МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
__________ Д.Є.Бобилєв
(підпис)
«___»__________2021 р.

Реєстраційний № _______
«___»__________2021 р.

ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ $y = \frac{1}{n}x$ І КВАДРАТА ЗІ СТОРОНОЮ $a = 1$

Кваліфікаційна робота
студентки групи МІм-16
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 Середня освіта (математика)
Примакової Оксани Юріївни
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала _________________
Шкала ECTS____ Кількість балів _____

Голова ЕК______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК ______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг — 2021

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОЗДІЛ 1.ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ 6
  1.1. Історія дослідження числових рядів 6
  1.2. Теоретичні відомості про числові ряди 13
  Висновки до розділу 1 29
РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРИТАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ $\boldsymbol{y = \frac{1}{n}x}$ І КВАДРАТА ЗІ СТОРОНОЮ $\boldsymbol{a = 1}$ .. 31
  2.1. Генерація числових рядів з лінійною геометричною інтерпретацією 31
  2.2. Генерація числових рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією 54
  2.3. Генерація числових рядів з кубатурною геометричною інтерпретацією .. 63
  Висновки до розділу 2 72
ВИСНОВКИ 73
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 75
ДОДАТОК 80

ВСТУП

Вивчення теорії рядів є досить важливим, оскільки широко використовується як при теоретичних дослідженнях, так і при розв’язуванні цільної низки прикладних задач, а тому відіграє значну роль не тільки в математиці, але і в таких науках, як хімія, фізика, астрономія, біологія, інженерія, економіка, тощо.

В математиці теорія рядів використовується при вивченні різноманітних періодичних процесів, які зустрічаються в природі й техніці, пов’язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, складання алгоритмів обчислення значень функцій та інтегралів, розв’язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь.

Ряд, як самостійне поняття, математики почали використовувати XVII ст.. І. Ньютон та Г. Лейбніц застосовували ряди для вирішення алгебраїчних та диференціальних рівнянь. Теорія рядів у XVIII-XIX ст. розвивалася в роботах Я. та І. Бернуллі, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Ейлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа та ін. Сувора теорія рядів була створена в XIX ст. на основі поняття границі в працях К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коші, П. Діріхле, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса, Б. Рімана та ін. [1,10,31,44].

При вивченні теорії рядів в процесі підготовки майбутніх вчителів спеціальності «Математика», «Інформатика» важливим є реалізація педагогічного принципу наочності та підвищення комп’ютерної компетенції за допомогою різноманітних методів комп’ютерної графіки. Тому проаналізувавши різноманітну літературу як вітчизняних, так і зарубіжних авторів, варто звернути увагу, що в більшості підручниках, посібниках та практикумах з математичного аналізу пропонують студентам значний об’єм теоретичних відомостей, приклади розв’язання типових і нестандартних задач, наявні методичні рекомендації та вказівки для студентів, запропоновано систему задач та різнорівневих прикладів для самостійного виконання, але майже відсутня візуалізація побудови числових рядів.

Варто зауважити, що в останній час публікуються роботи, які спрямовані на створення числових рядів за допомогою елементів різних геометричних об’єктів [28-30].

Тому тема «Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ квадрата зі стороною $a = 1$» є актуальною.

Мета дослідження: побудова і дослідження числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$, члени яких є розміри геометричних фігур, розміщених у квадраті $a = 1$.

У відповідності до мети дослідження поставлено такі **завдання:**

1. використовуючи функцію $y = \frac{1}{n}x$ одержати систему рядів, члени яких є лінійні розміри геометричних фігур розміщених у квадраті зі стороною $a = 1$ та побудова їх за допомогою графіків функції $y = \frac{1}{n}x$ в межах квадрата розміщеного в системі координат Oxy;
2. дослідити одержані ряди на збіжність і обчислити їх суму S для збіжних рядів;
3. дослідити характер зміни частинних сум одержаних рядів Sn в залежності від значення n та побудувати геометричну ілюстрацію для демонстрації зміни значення Sn для заданих величин n: $n = 10, n = 100, n = 1000, n = 10000$;
4. провести дослідження можливостей використання одержаних результатів для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ.

Об’єкт дослідження: числові ряди.

Предмет дослідження: геометрична інтерпретація числових рядів.

Основні **методи дослідження:**

- аналіз науково-методичної літератури, пов’язаної з розділом математичного аналізу «Числові ряди»;

– евристичний пошук алгоритмів, за якими змінюються величини деяких геометричних об’єктів, розміщених у квадраті зі стороною $a = 1$, побудованих за допомогою графіків функції $y = \frac{1}{n}x$;

– евристичні дослідження збіжності числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації його членів;

– чисельні експерименти, що пов’язані з обчисленням частинних сум одержаних рядів;

– геометрична інтерпретація зміни значення *Sn* для величин n.

Наукова новизна: досліджено та обґрунтовано зв’язок між геометричними об’єктами та графіком функції, розміщеної в межах квадрата системи координат *Oxy*. Розроблено та досліджено систему задач на генерацію числових рядів за допомогою реалізації дидактичного принципу наочності.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що матеріал, представлений у роботі, може бути використаний студентами-практикантами і педагогами для підвищення продуктивності та зацікавленості під час вивчення розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз», фрагментарно може бути запропоновано для складання шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад ІІІ і IV курсів студентів спеціальності МІ.

Апробація дослідження:

Участь у дистанційній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Проблеми розвитку професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку» з публікацією тез «Використання освітніх математичних програм під час вивчення числових рядів в курсі математичного аналізу», 17-18 листопада.

Структура магістерської роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 45 найменування та додаток. Основний текст викладено на 74 сторінках. Повний обсяг роботи 84 сторінки.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1.1. Історія дослідження числових рядів

Дослідники завжди цікавились історією математики. Незчисленна кількість робіт присвячено історії математики, проте не менша кількість праць, присвячена окремим розділам математики. Одним з таких розділів є теорія числових рядів.

У розвитку теорії рядів можна виділити два основних напрямки. Перший — обґрунтування дій із нескінченними рядами, другий — створення техніки використання рядів для вирішення математичних та прикладних завдань. Обидва напрямки розвивалися паралельно, але спочатку успіхи в першому напрямку були істотно меншими, а до кінця успіхи в другому напрямку стали діставатися все з великими труднощами [21].

Ще за часів античності стародавній народ цікавився поняттям числового ряду.

Як стверджують дослідники історії розвитку математики: «Поняття математичної нескінченності, з’явилася в давньогрецькій або еллінській культурі в VIII – VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення». [31].

Античні математики, відповідно до піфагорійської ідеології, відкидали всі актуально нескінченні поняття, у тому числі й нескінченні ряди. Проте деякі обмежені застосування поняття рядів мали місце. Наприклад, Архімед для обчислення площі сегмента параболи (рис.1.1.1) фактично знайшов суму нескінченної геометричної прогресії [8]:

$$1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$$

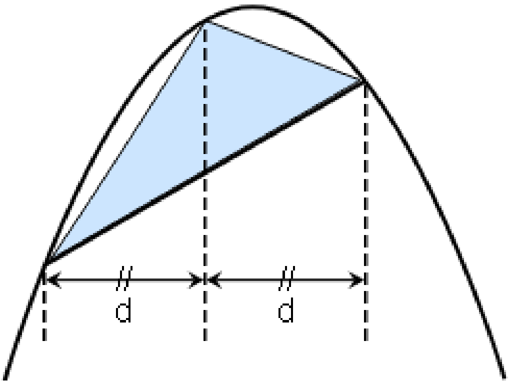


Рис.1.1.1 Обчислення Архімедом площі сегмента параболи

Ван дер Варден пише про це: «Архімед не говорить про суму нескінченно спадної геометричної прогресії, йому ще не відомий вираз «сума нескінченного ряду», проте він чудово володіє сутністю цього поняття». У кількох вирішених Архімедом завданнях на обчислення площі чи обсягу він використовує, у сучасній термінології, верхні та нижні інтегральні суми з необмежено зростаючим числом членів. Через відсутність поняття межі для обґрунтування результату використовувався громіздкий метод вичерпування [9].

«Нескінченні ряди також використовували в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, замість $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$», — як стверджує Генрих Вілейтнер [10].

Значну увагу єгипетські вчені приділяли розробці задач прикладного та розважального характеру . Андрій Юшкевич підкреслює: «Однією із найвідоміших задач, була задача написана Леонардом Пізанським в «Книзі про абаке», на геометричну прогресію – «задача-мандрівниця»» [44].

Згодом подібні задачі зустрічались, з незначними відмінностями, у різні часи.

Як відомо, з довідника «Історії математичних термінів»: «Вавилонські математики вміли сумувати геометричну та арифметичну прогресії, а також знали формули для обчислення деяких кінцевих сумм» [1].

Питаннями підсумовування рядів займалися і китайські математики [16]. Дубовик В.П. звертає увагу: «Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» підрахував кількість предметів, які складають шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. В XIII ст. Чжу Ши-цзе підсумовує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій» [20].

На рис.1.1.1 представимо таблицю чисел, яку у 1303 р. розробив Шень Ко [20]:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис. 1.1.2 Арифметичний трикутник

З історії математики стародавніх часів, Юшкевича А.П., відомо: «Чималий внесок в розвиток теорії рядів внесли індійські математики. Сумування числових рядів цікавило багатьох вчених в Індії. Зокрема, Аріабахта наводив правила сумування рядів трикутних чисел, натуральних квадратів і кубів, а Магавира – правила сумування геометричної прогресії і таких рядів, як ряди квадратів і кубів членів арифметичної прогресії» [44].

З початку XVII століття зароджується формальний розвиток теорії рядів, як нескінченних сум деяких доданків [14] .

1647 Грегуар де Сен-Венсан виявив зв'язок логарифму і площі під гіперболою (рис.1.1.2). Згідно з геометричних міркувань, італійський математик П'єтро Менголі опублікував у трактаті «Нові арифметичні квадратури» у 1650 році розкладання у нескінченний ряд [44]:

$$ln2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

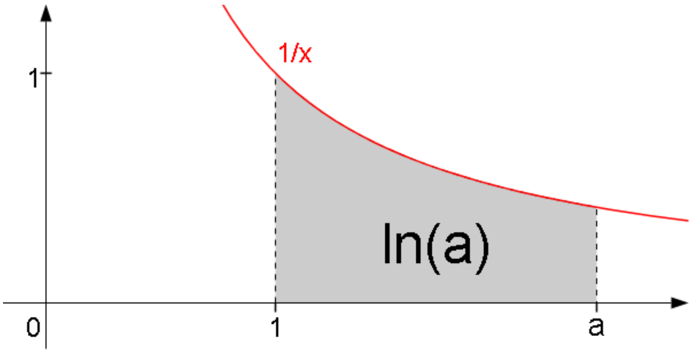


Рис.1.1.3 Площа під гіперболою $y = \frac{1}{x}$ на інтервалі $(1, a)$ дорівнює lna

П'єтро Менголі досліджував також інші ряди. Він наглядно продемонстрував, за допомогою геометричного розкладання, що ряд [44]:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

«Математик розглядав квадрат зі стороною 1 і, відповідно площею, яка дорівнює 1. Він поділив площу квадрата навпіл, потім одну з половин знову поділив навпіл і т.д., і отримав нескінчену кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію», — зазначає Воробйов Н. [14].

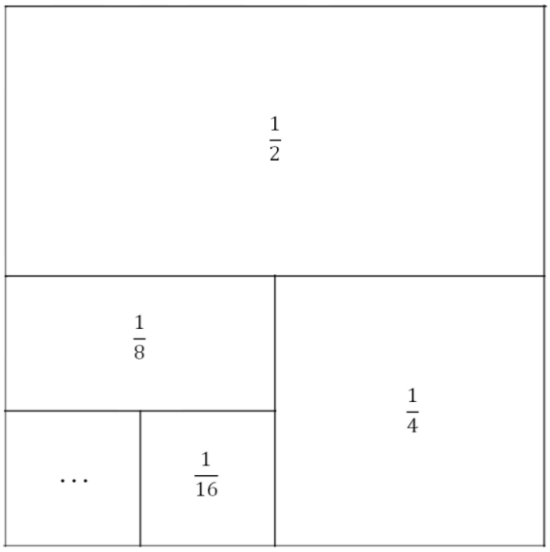


Рис.1.1.4 Геометричне розкладання ряду геометричної прогресії

«Треба відзначити, П'єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ в 50-х роках XVII ст. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668 р. математик Броункер. Свою назву гармонічний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів», — виділяє Крюков М.М.[31].

Зазначимо, що середнім гармонічним чисел a і b є число c , за умови, що:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Для доведення застосовують нерівність:

$$\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \frac{1}{k}$$

Для того, щоб отримати нескінченну кількість груп з сумами більше 1, спочатку з $k = 1$ знаходять, що $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, потім беруть 2^3 членів з $\frac{1}{5}$ по $\frac{1}{13}$, групуючи їх по троє, випливає, що їх сума також більше 1. У подальшому дається знаходяться суми наступних 3^3 членів і т.д. [31].

У своїх напрацюваннях Волкова Т.В. зауважує: «Ці результати П’єтро Менголі незалежно від французского математика Орема (Nicolas Oresme (до1330-1382)). В 1350 р. Орем показав розбіжність гармонічного ряду. Його доведення дійшло до нашого часу і використовується в сучасних підручниках. Він групує члени ряду наступним чином :

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$ » [12].

Якщо подвоїти число членів, які зібрані в послідовні групи, одержуємо нескінченну кількість груп з суми, яких є більшими за $\frac{1}{2}$ [14].

Як універсальний інструмент дослідження функцій та чисельних розрахунків нескінченні ряди використовували Ісаак Ньютон та Готфрід Вільгельм Лейбніц, творці математичного аналізу. Ще в середині XVII століття Ньютон і Грегорі відкрили біноміальне розкладання для будь-якого, не тільки цілого показника ступеня α (вперше опублікований в "Алгебрі" Валліса, 1685 рік) [43]:

$$(1+z)^{\propto} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\alpha(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots$$

Ряд збіжний при $|z| \leq 1$. За допомогою цієї формули Ньютон зумів вперше виконати обчислення дуги еліпса у вигляді ряду (у сучасній термінології він обчислив еліптичний інтеграл). Ньютон також показав, як з допомогою рядів вирішувати рівняння, включаючи диференціальні рівняння першого порядку, і досліджувати інтеграли, які виражаються через елементарні функции [44].

Ляшко І.І. у своїй книзі зазначає: «Важливий метод, запропонований в XVIII ст. для розкладу функції в ряд, був винайдений Бруком Тейлором. Він мав на меті обґрунтувати правила обчислень флюксій за допомогою кінцевих різниць. На цій недостатній основі Тейлор і розвинув свій ряд, формально приєднуючись до інтерполяційної формули Ньютона. В своїй книзі Тейлор вивів більш просто і більш строго ряд Бернуллі. А також встановив спеціальний вид свого ряда, який пізніше стали називати рядом Маклорена» [36].

У 1812 році Карл Фрідріх Гаус (1777 – 1865) дає перший зразок дослідження збіжності ряду, в 1821 році наш хороший знайомий Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) встановлює основні сучасні принципи теорії рядів: «Рядом називають необмежену послідовність чисел одержуваних один з одного за певним законом. Нехай є сума n-перших членів, де n – будь-яке ціле число. Якщо при постійному зростанні значень n сума необмежено наближається до відомої межі S, ряд називається збіжним, а ця межа — сумою ряду. Навпаки, якщо при необмеженому зростанні n сума не наближається ні до якої певного межі, ряд буде розбіжним і не буде мати суми» [27].

Відомі математики розуміли важливість необхідності формулювання достатніх умов збіжності. Чимало ознак збіжності було сформульовано для додатніх числових рядів виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

Дані ознаки збіжності ґрунтуються на порівнянні ряду (*) з іншими відомими стандартними рядами [32].

У статті «З історії нескінченних числових рядів» Крюкова М. М., та Клецької Т. С. зазначається: «Так у 1768 р. Ж. Даламбер сформулював таку ознаку на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо при достатньо великому n $(n > N)$ виконується нерівність $D_n \leq q$, де q – стале число меньше одиниці, то ряд збігається, а при $D_n \geq 1$ – розбігається» [32].

В роботі Юшкевича А.П. відзначається: «Сучасний термін «ознака збіжності Даламбера» історично не є коректним. Даламбер розглядав питання про збіжність додатного ряду, вивчаючи розклад $(1 + \mu)^m$ при довільному m в «Математичних творах» (1768), при цьому він довів, що ряд дає правильні результати при $-1 < \mu < 1$. Англійський математик Едуард Варінг (1734-1798) в «Аналітичних роздумах» (1776) цілком коректно сформулював цю ознаку так: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається (збігається), якщо відношення $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ при великих n менше (більше) одиниці. Формулювання цієї ознаки в термінах теорії границь належить Коші (1821р.)» [44].

«У 1821р. французький математик Огюстен Луі Коші (1789-1857) в своєму курсі « Алгебраїчний аналіз» сформулював ознаку також на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $E_n = \sqrt[n]{a_n}$. Якщо при достатньо великому $n (n > N)$ виконується нерівність $E_n \leq q$, де q – стале число менше одиниці, то ряд збігається, а при $E_n \geq 1$ — розбігається [32]», — звертають увагу Крюков М. М., та Клецька Т. С..

У 1821 р. була сформульована радикальна ознака Коші, у 1832 р. — запропонувано одну із ознак збіжності, що грунтується на порівнянні зі збіжним узагальнено гармонічним рядом і розбіжним гармонічним рядом, а у 1835 р. — сформульовано ознаку Кумера [32].

Дослідивши значну кількість вітчизняної та зарубіжної літератури з історії розвитку числових рядів, можемо зробити висновок, що активний розвиток математики, схожий до сучасної бере свій початок з другої половини XVIII століття. З того часу поняття числового ряду, границі числового ряду, часткових сум та інші, набувають того сенсу, який ми вкладаємо натепер.

1.2. Теоретичні відомості про числові ряди

Означення 1.2.1. Нехай задана деяка числова послідовність a_n , де n – натуральне число, тобто $n \in N = \{1,2,\dots,n,\dots\}$. Вираз виду:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.2.1)$$

де $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ — члени ряду, називається числовим рядом [39].

