

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____ Д. Є. Бобилев

Реєстраційний № _____

«___» _____ 2022 р.

«___» _____ 2022 р.

РЕАЛІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ
НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи Мім-17
ступінь вищої освіти *магістр*
спеціальності: 014.04 середня освіта
(Математика)

Грищенко Вікторії Русланівни
Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент
Бобилев Дмитро Євгенович

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1	5
Теоретичні основи вивчення функціональної лінії в курсі алгебри старшої школи.....	5
1.1. Факультативні заняття з математики та методика їх проведення	5
1.2. Цілі, місце і вивчення функціональної лінії. Аналіз шкільної програми. .	10
1.3. Підходи до вивчення поняття «функція» Функціональна пропедевтика.	16
Функції в курсі алгебри основної школи.....	16
1.4. Аналіз програм факультативних курсів з математики.(в яких реалізується функціональна лінія) для учнів 5-9 класів.....	23
1.5. Реалізація функціональної лінії на факультативних заняттях з математики для учнів старшої школи	33
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1	41
РОЗДІЛ 2	42
Методика використання системи задач з теми «Функції та їх графіки» для формування умінь математичного моделювання.	42
2.1. Введення поняття функції, способів її задання і дослідження на факультативних заняттях з математики.	42
2.2. Прикладні задачі на факультативних заняттях з математики.	55
2.3. Застосування різних видів функцій та їх графіків до розв'язування олімпіадних задач.....	71
2.4. Імітаційно-моделюючі програми для реалізації функціональної лінії на факультативних заняттях з математики.	79
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2	83
РОЗДІЛ 3	85
Розробка факультативного курсу «Функціональна лінія в ЗНО (НМТ) для учнів старшої школи	85
3.1. Програма факультативного курсу за вибором для учнів 10-11 класів.....	85
3.2. Методичні рекомендації щодо викладання курсу та орієнтовні конспекти тем.....	87
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3	107
ВИСНОВКИ.....	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	109

ВСТУП

У сучасному світі значна увага на уроках математики приділяється питанню становлення кожного учня як творчої особистості. Формування та розвиток творчої особистості є провідною метою шкільної математичної освіти. Останнім часом освітній простір формується на посиленні уваги до розвитку особистісних якостей учня, так як, розвиваючи свої здібності і, втілюючи їх у життя, учень засвоює досвід, накопичений людством, і приносить користь всьому суспільству. Навчальний процес будується так, щоб знання, засвоєні учнем, мали б для нього особистісний сенс. Все це зумовлює необхідність розвитку творчого потенціалу учнів, формування умінь і навичок пошукової та експериментальної роботи, самостійності їх мислення.

Одним із засобів досягнення вищеназваних факторів є проведення в школі факультативних занять, які були б організовані не тільки для поглиблення знань учнів, а й для знайомства з найважливішими досягненнями науки, формування вміння самостійно поповнювати знання, орієнтуватися в науковій інформації, для розвитку їхніх різнобічних інтересів і здібностей, свідомого ставлення до навчання.

Відвідування факультативних курсів мотивує самовиховання учнів, сприяє вибору їх майбутньої професії, переконує у правильності професійного вибору; слугує розвитку прикладних математичних знань та умінь.

Функціональну лінію, без перебільшення, можна назвати найважливішою темою курсу математики середньої та старшої школи. У шкільному курсі математики в кожному класі вивчається тема «Функції», яка є однією з найбільш значущих тем, як для інших шкільних предметів, так і для майбутнього життя та професійної діяльності.

Особливої уваги під час вивчення курсу математики заслуговує функціональна лінія. Саме вивчення цього розділу, як на уроках, так і на факультативних заняттях дуже тісно переплітається із застосуванням комп'ютерних технологій, широко використовується в інших шкільних предметах та часто зустрічається в повсякденних питаннях.

Актуальність теми полягає в необхідності більш ґрунтовного дослідження застосування функціональної лінії при розв'язуванні прикладних та олімпіадних задач на факультативних заняттях з математики.

Мета дослідження: розробити факультативний курс для учнів 10-11 класів спрямований на підготовку учнів до ЗНО (НМТ) з питань, в яких реалізується функціональна лінія.

Об'єкт дослідження: вивчення функціональної лінії на факультативних заняттях.

Предмет дослідження: прикладні, олімпіадні та екзаменаційні задачі в яких реалізується функціональна лінія.

Мета роботи конкретизується в таких **завданнях:**

- 1) Проаналізувати науково-практичну, методичну літературу та інші інформаційні джерела з питань визначення та організації факультативних занять та їх програм.
- 2) Вивчити способи організації діяльності учнів на факультативних заняттях з алгебри під час вивчення функціональної лінії.
- 3) Вивчити застосування ІКТ, які будуть ефективними під час проведення факультативних занять.
- 4) Проаналізувати навчальні шкільні програми та програми факультативних курсів в яких реалізується функціональна лінія.
- 5) Розробити факультативний курс «Функції» для учнів 10-11х класів.
- 6) Підібрати систему задач для розробленого курсу.

У роботі використані такі **методи дослідження:** аналіз наукової та методичної літератури на тему дослідження; узагальнення та систематизація математичної літератури з даної теми.

Структура і обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел. Зміст кваліфікаційної роботи викладено на 103 сторінках.

РОЗДІЛ 1

Теоретичні основи вивчення функціональної лінії в курсі алгебри старшої школи

1.1. Факультативні заняття з математики та методика їх проведення

Ще на початку ХХ століття деякі вчителі прийшли до висновку, що навчання в загальноосвітній школі будь-якого предмета за обов'язковою державною програмою стає все більш успішною, якщо при цьому доповнити її комплексом необов'язкових для учнів, призначені лише для зацікавлених дітей, поза програмних групових занять.

Найбільш динамічним компонентом такого змішаного типу навчання математики є факультатив. Такі заняття мали б враховувати реальні інтереси та запити учнів певного класу та реальні можливості конкретного вчителя і розвивати інтерес учнів до важливих моментів даного предмету, які не охоплені обов'язковою навчальною програмою.

Саме так і виникла ідея факультативних занять у школі.

Згідно з тлумаченням Словника української мови, факультатив — понадпрограмний, необов'язковий навчальний курс, необов'язкове для відвідування заняття. Факультатив у школі сприяє самовизначенню учнів, прищеплює їм любов до трудової діяльності, до ведення, нехай елементарних, наукових досліджень [55, с. 554].

Також, згідно тлумачного словника іншомовних слів: факультативний — необов'язковий, той, що дається на вибір [58].

Спочатку найвідданіші своєму предмету вчителі, ще радянської школи — почали організовувати для учнів факультативні предметні семінари, які згодом отримали назву — гуртки. Цей практичний досвід вчителів-ентузіастів показав, що саме в таких предметних гуртках виникає особлива атмосфера для навчання та виховання учнів, які захоплені предметом [68].

Тому, можна зробити висновок, що основним видом позакласної роботи з математики в школі факультативні заняття. Їх основною метою є поглиблення та розширення знань учнів, заохочення здобувачів освіти до самостійних занять

і досліджень, розвиток математичних здібностей, виховання ініціативи. В такій формі позакласної роботи діти матимуть змогу повною мірою виявити та розкрити свої творчі та розумові здібності, а також розширити та доповнити свої знання.

Основними завданнями факультативу є:

- поглиблення математичних знань учнів;
- розвиток в учнів логічного мислення, алгоритмічної та графічної культури, пам'яті, уваги та інтуїції;
- формування стійкого інтересу до вивчення математики та розвитку математичних здібностей [2, 17].

Оскільки факультатив — це навчальний курс, зміст якого не проходить наскрізною лінією через загальнообов'язковий навчальний зміст і який обраний для того, щоб розширити кругозір учня, поглибити та збільшити обсяг його знань та розвинути математичні здібності, слід відповідально та зважено обирати програму факультативного курсу та розумітися на методиці їх проведення.

Навчальна програма факультативних курсів має вибудовуватися так, щоб учні мали змогу вивчати додаткову інформацію паралельно з вивченням основного курсу шкільної математики. Проте, іноді теми факультативів все ж таки можуть вивчатися незалежно від основної навчальної програми.

Головною особливістю, на якій базується вибір методів навчання, розробка методик, які використовуються на факультативах, є безпосередній інтерес та схильність учнів до вивчення математики.

Всі факультативні заняття є виключно добровільними й ґрунтуються лише на інтересах школярів. Обов'язково вивчати факультативні курси учнів примушувати не слід. Але, якщо учневі всеж цікаво займатися математикою, то додаткові заняття мають практикувати організацію різних форм позакласної роботи, такі як математичні вечори, гуртки, конкурси, вікторини, олімпіади тощо. Під час організації навчання на факультативних заняттях слід враховувати те, що тут учні повинні мати можливість не лише покращити та поглибити свої знання, уміння і навички, а й розвинути свої творчі та пізнавальні здібності,

навчитися працювати самостійно. Для цього рекомендується використовувати вчителю правильні та влучні педагогічні прийоми, щоб підтримувати зацікавлення предметом учнів [68].

Вважається, що найдієвішими формами проведення факультативів все ж залишаються семінари, співбесіди, дискусії, доповіді учнів з теоретичних чи практичних питань, реферати та безпосередньо, розв'язування задач. Слід звертати увагу, на те, що віддавати перевагу лише одній формі роботи на факультативних заняттях — недоцільно, адже чим більш різноманітні уроки — то краще вони сприятимуть розвитку пізнавального інтересу здобувачів освіти.

Слід пам'ятати, що все ж таки, головною умовою розвитку зацікавленості до предмета є надання певної самостійності учням у виконанні завдань, які вимагають творчого підходу від дитини та ініціативи. Через це на факультативних заняттях важливе місце посідає самостійна робота, варто також приділяти увагу підготовці учнями рефератів, проведенню семінарів-дискусій, практикуванню читання навчальної та наукової літератури.

Одним із найдієвіших методів в організації факультативних занять з математики — є поділ на дві частини [68, с. 61-63].

Перша частина заняття відводиться на вивчення нового матеріалу та на самостійну роботу учнів із завданнями теоретичного та практичного змісту. По завершенні цієї частини, вчителю доцільно запропонувати учням завдання додому з вивчення теорії та її можливого застосування. Другий етап уроку рекомендовано присвятити розв'язуванню задач підвищеної складності, обговоренню розв'язань особливо складних, олімпіадних та цікавих задач.

На заняттях під час обговорення процесу чи ідеї розв'язування якої-небудь задачі, вчителю необхідно наголошувати на тому, щоб учні опиралися на певні математичні факти, правила, теореми, при виборі тієї чи іншої формули чи властивості, яка б допомогла розв'язати задачу. В такому випадку всі учасники факультативу матимуть змогу зрозуміти як саме розкривається аналітико-синтетичний хід думок одного з учнів і тоді, решта дітей навчиться спрогнозувати процес пошуку розв'язання до задачі.

Такий спосіб проведення факультативів буде сприяти успішному переходу від форм до методів навчання у школі до форм і методів навчання у вищих навчальних закладах.

Під час проведення факультативних занять слід використовувати різноманітні методи вивчення математики. Рекомендовано звернутися до проблемної форми навчання. Наприклад, представити курс, що розглядається у вигляді серії послідовних задач. У статті І. Д. Степанова [56, с. 59-60] вказано, що розв'язуючи послідовно всі задачі самостійно, або із незначною допомогою вчителя, учні значною мірою вивчають курс самостійно, проявляючи активність і розумову здатність, опановуючи техніку математичного мислення. Він пропонує розглядати теореми у вигляді задач, розбиваючи значні за обсягом або складні для розуміння теореми на кілька завдань таким чином, щоб розв'язання попередньої допомагало розв'язати наступну.

Під час факультативних занять важливо застосовувати також і завдання проблемного характеру, наприклад евристичний метод. Для звичайного навчання базового курсу цей метод є досить важкий і забирає досить багато часу та сил. Проте, в той самий час, якщо учні зацікавлені та свідомо ставляться до навчання, тобто їх не потрібно спонукати, а достатньо лише скоординувати та контролювати їх роботу, евристичний метод може зайняти чільне місце на факультативах, оскільки він може розвивати творчу активність та самостійність учнів.

І. Ф. Шаригін у своєму факультативному курсі математики вказує, що процес навчання рекомендують будувати на основі таких методичних принципів [63, с. 252].

Принцип регулярності. Основну роботу проводять не на спільних заняттях у класі, а вдома, індивідуально. Повноцінна підготовка неможлива без значної кількості годин, присвячених роботі над задачею. При цьому ефективніше займатися менше, але частіше. Скажімо, щодня годину, ніж раз на тиждень по декілька годин.

Принцип паралельності. Учитель повинен постійно тримати в полі зору кілька тем курсу.

Принцип випереджувальної складності. Цей принцип на практиці можна реалізувати так: задаючи учням домашнє завдання на тиждень (від 10 до 15), варто підібрати задачі різного ступеня тяжкості, але вони не повинні перевищувати можливостей здібних учнів.

Принцип зміни пріоритетів. Перевага полягає в тому, що в період накопичення ідей, при розв'язанні складних завдань головне — правильна ідея розв'язання. Учневі варто вибачити незначні огріхи при розв'язанні задачі. Пріоритет відповіді полягає в тому, що при відпрацюванні вже відомих ідей, а також при розв'язанні найбільш простих задач головне — подати правильну відповідь.

Принцип варіативності. Згідно з цим принципом, дуже корисно розглянути різні прийоми і методи розв'язання на прикладі однієї задачі, а потім порівняти і проаналізувати отримані результати з різних кутів зору: стандартність і оригінальність, обсяг обчислювальної та пояснювальної роботи, естетична і практична цінність.

Принцип самоконтролю. Необхідним елементом самостійної роботи є регулярний і систематичний аналіз помилок (а не підгонка під відповідь).

Принцип швидкого повторення. У міру накопичення кількості розв'язаних задач, варто переглядати і аналізувати їх з метою накопичення певного досвіду: задача не складна, інша – важча, але пам'ятаю її розв'язання, а цю я не зміг зрозуміти і не пам'ятаю розібране на занятті розв'язання.

Принцип роботи з текстом. При роботі з навчальними посібниками, де є складні задачі, обмежені лише короткими вказівками, потрібно заповнювати логічні пробіли, виконувати проміжні обчислення, розглядати аналогічні приклади — це головне призначення таких завдань.

Принцип моделювання ситуацій. Корисно моделювати критичні ситуації, які можуть виникнути на олімпіаді, конкурсі, іспиті і т.д., і відпрацьовувати стереотипи поведінки.

Під час факультативних занять важливо не забувати вчителів систематично контролювати якість засвоєння матеріалу, шляхом розв'язування прикладів і задач. Також можна давати можливість учневі самостійно виправляти помилки, даючи лише коментар щодо його діяльності та оцінивши способи розв'язування вправ чи певної задачі. У в процесі такої діяльності можна досягти логічної точності у формулюванні учнем теорем, означень, властивостей математичних об'єктів тощо [33].

Факультативні заняття відіграють важливу ролі у вдосконаленні шкільної, зокрема математичної освіти. Такі заняття дають можливість здійснювати пошук та експериментальну перевірку нового змісту, нових методів навчання, вирівнювати об'єм складності матеріалу в широких межах.

1.2 Цілі, місце і вивчення функціональної лінії. Аналіз шкільної програми.

В сучасному житті, щоб досягти успіху в усіх сферах кожен має володіти базовими прийомами математичної діяльності та певними навичками по застосуванню цих знань до розв'язування практичних задач. Важливо зазначити, що певної математичної підготовки і готовності застосовувати математичні знання вимагає вивчення багатьох інших загальношкільних предметів, таких як географія, фізика, хімія, біологія, інформатика, а також певною мірою історія та навіть фізкультура.

Значні вимоги до обізнаності в математиці висувають сучасний ринок праці, продовження отримання якісної освіти та звичайне повсякденне життя. Досягнення учнем практичної та прикладної компетентності є основною метою вивчення курсу математики.

Реалізація практичної компетентності в ході вивчення математики означає:

- 1) створення запасу математичних моделей, які допомагають унаочнити реальні явища і процеси, несуть загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;
- 2) навчання здобувачів освіти побудови та дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ та процесів;

3) формування в здобувачів освіти конкретних знань та вмінь, які знадобляться під час дослідження цих математичних моделей;

Одне з найважливіших місць у вивченні математики займає взаємозв'язок між математикою та інформатикою. Саме широке застосування комп'ютерів у навчанні математики доцільне для проведення математичних експериментів, практичних занять, візуального інтерпретування математичної діяльності та проведення досліджень.

Особливої уваги під час вивчення курсу математики заслуговує функціональна лінія. Саме вивчення цього розділу дуже тісно переплітається із застосуванням комп'ютерних технологій, широко використовується в інших шкільних предметах та часто зустрічається в повсякденних питаннях [19, с. 8-9].

В курсі “Математика” старшої школи однією з головних змістових ліній є функціональна лінія. Тому вивчення курсу доцільно розпочинати з фундаментальної теми “Функції, їхні властивості та графіки”. Під час вивчення цієї теми здійснюється повторення, систематизація матеріалу щодо функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення.

Головною метою повторенню вивченого матеріалу в середній школі є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, показникових, логарифмічних), а також мотивація важливості розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної та інтеграла.

Передумовою до вивчення теми має бути розв'язування прикладних задач, моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності сучасної людини, то до головних завдань вивчення теми слід віднести розвиток графічної культури учнів. Йдеться передусім про читання графіків, тобто про встановлення властивостей функцій за її графіком.

У наступних темах розширюються класи функцій, які вивчалися в основній школі. У темах “Тригонометричні функції” і “Показникова та логарифмічна функції” уміння досліджувати функції, які сформовані в першій темі, закріплюються і застосовуються до моделювання закономірностей коливального

руху, процесів зростання та вимірювання. В уявленні учнів характер фізичного процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями [19].

Важливим завершенням функціональної лінії курсу “Математика” є розгляд поняття похідної та інтеграла, які є необхідним інструментом дослідження руху [42].

Класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи їх розв’язування, сфери застосування розширюються у старшій школі, оскільки їх вивчення пов’язується з вивченням властивостей відповідних функцій.

У школі, як і математиці взагалі, основна увага приділяється числовим функціям. Це пов’язано з тим, що є тісний зв’язок математики з природничими науками, зокрема з хімією та фізикою, для яких апарат функцій служить засобом кількісного опису властивостей та явищ їх взаємозв’язків.

Аналіз та структура шкільної програми. Навчальну програму запропоновано в таблиці, що складається з двох колонок: зміст навчального матеріалу та навчальні досягнення учнів. Програма надає вчителю широкі можливості для використання різних засобів, форм, методів навчання, вибору методичних шляхів і прийомів викладання конкретного матеріалу [40].

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності, сутнісний опис якої подано у розділі «Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності» цієї програми. Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти [40].

Поступове знайомство учнів з функціональною лінією починається ще в 5-6 класах. Саме в цей період учні отримують початкові відомості про метод

координат: вчаться зображувати числа на координатній прямій, знайомляться з поняттям прямокутна система координат на площині, виконують відповідні побудови, будують і аналізують окремі графіки залежностей між величинами.

Істотне місце функціональна тематика займає у 7 класі в курсі алгебри. Саме в 7 класі вводиться до розгляду одне з фундаментальних математичних понять — поняття функції. В цьому класі вивчається лінійна функція та її графік. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв’язування лінійного рівняння з однією змінною та систем двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Інші види функцій розглядаються у зв’язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема у 8 класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ та їх властивостями. У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов’язується, зокрема, з розв’язуванням квадратних нерівностей [41].

Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається в тісному зв’язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру опанування учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу [41].

Курс алгебри і початків аналізу старшої школи розпочинається саме з вивчення теми “Функції, їхні графіки та властивості”. На вивчення цієї теми відводиться 15 годин. За цей час учень/учениця має навчитися:

користуватися різними способами задання функцій;

знаходити область визначення функціональних залежностей; значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення;

встановлювати за графіком функції її основні властивості;

встановлювати властивості функцій;

обчислювати та порівнювати значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені;

розпізнавати та схематично зображувати графіки степеневих функцій;

моделювати реальні процеси за допомогою степеневих функцій [42].

Наступним етапом у вивченні курсу алгебри старшої школи є розгляд теми “Тригонометричні функції”. На вивчення цього розділу відводять 18 годин, але основна частина часу припадає саме на ознайомлення з тригонометричними функціями числового аргументу, а саме повторення та детальне вивчення синуса, косинуса, тангенса кута і основні формули [42].

Лише невелика частина часу відводиться на роботу саме з графіками тригонометричних функцій та розгляду їх властивостей, використовуючи координатну площину. В ході вивчення цієї теми учень/учениця мають навчитися розпізнавати та схематично будувати графіки тригонометричних функцій; ілюструвати властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків, застосовувати тригонометричні функції до опису реальних процесів.

Значно більше часу приділяється вивченню теми «Похідна та її застосування» – 14 годин. Слід зазначити, що саме ця тема є базою для зв'язку алгебри з іншими шкільними предметами. Розглядаючи цю тему, учні знайомляться з поняттями похідна функції, її геометричний і фізичний зміст, правилами диференціювання, ознаками сталості функції, достатніми умовами зростання й спадання функції, екстремуми функції. Застосовують похідну до дослідження функцій та побудови їхніх графіків, знаходять найбільше і найменше значення функції на проміжку з її допомогою.

На кінець вивчення теми учень/учениця:

розуміє значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху;

знаходить швидкість зміни величини в точці; кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці;

диференціює функції, використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання;

застосовує похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції, побудови графіків;

знаходить найбільше і найменше значення функції;

розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин [19].

В 11 класі курс Алгебра і початки аналізу розпочинаються з теми “Показникова та логарифмічна функції”, на вивчення якої виділяють 16 годин.

Це єдина тема функціональної лінії в 11 класі, але опанувавши її учні мають вміти:

розпізнавати і будувати графіки показникової і логарифмічної функцій;

ілюструвати властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків;

застосовувати показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів;

розв'язувати найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності [19].

Саме такий набір базових знань отримує учень в ході вивчення курсу алгебри з 5 по 11 клас, навчаючись за рівнем стандарту. В свою чергу факультативні курси ще більше розширюють та поглиблюють отриманні на уроках навички та спрямовують ці знання до розв'язування складніших та олімпіадних задач.

1.3. Підходи до вивчення поняття «функція» Функціональна пропедевтика.

Функції в курсі алгебри основної школи.

Проблема логічної цілісності шкільного курсу математики має вікову історію. До кінця 19 століття склалася міжнародна традиційна система математичної освіти, яка характеризувалася відірваністю від вищої математики та взагалі науки математики, поділом елементарної математики на 4 навчальні предмети: арифметику, алгебру, геометрію, тригонометрію, що існують самостійно та незалежно один від одного. У багатьох країнах світу прогресивні математики та педагоги виступали з критикою даної системи навчання та з позитивними пропозиціями щодо реформи математичної освіти [1].

У 1897 році в Цюриху на I Міжнародному конгресі математиків виступив з доповіддю відомий геометр, педагог вищої німецької школи Фелікс Клейн, в якого містилася думка про те, що в математиці середньої школи «функціональна ідея» має бути центральною: «Керівну роль у шкільному курсі математики повинно грати поняття функції. Воно має бути засвоєне дуже рано і має пронизувати все викладання алгебри та геометрії»

Поняття функції формуються в учнів при:

- запровадженні функціональної пропедевтики;
- елементарному дослідженню окремих функцій;
- дослідженні функцій за допомогою похідної [25].

У дидактиці під пропедевтикою розуміють підготовчий курс, який представляє запровадження в будь-яку науку чи навчальний предмет і відрізняється елементарною формою викладу [25].

Очевидно, що однією головною умовою пропедевтичної роботи є ідейна стрункість шкільного курсу математики, наявність логічного зв'язку між елементарною та вищою математикою.

Поняття функції належить до фундаментальних, провідних понять математики, тому ідея функціональної залежності проходить через весь шкільний курс математики. До того ж сформованість цього поняття в учнів є важливим завданням у цілеспрямованій діяльності вчителя з розвитку

математичного мислення та творчої активності дітей. Розвиток функціонального мислення передбачає насамперед розвиток здатності до виявлення нових зв'язків, опановування загальними навчальними прийомами та вміннями [68].

