}} + 0{,}8$	$x \in (0{,}15;0{,}35)$
15	$y = \sqrt{\frac{x-0{,}05}{40}}$	$x \in (0{,}05;0{,}15)$
16	$y = -400(x-0{,}1)^3 + 0{,}8$	$x \in (0{,}05;0{,}15)$
17	$y = -\sqrt{\frac{x-0{,}15}{60}} + 0{,}75$	$x \in (0{,}15;0{,}3)$

Продовж. табл. Б.11.

18	$y = \sqrt{\frac{x - \mathbf{0,15}}{\mathbf{60}}} + \mathbf{0,65}$	$x \in (\mathbf{0,15; 0,3})$
19	$y = -\sqrt{\frac{x - 0{,}15}{60}} + 0{,}65$	$x \in (0{,}15; 0{,}3)$

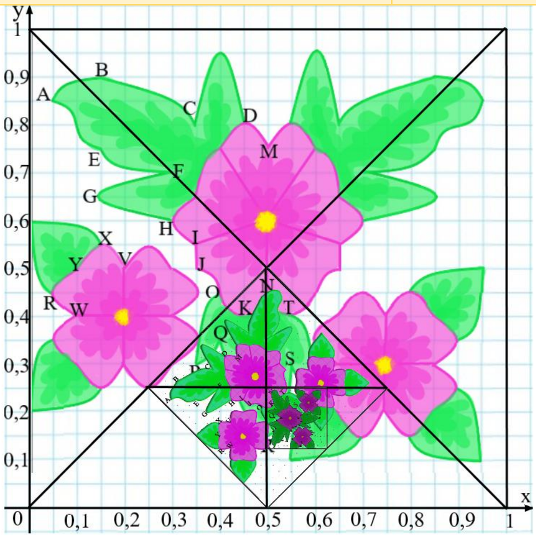


Рис. Б.11.

Задача 12. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму колосків пшениці, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.12. «Колоски пшениці», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежені графіками функцій з таблиці Б.12.*

Таблиця Б.12.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 3\sqrt{\frac{x}{20}} + 0{,}5$	$x \in (0; 0{,}2)$
2	$y = 4\sqrt{\frac{x}{5}}$	$x \in (0, ; 0{,}2)$
3	$y = -50x^2 + 15x - 0{,}8$	$x \in (0{,}15; 0{,}2)$
4	$y = 50x^2 - 20x + 2{,}2$	$x \in (0{,}15; 0{,}2)$
5	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}2}{10}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}2; 0{,}3)$
6	$y = 10x^2 - 4x + 0{,}6$	$x \in (0{,}2; 0{,}3)$
7	$y = 400(x - 0{,}425)^3 + 0{,}4$	$x \in (0{,}3; 0{,}5)$

Продовж. табл. Б.12.

8	$y = \mathbf{400}(x - \mathbf{0,45})^3 + \mathbf{0,4}$	$x \in (\mathbf{0,35; 0,5})$
9	$y = 2x - 0,85$	$x \in (0,65; 0,85)$
10	$y = 10x^2 - 13x + 4,675$	$x \in (0,65; 0,85)$
11	$y = -\frac{1}{200x - 100} + 0,5$	$x \in (0,55; 1)$
12	$y = 10x^2 - 18x + 8,45$	$x \in (0,9; 1)$
13	$y = -\frac{1}{50x - 25} + 0,4$	$x \in (0,55; 0,9)$
14	$y = -\frac{3}{200x - 120} + 0,3$	$x \in (0,65; 0,9)$
15	$y = 20x^2 - 34x + 14,65$	$x \in (0,85; 0,9)$

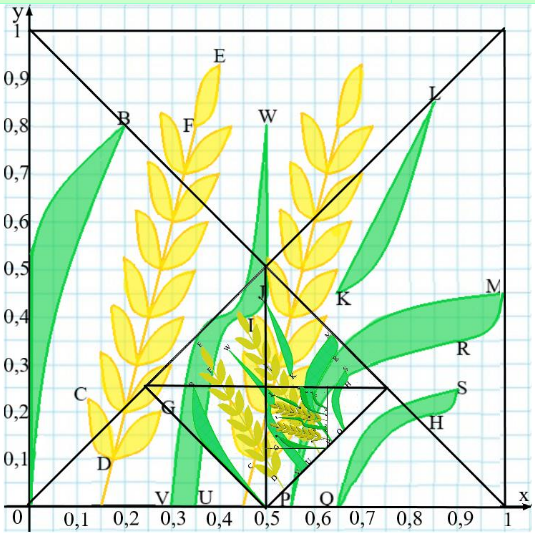


Рис. Б.12.

Задача 13. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму кленового листка, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.13. «Кленовий листок», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.13.*

Таблиця Б.13.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = -20(x - 0,5)^2 + 0,35$	$x \in (0,5; 0,6)$
2	$y = 5(x - 0,55)^2 + 0,35$	$x \in (0,55; 0,65)$
3	$y = \sqrt{-\frac{x - 0,65}{20}} + 0,1$	$x \in (0,6; 0,65)$
4	$y = 20(x - 0,7)^2 + 0,35$	$x \in (0,65; 0,75)$

Продовж. табл. Б.13.

5	$y = \mathbf{20}(x - \mathbf{0,8})^{\mathbf{2}} + \mathbf{0,35}$	$x \in (\mathbf{0,75}; \mathbf{0,8})$
6	$y = -20(x - 0{,}8)^2 + 0{,}15$	$x \in (0{,}75; 0{,}8)$
7	$y = \sqrt[3]{\dfrac{x - 0{,}85}{400}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}8; 0{,}9)$
8	$y = -\sqrt[3]{\dfrac{x - 0{,}85}{400}} + 0{,}3$	$x \in (0{,}8; 0{,}9)$
9	$y = \sqrt{\dfrac{x - 0{,}55}{20}} + 0{,}35$	$x \in (0{,}55; 0{,}75)$
10	$y = \sqrt{\dfrac{x - 0{,}5}{60}} + 0{,}45$	$x \in (0{,}75; 0{,}9)$
11	$y = 60(x - 0{,}95)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}9; 0{,}95)$
12	$y = -\sqrt{\dfrac{x - 0{,}9}{20}} + 0{,}7$	$x \in (0{,}9; 0{,}95)$
13	$y = -\sqrt{\dfrac{x - 0{,}75}{60}} + 0{,}75$	$x \in (0{,}75; 0{,}9)$
14	$y = 5(x - 0{,}65)^2 + 0{,}7$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$
15	$y = 20(x - 0{,}55)^2 + 0{,}5$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$
16	$y = -20(x - 0{,}65)^2 + 0{,}7$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$
17	$y = -400(x - 0{,}6)^3 + 0{,}9$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$

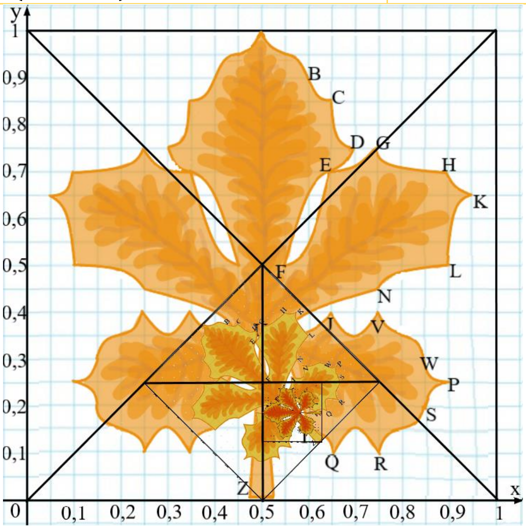


Рис. Б.13.

Задача 14. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму барвінку, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n – *довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Б.14. «Барвінок», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Б.14.*

Таблиця Б.14.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = -20x^2 + 6x + 0{,}05$	$x \in (0{,}1; 0{,}2)$
2	$y = 20x^2 - 6x + 0{,}85$	$x \in (0{,}1; 0{,}15)$
3	$y = 0{,}4$	$x \in (0{,}15; 0{,}2)$
4	$y = 5x^2 - 3{,}5x + 0{,}6125$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
5	$y = -20x^2 + 6x - 0{,}25$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
6	$y = 60x^2 - 36x + 5{,}55$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
7	$y = -60x^2 + 42x - 7{,}05$	$x \in (0{,}3; 0{,}35)$
8	$y = -20x^2 + 8x - 0{,}05$	$x \in (0{,}2; 0{,}3)$
9	$y = 20x^2 - 12x + 2{,}35$	$x \in (0{,}2; 0{,}3)$
10	$y = x + 0{,}15$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
11	$y = 5x^2 - 5x + 1{,}9$	$x \in (0{,}5; 0{,}7)$
12	$y = -2x + 1{,}85$	$x \in (0{,}6; 0{,}7)$
13	$y = 20x^2 - 28x + 10{,}25$	$x \in (0{,}6; 0{,}7)$
14	$y = 0{,}05$	$x \in (0{,}55; 0{,}85)$
15	$y = -\frac{20}{9}(x - 0{,}7)^2 + 0{,}1$	$x \in (0{,}55; 0{,}85)$
16	$y = -20x^2 + 22x - 5{,}15$	$x \in (0{,}5; 0{,}6)$
17	$y = 400(x - 0{,}55)^3 + 0{,}8$	$x \in (0{,}5; 0{,}6)$
18	$y = -5x^2 + 8x - 2{,}7$	$x \in (0{,}7; 0{,}9)$
19	$y = 5x^2 - 8x + 3{,}6$	$x \in (0{,}7; 0{,}9)$

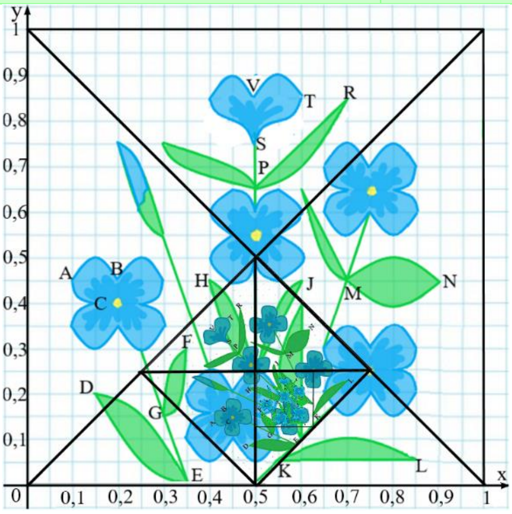


Рис. Б.14.

Додаток В

Задачі про числові ряди, які описують різні види спорту

ІІ рівень складності

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму велосипедиста, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. В.1. «Велосипедист», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці В.1.:*

Таблиця В.1.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}15}{20}} + 0{,}45$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
2	$y = -\sqrt{\frac{x - 0{,}15}{20}} + 0{,}4$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
3	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}15}{20}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
4	$y = -\sqrt{\frac{x - 0{,}35}{20}} + 0{,}3$	$x \in (0{,}15; 0{,}35)$
5	$y = -40(x - 0{,}35)^2 + 0{,}35$	$x \in (0{,}35; 0{,}4)$
6	$y = 3\sqrt{-\frac{x - 0{,}45}{20}} + 0{,}25$	$x \in (0{,}4; 0{,}45)$
7	$y = -3\sqrt{-\frac{x - 0{,}45}{20}} + 0{,}25$	$x \in (0{,}4; 0{,}45)$
8	$y = -\sqrt{\frac{x - 0{,}4}{20}} + 0{,}4$	$x \in (0{,}4; 0{,}6)$
9	$y = 5(x - 0{,}6)^2 + 0{,}3$	$x \in (0{,}4; 0{,}6)$
10	$(x - 0{,}6)^2 + (y - 0{,}15)^2 = 0{,}15^2$	$x \in (0{,}45; 0{,}75)$
11	$(x - 0{,}6)^2 + (y - 0{,}15)^2 = 0{,}125^2$	$x \in (0{,}475; 0{,}725)$
12	$(x - 0{,}4)^2 + (y - 0{,}55)^2 = 0{,}01$	$x \in (0{,}35; 0{,}45)$

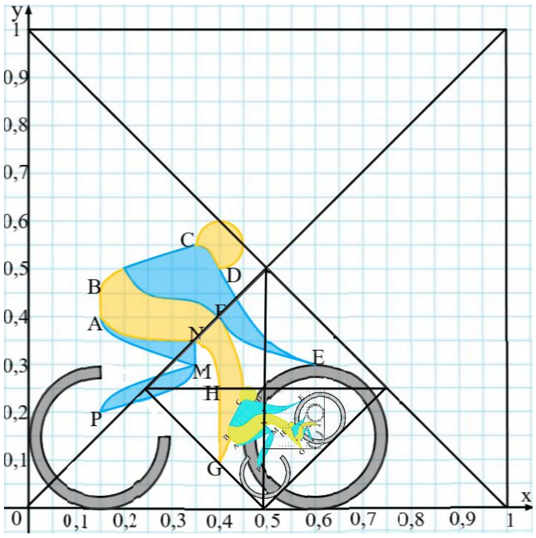


Рис. В.1.