Приклад 1.2.1. Якщо $a_n = \frac{1}{n!}$, то ряд матиме вигляд [24]:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Означення 1.2.2. Сума n перших членів ряду **(**1.2.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

називається n-ю частковою сумою (або відрізком) цього ряду.

Очевидно, перша, друга, третя й інші часткові суми

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

складають нескінчену послідовність часткових сум $\{S_n\}$ [40].

Означення 1.2.3. Ряд з невід’ємними членами називається знакододатнім рядом [5].

Деякі приклади знакододатних рядів [13]:

- ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1};$$

- гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Означення 1.2.4. Стале число $A \in R$ називається границею числової послідовності$\{x_n\}$, якщо для будь-якого довільно малого $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для усіх (натуральних) $n > N$ буде виконуватися нерівність:

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \text{ або } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ [8].}$$

Означення 1.2.5. Ряд (1.2.1) називається збіжним, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Значення S цієї границі називають сумою ряду (1.2.1) і записують:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

надаючи тим самим символам (1.2.1) числовий смисл [45].

Означення 1.2.6. Ряд (1.2.1) називається розбіжним, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ границі не має (зокрема, якщо члени послідовності часткових сум необмежено зростають за модулем) [45].

Зазначимо, що всяка сума скінченної кількості доданків є окремим випадком збіжного ряду. Дійсно, нехай дана деяка сума

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \qquad (1.2.2)$$

Приписавши до неї нескінченну кількість нулів, одержимо ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \qquad (1.2.3)$$

Очевидно, що для цього ряду

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

……………………………….……………

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k$$

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + 0 = S_k$$

$$S_{k+2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + 0 + 0 = S_k$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_k$$

Тому ряд (1.2.3) є збіжним, і його сума дорівнює S_k, тобто сумі (1.2.2) [1].

Згідно вище зазначених означень можна записати так [42]:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S, \text{ряд збігається;} \\ \infty, \text{ряд розбігається;} \\ \text{не існує, ряд розбігається.} \end{cases}$$

Зміст теорії числових рядів полягає у встановленні їх збіжності або розбіжності й в обчисленні сум збіжних рядів [45].

Покажемо на прикладах як досліджується числовий ряд на збіжність за допомогою означання:

Приклад 1.2.2. Задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$**.** Знайти S_n і суму ряду S.

Розв'язання

Частинну суму S_n можна записати так:

$$S_n = \frac{3+2}{6} + \frac{3^2+2^2}{6^2} + \frac{3^3+2^3}{6^3} + \cdots + \frac{3^n+2^n}{6^n} = \left(\frac{3}{6} + \frac{3^2}{6^2} + \frac{3^3}{6^3} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{3^n}{6^n}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{2^2}{6^2} + \frac{2^3}{6^3} + \cdots + \frac{2^n}{6^n}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$$

В кожній дужці маємо суму «*n*» членів геометричної прогресії, яка обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Отже,

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n \cdot 2}$$

Тоді, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n \cdot 2}\right) = \frac{3}{2}$.

Тому $S = \frac{3}{2}$ і даний ряд збігається .

Відповідь: даний ряд збігається, $S = \frac{3}{2}$ [42].

Означення: Якщо у числовому ряді (1.2.1) відкинути перші “k” членів, то одержимо знову числовий ряд:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots \text{ (*)}$$

який називається залишком ряду (1.2.1) [42].

Розглянемо деякі **властивості збіжних числових рядів**:

Властивість 1. Якщо ряд (1) збігається, то ряд (*) також збігається. Має місце і обернене твердження [41].

Властивість 2. Якщо ряд (1) збігається, і його сума дорівнює S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, де c стала величина також збігається і його сума дорівнює cS. [15].

Властивість 3. Збіжні числові ряди можна почленно додавати та віднімати при цьому збіжність зберігається [34].

Властивість 4. Якщо ряд збігається, то його члени можна групувати будь-яким чином не переставляючи їх. [38].

Властивість 5. Якщо, починаючи з деякого n, члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий [26].

Приклад 1.2.3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}$$

Розв’язання

Так як $a_n = \frac{2}{5^{n-1} + n - 1} \le \frac{2}{5^{n-1}}$,

$$S_n = \frac{2}{1} + \frac{2}{6} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1} + n - 1} < \frac{2}{1} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 2\frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{2}$$

Отже, $S_n < \frac{5}{2}$, а це означає, що $\lim_{n\to\infty} S_n$ існує і є скінченним числом, тобто, даний ряд збігається.

Відповідь: даний ряд збігається [42].

Теорема 1.2.1*(необхідна ознака збіжності).* Якщо ряд$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то границя загального члена дорівнює 0, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [26].

Доведення. Оскільки ряд збіжний, то існує границя послідовності частинних сум цього ряду, тобто $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, де $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Використовуючи арифметичні дії збіжних послідовностей маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Покажемо тепер, що умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не є достатньою при дослідженні ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на збіжність.

Розглянемо приклад: нехай дано ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Перевіримо виконання необхідної умови для даного ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ — виконується.}$$

Згідно з послідовність частинних сум $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ є справедливим нерівність:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}}, n \in N$$

оскільки $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ тому що для довільного $k \leq$ n . З теореми про граничний перехід в нерівності випливає:

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ розбіжний [33].

Що і треба було довести.

Наслідок *(достатня ознака розбіжності)*. Якщо необхідна умова збіжності ряду не виконується, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$розбіжний [33].

У випадку, коли необхідна умова збіжності ряду виконується далі проводять дослідження за допомогою достатніх ознак збіжності числових рядів. [33].

Приклад 1.2.3. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nsin\frac{1}{n}$$

Розв'язання

Застосуємо наслідок з необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} nsin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \neq 0$$

Отже, даний ряд розбігається.

Відповідь: даний ряд розбіжний [42].

Означення 1.2.7. Середнім гармонічним двох чисел “a” і “b” називається число “c”, яке задовольняє співвідношення

$$\frac{1}{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Числовий ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \cdots$називається гармонічним рядом, оскільки

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}(n - 1 + n + 1) = n = \frac{1}{a_n}$$

Незважаючи на те, що $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ гармонічний ряд розбіжний. Цей ряд часто використовується як еталон для порівняння рядів [42].

Для порівняння часто використовують ряди [37]:

- геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — $\begin{cases} \textit{збіжний}, |q|<1 \\ \textit{розбіжний}, \ |q|>1 \end{cases}$;
- гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — розбіжний;
- ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ — $\begin{cases} \textit{збіжний}, a<1 \\ \textit{розбіжний}, \ a>1 \end{cases}$.

Теорема 1.2.2*(достатня ознака збіжності)***.** Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два знакододатних ряда. Нехай, починаючи з деякого n_0 виконується умова:

$$0 \le a_n \le b_n$$

а) із збіжності ряду$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$слідує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [23].

Доведення. Позначимо через A_n і B_n відповідно частинну суму першого та другого рядів:

$$A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k,$$

Відмітимо, що в силу невід’ємності членів заданих рядів послідовностей A_n і B_n будуть неспадними.

а) Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ слідує існування границі послідовності його частинних сум $\lim_{n\to\infty} B_n = B.$

Тобто для всіх $n \in N$ виконується нерівність $Bn \le B.$

Звідси, використовуючи умову теореми отримуємо: $A_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le$ $\le \sum_{n=1}^{\infty} b_n \le B_n$ для всіх $n \in N.$

Таким чином, послідовність частинних сум A_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також обмежена зверху та, як було зазначено, є неспадною, а значить має границю: $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ і $A \le B.$

б) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ теж розбіжний. Припустимо протилежне. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, тоді за доведеним в пункті (а) отримаємо, що збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Але це заперечує умову, згідно якої ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний. Отримане протиріччя доводить дане твердження [3].

Що і треба було довести.

Теорема 1.2.3 *(гранична ознака порівняння).* Якщо $a_n > 0$ та $b_n > 0$ для всіх $n \geq m$ (m – заданий номер) і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, де $0 < k < \infty$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ або збіжні, або розбіжні [19].

Доведення

а) Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний. З умови існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ для довільного додатного ε вірна нерівність $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$.

Розкриваючи знак модуля, запишемо нерівність у вигляді подвоєної нерівності:

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$$

З цього слідує нерівність:

$$a_n < (k + \varepsilon) b_n$$

Якщо так, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon) b_n$, із збіжності якого в силу подвоєної нерівності та попередньої теореми слідує збіжнсть ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

У випадку, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, доведення будується аналогічно з тією лише різницею, що наслідок із останньої нерівності записується у вигляді:

$$b_n < \frac{1}{(k + \varepsilon)} a_n$$

б) Розглянемо тепер випадок, коли один із рядів розбіжний.

Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний. Очевидно, що із існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ $(k \neq 0)$ слідує існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$.

Звідси слідує, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ повинен бути розбіжним, так як інакше в силу доведеного в пункті (а) цієї теореми був би збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. А це суперечить умові пункту (б) [7].

Що і треба було довести.

Приклад 1.2.4. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg = \frac{1}{n}$$

Розв'язання

За умовою $a_n = tg\frac{1}{\sqrt{n}}$. Для порівняння утворимо еталонний ряд з членами $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Він розбігається як ряд Діріхле при $x = \frac{1}{2} < 1$. Маємо:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{tg\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{tgt}{t} = 1 \neq 0$$

Отже, ряд з членів a_n є розбіжним за граничною ознакою порівняння.

Відповідь: ряд збігається за граничною ознакою порівняння [2].

Теорема 1.2.4 *(ознака порівняння).* Нехай $a_n > 0$ і $b_n > 0$ і існує такий номер, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$для всіх $n \geq n_0$, тоді справедливі наступні твердження:

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний.
2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбіжний [27].

Доведення

Візьмемо довільне $n \geq n_0$, і напишемо нерівність з умови теореми для $k = n_0,\ n_0 + 1,\ n_0 + 2, \dots, n - 1$:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0}}$$

… … … … … … … … … ….. … … … … …

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Перемножуючи ці рівності, отримуємо: $a_n \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, n \ge n_0$.

Остання нерівність подібна нерівності виду: : $a_n \le \frac{a_{n_0}}{q_{n_0}}$ виведена лише для значень $n \ge n_0$ але вона також вірна і для $n = n_0$

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний. Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ · bn ∞ n=1 збіжний, то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний. Це протиріччя доводить друге твердження [18].

Що і треба було довести.

Теорема 1.2.5 *(ознака Даламбера)*. Нехай для числового ряду з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, n \in N \tag{1.2.4}$$

існує границя (кінцева або нескінчена) послідовності відношень $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q > 0$$

Тоді справедливі наступні твердження:

а) якщо q < 1, тоді ряд (1.2.4) збіжний;

б) якщо ряд q > 1, або q = +∞, тоді ряд розбіжний [12]:

Доведення

а) Нехай $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Для числа $r = \frac{q+1}{2}$ справедлива нерівність q < r < 1. Тому $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right) = q - r < 0$.

З властивостей збіжних послідовностей випливає, що

$$\exists n_0 \in N, n \ge n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r \le 1 \tag{1.2.5}$$

Враховуючи (1.2.5), для будь-якого натурального числа k маємо:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \le r$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} \le r$$

$$\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \le r < 1$$

Отже,

$$\left(\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right)\left(\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}}\right)\dots\left(\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}}\right) \le r^k \ \textit{або}\ \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \le r^k$$

Звідси отримаємо, що $a_{n_0+k} \le a_{n_0} r^k, k \in N$.

Якщо n– довільне натуральне число, для якого $n \ge n0$, то, вважаючи $k = n - n_0$, отримаємо нерівність:$a_n \le \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} r^n$.

Дана нерівність дозволяє застосувати ознаку порівняння для доведення збіжності ряду (1.2.4). Дійсно, в силу умови $0 < r < 1$ геометричний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} r^n = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0-1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

збіжний. Таким чином, згідно ознаки порівняння, ряд (1.2.5) також збіжний.

б) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, при цьому $q < 1$, або $q = +\infty$. Якщо $q \neq +\infty$, тоді припустимо $r = \frac{(q+1)}{2}$, а якщо $q = +\infty$, то в якості r візьмемо будь-яке число, яке більше за одиницю. Тоді $1 < r < q$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right) = s$, де $s = q - r > 0$ при $q \neq +\infty$, або $s = +\infty$ при $q = +\infty$. З властивостей послідовностей, які мають додатню межу (кінцеву або нескінчену) отримаємо: $\exists n_0 \in N, n \ge n_0$:$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r \le 1$.

Тоді, $0 < a_{n_0} \le a_{n_0+1} \le a_{n_0+2} \le \cdots \le a_{n_0+k} \le \cdots$.

Отже, межа послідовності a_n не може бути менша від числа $a_{n_0} > 0$. Таким чином, не виконується необхідна умова збіжності ряда, та ряд (1.2.4.) розбіжний.

Що і треба було довести.

Примітка 1.2.1. Теорема 1.2.5 не охоплює випадок, коли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

В такому разі нічого певного про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0$, заздалегідь сказати не можна (тобто, використання ознаки Даламбера є не доцільним). Для вирішення цього питання про збіжність такого ряда, є потреба в використанні додаткових досліджень [12].

Примітка 1.2.2. Аналізуючи доведення теореми 1.2.5, можна помітити, що висновки про збіжність ряду (1.2.4) були зроблені з урахуванням умов (1.2.4), (1.2.5). Це дозволяє сформулювати більш загальний, в порівнянні з граничною ознакою Даламбера, достатню ознаку збіжності знакододатних рядів, яку зазвичай називають ознакою Даламбера [12]:

1) якщо існує таке число $q \in (0;1)$, що для будь-якого натурального числа $n > n_0$ справедлива нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, тоді ряд (1.2.4) збіжний;

2) якщо для будь-якого натурального числа $n > n_0$ справедлива нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, тоді ряд (1.2.4.) розбіжний.

Примітка 1.2.3. Звернемо увагу на те, що формулювання теореми 1.2.5 може мати інший вигляд:

Теорема 1.2.6. Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0,\ n \in N$. Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то:

$$\begin{cases} -\text{при } \lambda < 1 \text{ ряд збіжний;} \\ -\text{при } \lambda > 1 \text{ ряд розбіжний;} \\ -\text{при } \lambda = 1 \text{ сумнівний випадок, тобто} \\ \text{ряд може бути і збіжним, і розбіжним [17]} \end{cases}$$

Приклад 1.2.5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Розв’язання

За умовою $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Тоді $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ (просто переписуємо формулу для an, тільки записуємо $n+1$ всюди замість n). Маємо:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

і ряд збігається за ознакою Даламбера. Це цілком очікуваний результат, оскільки за рахунок факторіалу члени ряду дуже швидко прямують до нуля.

Відповідь: ряд збігається за радикальною ознакою Даламбера [2].

Теорема 1.2.7(*радикальна ознака Коші*). Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0, n \in N$. Тоді якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, то:

$$\begin{cases} -\text{при } \lambda < 1 \text{ ряд збіжний;} \\ -\text{при } \lambda > 1 \text{ ряд розбіжний;} \\ -\text{при } \lambda = 1 \text{ сумнівний випадок, тобто} \\ \text{ряд може бути і збіжним, і розбіжним [44]} \end{cases}$$

Доведення

1) Нехай λ < 1. Розглянемо число q яке, справджує нерівність:

$$\lambda < q < 1$$

Існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність:

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - \lambda\right| = q - \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q$$

Розкриємо модуль та запишемо нерівність у вигляді:

$$a_n < q^n \text{ для будь-якого } n > N$$

А це означає, що усі члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ починаючи з a_{N+1} є меншими за відповідні члени збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, тобто ряди виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$
$$q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots$$

Використовуючи ознаку порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+1}$ збігається, а отже збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Нехай λ > 1.

Із існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ слідує що, починаючи з деякого номера $n = N$, виконано нерівність $|\sqrt[n]{a_n} - 1| < \lambda - 1$.

Розкривши модуль, можемо записати нерівність:

$\sqrt[n]{a_n} > 1$ або $a_n > 1$ для всіх $n \geq N$

Проте, для даного ряду необхідна ознака збіжності рядів не виконується, тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається [8].

Приклад 1.2.6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$$

Розв'язання

За умовою $a_n = \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$. Маємо: $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+5}$,

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1$$

Отже, ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Відповідь: ряд збігається за радикальною ознакою Коші [2].

Приклад 1.2.7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Розв'язання

За умовою $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n$.

Маємо: $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828 > 1.$$

Отже, ряд розбігається за радикальною ознакою Коші.

Відповідь: ряд розбігається за радикальною ознакою Коші [2, с. 24].

Теорема 1.2.8*(інтегральна ознака Коші-Маклорена).*

Нехай для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$виконано наступні умови:

1) $a_n > 0$, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$;

2) існує така функція $y = f(x)$, яка задовольняє умови:

– ця функція визначена, неперервна, додатна і спадна на півінтервалі $[1, +\infty)$;

– $f(k) = a_k, k = 1,2,3 \dots.$

Тоді, якщо збігається невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \qquad (1.2.6)$$

то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, і навпаки, а якщо інтеграл (1.5.1) розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, і навпаки.

Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається або розбігається водночас з невласним інтегралом 1-го роду (1.2.6) [43].