Поняття функції учнями сприймається важко; очевидно, дається взнаки звичка як у математиці, і на початку алгебри розглядати лише постійні величини (за умови цього завдання).

Проблемами функціональної пропедевтики у різний час займалися М.В.Богданович, Г.П.Лищенко, О.В.Кужель, Т.Й.Мельничук, Н.П.Самарська, М.О.Бантова та ін [7, 35].

Функціональна пропедевтика допомагає полегшити перехід до вивчення змінних величин. Опосередкована пропедевтика передбачає поступову функціональну підготовку, яка потребує ні спеціальної термінології, ні символіки; досить послідовно проводити ідею змінності навколишнього світу; давати учням вправи, які формують поняття змінної величини, взаємозв'язок між величинами, використовуючи цієї мети матеріал шкільних підручників. Об'єктивні можливості для пропедевтики є, вчитель повинен їх бачити та використовувати у навчанні школярів.

У курсі математики початкових класів значна роль відводиться функціональній пропедевтиці, яке передбачає як підготовку учнів до вивчення систематичного курсу математики, і зокрема однієї з основних понять сучасної науки – поняття функції. Напрями такої роботи виражаються у характері завдань, запропонованих учням. Матеріал початкового математичного курсу містить достатньо прикладів, у яких можна пояснити залежність однієї величини з іншого [7].

Основними цілями вивчення функціональної залежності у початковій школі є:

- розвиток функціонально-аналітичного мислення школярів, що характеризується здатністю розглядати об'єкти, у тому числі й математичні, у взаємозв'язку та взаємозалежності;

- формування в учнів здатності до вираження залежності між величинами різними способами (таблично, аналітично, графічно).

Крім цього, результатом пропедевтики функціональної залежності має стати висока розумова активність молодших школярів, розвиток розумових операцій зокрема, таких як аналіз та синтез, загальнопредметних та специфічних математичних умінь та навичок [25].

Проаналізувавши можливості застосування усіх способів визначення функціональної залежності між величинами, можна визначити орієнтовну програму здійснення функціональної пропедевтики у початковому курсі математики. Ця програма у дослідженні М.Богдановича, Г.Лищенко та О.Хіман набуває такого змісту, де виділяють чотири **вузлові питання**, які розкривають з метою забезпечення функціональної пропедевтики у початковій школі [7]:

1. Незалежні та залежні величини. Уявлення про характер змін величин: зростання і спадання величин, рівномірне зростання і спадання величин.
2. Використання вправ і задач для постановки запитань про лінійну залежність величин. Зміна результатів дій першого ступеня залежно від зміни одного з компонентів дії. Спеціальні вправи на формування уявлень про лінійну залежність.
3. Використання вправ і задач для постановки запитань про прямо і обернено пропорційну залежність величин. Зміна результатів дій другого ступеня залежно від зміни одного з компонентів дії. Спеціальні вправи на формування уявлень про пропорційну залежність.
4. Приклади на лінійну і непропорційну залежність величин.

У початкових класах учні ознайомлюються з вимірюванням деяких величин (довжина, площа, маса, час), встановлюють зв'язки між величинами під час розв'язування текстових задач [7, с. 154]: ціна, кількість і вартість; маса одного предмета, кількість предметів і загальна маса; швидкість, шлях і час при рівномірному русі тіла тощо. Учні також спостерігають, як змінюється результат арифметичної дії залежно від зміни компонентів.

Все це створює міцну основу не тільки для розв'язання методичних проблем початкової математики – формування обчислювальних навичок, уміння вирішувати текстові задачі та інше, але й для реалізації можливостей математичного змісту, що розвивають, і, що не менш важливо, для успішного вивчення функцій у середній школі.

Функціональна пропедевтика у початкових класах має на меті формування у дітей уявлень про зміну, відповідність, закономірність та залежність на матеріалі вивчення змісту, передбачених програм курсу математики у початкових класах.

Активне включення понять змінної, відповідності, правила та залежності у процес навчання молодших школярів математики впливає на розвиток їх мислення, у тому числі й функціонального.

Таким чином, у початковому курсі математики значна роль має відводитися функціональній пропедевтиці, яка передбачає підготовку учнів до вивчення систематичних курсів алгебри та геометрії, а також формує розуміння причинних зв'язків між явищами навколишньої дійсності.

Поняття функції розтлумачено в різних математичних словниках, підручниках, посібниках; широко описана методика вивчення цього поняття в старших класах школи. Сучасне означення функції подається через відношення між множинами X та Y , за якого кожному елементу x множини X відповідає не більше одного елемента у множини Y . З цього означення випливає, що у символічному записі $y = f(x)$ функцією названо не змінну $f(x)$, а відношення f [1].

Однак у плані функціональної пропедевтики функцію будемо тлумачити у вужчому розумінні – як *зв'язок між змінними величинами*.

У 5 класі в темі «Додавання і віднімання натуральних чисел» учні ознайомлюються з величинами, залежностями між величинами, прямою та оберненою пропорційностями. А також із складанням та обчисленням числових виразів, буквені вирази та їх числові значення, складання таблиць значень виразів.

У 6 класі у темі "Числа і дії над ними" вивчають графічні ілюстрації відсоткового відношення. У темі "Відношення і пропорції" вводиться поняття прямої і оберненої пропорційної залежності. У цьому ж класі учні знайомляться з прямокутною системою координат, координатами точки, абсцисами, з координатними площинами з координатним чвертями.

В 6 класі основну увагу треба звернути на те, щоб учні вільно могли розв'язувати дві задачі: вказувати координати заданої на координатній площині точки і за даними координатами будувати точки. Треба виробити в учнів культуру зображення координатних прямих і на класній дошці, і в зошиті, і на міліметрованому папері. Наступний етап – ознайомлення учнів з стовпчастими діаграмами і графіками. Після цього розглядають ще графіки руху, вартості. Отже, в 6-му класі учням ще нічого не говорять про функцію, навіть цього терміна не вводять. Але підготовча робота проводиться [25].

Уже в 7-му класі термін "функція" вживається для назви двох понять:

1. Залежності між змінними.
2. Залежної змінної.

Далі пояснюють учням, як задавати функцію за допомогою формули і графіка.

Вводити поняття функції доцільно процесі розв'язування задач. Наприклад:

1. Купують олівці ціною по 30 копійок за штуку. Записати залежність між кількістю олівців x та їх загальною вартістю y .
2. Записати залежність між довжиною ребра куба x і його об'ємом y .
3. Автомобіль рухається рівномірно на прямолінійній ділянці довжиною 1300 метрів. Записати залежність між швидкістю автомобіля v м/с і часом t с, затраченим на проходження цієї ділянки [14].

Розв'язуючи ці задачі, учні дістають різні функціональні залежності: $y = 30x$; $y = x^3$;

Учитель підкреслює, що за формулами, які дістали, для кожного значення x можна знайти відповідне значення y , після чого учні виконують обчислення для кількох значень x .

Наголошується, що x і y – змінні, вводяться поняття незалежної і залежної змінних. Головне – домогтися усвідомлення учнями того, що про функцію можна говорити лише тоді, коли кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної.

Значну увагу треба приділити засвоєною учнями термінології, пов'язаної з поняттям функції: x – незалежна змінна, або аргумент, y – залежна змінна; y є функцією від x ; x – значення функції [14].

У результаті вивчення графіків функцій потрібно домагатись, щоб учні вміли пояснити, що таке графік функції, та уміли за допомогою графіків функцій розв'язувати такі два типи задач:

- 1) для кожного значення аргументу знайти відповідне значення функції;
- 2) за даними значеннями функцій знаходити значення аргументу, яким воно відповідає.

Уміння читати графіки функцій виробляються в учнів у результаті виконання таких вправ:

- 1) Формула \rightarrow таблиця \rightarrow графік
- 2) Графік \rightarrow таблиця \rightarrow формула

Запис функції у формі $y = f(x)$ і задання області визначення у вигляді числових проміжків вперше вводиться тільки в кінці 8-го класу. Найпростіші елементарні функції вивчаються в такій послідовності: $y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ (8-й клас). Графік кожної з цих функцій спочатку будують за точками. В 10 класі вивчаються тригонометрична, показникова і логарифмічна функція [54].

Навчальний матеріал, що стосується побудови графіків і вивчення властивостей окремих видів квадратичної функції і загального її вигляду, дає змогу в класах з поглибленим вивченням математики або на заняттях математичного гуртка розглянути задачі на побудову графіків складніших

функцій шляхом геометричного перетворення графіків уже відомих функцій. При цьому доцільно звести в систему основні сім перетворень, які дають змогу урізноманітнити систему вправ на побудову графіків функцій [57].

В старших класах з поняттям функції пов'язана система функціональних понять, що використовуються для вивчення (дослідження) різних властивостей функцій. Загалом прикладна схема дослідження функцій (вивчення її властивостей) передбачає вирішення наступних завдань:

- 1) виявлення у явному вигляді області визначення та області значень функції, які, як правило, задані неявно тим чи іншим способом – задання функції;
- 2) побудова, якщо необхідно, графіка функції (чи ін. наочного виду);
- 3) дослідження функції на парність – непарність (порівнянням $f(-x)$ з $f(x)$);
- 4) дослідження функції на періодичність (порівнянням $f(x)$ з $f(x + l)$);
- 5) відшукування нулів (коренів) функції (розв'язанням рівняння $f(x) = 0$);
- 6) відшукування проміжків знаковості функції (вирішенням нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$);
- 7) дослідження функції на диференційованість (відшукування похідної $f'(x)$, якщо вона існує);
- 8) дослідження функції на монотонність (визначенням знаку різниці $f(x_2) - f(x_1)$ при $x_2 > x_1$ ($x_2 - x_1 > 0$));
- 9) дослідження функції на екстремуми (за допомогою похідної) та обмеженість (доказом нерівностей $|f(x)| > M$ та $|f(x)|^3 < m$);
- 10) дослідження функції на безперервність на основі визначення та властивостей безперервних функцій;
- 11) дослідження функції на інтегрованість (віднайдення первісної, якщо вона існує);
- 12) встановлення існування зворотної функції $x = f(y)$.

Починаючи з 9-го класу розглядаються два основних методи дослідження властивостей функцій:

- 1) елементарними засобами – а) за допомогою графіка чи іншого графічного чи наочного способу завдання; б) за допомогою аналітичної формули на основі означення);
- 2) засобами диференціального обчислення – за допомогою похідної на основі зв'язку її властивостей з деякими властивостями функції, виражених відповідними теоремами.

Завершення вивчення функціональної лінії відбувається в 11 класі темою “Показникова та логарифмічна функція” [42].

1.4. Аналіз програм факультативних курсів з математики.(в яких реалізується функціональна лінія) для учнів 5-9 класів

Факультатив – один із основних способів організації різноманітності та диференціації навчання. Факультативні заняття, насамперед, розраховані на тих здобувачів освіти, які вже мають достатню підготовку з математики та хочуть розширити свої знання, або ж навпаки - не отримують високих оцінок, але мають хороший потенціал і прагнуть його розвивати. Також факультативні курси не тільки розширюють знання учнів, а й допомагають визначитися щодо вибору майбутньої професії.

Вибір факультативу здійснюється учнями вільно, відповідно до їх інтересів, бажань та потреб. Проте, вимоги до здобувачів освіти в процесі роботи факультативу, залишаються такими ж, як і на звичайних уроках: обов'язкове відвідування занять, дисциплінованість, виконання домашніх завдань. В свою чергу, система оцінювання є досить гнучкою, адже факультативи спрямовані саме на заохочення учнів відвідувати заняття, а не відштовхувати їх від роботи, залякуючи поганими оцінками.

На факультативних курсах навчальні заняття можуть поєднувати в собі як використання традиційних, так і запровадження іноваційних форм, прийомів, методів та засобів навчання. Головне, забезпечувати стійкий інтерес учнів до навчання.

Зміст програми факультативних курсів тісно пов'язаний зі змістом основної навчальної програми і водночас має самостійний характер. Тобто, база для вивчення окремих тем факультативного курсу створюється в умовах обов'язкового шкільного курсу.

Розглянемо детальніше декілька навчальних програм факультативних занять, у яких реалізується функціональна лінія.

Факультативні курси для 5-9 класів.

1. Факультативний курс “Математичні смарагди” запропонований для учнів 5-6 класів. Автор курсу: Домбровська Лариса Степанівна, вчитель математики загальноосвітнього пансіону I-III ступенів м. Шепетівка [17].

Даний курс розрахований на 70 годин - по 35 годин в 5-му та 6-му класах; тижневе навантаження - 1 година.

В програмі факультативу “Математичні смарагди” тема функцій розглядається в 6-му класі. На її опрацювання авторка відводить 5 годин, в розподілі навчального часу цю тему називає “Точки на координатній площині”.

Під час вивчення теми на факультативних заняттях розглядаються питання можливостей координатної площини, техніка зашифрованого листування, методика гри в морський бій та проходження лабіринтів.

Такі заняття сприяють тому, що учень/учениця набуває досконалих вмій побудови точок за координатами, вміє визначати координати заданої точки на координатній площині. На факультативних заняттях здобувач освіти за координатами відповідних точок оволодіває технікою побудови рисунків на координатній площині; використовує знання про координати точок під час проходження лабіринтів та гри в морський бій, а також розуміє принципи шифрування в зашифрованому листі.

2. Факультативний курс “Вибрані питання алгебри” запропонований для учнів 7 класу. Розробниками факультативу є Гартфіль Олександра Романівна та Показій Антоніна Петрівна - вчителі математики Макарівського НВК “Загальноосвітня школа I-III ступенів - природничо-математичний ліцей” [17].

Вивчення курсу факультативу розраховано на 35 годин, з навантаженням - 1 година на тиждень. На розгляд теми “Функції” на цих заняттях відводиться - 8 годин.

Під час вивчення розділу розглядаються умови паралельності та перпендикулярності графіків лінійної функції, побудова графіків кусково-заданих функцій, монотонність лінійної функції та графіки функцій виду $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$. Важливим питанням в темі “Функції” цього факультативного курсу також є графічний метод розв’язування задач з параметрами, що безпосередньо пов’язані з кількістю розв’язків рівняння.

Як результат, успішного засвоєння факультативного вивчення теми учень/учениця має вміти наводити приклади лінійних функцій, графіки яких є паралельними, перпендикулярними; розуміти та формулювати означення понять “зростаюча функція” та “спадна функція”. В ході вивчення розділу учні повинні засвоїти побудову графіків кусково-заданих функцій, а також вміти описувати, читати та виконувати побудову графіків функцій виду $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$. Розв’язувати вправи, на знаходження області визначення функції, знаходження значення функції за заданими значеннями аргументу, знаходження значення аргументу за відомими значеннями функції, а також з’ясування окремих характеристик функцій за її графіком (додатні/від’ємні значення, нулі) - це основні навички, які має здобути школяр на факультативних заняттях курсу “Вибрані питання алгебри”.

За словами авторів, особливостями організації навчання курсу має полягати в розв’язанні однієї задачі кількома способами, вимозі від учнів знати не лише математичні факти, а й вміти їх обґрунтовувати. Навчання потрібно здійснювати на високому рівні складності, адже, тільки таке навчання спонукає дитину до творчості, як стверджують психологи.

3. Факультативний курс “Історія математики” для учнів 7-9 класів. Автор курсу: Бевз Валентина Григорівна, професор КНПУ ім. М. П. Драгоманова, доктор педагогічних наук [17].

Даний курс спрямований на всебічний розвиток особистості кожного учня, ознайомлення учнів з історією розвитку математики та її окремих розділів, розширення і поглиблення математичних знань та на формування загальнокультурної компетентності учнів.

Курс складається з трьох частин, або циклів. Передбачається, що кожен із них вивчатиметься протягом одного навчального року. Загалом він розрахований на 105 годин протягом 7-9 класів.

Розділ “Функції” розглядається в 7-му класі, як тільки учні знайомляться з цим поняттям. Саме в цей час доцільно познайомити здобувачів освіти з історією цієї теми. В курсі факультативу функціональна лінія реалізується під назвою “Творці системи координат і функції” та вивчається протягом 6 годин. Цей час розбивається порівну на вивчення історії системи координат, історії розвитку поняття функції та на розв’язування історичних задач.

У 8-му та 9-му класах тема “Функції” на факультативі “Історія математики” не розглядається.

4. Факультативний курс “За лаштунками шкільної математики” для учнів 7-9 класів [32]. Розробниками курсу є: Бевз Валентина Григорівна (професор КНПУ ім. М. П. Драгоманова, доктор педагогічних наук), Бурда Михайло Іванович (головний вчений секретар НАПН України, доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України) та Прокопенко Наталя Сергіївна (головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України).

Зміст програми даного курсу тісно пов’язаний зі змістом основного навчального матеріалу шкільного курсу математики. Тобто, база для вивчення певних тем факультативу безпосередньо ґрунтується в умовах обов’язкового шкільного курсу.

Факультативний курс складається з 3-х частин. Передбачається, що кожна з них буде вивчатися протягом одного навчального року. Загалом на вивчення відводиться 105 годин протягом навчання у 7-9 класах, з розрахунку 1 година на тиждень.

Функціональна лінія у факультативному курсі “За лаштунками шкільної математики” розглядається в 9-му класі. На її вивчення відводиться 10 годин.

На вивчення кожної теми в розділі “Функції” виділяють по 2 години, проте кожен вчитель сам може визначати та змінювати розподіл годин та послідовність викладення тем. Безпосередньо, розробники програми факультативу рекомендують розпочати розгляд розділу із засвоєння окремих видів функцій, таких як: цілочислові функції (функція Антьє, функція Ейлера, кількість дільників і сума дільників числа), кусково-задані функції та нечислові функції.

Другу тему пов’язують з графіками функції та графіками рівняння. Тут учні вчать будувати графіки функцій, що містять знак модуля та графіки рівнянь з модулями.

В третій та четвертій темі розглядають графічне розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем, а також раціональні нерівності зі змінною та метод інтервалів.

На останньому етапі вивчення теми “Функції” учні практикують графічне розв’язування рівнянь та систем рівнянь, що містять параметри.

Слід звернути увагу, що в ході вивчення кожної теми, розглядаються не лише основні та додаткові відомості з базового курсу шкільної математики, а доцільно також приділяти значну увагу розв’язуванню олімпіадних задач.

5. Факультативний курс “Модуль числа” для учнів 8-11 класів.

Автор: Апостолова Галина Вадимівна, професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів, кандидат фізико-математичних наук, доцент [17].

Зміст програми факультативу пов’язаний зі змістом основного програмного курсу математики. Проте, базові підручники містять дуже мало завдань та інформації з теми “Модуль числа” і навіть в класах з поглибленим вивченням цієї теми також приділяється недостатньо уваги, окрім 6-го класу, тоді, коли це поняття лише вводиться для учнів.

Завдання цього курсу полягає в тому, щоб сформувати відповідні типи мислення через дидактику завдань на модуль шляхом опрацювання з учнями

задач на поняття модуля числа від найпростіших до завдань рівня вступних іспитів до технічних вищих навчальних закладів (ЗНО) та олімпіад з математики. Адже, слід звернути увагу на те, що завдання з модулем зустрічаються у більшості алгебраїчних тем, особливо в темі “Функції” при аналізі та побудові графіків функцій.

Вивчення факультативного курсу “Модуль числа” розраховане на 4 навчальні роки, з розрахунку - 1 година на тиждень протягом одного півріччя кожного з відповідних навчальних років, разом - 68 навчальних годин. Розподіл годин є умовний і може змінюватися вчителем, залежно від потреб та можливостей кожної групи учнів.

Функціональна лінія на факультативі розглядається в 9 класі. На її вивчення орієнтовно виділяють 5 годин. За цей час учні працюють над перетвореннями графіків функцій, а саме систематизують та узагальнюють навчальні досягнення з теми “Перетворення графіків функцій” - 2 години, будують графіки функцій виду $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ і ГМТ алгебраїчних виразів $|y| = f(x)$, їх переміщення вздовж координатних осей - 3 години. Весь інший час на факультативі в 9-му класі відводиться на побудову ГМТ алгебраїчних рівнянь та нерівностей певних типів та їх переміщення вздовж координатних осей.

Слід зазначити, що програма цього факультативного курсу містить орієнтовне календарно-тематичне планування, в якому вже вказані рекомендовані матеріали та завдання за посібником, що значно полегшує роботу вчителя.

6. Факультативний курс за вибором “Задачі економічного змісту в курсі алгебри” для учнів 8-9 класів. Автори: Яценко Світлана Євгенівна (доцент кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук) та Ткач Юлія Миколаївна (методист Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти імені К. Д. Ушинського) [17].

Значною перевагою цього факультативного курсу є те, що він допомагає вчителю створити всі умови для розвитку особистості учня, сприяє

забезпеченню його освітньої та особистісної самореалізації як в повсякденному житті, так і в майбутній професійній діяльності. Крім того, курс заохочує учнів не лише вивчати базові предмети, а залучає до власної дослідницької, творчої діяльності з вивченням різноманітних моделей реальних процесів та об'єктів. Цей курс має не просто прикладне спрямування, а й економічне. Його метою є допрофільна професійна орієнтація учнів, що спрямована на вибір профільного навчання у старшій школі.

Курс за вибором розрахований для вивчення у 8-9 класах протягом 34 годин, тобто з тижневим навантаженням 0,5 годин, проте його основна мета розширити та поглибити ключові питання курсу алгебри, які розглядаються в 7-9 класах.

Під час вивчення курсу учні знайомляться з аналітичним представленням функцій попиту, пропозиції та їх графіками. В основі факультативу лежить саме функціональна лінія.

В ході навчання учні графічно або аналітично визначатимуть точку рівноваги, зміни ринкової кон'юнктури шляхом переміщення графіків функції попиту та пропозицій вздовж осей координат. Важливе місце в цьому курсі займає вивчення властивостей функцій доходу та витрат. Це питання передбачає побудову та перетворення графіків функцій, складання і розв'язування систем двох рівнянь з двома невідомими.

Щодо змісту навчального матеріалу, то він орієнтовно розділений на 5 тем в 8-му класі і 4 теми в 9-му класі, з них в загальній кількості 6 тем тісно пов'язані з темою “Функції”. Огляд змісту навчального матеріалу та вимог до навчальних досягнень учнів в ході реалізації функціональної лінії на факультативі, наведено в таблиці.

Таблиця 1.1.