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму каякера, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. В.2. «Каякер», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці В.2.:*

Таблиця В.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 60(x - 0{,}05)^2 + 0{,}65$	$x \in (0; 0{,}1)$
2	$(x - 0{,}2)^2 + (y - 0{,}4)^2 = 0{,}01$	$x \in (0{,}15; 0{,}25)$
3	$y = -5(x - 0{,}05)^2 + 0{,}6$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
4	$y = -\sqrt{-\frac{x - 0{,}45}{20}} + 0{,}4$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
5	$y = -\frac{20}{9}(x - 0{,}05)^2 + 0{,}6$	$x \in (0{,}05; 0{,}5)$
6	$y = 0{,}25x + 0{,}175$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
7	$y = \sqrt{-\frac{x - 0{,}35}{10}} + 0{,}15$	$x \in (0{,}25; 0{,}35)$
8	$y = 1{,}25(x - 0{,}25)^2 + 0{,}15$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
9	$y = -\sqrt{\frac{x - 0{,}05}{5}} + 0{,}2$	$x \in (0{,}05; 0{,}25)$
10	$y = 0{,}15$	$x \in (0{,}25; 0{,}5)$

Продовж. табл. В.2.

11	$y = -\sqrt{-\frac{x - \mathbf{0,95}}{\mathbf{20}}} + \mathbf{0,3}$	$x \in (\mathbf{0,5}; \mathbf{0,95})$
12	$y = -\sqrt{-\frac{x - 0{,}95}{5}} + 0{,}3$	$x \in (0{,}5; 0{,}95)$

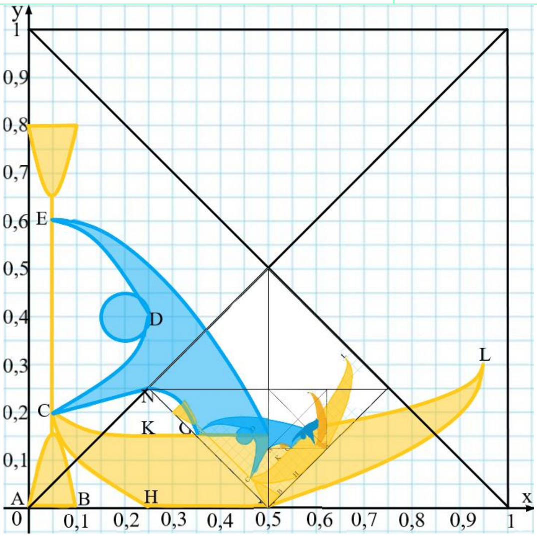


Рис. В.2.

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму лучника, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. В.3. «Лучник», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці В.3.:*

Таблиця В.3.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = \sqrt{\frac{x}{40}} + 0{,}65$	$x \in (0; 0{,}1)$
2	$y = 0{,}65$	$x \in (0; 0{,}1)$
3	$y = -60(x - 0{,}1)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}1; 0{,}15)$
4	$y = 5x - 0{,}25$	$x \in (0{,}05; 0{,}15)$
5	$y = 2x - 0{,}1$	$x \in (0{,}05; 0{,}1)$
6	$y = 3x - 0{,}2$	$x \in (0{,}1; 0{,}2)$
7	$y = 0{,}7$	$x \in (0{,}1; 0{,}55)$
8	$y = -0{,}8(x - 0{,}3)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}3; 0{,}55)$
9	$(x - 0{,}2)^2 + (y - 0{,}75)^2 = 0{,}01$	$x \in (0{,}15; 0{,}25)$

Продовж. табл. В.3.

10	$y = \mathbf{3}\sqrt{-\frac{x - \mathbf{0,55}}{\mathbf{20}}} + \mathbf{0,7}$	$x \in (\mathbf{0,35}; \mathbf{0,55})$
11	$y = -\sqrt{\frac{x - 0,6}{25}} + 0,7$	$x \in (0,35; 0,6)$

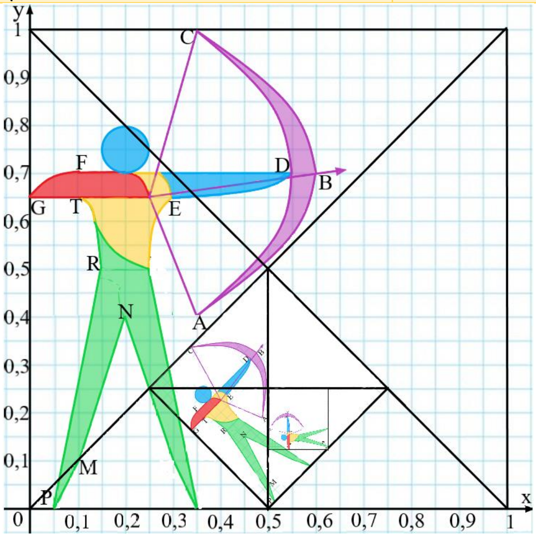


Рис. В.3.

ІІІ рівень складності

Задача 4. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму плавця, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. В.4. «Плавець», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці В.4.:*

Таблиця В.4.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 10(x - 0,45)^2$	$x \in (0,35; 0,55)$
2	$y = 5(x - 0,45)^2 + 0,05$	$x \in (0,35; 0,55)$
3	$(x - 0,475)^2 + (y - 0,525)^2 = 0,075^2$	$x \in (0,4; 0,55)$
4	$y = -5(x - 0,2)^2 + 0,7$	$x \in (0; 0,4)$
5	$y = -20(x - 0,2)^2 + 0,65$	$x \in (0,45; 0,65)$
6	$y = -15(x - 0,2)^2 + 0,65$	$x \in (0; 0,2)$
7	$y = 5(x - 0,6)^2 + 0,3$	$x \in (0,4; 0,7)$
8	$y = 10(x - 0,6)^2 + 0,25$	$x \in (0,6; 0,7)$

Продовж. табл. В.4.

9	$y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x + \mathbf{0{,}25}$	$x \in (\mathbf{0}; \mathbf{0{,}3})$
10	$y = \frac{5}{18}(x - 0{,}6)^2 + 0{,}25$	$x \in (0{,}6; 0{,}9)$
11	$y = \frac{5}{18}(x - 0{,}6)^2 + 0{,}2$	$x \in (0{,}3; 0{,}75)$
12	$y = \sqrt[3]{\frac{x - 0{,}15}{1200}} + 0{,}25$	$x \in (0; 0{,}3)$

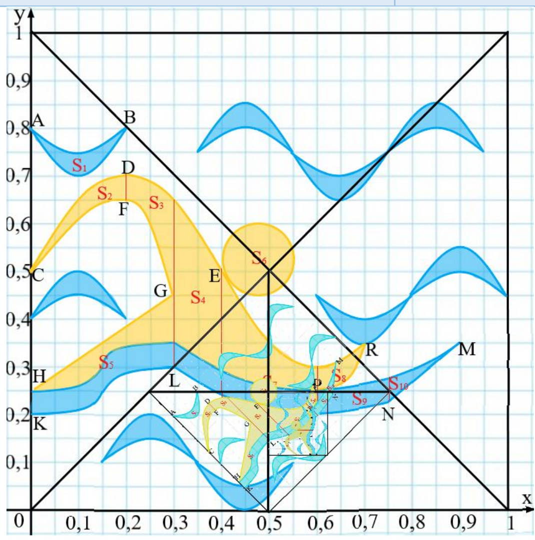


Рис. В.4.

Задача 5. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму скелелаза, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. В.5. «Скелелаз», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці В.5.:*

Таблиця В.5.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 4x$	$x \in (0; 0{,}15)$
2	$y = -4x + 1{,}2$	$x \in (0{,}15; 0{,}25)$
3	$y = 2{,}5x - 0{,}3$	$x \in (0{,}25; 0{,}35)$
4	$y = x - 0{,}8$	$x \in (0{,}35; 0{,}8)$
5	$y = 0{,}9$	$x \in (0{,}25; 0{,}35)$
6	$y = 0{,}85$	$x \in (0{,}25; 0{,}35)$
7	$y = -\frac{x}{2} + 0{,}975$	$x \in (0{,}15; 0{,}25)$

Продовж. табл. В.5.

8	$y=\sqrt[3]{\dfrac{x-\mathbf{0,25}}{\mathbf{800}}}+\mathbf{0,95}$	$x\in(\mathbf{0,15};\mathbf{0,35})$
9	$(x-0{,}525)^2+(y-0{,}875)^2=0{,}075^2$	$x\in(0{,}45;0{,}6)$
10	$y=\dfrac{20}{9}(x-0{,}45)^2+0{,}7$	$x\in(0{,}15;0{,}45)$
11	$y=\dfrac{5}{18}(x-0{,}45)^2+0{,}8$	$x\in(0{,}15;0{,}45)$
12	$y=0{,}8$	$x\in(0{,}45;0{,}6)$
13	$y=3x-0{,}5$	$x\in(0{,}25;0{,}3)$
14	$y=\sqrt{\dfrac{x-0{,}2}{5}}+0{,}45$	$x\in(0{,}2;0{,}45)$
15	$y=-\sqrt{\dfrac{x-0{,}2}{5}}+0{,}45$	$x\in(0{,}2;0{,}25)$
16	$y=\sqrt{\dfrac{x-0{,}25}{20}}+0{,}45$	$x\in(0{,}25;0{,}45)$
17	$y=-\sqrt{\dfrac{x-0{,}25}{20}}+0{,}45$	$x\in(0{,}25;0{,}3)$
18	$y=5(x-0{,}75)^2+0{,}1$	$x\in(0{,}45;0{,}75)$
19	$y=-\sqrt{0{,}8(x-0{,}55)}+0{,}5$	$x\in(0{,}55;0{,}75)$
20	$y=\sqrt{0{,}8(x-0{,}55)}+0{,}5$	$x\in(0{,}55;0{,}6)$
21	$y=\sqrt{-\dfrac{x-0{,}8}{20}}+0{,}6$	$x\in(0{,}6;0{,}8)$
22	$y=-\sqrt{-\dfrac{x-0{,}8}{20}}+0{,}6$	$x\in(0{,}6;0{,}8)$
23	$y=\sqrt{-0{,}16(x-0{,}85)}+0{,}6$	$x\in(0{,}6;0{,}85)$

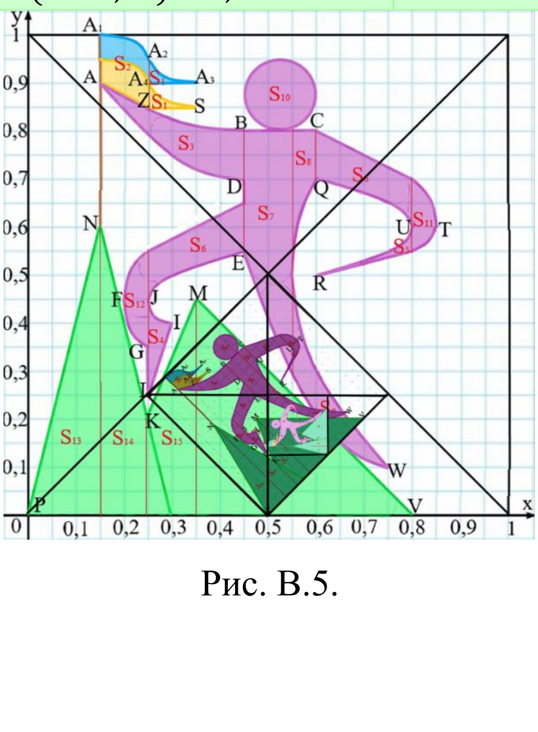


Рис. В.5.

Додаток Г

Задачі про числові ряди, які описують продукти правильного харчування.

Задачі I-го рівня складності

Задача 1. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму яблука, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.1. «Apple», вписане в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задане на рис. Г.2. та обмежене графіками функцій з таблиці Г.1. Гіпантія яблука симетрична відносно прямої x = 0,5.*

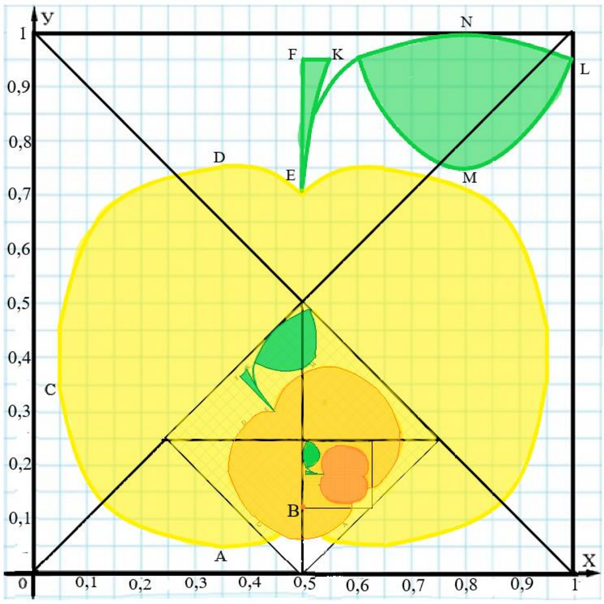


Рис. Г.1.

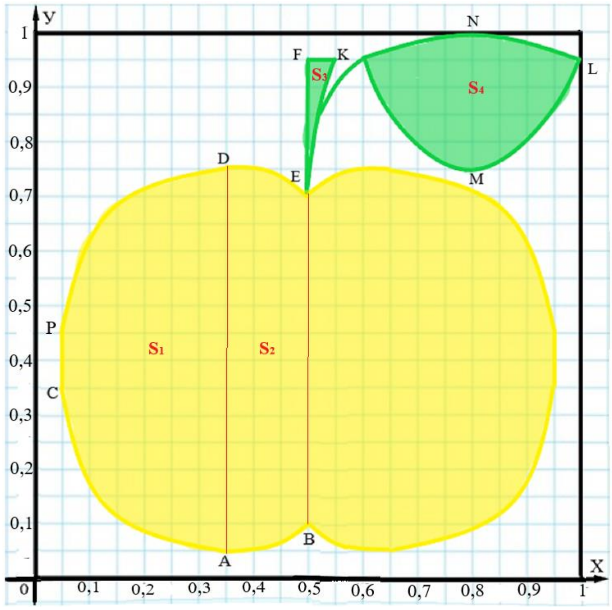


Рис. Г.2.