Доведення. Зобразимо члени ряду геометрично, відкладаючи по вісі абсцис номери $1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$, а по вісі ординат відповідні значення членів ряду (рис.1.1.1):

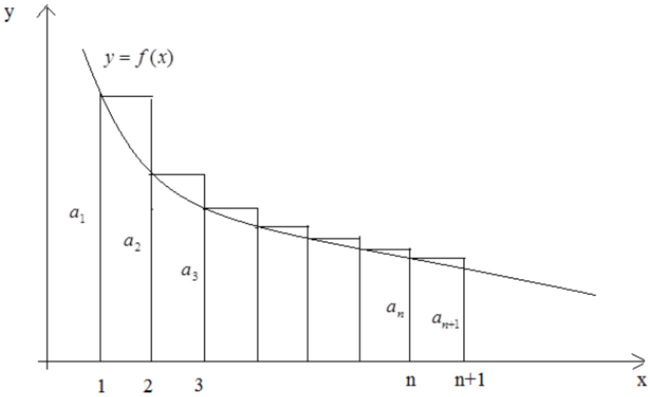


Рис.1.2.1

Легко помітити, що сума площ побудованих на рис.1.1.1 прямокутників дорівнює $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = A_n$, а площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і вертикальними прямими $x = 1, x = n + 1$, менша за цю суму, тобто:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < A_n$$

Побудуємо тепер прямокутники іншим чином (рис.1.1.2):

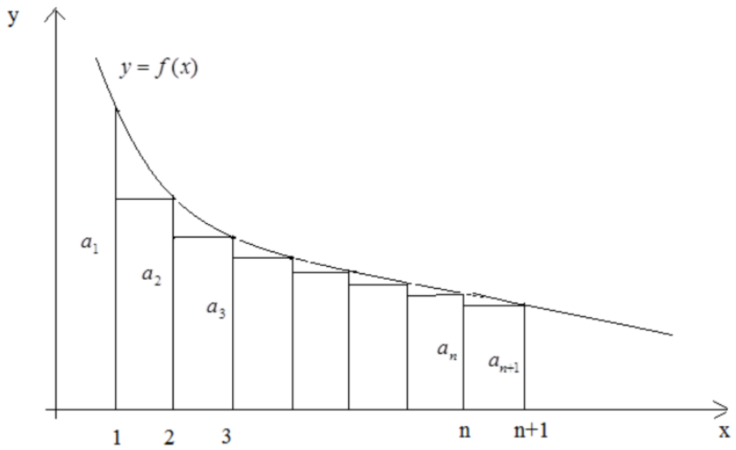


Рис.1.2.2

Сума площ цих прямокутників дорівнює

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} = A_{n+1} - a_1 \ ,$$

і цього разу та ж сама площа криволінійної трапеції більша за цю суму, тобто:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Таким чином, отримуємо подвійну нерівність:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx < A_n \qquad (1.2.7)$$

Розглянемо тепер наступні випадки:

1) інтеграл (1.2.7) збіжний. Тоді існує

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

Причому

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

і тоді з лівої частини нерівності (1.2.7) випливає, що послідовність {An} обмежена зверху, отже знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

2) інтеграл (1.2.6) розбіжний. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n+1} f(x)dx = +\infty$$

і з правої частини нерівності (1.2.7) буде випливати, що й $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$, тобто наш ряд розбіжний.

Легко бачити, що з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність інтегралу (1.2.6), а із збіжності цього ряду – збіжність інтегралу (1.2.6) [43].

Що і треба було довести.

Ця ознака дуже важлива і цікава, оскільки встановлює аналогію між рядами та інтегралами. Вперше її було знайдено в геометричній формі К. Маклореном, потім була позабута і знову відкрита О. Коші. Розглянемо приклади використання цієї теореми [44].

Приклад 1.2.8. Дослідити на збіжність ряд [2]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$$

За умовою $a_n = \frac{1}{nlnn}$. Утворимо функцію $f(x) = \frac{1}{nlnn}$.

Очевидно, $f(x) = a_n$, також, що $f(x)$ задовольняє усі вимоги інтегральної ознаки Коші при $n_0 = e$. Маємо:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{e}^{A}\frac{1}{xlnx}dx = \left|\begin{array}{c} t = lnx \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = A \Rightarrow t = lnA \end{array}\right| = \lim_{A\to\infty}\int_{1}^{lnA}\frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} lnt|_{1}^{lnA} = \lim_{A\to\infty}(lnlnA - ln1) = \infty$$

Отже, ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші.

Відповідь: ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші.

Висновки до розділу 1

У першому розділі проаналізовано історичні відомості становлення та розвитку числових рядів в математиці. З’ясовано, що точної дати виникнення та чіткої періодизації етапів розвитку рядів немає. Відомо, що вперше поняття нескінченних сум досліджувались вченими з Давньої Греції. У своїх працях почали використовувати ряди ще в XVII ст., проте сувора теорія рядів була створена лише в XIX ст. на основі поняття границі в роботах О. Коші, К. Гаусса, П. Діріхле, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса, та ін..

Було розглянуто основні поняття числових рядів, а саме: числовий ряд, члени числового ряду, частинна сума ряду, границя числового ряду, збіжний та розбіжний числовий ряд, та інші.

Наведено обґрунтування необхідної ознаки збіжності числового ряду, радикальної та інтегральної ознаки Коші, достатні ознаки збіжності числових рядів з невід’ємними членами (ознак порівняння, Даламбера, Коші) та інші.

Продемонстровано теореми числових рядів та їх доведення для дослідження на збіжність.

Проаналізовано переваги та недоліки різних ознак збіжності при їх практичному застосуванні зазначених теорем.

З’ясовано, що в теорії і практиці дослідження числових рядів на збіжність не досліджувались питання геометричної інтерпретації членів рядів. Також, немає відомостей про можливі генерації числових рядів за допомогою геометричних об’єктів і понять інших математичних дисциплін.

РОЗДІЛ 2

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРИТАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ $\boldsymbol{y = \frac{1}{n}x}$ І КВАДРАТА ЗІ СТОРОНОЮ $\boldsymbol{a = 1}$

2.1. Генерація числових рядів з лінійною геометричною інтерпретацією

Розглянемо приклади геометричної інтерпретації членів числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрату зі стороною $a = 1$.

На рис. 2.1.1 розглядаємо квадрат $OA_1B_1C_1$ зі стороною $a = 1$. Сторони квадрата B_1A_1 і A_1O розбиваються на відрізки $|B_nB_{n+1}|$ і відповідно $|A_nA_{n+1}|$ за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ точками $B_n\left(1;\frac{1}{n}\right)$ і відповідно точками $A_n\left(\frac{1}{n};0\right)$.

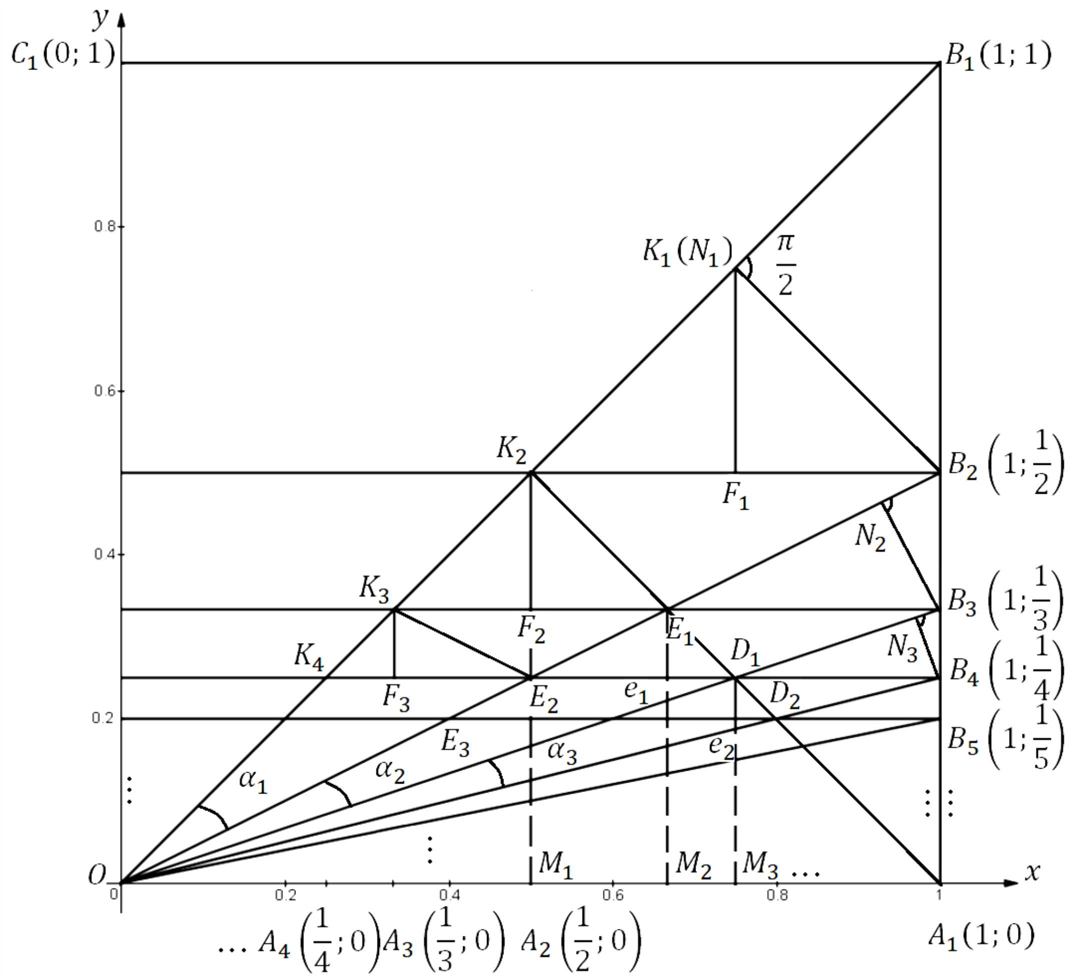


Рис.2.1.1

Визначимо задачі, які пов'язані з лінійною геометричною інтерпретацією. Завдання полягають у побудові та дослідженню на збіжність:

1) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}|$;

2) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{OB_n}|$;

3) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_{n+1}B_{n+1}}|$;

4) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_nB_{n+1}}|$;

5) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_nB_n}|$;

6) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{OK_n}|$;

7) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{K_nK_{n+1}}}|$;

8) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{K_{n+1}E_n}}|$;

9) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{K_{n+2}E_n}}|$;

10) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{K_{n+1}B_{n+1}}}|$;

11) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{sin}\alpha_{\mathrm{n}}$;

12) ряду $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}cos\alpha_{\mathrm{n}}$;

13) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nF_n}|$;

14) ряду довжин діагоналей послідовності квадратів $\{OC_1B_1A_1\}$, $\{M_1K_2B_2A_1\},\{M_2E_1B_3A_1\},\dots,\{M_nD_nB_nA_1\}$;

15) скласти ряд довжин гіпотенуз $|\overline{E_2B_2}|$, $|\overline{e_1B_3}|$, $|\overline{e_2B_4}|$,…, $|\overline{e_nB_{n+1}}|$ послідовності трикутників: $\Delta E_2K_2B_2,\Delta e_1E_1B_3,\Delta e_2D_1B_4\dots\Delta e_nD_nB_{n+1}$.

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач:

Задача 1. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{B_nB_{n+1}}}|$.

Розв'язання

$$|\overline{B_1B_2}|=1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$|\overline{B_2B_3}|=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\overline{|B_3B_4|}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\overline{|B_4B_5|}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$|\overline{B_n B_{n+1}}| = \frac{1}{n(n+1)}$$

Отримаємо ряд (2.1.1) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{B_n B_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad (2.1.1)$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки рядів: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, тобто необхідна ознака збіжності виконується.

Знайдемо суму даного числового ряду. Розкладемо загальний член ряду у вигляді суми двох простих дробів:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{n+1}{n\cdot(n+1)} - \frac{n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Просумуємо перші n членів ряду:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Як бачимо, усі складові цієї суми скорочуються, — крім першого і останнього:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Тобто, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Знайдемо значення $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

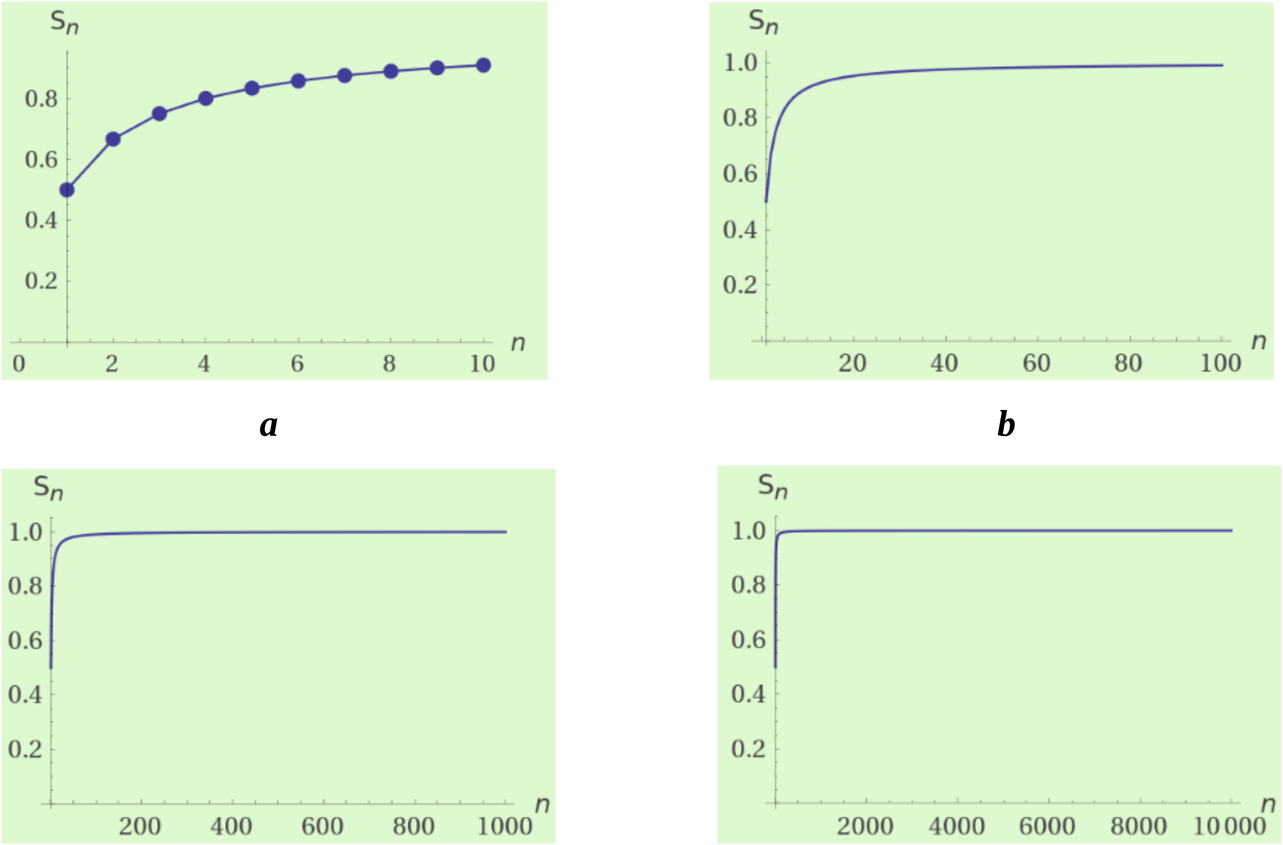
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.1:

Табл.2.1.1

n=10	≈ 0,90909
n=100	≈ 0,99001
n=10000	≈ 0,99001
n=100000	≈ 0,99990

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.2:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.2 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.1.2 поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до значення своєї скінченної суми $S = 1$.

Відповідь: ряд збіжний і його сума $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$.

Задача 2. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |\overline{\mathrm{OB}_{\mathrm{n}}}|$.

Розв’язання

$$\overline{|OB_1|} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{|OB_2|} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{|OB_3|} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\overline{|OB_4|} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$\overline{|OB_n|} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

Отримаємо ряд (2.1.2) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{OB_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \qquad (2.1.2)$$

Даний ряд є розбіжним, будемо доводити це за допомогою однієї з ознак порівняння. В даному випадку порівняємо ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, маємо очевидну нерівність $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} > \frac{1}{n}$.

Тому за ознакою порівняння даний ряд є розбіжним, оскільки гармонічний ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Задача 3. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{K_{n+1}B_{n+1}}|$.

Розв'язання

$$|\overline{K_2B_2}| = \frac{1}{2}$$

$$|\overline{K_3B_3}| = \frac{1}{3}$$

$$|\overline{K_4B_4}| = \frac{1}{4}$$

$$|\overline{K_5B_5}| = \frac{1}{5}$$

… … … …

$$|\overline{K_{n+1}B_{n+1}}| = \frac{1}{n}$$

Отримаємо ряд (2.1.3) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_{n+1}B_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{2.1.3}$$

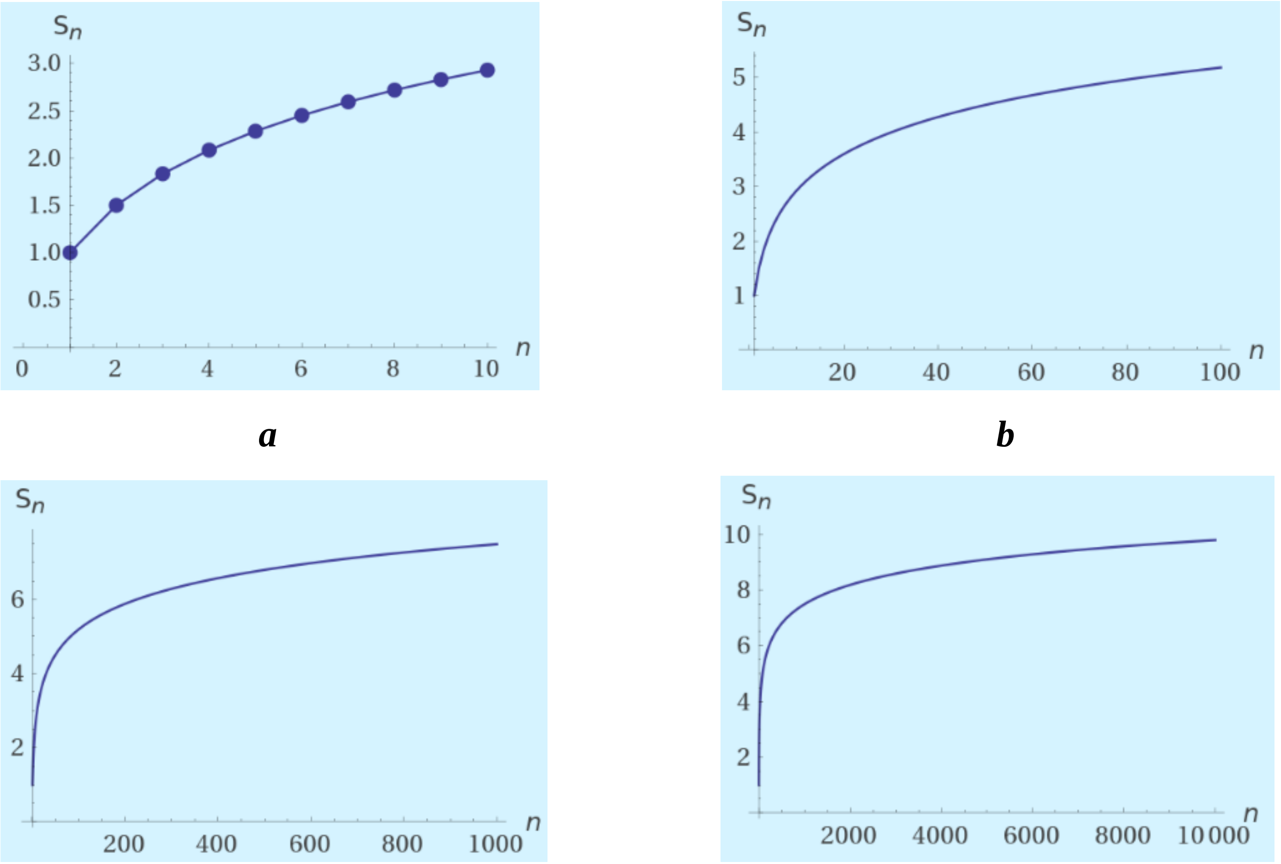
Одержано гармонічний ряд. Він розбіжний.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.2:

Табл.2.1.2

n=10	≈ 2,92897
n=100	≈ 5,18738
n=10000	≈ 7,48547
n=100000	≈ 9,78760

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.3:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.3 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд .Графік рис. 2.1.3 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.1.3) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Задача 4. Визначимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n B_{n+1}}|$

Розв’язання

$$|\overline{N_1 B_2}| = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\overline{N_2 B_3}| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$|\overline{N_3 B_4}| = \sqrt{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{4}}{8}$$

$$|\overline{N_4 B_5}| = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{5}}{16}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$|\overline{N_n B_{n+1}}| = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$$

Отримаємо ряд (2.1.4) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n B_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^n} \qquad (2.1.4)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність за допомогою ознаки Д’Аламбера, відповідно з якою обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}}{2^{n+1}} \div \frac{\sqrt{n+2}}{2^{n+1}}\right) = \left(\frac{\sqrt{n+2}\cdot 2^n}{\sqrt{n+1\cdot}\, 2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Оскільки границя відношення при $n \to \infty$ дорінює числу, меншому за 1, то ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 5. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n B_n}|$.