<p>Тема 1. Функція $y = kx + b$. Лінійні функції попиту, пропозиції. Економічний зміст області визначення та множини значень відповідних функцій. Прості відсотки.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • визначає величину попиту за ціною й навпаки; величину пропозиції за ціною й навпаки; • розв'язує вправи, що передбачають вміння виражати одні величини рівняння
---	--

	<p>попиту, пропозиції, простих відсотків через інші;</p> <ul style="list-style-type: none"> • обґрунтовує економічний зміст співвідношень, отриманих при вираженні однієї величини рівняння попиту, пропозиції, простих відсотків через інші; • наводить приклади з життя щодо застосування отриманих знань та вмінь на практиці.
<p>Тема 3. Системи лінійних рівнянь Знаходження ринкової рівноваги. Складання рівняння попиту, пропозиції за заданими даними.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • знаходить точку рівноваги при зміні параметрів; • аналізує переміщення кривих попиту та пропозиції вздовж осей координат; • визначає середні величини ціни, доходу, прибутку.
<p>Тема 4. Функція $y = \frac{k}{x}$. Криві попиту та пропозиції. Визначення попиту за заданою ціною та навпаки. Поняття про обернену функцію та її економічний зміст. Переміщення кривих попиту та пропозиції вздовж осей координат. Економічний зміст таких перетворень. Динаміка ринкової рівноваги.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • визначає ринкову рівновагу за умови, що попит задано у вигляді $y = \frac{k}{x}$ • розв'язує вправи, що передбачають переміщення кривих попиту та пропозиції вздовж осей координат; • пояснює економічний зміст переміщення кривих попиту та пропозиції вздовж осей координат; • визначає динаміку ринкової рівноваги; • описує економічний зміст оберненої функції
<p>Тема 5. Функція $y = \sqrt{x}$, квадратні рівняння Задачі економічного змісту, де функція попиту (пропозиції) має вигляд $y = \sqrt{x}$. Прості відсотки. Розв'язування задач економічного змісту за допомогою квадратних рівнянь.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • розв'язує задачі економічного змісту; • знаходить розв'язки рівняння $S = S_0 \left(l + \frac{3}{100} \right)^2$; • пояснює економічний зміст цього рівняння
<p>Тема 1. Нерівності Нерівності як математичні моделі задач реальної економіки. Графічний метод розв'язування нерівностей.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • пояснює поняття математичної моделі; • визначає етапи розв'язування задачі всередині побудованої моделі; • розв'язує задачі економічного змісту, що передбачають зображення на числовій прямій: - числових проміжків, заданих нерівностями (виконує обернене завдання); - перерізу, об'єднання числових множин; • записує розв'язки нерівностей; • інтерпретує одержаний результат мовою вихідної задачі;

	<ul style="list-style-type: none"> • розв'язує задачі економічного змісту за допомогою лінійних нерівностей з однією змінною; систем двох лінійних нерівностей з однією змінною.
<p>Тема 2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$.</p> <p>Функції попиту, пропозиції, доходу, витрат.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • обчислює значення функцій попиту, пропозиції, доходу та витрат в точці; • описує перетворення графіків функцій попиту, пропозиції, доходу, витрат; • обґрунтовує економічний зміст перетворень графіків функцій попиту, пропозиції, доходу, витрат; • характеризує функції попиту, пропозиції, доходу, витрат за їх графіками; • розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіків функцій попиту, пропозиції, доходу, витрат, перетворення цих графіків; використання графіків функцій попиту, пропозиції, доходу, витрат для розв'язування квадратних нерівностей; знаходження розв'язків систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними; складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей задач економічного змісту

7. Факультативний курс за вибором “Графічні образи алгебраїчних рівнянь і нерівностей” розроблений для учнів 9 класів. Автор курсу: Єрґіна Оксана Володимирівна, старший викладач кафедри методики природничо-математичної освіти і технологій ІППО КУ імені Бориса Грінченка [17].

Функція та її графік є ключем до розв'язування широкого класу прикладних задач з різних галузей. Саме тому основною метою курсу є систематизація та узагальнення знань учнів про елементарні функції, їх властивості, способи побудови графіків функцій, рівнянь і нерівностей залежно від їх виду.

Вивчення цього факультативного курсу сприятиме засвоєнню учнями поняття області визначення, парності і непарності функції, перетворення симетрії, геометричного місця точок площини, одержати початкові відомості про

асимптоти графіка функції, закріплення навичок графічного способу розв'язування рівнянь і нерівностей.

Зміст цього курсу включає вивчення основних побудов графіків та ГМТ для набуття тих графічних компетенцій, що необхідні для успішного навчання у старшій школі і подальшого вступу до ВНЗ. Авторка рекомендує розпочинати вивчення курсу одразу після розгляду квадратичної функції, її графіка та властивостей. Загальна тривалість факультативних занять - 17 навчальних годин, причому запропоноване погодинне планування можна коригувати вчителю самостійно, залежно від здібностей та інтересів учнів групи.

Відповідно до програми зміст навчального матеріалу представлено у вигляді 9 тем, причому в кожній з них реалізується функціональна лінія.

Тема 1. Перетворення графіків функцій. В цій темі розглядаються елементарні функції, їх властивості і графіки, а також найпростіші перетворення графіків функцій. Як результат, учень/учениця має навчитися розпізнавати вивчені раніше елементарні функції, вміти будувати їх графіки та розумітися на елементарних перетвореннях таких графіків.

Тема 2. Графіки функцій вигляду $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$. Під час вивчення цієї теми здобувачі освіти повинні знати перетворення симетрії, розуміти поняття парності функції, орієнтуватися в алгоритмі виконання перетворень $f(|x|)$ та $|f(x)|$.

Тема 3. Графіки функцій, заданих частинами. Опрацювання цієї теми дає змогу учням оволодіти технікою побудови графіків функцій, що задані частинами. Розглядається розкриття модуля на інтервалах та побудова графіків функцій, що містять знак модуля, для зображення яких необхідно розкривати модуль на інтервалах.

Тема 4. Графіки функцій, аналітичні вирази яких спрощуються. Вивчаючи цю тему курсу учні повинні знати, що таке область визначення функції, вміти розпізнавати функції, формули яких можна спростити, а також вміти знаходити область визначення функції та будувати графіки функцій, аналітичні вирази яких, спрощуються.

Тема 5. Дробово-лінійна функція та її графік. Зміст цієї теми полягає у вмінні учнями розпізнавати дробово-лінійну функцію, виділяти цілу частину раціонального дроби. Розуміти, що таке асимптоти та як знаходити асимптоти дробово-лінійної функції, а також вміти побудувати її графік.

Тема 6. Графік рівняння. Опрацьовуючи цю тему учні вчаться знаходити відмінність між графіками функцій і графіками рівняння, вміти розпізнавати рівняння, що не є функціями, а також навчитися будувати графіки рівнянь.

Тема 7. Геометричні образи рівнянь вигляду $|y| = f(x)$ і $|y| = |f(x)|$. В цій темі учні вивчають алгоритм побудови рівнянь зазначених видів та безпосередньо будують їх графіки..

Тема 8. Геометричні образи нерівностей і систем нерівностей. Розглядаючи цю тему на факультативних заняттях вчитель має навчити учнів розуміти поняття границі ГМТ, знати алгоритм побудови ГМТ нерівностей та систем нерівностей, уміти визначати частину координатної площини, що відповідає ГМТ нерівностей і їх систем, а також, безпосередньо, виконувати їх побудову.

Тема 9. Графічний метод розв'язування рівнянь і нерівностей. Це остання тема факультативного курсу, де учні засвоюють алгоритм розв'язування рівнянь і нерівностей графічно, вчаться з'ясувати кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значень параметра a .

Отже, перші теми курсу призначені для актуалізації знань, умінь і навичок, набутих учнями раніше. Це пов'язано з тим, що при вивченні цих тем в базовому шкільному курсі відводилося не завжди достатньо часу для набуття практичних навичок побудови та перетворення графіків функцій. Щодо тем 5-9, то тут вже значна увага приділяється аналізу та перетворенню виразів, знаходження області визначення заданих функцій і лише потім побудова їхніх графіків.

1.5. Реалізація функціональної лінії на факультативних заняттях з математики для учнів старшої школи

Факультативні курси для 10-11 класів.

1. Курс за вибором “Обернені тригонометричні функції” для учнів 10 класів математичного та фізико-математичного профілів. Курс рекомендований також для класів універсального профілю та в класах з поглибленим вивченням математики. Автор: Грицик Тетяна Андріївна, викладач математики ВНЗ “Надслучанський інститут” м. Березне Рівненської області [19].

Цей факультативний курс є продовженням вивчення прямих тригонометричних функцій і присвячений оберненим тригонометричним функціям. Заняття на цьому факультативі допоможуть поглибити міжпредметні зв'язки, сприятимуть узагальненню і систематизації знань здобувачів освіти з тригонометрії.

На прикладі аркфункцій в учнів формується важливе поняття оберненої функції, стають зрозумілими загальні властивості функцій, такі як парність і непарність, обмеженість, монотонність, неперервність тощо. Також, значна увага на заняттях приділяється “техніці” тотожних перетворень виразів з аркфункціями. З освітньої точки зору, вміння виконувати такі перетворення дуже важливе, оскільки вони необхідні для успішного розв'язування рівнянь, нерівностей з аркфункціями, спрощення складних виразів. В свою чергу, з виховної та розвивальної точки зору, факультативні заняття з цієї теми сприяють розвитку пам'яті, логічного мислення, виховання алгоритмічної культури, акуратності та чіткості в записах.

Основною метою факультативного курсу “Обернені тригонометричні функції” є розвиток творчого та нестандартного мислення учнів, реалізація їх математичних здібностей та задоволення пізнавальних інтересів.

Під час опрацювання курсу авторка радить застосовувати інформаційні, дискусійні та евристичні методи навчання, проводити заняття у різноманітних формах - лекції, комбіновані уроки, практичні заняття. А підсумкові уроки з кожної теми присвячувати розв'язанню більш творчих та олімпіадних задач. Весь курс рекомендовано супроводжувати комп'ютерною підтримкою, для кращої візуалізації та розуміння учнями.

Орієнтовний термін вивчення факультативного курсу - 16 годин, протягом останньої чверті навчального року, з розрахунку - 2 години на тиждень.

Навчальна програма курсу розподілена на 6 (7) тем, кожна з яких пов'язує тему "Функції". Тематика навчальної програми курсу наведена в таблиці.

Розподіл навчального часу

Таблиця 1.2.

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Обернені тригонометричні функції, їх графіки та властивості (повторення)	1
2	Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями	3
3	Рівняння з оберненими тригонометричними функціями	4
4	Системи рівнянь з оберненими тригонометричними функціями	2
5	Нерівності з оберненими тригонометричними функціями	3
6	Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій	3
7	Підсумкове заняття	(1)

Значною перевагою в розробці програми факультативного курсу "Обернені тригонометричні функції" є те, що авторка пропонує орієнтовне календарно-тематичне планування та рекомендує форму проведення кожного заняття, а також наводить систему задач для оцінювання навчальних досягнень учнів по засвоєнню матеріалу курсу.

2. Факультативний курс за вибором "Прикладні задачі на екстремум" для учнів 11 класі математичного, фізико-математичного профілів і класів з поглибленим вивченням математики. Автор курсу: Попова Лариса Костянтинівна, вчитель математики Одеського ліцею "Приморський" Одеської міської ради Одеської області [19].

Для вивчення проблем сучасності все частіше більшість наук об'єднуються, тому саме цим обумовлена актуальність міжпредметних зв'язків

у шкільному навчальному процесі, зокрема зв'язок математики з фізикою, хімією, інформатикою, економікою тощо.

Основна мета цього курсу - формування навичок застосування знань, набутих при вивченні шкільного курсу алгебри і початків аналізу, до розв'язування задач прикладного характеру; створення умов для оволодіння учнями методами розв'язування прикладних задач; розвиток дослідницьких здібностей учнів.

Вивчення цього курсу передбачає поглиблену підготовку учнів з математики, поєднання вивчення математики та фізики, математики та інформатики, використання нових інформаційних технологій, застосування методів математичного моделювання.

Програма факультативного курсу розрахована на 35 годин, тобто 1 година на тиждень. Зміст програми курсу представлений у вигляді таблиці за темами та орієнтованої кількості годин, що відводяться на їх вивчення.

В ході розгляду функціональної лінії на факультативних заняттях курсу “Прикладні задачі на екстремум”, учні мають оволодіти поняттями найбільшого і найменшого значень функції, формулювати необхідні та достатні умови екстремуму функції, вміти досліджувати функцію за допомогою похідної, формулювати властивості квадратичної функції та застосовувати її властивості для дослідження функції, застосовувати наслідки з нерівностей Коші, властивості тригонометричних функцій до розв'язування задач, вміти будувати функцію, яку потрібно дослідити, використовувати отримані знання до розв'язування задач планіметрії та стереометрії, будувати математичну модель задачі, досліджувати отриману функцію та аналізувати отриманий результат, використовувати отримані знання для розв'язування фізичних задач, застосовувати програмні засоби для отримання результату.

3. Факультативний курс за вибором “Застосування похідної до розв'язування задач” для учнів 11 класів математичного та інформаційно-технологічного профілів. Курс також рекомендується до використання в класах економічного та універсального профілів. Автор: Смішко Анастасія Станіславівна, вчитель

математики Хмельницького спеціалізованого ліцею-інтернату поглибленої підготовки в галузі науки [19].

Фундаментальним поняттям математичного аналізу є поняття похідної, оскільки за допомогою неї досліджують процеси і явища в природничих, економічних та соціальних науках. Саме тому, у класах з профільним вивченням математики слід приділяти особливу увагу темі “Похідна та її застосування”.

Метою даного факультативного курсу є систематизація та поглиблення знань учнів про похідну та її застосування до розв’язування задач різних типів.

Досвід роботи в класах з профільним вивченням математики свідчить про те, що поняття похідної функції потрібно формувати лише на основі границі функції в точці, причому саме поняття границі необхідно формулювати як строге логічне означення, а не підносити на наочно-інтуїтивному рівні.

В першій частині запропонованого курсу розкриваються питання труднощів у сприйманні учнями даного матеріалу, які спричинені різким переходом від скінченного до нескінченного, від дискретного до неперервного, що вимагають від учня високого рівня розвитку абстрактно-теоретичного мислення, які можна подолати, застосовуючи гнучку схему “послідовного введення в математичний аналіз”, що включає формування таких понять, як границя, похідна, неперервність.

Визначення застосування похідної до дослідження функцій і розв’язування задач практичного змісту розглядається в другій частині факультативного курсу.

В класах з профільним вивченням математики недостатньо зупинятися лише на розгляді застосування похідної до розв’язування задач з алгебри та геометрії. Рекомендовано розглядати використання похідної також в інших сферах людської діяльності, зокрема у економіці, фізиці, підприємстві, виробництві.

Спираючись на практичний досвід, перед введенням достатніх умов зростання і спадання функції, авторка пропонує вивести формулу Лагранжа і дати її геометричну інтерпретацію. Під час дослідження функції на максимум і мінімум принциповим є формулювання трьох тверджень, що виражають

необхідну умову (теорема Ферма) і достатні умови існування екстремуму в точці. Доведення цих теорем зазвичай не викликає в учнів труднощів.

Факультативні заняття курсу, на яких буде розглядатися застосування похідної до дослідження функції і побудови графіка, необхідно будувати так, щоб виховати в учнів графічну культуру, сформувати вміння бачити, читати і розуміти графіки для подальшого застосування цих знань під час розв'язування задач, а не просто навчити алгоритму дослідження.

Третя частина курсу присвячена розв'язанню класичних задач на застосування похідної, а також її нетрадиційне використання, наприклад, розв'язання рівнянь і нерівностей, дослідження функцій на періодичність, порівняння виразів, доведення тотожностей тощо.

Курс факультативу розрахований на 35 навчальних годин. Слід звернути увагу, що автором було також розроблено три збірники з розширеними конспектами занять на підтримку курсу, а також розроблені завдання для індивідуальних та контрольних робіт.

Після проходження всього факультативного курсу учні повинні навчитися:

- усвідомлювати поняття границі;
- знаходити границю числової послідовності;
- розв'язувати завдання на знаходження границі функції в точці;
- самостійно наводити приклади функцій, неперервних та розривних в деякій точці;
- пояснювати зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції;
- виявляти навички диференціювання алгебраїчних і трансцендентних функцій, знаходити похідну в точці;
- усвідомлювати зміст критичних і стаціонарних точок;
- уміти "читати" ескізи;
- виконувати побудови графіків (за необхідності з асимптотами);
- розв'язувати задачі практичного змісту (у тому числі з параметрами);
- розуміти суть методу інтервалів;
- знаходити наближення за допомогою похідної;

- розв'язувати задачі на знаходження дотичних і відстаней.

4. Факультативний курс за вибором “Обчислення в системах комп'ютерної алгебри” для учнів 11 класів інформаційно-технологічного, математичного, фізико-математичного профілів. Автор: Громко Людмила Володимирівна, вчитель математики Нечаївської загальноосвітньої школи I-III ступенів ім. Ю. І. Яновського Компаніївського району Кіровоградської області [19].

В сучасному світі дуже важливо вміти знаходити міжпредметні зв'язки та вміти застосовувати їх до розв'язування багатьох прикладних задач. Саме на цьому ґрунтується створення даного курсу, він спрямований на безпосередню реалізацію зв'язку між інформатикою та математикою.

Мета цього курсу полягає в розвитку інформаційної та технологічної культури учнів, поглиблення математичних знань і навичок, які стануть у нагоді для ефективного використання сучасних програмних засобів автоматизації обчислень у навчальній та подальшій професійній діяльності.

В ході вивчення курсу учні повинні набути таких знань:

- схема дослідження та основні види елементарних функцій;
- способи побудови графіків функцій;
- види розрахунків, які можна виконувати в системі.

Під час занять учні матимуть змогу навчитися перш за все керувати системою, що стане гарним поштовхом у подальшій роботі з функціями, адже цей курс ґрунтується на завданнях в яких реалізується функціональна лінія. Також по завершенню факультативного курсу здобувачі освіти зможуть вводити та редагувати математичні формули і функції, будувати прості графіки функцій однієї змінної, будувати графіки поверхонь - функцій двох змінних, досліджувати функції за допомогою комп'ютера та використовувати отримані знання у практичній діяльності.

Курс розрахований на 17 навчальних годин.

Основні теми, які розглядаються на курсі:

- Початкові відомості про роботу в середовищі комп'ютерної алгебри
- 1 година.

- Спрощення та алгебраїчні перетворення виразів - 2 години.
- Розв'язування рівнянь та систем рівнянь - 2 години.
- Побудова графіків у системі комп'ютерної алгебри - 2 години.
- Розв'язування нерівностей - 2 години.
- Обчислення похідних - 2 години.
- Обчислення інтегралів - 2 години.
- Границі та прогресії - 2 години.
- Дослідження функцій - 2 години.

Курс спрямований на поглиблення знань учнів з теми “Функції”, а також на покращення навичок роботи з комп'ютером та математичними програмними застосунками.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі роботи розглянуто теоретичні відомості, покладені в основу організації вивчення теми «Функції» на уроках та факультативних заняттях, а саме:

- поняття факультативних занять та методика їх проведення;
- цілі, місце і вивчення функціональної лінії;
- аналіз шкільної програми;
- функції в курсі алгебри основної школи;
- реалізація функціональної лінії на факультативних заняттях для учнів 5 – 11 класів.

РОЗДІЛ 2

Методика використання системи задач з теми «Функції та їх графіки» для формування умінь математичного моделювання.

2.1. Введення поняття функції, способів її задання і дослідження на факультативних заняттях з математики.

Відомий математик Хінчин О. Я. зазначав: «...основоположне поняття математичного аналізу – поняття функціональної залежності, в якому, як у зародку, вже закладена вся ідея оволодіння явищами природи і процесами техніки за допомогою математичного апарату»

Поняття функціональної залежності є одним з основних в курсі математики. У будь-якому явищі природи чи техніки можна вказати величини, які пов'язані одна з одною так, що в результаті зміни однієї з них змінюється й інша, тобто утворюється функціональна залежність. З всіма елементарними прикладами утворення функціональних залежностей учні знайомляться на звичайних уроках математики та алгебри, тому прийшовши на факультативні заняття вони вже мають володіти базовими означеннями.

Вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу розпочинається з повторення загально-функціональних понять, які вивчалися в основній школі. Процес вивчення матеріалу в подальшому ділиться на окремі фази [34].

Перша фаза - фаза виклику. Виклик дозволяє актуалізувати та узагальнити вже наявні знання з вихідного питання і спонукає людину до активної діяльності. На стадії виклику вчитель може використовувати такі прийоми, як мозковий штурм, кошик ідей, кластер, ментальні карти, правильні та неправильні твердження, дерево передбачень, переплутані логічні ланцюги, питальні слова та ін. Учителю дуже важливо вислуховувати думки всіх учнів, фіксувати всі висловлення, навіть, якщо вони не є правильними, не виправляти, та не критикувати учнів. Наприклад, на початку 10 класу, під час вивчення теми «Числові функції та їх властивості» ефективно використовувати прийом «кластер» - графічний спосіб організації навчального матеріалу. Кластери -

схематична форма, суть якої полягає в тому, що в середині листа записується основне слово (ідея, тема), а по боках від нього фіксуються усі асоціації, які пов'язані з цим поняттям. Слід наголосити, що кластер не повинен бути розроблений вчителем до уроку, він розробляється разом з учнями. Вчитель фіксує усі ідеї учнів, навіть не правильні, а в процесі вивчення нового матеріалу на етапі осмислення в разі потреби виконуються корегування записів.

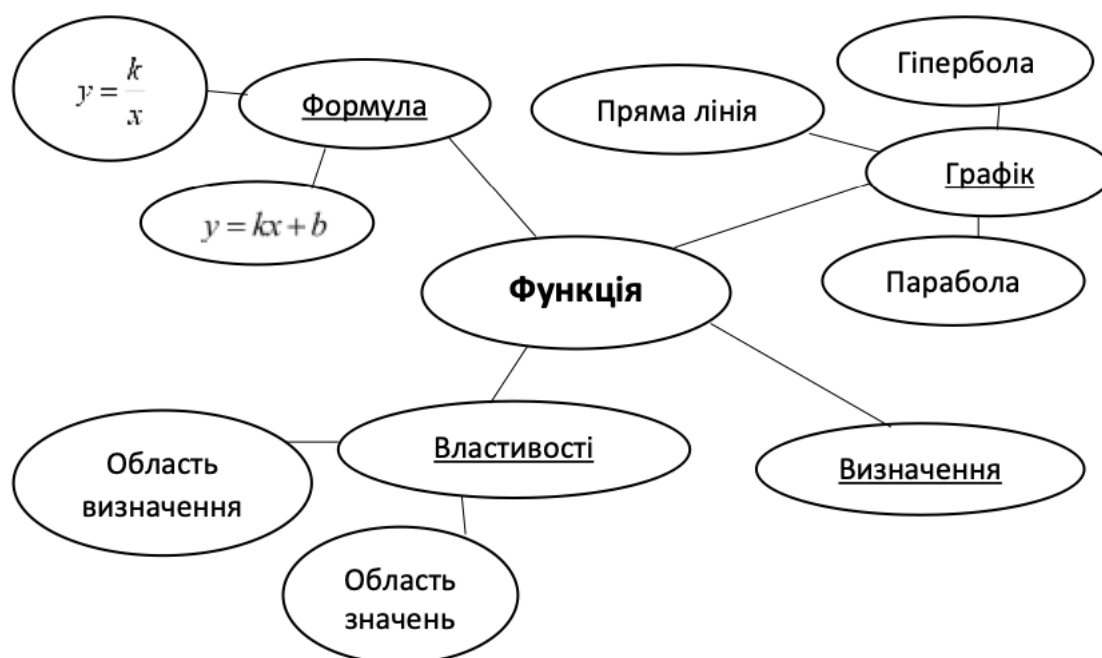


Рис. 2.1. Приклад використання прийому кластер під час вивчення теми «Числові функції та їх властивості»

При вивченні теми «Степеневі функції, їхні властивості та графіки» (10 клас) можливо використання прийому «Кошик ідей», який зручно використовувати, коли учні мають деякі уявлення з теми, яка буде вивчатися. Це метод організації індивідуальної та групової роботи здобувачів освіти на початку уроку. Він дозволяє перевірити все, що знають або думають учні з поточної теми уроку. Учитель виділяє ключове поняття досліджуваної теми та пропонує учням за певний час виписати якомога більше слів або виразів, пов'язаних, на їхню думку, із запропонованим поняттям. Важливо, щоб школярі виписували усі асоціації, які приходять їм на розум. По ходу вивчення теми кошик корегується, поповнюється новими знаннями.

Друга фаза – фаза реалізації (осмислення). Осмислення дозволяє отримати нову інформацію, усвідомити та співвіднести її з наявною.

На даній стадії використовують прийоми «Інсерт», заповнення таблиці ПМЦ (+, -, ?), товсті й тонкі запитання, «Зигзаг».