Таблиця Г.1.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AC: $y = \frac{7}{400x}$	x є (0,05; 0,35)
2	PD: $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}8$	x є (0,05; 0,35)
3	FK: $y = 0{,}95$	x є (0,5; 0,55)
4	EK: $y = \frac{1}{2}\sqrt{5(x-0{,}5)} + 0{,}7$	x є (0,5; 0,55)
5	KNL: $y = -\frac{5}{4}(x-0{,}8)^2 + 1$	x є (0,6; 1)
6	KML: $y = 5(x-0{,}8)^2 + 0{,}75$	x є (0,6; 1)

Продовж. табл. Г.2.

7	DE: $y = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}5)} + 0{,}7$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}5)$
8	AB: $y = -\frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0{,}5)} + 0{,}1$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}5)$

Задача 2. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму апельсина, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.3. «Orange», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.4. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.2. Плід симетричний відносно прямої x = 0,35.*

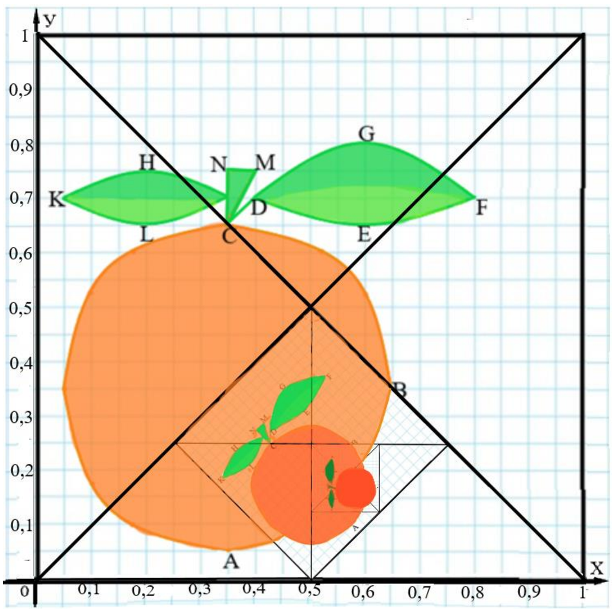


Рис. Г.3.

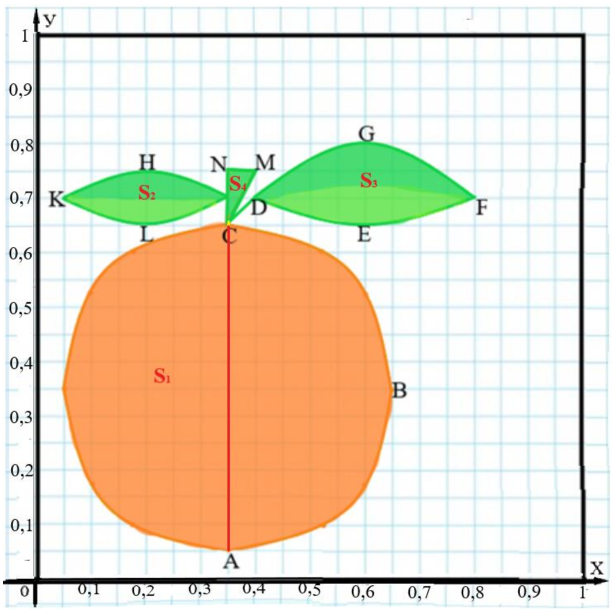


Рис. Г.4.

Таблиця Г.2.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: $y = \frac{7}{400x}$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
2	BC: $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}7$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
3	CM: $y = 2x - \frac{1}{20}$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}4)$
4	KH: $y = -\frac{4}{45}\cdot(5x-1)^2 + 0{,}75$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
5	KL: $y = \frac{4}{45}\cdot(5x-1)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
6	DEF: $y = \frac{1}{20}\cdot(5x-3)^2 + 0{,}65$	$x \in (0{,}4;\ 0{,}8)$

Продовж. табл. Г.3.

7	DGF: $y = -\frac{1}{10}\cdot(5x-3)^2 + 0{,}8$	$x \in (0{,}4;\ 0{,}8)$
8	NM: $y = 0{,}75$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}4)$

Задача 3. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму граната, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.5. «Pomegranate», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.6. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.3. Фігура симетрична відносно прямої x = 0,4.*

Таблиця Г.3.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AK: $y = \frac{7}{400x}$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
2	AB: $y = -\frac{7}{400x} + 0{,}7$	$x \in (0{,}05;\ 0{,}35)$
3	KL: $y = 0{,}05$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}45)$
4	BC: $y = -4x + 2{,}05$	$x \in (0{,}3;\ 0{,}35)$
5	CD: $y = -20(x-0{,}3)^2 + 0{,}85$	$x \in (0{,}3;\ 0{,}35)$
6	EF: $y = -20(x-0{,}35)^2 + 0{,}85$	$x \in (0{,}35;\ 0{,}4)$

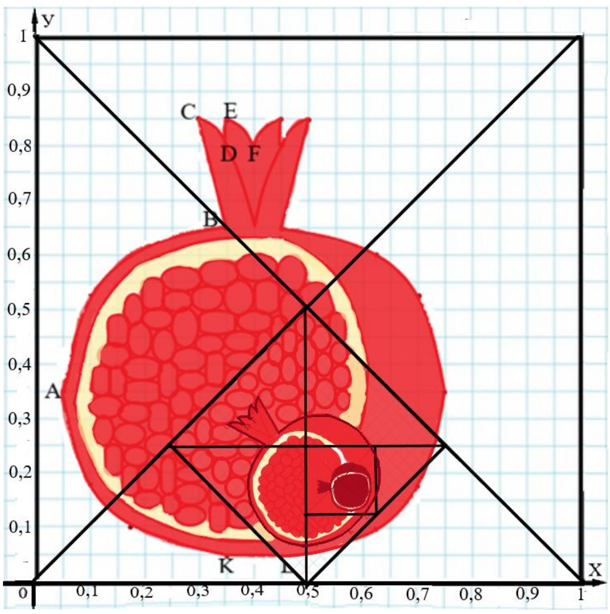


Рис. Г.5.

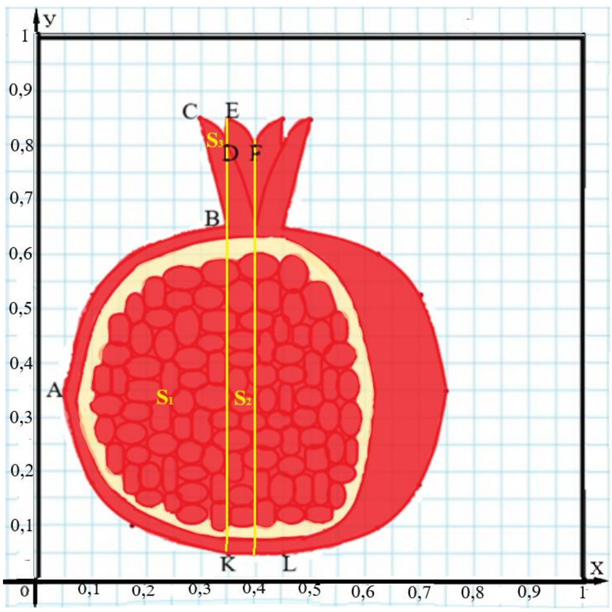


Рис. Г.6.

Задача 4. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму груші, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.7. «Pear», вписана в квадрат зі стороною 20 одиниць довжини, задана на рис. Г.8. та обмежена графіками функцій з таблиці Г.4. Плід груші симетричний відносно прямої x = 10.*

Таблиця Г.4.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	FG: $y = -\frac{2}{3}(x-10)^2 + 16$	$x \in (7;\ 10)$
2	MH: $y = \frac{2}{x-4}$	$x \in \left(4\frac{81}{200};\ 10\right)$
3	HG: $y = (x-6)^3 + 9$	$x \in \left(4\frac{81}{200};\ 7\right)$
4	FE: $y = 3(x-5) + 1$	$x \in (10;\ 11)$
5	ABC: $y = -\left(\frac{1}{4}(x-16)\right)^2 + 19$	$x \in (12;\ 20)$
6	ADC: $y = \left(\frac{1}{2}(x-16)\right)^2 + 14$	$x \in (12;\ 20)$

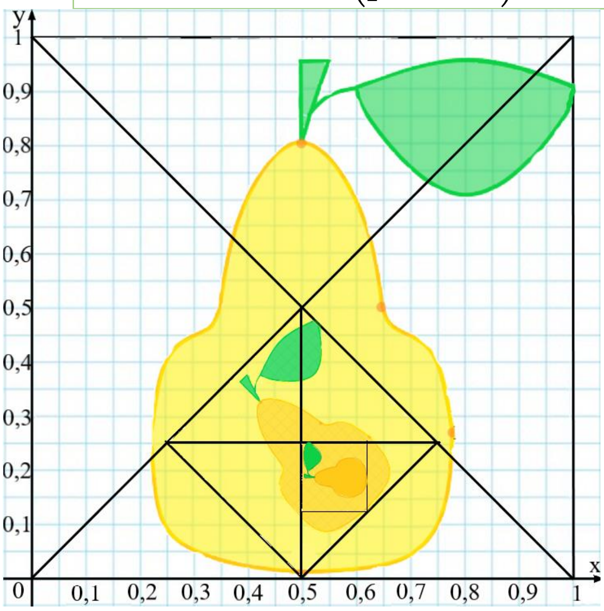


Рис. Г.7.

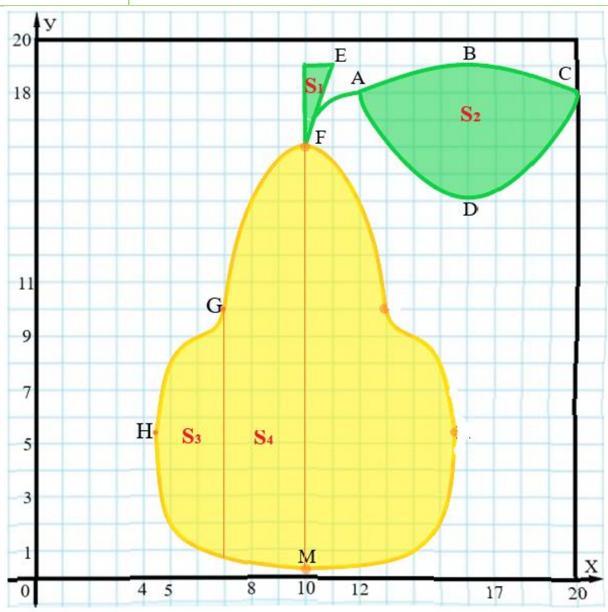


Рис. Г.8.

***Задача 5**. Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму помідора, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.9. «Tomato», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.10. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.5.*

Таблиця Г.5.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: $y = 0,75$	$x \in (0,4; 0,45)$
2	BC: $y = \frac{1}{5}\sqrt{5(x-0,4)} + 0,65$	$x \in (0,4; 0,45)$
3	DC: $y = \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{5}{3}(x-0,4)} + 0,65$	$x \in (0,25; 0,4)$
4	DG: $y = 20(x-0,3)^2 + 0,65$	$x \in (0,25; 0,3)$
5	FG: $y = -\frac{3}{200x} + 0,7$	$x \in (0,05; 0,3)$
6	FM: $y = \frac{1}{50x}$	$x \in (0,05; 0,4)$

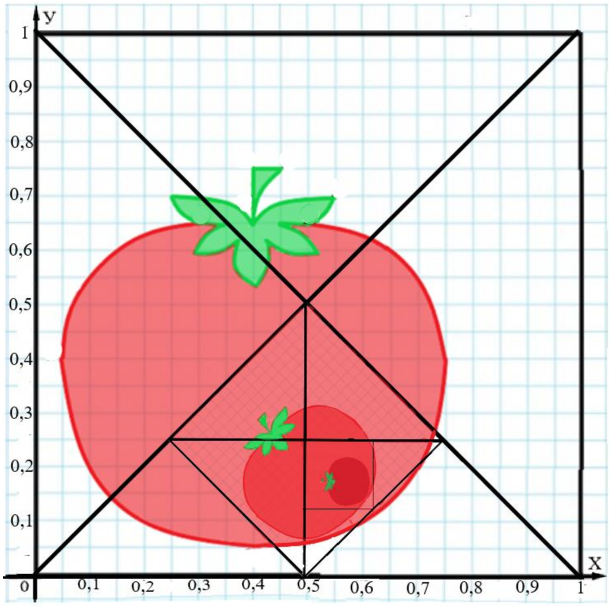


Рис. Г.9.