Розв'язання

$$|\overline{N_1B_1}| = \frac{d}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{N_2B_2}| = \frac{d}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$|\overline{N_3B_3}| = \frac{d}{16} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$|\overline{N_4B_4}| = \frac{d}{32} = \frac{\sqrt{2}}{32}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$|\overline{N_nB_n}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Отримаємо ряд (2.1.5) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{N_nB_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \tag{2.1.5}$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки рядів:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} = 0$, тобто необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки ряд є рядом геометричної прогресії, то Sn (частинні суми ряда) обчислюються за формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2^{-n}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - 2^{-n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} - 2^{-n} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \lim_{n\to\infty} - 2^{-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\right) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

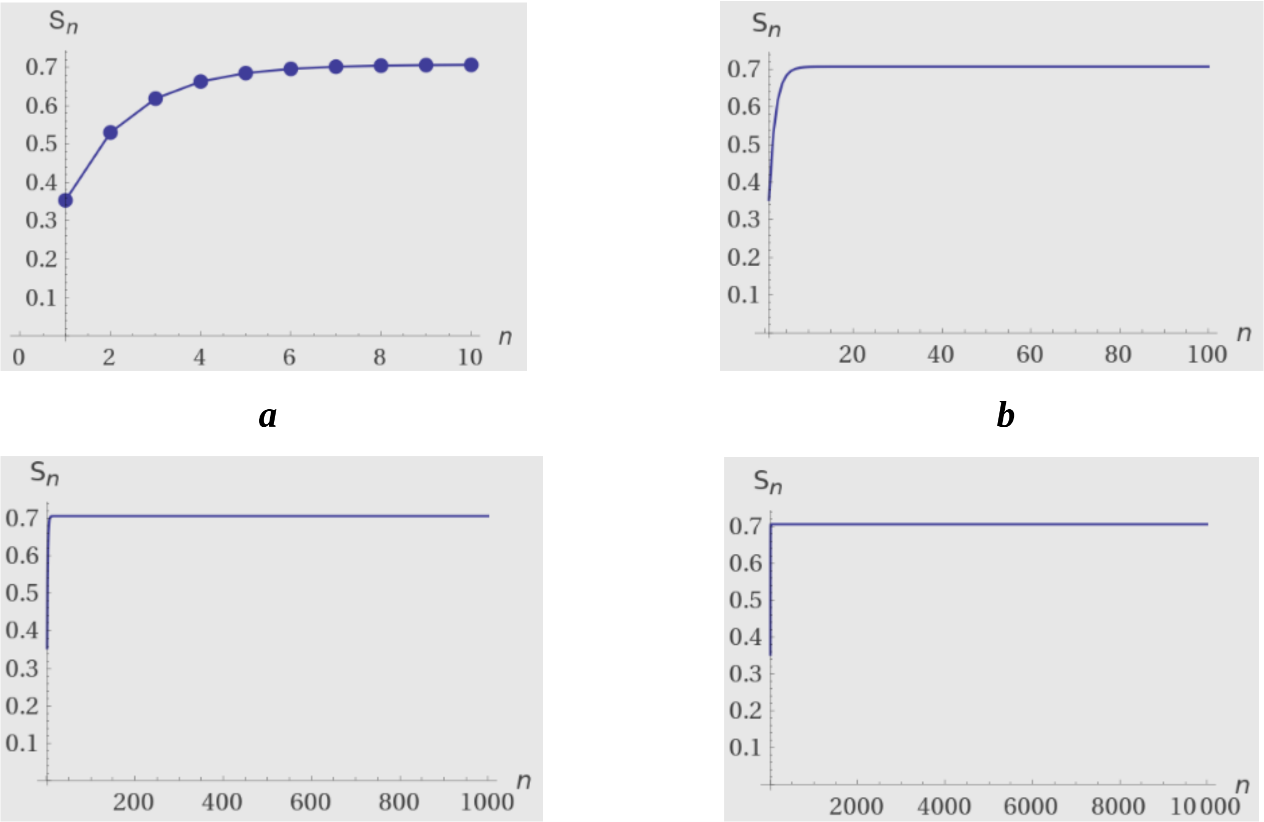
Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$, то сума даного ряду $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.3:

Табл.2.1.3

n=10	≈ 0,70641
n=100	≈ 0,70710
n=10000	≈ 0,70711
n=100000	≈ 0,70711

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.4:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.4 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.1.4 поступово набуває постійної швидкості і інтенсивно наближується до значення своєї скінченної суми $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: ряд збіжний і його сума $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 6. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{OK_n}|$.

Розв'язання

$$|\overline{OK_1}| = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}$$

$$|\overline{OK_2}| = \frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\overline{OK_3}| = \frac{7}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$|\overline{OK_n}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\cdot\frac{2n+1}{2^{2n+2}} = \frac{\sqrt{2}(2n+1)}{2^{3n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n+1}{2^{3n}}$$

Отримаємо ряд (2.1.6) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{OK_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(2n+1)}{2^{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n+1}{2^{3n}} \qquad (2.1.6)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність за допомогою ознаки Д'Аламбера, відповідно з якою обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n+3}{2^{3n+3}}\right)\div\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n+1}{2^{3n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)2^{3n}}{(2n+1)2^{3n+3}} = \frac{1}{2^3} < 1$$

Оскільки границя відношення при $n\to\infty$ дорінює числу, меншому за 1, то ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 7. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nK_{n+1}}|$.

Розв'язання

$$|\overline{K_1K_2}|\text{: т. } K_1\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right), \text{т. } K_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$|\overline{K_1K_2}| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{K_2K_3}|\text{: т. } K_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \text{т. } K_3\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

$$|\overline{K_2K_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$|\overline{K_3K_4}|:\ \text{т.}\,K_3\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\text{т.}\,K_4\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$$

$$|\overline{K_2K_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\overline{K_nK_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$$

Отримаємо ряд (2.1.7) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nK_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}\right) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nK_{n+1}}| = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}\right) \qquad (2.1.7)$$

Дослідимо ряд на збіжність за допомогою n-ї частини суми S_n:

$$S_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$$

Обчислюємо суму ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Відповідь: ряд є збіжним до суми $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Задача 8. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{K_nE_n}}|$.

Розв’язання

Знаходити координати точки $\mathrm{E_n}$ будемо за допомогою рівняння прямих, що перетинаються:

1) $E_1 \in K_1A_1,\ K_1A_1 \cup OB_2 = E_1$. Кінці прямої K_1A_1 мають координати: $K_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), A_1(1;0)$. Знайдемо координати точки E_1:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}y$$

$$y = 1 - x$$

OB_2: $y = \frac{1}{2}x$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = 1 - x \end{cases};\ \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x = 1 - x \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Отже, точка має такі координати $E_1\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

2) $E_2 \in K_2A_1,\ K_2A_1 \cup OB_2 = E_2$. Кінці прямої K_2A_1 мають координати: $K_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), A_1(1;0)$. Знайдемо координати точки E_2:

$$\frac{x-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y-0}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}(x-1) = -\frac{2}{3}y$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}y$$

$$2y = 1 - x$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - x)$$

OB_2: $y = \frac{1}{2}(1 - x)$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(1 - x) \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases};\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Отже, точка має такі координати $E_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

3) $E_3 \in K_3A_1$, $K_3A_1 \cup OB_2 = E_2$. Кінці прямої K₂A₁ мають координати: $K_3\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, $A_1(1;0)$. Знайдемо координати точки E_3:

$$\frac{x-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{y-0}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{4}(x-1) = -\frac{3}{4}y$$

$$-(x-1) = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}(1-x)$$

OB₂: $y = \frac{1}{3}(1-x)$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(1-x) \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Отже, точка має такі координати $E_3\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

… … … … … … … … … . … … … … … … …

$$K_1E_1\colon K_1E_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$K_2E_2\colon K_2E_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{144}} = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

$$K_3E_3\colon K_3E_3 = \sqrt{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400}+\frac{1}{400}} = \frac{\sqrt{10}}{20}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … …

Отримаємо ряд (2.1.8) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (2.1.8)$$

За необхідною ознакою збіжності ряду маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$$

Ряд може бути збіжним або розбіжним.

Для з'ясування використаємо інтегральну ознаку Коші, відповідно до якої досліджуємо на збіжність невласний інтеграл від відтворюючій функції ряда:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Нехай } x+\frac{1}{2}=t, dx=dt\\ t|_{x=1}=\frac{3}{2}, t|_{x=b}=b+\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{3}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=\left|\begin{matrix}\text{інтеграл}\\ \text{табличний}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(ln\left(b+\frac{1}{2}\right)-ln\frac{3}{2}\right)=\infty$$

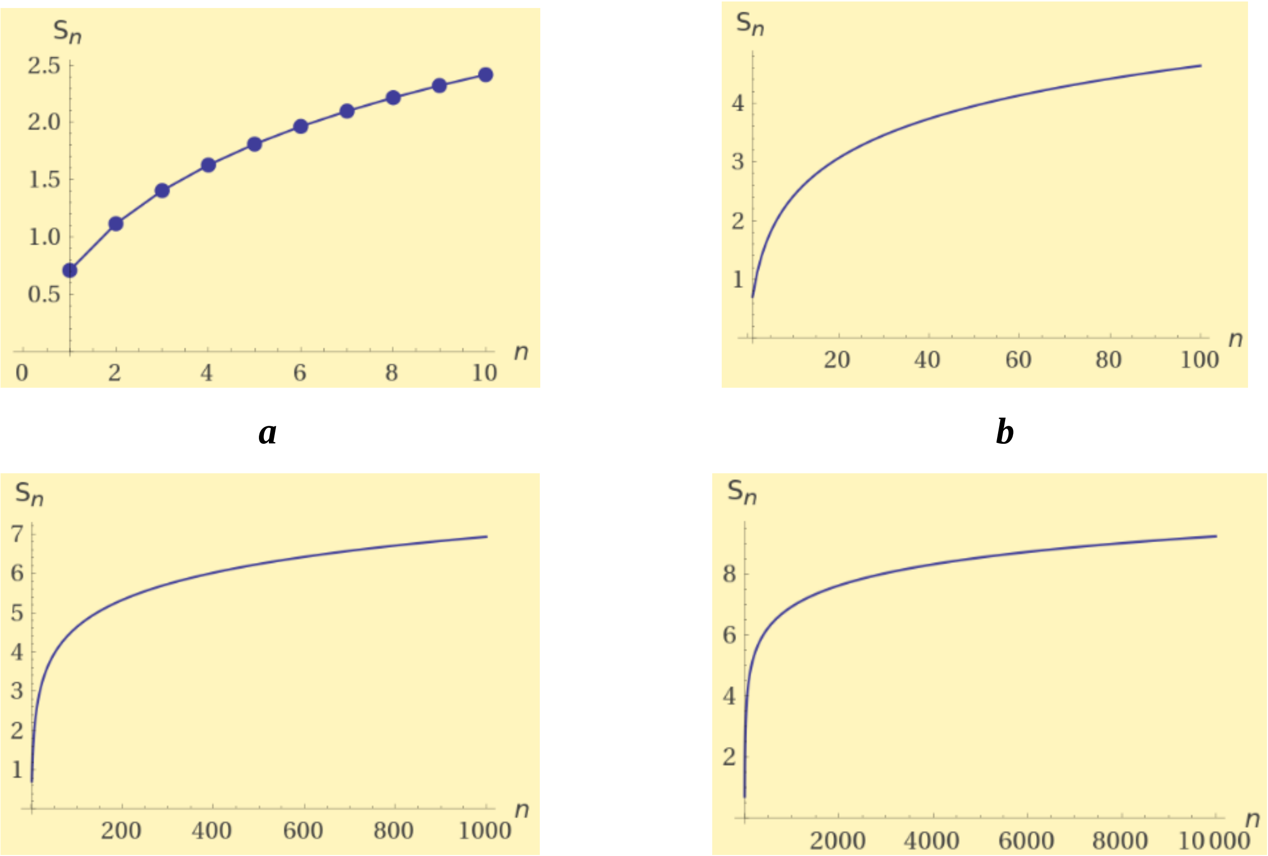
Отже, інтеграл розбіжний, тому і досліджуваний ряд розбіжний.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.4:

Табл.2.1.4

n=10	≈ 2,41675
n=100	≈ 4,63414
n=10000	≈ 6,92778
n=100000	≈ 9,22946

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.5:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.5 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.1.5 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.1.8) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

Задача 9. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_{n+2}E_n}|$.

Розв’язання

K_3E_1: $K_3\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), E_1\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$|\overline{K_3E_1}| = \frac{1}{3}$$

K_4E_2: $K_4\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right), E_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

$$|\overline{K_4E_2}| = \frac{1}{2}$$

K_5E_3: $K_5\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right), E_3\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$

$$|\overline{K_5E_3}| = \frac{2}{5}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$a_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4}, a_3 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}, \dots, a_n = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Отримаємо ряд (2.1.9) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \qquad (2.1.9)$$

За ознакою порівняння маємо:

$$\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — розбіжний, тому і досліджуваний ряд розбіжний.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

Задача 10. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |\overline{\mathrm{K}_{\mathrm{n}+1}\mathrm{B}_{\mathrm{n}+1}}|$.

Розв’язання

K_2B_2: $K_2\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), B_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$

$$\overline{|K_2B_2|} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6}$$

K_3B_3: $K_3\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right), B_3\left(1; \frac{1}{3}\right)$

$$\overline{|K_3B_3|} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{144}} = \frac{\sqrt{82}}{12}$$

K_4B_4: $K_4\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right), B_4\left(1; \frac{1}{4}\right)$

$$\overline{|K_4B_4|} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{1}{400}} = \frac{\sqrt{257}}{20}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

Отримаємо ряд (2.1.10) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n(n+1)} \qquad (2.1.10)$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

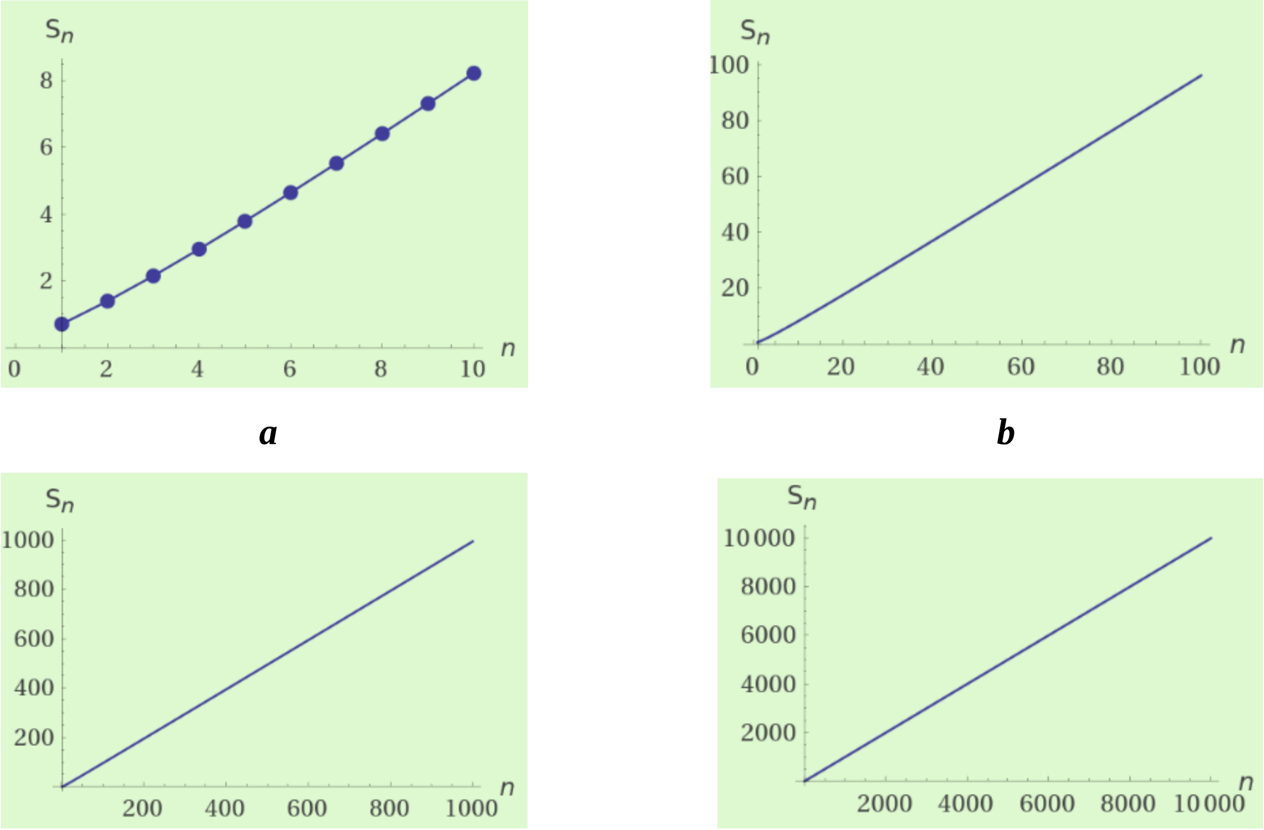
Отже, ряд (2.1.10) розбіжний.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.5:

Табл.2.1.5

n=10	≈ 8,21533
n=100	≈ 96,03805
n=10000	≈ 993, 74886
n=100000	≈ 9991,44763

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.6:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.6 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.1.6 стрімко вгору та бачимо, що ряд (2.1.10) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

Задача 11. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \sin\mathrm{\alpha_n}$, де $\mathrm{\alpha_n} = \angle B_{\mathrm{n}}\mathrm{OB_{n+1}}$.