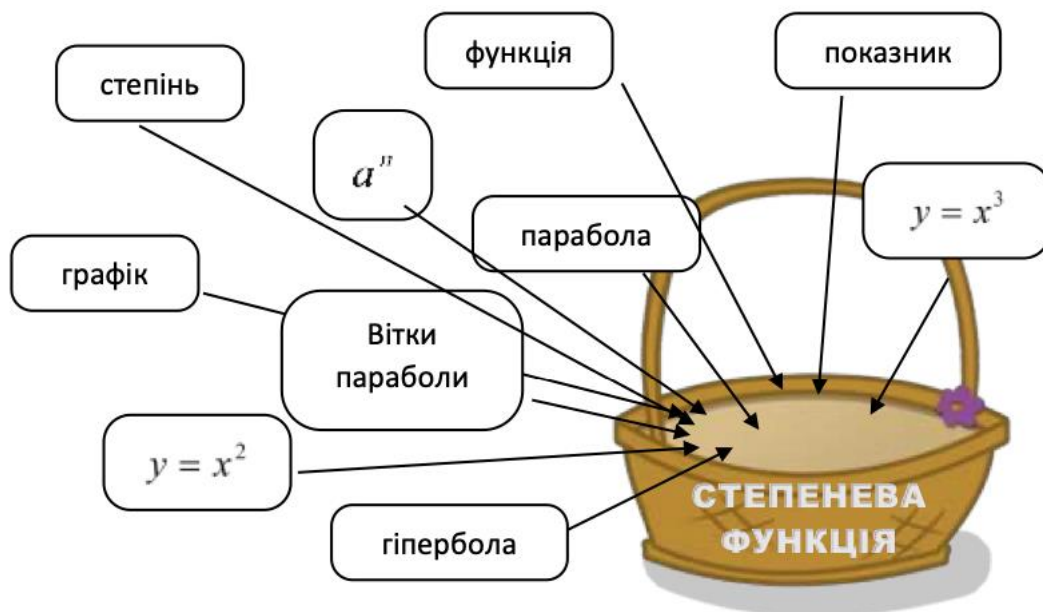


Рис. 2.2. Приклад використання прийому кошик ідей кластер під час вивчення теми «Степеневі функції, їхні властивості та графіки»

Цікавим та корисним є прийом «Зигзаг». Даний прийом ефективно використовувати в тому випадку, коли потрібно за короткий час опанувати великий обсяг матеріалу. Наприклад, для вивчення теми «Властивості та графіки тригонометричних функцій» у 10 класі за рівнем стандарту відведено 2 уроки. За цей час учні мають розглянути властивості та навчитись будувати графіки чотирьох тригонометричних функцій. Крім того дана форма роботи сприяє розвитку комунікативних навичок учнів. Розглянемо алгоритм використання прийому:

- розбити матеріал на 4 частини: 1) функція $y = \sin x$, 2) функція $y = \cos x$, 3) функція $y = \operatorname{tg} x$, 4) функція $y = \operatorname{ctg} x$.
- поділити клас на групи по 4 учні (кожному учню присвоюється номер 1, 2, 3, 4);
- кожен член групи отримує своє питання для вивчення;

- відбувається перегрупіровка (учні з однаковими номерами вивчають своє питання, складають кластери, ментальні карти, таблиці тощо);
- після вивчення питання повертаються до своїх груп, де відбувається взаємонавчання та обмін інформацією;
- відомості заносяться у зведену таблицю [66, 67].

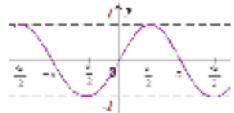
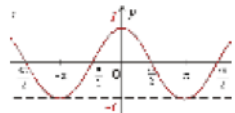
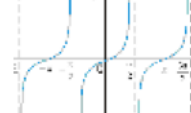
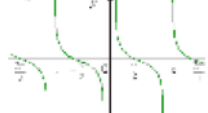
$y = \sin x$	$y = \cos x$	Лінії порівняння	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
$x \in R$	$x \in R$	$D(y)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x \neq \pi n, n \in Z$
$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$E(y)$	$y \in R$	$y \in R$
непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	Парність та непарність функції	непарна $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	непарна $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	Період функції	$T = \pi$	$T = \pi$
$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	Нулі функції	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\sin x = 0$	$\cos x = 1$	Якщо $x = 0$	$\operatorname{tg} x = 0$	не визначено
$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ $n \in Z$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ $n \in Z$	Проміжки зростання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ $n \in Z$	немає
$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ $n \in Z$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ $n \in Z$	Проміжки спадання	немає	$(\pi n; \pi + \pi n)$ $n \in Z$
$y = -1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$y = -1$, якщо $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	Найменші значення	немає	немає
$y = 1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$y = 1$, якщо $x = 2\pi n, n \in Z$	Найбільші значення	немає	немає
синусоїда	косинусоїда	Назва графіку	тангенсоїда	котангенсоїда
		Графік функції		

Рис. 2.3. Приклад зведеної таблиці під час вивчення теми «Властивості та графіки тригонометричних функцій».

Третя фаза - фаза рефлексії. Рефлексія передбачає цілісне осмислення та узагальнення отриманої інформації, прояв власного ставлення до об'єкта.

На даному етапі доцільно використовувати такі прийоми, як заповнення кластерів, концептуальних таблиць, складання сінквейну, прийоми «б капелюхів», ромашка Блума, кубик [38, с. 209-213].

Нижче розглянемо основні означення та теореми, якими учні мають оволодіти з 7 по 9 клас.

Означення 1. Нехай дано дві множини X і Y і нехай кожному елементу x множини X поставлено у відповідність деякий елемент y множини Y . Тоді говорять, що задано функцію $y = f(x)$ на множині X зі значеннями на множині Y .

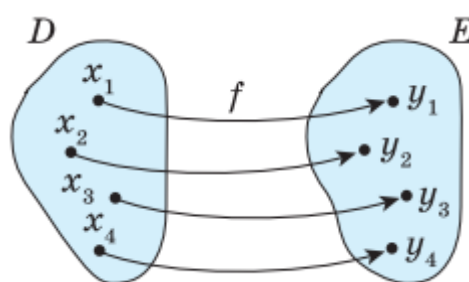


Рис. 2.4.

Означення 2. Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом функції, а змінна y — залежною змінною, або функцією.

В курсі алгебри та математичному аналізі розглядають функції числового аргумента, тобто X і Y - множини дійсних чисел.

Означення 3. Областю визначення функції $f(x)$ називається множина дійсних значень незалежної змінної x , для яких ця функція визначена (має зміст). Позначається так: $D(f)$.

Означення 4. Областю значень функції $y = f(x)$ називається множина всіх дійсних значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях аргумента з області визначення. Позначається так: $E(f)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область визначення функції $y = f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції в точці x [43, с. 32-41].

Відповідно до означення функції, впливає, що для того, щоб її задати, необхідно вказати дві множини чисел (X і Y) та закон відповідності між ними. Це можна зробити чотирма способами:

- таблицею;
- аналітично (формулою);
- графічно;
- словесно.

Більш детально зі способами задання функції, учні знайомляться на факультативних заняттях. Тут же, вони розглядають застосування різних способів не лише на суто алгебраїчних прикладах, а й у прикладних задачах інших предметів. Також на факультативах учні навчаються визначати переваги та недоліки використання того чи іншого способу задання функцій.

Наприклад, табличний спосіб часто застосовують у природознавстві й техніці, де результати експерименту записують у таблицю.

Приклад 1. Під час дослідження залежності величини постійного струму I від величини напруги U за умови, що загальний опір R є величиною сталою, складено таблицю 1.

Таблиця

2.1.

U (вольт)	3	6	9	12	15	18	21
I (ампер)	1	2	3	4	5	6	7

Цією таблицею встановлено функціональну залежність $I = f(U)$.

Перевага табличного способу полягає в простоті знаходження значень функції за значенням аргумента. Проте таблиця не дає повного уявлення про зміну функції залежно від аргумента. Якщо необхідно знайти значення функції за значенням аргумента, що не вказані в таблиці, то без обчислень не обійтися. До недоліків цього способу слід віднести й відсутність достатньої наочності [50, с.19-22].

Поданий вище матеріал вивчається учнями в середній школі. Це мінімальна база знань, яку учні отримують при знайомстві з темою “Функції”, тому на факультативних заняттях функціональна лінія в цьому класі не реалізується досить широко. Розгляд цієї теми відбувається частково в певних загальних курсах.

Більш детально та глибоко функціональна лінія розглядається у 10му та 11му класах. Цій темі присвячують окремі факультативні курси та поглиблено вивчають теми загального шкільного курсу алгебри, а також додаткові розділи та завдання підвищеного рівня.

Реалізація функціональної лінії в курсі алгебри старшої школи починається з вивчення властивостей елементарних функцій. Приходячи на факультативні заняття, учні вже володіють базою основних понять та вміють наводити елементарні приклади до означень.

Означення 5. Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-якого $x \in D(y)$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$, при цьому $-x \in D(y)$.

Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy .

Наприклад, функція $f(x) = -x^4 + x^2$ є парною, оскільки $f(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 = -x^4 + x^2 = f(x)$ для всіх $x \in R$ (рис. 1).

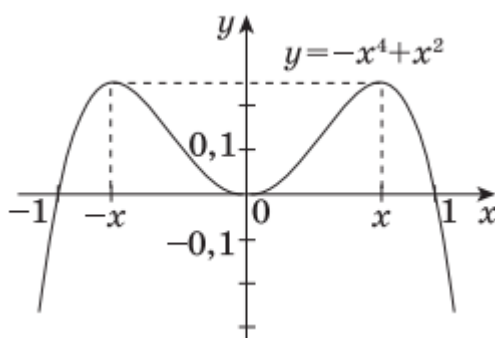


Рис. 2.5.

Означення 6. Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо для будь-якого $x \in D(y)$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, при цьому $-x \in D(y)$.

Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

Наприклад, функція $f(x) = x^5 - x^3$ — непарна, оскільки $f(-x) = -(-x)^5 - (-x)^3 = -x^5 + x^3 = -(x^5 - x^3) = -f(x)$ для всіх $x \in R$ (рис. 2.5.).

Графік функції $f(x) = x^5 - x^3$ наведено на рис. 2.6.

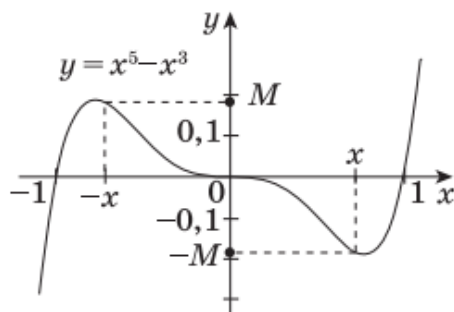


Рис. 2.6.

Існують функції, які не є ні парними, ні непарними.

Означення 7. Якщо область визначення функції не є симетричною відносно нуля множиною або не виконується жодне зі співвідношень $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$, то функція не є ані парною, ані непарною; такі функції називаються функціями загального вигляду.

Наприклад, функції $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$; $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \{x\}$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$ не є ні парними, ні непарними.

Єдина функція, задана на множині R , є й парною, й непарною, — це функція $y = 0$.

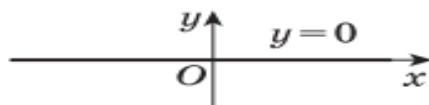


Рис. 2.7.

Окремо, на факультативних заняттях, доводяться кілька фактів, які потім можна використовувати під час дослідження функцій на парність і непарність.

Теорема 1. Нехай дві функції визначені на одній множині, тоді:

- 1) сума парних функцій — парна;
- 2) добуток парних функцій — парний;
- 3) сума непарних функцій — непарна;
- 4) добуток двох непарних функцій — парний.

Означення 8. Функцію називають зростаючою на інтервалі, якщо більшим значенням аргумента цього інтервала відповідають більші значення функції.

Тобто, якщо при $x_2 > x_1$, де x_1 і x_2 – довільні значення аргументу з даного проміжку, $f(x_2) > f(x_1)$ або $y_2 > y_1$, то кажуть, що функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо за названих умов виконується нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$, або $y_2 \geq y_1$, то функція називається неспадною.

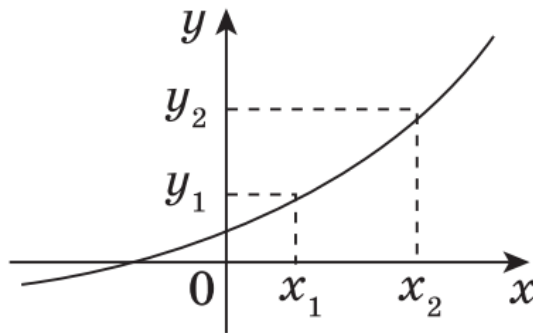


Рис. 2.8.

Означення 9. Функцію називають спадною на інтервалі, якщо більшим значенням аргумента цього інтервала відповідають менші значення функції.

Інакше, якщо при $x_2 > x_1$, де x_1 і x_2 – довільні значення аргументу з даного проміжку, $f(x_2) < f(x_1)$ або $y_2 < y_1$, то кажуть, що на цьому проміжку функція $f(x)$ спадає.

Якщо за названих умов виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$, або $y_1 \geq y_2$, то функція називається незростаючою.

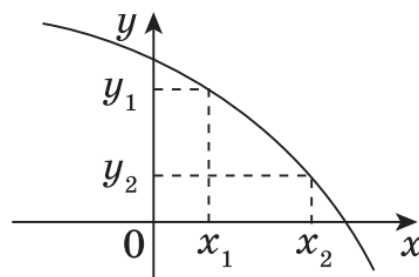


Рис. 2.9.

Означення 10. Інтервали зростання і спадання функції називають інтервалами монотонності, а функцію на такому інтервалі — монотонною.

Означення 11. Функція називається оборотною, якщо кожного свого значення вона набуває в єдиній точці області визначення.

Означення 12. Функція g називається оберненою до функції f , якщо функція g в кожній своїй точці x області значень оберотної функції f набуває такого значення y , що $f(y) = x$.

Якщо функція $f(x) = y$ є оборотною, то, виразивши x із формули $y = f(x)$ і помінявши x і y місцями, дістанемо формулу оберненої функції.

Графіки функції $f(x)$ та оберненої до неї функції $g(x)$ є симетричними відносно прямої $y = x$ (рисунок).

Функції f і g називаються взаємно оберненими.

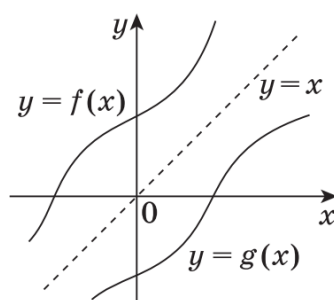


Рис. 2.10.

Означення 13. Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (рисунок).

Періодом функції прийнято називати найменший із додатних періодів [23, 50, 62].

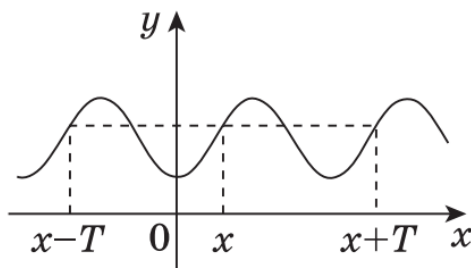


Рис. 2.11.

Успішність засвоєння матеріалу учнями та оволодінням ними певної теми більшої мірою залежить також і від підручників з якими працюють учні. Проаналізуємо підручники для учнів старшої школи:

Академічний рівень:

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас [37].

Рівень стандарту:

2. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу (рівень стандарту) для 10-11 класів [3].

Проаналізуємо підручник 1 [37].

I. Метод викладання.

Стиль підручника є абстрактно-дедуктивним. Доцільно використано наочність. Підручник розподілений за розділами на п'ять параграфів, кожен з яких складається з пунктів. У кожному пункті описано теоретичний матеріал. Опорні факти виділені жирним шрифтом, проте потрібно також звертати увагу і на важливі факти виділені курсивом. Прикладами розв'язування задач завершується виклад теоретичного матеріалу. Дані записи можна розглядати і як спосіб оформлення задач. А також в кожному пункті підручника запропоновані задачі для самостійного опрацювання, але до них доцільно приступати лише після вивчення теоретичного матеріалу.

Додатки рубрики «Коли зроблено уроки» можна застосовувати для факультативних завдань і організації роботи гуртка.

Тема «Тригонометричні функції» виділена окремим параграфом.

Підтеми виділено наступним чином.

1. Радіанне вимірювання кутів.
2. Тригонометричні функції числового аргументу.
3. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій.
4. Періодичні функції.
5. Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$.
6. Властивості і графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.
7. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того ж самого аргументу.

8. Формули додавання .
9. Формули зведення.
10. Формули подвійного аргументу.
11. Сума і різниця синусів (косинусів).
12. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.
13. Гармонічні коливання.

II. Система задач.

Також наведені приклади розв'язування задач, після викладення теоретичного матеріалу. У кожному розділі підручника підібрані контрольні запитання. Для контролю і самоконтролю вивчення навчального матеріалу після кожного параграфу запропоновано систему тренувальних вправ, також і в тестовій формі. Всі відповіді на ці запитання записані у параграфі, а на приклади у кінці підручника, і на тестові завдання також в кінці підручника. Наведені вправи трьох рівнів складності:

- (°) – середній;
- (без позначень) – достатній,
- (*) – високий.

В підручнику наведені завдання різних рівнів складності, вправи для повторення, велика кількість прикладних задач. Добірка завдань є достатньою для засвоєння основних понять даної теми, для учнів з різними рівнями навчальних досягнень. Цікаво, що про походження понять, термінів і символів учні можуть дізнатися прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника запропоновано відомості з курсу алгебри 7–9 класів та вправи для повторення курсу алгебри та початків аналізу за 10 клас.

Підручник містить:

- відомості з курсу алгебри 7–9 класів;
- вказівки та відповіді до вправ, відповіді до завдань в тестовій формі «Перевір себе»;
- предметний покажчик.

Проаналізуємо підручник 2 [3].

I. Метод викладання.

Даний підручник складений для учнів класів, у яких на вивчення алгебри і початків аналізу відводиться дві години на тиждень.

У кожному параграфі підручника запропоновані теоретичні відомості і підібрані задачі на їх засвоєння. Наприкінці кожного розділу наведені історичні відомості про відомих математиків. В підручнику запропоновано сім розділів, які поділено на параграфи .

Тема «Тригонометричні функції» виділена окремим розділом.

Параграфи запропоновані до вивчення в такому порядку:

1. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута.
2. Тригонометричні функції кутів.
3. Тригонометричні функції числових аргументів.
4. Формули зведення.
5. Формули додавання.
6. Формули подвійних кутів.
7. Перетворення суми тригонометричних кутів.
8. Тригонометричні рівняння.
9. Найпростіші тригонометричні нерівності.

II. Система задач.

Після викладу теоретичного матеріалу у підручнику наводяться приклади розв'язування задач. Для контролю і самоконтролю учнів у засвоєнні навчального матеріалу в кінці кожного параграфу розміщено систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання можна віднайти у параграфі, а на приклади розв'язки та відповіді знаходяться у кінці підручника. Задачі обов'язкового рівня, які повинні розв'язувати всі позначені нуликом, а порівняно важкі зірочкою. Також є задачі на повторення у підручнику. Для учнів, які цікавляться математикою, запропоновано підбір задач підвищеної складності.

Є також у підручнику завдання для самостійних робіт, з них перші два варіанти легші, ніж наступні, це дає можливість диференціювати навчання. Ці завдання можна використати і для контрольних робіт.

Підручник містить:

- завдання для самостійної роботи;
- контрольні запитання і завдання ;
- історичні відомості;
- задачі на повторення;
- задачі підвищеної складності;
- відповіді і вказівки;
- довідковий матеріал;
- предметний покажчик.

Отже, проаналізувавши підручники можна зробити висновок, що для викладенні певної теми вчитель повинен комбінувати декілька підручників, що допоможе краще пояснити матеріал, розв'язати більш доцільніші і цікавіші задачі та вправи, а також використати їх при повторенні вивченого на факультативних заняттях.

2.2. Прикладні задачі на факультативних заняттях з математики.

Прикладні задачі – один з найдієвіших і ефективних засобів для формування в учнів вмінь і навичок застосовувати набуті в курсі алгебри і початків аналізу знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Їх вкрай недостатньо в чинних шкільних підручниках з математики, а також часу на уроках для їх розв'язування теж зазвичай не вистачає, через необхідність розглядати основний програмний матеріал, типові задачі з теми та доведення теорем чи інших тверджень.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про

готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою [1].

Вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу розпочинається з повторення загально-функціональних понять, які вивчалися в основній школі.

Розв'язування прикладних задач, на факультативних заняттях з математики, дає можливість повторити означення функції, підготуватися до сприйняття означення числової функції, пригадати основні способи задання функції, повторити властивості деяких основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Для огляду властивостей певного виду функцій корисно розглядати залежність, яка має місце в біології, хімії, екології, медицині, або закономірність деякого життєвого процесу, зрозумілу і просту для сприйняття, але, на жаль, на яку не вистачає часу на уроках. Вибрана залежність є функцією певного виду, а, отже, властивості, які має ця залежність, є властивостями функцій даного виду. Однак помітити ці властивості звичайному учневі або тим, кому математика не цікава, буває інколи простіше на конкретній закономірності, ніж здогадатися про них, виходячи з загального аналітичного виразу функції. Це і є метою введення залежностей реальних процесів та явищ на факультативах. Вибрану залежність необхідно задавати не тільки аналітично, а й графічно з урахуванням наочності, властивостей залежності. Після виявлення властивостей залежності і проведення їх аналізу вони узагальнюються для всього виду функцій.

Однак залежності хіміко-біологічних, медичних, екологічних, як і будь-яких інших реальних процесів та явищ, мають певні особливості. Перш за все слід відмітити, що функція, якою описується даний процес, задана, як правило, на множині невід'ємних чисел і набуває невід'ємних значень. Це вносить певні обмеження, а, отже, не завжди дає можливість проілюструвати всі властивості даного виду функцій. Деякі властивості певних видів функцій можливо розглядати лише в абстрактному вигляді [49].

Розглянемо приклади розв'язання задач, в основу сюжету яких покладені загально-функціональні поняття, що вивчались в основній школі.

Задача 1. На ранній стадії розвитку деяких риб (від 2 до 6 років) спостерігається лінійна залежність ваги риби w (в кг) від її віку t (у роках): $w = at$, де a – параметр, який знаходиться за даними натурних спостережень і залежить від виду риби. В цей же період росту риби її довжина L (в м) також лінійно залежить від віку t : $L = bt$, де b – параметр. Відомо, що даний вид риби у віці одного року (цьоголітка) важить 0,24 кг і має довжину 12 см. Виведіть формулу залежності ваги цієї риби від її довжини.

Розв'язання

З формул лінійної залежності ваги w та довжини L риби від часу t виразимо час t : $t = \frac{w}{a}$, $t = \frac{L}{b}$. При-рівнявши праві частини останніх рівностей $\frac{w}{a} = \frac{L}{b}$ та зробивши відповідні перетворення, матимемо залежність ваги риби w від її довжини L : $w = \frac{a}{b} L$. Для визначення значень параметрів a і b слід розв'язати рівняння: $0,24 = a \cdot 1$ і $0,12 = b \cdot 1$. Отже, $a = 0,24$, $b = 0,12$, $w = 2L$.

Відповідь: $w = 2L$ – формула залежності ваги риби від її довжини.

Задача 2. У таблиці представлено середній зріст x_i в см і середня вага y_i в кг різних порід собак:

Таблиця 2.2.

Порода	Тойтер'єр	Пікінес	Карликовий пінчер	Мопс	Цверг- шнауцер	Франц. бульдог	Фокстер'єр	Бассет- хаунд	Пудель	Кокер- спаніель
Зріст, x_i	22	23	26	29	31	33	34	36	37	40
Вага, y_i	3	4	6	7	9	10	11	12	12	14

За даними таблиці побудуйте графік залежності ваги y_i собаки від її зросту x_i . Визначте цю залежність методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду.

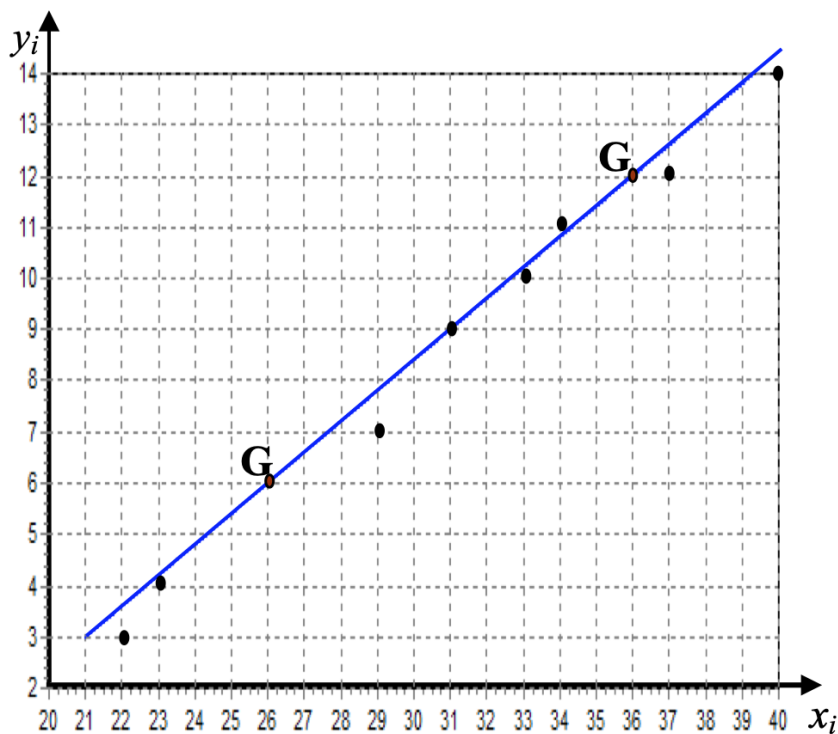


Рис. 2.12.