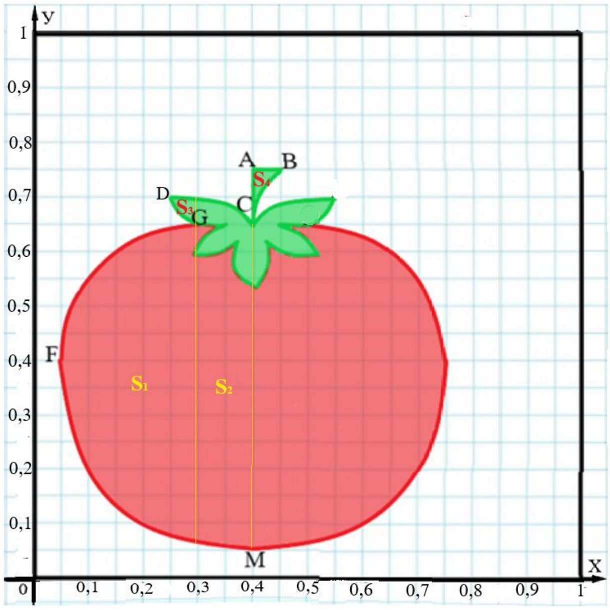


Рис. Г.10.

Задачі II-го рівня складності

Задача 6. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму лимона, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.11. «Zitrone», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.12. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.6.*

Таблиця Г.6.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AD: $y = -\sqrt{0{,}1x - 0{,}01} + 0{,}05$	$x \in (0{,}1; 0{,}2)$
2	AB: $y = -\frac{1}{40x-2} + 0{,}65$	$x \in (0{,}1; 0{,}55)$
3	DC: $y = -\frac{1}{40x-28}$	$x \in (0{,}2; 0{,}65)$
4	ERF: $y = 20x^2 - 26x + 9$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$
5	EPF: $y = -20x^2 + 22x - 5{,}3$	$x \in (0{,}55; 0{,}65)$
6	FML: $y = -\frac{20}{9} \cdot (x - 0{,}65)^2 + 0{,}55$	$x \in (0{,}65; 0{,}95)$
7	FNL: $y = \frac{20}{9} \cdot (x - 0{,}95)^2 + 0{,}35$	$x \in (0{,}65; 0{,}95)$
8	GH: $y = x - 0{,}05$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$
9	FK: $y = x - 0{,}1$	$x \in (0{,}65; 0{,}75)$

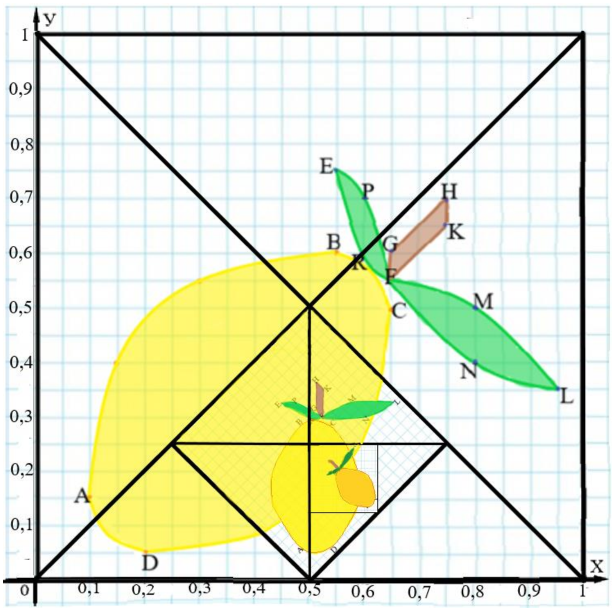


Рис. Г.11.

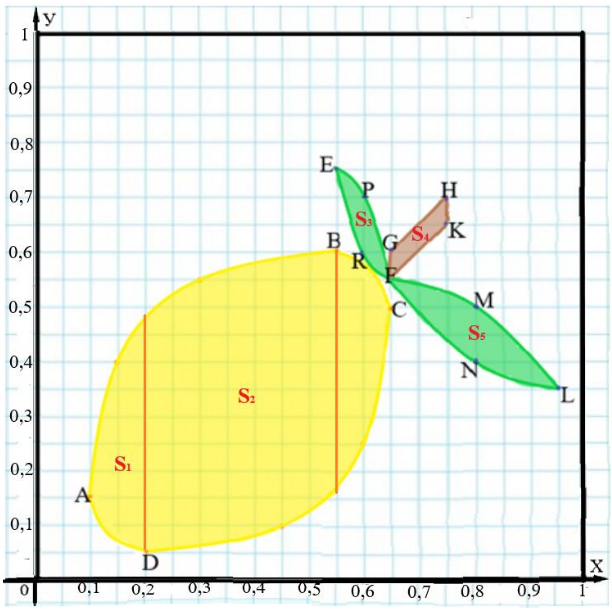


Рис. Г.12.

Факт чи фейк?

1. В середньовіччі лимоном лікували чуму та застосовували як протиотруту при укусах змій. – Правда.

2. Вода з лимонним соком була старовинним антисептиком. – Правда.

3. Один з відомих хореографів розробив власну танцювальну тхніку, яку називають «технікою Лімона». – Правда. Танцівника звали Хосе Лімон.

Інтелектуальна міні-квестія

1. Хто з відомих мореплавців використовува лимони як засіб від цинги, який врятував в ті часи багатьох моряків? – Джеймс Кук.

2. Візетівкою якої країни є мариновані лимони? – Індії.

3. Як Олександр Македонський називав лимони? – «Індійські яблука»

4. На руку якого божества схожий найунікальніший із сортів лимона? – Руку Будди.

5. Наведіть приклади картин відомих художників, де зображено лимони.

Задача 7. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму баклажана, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.13. «Aubergine», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.14. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.7.*

Таблиця Г.7.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	$y = 1{,}25(x - 0{,}75)^2 + 0{,}05$	x є (0,15; 0,75)
2	$y = -20(x - 0{,}05)^2 + 0{,}7$	x є (0,05; 0,15)
3	$y = -20(x - 0{,}05)^2 + 0{,}75$	x є (0,05; 0,15)
4	$y = -5(x - 0{,}25)^2 + 0{,}6$	x є (0,15; 0,35)
5	$y = 10(x - 0{,}55)^2 + 0{,}45$	x є (0,35; 0,55)
6	$y = -\frac{20}{9}(x - 0{,}7)^2 + 0{,}5$	x є (0,55; 0,85)
7	$y = 5x^2 - 7{,}5x + 2{,}8625$	x є (0,75; 0,95)
8	$y = -20x^2 + 34x - 14$	x є (0,85; 0,95)

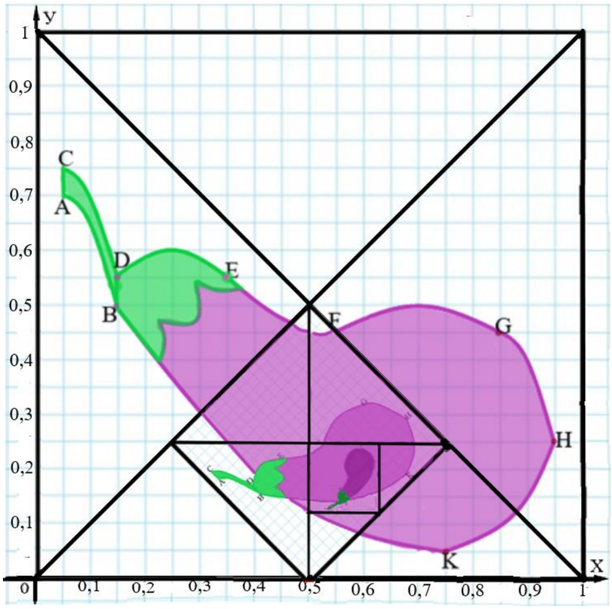


Рис. Г.13.

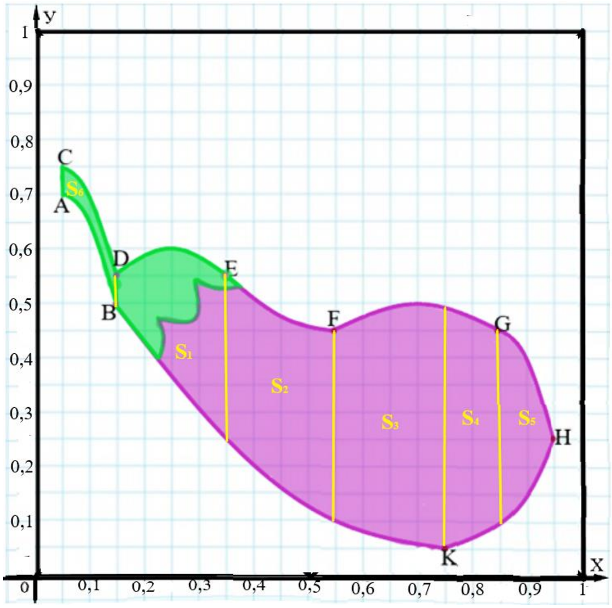


Рис. Г.14.

Інтелектуальне тріо

1. В якому літературному творі згадується баклажан? – У вірші «На баштані» Михайла Стельмаха.

2. Як називають баклажани в Азербайджані? – Дем'янки.

3. Хто є найближчою рідню баклажана? – Томати та картопля.

Дійсність чи фантастика?

1. Існує олімпіада баклажана. – Правда. До італійського міста Палермо щороку приїздять кулінари, які готують із цього овоча неймовірні страви власної рецептури.

2. В країнах Сходу баклажан має прізвисько «овоч довголіття». – Правда.

3. Насправді баклажан є ягодою. – Це дійсно так.

4. Смужки баклажана використовувались як засіб для полірування зубів. – Правда. Це було в Китаї.

5. За кількістю нікотину баклажани поступаються лише тютюну. – Правда.

Задача 8. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму банана, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.15. «Banane», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежений графіками функцій з таблиці Г.8.*

Таблиця Г.8.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	$y = \frac{1}{50x}$	x є (0,05; 0,4)
2	$y = \sqrt{-\frac{x-0,2}{60}} + 0,35$	x є (0,05; 0,2)
3	$y = -\sqrt{0,05x - 0,01} + 0,35$	x є (0,2; 0,4)
4	$y = 0,05$	x є (0,4; 0,5)
5	$y = -\frac{1}{50x-40} + 0,2$	x є (0,4; 0,75)
6	$y = -\frac{1}{50x-45}$	x є (0,5; 0,85)
7	$y = 0,75$	x є (0,75; 0,8)
8	$y = -40x^2 + 64x - 24,95$	x є (0,8; 0,85)

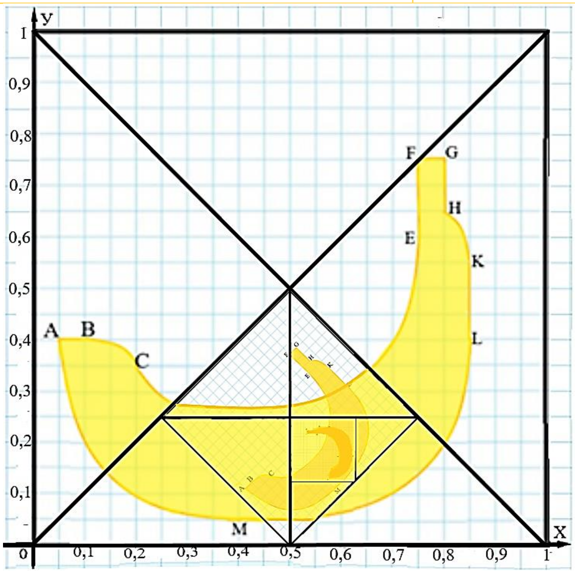


Рис. Г.15.

Нісенітниця чи реальність?

1. Деякі вовки їдять банани. – Це так. Наприклад, гривастий вовк.

2. Вдячний учень посадив банан в саду поета. Фрукт надихав його на творчість все життя. – Правда. Поета звали Басьо, що японською означає «банан».

3. Існує текстильний банан. – Так. Це такий вид банана, з якого виготовляють тканину, папір,..

4. З бананів виготовляють борошно. – Так.

5. Хоча бананове дерево може досягати 10 метрів заввишки, насправді воно є травою. – Так.

6. Найрадіоактивніший плід на Землі – Банан. Це так.

7. З бананів виготовляють кетчуп. – Так.

8. Бананова шкірка може очистити воду. – Так.

9. З бананової шкірки виготовляють мило. – Так.

Інтелектуальна естафета

1. Що означає слово банан латинською? – Фрукт мудрої людини.

2. Хто популяризував банани? – Жуль Верн.

3. У якому творі зарубіжної літератури захопливо описані банани? – «Навколо світу за 80 днів» Жуля Верна.

Де логіка?

Рис. Г.16.

Задача 9. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму буряка, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.17. «Буряк», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.18. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.9.*

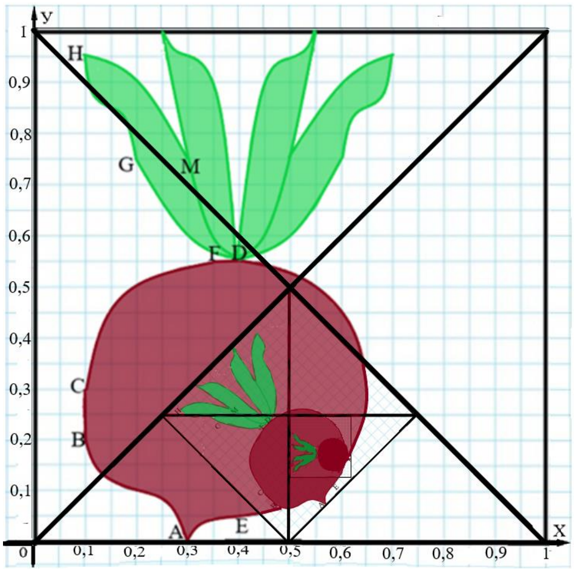


Рис. Г.17.