Розв'язання

Візуально з рис. 2.1 бачимо, що $\sin\mathrm{\alpha_n} = \frac{\overline{|K_nB_{n+1}|}}{\overline{|OB_{n+1}|}}$, де

$$\overline{|K_nB_{n+1}|} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{(1+n)(1+n^2)}$$

$$\overline{|OB_{n+1}|} = \frac{\sqrt{1+(1+n)^2}}{1+n}$$

Таким чином одержуємо:

$$\sin\mathrm{\alpha_n} = \frac{\sqrt{1+n^2}(1+n)}{(1+n)(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}}$$

Отримаємо ряд (2.1.11) у загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\mathrm{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+(1+n)^2}} \qquad (2.1.11)$$

За ознакою порівняння:

$$\frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n^2}+1} \cdot n\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+1\right)}} < \frac{1}{n^2}$$

Тому ряд (2.1.11) збіжний.

Відповідь: досліджуваний ряд збіжний.

Задача 12. Визначити ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \cos\mathrm{\alpha_n}$, де $\mathrm{\alpha_n} = \angle B_{\mathrm{n}}\mathrm{OB_{n+1}}$.

Розв'язання

Візуально з рис. 2.1 бачимо, що $\cos\mathrm{\alpha_n} = \frac{\overline{|OK_{n+1}|}}{\overline{|OB_{n+1}|}}$, де

$$\overline{|OK_{n+1}|} = \frac{(1+n+n^2)\sqrt{1+n^2}}{(1+n)(1+n^2)}$$

$$\overline{|OB_{n+1}}| = \frac{\sqrt{1+(1+n)^2}}{1+n}$$

Отримаємо ряд (2.1.12) у загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\alpha_{\mathrm{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n+n^2)\sqrt{1+n^2}}{(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}} \tag{2.1.12}$$

Перевіримо виконання тотожності:

$$\sin^2\alpha_{\mathrm{n}} + \cos^2\alpha_{\mathrm{n}} = 1$$

$$\sin^2\alpha_{\mathrm{n}} + \cos^2\alpha_{\mathrm{n}} = \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}}\right)^2 + \left(\frac{(1+n+n^2)\sqrt{1+n^2}}{(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(1+n^2)\cdot(1+(1+n)^2)} + \frac{(1+n+n^2)^2}{(1+n^2)\cdot(1+(1+n)^2)} =$$

$$= \frac{1+(1+n)^2+2(1+n)n^2+n^4}{(1+n)^2(1+(1+n)^2)} = \frac{1+(1+n)^2+2(1+n)n^2+n^4}{1+(1+n)^2+n^2+n^2(1+n)^2} =$$

$$= \frac{1+(1+n)^2+2n^2+3n^2+n^4}{1+(1+n)^2+2n^2+3n^2+n^4} = 1$$

Відповідь: досліджуваний ряд збіжний.

Задача 13. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nF_n}|$.

Розв'язання

K_1F_1: $K_1\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right), F_1\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$

$$|\overline{K_1F_1}| = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

K_2F_2: $K_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), F_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

$$|\overline{K_2F_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

K_3F_3: $K_3\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), F_3\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$

$$|\overline{K_3F_3}| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

K_4F_4: $K_4\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right), F_4\left(\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

$$|\overline{K_4F_4}| = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$|\overline{K_nF_n}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Отримаємо ряд (2.1.13) у загальному вигляді, згорнувши дану числову послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \tag{2.1.13}$$

$$S_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Обчислюємо суму ряда S:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

Ряд збіжний до суми $\frac{3}{4}$.

Відповідь: досліджуваний ряд збіжний і його сума $S = \frac{3}{4}$.

Задача 14. Скласти ряд довжин діагоналей послідовності квадратів: $\{OC_1B_1A_1\}$; $\{M_1K_2B_2A_1\}$; $\{M_2E_1B_3A_1\}$; $\{M_3D_1B_4A_1\}$; … ; $\{M_nD_nB_nA_1\}$

Розв'язання

Позначимо діагоналі символом d_n, $n = \overline{1,\infty}$. Використовуючи рис. 2.1.1 знаходимо:

$$d_1 = |\overline{C_1A_1}| = \sqrt{2}$$

$$d_2 = |\overline{K_1A_1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d_3 = |\overline{E_1A_1}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$d_n = |\overline{D_nA_1}| = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

Отримаємо ряд (2.1.14) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} \tag{2.1.14}$$

Ряд розбіжний, тому що будь-якого n: $\frac{\sqrt{2}}{n} > \frac{1}{n}$, де $\frac{1}{n}$ загальний член гармонічного ряда, який є рядом розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

Задача 15. Скласти ряд довжин гіпотенуз $|\overline{E_2B_2}|, |\overline{e_1B_3}|, |\overline{e_2B_4}|,\ldots,$ $|\overline{e_nB_{n+1}}|$ послідовності трикутників: $\Delta E_2K_2B_2, \Delta e_1E_1B_3, \Delta e_2D_1B_4 \ldots \Delta e_nD_nB_{n+1}$.

Розв'язання

Задачу можно розв'язати за допомогою різних алгоритмів.

Перший алгоритм. Використаємо координати т.т. $E_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right), B_1\left(1;\frac{1}{2}\right)$; $e_1\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3^2}\right), B_3\left(1;\frac{1}{3}\right)$; $e_2\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4^2}\right), B_4\left(1;\frac{1}{4}\right), \ldots$. Позначимо гіпотенузи символом «l_n». Далі використовуємо формулу обчислення відстані між двома точками в площині OXY, за якою одержуємо:

$$l_1 = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$l_2 = \sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}} = \frac{\sqrt{10}}{9}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sqrt{(n+2)^2+1}$$

Отримаємо ряд (2.1.15) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{(n+1)^2} \tag{2.1.15}$$

Другий алгоритм. Використаємо:

1) ряди одержані раніше:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

2) теорему Піфагора.

Одержаємо:

$$l_n = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)^2}$$

Отримаємо ряд (2.1.15) у загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{(n+1)^2} \qquad (2.1.15)$$

Третій алгоритм. Використаємо відому формулу обчислення довжини ліній $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ в системі координат OXY

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Відповідно до умов задачі маємо:

$$y = f(x) = \frac{1}{n+1}x; x \in \left[\frac{n}{n+1}; 1\right], \text{тому}$$

$$l_n = \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \sqrt{1 + \left(\left(\frac{1}{n+1}x\right)'_x\right)^2} dx = \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} dx =$$

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^{1} \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}} dx = \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}} x \Bigg|_{\frac{n}{n+1}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sqrt{(n+1)^2+1}\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\sqrt{(n+1)^2+1}$$

Отримаємо ряд (2.1.15) у загальному вигляді:

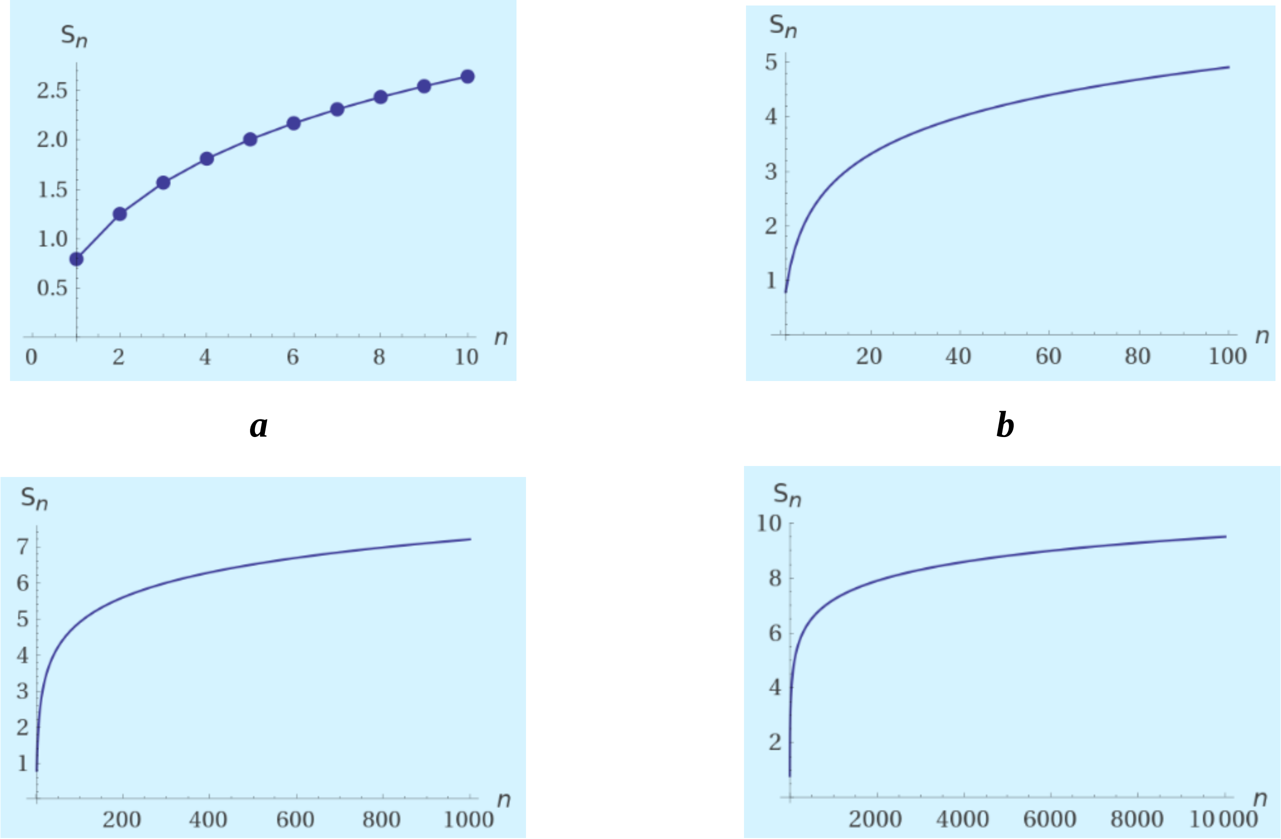
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{(n+1)^2} \qquad (2.1.15)$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.1.6:

Табл.2.1.6

n=10	≈ 2,64718
n=100	≈ 4,90339
n=1000	≈ 7,20146
n=10000	≈ 9,50359

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.1.7:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.1.7 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.1.7 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.1.15) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

2.2. Генерація числових рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією.

Розглянемо приклади геометричної інтерпретації членів числових рядів за домопогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрату зі стороною $a = 1$.

На рис. 2.2.1 розглядаємо квадрат $OA_1B_1C_1$ зі стороною $a = 1$. Сторони квадрата B_1A_1 і A_1O розбиваються на відрізки $|B_nB_{n+1}|$ і відповідно $|A_nA_{n+1}|$ за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ точками $B_n\left(1;\frac{1}{n}\right)$ і відповідно точками $A_n\left(\frac{1}{n};0\right)$.

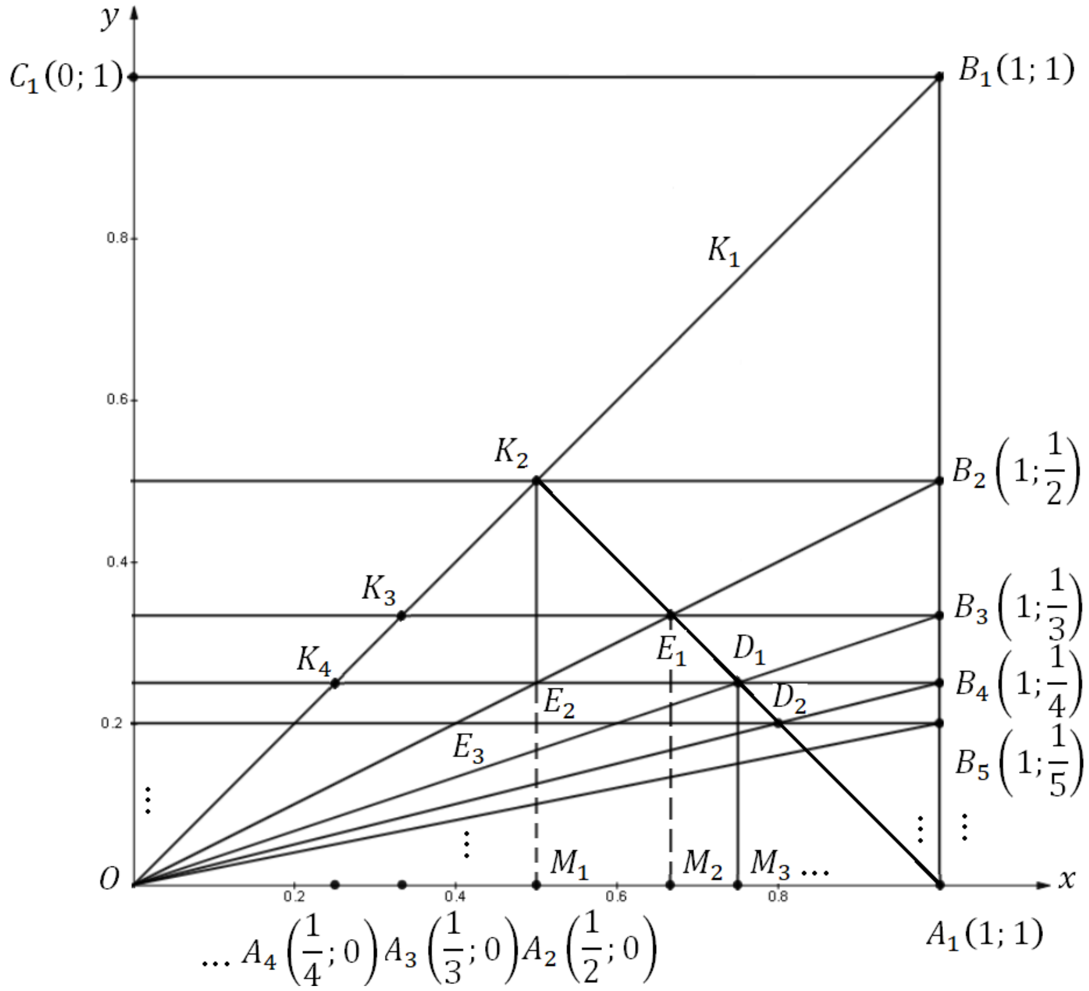


Рис. 2.2.1

Визначимо задачі, які пов’язані з квадратурною геометричною інтерпретацією. Завдання полягають в одержанні числових рядів, значення членів яких є величинами площ квадратів та трикутників, розташованих в межах квадрата, представленого на рис.2.2.1.

Скласти ряд величин:

1) площ послідовності квадратів: $\{OC_1B_1A_1\}$; $\{M_1K_2B_2A_1\}$; $\{M_2E_1B_3A_1\}$; $\{M_3D_1B_4A_1\}$; ... ; $\{M_nD_nB_nA_1\}$.

2) площ послідовності трикутників: ΔOB_1A_1; ΔOB_2A_1; ΔOB_3A_1; ... ; ΔOB_nA_1.

3) площ послідовності трикутників: ΔOB_1B_2; ΔOB_2B_3; ΔOB_3B_4; ... ; ΔOB_nB_{n+1}.

4) площ послідовності трапецій: $\{OC_1B_1B_2\}$; $\{OC_1B_1B_3\}$; $\{OC_1B_1B_4\}$; ... ; $\{OC_1B_1B_n\}$.

Задача 1. Скласти ряд величин площ послідовності квадратів: $\{OC_1B_1A_1\}$; $\{M_1K_2B_2A_1\}$; $\{M_2E_1B_3A_1\}$; $\{M_3D_1B_4A_1\}$; ... ; $\{M_nD_nB_nA_1\}$

Розв'язання

Позначимо площі квадратів символом $F_n, n \in N$.