Розв'язання

У прямокутній системі координат, вибраній певним чином, відмічаємо точки $(x_i; y_i)$. Помічаємо, що точки на рисунку розташувались вздовж умовної прямої.

Для визначення її рівняння знайдемо координати середньої точки G_1 для перших п'яти точок цієї послідовності та координати середньої точки G_2 для інших п'яти точок.

$$\bar{x}_1 = \frac{22+23+26+29+31}{5} \approx 26,$$

$$\bar{y}_1 = \frac{3+4+6+7+9}{5} \approx 6.$$

Аналогічно знаходимо $\bar{x}_2 = 36$, $\bar{y}_2 = 12$. Отже, пряма проходить через точки $G_1(26; 6)$, $G_2(36; 12)$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, одержуємо рівняння $\frac{x-26}{10} = \frac{y-6}{6}$. Звідки, після певних перетворень, маємо формулу залежності ваги собаки певної породи від її зросту $y = 0,6x - 9,6$.

Відповідь: $y = 0,6x - 9,6$ – формула залежності ваги собаки певної породи від її зросту.

Задача 3. Одна рослина кульбаби (кореневище) займає площу наближено 10 м^2 і дає за рік біля 100 летючих насінин. Скільки квадратних кілометрів площі покриють всі нащадки однієї особини кульбаби через 6 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії? Відомо, що площа поверхні суші земної кулі складає 148 млн. кв. км. Чи вистачить цим рослинам на сьомий рік місця на поверхні земної кулі?

Розв'язання

Нехай $S_0 = 10 \text{ м}^2$ – початкова площа, яку займає одна рослина кульбаби. Тоді S_1, S_2, \dots, S_n – площі, які покриють нащадки однієї кульбаби через 1, 2, ..., n років відповідно за умови, що рослина розмножується без перешкод у геометричній прогресії. При цьому $S_1 = S_0 \cdot 10^2$, $S_2 = S_1 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^4$, $S_3 = S_2 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^6$, ... , $S_n = S_{n-1} \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^{2n}$. Отже, $S_6 = 10 \cdot 10^{12} = 10^{13} (\text{м}^2)$. Оскільки площа поверхні суші земної кулі складає $148 \cdot 10^6 \text{ км}^2 = 1,48 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$, то на сьомий рік на поверхні суші місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15} \text{ м}^2$.

Відповідь: За згаданих умов на сьомий рік місця на поверхні суші земної кулі для кульбаби не вистачить.

Розглянута задача фактично приводить до поняття показникової функції $S(n) = S_0 \cdot 10^{2n}$. Але одночасно для відповіді на поставлене питання можна було використати формулу n -го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де $b_1 = 10$ (насінин), $q=100$. Тоді $b_7 = 10^2 \cdot 100^6 = 10^{14}$ (насінин), а $S_7 = S_0 \cdot b_7 = 10 \cdot 10^{14} = 10^{15} (\text{м}^2)$

Отже, задачі такого типу можна використовувати як на етапі закріплення знань про геометричну прогресію, так і на етапі формування нових функціональних понять під час проведення факультативних занять з алгебри.

Розглянуті задачі приводять до окремих видів числових функцій, дають можливість пригадати аналітичний та табличний способи задання функції. Але цим не обмежуються функції даного виду задач у навчальному процесі.

Сформулюємо задачі, подібні до розглянутих за способом розв'язування, та задачі на повторення властивостей деяких інших основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Під час вивчення різних природних процесів, зокрема біологічних та хімічних, найчастіше зустрічаються залежності між змінними величинами, які описуються показниковою або логарифмічною функціями з основою $a = e$. Прикладами таких залежностей можуть бути залежності: $N = N_0 e^{kt}$, де N – кількість бактерій в будь-який час t , N_0 – початкова кількість бактерій в момент часу $t = 0$, k – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально. Колонія клітин дріжджів розмножується також за експоненціальним законом. За таким законом плодилися кролики, які за короткий час заповнили Австралію.

Процеси новоутворення і розпаду математично можуть бути описані за допомогою залежності $P = P_0 e^{kt}$, де P – кількість новоутвореної речовини або речовини, що розпалася, в момент часу t , P_0 – початкова кількість речовини, k – стала, яка стосується конкретного випадку. За таким законом відбувається радіоактивний розпад, зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі людини за рахунок виведення його природним шляхом [49].

Крім цього, показникова функція характеризує зростання народонаселення, приріст деревини, залежність врожайності від кількості використаних органічних добрив, залежність швидкості реакції від температури (правило Вант-Гоффа): $v_{T_2} = v_{T_1} \gamma^{\frac{T_2 - T_1}{10}}$, де v_{T_2}, v_{T_1} – швидкості реакції при температурах T_2, T_1 , γ – температурний коефіцієнт.

За допомогою логарифмічної функції описується залежність ємності легенів V людини від її віку у роках, яка визначена на проміжку часу від 10 до 100 років: $V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини у роках; залежність від числа споживаних ним калорій M на одиницю маси щодня $\lg W = \frac{1,8 - \lg M}{0,225}$.

Деякі дослідники пропонують визначати вагу риби кубічною залежністю $W = at^3$ та $W = bL^3$, де a, b – параметри, t – час, L – довжина риби. Степенева

залежність використовується також для визначення ступеня забруднення узбіччя доріг свинцем

(у мг/м за рік): $C = 0,012Ae^{-0,11k} + 0,37\sqrt{A}$, де A – інтенсивність руху (число транспортних засобів) за добу і k – відстань від краю дороги в метрах; максимальної кількості опадів I (у мм/рік) від їх тривалості t (у роках) в деякій місцевості:

$$I = 13,1t^{-0,56} \text{ та ін.}$$

Приклади наведених залежностей варто включити до складу прикладних задач природничого характеру під час проведення та планування факультативних занять, відповідно до їх програми у різних класах. Це допоможе учням глибше усвідомлювати властивості названих функцій і засвоювати поняття, пов'язані з цими функціями, а також зацікавлюватися математикою, розуміти її справжню важливість у повсякденному житті.

Розпочнемо з задачі, яка може бути використана для введення поняття показникової функції.

Задача 4. За оцінкою лісника запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років за умови, що середній річний приріст складатиме 2,5 %?

Після ознайомлення учнів з умовою задачі їм пропонується такий хід дослідження:

1) Позначте початковий запас деревини на ділянці лісу через D_0 , а D_n – запас деревини на ділянці лісу через n років. Яким буде запас деревини через рік? Виразіть D_1 через D_0 .

2) Чому буде дорівнювати запас деревини на ділянці через два роки? Виразіть D_2 через D_1 та D_2 через D_0 .

3) Дайте відповідь на аналогічне питання для $n = 3$.

4) Виразіть D_n через D_{n-1} . Виразіть D_n як функцію від D_0 і n .

5) Підставте в останню формулу значення D_0 з умови задачі. Яку залежність ви одержали?

Провівши дослідження за наведеним алгоритмом, учні одержують функцію $D(n) = 10000 \cdot 1,025^n$, яка є залежністю запасу деревини D на ділянці лісу (в кубометрах) від числа минулих років n .

Одержана показникова функція є математичною моделлю даного процесу, отже, визначивши її значення $D(10) = 10000 \cdot 1,025^{10} = 12800$ (м³), дістають відповідь на питання задачі.

Задача 5. При розпаді 4-х грамів радіоактивної речовини була визначена залежність залишку m цієї речовини (в грамах) від часу t (в добах): $m(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$. Через який проміжок часу залишилось 0,125 г радіоактивної речовини [49]?

Розглядаючи задачі згаданого вище типу, учні помітять, що під час розв'язування різноманітних природничих проблем доводиться розв'язувати рівняння $a^x = N$, де a, N – деякі числа, причому $a > 0$ і $a \neq 1$.

Після того, як буде з'ясовано існування єдиного кореня даного рівняння при $N > 0$, вводиться означення логарифма. Відповідність, яка існує між кожним додатним числом і певним значенням його логарифма: $\log_a x$ (основа a розглядається як дане стале додатне число, $a \neq 1$), приводить до поняття логарифмічної функції, визначеної на множині всіх додатних чисел.

При вивченні показникової та логарифмічної функцій розгляд експоненціальних залежностей не повинен обмежуватись розглядом процесів новоутворення і розпаду, корисно розглядати задачі біологічного змісту.

Задача 6. У однолітніх лососів споживання кисню з підвищенням швидкості плавання зростає експоненціально. Визначимо $C(v)$ як споживання кисню за годину однолітнім лососем, який пливе з середньою швидкістю v м/с. Нехай $C(0) = 100$ і $C(3) = 800$ (відповідних одиниць). Знайдіть $C(1)$ і $C(2)$ [49].

Розв'язання

Експоненціальна залежність $C(v) = C_0 e^{kv}$ є математичною моделлю процесу, що розглядається. Використовуючи початкові умови $C(0) = 100$ і $C(3) = 800$, поступово визначимо значення C_0 і e^k . $100 = C_0 (e^k)^0$, отже, $C_0 =$

100. Потім з рівності $800 = 100(e^k)^3$ одержимо $e^k = 2$. Отже, залежність, про яку йдеться в задачі, має вигляд: $C(v) = 100 \cdot 2^v$. Звідки $C(1) = 200$, $C(2) = 400$.

Відповідь: $C(1) = 200$, $C(2) = 400$.

Застосування похідної до дослідження функцій, які є математичними моделями прикладних задач природничого змісту

Розглянемо ще один тип прикладних задач, які розв'язуються за допомогою використання похідної. В них похідна застосовується: до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі даної задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, на основі якого будується її графік; до обчислення наближеного значення функції.

З'ясуємо роль і місце прикладних задач природничого характеру при підготовці до вивчення теоретичних питань курсу та при закріпленні тільки що набутих теоретичних знань і формуванні математичних умінь. Покажемо, як можна використовувати цей тип задач та ілюстративні життєві приклади у процесі навчання, виходячи з різних дидактичних цілей на факультативних заняттях з математики для учнів старшої школи.

До вивчення питань монотонності функції в старшій школі існують різні методичні підходи, запропоновані у чинних шкільних підручниках. За основу візьмемо підхід, запропонований у підручниках [64], [65], згідно з яким розгляд понять зростаючої і спадної функції складається з двох етапів:

- 1) повторення означень, відомих учням з курсу алгебри основної школи;
- 2) розгляду питань зростання і спадання функції у точці, формулювання означення монотонної функції на проміжку та доведення ознак монотонності функції в точці і, як наслідок, на проміжку.

Зупинимось на етапах процесу навчання, під час яких розгляд практичних життєвих ситуацій сприятиме засвоєнню учнями теоретичного матеріалу та закріпленню засвоєних знань на факультативних заняттях.

Розпочнемо з етапу повторення понять зростаючої та спадної функції на проміжку, відомих учням з курсу алгебри основної школи. Розглянемо таку задачу.

Задача 7. На рисунку представлена зміна тиску крові вздовж судинного русла. Як залежить тиск крові від товщини ділянки судинної системи? На якій ділянці тиск найбільший, а на якій найменший?

Аналізуючи цей графік, учні зможуть пригадати поняття спадної функції на проміжку та алгоритм дослідження функції на монотонність.

При введенні понять зростаючої та спадної функції в точці також доцільно звертатись до практичних прикладів. Наступний та подібний до нього приклади допоможуть учням глибше усвідомити поняття зростаючої функції у точці і скоріше запам'ятати означення, сформульоване у підручнику [65].

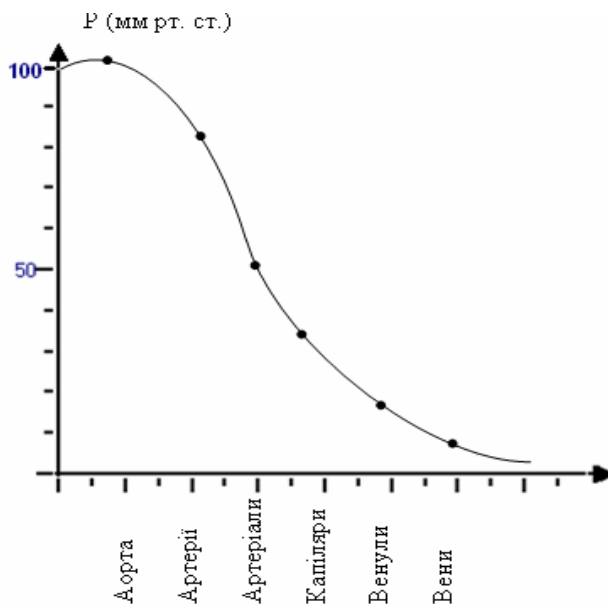


Рис. 2.13.

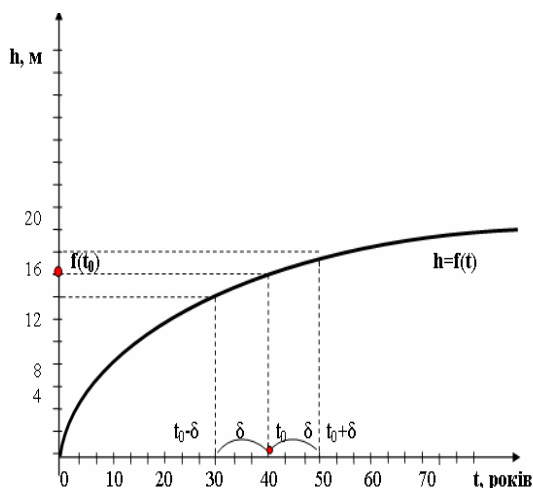


Рис. 2.14

Приклад 1. На рисунку 2.14. зображений графік залежності висоти h ялинки від її віку t (у роках).

Зображена на малюнку функція $h = f(x)$ є зростаючою у точці t_0 , оскільки існує інтервал $(t_0 - \delta; t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, який міститься у проміжку $\langle a, b \rangle$, і такий, що $f(t) < f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0 - \delta; t_0)$ і $f(t) > f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0; t_0 + \delta)$.

Розгляд практичних проблемних ситуацій буде корисним і під час вивчення ознак зростання і спадання функцій. Застосуємо похідну до дослідження на монотонність функції, яка є математичною моделлю такої прикладної задачі.

Задача 8. У країні Меланхолії виникла епідемія депресії, яка розповсюджується так, що відсоток p тих, що захворіли залежить від часу t (в добах) наступним чином, $p = 0,005(12t^2 - t^3)$, де $0 \leq t \leq 12$.

- 1) Скільки відсотків мешканців захворіє до кінця другої доби?
- 2) Скільки діб відсоток тих, що захворіли, буде збільшуватись?
- 3) Починаючи з якої доби епідемія почне спадати?

Розв'язання

Для відповіді на перше питання знайдемо значення функції для $t = 2$:
 $p(2) = 0,005(12 \cdot 2^2 - 2^3) = 0,2 = 20\%$.

Отже, до кінця другої доби захворіє 20% мешканців.

Щоб відповісти на наступні питання, знайдемо похідну функції: $p'(t) = 0,005(24t - 3t^2) = 0,015t(8 - t)$. Оскільки час $t > 0$, то на відрізку $[0;12]$ існує єдина точка, в якій похідна набуває нульового значення. Ця точка розбиває проміжок $[0;12]$ на два проміжки $[0;8)$ та $(8;12]$. На першому з цих проміжків $p'(t) > 0$ і, отже, функція на ньому зростає, а на другому проміжку $p'(t) < 0$, і тому функція на ньому спадає.

На основі достатньої ознаки зростання (спадання) функції на проміжку одержали висновок, що 8 діб відсоток тих, що захворіли, буде збільшуватись, а починаючи з 9-ї доби епідемія почне спадати.

Відповідь: 20%; 8 діб; з 9-ї доби.

При введенні понять екстремальні точки (точки максимуму і мінімуму функції) та екстремуми функції (максимум і мінімум функції) доцільно використовувати приклади, наочність яких допоможе учням зрозуміти та засвоїти означення названих понять.

Приклад 2. На рисунку 2.15 представлений графік величини $r = r(t) = te^{-t^2}$ (відповідних одиниць), якою задається реакція організму на певну дозу ліків через t годин після їх введення. Через скільки годин після вживання ліків реакція найбільша? Чому дорівнює найбільше значення величини реакції?

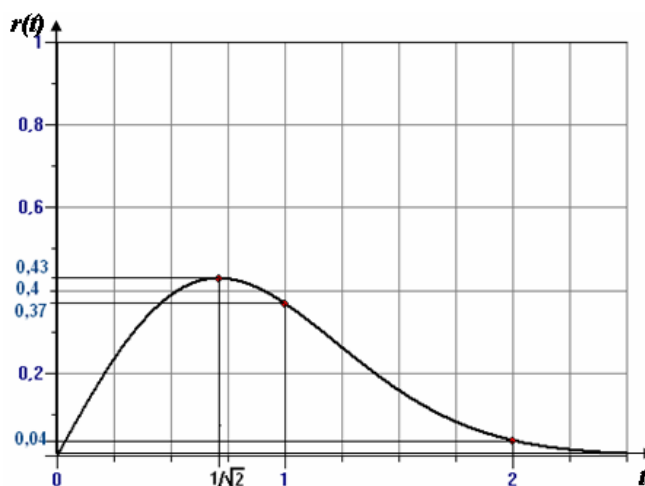


Рис. 2.15.

Приклад 3. На рисунку 2.16. представлена зміна швидкості руху крові вздовж судинного русла. На якій ділянці швидкість руху крові найменша і чому вона дорівнює?

Використовуючи рисунки 15, 16 легко показати учням існування інтервалу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який міститься в області визначення функції $y = f(x)$, для всіх x з якого, відмінних від x_0 , виконується одна з нерівностей $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0)$.

Після того, як учні усвідомлять останнє, слід ввести означення точок екстремумів та екстремумів функцій.

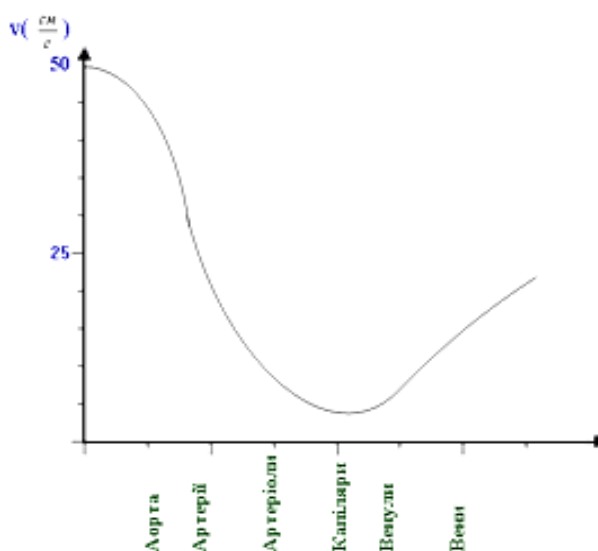


Рис. 2.16.

Основні теореми змістової лінії курсу „Похідна та її застосування”, які використовуються в практичних розрахунках, представлені необхідною і достатньою умовами існування екстремумів функцій. Тому прикладні задачі, складені на основі даних теорем, застосовуються для повторення або закріплення знань і формування вмінь використовувати ці теореми в нових умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі, що є головною метою факультативних занять.

Розглянемо задачі природничого змісту, в яких похідна застосовується з метою дослідження функції на екстремум.

Задача 9. У живильне середовище вносять популяцію, що налічує 1000 бактерій. Чисельність цієї популяції зростає за законом $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, де t вимірюється в годинах. Знайдіть максимальний розмір цієї популяції.

Розв'язання

Знайшовши похідну функції $p'(t) = \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$ і розв'язавши рівняння $p'(t) = 0$, з'ясуємо, що стаціонарними точками є $t_0 = \pm 10$. Оскільки час $t > 0$, то на всій області визначення функція має єдину стаціонарну точку $t_0 = 10$. При переході через цю точку знак похідної змінюється з "+" на "-", отже, на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_0 = 10$ є точкою максимуму функції y . Максимальний розмір цієї популяції дорівнює $p(10) = 1050$ бактерій.

Відповідь: 1050 бактерій.

Розглянута задача є прикладом задачі природничого змісту, математична модель якої міститься в умові. Її можна розглянути на етапі актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед вивченням достатньої умови існування екстремуму в точці. Після того, як учні будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, корисно розглянути з ними розв'язання цієї задачі та запропонувати для самостійного розв'язування декілька подібних задач.

Під час дослідження функцій за загальною схемою з метою побудови їх графіків слід розглянути з учнями декілька прикладних задач. Це внесе елемент зацікавленості у навчальний процес і активізує пізнавальну діяльність учнів на факультативах. Можна розглянути такі задачі.

Задача 10. При вливанні глюкози її кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t годин складає $C(t) = 10 - 8e^{-t}$. Побудуйте графік $C(t)$ як функції часу при $t \geq 0$. Знайдіть $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ – рівноважну кількість глюкози в крові.

Розв'язання

Областю визначення даної функції є всі невід'ємні числа ($t \geq 0$), $C(0) = 2$. Для того, щоб з'ясувати, який проміжок є множиною значень даної функції,

знайдемо рівноважну кількість глюкози в крові хворого: $\lim_{t \rightarrow \infty} (10 - 8e^{-t}) = 10 - 8 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 10$ (од.). Отже, $E(C) = [2; 10)$.

Оскільки похідна $C'(t) = 8e^{-t} = \frac{8}{e^t}$ додатна, то функція $C(t)$ зростаюча на всій області визначення. Її графік зображено на рисунку 2.17.

Відповідь: рівноважна кількість глюкози 10 одиниць.

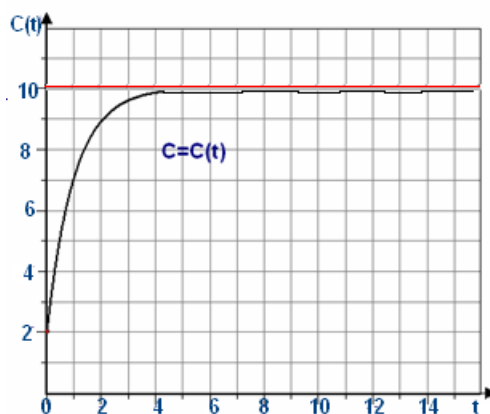


Рис. 2.17.

Задача 11. Ємність легенів людини виражається функцією її віку $g(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де $x \in [10; 100]$ – вік людини у роках, $g(x)$ – ємність легенів у літрах. Визначте, в якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює. Побудуйте графік функції $g(x)$ в прямокутній системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 10 років життя на осі абсцис, 1 см на 1 л на осі ординат. Встановіть графічно інтервал часу, протягом якого ємність легенів людини продовжує бути більшою або дорівнює тій, яка є в 45 років.

Розв'язання

Знайшовши похідну функції $g(x)$ і розв'язавши рівняння $110 \cdot \frac{3 - \ln x}{x^2} = 0$, з'ясуємо, що дана функція має на відрізку $[10; 100]$ єдину стаціонарну точку $x_0 = e^3 \approx 20,1$.

Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з ”+” на ”–”, то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $x_0 = e^3 \approx 20,1$ є точкою максимуму функції g . Виходячи з єдиності

такої точки на вказаному відрізку, стверджуємо, що в ній функція $g(x)$ набуває найбільшого значення: $g(e^3) = \frac{110(\ln e^3 - 2)}{e^3} = \frac{110}{e^3} \approx 5,48$.