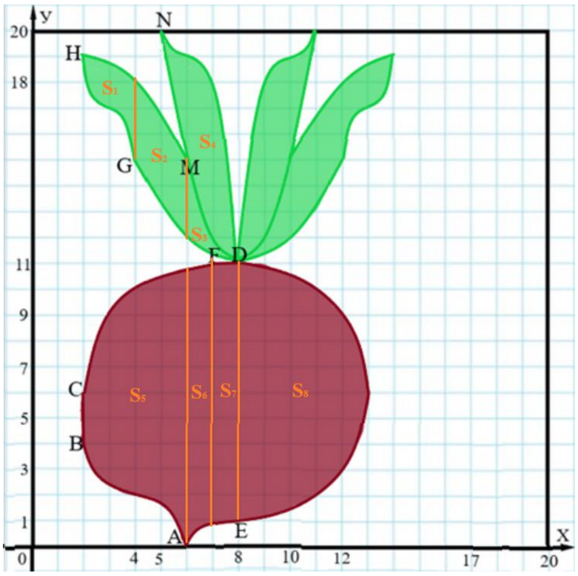


Рис. Г.18.

Таблиця Г.9.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	$y = -100(x - 0{,}2)^3 + 0{,}1$	x є (0,1; 0,3)
2	$y = -\frac{3}{200x - 10} + 0{,}6$	x є (0,1; 0,35)
3	$y = 0{,}55$	x є (0,35; 0,4)
4	$y = \sqrt{\frac{x - 0{,}3}{40}}$	x є (0,3; 0,4)
5	$y = -\frac{3}{200x - 140}$	x є (0,4; 0,65)
6	$y = -\frac{3}{200x - 140} + 0{,}6$	x є (0,4; 0,65)
7	$y = 400(x - 0{,}5)^3 + 0{,}95$	x є (0,4; 0,55)
8	$y = 5x - 1{,}75$	x є (0,5; 0,55)
9	$y = 5x^2 - 4x + 1{,}35$	x є (0,4; 0,6)
10	$y = -5x^2 + 7x - 1{,}5$	x є (0,5; 0,7)
11	$y = 800(x - 0{,}65)^3 + 0{,}85$	x є (0,6; 0,7)

Задача 10. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму вишень, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі* n*-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.19. «Cherries», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задані на рис. Г.20. та обмежені графіками функцій з таблиці Г.10. Плоди та плодоніжки вишень симетричні відносно прямої x = 0,475. Листочки мають однакову площу.*

Таблиця Г.10.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AB: $y = -10(x - 0{,}175)^2 + 0{,}3$	$x \in (0{,}075; 0{,}225)$
2	AD: $y = \frac{1}{200(x-0{,}05)}$	$x \in (0{,}075; 0{,}25)$
3	BE: $y = x + 0{,}05$	$x \in (0{,}225; 0{,}275)$
4	EH: $y = -20(x - 0{,}475)^2 + 0{,}725$	$x \in (0{,}275; 0{,}475)$
5	BC: $y = 0{,}275$	$x \in (0{,}225; 0{,}275)$
6	CF: $y = -20(x - 0{,}475)^2 + 0{,}675$	$x \in (0{,}275; 0{,}475)$
7	HK: $y = -20(x - 0{,}575)^2 + 0{,}925$	$x \in (0{,}475; 0{,}575)$
8	HL: $y = \frac{3}{2}(x - 0{,}525) + 0{,}8$	$x \in (0{,}475; 0{,}575)$
9	NPM: $y = -\frac{5}{2}(x - 0{,}725)^2 + 0{,}9$	$x \in (0{,}525; 0{,}925)$
10	NSM: $y = \frac{5}{2}(x - 0{,}725)^2 + 0{,}7$	$x \in (0{,}525; 0{,}925)$

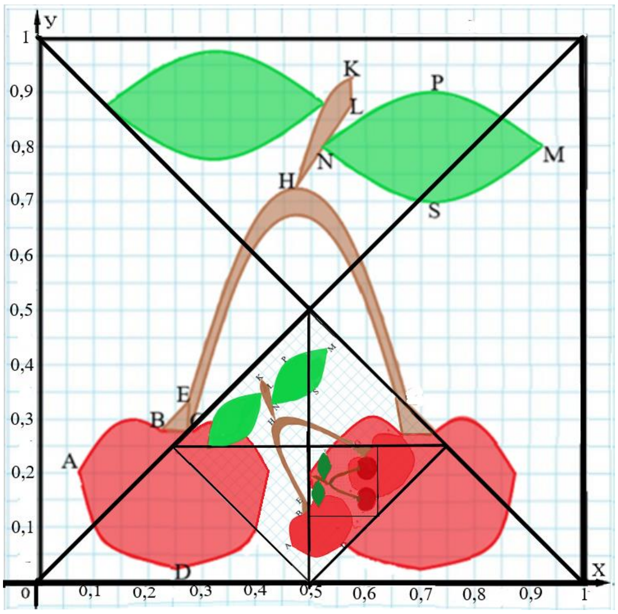


Рис. Г.19.

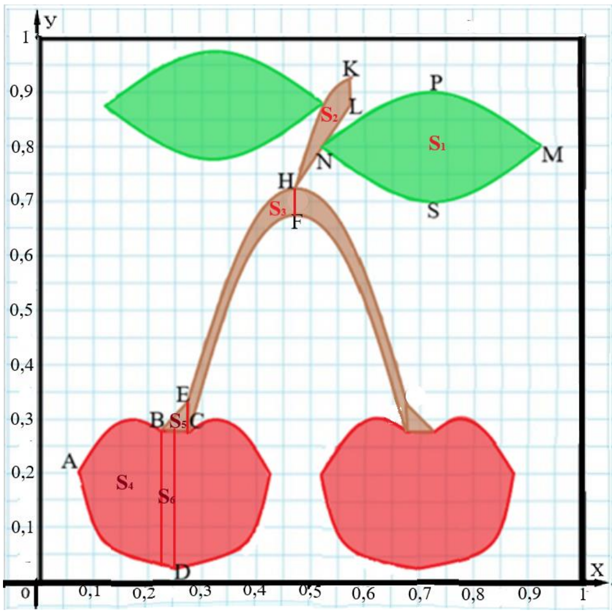


Рис. Г.20.

Задача 11. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму полуниці, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.21. «Полуниця», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задана на рис. Г.22. та обмежена графіками функцій з таблиці Г.11.*

Таблиця Г.11.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	$y = -1{,}5x + 1{,}1$	x є (0,3; 0,4)
2	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{30}$	x є (0,25; 0,4)
3	$y = -20x^2 + 12x - 1{,}15$	x є (0,25; 0,3)
4	$y = 0{,}15$	x є (0,5; 0,85)
5	$y = -5x^2 + 6x - 1{,}15$	x є (0,5; 0,9)
6	$y = 20x^2 - 34x + 14{,}6$	x є (0,85; 0,9)
7	$y = x$	x є (0,3; 0,4)
8	$y = -20x^2 + 16x - 2{,}7$	x є (0,3; 0,4)
9	$y = -20x^2 + 20x - 4{,}3$	x є (0,4; 0,5)
10	$y = \frac{1}{200x - 65} + 0{,}125$	x є (0,35; 0,525)
11	$y = 0{,}1\sqrt{20x - 7} + 0{,}3$	x є (0,35; 0,4)

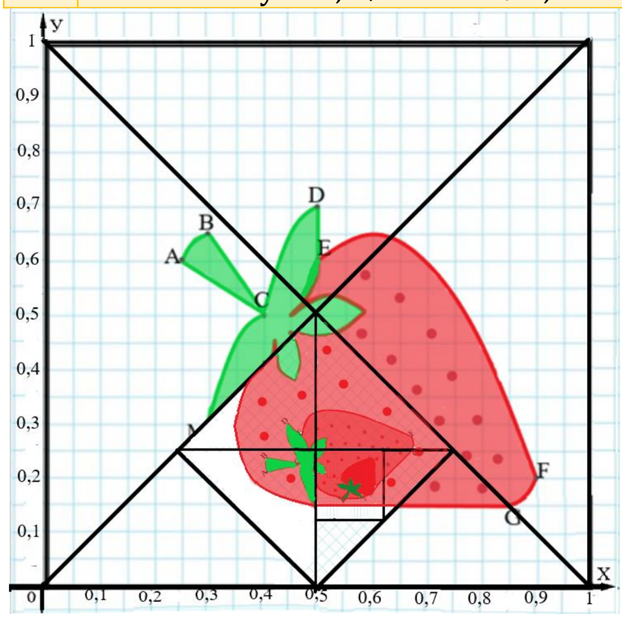


Рис. Г.21.

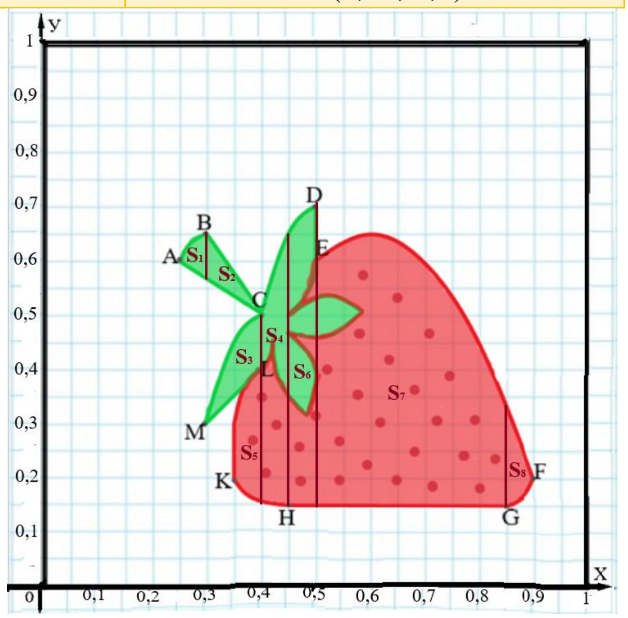


Рис. Г.22.

Задача 12. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму грибів, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$*, де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.23. «Mushrooms», вписані в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задані на рис. Г.24. та обмежені графіками функцій з таблиці Г.12. Капелюшки всіх трьох грибів мають однакову площу.*

Таблиця Г.12.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	ABC: $y = -5(x-0{,}25)^2 + 0{,}45$	x є (0,05; 0,45)
2	AC: $y = 1{,}25(x-0{,}25)^2 + 0{,}2$	x є (0,05; 0,45)
3	DE: $y = 20(x-0{,}3)^2$	x є (0,2; 0,3)
4	GF: $y = 20(x-0{,}4)^2$	x є (0,3; 0,4)
5	FK: $y = 60(x-0{,}4)^2$	x є (0,4; 0,5)
6	ML: $y = 60(x-0{,}5)^2$	x є (0,5; 0,6)
7	NP: $y = 40(x-0{,}65)^2$	x є (0,65; 0,75)
8	SR: $y = 40(x-0{,}75)^2$	x є (0,75; 0,85)

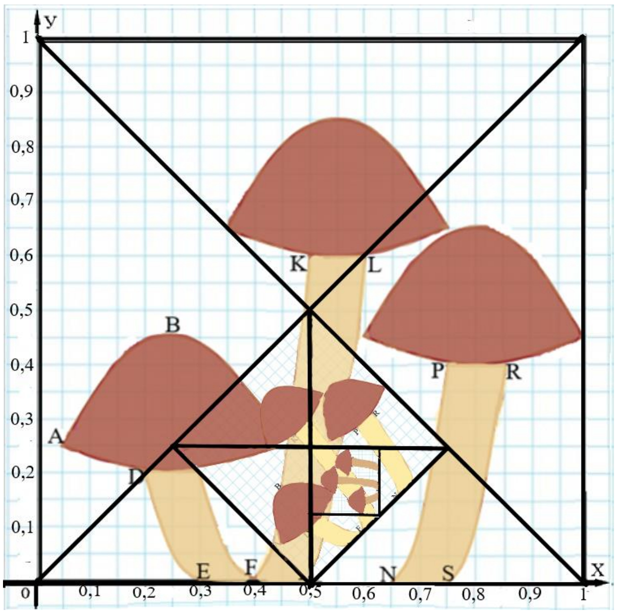


Рис. Г.23.

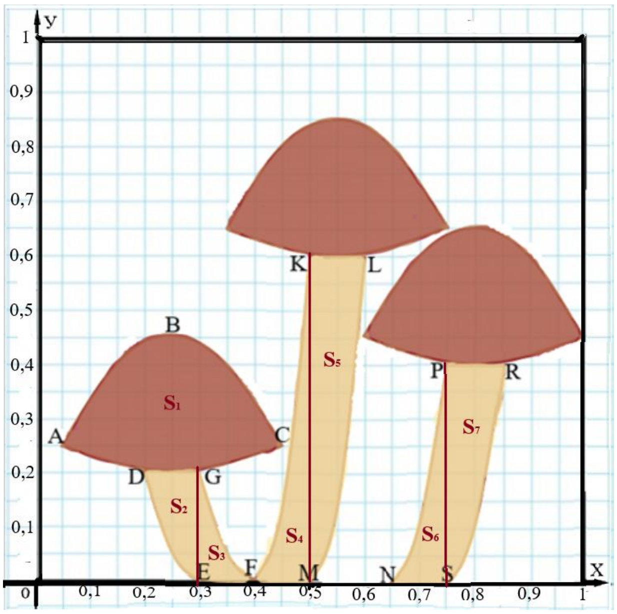


Рис. Г.24.