Використовуючи рис.2.2.1 одержуємо значення площ:

$$F_1 = 1;\ F_2 = \frac{1}{2^2};\ F_3 = \frac{1}{3^2};\ ...;\ F_n = \frac{1}{n^2}, ...$$

Отримаємо ряд (2.1.15) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2.2.1)$$

Ряд (2.2.1) називають рядом обернених квадратів. Збіжність ряда (2.2.1) доведемо за допомогою інтегральної ознаки Коші, відповідно до якої обчислюємо невласний інтеграл:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x^2} \text{відтворююча функція} \\ \text{ряду (2.2.1)} \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1$$

Ознака збіжності ряда виконується. В докладних курсах теорії числових рядів доводиться, що сума ряда (2.2.1) дорівнює $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.2.1:

Табл.2.2.1

n=10	≈ 1,54967
n=100	≈ 1,63498
n=1000	≈ 1,64393
n=10000	≈ 1,64483

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.2.2:

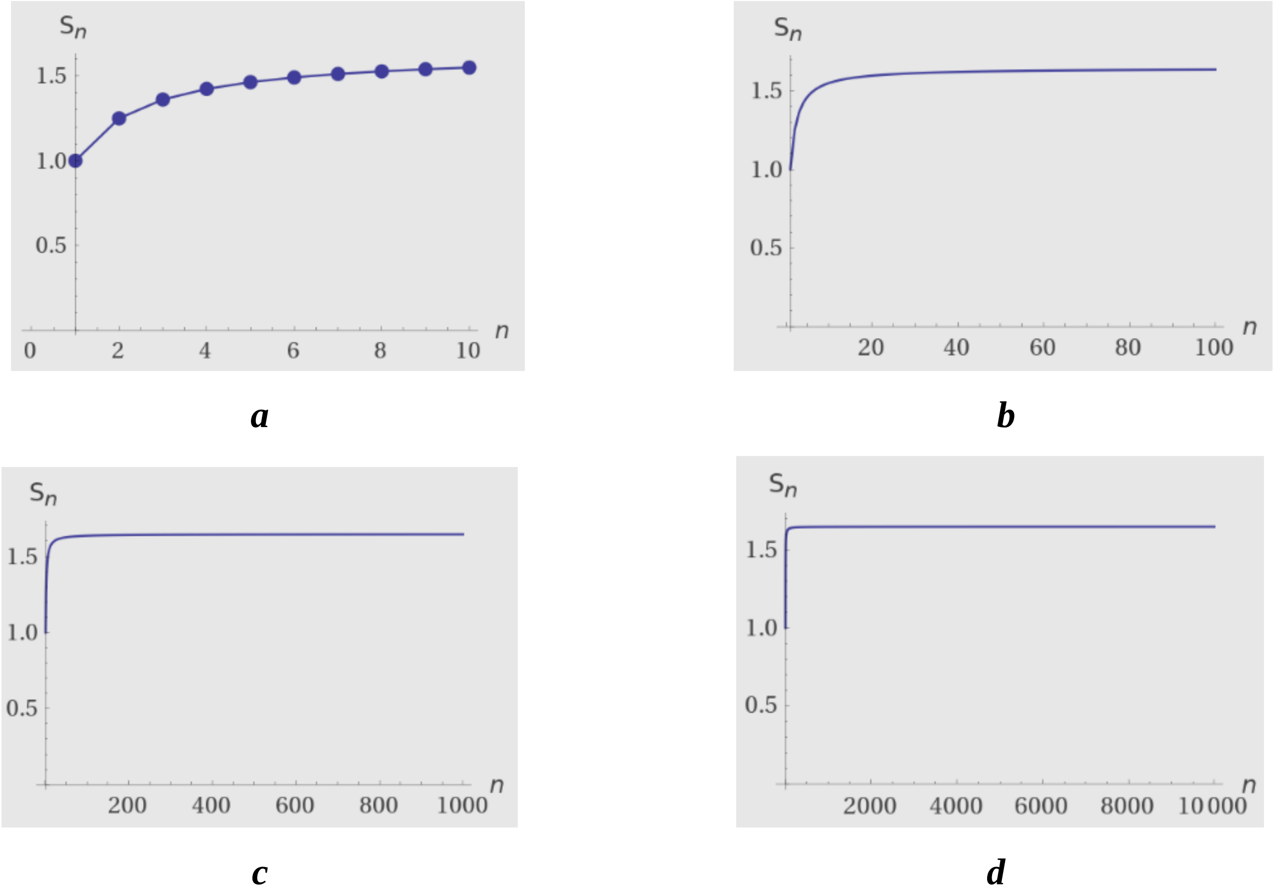


Рис.2.2.2 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. Графік рис. 2.2.2 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.2.1) збігається до певного значення скінченої суми $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Відповідь: досліджуваний ряд збіжний і його сума $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 2. Скласти ряд величин площ послідовності трикутників:

$$\Delta OB_1A_1;\ \Delta OB_2A_1;\ \Delta OB_3A_1; \dots; \Delta OB_nA_1$$

Розв'язання

Візуально з рис. 2.1 видно, що усі трикутники даної послідовності $\{\Delta OB_nA_1\}$ є прямокутними з катетами: $|\overline{OA}| = 1$ і $|\overline{OB}| = \frac{1}{n}$. Тому неважко з'ясувати, що ряд площ розглядаємої послідовності трикутників має вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \qquad (2.2.2)$$

Ряд (2.2.2) розбіжний, оскільки

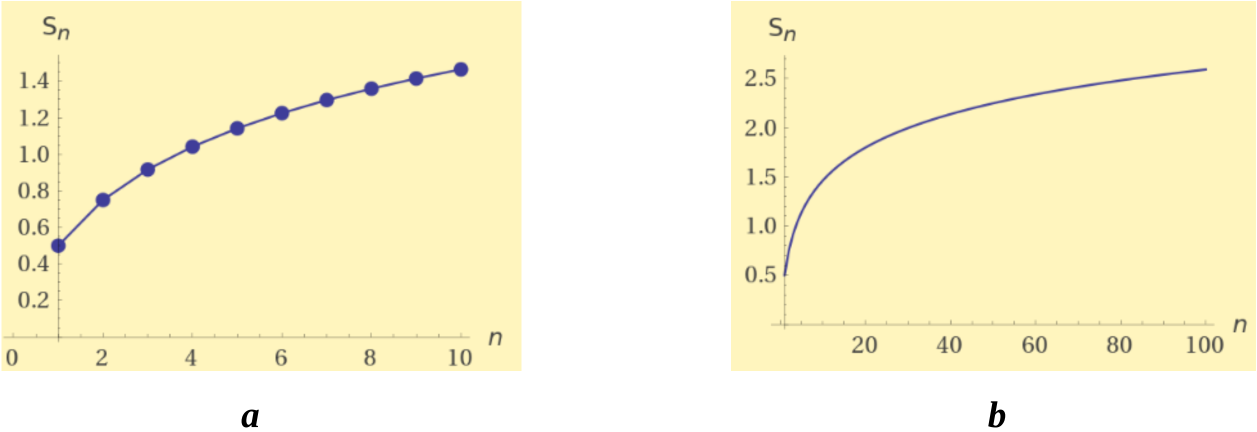
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.2.2:

Табл.2.2.2

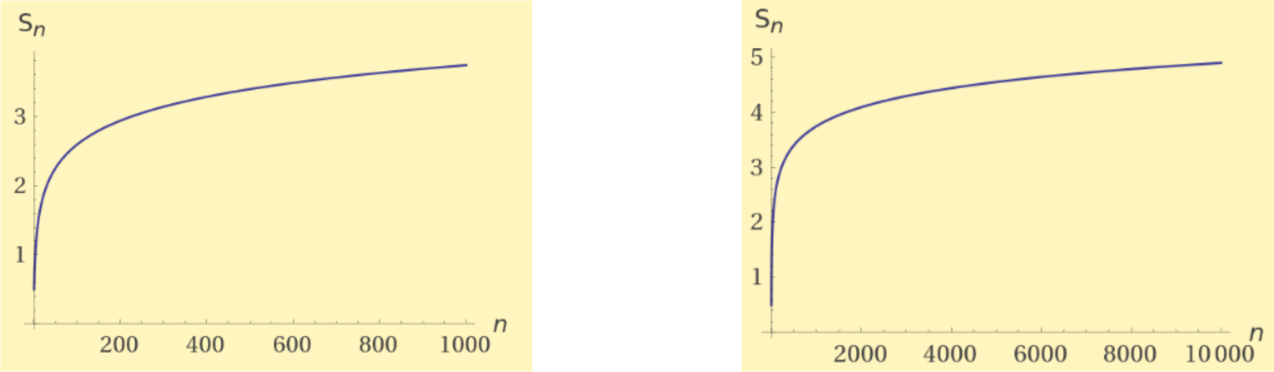
n=10	≈ 1,46448
n=100	≈ 2,59368
n=1000	≈ 3,74273
n=10000	≈ 4,89380

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.2.3:



a ***b***

Рис.2.2.3 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду



c ***d***

Рис.2.2.3 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.2.3 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.2.2) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

Задача 3. Скласти ряд величин площ послідовності трикутників:

$$\Delta OB_1B_2;\ \Delta OB_2B_3;\ \Delta OB_3B_4; \dots; \Delta OB_nB_{n+1}$$

Розв’язання

Розглянемо декілька методів розв’язання задачі:

Метод 1. Використаємо ряд (17):

$$F_1 = S_{\Delta OB_1B_2} = S_{\Delta OA_1B_1} - S_{\Delta OA_1B_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F_2 = S_{\Delta OB_2B_3} = S_{\Delta OA_1B_2} - S_{\Delta OA_1B_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

Отримаємо ряд (2.2.3) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \tag{2.2.3}$$

Візуально з рис.2.2.1, що ряд (2.2.3) збігається за допомогою ряда (2.1.1)

Метод 2. Використаємо загальну формулу обчислення площ трикутників: $S = \frac{1}{2}ah$. Зрозуміло, що висота трикутників розглядаємої послідовності трикутників має значення $h = |\overline{OA_1}| = 1$. Значення основ дорівнюють різниці:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Тому для будь-якого $n \in N$ одержуємо, що площа відповідного трикутника буде наступною:

$$F_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

Отримаємо ряд (2.2.3) у загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \qquad (2.2.3)$$

Метод 3. Використаємо обчислення площ за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_a^b y^2 dx$$

В нашому випадку маємо: $y = \frac{1}{n}x, x \in \ [0; 1]$, тому одержуємо формулу:

$$F_n = \int_a^b \left[\frac{1}{n}x - \frac{1}{n+1}x\right] dx = \int_a^b \left[\frac{1}{n(n+1)}\right] x dx = \frac{1}{2n(n+1)} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Отримаємо ряд (2.2.3) у загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \qquad (2.2.3)$$

Метод 4. Використаємо координати точок:

$$\text{т.} O(0; 0), \text{ т. } B_n\left(1; \frac{1}{n}\right), \text{ т. } B_{n+1}\left(1; \frac{1}{n+1}\right)$$

і формулу з аналітичної геометрії для обчислення площ трикутників, якщо відомі координати вершин трикутників. Формула має вигляд:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \qquad (*)$$

Відповідно до умов задачі за формулою $(*)$ одержуємо:

$$F_n = S_{\Delta A_1 B_n B_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|(1-0)\left(\frac{1}{n+1}-0\right)-(1-0)\left(\frac{1}{n}-0\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

Отримаємо ряд (2.2.3) у загальному вигляді:

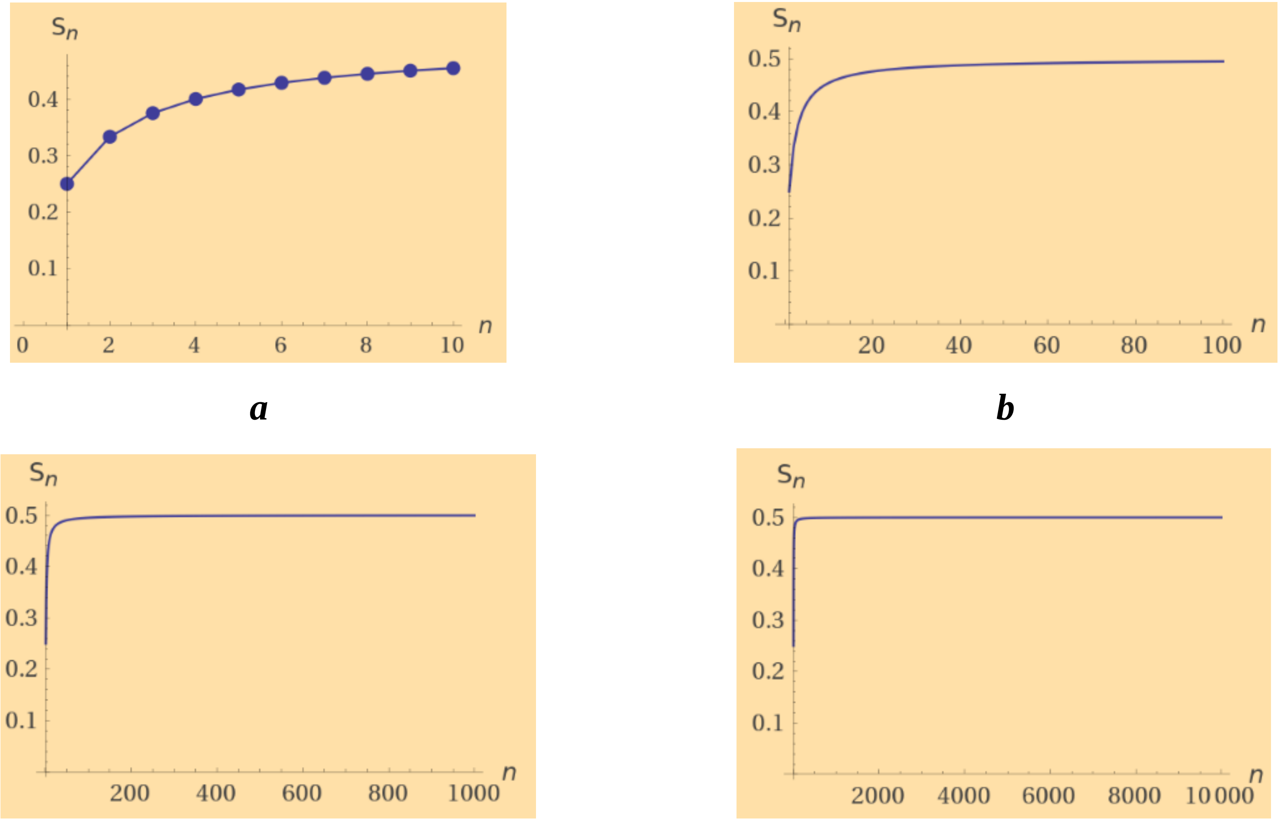
$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \qquad (2.2.3)$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.2.3:

Табл.2.2.3

n=10	≈ 0,45454
n=100	≈ 0,49504
n=1000	≈ 0,49950
n=10000	≈ 0,49995

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.2.4:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.2.4 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.2.4 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.2.3) збігається до певного значення скінченої суми S.

Відповідь: досліджуваний ряд збіжний.

Задача 4. Скласти ряд величин площ послідовності трапецій: $\{OC_1B_1B_2\}$; $\{OC_1B_1B_3\}$; $\{OC_1B_1B_4\}; \ldots; \{OC_1B_1B_n\}$

Розв’язання

Позначимо через F_n площі послідовності трапецій $\{OC_1B_1B_n\}_{n=1}^{\infty}$. Використовуючи рис.2.1 і формулу обчислення площі трапецій отримуємо:

$$F_1 = \frac{|\overline{OC_1}| + |\overline{B_1B_2}|}{2} \cdot |\overline{C_1B_1}| = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$F_2 = \frac{|\overline{OC_1}| + |\overline{B_1B_3}|}{2} \cdot |\overline{C_1B_1}| = \frac{1 + \frac{2}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$F_3 = \frac{|\overline{OC_1}| + |\overline{B_1B_4}|}{2} \cdot |\overline{C_1B_1}| = \frac{1 + \frac{3}{4}}{2} \cdot 1 = \frac{7}{8}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$F_n = \frac{2n + 1}{2(n + 1)}$$

Отримаємо ряд (2.2.3) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{2(n + 1)} \qquad (2.2.4)$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки рядів:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n + 1}{2(n + 1)} = 1$$

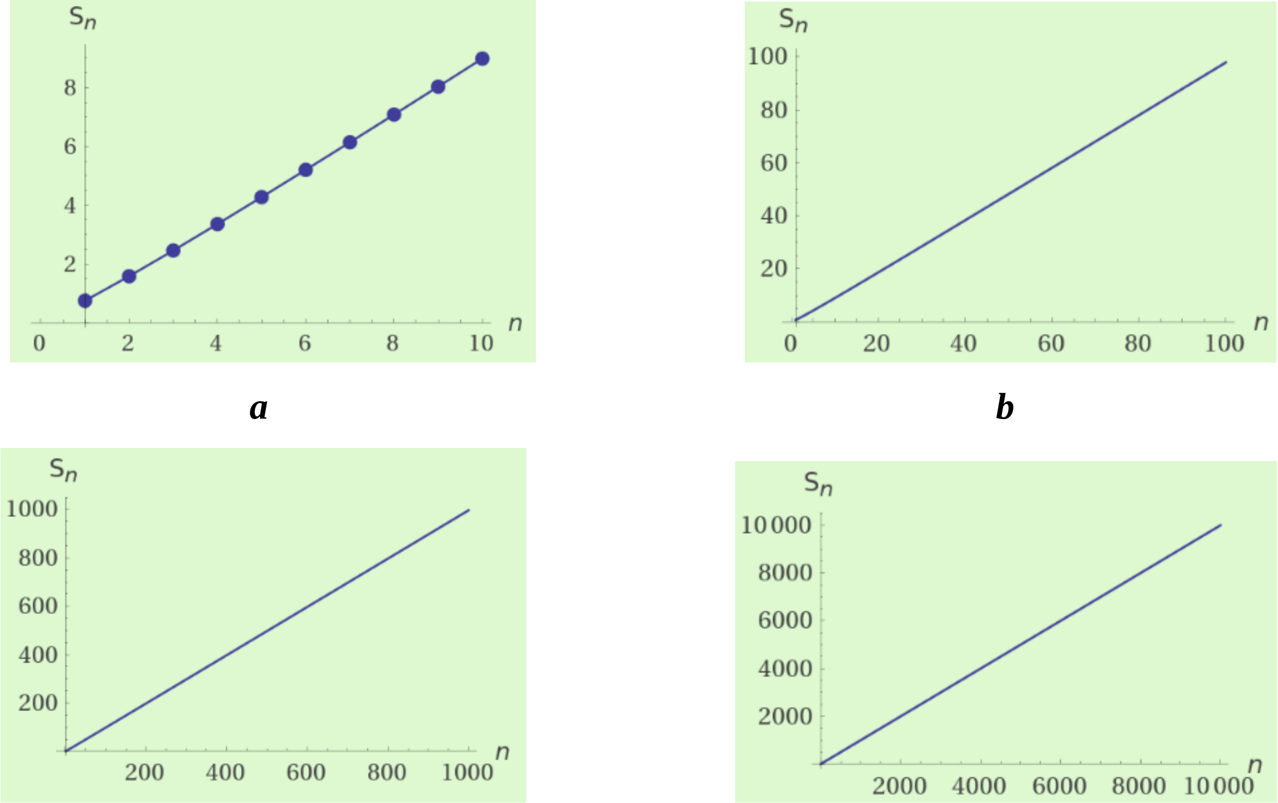
Необхідна умова збіжності ряда не виконується, тому ряд (2.2.4) розбіжний.