Отже, у 20-річної людини ємність легенів максимальна. Вона наближено дорівнює 5,48 л.

Беручи до уваги зростання функції $g(x)$ на відрізку $[10; 20,1]$ і спадання на відрізку $[20,1; 100]$, склавши таблицю значень функції, побудуємо її графік (рис.2.18.).

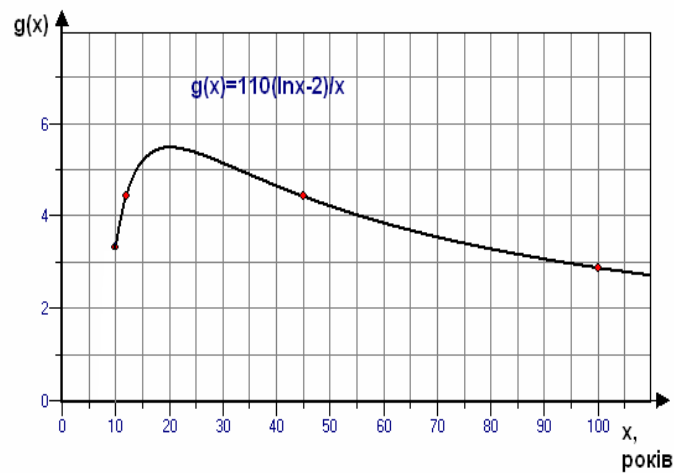


Рис. 2.18.

Вміння застосовувати похідну до обчислення наближеного значення функції має важливе значення при розв'язуванні деяких прикладних задач природничого змісту. Розглянемо задачу такого типу.

Задача 12. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г [49].

Розв'язання

Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1 + 0,03)^t = 1,03^t$

Для функції f , диференційовної в точці x , і достатньо малих Δx має місце наближена рівність: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скориставшись цією формулою, маємо: $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,03$, $f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{6} \cdot x_0^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$ і, отже $(1 + 0,03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,03 \approx 1,005$ (г).

Відповідь: 1,005 г [49, с. 12-70].

2.3. Застосування різних видів функцій та їх графіків до розв'язування олімпіадних задач

Часто факультативні заняття з математики користуються попитом в учнів, які мають гарні здібності в математиці і дуже швидко та якісно опановують теми, які розглядаються на уроках. З такими учнями на факультативах вчителі часто розглядають більш складніші, нестандартні типи задач – олімпіадні завдання.

Олімпіада, як один з видів математичних змагань, має широку популярність у нашій країні. Математична олімпіада - засіб виховання сумлінного ставлення дітей до навчання; одна з форм позакласної роботи, яка створює умови для вияву спортивного азарту, посилює зв'язки сім'ї та школи. Цей вид позакласної роботи цікавий для дітей тим, що тут вони можуть випробувати свої знання, позмагатися з іншими учнями з того чи іншого предмету, і, звичайно, отримати оцінку своїх знань [51].

Варто звернути увагу, що функціональна лінія досить часто зустрічається на олімпіадах з математики у 9-11 класах. Тому, розроблені програми для роботи саме з такими учнями, аби ще більше розширити їх знання з цієї теми та потім проявити себе на міському, обласному чи Всеукраїнському рівнях [10].

9 клас (1 год на тиждень)

І. Функції та їх графіки (6 год)

Виникнення та розвиток поняття „функція”. Основні характеристики функції. Композиція функцій, оборотність функції. Найпростіші функціональні співвідношення та функціональні рівняння. Елементарні перетворення графіків функцій. Побудова графіків, що містять модуль (побудова ГМТ.). Побудова графіків функцій, що містять цілу та дробову частини. Побудова ГМТ., що містять антьє і мантису. Арифметичні дії з графіками.

II. Рівняння та нерівності (10 год)

Стандартні та нестандартні прийоми розв'язування рівнянь. Функціональний метод розв'язування рівнянь. Розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять цілу та дробову частини. Метод нерухомої точки та розв'язування рівнянь відносно коефіцієнтів. Рівняння і нерівності з параметрами, основні підходи до їх розв'язування.

10-11 класи (1 година на тиждень)

Порядок вивчення тем 10-11 класів та розподіл годин визначається викладачем у відповідності з тематикою планування основного курсу в цих класах.

III. Функції та їх графіки.

Побудова графіків функцій без застосування похідної. Побудова складених функцій. Арифметичні дії над графіками функцій. Основні характеристики функцій. Періодичні функції, основні теореми про періодичність. Оборотноість функції; взаємообернені функції. Функціональні рівняння. Функціональні співвідношення і функціональні рівняння. Метод підстановок як основний метод розв'язування функціональних рівнянь. Адитивні функції та функціональні рівняння для лінійної, показникової та логарифмічної функцій. Границя функції за Коші, за Гейне. Основні теореми про границі. Нескінченно малі та великі функції в точці, їх зв'язок. Теореми Больцано-Коші та їх використання. Похідна і розклад на множники многочленна. Похідна у доведенні нерівностей та тотожностей. Похідна та сумування послідовностей. Похідна та порівняння чисел. Нестандартні рівняння і нерівності [4].

Задачі на побудову графіків функцій з модулями часто пропонують на математичних олімпіадах для учнів 10-11 класів.

Розглянемо деякі олімпіадні завдання, в яких реалізується функціональна лінія.

Розглянемо основні правила, на яких ґрунтується розв'язання завдань на побудову графіків функцій з модулем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(x), & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$$

$$|y| = f(x) = \begin{cases} \pm f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ \text{не існує,} & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Задача 1. Побудувати графік функції $y = \frac{|x-2|}{x-2} + 2x$.

Розв'язання

Знаходимо область визначення функції: $D(y): x - 2 \neq 0$

$$x \neq 2$$

За означенням модуля маємо: $y = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} + 2x = 1 + 2x, & \text{якщо } x \geq 2, \\ -\frac{x-2}{x-2} + 2x = -1 + 2x, & \text{якщо } x < 2. \end{cases}$

Будуємо графік $y = -1 + 2x$ і чітко наводимо частину графіка, яка лівіше прямої $x = 2$. Аналогічно будуємо графік $y = 1 + 2x$.

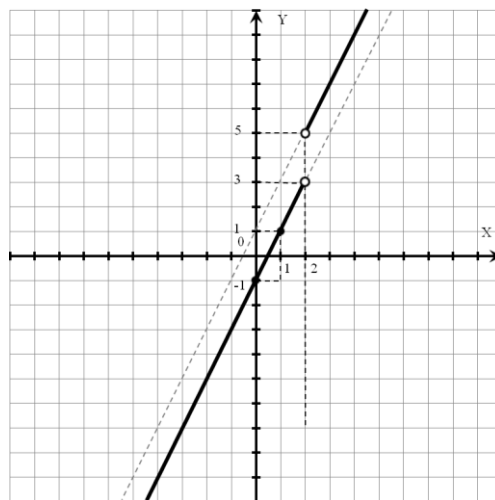


Рис. 2.19.

Виключаємо точку $x = 2$, яка не входить до $D(y)$.

Відповідь: див. рис.2.19.

Задача 2. Побудувати графік функції $y = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3}$. [5]

Розв'язання

$$D(y): x \neq 2$$

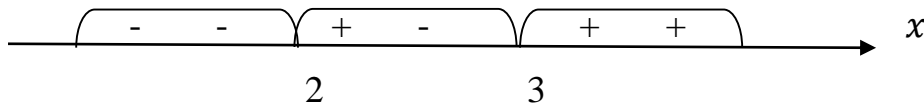
$$x \neq 3$$

Знаходимо корені підмодульних виразів, розв'язав рівняння

$$x - 2 = 0 \quad \text{і} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{і} \quad x = 3$$

Наносимо їх на числову пряму і отримуємо проміжки



З'ясовуємо знак кожного підмодульного виразу на кожному із отриманих проміжків.

Спростуємо вираз в кожному отриманому проміжку:

1) $x \leq 2$

$$y = \frac{-(x-2)}{x-2} - \frac{(x-3)}{x-3} = -1 - 1 = -2$$

2) $2 < x \leq 3$

$$y = \frac{x-2}{x-2} - \frac{x-3}{x-3} = 1 - 1 = 0$$

3) $x > 3$

$$y = \frac{x-2}{x-2} + \frac{x-3}{x-3} = 1 + 1 = 2$$

Будуємо отримані графіки на кожному із проміжків. Виколюємо на графіках точки $x = 2$ і $x = 3$.

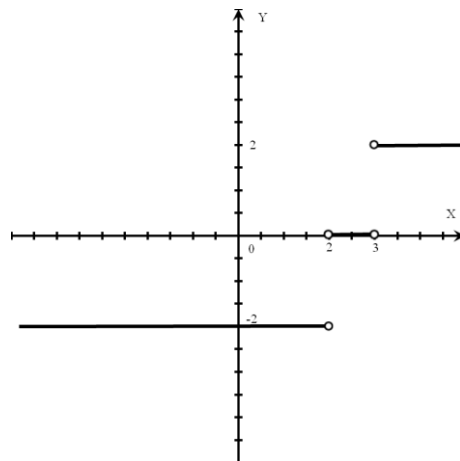


Рис. 2.20.

Відповідь: див. рис.2.20.

Задача 3. Побудувати графік функції $y = x + \{x\} + [x] + |x|$ [9]

Розв'язання

Знаючи, що $x = [x] + \{x\}$, маємо

$$y = x + x + |x| = 2x + |x| = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } x \geq 0 \\ x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

Графік має вигляд:

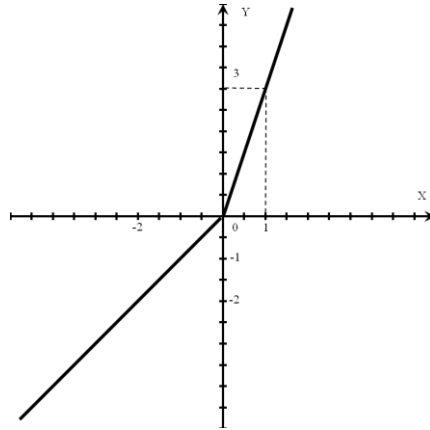


Рис. 2.21.

Відповідь: див. рис.2.21.

Задача 4. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x + 5 + 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}}$ [69].

Розв'язання

Після тотожних перетворень одержимо:

$$y = \sqrt{(\sqrt{x+1} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1} - 2)^2} = |\sqrt{x+1} + 2| + |\sqrt{x+1} - 2|$$

$$D(y): x + 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

За вказаною схемою в задачі 2 маємо:

$$\sqrt{x+1} + 2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} - 2 = 0$$

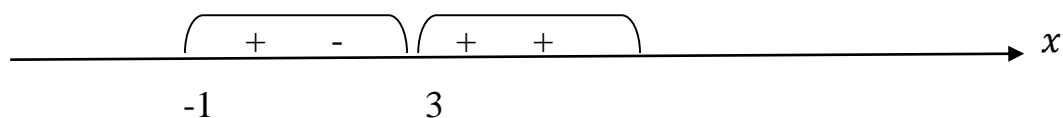
$$\sqrt{x+1} = -2$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$\emptyset$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$



$$1) -1 \leq x \leq 3$$

$$y = \sqrt{x+1} + 2 - \sqrt{x+1} + 2 = 4$$

$$2) x > 3$$

$$y = \sqrt{x+1} + 2 + \sqrt{x+1} - 2 = 2\sqrt{x+1}$$

Маємо графік:

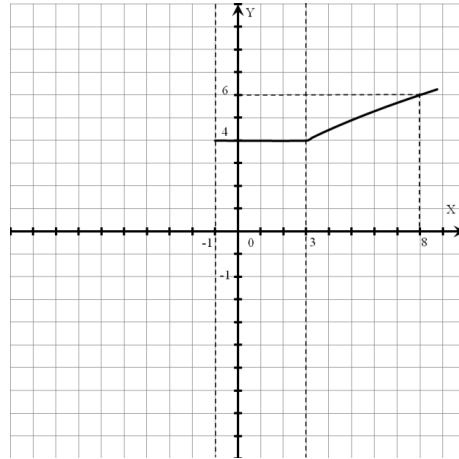


Рис. 2.22.

Відповідь: див.рис.2.22.

Задача 5. Побудувати графік функції $|y| = \frac{1}{x-1}$ [46].

Розв'язання

$$D(y) : x \neq 1$$

За означенням модуля маємо:

$$|y| = f(x) = \begin{cases} \pm f(x), \text{ якщо } f(x) \geq 0, \\ \text{не існує, якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Тому має місце

$$y = \frac{1}{x-1} \text{ і } y = -\frac{1}{x-1}, \text{ якщо } \frac{1}{x-1} \geq 0, \text{ тобто } x \geq 1$$

Графік має вигляд

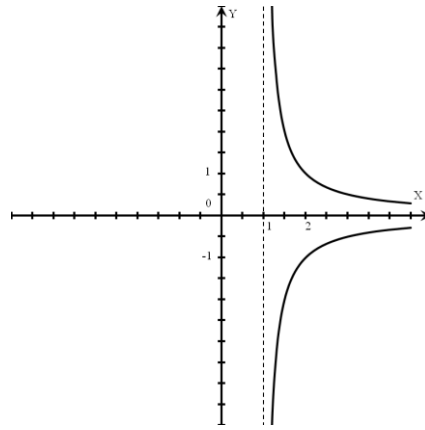


Рис. 2.23.

Відповідь: див. рис.2.23.

Задача 6. Побудувати графік функції $y = x \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

Розв'язання

$D(y)$: $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi_n, n \in Z$

За означенням модуля маємо:

$$y = \begin{cases} x \frac{\sin x}{\sin x} = x, \text{ якщо } \sin x \geq 0, \pi_n \leq x \leq \pi + \pi_n, n \in Z \\ x \left(-\frac{\sin x}{\sin x} \right) = -x, \text{ якщо } \sin x < 0, -\pi + \pi_n < x < \pi_n, n \in Z \end{cases}$$

Графік має вигляд:

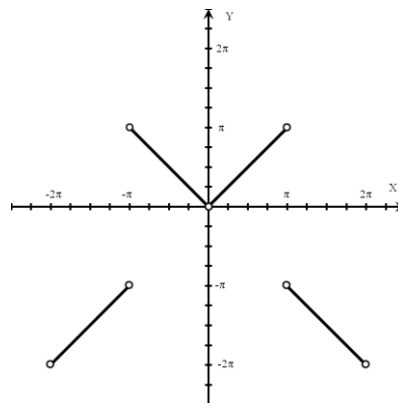


Рис. 2.24.

Відповідь: див. рис.2.24.

Задача 7. Побудувати графік функції $|y| = \frac{|x-1|}{x^2-1}$ [24].

Розв'язання

$$D(y): x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

За означенням модуля

$$|y| = f(x) = \begin{cases} \pm f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ \text{не існує,} & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Маємо графіки:

$$\text{Якщо } \frac{|x-1|}{x^2-1} \geq 0$$

$$|x-1|(x^2-1) \geq 0$$

$$1) (x-1)^2(x+1) \geq 0, \quad x \geq 1$$

$$x \in (1; \infty)$$

$$2) (x-1)^2(x+1) \leq 0, \quad x < 1$$

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$y = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x^2-1} \\ -\frac{|x-1|}{x^2-1} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, x \geq 1 \\ -\frac{(x-1)}{x^2-1}, x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, x \geq 1 \\ -\frac{1}{x+1}, x < 1 \end{cases}$$

Будуємо графік функції

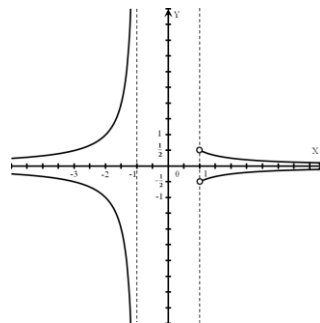


Рис. 2.25.

Відповідь: див. рис. 2.25.

2.4. Імітаційно-моделюючі програми для реалізації функціональної лінії на факультативних заняттях з математики.

Говорячи про факультативні заняття з алгебри, не можна не сказати про те, настільки велику роль в цьому процесі відіграють мультимедійні засоби та ІКТ. Можна чітко сказати про те, що навчання на факультативах – це взаємодія вчителя, учнів та електронних навчальних засобів. Можливості сучасних комп'ютерів зараз беруть на себе більшу частину функцій вчителя, які прийняті у класичній формі навчання.

Засоби ІКТ відіграють роль інструментів у процесі візуалізації в ході вивчення теми “Функції” на факультативах, за допомогою яких:

- учням забезпечується віддалений вільний доступ до навчальних матеріалів, великої кількості додаткової інформації;
- вчитель може здійснювати швидкий контроль і управління навчальним процесом, а учень знаходячись на будь-якій відстані від навчального закладу може в зручний для себе час прослухати чи переглянути матеріали уроку необхідну кількість разів, здійснювати зв'язок з вчителем;
- є можливість використання на уроках різноманітних способів представлення матеріалів: тексти, графіки, відео, звукові матеріали, анімації.[15, 47]

Слід зазначити, що в курсі математики, особливо звертаючи увагу на тему «Функції», є розділи та теми, для вивчення і розуміння яких в учнів має бути розвинуте образне мислення, вміння аналізувати та виконувати порівняння. Звичайно, що на уроках математики класичного навчання не завжди можна виконати ряд необхідних демонстрацій, тому діти часто мають труднощі у розумінні цієї теми, оскільки не можуть уявити певні явища. Тут на допомогу приходить комп'ютер, який відіграє значну роль на факультативних заняттях, і саме на таких уроках його допомога є дуже необхідна, адже використовуючи певні програми ІКТ можна створювати моделі, які допомагають уявити та візуалізувати те, що вивчається [16].

Комп'ютерні програми для моделювання та побудови дають можливість вдома, самотійно учням створювати на екрані комп'ютерів «живу», наочну картинку, що також значно допомагає удосконалити урок [59].

Використання засобів ІКТ на уроках алгебри, під час вивчення теми «Функції» в моделі факультативного навчання дає можливість вчителю пояснювати матеріал за допомогою наочностей в певних програмах, оптимізувати при цьому витрати часу, а також перевірити засвоєні учнями знання в інтерактивному середовищі. Такий режим роботи є дуже продуктивним і робить уроки яскравими, цікавими, доступними, сприяє розвитку інформаційної культури учнів та покращує їх пізнавальний потенціал.

З метою оптимізації засвоєння теми «Функції» під час факультативних занять в самотійній та класній роботі ефективно використовувати такі програмні засоби ІКТ: відео уроки, презентації, тематичні комп'ютерні ігри, бібліотеки електронних підручників, посібників, довідників, програми для візуалізації та побудови, засоби для контролю знань. [26, с. 8]

На уроках алгебри в темі «Функції» комп'ютер для учнів виступає як «моделювальний стенд». Згадуючи слова К. Ф. Гауса про те, що «Математика – наука для очей, а не для вух», при вивченні цієї теми необхідно звернути увагу учнів на те, що найбільш ефективно використовувати комп'ютерні програми для побудови під час створення динамічних, анімаційних моделей та побудов графіків, що значно покращить їх розуміння та уявлення про поняття, об'єкти та перетворення, які вони вивчають.[27-29]

В сучасному світі розроблено велику кількість програмних засобів, спрямованих на застосування на уроках математики, а особливо під час вивчення теми «Функції». До цих засобів відносять такі програми: GRAN-1D, GRAN-2D, GRAN-3D, Advanced Grapher, Open Planimetry, Open Stereometry, Dynamic Geometry (DG), GeoGebra, GeoGebra 3D, «1С: Репетитор. Математика», Grapher 3D, «Математикус», деякі фрагменти електронних підручників «Відкрита математика 2.5. Функції і графіки».[48, 52, 53]

Розглянемо найбільш популярні програмні продукти, які можна використати на уроках алгебри з теми «Функції» під час факультативних занять [30, 31].

1. Ігрові програми.

Ігрові програми в методиці вивчення теми «Функції» можуть бути використані як мотивація, як засіб моделювання дослідницької задачі чи засіб для стимулювання та організації учнями певного виду мислення.

До таких програм можна віднести деякі фрагменти електронних підручників «Відкрита математика 2.5. Функції і графіки». Навчальні ігри в цьому підручнику моделюють ситуацію, яка спонукає учнів до вивчення теми, стимулює творче та образне мислення та сприяє налагодженню спільних дій між учнями, формує стратегії до розв'язання задач.

2. Імітаційно-моделюючі програми.

Такі програми більше використовують для самостійної роботи учнів. З їх допомогою можна прослідкувати, як змінюючи різні чинники одержуються нові результати та перетворення. Імітаційно-моделюючі програми зазвичай застосовують для демонстрації моделей, фігур та графіків функцій під час вивчення теми або ж під час лабораторних чи практичних робіт. Процес виконання побудови та результати цих програм дозволяють працювати на уроках з наочностями, обробляти результати чисельного і графічного представлення, знайомлять учнів з деякими властивостями графіків функцій та їх елементами.[60]

До імітаційно-моделюючих програм відносять GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, AdvancedGrapher, GeoGebra, Desmos.

Оглянемо детальніше найбільш вживані імітаційно-моделюючі засоби ІКТ.

1. GeoGebra – це безкоштовна, багатоплатформова динамічна математична програма для всіх рівнів освіти, що охоплює геометрію, алгебру, таблиці, графи, статистику і арифметику в одному зручному для використання пакеті.

Основними характеристиками GeoGebra є:

- графіка, алгебра і таблиці повністю динамічні та пов'язані між собою;

- легкий та зрозумілий у використанні інтерфейс;
- безкоштовна програма з відкритим кодом;
- доступна багатьма мовами світу;
- можна самому створювати інтерактивні навчальні матеріали, вебсторінка.

В цьому програмному додатку можна будувати креслення за допомогою точок, векторів, відрізків, ліній, будувати графіки функцій, досліджувати та аналізувати їх. Ця програма дуже зручна як для роботи «мишею», так і з прямим введенням даних умовними символами, що дуже зручно на уроках алгебри, особливо під час вивчення теми «Функції».[2]

2. AdvancedGrapher – це дуже потужна та проста у використанні програма для побудови графіків функцій та їх аналізу. Підтримує побудову графіків функцій виду $Y(x)$, $X(y)$, в полярних координатах, заданих параметричними рівняннями, графіків таблиць, неявних функцій (рівнянь) і нерівностей. До 30 графіків в одному вікні.

Обчислювальні можливості: регресійний аналіз, знаходження нулів і екстремумів функцій, точок перетину графіків, знаходження похідних, рівнянь дотичних і нормалей, чисельне інтегрування. Велика кількість параметрів графіків і координатної площини. Має можливості друку, збереження і копіювання графіків у вигляді малюнків, багатодокументний режим налаштовується [48].

Офіційний сайт розробника – www.alentum.com.

Програма AdvancedGrapher дозволяє не тільки будувати різноманітні графіки на площині, а й проводити дослідження функцій, знаходити наближено корені алгебраїчного рівняння і точки екстремуму функції однієї змінної, отримувати аналітичний вираз для похідної, виконувати чисельне інтегрування, графічно розв'язувати нерівності, здійснювати регресійний аналіз і т. д.

3. GRAN1 – комп'ютерний онлайн додаток, за допомогою якого можна виконувати побудову та аналіз функціональних залежностей.

Програма дозволяє виконувати побудову графіків функцій заданих параметрично чи таблично як в декартових, так і в полярних координатах.

Графічно розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з однією чи двома змінними; наближено визначати корені многочленів; досліджувати границі числових послідовностей та функцій; опрацьовувати статистичні дані; обчислювати визначені інтеграли; площі криволінійних трапецій; площі поверхонь та об'єми тіл обертання тощо [52].

4.Desmos - простий і потужний інструмент для побудови графіків, онлайн графічний калькулятор. Дозволяє не тільки швидко побудувати графік функції за формулою, але й відобразити табличні дані, вивчити поведінку функції при зміні параметрів, розв'язати систему рівнянь або нерівностей і багато іншого.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У другому розділі магістерської роботи:

- подано основний теоретичний матеріал, яким оволодівають учні в ході вивчення теми «Функції»,
- запропоновані зразки прикладних задач, для застосування на факультативних заняттях,
- розглянуто імітаційно-моделюючі програми для використання на уроках факультативних курсів.

Під час написання другого розділу було проаналізовано підручники з математики:

Академічний рівень:

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас.