Задача 13. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму морквини, вписаних в квадрат зі стороною* $a_n = \frac{d_n}{4}$, *де* d_n *– довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.25. «Морква», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, обмежена графіками функцій з таблиці Г.13.*

Таблиця Г.13.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	$y = x - 0{,}25$	$x \in (0{,}25; 0{,}75)$
2	$y = -5x^2 + 6{,}5x - 1{,}3125$	$x \in (0{,}25; 0{,}65)$
3	$y = 40x^2 - 52x + 17{,}7$	$x \in (0{,}6; 0{,}65)$
4	$y = -20x^2 + 26x - 7{,}5$	$x \in (0{,}6; 0{,}75)$
5	$y = -1{,}5\sqrt{0{,}2x - 0{,}16} + 0{,}65$	$x \in (0{,}75; 0{,}8)$
6	$y = -20x^2 + 34x - 13{,}5$	$x \in (0{,}75; 0{,}9)$
7	$y = \sqrt{-0{,}05x + 0{,}0475} + 0{,}65$	$x \in (0{,}75; 0{,}95)$
8	$y = \frac{80}{9}(x - 0{,}875)^2 + 0{,}6$	$x \in (0{,}8; 0{,}95)$
9	$y = \frac{20}{3}(x - 0{,}75)^2 + 0{,}75$	$x \in (0{,}75; 0{,}9)$

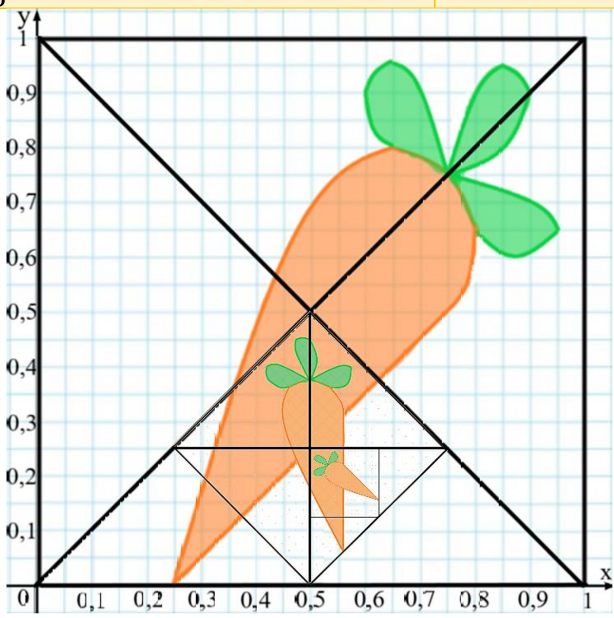


Рис. Г.25.

Задачі III-го рівня складності.

Задача 14. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму ананасів, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.26. «Pineapple», вписаний в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, заданий на рис. Г.27. та обмежений графіками функцій з таблиці Г.14.*

Таблиця Г.14.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	Еліпс: $x^2 + y^2 - 0{,}18xy - 0{,}6x - 0{,}6y + 0{,}09 = 0$	x є (0; 0,6593)
2	$A_5E: y = -\frac{2}{3}x + 0{,}95$	x є (0,45; 0,6)
3	$A_5A_4: y = -\frac{20}{3}(x - 0{,}6)^2 + 0{,}55$	x є (0,6; 0,75)
4	$A_3A_4: y = -3x + 2{,}65$	x є (0,7; 0,75)
5	$A_3A_2: y = -\frac{5}{2}(x - 0{,}7)^2 + 0{,}55$	x є (0,7; 0,9)
6	$A_1A_2: y = -5(x - 0{,}7)^2 + 0{,}65$	x є (0,7; 0,9)
7	$A_1X: y = 0{,}65$	x є (0,7; 1)
8	ZX: $y = \sqrt{-\frac{1}{30}(x - 1)} + 0{,}65$	x є (0,7; 1)
9	ZP: $y = -\sqrt{-\frac{1}{30}(x - 1)} + 0{,}85$	x є (0,7; 1)
10	UP: $y = \frac{1}{12}(x - 0{,}7) + 0{,}825$	x є (0,7; 1)
11	UQ: $y = 0{,}7x + 0{,}41$	x є (0,7; 0,95)
12	TQ: $y = 0{,}4x + 0{,}62$	x є (0,7; 0,95)
13	MW: $y = x + 0{,}3$	x є (0,6; 0,7)
14	NM: $y = -10(x - 0{,}5)^2 + 1$	x є (0,5; 0,6)
15	KL: $y = -\frac{1}{3}(x - 0{,}5) + 0{,}9$	x є (0,35; 0,5)
16	KH: $y = \sqrt{-\frac{1}{10}(x - 0{,}45)} + 0{,}85$	x є (0,35; 0,45)
17	FH: $y = 0{,}85$	x є (0,3; 0,45)
18	FG: $y = \sqrt{-\frac{1}{15}(x - 0{,}45)} + 0{,}75$	x є (0,3; 0,45)
19	$A_6G: y = 0{,}75$	x є (0,25; 0,45)
20	$A_6E: y = \sqrt{-\frac{1}{20}(x - 0{,}45)} + 0{,}65$	x є (0,25; 0,45)

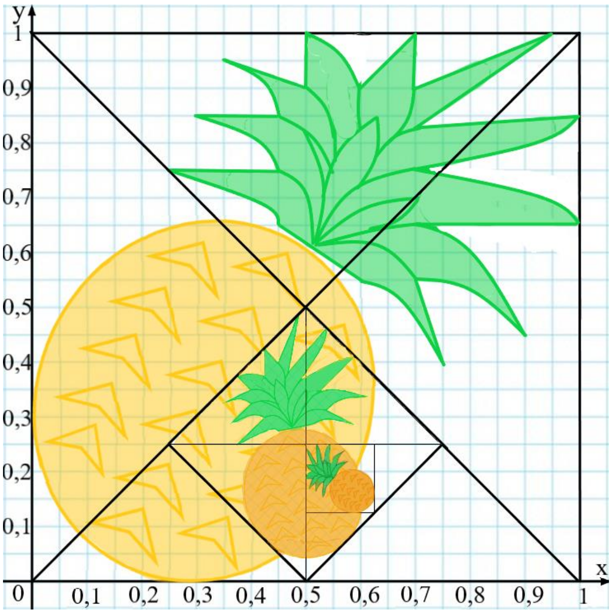


Рис. Г.26.

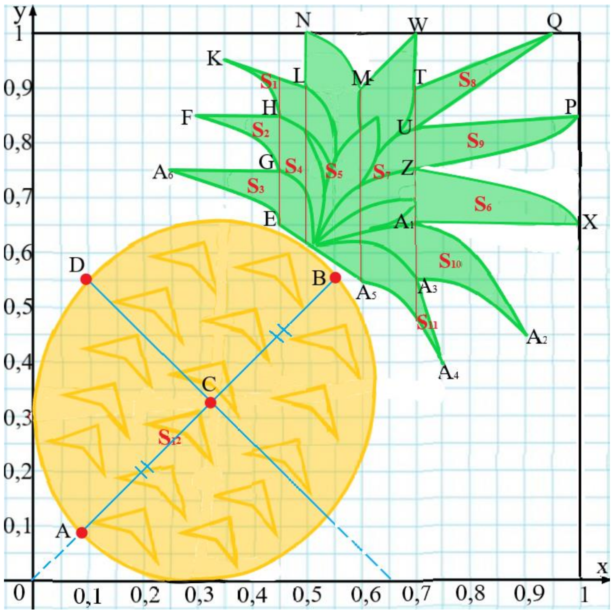


Рис. Г.27.

Задача 15. *Скласти числовий ряд площ криволінійних трапецій, що мають форму грони винограду, вписаних в квадрат зі стороною $a_n = \frac{d_n}{4}$, де d_n – довжина діагоналі n-го квадрата. Дослідити цей ряд на збіжність. Геометрична інтерпретація ряда задана на рис. Г.28. «Bunch of grapes», вписана в квадрат зі стороною 1 одиниця довжини, задана на рис. Г.29. та обмежена графіками функцій з таблиці Г.15.*

Таблиця Г.15.

Вихідні дані

№	*Функція*	*Проміжок*
1	AB: $y = \frac{\sqrt{10x}}{20} + 0{,}1$	x є (0; 0,1)
2	AA_3: $y = -\frac{\sqrt{10x}}{20} + 0{,}1$	x є (0; 0,1)
3	BC: $y = \sqrt{0{,}1(x - 0{,}1)} + 0{,}15$	x є (0,1; 0,2)
4	CD: $y = -10(x - 0{,}3)^2 + 0{,}35$	x є (0,2; 0,3)
5	DE: $y = \sqrt{0{,}1(x - 0{,}3)} + 0{,}35$	x є (0,3; 0,4)
6	A_3A_4: $y = 20(x – 0{,}15)^2$	x є (0,1; 0,2)
7	A_4A_{11}: $y = 20(x – 0{,}25)^2$	x є (0,2; 0,3)
8	$A_{11}A_5$: $y = 20(x – 0{,}35)^2$	x є (0,3; 0,4)
9	A_5A_6: $y = 20(x – 0{,}45)^2$	x є (0,4; 0,5)
10	A_6A_7: $y = -\sqrt{-\frac{1}{40}(x - 0{,}6) + 0{,}1}$	x є (0,5; 0,6)
11	A_7A_8: $y = 10(x – 0{,}6)^2 + 0{,}1$	x є (0,6; 0,7)

Продовж. табл. Г.15.

12	$\mathbf{A_8A_{12}\colon y = -\sqrt{-\frac{1}{20}(x-0{,}75)+0{,}25}}$	x є (0,7; 0,75)
13	$A_9A_{12}\colon y = \sqrt{-\frac{1}{20}(x-0{,}75)+0{,}25}$	x є (0,7; 0,75)
14	$A_9A_{13}\colon y = -\sqrt{-\frac{1}{20}(x-0{,}75)+0{,}35}$	x є (0,7; 0,75)
15	$A_{10}A_{13}\colon y = \sqrt{-\frac{1}{20}(x-0{,}75)+0{,}35}$	x є (0,7; 0,75)
16	$A_2A_1\colon y = -\sqrt{\frac{1}{20}(x-0{,}7)+0{,}45}$	x є (0,7; 0,75)
17	$VX\colon y = -\sqrt{0{,}1(x-0{,}75)+0{,}45}$	x є (0,75; 0,85)
18	ZU: $y = 5(x-0{,}85)^2+0{,}4$	x є (0,85; 0,95)
19	TU: $y = 5(x-0{,}85)^2+0{,}5$	x є (0,85; 0,95)
20	YW: $y = \sqrt{0{,}1(x-0{,}75)+0{,}45}$	x є (0,75; 0,85)
21	SQ: $y = \sqrt{\frac{1}{20}(x-0{,}7)+0{,}45}$	x є (0,7; 0,75)
22	MS: $y = 0{,}5$	x є (0,65; 0,7)
23	MR: $y = 1{,}5x-0{,}475$	x є (0,65; 0,75)
24	MP: $y = -20(x-0{,}75)^2+0{,}7$	x є (0,65; 0,75)
25	MN: $y = -80(x-0{,}6)^2+0{,}7$	x є (0,6; 0,65)
26	KL: $y = \sqrt{-0{,}1(x-0{,}6)+0{,}65}$	x є (0,5; 0,6)
27	JI: $y = -5(x-0{,}4)^2+0{,}75$	x є (0,4; 0,5)
28	GH: $y = -\frac{20}{9}(x-0{,}4)^2+0{,}7$	x є (0,25; 0,4)
29	GF: $y = \frac{40}{9}(x-0{,}4)^2+0{,}55$	x є (0,25; 0,4)

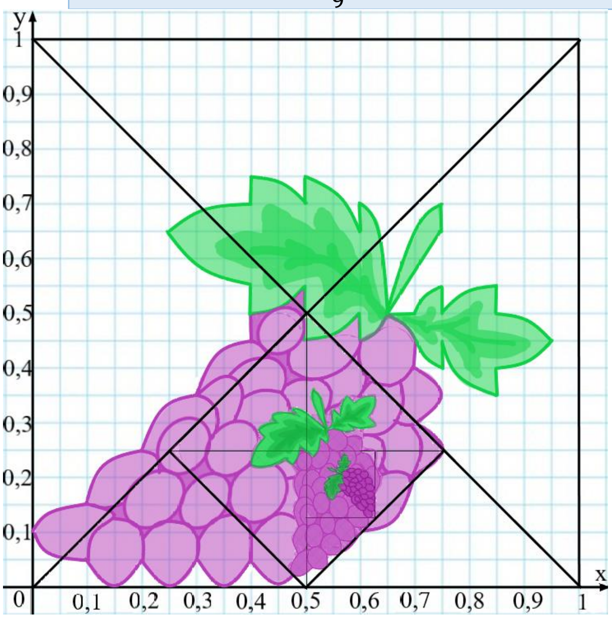


Рис. Г.28.