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.2.4:

Табл.2.2.4

n=10	≈ 8,99006
n=100	≈ 97,9013
n=1000	≈ 996,756
n=10000	≈ 9995,606

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.2.5:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.2.5 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.2.5 стрімко зростає та бачимо, що ряд (2.2.4) не збігається до певного значення скінченої суми, а тому є розбіжним.

Відповідь: досліджуваний ряд розбіжний.

2.3. Генерація числових рядів з кубатурною геометричною інтерпретацією

Для генерації числових рядів з кубатурою геометричною інтерпретацією використаємо фрагмент рис.2.1.1.

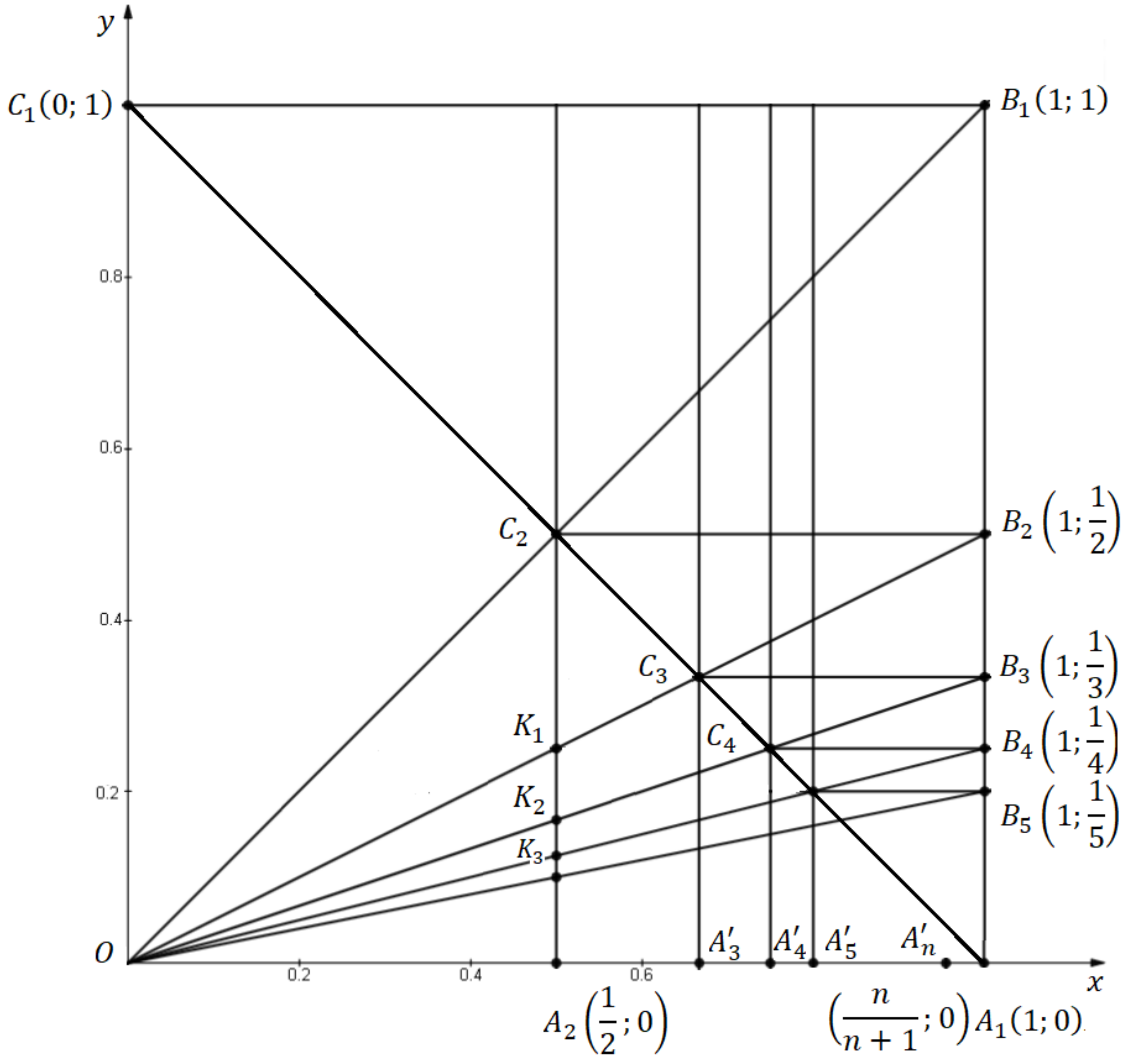


Рис.2.3.1

Визначимо задачі, які пов'язані з кубатурною геометричною інтерпретацією. Завдання полягають в одержанні числових рядів, значення членів яких є значення об'ємів тіл, що одержуються обертанням навколо осі Ox, розташованих в межах квадрата, представленого на рис.2.3.1.

Скласти ряд величин:

1) прямих ліній $|\overline{C_nB_n}|$;
2) прямої $|\overline{C_1A_1}|$ на відрізках: $|\overline{OA_2}|$, $|\overline{A_2A'_3}|$, $|\overline{A'_3A'_4}|$,…, $|\overline{A'_{n+2}A'_{n+3}}|$,…;
3) прямих $|\overline{OB_n}|$;

4) трикутників ΔOB_nB_{n+1};

5) трикутників $\Delta OC_2K_1, \Delta OK_nK_{n+2}$;

6) трикутників $\Delta C_{n+1}B_nB_{n+1}$.

Задача 1. Скласти ряд величин прямих ліній $|\overline{C_nB_n}|$.

Розв'язання

Використовуючі візуалізацію умов задачі (рис.2.3.1) одержуємо значення послідовності об'ємів:

$$V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$$

$$V_2 = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}\pi$$

$$V_3 = \pi \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}\pi$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$V_n = \frac{1}{n^3}\pi$$

Отримаємо ряд (2.3.1) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\pi \tag{2.3.1}$$

Виконаємо дослідження ряду на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші. Для цього досліджуємо на збіжність невласний інтеграл:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\pi dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^{b} \frac{1}{x^3}dx = \pi \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\bigg|_1^b\right] = \pi \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{b^2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Отже, ряд збіжний.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний.

Задача 2. Скласти ряд величин прямої $|\overline{C_1A_1}|$ на відрізках: $|\overline{OA_2}|$, $|\overline{A_2A_3'}|$, $|\overline{A_3'A_4'}|$,…, $|\overline{A_{n+2}'A_{n+3}'}|$,….

Розв'язання

Спочатку визначимо рівняння прямої $\overline{C_1A_1}$ за допомогою координат т.т. $C_1(0;1), A_1(1;0)$:

$$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{0-1} \Rightarrow y=1-x \qquad (')$$

Застосуємо відому з математичного аналізу формулу обчислення об’єму тіл обертання:

$$v=\pi\int_a^b y^2dx \qquad ('')$$

Використовуючи рис.2.3.1 і умови задачі 2 за допомогою формул (′) і (″) одержуємо виличини послідовності об’ємів:

$$v_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)^2dx=\left|\begin{matrix}1-x\ \Rightarrow -dx=dz\\ z|_{x=0}=1;\ z|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right|=(-\pi\,)\int\limits_1^{\frac{1}{2}}z^2dz=\pi\int\limits_1^{\frac{1}{2}}z^2dz=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[z^3|_1^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{3}\pi\frac{7}{8}$$

$$v_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}(1-x)^2dx=\left|\begin{matrix}1-x\ \Rightarrow -dx=dz\\ z|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2};\ z|_{x=\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\end{matrix}\right|=(-\pi\,)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}z^2dz=\pi\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}z^2dz=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[z^3|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right]=\frac{1}{3}\pi\frac{19}{8\cdot 27}=\frac{1}{3}\pi\frac{19}{2^3 3^3}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$v_n=\frac{1}{3}\pi\left[z^3|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right]=\frac{1}{3}\pi\frac{3n^2+3n+1}{\big(n(n+1)\big)^3}$$

Отримаємо ряд (2.3.2) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\pi\frac{3n^2+3n+1}{\big(n(n+1)\big)^3} \qquad (2.3.2)$$

Геометрична інтерпретація ряду (2.3.2) дозволяє візуально спостерігати, що ряд збігається до суми S:

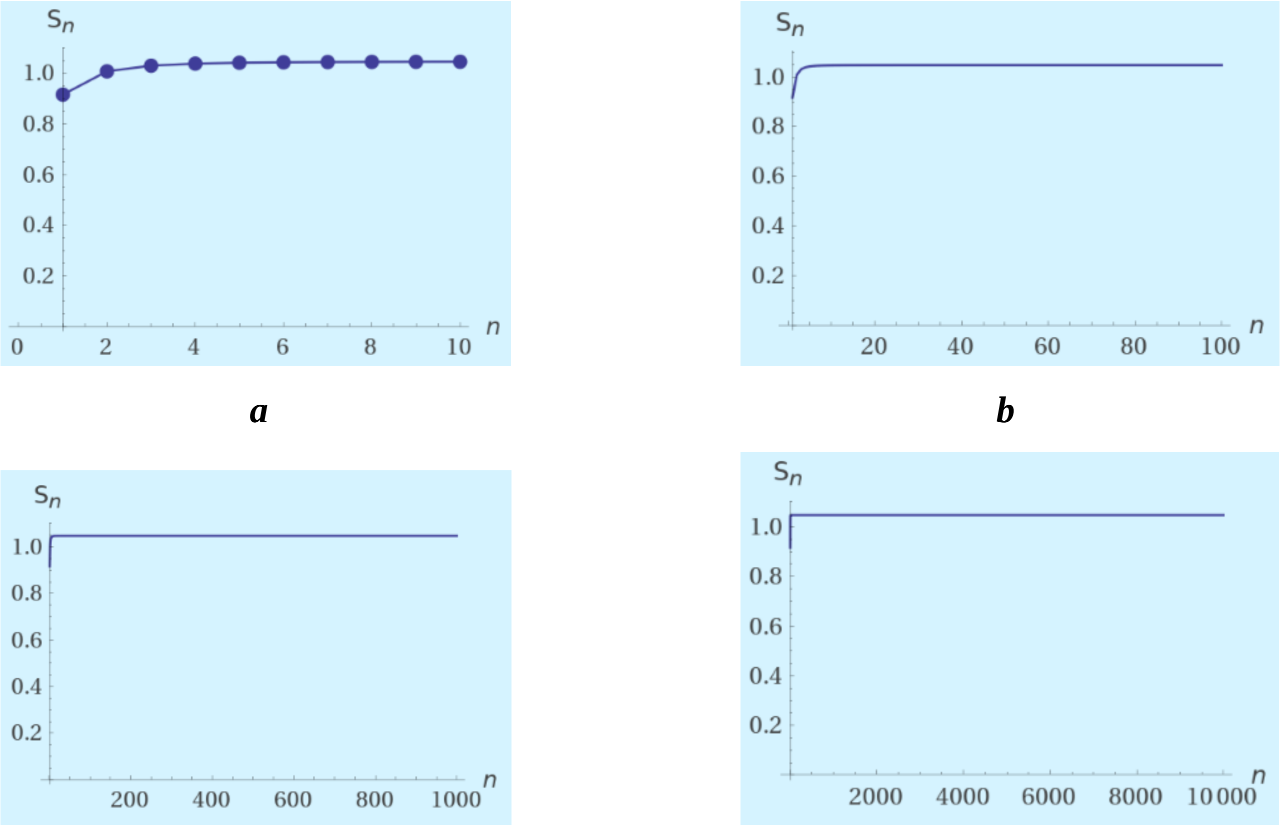
$$S=\pi\int_0^1(1-x)^2dx=\pi\int_0^1 z^2dz=\frac{1}{3}\pi$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.3.1:

Табл.2.3.1

n=10	≈ 1,04641
n=100	≈ 1,047198
n=1000	≈ 1,047198
n=10000	≈ 1,047198

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.3.2:



a ***b***

c ***d***

Рис.2.3.2 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.3.2 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.3.2) збігається до певного значення скінченої суми S.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний.

Задача 3. Скласти ряд величин прямих $|\overline{OB_n}|$.

Розв'язання

Рівняння прямих $\overline{OB_n}$ для будь якого значення $n \in N$ мають вид:

$$y = \frac{1}{n}x \qquad (*)$$

Для обчислення величин об'ємів, що генеруються за допомогою вище вказаної функції $(*)$ використовуємо формулу $('')$ з прикладу 2.

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$V_3 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{9}$$

… … … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$V_n = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{n}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{n^2}[x^3|_0^1] = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{n^2}$$

Отримаємо ряд (2.3.3) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3n^2} \qquad (2.3.3)$$

Застосуємо ряд (2.3.3) у вигляді:

$$\frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad (2.3.3')$$

Ряд $(2.3.3')$ збіжний, тому що збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сума якого $S = \frac{\pi^2}{6}$. Таким чином стверджуємо, що ряд (2.3.3) є збіжним до суми $S = \frac{\pi^3}{18}$.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний і його сума $S = \frac{\pi^3}{18}$.

Задача 4. Скласти ряд величин трикутників ΔOB_nB_{n+1}.

Розв'язання

Ряд площ послідовності ΔOB_nB_1 можемо одержати різними способами:

Спосіб 1. Використаємо ряд (2.3.3):

$$v_1(\Delta OB_1B_2)=v(\Delta OB_1A_1)-v(\Delta OB_2A_1)=\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}\right]=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{2^2}=\frac{\pi}{2^2}$$

$$v_2(\Delta OB_2B_3)=v(\Delta OB_2A_1)-v(\Delta OB_3A_1)=\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right]=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{5}{3^2\cdot 2^2}$$

$$v_3(\Delta OB_3B_4)=v(\Delta OB_3A_1)-v(\Delta OB_4A_1)=\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right]=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{7}{3^2\cdot 4^2}$$

…………………………….……………………

$$v_n(\Delta OB_3B_4)=\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n-1)^2}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Отримаємо ряд (2.3.4) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

$$\frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad (2.3.4)$$

Спосіб 2. Використаємо інтеграл:

$$v_n=\pi\int_0^1\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right]x^2dx=\frac{\pi}{3}\left[\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}\right]x^3|_0^1=\frac{\pi}{3}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Отримали ряд (2.3.4).

Ряд (2.3.4) збіжний за граничною ознакою порівняння. Доведемо цей висновок за допомогою відомого ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. За ознакою порівняння обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}:\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+2n+1}=0$$

Ряд (2.3.4) збіжний, тому що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний.

Задача 5. Скласти ряд величин трикутників $\Delta OC_2K_1, \Delta OK_nK_{n+2}$.

Розв'язання

$$v_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{4}\right]x^2dx=\frac{1}{3}\pi\frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx=\frac{1}{4}\pi\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2^2\cdot 2^3}=\frac{\pi}{2^5}$$

$$v_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right] x^2 dx = \frac{1}{3}\pi \left[-\frac{5}{36}\right] \frac{1}{8} = \frac{5\pi}{3 \cdot 3^2 \cdot 2^5}$$

$$v_3 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right] x^2 dx = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{7}{3^2 \cdot 2^4}\right] \frac{1}{8} = \frac{7\pi}{3 \cdot 3^2 \cdot 2^7}$$

$$v_4 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right] x^2 dx = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{9}{2^4 \cdot 5^2}\right] \frac{1}{8} = \frac{9\pi}{3 \cdot 5^2 \cdot 2^7}$$

… … … … … … … … … . … … … … … … … …

$$v_4 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right] x^2 dx = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}\right] \frac{1}{8} = \frac{(2n+1)\pi}{24n^2(n+1)^2}$$

Отримаємо ряд (2.3.5) у загальному вигляді, згорнувши дану послідовність:

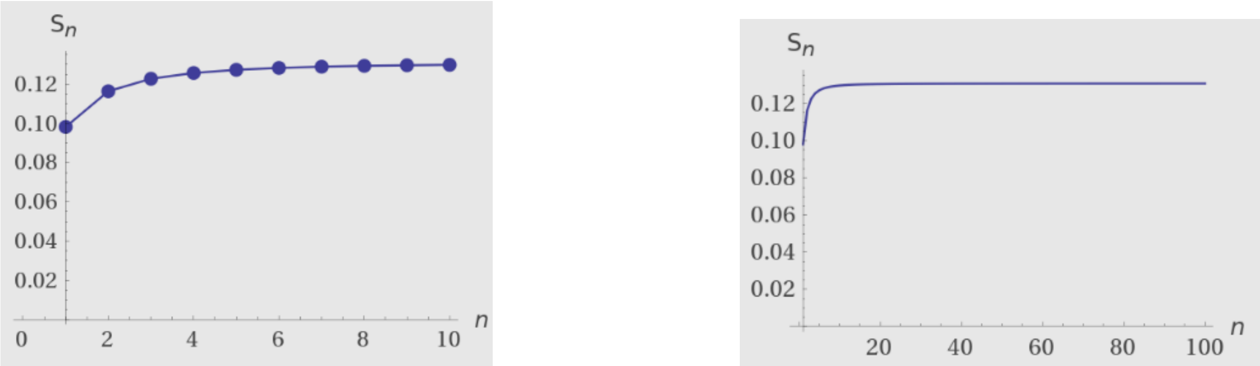
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{24n^2(n+1)^2} \tag{2.3.5}$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.3.2:

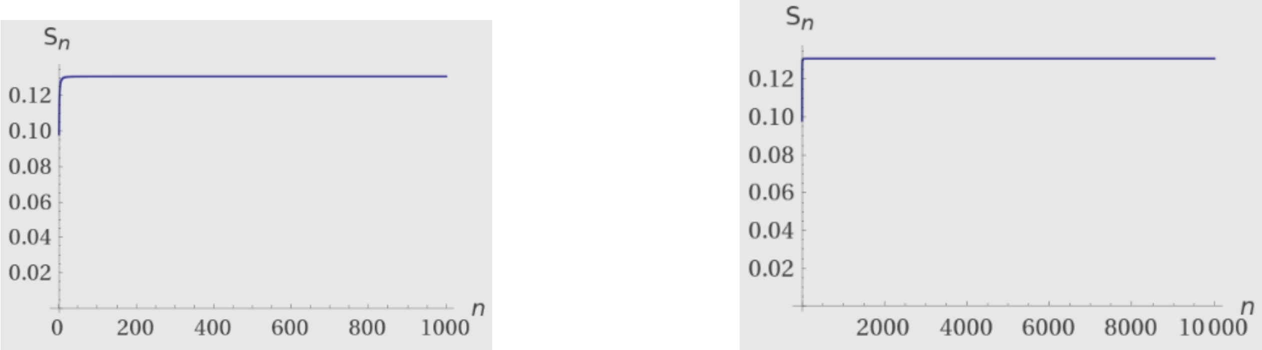
Табл.2.3.2

n=10	≈ 0,12981
n=100	≈ 0,130898
n=1000	≈ 0,130899
n=10000	≈ 0,130899

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.3.5:



a **b**



c ***d***

Рис.2.3.3 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.3.3 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.3.5) збігається до певного значення скінченої суми S.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний.