Рівень стандарту:

2. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу (рівень стандарту) для 10-11 класів.

З цього можна зробити підсумок, що для успішного засвоєння теоретичного матеріалу теми, на уроках та факультативних заняттях доцільно використовувати поєднання підручників різних авторів

Розглянуто зразки прикладних задач, на факультативних заняттях з математики, які дають можливість повторити означення функції, підготуватися до сприйняття означення числової функції, пригадати основні способи задання функції, повторити властивості деяких основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

З метою оптимізації засвоєння теми «Функції» під час факультативних занять в самостійній та класній роботі описані ефективні для використання такі програмні засоби ІКТ: відео уроки, презентації, тематичні комп'ютерні ігри, бібліотеки електронних підручників, посібників, довідників, програми для візуалізації та побудови, засоби для контролю знань.

РОЗДІЛ 3

Розробка факультативного курсу «Функціональна лінія в ЗНО (НМТ) для учнів старшої школи

3.1. Програма факультативного курсу за вибором для учнів 10-11 класів

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Однією з провідних тем в математиці – є тема «Функції». Надзвичайно велика кількість завдань, рівнянь, нерівностей, прикладних задач – розв'язують саме із застосуванням графіків, використовуючи графічні інтерпретації та побудови.

Вміння читати, будувати та перетворювати графіки функцій сприяють розвитку образної уяви учнів, навчають мислити їх творчо та нестандартно. Саме з теми «Функції» у ЗНО (НМТ) найбільше запропоновано завдань. Ті навички мислити нестандартно та глибокі знання функціональної лінії не тільки стануть корисними для здобувачів освіти під час здачі вступних іспитів, а й у подальшому навчанні у вищому навчальному закладі.

Курс розрахований на два навчальні роки, разом 70 академічних годин, по 1 годині на тиждень протягом першого навчального року (10 клас) та другого навчального року (11 клас).

Мета курсу – повторити, розширити та поглибити знання учнів з теми «Функції». Допомогти глибше усвідомити важливість функціональної лінії, її прикладну спрямованість, а також підготувати їх до успішної здачі іспитів.

Оскільки за структурою нової форми іспитів НМТ не передбачається виконання завдань частини III з розгорнутою відповіддю, то цей курс чудово підійде для учнів, які вивчають математику на академічному рівні.

Під час роботи з учнями в 10 класі, на факультативних заняттях курсу, пропонується більше уваги приділяти оволодінню теоретичною базою та виконувати простіші тренувальні приклади з ЗНО та НМТ минулих років, що стане важливою базою для подальшої роботи в 11 класі. Вже в 11 класі, слід приділяти увагу розвитку більш практичних навичок у розв'язанні завдань і на повторення теоретичного матеріалу виділяти не більше 15-20 хвилин.

Оскільки факультативні курси мають на меті не лише конкретну підготовку учнів, а вони також розраховані на те, щоб сприяти зацікавленню учнів у вивченні математики, показувати практичне застосування набутих знань, заохочувати їх до вивчення математики в подальшому, то на факультативних заняттях також варто виділяти уроки, на яких учні зможуть не лише використовувати вивчене для підготовки до НМТ чи ЗНО, а й для застосування у повсякденному житті.

Матеріал курсу охоплює весь курс алгебри основної та старшої школи і сприяє систематизації наявних відомостей з теми «Функції».

Для організації навчального процесу при викладанні курсу необхідно мати елементарне матеріально-технічне забезпечення, оскільки сучасна форма випускних іспитів передбачає онлайн-проходження, тому важливим буде навчитися учням впевнено себе відчувати на проходженні тесту, тренуючись на спеціальних онлайн-симуляторах.

Програма курсу за вибором розроблена на основі чинної програми зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Розподіл навчального часу є орієнтовним. Резерв часу може бути використаний учителем на власний розсуд, зокрема, як на узагальнення і систематизацію знань, так і для збільшення часу на детальне вивчення більш складних для учнів тем програми.

Орієнтовний розподіл навчального часу

№ з/п	Тема	Кількість годин
Перший рік навчання. 10 клас (35 год)		
1.	Числові послідовності	3
2.	Означення функції та її властивості	5
3.	Графіки елементарних функцій та їх властивості	10
4.	Показникова та степенева функції, їх властивості	4
5.	Логарифмічна функція та її властивості	3
6.	Тригонометричні функції та їх властивості	3
7.	Комплексні вправи	3
	Резервний час	4
Другий рік навчання. 11 клас (35 год)		
1	Повторення основних фактів за 1 рік вивчення курсу	4
2	Побудова графіків функцій, що містять знак модуля	4
3	ГМТ алгебраїчних виразів на координатній площині	3
4	Обернені тригонометричні функції та їх графіки	3

5	Похідна функції її геометричний та фізичний зміст	7
6	Первісна та визначений інтеграл	5
7	Комплексні вправи	9
	РАЗОМ	70

3.2. Методичні рекомендації щодо викладання курсу та орієнтовні конспекти тем

Перший рік навчання. 10 клас

Тема 1. Числові послідовності

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Числові послідовності»
2	Типові завдання ЗНО (НМТ)
3	Прикладні задачі теми «Числові послідовності»

Основна мета: засвоїти означення арифметичної та геометричної прогресії; вивчити формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресій; вміти застосовувати формули суми n перших членів арифметичної та геометричної прогресій, навчитися узагальнювати набуті знання та використовувати їх до розв'язування прикладних задач, що пов'язані з конкретними життєвими процесами, а також застосовувати вивчені прийоми до розв'язування типових завдань ЗНО (НМТ).

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* основні означення та формули теми «Числові послідовності»;
- *уміти:* розв'язувати задачі на арифметичну та геометричну прогресії, аналізувати отримані результати, застосовувати отримані знання до прикладних задач.

Заняття 1. Короткі теоретичні відомості з теми «Числові послідовності»

Означення числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність дійсне число a_n , то кажуть, що задано числову послідовність: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$

Отже, числова послідовність — функція натурального аргумента.

Число a_1 називається першим членом послідовності, число a_2 — другим членом послідовності, число a_3 — третім і т. д. Число a_n називається n -м членом цієї послідовності, а натуральне число n — його номером. Із двох сусідніх членів $a_i ; a_{i+1}$ послідовності член a_{i+1} називається наступним (відносно a_i), а a_i — попереднім (відносно a_{i+1}).

Способи задавання послідовності

Послідовність часто задають за допомогою формули n -го члена, тобто формули, що дозволяє визначати члени послідовності за їхніми номерами.

Наприклад, якщо послідовність задано формулою n -го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$, то перші п'ять її членів відповідно дорівнюють:

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{4}; a_4 = \frac{4}{5}; a_5 = \frac{5}{6}.$$

Послідовність можна задати рекурентною формулою, тобто формулою, що виражає будь-який член послідовності, починаючи з якогось, через попередні (один або декілька) члени.

Наприклад, якщо $a_1 = 1$, а $a_{n+1} = a_n + 5$ то перші п'ять членів послідовності відповідно дорівнюють: $a_1 = 1$; $a_2 = a_1 + 5 = 1 + 5 = 6$; $a_3 = a_2 + 5 = 6 + 5 = 11$; $a_4 = a_3 + 5 = 11 + 5 = 16$; $a_5 = a_4 + 5 = 16 + 5 = 21$.

Види послідовностей

Послідовності бувають скінченні і нескінченні.

Послідовність називається скінченною, якщо вона має скінченну кількість членів.

Наприклад, послідовність двоцифрових натуральних чисел: 10; 11; 12; ..., 98; 99 є скінченною.

Послідовність називається зростаючою, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший від попереднього.

Наприклад, послідовність 2; 4; 6; 8; ...; $2n$; ... є зростаючою.

Послідовність називається спадною, якщо кожний її член, починаючи з другого, є меншим від попереднього.

Наприклад, послідовність $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ є спадною.

Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називається послідовність $a_1; a_2; a_3; \dots$, кожний наступний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до того самого числа d , яке називається різницею арифметичної прогресії: $a_{n+1} = a_n + d, n \in N$.

В арифметичній прогресії n -й член визначається за формулою $a_n = a_1 + d(n - 1)$, де n — номер члена, a_n — n -й член, a_1 — перший член, d — різниця прогресії.

Наприклад, якщо $a_1 = 4, d = 4$, то $a_{100} = a_1 + 99d = 4 + 99 \cdot 4 = 397$.

Характеристична властивість арифметичної прогресії: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Якщо всі члени якоїсь послідовності, починаючи з другого, задовольняють умову $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то ця послідовність є арифметичною прогресією.

Сума перших n членів арифметичної прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Суму перших n членів арифметичної прогресії можна знайти й за формулою $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Наприклад, $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$;

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{2 \cdot 1 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (1 + n - 1) \cdot n = n^2$.

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називається послідовність $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots$, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q ($q \neq 0, |q| \neq 1, b_1 \neq 0$), яке називається знаменником геометричної прогресії: $b_{n+1} = b_n \cdot q, q \neq 0, |q| \neq 1, b_1 \neq 0, n \in N$.

У геометричній прогресії n -й член визначається за формулою $b_n = b_1 q^{n-1}$, де n — номер члена, b_n — n -й член, b_1 — перший член, q — знаменник прогресії.

Наприклад, якщо $b_1 = 64, q = \frac{1}{2}$, то $b_7 = b_1 q^6 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1$.

Характеристична властивість геометричної прогресії:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \text{ або } b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Якщо всі члени числової послідовності, починаючи з другого, задовольняють умову $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ або $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то ця послідовність є геометричною прогресією.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$.

Заняття 2. Типові завдання ЗНО (НМТ)

1. В арифметичній прогресії (a_n) задано $a_1 = 4, a_2 = -1$. Укажіть формулу для знаходження n -го члена цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$a_n = -1 + 5n$	$a_n = 7 - 3n$	$a_n = 5 - n$	$a_n = 1 + 3n$	$a_n = 9 - 5n$

2. У геометричній прогресії (b_n) задано $b_3 = 0,2, b_4 = \frac{3}{4}$. Знайдіть знаменник цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{20}$

3. Задано геометричну прогресію (b_n) для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник $q = -2$. Знайдіть b_1 .

А	Б	В	Г	Д
24	14	10	-6	-24

4. Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією, знаменник якої $q < 0$?

А	Б	В	Г	Д
-25; 20; -15; 10	-80; -40; -20; -10	30; 10; -10; -10	10; -20; 40; -80	-15; -30; -45; -60

5. В арифметичній прогресії (a_n) задано $a_2 = -9, a_4 = -4$. Визначте різницю цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
2,5	6,5	$-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$	-2,5	-6,5

6. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії 2,9; 2,2; 1,5; ...

А	Б	В	Г	Д
-0,1	-0,3	-0,6	-0,8	-1,3

Заняття 3. Прикладні задачі теми «Числові послідовності»

1. У залі кінотеатру 18 рядів. У першому ряду знаходяться 7 місць, а в кожному наступному ряду на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому залі [21]?

А	Б	В	Г	Д
432	438	369	450	864

2. У магазині побутової техніки діє акція: на першу велику покупку (вартість перевищує 1000 грн) надається знижка 30 грн, на кожну наступну велику покупку попередня знижка збільшується на 25 грн. На яку за рахунком велику покупку отримає в цьому магазині покупець знижку 180 грн? [21]

А	Б	В	Г	Д
четверту	п'яту	шосту	сьому	восьму

3. Одним із мобільних операторів було запроваджено акцію «довше розмовляєш – менше платиш» з такими умовами: плата за з'єднання відсутня; за першу хвилину розмови абонент сплачує 30 коп, а за кожну наступну хвилину розмови на 3 коп менше, ніж за попередню; плата за одинадцятую та всі наступні хвилини розмови не нараховується; умови дійсні для дзвінків абонентам усіх мобільних операторів країни. Скільки за умовами акції коштуватиме абоненту цього мобільного оператора розмова тривалістю 8 хвилин (у грн)? [22]

4. Робітники отримали замовлення викопати криницю. За перший викопаний у глибину метр криниці їм платять 50 грн, а за кожний наступний – на 20 грн більше, ніж за попередній. Скільки грошей (у грн) сплатять робітникам на викопану криницю завглибшки 12 м? [22]

5. У першому ряду кінотеатру встановлено 15 крісел, а у кожному наступному – на 3 крісла більше, ніж у попередньому. Скільки всього крісел встановлено в сьомому ряду цього кінотеатру?[20]

А	Б	В	Г	Д
21	27	30	33	36

Тема 2. Означення функції та її властивості

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Функція. Способи задання функції»
2	Короткі теоретичні відомості з теми «Область визначення та область значень функція»
3	Короткі теоретичні відомості з теми «Графік функції та його властивості»
4	Типові завдання ЗНО (НМТ)
5	Прикладні задачі теми «Означення функції та її властивості»

Основна мета: сформувати уявлення про функціональну залежність як математичну модель реальних процесів; сформувати вміння задавати формулами залежності, які відображають реальні процеси; навчити учнів розв'язувати задачі, що передбачають застосування поняття функції; домогтися засвоєння способів задання функції; сформувати вміння знаходити область визначення і область значень функцій, заданих різними способами; сформувати вміння будувати і читати графіки функцій

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* означення функції, області визначення, області значень функції, способи задання функцій, володіти поняттям графік функції;
- *уміти:* знаходити область визначення, область значень функції, застосовувати отримані знання до розв'язання прикладних задач.

Заняття 1. Короткі теоретичні відомості з теми «Функція. Способи задання функції»

Означення 1. Нехай дано дві множини X і Y і нехай кожному елементу x множини X поставлено у відповідність деякий елемент y множини Y . Тоді говорять, що задано функцію $y = f(x)$ на множині X зі значеннями на множині Y .

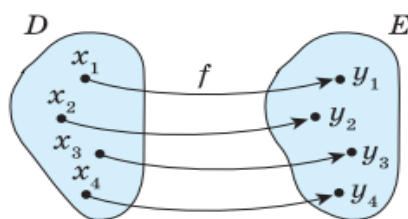


Рис. 3.1.

Означення 2. Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом функції, а змінна y — залежною змінною, або функцією.

В курсі алгебри та математичному аналізі розглядають функції числового аргумента, тобто X і Y - множини дійсних чисел.

Відповідно до означення функції, випливає, що для того, щоб її задати, необхідно вказати дві множини чисел (X і Y) та закон відповідності між ними. Це можна зробити чотирма способами:

- таблицю;
- аналітично (формулою);
- графічно;
- словесно.

Заняття 2. Короткі теоретичні відомості з теми «Область визначення та область значень функції»

Означення 3. Областю визначення функції $f(x)$ називається множина дійсних значень незалежної змінної x , для яких ця функція визначена (має зміст). Позначається так: $D(f)$.

Означення 4. Областю значень функції $y = f(x)$ називається множина всіх дійсних значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях аргумента з області визначення. Позначається так: $E(f)$.

Приклад 1. Записати область визначення і множину значень функції, заданої аналітично – формулою:

- 1) $y = 2x + 1$; $D(y)$: x – будь-яке число, $E(y)$: y – будь-яке число.
- 2) $y = \frac{5}{x}$; $D(y)$: x – будь-яке число, крім 0, оскільки на нуль ділити не можна, $E(y)$: y – будь-яке число, крім 0, оскільки часткою числа 5 і будь-якого числа (крім нуля) є число, відмінне від нуля.

Заняття 3. Короткі теоретичні відомості з теми «Графік функції та його властивості»

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область

визначення функції $y = f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції в точці x [43, с. 32 - 41].

Алгоритм знаходження значення функції, заданої формулою, за даним значенням аргументу

1. Замість незалежної змінної (аргументу) у формулу підставити дане її значення.
2. Обчислити значення одержаного числового виразу в порядку, заданому формулою. Одержане число – шукане значення функції.

Алгоритм знаходження значення аргументу для даного значення функції, заданої формулою

1. Скласти рівняння, підставивши у формулу замість y дане значення функції.
2. Розв'язати одержане рівняння. Корені рівняння – шукані значення аргументу.

Алгоритм знаходження відповідних значень аргументу та функції, яка задана графіком

1. З точки графіка провести перпендикуляр до осі O_x . Число, що є абсцисою точки перетину перпендикуляра з віссю O_x , є значенням аргументу.
2. З точки графіка провести перпендикуляр до осі O_y . Число, що є ординатою точки перетину перпендикуляра з віссю O_y , є значенням функції.

Властивості функції

Означення 5. Нулями функції називаються значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю.

Алгоритм знаходження нулів функції, заданої формулою $y = f(x)$

1. Скласти рівняння, підставивши у формулу замість y нуль ($f(x) = 0$).
2. Розв'язати одержане рівняння. Корені рівняння – шукані нулі функції.
3. Якщо рівняння не має коренів, то функція не має нулів.

Нулі функції $y = f(x)$ – це абсциси точок перетину цієї функції з віссю O_x .

Алгоритм знаходження координат точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю O_x .

1. Знайти нулі функції (розв'язати рівняння $f(x) = 0$).
2. Записати точки, абсцисами яких є нулі функції, а ординати дорівнюють нулю.
3. Якщо функція не має нулів, то її графік не перетинає вісь O_x .

Алгоритм знаходження координат точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю O_y .

1. У формулу, якою задана функція, замість x підставити нуль.
2. Обчислити значення одержаного числового виразу в порядку, заданому формулою.
3. Записати точку, абсциса якої дорівнює нулю, а ордината одержаному числу $(0; f(0))$.

Означення 6. Проміжками знакосталості функції називаються такі проміжки з її області визначення, на яких функція набуває або тільки додатних значень, або тільки від'ємних.

Алгоритми знаходження проміжків додатних (від'ємних) значень функції, заданої формулою $y = f(x)$

1. Скласти нерівність $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$).
2. Розв'язати нерівність. Множина розв'язків нерівності є шуканим проміжком додатних (від'ємних) значень функції.
3. Якщо нерівність $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$) не має розв'язків, то функція $f(x)$ не набуває додатних (від'ємних) значень.

Означення 7. Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо її область визначення симетрична відносно нуля (для будь-якого x із області визначення $-x$ теж належить області визначення) і для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$

Алгоритми доведення парності функції $y = f(x)$

1. Знайти область визначення даної функції.

2. Довести, що область визначення симетрична відносно нуля.
3. Довести, що для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$

Графік парної функції симетричний відносно осі O_y .

Означення 8. Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо область визначення симетрична відносно нуля (для будь-якого x із області визначення $-x$ теж належить області визначення) і для будь-якого x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$

Алгорити доведення непарності функції $y = f(x)$

1. Знайти область визначення даної функції.
2. Довести, що область визначення симетрична відносно нуля.
3. Довести, що для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Означення 9. Функцію називають зростаючою на інтервалі, якщо більшим значенням аргумента цього інтервала відповідають більші значення функції.

Тобто, якщо при $x_2 > x_1$, де x_1 і x_2 – довільні значення аргументу з даного проміжку, $f(x_2) > f(x_1)$ або $y_2 > y_1$, то кажуть, що функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо за названих умов виконується нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$, або $y_2 \geq y_1$, то функція називається неспадною.

Означення 10. Функцію називають спадною на інтервалі, якщо більшим значенням аргумента цього інтервала відповідають менші значення функції.

Інакше, якщо при $x_2 > x_1$, де x_1 і x_2 – довільні значення аргументу з даного проміжку, $f(x_2) < f(x_1)$ або $y_2 < y_1$, то кажуть, що на цьому проміжку функція $f(x)$ спадає.

Якщо за названих умов виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$, або $y_1 \geq y_2$, то функція називається незростаючою.

Означення 11. Інтервали зростання і спадання функції називають інтервалами монотонності, а функцію на такому інтервалі — монотонною.

Алгоритм доведення зростання функції $y = f(x)$ на області визначення (або на проміжку області визначення)

1. Вибрати два довільні значення x_1 і x_2 з області визначення (проміжку), таких, що $x_2 > x_1$, (тобто $x_2 - x_1 > 0$).
2. Довести, що виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ (тобто $f(x_2) - f(x_1) > 0$).

Алгоритм доведення спадання функції $y = f(x)$ на області визначення (або на проміжку області визначення)

1. Вибрати два довільні значення x_1 і x_2 з області визначення (проміжку), таких, що $x_2 > x_1$, (тобто $x_2 - x_1 > 0$).
2. Довести, що виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$ (тобто $f(x_2) - f(x_1) < 0$)

Заняття 4. Типові завдання ЗНО (НМТ)

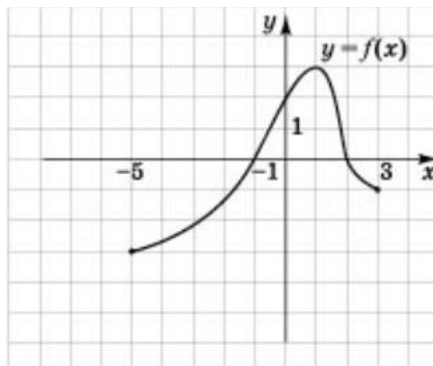
1. Вказати проміжок, якому належать нулі функції $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ [22].

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-5; 3)$	$[-2; 1)$	$(-2; -\infty)$	$[0; 1]$

2. Яке з наведених чисел входить до множини значень функції $y = 2^x + 4$ [22]?

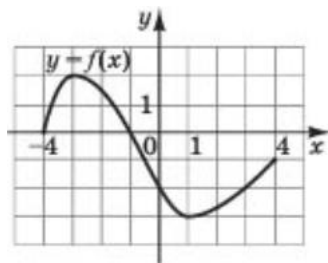
А	Б	В	Г	Д
5	жодне з чисел не входить	3	4	0

3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 3]$. Укажіть проміжок, на якому функція $y = f(x)$ зростає [22].



А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[-1; 2]$	$[1; 3]$	$[-3; 3]$	$[-5; 1]$

4. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть множину всіх значень x , при яких $f(x) \leq -2$ [22].

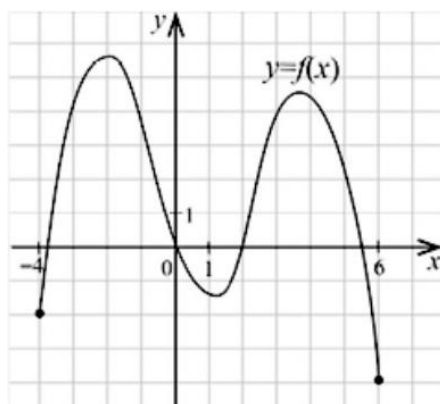


А	Б	В	Г	Д
[0; 3]	[-3; 2]	[-1; 4]	[-3; -2]	[-4; 0]

5. Функція $y = f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть правильну нерівність.

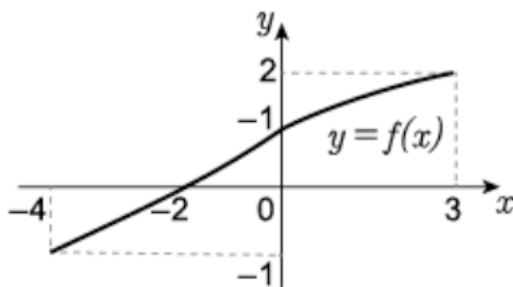
А	Б	В	Г	Д
$f(1) > f(-1)$	$f(1) < f(8)$	$f(1) > f(0)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(10)$

6. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 6]$. Скільки всього коренів має рівняння $f(x) = x$, на цьому відрізку [21].?



А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири

7. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4; 3]$. Укажіть область значень цієї функції [22].



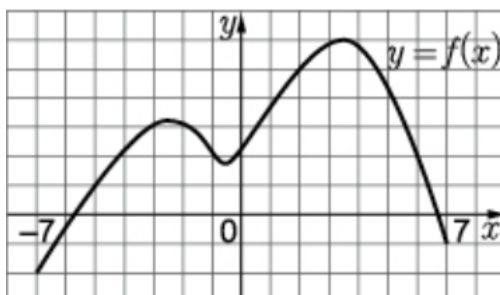
А	Б	В	Г	Д
[-1; 2]	[-4; 3]	[-1; 1]	[-2; -3]	[-4; -2]

8. При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення [22]?

9. Яка з наведених точок належить графіку функції $y = \frac{5+x}{x-2}$ [22]?