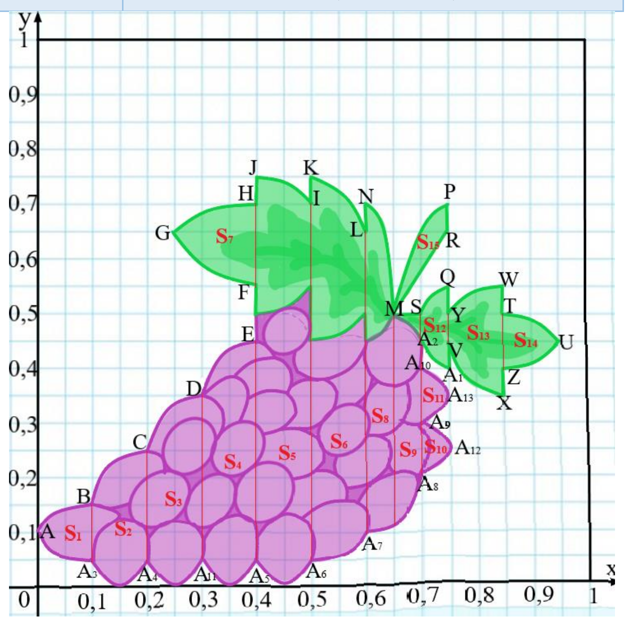


Рис. Г.29.

ДОДАТОК Д – РОЗРОБКА ПЛАНА-КОНСПЕКТУ ІНТЕГРОВАНОГО ПОЗАКЛАСНОГО ЗАХОДУ З ТЕМИ «МАНДРІВКА УКРАЇНОЮ».

Тема заходу: «Мандрівка Україною»

Мета:

- повторити матеріал теми «Інтеграл та його застосування», вдосконалити вміння розв’язувати нестандартні задачі на знаходження імовірності випадкової події, визначеного інтеграла та площі криволінійної трапеції;
- розвивати навички створення онлайн-листівок, фото-колажів, редагування фото, розвивати логічне мислення, увагу, пізнавальний інтерес, креативність, інноваційність особистості, вміння логічно викладати свої думки та працювати в одній команді, підвищувати творчу активність, ініціативність;
- виховувати патріотизм, виховувати шанобливе ставлення до чужої думки.

Дидактичне забезпечення (мої авторські розробки)**:**

1. Інтерактивний пазл
2. Презентація (PDF файл)
3. Блог вчителя
4. Google клас
5. Віртуальне дерево вражень і побажань
6. Відеоролик "Як і чому тризуб став гербом України?"
7. Відеоролик "Серце України"

Програмне забезпечення:

Для створення матеріалів до захоу та зразків виконаних завдань було використано таке програмне забезпечення: браузер Google Chrome, Microsoft Word 2016, Microsoft PowerPoint 2016, Microsoft Paint 3D 2016, веб-сервіс Google Classroom, Blogger та Google Forms, сервіси LearningApps, платформа графічного дизайну Canva, XMind, Онлайн-калькулятор для обчислення визначених інтегралів

Апаратне забезпечення:

Ноутбук та (або) смартфон

Інформаційні джерела:

- Мій блог
- Моя стаття та магістерська робота

Тип заходу: інтегрований (математика, інформатика, виховний)

Структура заходу

I	Організаційна частина.	1 хв.
II	Оголошення теми і завдань заходу.	30 с.
III	Станція «Математична»	21 хв.
IV	Станція «Художня»	5 хв.
V	Станція «Географічна».	2 хв.
VI	Станція «Креативна».	1 хв.
VII	Станція «Поетична».	10 хв.
VIII	Станція «Історична»	10 хв.
IX	Станція «Інформатична».	21 хв.
X	Станція «Музична».	5 хв.
XI	Дерево вражень і побажань.	3 хв
XII	Рефлексія. Підсумки.	30 с.

Хід заходу

I. Організаційна частина (30 с)

– Вітаю! Сьогодні у нас буде дуже насичений і незвичайний захід! Ми вирушимо у чудову мандрівку – мандрівку Україною!

II. Оголошення теми і завдань заходу (30 с)

Викладач починає демонстрацію презентації до уроку.

– Тема нашого заходу – «Мандрівка Україною».

Але мандрівка буде незвичайною. Стрибайте в потяг і поїхали!

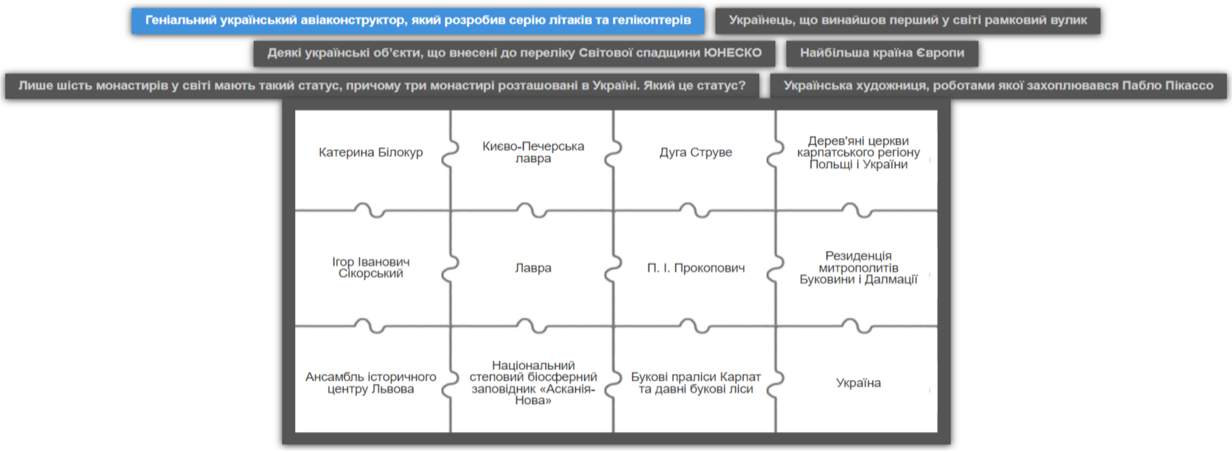
– Сьогодні ми відвідаємо різні станції:

- Станція "Математична"
- Станція «Художня»
- Станція «Географічна».
- Станція «Креативна».
- Станція «Поетична».
- Станція «Історична»
- Станція «Інформатична».
- Станція «Музична».

ІІІ. Станція «Математична»

Ми прибули на станцію «Математична». Тут Вас чекають незвичайні завдання, яких немає в жодному підручнику!

Умову першого завдання зашифровано в пазлі (рис. Д.1.). Щоб дізнатись завдання, треба скласти пазл.



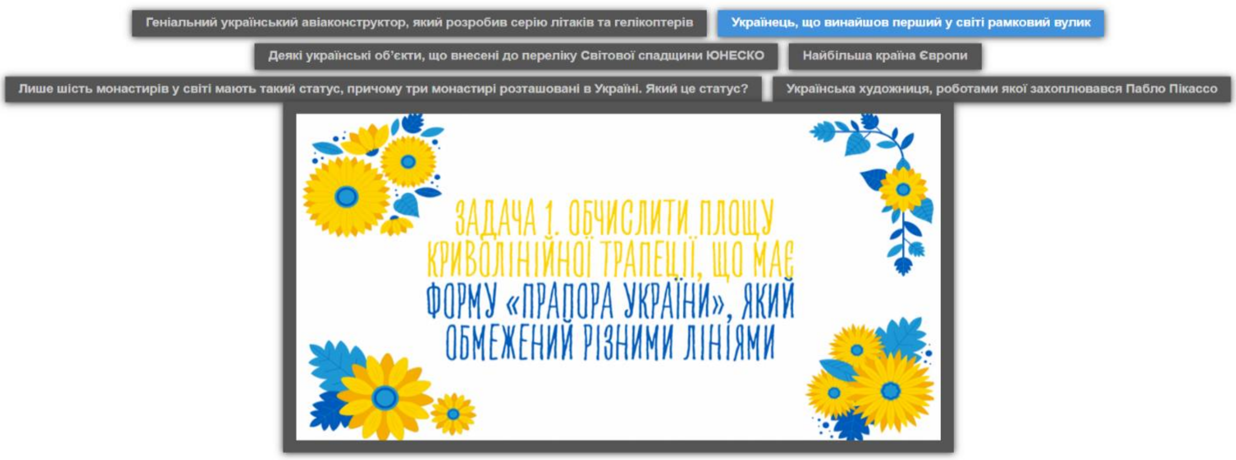


Рис. Д.1. «Зашифроване завдання».

Отже ви дізналися перше завдання:

Задача 1. Обчислити площу криволінійної трапеції, що має форму «Прапора України» (рис. Д.2.), який обмежений різними лініями.

Лінії наведені в таблиці Д.1.

Давайте поглянемо в таблицю. Здається, чогось не вистачає. Ми не знаємо межі інтегрування.

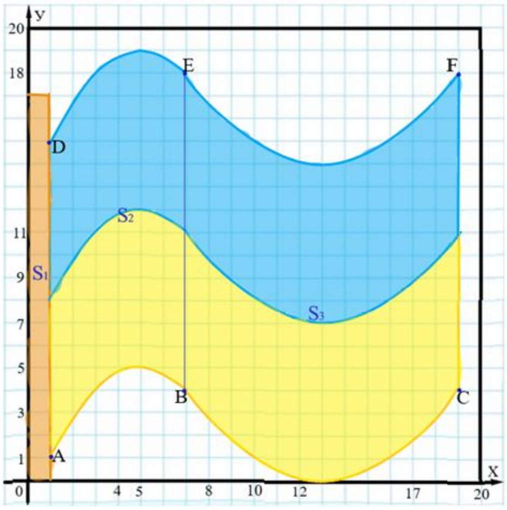


Рис. Д.2.

Таблиця Д.1.

Вихідні дані

№	Функція	Межі інтегрування
1	AB: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25$	x = 1; x = 7
2	DE: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75$	x = 1; x = 7
3	BC: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9}$	x = 7; x = 19
4	EF: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{295}{9}$	x = 7; x = 19
5	y = 0	x = 0; x = 1

Знайдемо межу інтегрування:

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{26}{9}x + \frac{169}{9} = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25.$$

x = 7

Знайдемо площу «Прапора України». Вона обмежена кількома графіками функцій. Тож умовно розіб'ємо її прямими x = 0, x = 1, x = 7 та x = 19 на три менші площі. Обчислимо їх та знайдемо їх суму. Вона і буде площею шуканої криволінійної трапеції.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: y = 0 та y = 17, x = 0, x = 1

$$S_1 = \int_0^1 (17 - 0)\,dx = 17x\,_0|^1 = 17 \text{ (кв. од.)}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 1{,}25$, x = 1, x = 7 та $y = -0{,}25x^2 + 2{,}5x + 12{,}75$.

$$S_2 = \int_1^7 \left(-0{,}25\mathrm{x}^2 + 2{,}5\mathrm{x} + 12{,}75 - (-0{,}25\mathrm{x}^2 + 2{,}5\mathrm{x} - 1{,}25)\right)dx =$$

$= \int_1^7 (19-5)\,dx = 14x\;{}_1|^7 = 98 - 14 = 84$ (кв. од.)

Площа S_3 обмежена графіками функцій: $\mathrm{y} = \frac{1}{9}\mathrm{x}^2 - \frac{26}{9}\mathrm{x} + \frac{295}{9}$ та $\mathrm{y} = \frac{1}{9}\mathrm{x}^2 - \frac{26}{9}\mathrm{x} + \frac{169}{9}$, x = 7, x = 19

$$S_3 = \int_7^{19} \left(\frac{1}{9}\mathrm{x}^2 - \frac{26}{9}\mathrm{x} + \frac{295}{9} - \left(\frac{1}{9}\mathrm{x}^2 - \frac{26}{9}\mathrm{x} + \frac{169}{9}\right)\right)dx = 14x\;{}_7|^{19} = 168$$

$$S_{\text{прапора}} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_{\text{прапора}} = 17 + 84 + 168 = 269 \text{ (кв. од.)}$$

Тут цікаво

Наступна задача така (рис. Д.3.):

Рис. Д.3.

Спробуйте прочитати її умову.

Задача 2. Обчислити площу криволінійної трапеції, що має форму «Серця України» (рис. Д.4.), яке симетричне відносно прямої x = 10 та обмежене різними лініями.

Лінії наведені в таблиці Д.2.

Таблиця Д.2.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	BC: $y = -4\sqrt{x-1} + 12$	$x \in (1; 10)$
2	BD: $y = \frac{5}{2}\sqrt{x-1} + 12$	$x \in (1; 2)$
3	DA: $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 12$	$x \in (2; 10)$
4	$y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$	$x \in (4; 9)$

Рубрика «Що зайве?»

Перш ніж перейдемо до розв’язання, давайте поглянемо в таблицю. Здається, там є щось зайве. Що саме?

При побудові малюнка не використовувалась пряма.

Серце України обмежене кількома графіками функцій. Умовно розіб'ємо прямими x = 1, x = 2 та x = 10 площу половини серця на дві менші площі.