А	Б	В	Г	Д
(2; 7)	(1; 6)	(-3; 0,4)	(0,2,5)	(4; 4,5)

10. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-7; 7]$. Користуючись рисунком, знайдіть $f(2)$.

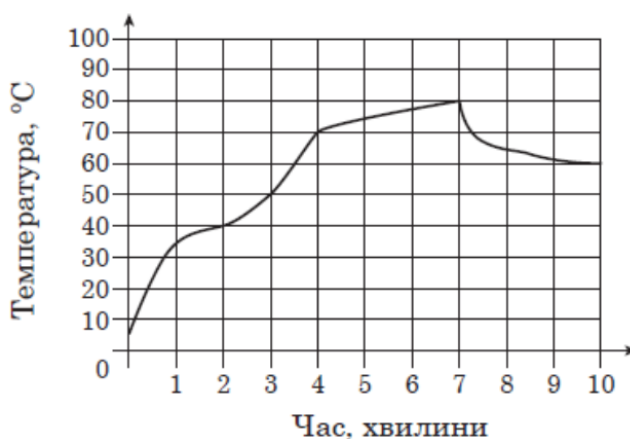


А	Б	В	Г	Д
-4	0	6	2	5

Заняття 5. Прикладні задачі теми «Означення функції та її властивості»

1. Період T електромагнітних коливань у коливальному контурі, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C й котушки з індуктивністю L , обчислюють за формулою Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Визначте із цієї формули індуктивність L [22].

2. На графіку зображено зміну робочої температури двигуна легкового автомобіля протягом 10 хвилин з моменту його запуску. Визначте за графіком кількість хвилин, протягом яких робоча температура двигуна була не більшою за 50°C [22].



А	Б	В	Г
7	4	3	2

Тема 3. Графіки елементарних функцій та їх властивості

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Лінійна функція, її графік та властивості»
2	Короткі теоретичні відомості з теми «Пряма пропорційність»
3	Короткі теоретичні відомості з теми «Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік та властивості»
4	Короткі теоретичні відомості з теми «Функція $y = x^2$, її графік та властивості»
5	Короткі теоретичні відомості з теми «Функція $y = \sqrt{x}$, її графік та властивості»
6	Короткі теоретичні відомості з теми «Перетворення графіків функцій»
7-9	Типові завдання ЗНО (НМТ)
10	Прикладні задачі теми «Графіки елементарних функцій та їх властивості»

Основна мета: навчитися розпізнавати види функцій $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = kx$; навчитися аналізувати поведінку функції за графіком, визначати характерні точки функції: найбільше та найменше значення функції на заданому інтервалі, нулі функції, інтервали зростання та спадання функції; навчитися узагальнювати отримані знання до розв'язування прикладних задач

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* основні властивості та графіки функцій, що розглядаються в темі;
- *уміти:* знаходити область визначення та область значень розглянутих функцій; будувати графіки елементарних функцій; установлювати властивості числових функцій заданих формулою або графіком; використовувати перетворення графіків функцій.

Заняття 1. Короткі теоретичні відомості з теми «Лінійна функція, її графік та властивості»

Означення 1. Лінійною функцією називається функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b – деякі числа, x – незалежна змінна.

- Графіком лінійної функції є пряма.
- Для побудови достатньо двох точок.
- Число k – кутовий коефіцієнт прямої, $k = tg \alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі O_x . При $k > 0$ кут нахилу гострий, при $k < 0$ кут нахилу тупий.

Властивості функції $y = kx + b$

1. Область визначення — множина R всіх дійсних чисел.
2. Область значень — R , якщо $k \neq 0$; число b якщо $k = 0$.
3. Якщо $k \neq 0, b \neq 0$, то функція не є ні парною, ні непарною;
якщо $k = 0$ — функція парна;
якщо $b = 0, k \neq 0$ — функція непарна;
якщо $k = 0, b = 0$ — функція і парна, і непарна.
4. Якщо $x = 0$, то $y = b$; якщо $x = -\frac{b}{k}$ ($k \neq 0$), то $y = 0$.
5. Монотонність: якщо $k > 0$, то функція зростає на множині R ; якщо $k < 0$, то функція спадає на множині R ; якщо $k = 0$, то функція є сталою.
6. Проміжки знакосталості:
 - якщо $k > 0$: $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$; $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$;
 - якщо $k < 0$: $y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$; $y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$;
 - якщо $k = 0$ і $b > 0$, то $y > 0$ на всій області визначення;
 - якщо $k = 0$ і $b < 0$, то $y < 0$ на всій області визначення.

Алгоритм побудови графіка функції $y = kx + b$

1. Вибрати два довільні числа – значення x як абсциси точок графіка.
2. Знайти відповідні їм значення y – ординати точок.
3. Позначити у системі координат точки з обчисленими координатами та провести через них пряму. Побудована пряма – шуканий графік лінійної функції.

Тема 4. Показникова та степенева функції, її властивості

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Показникова функція, її графік та властивості»
2	Короткі теоретичні відомості з теми «Степенева функція, її графік та властивості»
3	Типові завдання ЗНО (НМТ)
4	Прикладні задачі теми «Показникова та степенева функції, її властивості»

Основна мета: навчитися відрізняти показникову та степеневу функції; сформувати вміння будувати графіки таких функцій, встановлювати їх властивості.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* основні властивості та графік степеневої та показникової функцій
- *уміти:* будувати графіки функцій, вказаних у темі; досліджувати вказані функції, спираючись на їх властивості.

Тема 5. Логарифмічна функція та її властивості

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Логарифмічна функція, її графік та властивості»
2	Типові завдання ЗНО (НМТ)
3	Прикладні задачі теми «Логарифмічна функція та її властивості»

Основна мета: навчитися розпізнавати логарифмічну функцію

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* ескізи графіків логарифмічних функцій, описувати їх властивості;
- *уміти:* розв'язувати задачі зазначеної тематики; застосовувати отримані знання до розв'язання прикладних задач.

Тема 6. Тригонометричні функції та їх властивості

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Означення і властивості тригонометричних функцій»
2	Короткі теоретичні відомості з теми «Графіки тригонометричних функцій»
3	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: сформувати вміння будувати і описувати ескізи графіків тригонометричних функцій; навчитися здійснювати перетворення їх графіків та розв'язувати задачі відповідної тематики.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* властивості тригонометричних функцій;

- *уміти*: використовувати означення та властивості тригонометричної функції для розв'язування задач.

Тема 7. Комплексні вправи

Номер заняття	Тема заняття
1	Типові завдання ЗНО (НМТ) з вибором однієї правильної відповіді
2	Типові завдання ЗНО (НМТ) на встановлення відповідності
3	Типові завдання ЗНО (НМТ) відкритої форми з короткою відповіддю

Основна мета: навчитися виконувати всі типи вправ ЗНО (НМТ) з пройдених тем розділу «Функції»

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати*: нюанси виконання типових вправ ЗНО (НМТ), володіти необхідною теоретичною базою;
- *уміти*: виконувати без помилок завдання з розділу «Функції» будь-якого типу.

Другий рік навчання. 11 клас

Тема 1. Повторення основних фактів за 1 рік вивчення

Номер заняття	Тема заняття
1	Графіки елементарних функцій та їх властивості
2	Область визначення, область значення функції
3	Перетворення графіків функцій. Комбінації перетворень та їх використання до розв'язування задач
4	Графіки і властивості тригонометричних функцій

Основна мета: пригадати вивчений матеріал на факультативних заняттях в 10-му класі; закріпити вивчене проходженням тренувальних тестів у форматі ЗНО (НМТ).

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати*: основні властивості та графіки функцій, що розглядалися протягом 10-го класу (лінійні, квадратні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні);

- *уміти*: застосовувати вивчене до розв'язання тренувальних вправ у форматі ЗНО (НМТ).

Тема 2. Побудова графіків функцій, що містять знак модуля

Номер заняття	Тема заняття
1	Побудова графіків функцій виду $y = f(x) $, $y = f(x)$
2	Побудова ГМТ алгебраїчних виразів $ y = f(x)$ їх переміщення вздовж координатних осей
3-4	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: повторити графіки функцій відповідно до державної програми з математики; навчитися розрізняти і використовувати основні алгоритми перетворення графіків функцій, що містять знак модуля.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати*: основу відповідних перетворень і алгоритми їхнього здійснення;
- *уміти*: використовувати вивчені перетворення та властивості при розв'язуванні конкретних завдань.

Тема 3. ГМТ алгебраїчних виразів на координатній площині

Номер заняття	Тема заняття
1	Побудова ГМТ рівнянь і нерівностей
2	Побудова геометричних образів кола, круга, півкола, квадрата, прямокутника
3	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: пояснити, що таке ГМТ алгебраїчних виразів; навчитися розпізнавати і зображувати ГМТ квадратів, прямокутників, кола та частини кола.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати*: ескізи графіків основних алгебраїчних функцій, описувати їх властивості;
- *уміти*: розв'язувати задачі зазначеної тематики.

Тема 4. Обернені тригонометричні функції та їх графіки

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Обернені тригонометричні функції»
2-3	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: сформувати вміння будувати і описувати ескізи графіків обернених тригонометричних функцій; навчитися здійснювати перетворення їх графіків та розв'язувати задачі відповідної тематики.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* властивості обернених тригонометричних функцій;
- *уміти:* використовувати означення тригонометричної функції, оберненої до даної, для розв'язування задач.

Тема 5. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Похідна функції»
2	Короткі теоретичні відомості з теми «Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків»
3	Застосування похідної до дослідження властивостей функції та побудови її графіка
4-7	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: сформувати поняття похідної функції в точці; сформувати вміння розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень функції за допомогою похідної; навчитися досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* означення похідної функції в точці; фізичний та геометричний зміст похідної; таблицю похідних функцій; правила знаходження похідних; достатні умови зростання (спадання) функції на проміжку; означення найбільшого та найменшого значень функції;
- *уміти:* знаходити похідні функцій та її числове значення в точці; знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в точці; знаходити проміжки монотонності функції; досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки.

Тема 6. Первісна та визначений інтеграл

Номер заняття	Тема заняття
1	Короткі теоретичні відомості з теми «Первісна та визначений інтеграл»
2	Знаходження первісних, використовуючи її основні властивості
3	Застосування формули Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла
4-5	Типові завдання ЗНО (НМТ)

Основна мета: сформулювати поняття первісної та її властивостей; сформулювати поняття невизначеного і визначеного інтегралів; навчитися обчислювати площі за допомогою визначеного інтеграла.

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* означення первісної функції, визначеного інтеграла та криволінійної трапеції; таблицю первісних функцій правила знаходження первісних;
- *уміти:* знаходити первісну, використовуючи її основні властивості; обчислювати площу плоских фігур за допомогою інтеграла; застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла; розв'язувати нескладні задачі, що зводяться до знаходження інтеграла.

Тема 7. Комплексні вправи

Номер заняття	Тема заняття
1-5	Типові завдання ЗНО (НМТ) з вибором однієї правильної відповіді
5-7	Типові завдання ЗНО (НМТ) на встановлення відповідності
8-9	Типові завдання ЗНО (НМТ) відкритої форми з короткою відповіддю

Основна мета: навчитися виконувати всі типи вправ ЗНО (НМТ) з будь-якої теми розділу «Функції»

Основні вимоги. Учні повинні:

- *знати:* нюанси виконання типових вправ ЗНО (НМТ), володіти необхідною теоретичною базою;
- *уміти:* виконувати без помилок завдання з розділу «Функції» будь-якого типу.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Розглянуто та вивчено велику кількість науково-методичної літератури з даної теми. Опрацьовано збірники та складено систему задачу для підготовки учнів до ЗНО (НМТ), а також задач практичного застосування на факультативних заняттях.

Факультативний курс розроблявся з дотриманням усіх особливостей навчання математики учнів, згідно чинної програми ЗНО (НМТ).

ВИСНОВКИ

Розділ «Функції» є одним із ключових в курсі шкільної математики та математичного аналізу. Ця тема має широке застосування у багатьох галузях науки. У загальноосвітніх школах дається лише мінімум (основні поняття та формули) та звичайні стандартні задачі, які розв'язуються виключно за заданим алгоритмом. Але деяким учням цих знань недостатньо, тому що їх особистісно орієнтовані цілі для реалізації себе у майбутній професії вимагають більш детальних знань. Деяким навпаки, досить шкільного мінімуму. У зв'язку з цим, а саме для задоволення потреб кожного з учнів було створено факультативні курси.

У ході роботи розглянуто та вивчено значну кількість науково-методичної літератури з даної теми. Завдяки цьому було досягнуто всі поставлені завдання. У роботі подані основні поняття функціональної лінії, проведено аналіз підручників математики академічного рівня, з'ясовано особливості учнів та різноманітних факультативних програм, що надалі дозволило підготувати факультативний курс, а також розглянуто особливості вивчення теми «Функції» на факультативних заняттях.

Факультативний курс розроблявся з дотриманням усіх особливостей навчання математики учнів та згідно до чинної програми зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти.

Виходячи з усього вище сказаного, ми можемо зробити висновок, що мета магістерської роботи, була досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Актуальні проблеми математики та методики її викладання : Збірник наукових праць / За ред. канд. фіз.-мат. наук Геруса О. Ф. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – С. 50-56.
2. Бевз В. Г. За лаштунками шкільної математики. В. Г. Бевз, М. І. Бурда, Н. С. Прокопенко // Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання. Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / упоряд. : Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. — Х. : Вид-во «Ранок», 2011.— 320 с.
3. Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підр. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 288 с. : іл.
4. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А., Кадубовська В. М., Сьомкін В. С., Труш Н. І., Чуйко О. В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ : Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 (ВИПУСК 8, СЕРІЯ : Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14) : Навчальний посібник – Слов'янськ, 2011. – 80 с.
5. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А., Плесканьова Л. Г., Сьомкін В. С., Труш Н. І., Чуйко О. В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ : Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 (ВИПУСК 2, СЕРІЯ : Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...) : Навчальний посібник – Слов'янськ, 2009. – 44 с.
6. Биков В. Ю., Кухаренко В. М., Сиротенко Н. Г., Рибалко О. В., Богачков Ю. М. Технологія розробки дистанційного курсу. За ред. Бикова В. Ю. та Кухаренка В. М. Київ. Міленіум. 2008. 324 с
7. Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. Методика викладання математики в початкових класах : Навчальний посібник. - К. : А.С.К., 1998. – 352 с.
8. Васильєва Д. В. Змішане навчання на уроках математики // Математика в рідній школі, 2019. – № 1 – 2. – С. 59 – 63.

9. Вишенський В. А. Конкурсні задачі з математики / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. – К. : «Вища школа», 2001. – 432 с.
10. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики / О. М. Вороний. – Харків : Видавнича група «Основа», 2008. – 256 с.
11. Гордієнко В. П. Методичний посібник на тему : «Функції. Графік функції. Лінійна функція» [Електронний ресурс] / В. П. Гордієнко. – 2012. – URL : <http://www.uroki.net/docmat/docmat65.htm> (дата звернення: 15.11.2022).
12. Гризун Л. Е., Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra : GeoGebraBook [Електронний ресурс] / Л. Е. Гризун, В. В. Пікалова, І. Д. Русіна, В. А. Цибулька. - Kharkiv GeoGebra Institute. – 90 с. URL: <https://www.geogebra.org/m/jjqf2vfk> (дата звернення 06.07.2022).
13. Графіки функції : Довідник / Вірченко Н. А., Ляшко І. І., Швецов К. І. – К. : Наук. думка, 1979. – 320 с.
14. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7-9 класах : посібник для вчителя / О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек. – К. : Радянська школа, 1991. – 254 с.
15. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. : Посібник для вчителя. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.
16. Жильцов О. Б, Морзе Н. В., Нестерова О.Д. Вивчення тем «Функції» і «Системи лінійних рівнянь з двома невідомими» з використання ППЗ GRAN у сьомому класі середньої школи: Методичні рекомендації. - К. : КДП, 1992. – 60с.
17. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.І. Допрофільна підготовка / Упоряд. Н. С.Прокопенко, О. П.Вашуленко, О. В.Єргіна. – Х. : Вид-во «Ранок», 2011. – 320 с.
18. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. - Х. : Вид-во «Ранок», 2011. - 384 с. - (Факультативи та курси за вибором).

19. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна.– Х. : Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с.– (Факультативи та курси за вибором).
20. Капіносов А. Математика : тренажер для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання і державної підсумкової атестації/ Рівень стандарту / А. М. Капіносов [та ін.]. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2022. – 96 с.
21. Капіносов А. Математика: тренажер для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання і державної підсумкової атестації/ Профільний рівень / А. М. Капіносов [та ін.]. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2022. – 128 с.
22. Капіносов А. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА / Уклад. : А. М. Капіносов [та ін.]. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. – 528 с.
23. Каплун О. І. Математика. Формули, поняття, визначення / О. І. Каплун. – Х. : ПП Українське літературне агентство «УЛА», 2015. – 192 с. – (100 % довідник).
24. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад / Т. В. Коваль. – Тернопіль : «Мандрівець», 2001. – 80 с.
25. Ковальчук, В. Ю. Вивчення поняття функціональної залежності між величинами та способів її задання на уроках математики у початковій школі [Текст] / В. Ю. Ковальчук, Л. С. Білецька, Н. І. Стасів, Л. П. Силюга // Фізико-математична освіта : науковий журнал / Міністерство освіти і науки України, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол. : В. Ю. Сторіжко, З. Бак, М. П. Вовк [та ін.] ; гол. ред. О. В. Семеніхіна. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2018. – Вип. 1 (15). – С. 63–67.

26. Кравченко Л. І. Персональний комп'ютер на уроці математики як засіб активації пізнавальної діяльності учнів / Л. І. Кравченко // Математика в школах України. – 2004. – № 2. – С. 8-11.
27. Крамаренко Т. Г. Електронний навчальний курс «Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики» [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко; Криворізький держ. пед. ун-т. – URL : <http://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=40> (дата звернення: 30.06.2022).
28. Крамаренко Т. Г. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – вид. 2, перероб. і доп. – Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. – 444 с. – URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3315>. (дата звернення: 30.05.2022).
29. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко; за ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 272 с. – URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/570> (дата звернення: 26.02.2022).
30. Кухаренко В. М., Теорія та практика змішаного навчання : монографія / В. М. Кухаренко, С. М. Березенська, К. Л. Бугайчук, Н. Ю. Олійник, Т. О. Олійник, О. В. Рибалко, Н. Г. Сиротенко, А. Л. Столяревська; за ред. В. М. Кухаренка – Харків : «Міськдрук», НТУ «ХП», 2016. – 284 с.
31. Кухаренко В. М., Березенська С. М., Бугайчук К. Л., Олійник Н. Ю., Олійник Т. О., Рибалко О. В., Сиротенко Н. Г., Столяревська А. Л. Теорія та практика змішаного навчання : Монографія (2016) [Електронний ресурс]. URL: <http://repository.ldufk.edu.ua/handle/34606048/24840> (дата звернення: 16.08.2022).
32. Кучик А. О. За лаштунками шкільної математики. Факультативні заняття – Костопіль, 2018. – 140 с.

33. Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Проблеми та перспективи розвитку науки на початку третього тисячоліття у країнах Європи та Азії» // Збірник наукових праць. – Переяслав-Хмельницький, 2015 р. – 473 с. Віталіна Перевертень (Переяслав-Хмельницький, Україна) ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКА ЇХ ПРОВЕДЕННЯ С. 254-256
34. Матяш О. І. Окремі аспекти формування математичних понять / О. І. Матяш, А. В. Прус // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – Вип. 53. – Житомир : Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2010. – С. 85–91.
35. Мельничук Т. Й., Волкова Н. Д. Основні відомості про поняття функції // Поч.школа. - № 6. - 1976. – С. 62 - 72.
36. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2020. — 256 с.
37. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. Академічний рівень. Підручник для 10 класу. // Харків : Гімназія, 2010, 352 с.
38. Методичний пошук вчителя математики : зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця, 2018 –221с. С. 209 - 213.
39. Морзе, Н. В. (2009). Критерії якості електронних навчальних курсів, розроблених на базі платформ дистанційного навчання. Інформаційні технології в освіті, 13, 63-75. URL : <http://ite.kspu.edu/issue-13/p-63-75> (дата звернення: 12.09.2022).
40. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804)

41. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. «Математика. 5-9 класи» / [укладачі М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін та ін.], затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804.
42. Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту.
43. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях : навч. посіб. Для учнів 7-11 кл. / Є. П. Нелін. Х. : Світ дитинства, 1998. – 116 с. (Додаток 56 с.)
44. Новікова А. О. Використання програмного забезпечення GeoGebra під час розв'язування прикладних задач змістової лінії «Функції та їх графіки». Наукові записки. Вип. 169. Серія : Педагогічні науки. Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 112–115.
45. Олімпіадні задачі : розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — 2014 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін, Н. І. Труш, О. В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2015. — 64 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 13).
46. Олімпіадні задачі : розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — 2016 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін, Н. І. Труш, О. В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2017. — 100 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 15).
47. Петрушенко О. Ю., Петрушенко Ю. В. Система вибору програмного забезпечення уроків математики з реалізацією принципу наступності. — науково-методичний журнал «Комп'ютер у школі та сім'ї» №1(97). – К. : 2012. – 56 с.
48. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання : Наук. метод. посіб. – К. : Видавництво А. С. К.. 2004.

49. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум. Навчальний посібник. – Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
50. Роганін О. М. Алгебра і початки аналізу в означеннях, таблицях і схемах. 7–11 класи / О. М. Роганін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2020. — 112 с. — (Серія «Рятівник 2.0»).
51. Сарана О. А. Математичні олімпіади : просте і складне поруч / О. А. Сарана // Навч. посібн. – К. : Видавництво А.С.К., 2004. – 344 с.
52. Селевко Г. К. Сучасні педагогічні технології : Навчальний посібник. М. : Народна освіта, 1998. – 256 с.
53. Скафа О. І. Евристичне навчання математики : комп'ютерно-орієнтовані уроки : навчально-методичний посібник : 2-ге вид. / О. І. Скафа, О. В. Тутова. – Донецьк : ДонНУ, 2013. – 399 с.
54. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підруч. для студ.мат. спеціальностей пед. навч. закладів.– К. : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
55. Словник української мови : в 11 тт. / АН УРСР. Інститут мовознавства ; за ред. І. К. Білодіда. — К. : Наукова думка, 1970—1980. — Т. 10. — С. 554.
56. Степанов, И. Д. О методике проведения факультативных занятий // Математика в школе. — 1969. — № 5. — С. 59-60.
57. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.
58. Тлумачний словник іншомовних слів URL : <https://www.jnsm.com.ua/sis/pro.shtml> (дата звернення: 19.07.2022).
59. Триус Ю. В., Герасименко І. В. Комбіноване навчання як інноваційна освітня технологія у вищій школі / Ю. В. Триус, І. В. Герасименко // Теорія та методика електронного навчання : збірник наукових праць. Випуск III. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НметАУ. – 2012. – С. 299-308.

60. Тушак С.П. Використання ІКТ в процесі навчання математики / С.П. Тушак. – URL : http://sertushak.at.ua/index/dosvid_roboti/0_-17 (дата звернення: 25.09.2022).
61. Харік О. Ю. Елементи математичного аналізу для школярів. Частина 1. / О. Ю. Харік. Єременко. – Х. : Вид. група «Основа», 2011. – 111, [1] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України» ; Вип. 10 (106)).
62. Чемерис М. В. Побудова графіків функцій елементарними перетвореннями. – К. : Євроіндекс Лтд, 1995. – 246 с.
63. Шаран О. Ідея профілізації в системі профільної математичної освіти / Олександра Шаран // Математика в школі. – 2011. – №5. – С.37-40.
64. Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К. : Зодіак-ЕКО, 2004. – 384 с.
65. Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К. : Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.
66. Шкільна енциклопедія з алгебри / Авт.-уклад. Роева Т. Г., Адруг Л. М., Карцан Л. П. – Х. : Країна мрій ТМ, 2008. – 464 с.
67. Шунда Н.М. Функції та їх графіки: Пос. для учителів. – К.: Рад. школа, 1983. – 190с.
68. Яремчук Ф. П., Ясінський В. В. Алгебра, програма, типові задачі. – К. : КПІ, 1996.
69. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. – 208 с.