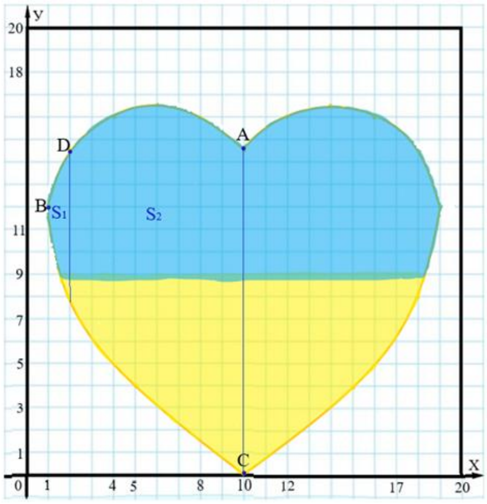


Рис. Д.4.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $y = \frac{5}{2}\sqrt{x-1} + 12$ та $y = -4\sqrt{x-1} + 12$, $x = 2$, $x = 1$

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{5}{2}\sqrt{x-1} + 12 - \left(-4\sqrt{x-1} + 12\right)\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{13}{2}\sqrt{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{13}{2}\int_1^2 (x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{13}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{13}{3}\cdot\left((2-1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{13}{3}\ (\text{кв. од.})$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $y = -4\sqrt{x-1} + 12$, $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 12$, $x = 2$, $x = 10$.

$$S_2 = \int_2^{10} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 12 - \left(-4\sqrt{x-1} + 12\right)\right)dx = 100\ (\text{кв. од.})$$

Фігури, симетричні щодо прямої, рівні. А рівні фігури – «половинки серця» – мають однакові площі: $S_{\text{серця}} = 2 \cdot (S_1 + S_2)$

$$S_{\text{серця}} = 2 \cdot \left(\frac{13}{3} + 100\right) = \frac{626}{3} (\text{кв. од.})$$

Тут цікаво

Задача 3. Обчислити площу криволінійної трапеції, що має форму «Карти України» (рис. Д.5.), яка обмежена різними лініями.

Лінії наведені в таблиці Д.3.

Таблиця Д.3.

Вихідні дані

№	Функція	Проміжок
1	AZ: $y = -x^2 + 4x + 7$	$x \in (0; 2)$
2	ZW: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$	$x \in (2; 4)$
3	AB: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$	$x \in (0; 6)$
4	WV: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$	$x \in (4; 9)$
5	BC: $y = -x^2 + 12x - 29$	$x \in (6; 8)$
6	EF: $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$	$x \in (7; 9)$
7	FG: $y = -x^2 + 20x - 96$	$x \in (9; 11)$
8	IM: $y = \sqrt{0{,}5x - 6} + 2$	$x \in (12; 14)$
9	IJ: $y = -\sqrt[3]{x - 13} + 1$	$x \in (12; 14)$
10	KL: $y = \sqrt[3]{x - 15} + 1$	$x \in (14; 16)$
11	ML: $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x - 7} + 3$	$x \in (14; 16)$
12	SR: $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 8} + 12$	$x \in (14; 16)$
13	MN: $y = \sqrt{x - 14} + 3$	$x \in (14; 18)$
14	NP: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x - 193$	$x \in (18; 20)$
15	VU: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 11x - \frac{93}{2}$	$x \in (9; 11)$
16	UT: $y = -x^2 + 24x - 129$	$x \in (11; 12)$
17	TS: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 57$	$x \in (12; 14)$
18	RQ: $y = \sqrt{-x + 20} + 10$	$x \in (16; 20)$

Знайдемо площу «карти України». Вона обмежена багатьма графіками функцій. Умовно розіб'ємо прямими x = 0, x = 2, x = 4, x = 8, x = 10, x = 11, x = 12, x = 14, x = 16, x = 18, x = 20 площу карти на 14 менших площ.

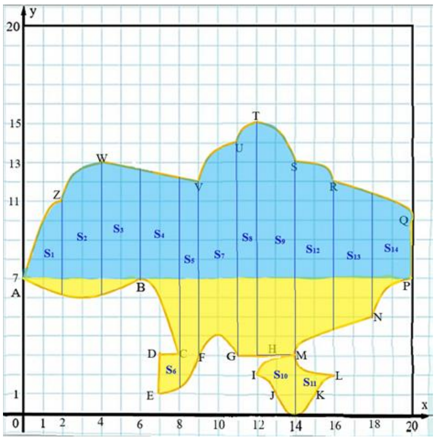


Рис. Д.5.

Площа S_1 обмежена графіками функцій: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, $x = 2$, $x = 0$ та $y = -x^2 + 4x + 7$.

$$S_1 = \int_0^2 \left(-x^2 + 4x + 7 - \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7\right)\right) dx = \frac{172}{27}$$

Площа S_2 обмежена графіками функцій: $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, $x = 4$, $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$.

$$S_2 = \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 - \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7\right)\right) dx = \frac{340}{27}$$

Аналогічно за допомогою аналітичного задання функцій отримаємо наступні частинні суми: $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$.

Площа S_3 обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, $x = 4$, $x = 6$, $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 7$, має значення $S_3 = \frac{1706}{135}$.

Площа S_4 обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, $x = 6$, $x = 8$, $y = -x^2 + 12x - 29$, має значення $S_4 = \frac{202}{15}$.

Площа S_5, яка обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{69}{5}$, $x = 8$, $x = 9$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$, має значення $S_5 = \frac{149}{15}$.

Площа S_6, яка обмежена графіками функцій: $y = 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{51}{2}$, $x = 7$, $x = 8$, має значення $S_6 = \frac{11}{6}$.

Площа S_7, яка обмежена графіками функцій: $y = -x^2 + 20x - 96$, $x = 9$, $x = 11$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 11x - \frac{93}{2}$, має значення $S_7 = \frac{58}{3}$.

Площа S_8, яка обмежена графіками функцій: y = 3, $y = -x^2 + 24x - 129$, x = 11, x = 12, має значення $S_8 = \frac{35}{3}$.

Площа S_9, яка обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 57$, x = 12, x = 14, y = 3, має значення: $S_9 = \frac{68}{3}$.

Площа S_{10}, яка обмежена графіками функцій: x = 12, x = 14, $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 6} + 2$, $y = -\sqrt[3]{x - 13} + 1$, має значення $S_{10} = \frac{29}{6}$.

Площа S_{11}, яка обмежена графіками функцій: x = 16, $y = \sqrt[3]{x - 15} + 1$, $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x - 7} + 3$, x = 14, має значення $S_{11} = \frac{8}{3}$.

Площа S_{12}, яка обмежена графіками функцій: $y = \sqrt{x - 14} + 3$, x = 14, $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 8} + 12$, x = 16, має значення $S_{12} = \frac{58 - 4\sqrt{2}}{3}$.

Площа S_{13}, яка обмежена графіками функцій: $y = \sqrt{x - 14} + 3$, x = 16, x = 18, $y = \sqrt{-x + 20} + 10$, має значення $S_{13} = 14$.

Площа S_{14} обмежена графіками функцій: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x - 193$, $y = \sqrt{-x + 20} + 10$, x = 18, x = 20, має значення $S_{14} = \frac{22 + 4\sqrt{2}}{3}$.

$$S_{\text{карти}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} + \\ + S_{13} + S_{14}$$

$$S_{\text{карти}} = \frac{172}{27} + \frac{340}{27} + \frac{1706}{135} + \frac{202}{15} + \frac{149}{15} + \frac{11}{6} + \frac{58}{3} + \frac{35}{3} + \frac{68}{3} + \frac{29}{6} + \frac{8}{3} + \\ + \frac{58 - 4\sqrt{2}}{3} + 14 + \frac{22 + 4\sqrt{2}}{3} = \frac{512}{27}^{\backslash 5} + \frac{1706}{135} + \frac{117}{5}^{\backslash 27} + \frac{269}{3}^{\backslash 45} + \\ + 14^{\backslash 135} = \frac{21420}{135} = 158\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Тут цікаво

А тепер вам треба згадати теорію імовірностей.

Задача 4. З семи карток розрізаної абетки складають слово «Україна». Потім картки перемішуються і розкладаються по одній зліва на право. Яка імовірність того, що знову складеться слово «Україна»?

Розв'язання

Р (Україна) = $P(у) \cdot P_{у}(к) \cdot P_{ук}(р) \cdot P_{укр}(а) \cdot P_{укра}(ї) \cdot P_{украї}(н) \cdot P_{україн}(а)$

Р (Україна) = $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2520}$

Відповідь: $\frac{1}{2520}$.

Щож, багато цікавих завдань ми виконали. А тепер наш потяг рушає до наступної станції. Ми прибуваємо на станцію «Художня»

IV. Станція «Художня»

На цій станції вам треба побути в ролі справжніх художників. Ми щойно знайшли площу «карти України». Давайте поглянемо на це зображення. Чогось не вистачає. Розмалюйне карту України (рис. Д.6.) так як хочете за допомогою телефона або комп'ютера.

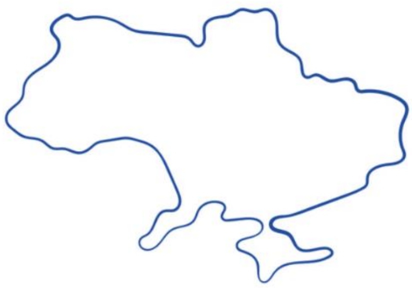


Рис. Д.6.

V. Станція «Географічна».

Ми прибули на станцію «Географічна». Тут вас чекає ще одне завдання.

У вас є фото карти Уркаїни (рис. Д.7.). Накресліть план своєї майбутньої подорожі Україною.

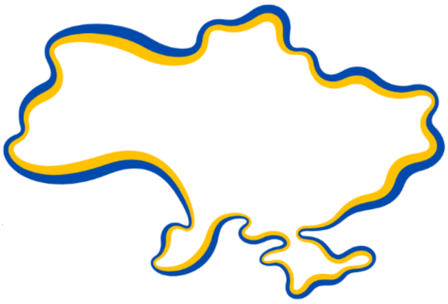


Рис. Д.7.

VI. Станція «Креативна».

Ось і прибув наш потяг до нової станції – станції «Креативна». Тут вас теж чекає незвичайне завдання.

Складіть кілька питань, поєднавши два слова:

1) Україна і функція
2) Інтеграл та Україна

Наприклад:

- Фрагментами графіків скількох функцій можна описати карту України?
- Як за допомогою інтеграла обчислити площу України.

VII. Станція «Поетична».

Отже, ми прибули на станцію «Поетична». Тепер вам необхідно спробувати себе в ролі поета. А завдання буде таке:

Придумайте акровірш про Україну. Потім кожен зачитає свій вірш, а ми визначимо переможця.

Ви склали чудові вірші. А наш потяг тим часом прибуває на станцію «Історична»

VIII. Станція «Історична»

Сьогодні на заході йшла мова про українську символіку. Проте один з найважливіших символів України ми оминули увагою. А даремно! Він має дуже багату історію!

Я пропоную вам переглянути змонтований мною відеоролик, створений на основі архівних джерел. Таких фактів про його появу ви ще не знали!

IX. Станція «Інформатична».

От і прибув наш потяг до ще однієї станції, на які вас чекають не менш цікаві завдання. Ви можете обрати завдання, яке будете виконувати.

1. Створити онлайн-кардмейкінг для підтримки ЗСУ.
2. Створити фотоколаж визначних місць нашої Батьківщини, які ви хотіли б відвідати під час подорожі після закінчення війни..
3. Створити хмарку діалектів і говірок.
4. Створіть мем про математику або інформатику, чи Україну.
5. Створіть соціальну рекламу України.
6. Створіть мальопис або інфографіку про Україну.

X. Станція «Музична».

От ми і прибули на останню станцію – станцію «Музична». Тут вас чекає чудова пісня, котра об’єднала не тільки знаменитостей, а й всю Україну!

Пісня «Ми з України»

XI. Дерево вражень і побажань.

От і закінчилася наша подорож Україною. Сподіваюсь, що вона вам дуже сподобалася! Гадаю, в кожного присутнього вона викликала ряд чудових вражень.

Наостанок я пропоную вам написати свої враження і побажання на листочках віртуального дерева (рис. Д.8.).

Рис. Д.8.

XII. Підсумки.

– Чи сподобався вам захід?

– Що найбільше запам'яталося?

– Чи є у вас якісь питання?

– Чи є у вас пропозиції щодо форм проведення наступних занять?

– Дякую Всім присутнім за увагу. Бажаю всім гарного дня та мирного неба над головою.

Самоаналіз заходу викладений на моєму блозі.

РЕЦЕНЗІЯ

на кваліфікаційну роботу

з ____

студентки ____

на тему: ____

____

	Критерії	Кількість балів	
	ЯКІСТЬ ВИКОНАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ	Максим.	Факт.
1.	Обґрунтування актуальності теми, виклад вступу та висновків роботи	10	
2.	Цілісність, систематичність, логічна послідовність, елемент творчості, вміння формулювати висновки	20	
3.	Структурованість викладеного матеріалу, доцільність наведених прикладів, фрагментів уроків, систем вправ тощо	20	
4.	Ступінь опрацювання літератури (кількість джерел, роки видання, частка статей, тез, монографій, наявність посилань)	10	
5.	Дотримання вимог до виконання курсової роботи (згідно методичних вказівок: шрифт, оформлення, наявність двох розділів, таблиць, рисунків, прикладів)	10	
	РАЗОМ	**70**	
	ЗАХИСТ РОБОТИ		
1.	Аргументоване доведення проблеми, повнота розкриття	20	
2.	Чіткість, логічність, лаконічність викладення матеріалу	5	
3.	Повнота, вичерпність відповідей на запитання членів комісії	5	
	РАЗОМ	**30**	
	ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ	**100**	