Задача 6. Скласти ряд величин трикутників $\Delta C_{n+1}B_nB_{n+1}$.

Розв'язання

Ряд, членами якого є величини об'ємів, що створюються обертанням послідовності $\Delta C_{n+1}B_nB_{n+1}$ навколо осі Ox одержуємо за допомогою рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3n^2}\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}$$

$$v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3n^2}\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{(n+1)^3}\cdot\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{(n+1)^3}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3}\left[\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3}\cdot\frac{3n+1}{3n^2}$$

Одержуємо ряд:

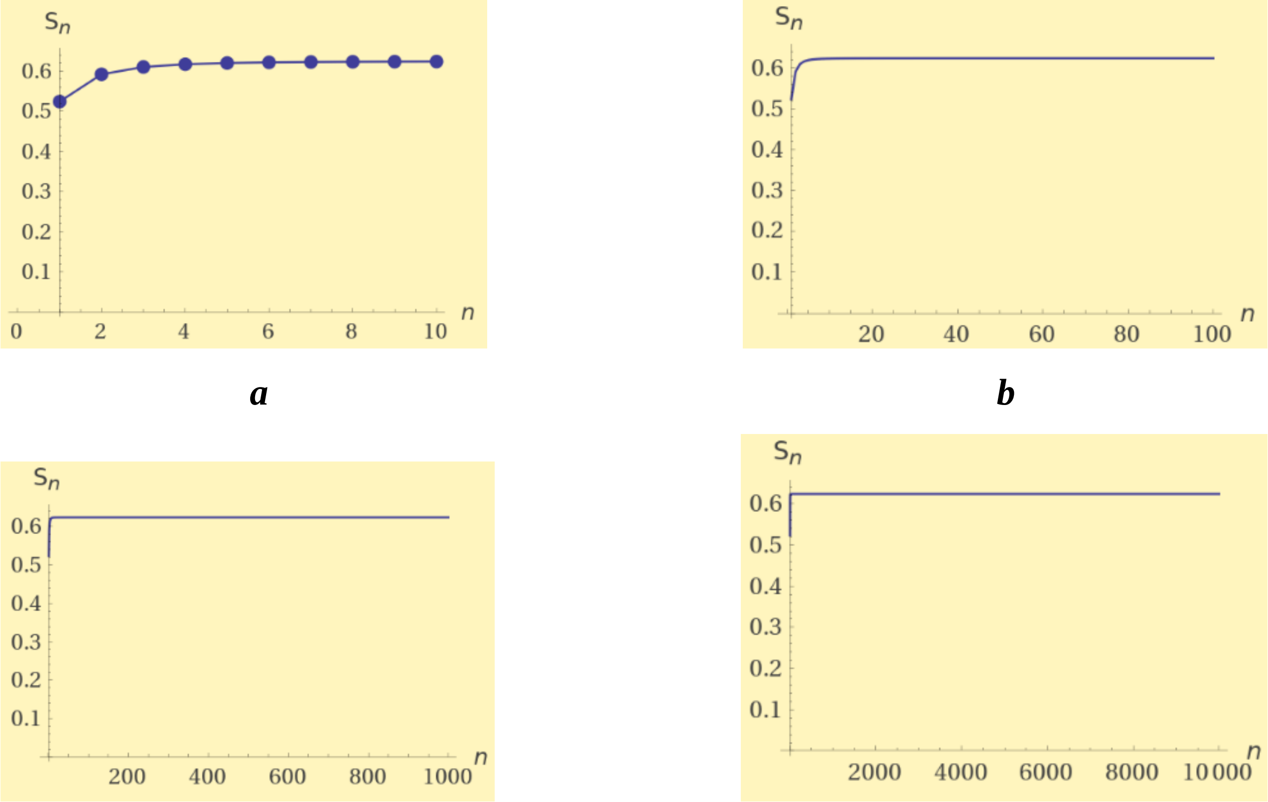
$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3}\cdot\frac{3n+1}{3n^2} \qquad (2.3.6)$$

Прослідкуємо, за допомогою онлайн сервісу WolframAlpha зміну графіка частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду табл.2.3.3:

Табл.2.3.3

n=10	≈ 0,62325
n=100	≈ 0,62400
n=1000	≈ 0,624010
n=10000	≈ 0,624011

Побудуємо графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду рис.2.3.6:



a **b**

c **d**

Рис.2.3.4 Графіки частинних сум для перших десяти тисяч членів ряду

За допомогою графіків можна дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які залежать від кількості доданків, що утворюють даний ряд. Графік рис. 2.3.4 зростає з постійною швидкістю та бачимо, що ряд (2.3.6) збігається до певного значення скінченої суми S.

Відповідь:досліджуваний ряд збіжний.

За допомогою розглянутих вище рядів з лінійною,геометричною та кубатурою інтерпретаціями можна скласти систему задач, яка може використовуватись як на заняттях з математичного аналізу при вивчені розділу

«Числові ряди», так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ (див. додаток).

Висновки до розділу 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи нами були проведені дослідження, які підтверджують той факт, що числові ряди можна інтерпретувати за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$, а саме:

- розробили алгоритми побудови числових рядів, в результаті нами було одержано «сігма-моделі» цілої низки числових рядів з лінійною, квадратурною та кубатурою геометричними інтерпритаціями;
- приділили досить велику увагу дослідженню отриманих рядів на збіжність за допомогою необхідної і достатньої ознаки збіжності рядів з невід’ємними членами, обчислити суму збіжних рядів;
- підкреслили міжпредметні зв’язки математичного аналізу з аналітичною геометрією та елементарною математикою;
- висвітлили декілька методів розв’язування запропонованих задач;
- дослідили характер зміни частинних сум одержаних рядів в залежності від значення *n* та побудувати геометричну ілюстрацію для демонстрації зміни значення *Sn* для заданих величин.

. Виведені числові ряди можна використовувати як заняттях з математичного аналізу, так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ.

Для реалізації дидактичних принципів наочності ми використовували можливості онлайн-сервісів Desmos та WolframAlpha.

ВИСНОВКИ

Упродовж написання кваліфікаційної роботи було опрацьовано та проаналізовано навчальну та методичну літературу з теми дослідження.

Аналіз дозволив виявити, що точної дати виникнення та чіткої періодизації етапів розвитку рядів немає. Проте ми з’ясували, що арифметичні і геометричні прогресії існували ще в Стародавньому Єгипті, а в Древньому Вавилоні вже вміли обчислювати їх суми.

Ряд як самостійне поняття, математики почали використовувати XVII ст.. Такі вчені як І. Ньютон та Г. Лейбніц застосовували ряди для вирішення алгебраїчних та диференціальних рівнянь. Теорія рядів у XVIII-XIX ст. розвивалася в роботах Я. та І. Бернуллі, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Ейлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа та ін. Сувора теорія рядів була створена в XIX ст. на основі поняття границі в працях К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коші, П. Діріхле, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса, Б. Рімана та ін. [1,10,31,44].

В роботі були представлені основні поняття числових рядів (числовий ряд, члени числового ряду, частинна сума ряду, границя числового ряду, збіжний та розбіжний числовий ряд, та інші). Продемонстровано теореми числових рядів та їх доведення. Наведено приклади їх використання.

Також аналіз дозволив виявити, що в більшості підручниках, посібниках та практикумах з математичного аналізу пропонують студентам значний об’єм теоретичних відомостей, приклади розв’язання типових і нестандартних задач, наявні методичні рекомендації та вказівки для студентів, запропоновано систему задач та різнорівневих прикладів для самостійного виконання, але майже відсутня візуалізація побудови числових рядів.

Зважаючи на цю проблему, у роботі висвітлена низка числових рядів, згенерованих за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$ з лінійною, квадратурною та кубатурою геометричними інтерпретаціями.

Евристичним пошуком знайдено алгоритми, за якими змінюються величини певних геометричних об'єктів, розміщених у квадраті зі стороною $a = 1$, побудованих за допомогою графіків функції $y = \frac{1}{n}x$ та знайдено «сігма-моделі» цих числових рядів.

Створена система числових рядів може використовуватись як на заняттях з математичного аналізу при вивчені розділу «Числові ряди», так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ.

Одержані числові ряди було досліджено на збіжність за допомогою необхідної і достатньої ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами, обчислити суму збіжних рядів. Для реалізації дидактичного принципу наочності при вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди» було досліджено характер зміни частинних сум одержаних рядів Sn в залежності від значення n та побудувано геометричну ілюстрацію для демонстрації зміни значення Sn для заданих величин n: $n = 10, n = 100, n = 1000, n = 10000.$

В роботі були використані сучасні математичні онлайн-сервіси Desmos та WolframAlpha.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Н. В. Історія математичних термінів, поняття, позначення: словар − довідник. вид. 3-е, дод. і випр. / Н. В. Александрова. - Москва: Вид. ЛКІ, 2008. − 248с.

2. Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Ряди: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 124 с.

3. Архипов Г. И. «Лекции по математическому анализу».: Учебник для университетов и пед. вузов/ Под. ред. Г. И Архипов. В. А Садовничий. В.Н. Чубариков − Висш. шк. 1999. − 695 с.

4. Баврин, И. И. Математический анализ для педагогических вузов 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для прикладного бакалаврата / Под. ред. И. И. Баврин. − Люберцы: Юрайт, 2016. − 327 с.

5. Барбаумов В. Е., Попова Н. В. Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2010. – 97с.

6. Берс Л. Математический анализ (в двух томах). / Л. Берс. – М. : Высшая школа, 1975. – 520 с.

7. Бугрим О.В. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. для студ. напряму підгот. 6.050301 Гірництво / О.В. Бугрим, Л.Й. Бойко; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 82 с.

8. Бусарова Т. М., Звонарьова О. В., Міхєєва Н. В., Петренко В. О. Вступ до математичного аналізу. Модуль 3: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д., 2007. - 58 с.

9. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. — М.: Наука, 1959. — С. 302—303, 309—310. — 456 с.

10. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.

11. Виленкин Н.Я. Ряди: учебное пособие для студентов-заочников 3 курса физико-математических факультетов педагогических институтов / 95 Виленкин Н.Я., Цукерман В.В., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. — М.: Просвещение, 1982. — 161 с.

12. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.

13. Волкова Ряды Т.В.: учеб. пособие / Т.В. Волкова, М.В. Долгополов, И.Н. Родионова [и др.]. - Самара : Изд-во «Самарский университет», 2013. - 86 с.

14. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., перераб. и доп.. – Москва : Наука, 1979. – 408 с.

15. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский − 12-е изд.−М.: Наука, 1977.

16. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967. – 376 с.

17. Горбунова, Н.Ю. Ряды : учебное пособие / Н.Ю. Горбунова, Н.Н. Платонова; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2017 – 156 с.

18. Горячев А. П. Числовые и функциональные ряды / А. П. Горячев. – Москва : МИФИ, 2007. – 264 с.

19. Гредасова Н.В. Ряды : учебное пособие / Н.В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М.А. Корешникова, Е.Г. Полищук, И.Ю. Андреева.— Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 116 с.

20. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.

21. Евграфов М. А., Ряды и интегральные представления, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1986, том 13, 5–92.

22. Жалдак М. І. Математичний аналіз функції : навч. посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ : НПУ, 2007. – 429 с.

23. Жулидова, Ю. В. Ряды : учеб, пособие / Ю. В. Жулидова, А. Е. Ключников; [науч. ред. В. А. Казинец]. - Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. – 84 с.

24. Задорожный В.Н. Высшая математика для технических университетов. Часть IV. Ряды: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 344 с.

25. Зорич В. А. Математический анализ. / В. А. Зорич . Часть II. −Изд. 4-е, испр.− М.: МЦНМО, 2002. −794 с.

26. Камынин Л.И. Курс математического анализа. В 2-х томах. М.: Изд-во МГУ. Том 2: 1995 г.− 624 стр.

27. Капитонова Н.А. Числовые ряды: учебно-методическое пособие. — Тверь: ТГУ, 2014. — 28 с.

28. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.

29. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.

30. Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання / Корольський В. В., Габ С.С. // Новітні комп'ютерні технології. : Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет». - Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 67-73.

31. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.

32. Крюков М. М. З історії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Історія науки і техніки. – 2013. – №3. - С. 166. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ictnt_2013_3_25.

33. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. [Электронный ресурс] / Л.Д. Кудрявцев – Режим доступа: http://alleng.org/d/math/math98.htm.

34. Кузьмина С.С. Числовые ряды / С.С. Кузьмина, О.Я. Шевалдина Екатеринбург: ГОУ−ВПО УГТУ−УПИ , 2005

35. Ламтюгова С. М.. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях : навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання) / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.

36. Ляшко, И.И. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Том 2. Ряды: Учебное пособие [Электронный ресурс] / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. − М.: ЛКИ, 2012. − 224 с. – Режим доступа: http://alleng.org/d/math/math21.htm

37. Мурашковська В.П. .Числові ряди. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни „Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська–Чернігів: ЧНТУ,2018, - 45с.

38. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. − М.: Наука, 2008. − 640 с.

39. Плужникова Е. Л. Математический анализ. Ряды : учебн. пособ. / Е. Л. Плужникова, Б. Г. Разумейко. – Москва : Издательский дом «МИСис», 2011. – 141 с.

40. Рудой Е. М. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды : учебн. пособие / Е. М. Рудой. – Новосибирск : НГПУ, 2010. – 198 с.

41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). / Г. М. Фихтенгольц. − М.: Физматлит,2003. т.1 – 680 с.

42. Чернєй М.І. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад.: М.І. Чернєй, Г.К. Новикова, Н.Л. Денисенко. — К.: НТУУ “КПІ”, 2016. — 62 с.

43. Щоголєв С. А Теорія рядів: навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

44. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с.

45. Ярхо Т. О. Теорія числових рядів: смисловий, доказовий, практичний аспекти: навчально-методичний посібник / Т.О. Ярхо – Х. : ХНАДУ, 2017. – 60 с.

ДОДАТОК

Знайомство студентів з теорією рядів — обов’язкова частина математичної освіти.

Вивчення рядів викликає певні труднощі у студентів, зокрема, усвідомлення та їх практичне застосування. Внаслідок цього може знижуватись рівень мотивації та активності студентів під час навчання, а як результат і погіршується рівень навчальних досягнень студентів.

Для підвищення ефективності засвоєння знань та активізації пізнавального інтересу студентів необхідні різні підходи до подання матеріалу викладачем. Саме тому, для кращого засвоєння студентами лекційного матеріалу та практичних занять доцільним, при вивченні розділу «Числові ряди» геометрична інтерпретація та побудова моделей деяких числових рядів [28].

Для реалізації дидактичних принципів доступності і наочності можливо використовувати різні освітні математичні програмами, прикладами яких є:

- освітнє геометричне середовище GeoGebra;
- програмне середовище Microsoft Excel;
- графічний калькулятор Desmos;
- база знань і набір обчислювальних алгоритмів WolframAlpha та ін..

Використання сучасних інформаційних технологій дає можливість підвищити мотивацію і, як наслідок, якість навчання студентів при вивчення числових рядів в курсі математичного аналізу.

Розглянемо систему задач геометричної інтерпретації членів числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрату зі стороною $a = 1$, яка може використовуватись як на заняттях з математичного аналізу при вивчені розділу «Числові ряди», так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ.

Відповідно до розглянутих рядів у розділі 2, можна сформулювати задачі, які пов'язані з лінійною, квадратурною та кубатурною геометричними інтерпретаціями.

Задача 1. Записати ряд за його загальним членом:

$$a)\, u_n = \frac{1}{n(n+1)};\quad b)\, u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n};\quad c)\, u_n = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}.$$

Задача 2. Знайти загальний член ряду:

$$a)\, \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots;$$

$$b)\, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{16} + \cdots.$$

Задача 3. Дослідіть ряди на збіжність:

$$a)\, \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2n+1}{2(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)};$$

$$b)\, 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Задача 4. Нехай дано ряд геометричної прогресії:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{32} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Виконайте такі завдання:

– знайдіть частинні суми заданого ряду;

– дослідіть характер зміни частинних сум *Sn* в залежності від значення n;

– побудуйте геометричну ілюстрацію для демонстрації зміни значення *Sn* для таких величин n: $n = 5, n = 10, n = 15;\ n = 20$.

Задача 5. Дано квадрат OAB_1C зі стороною $a = 1$. Сторона квадрата B_1A розбиваються на відрізки $|B_nB_{n+1}|$ за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ точками $B_n\left(1; \frac{1}{n}\right)$. Побудуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{B_nB_{n+1}}|$ та дослідіть його на збіжність.

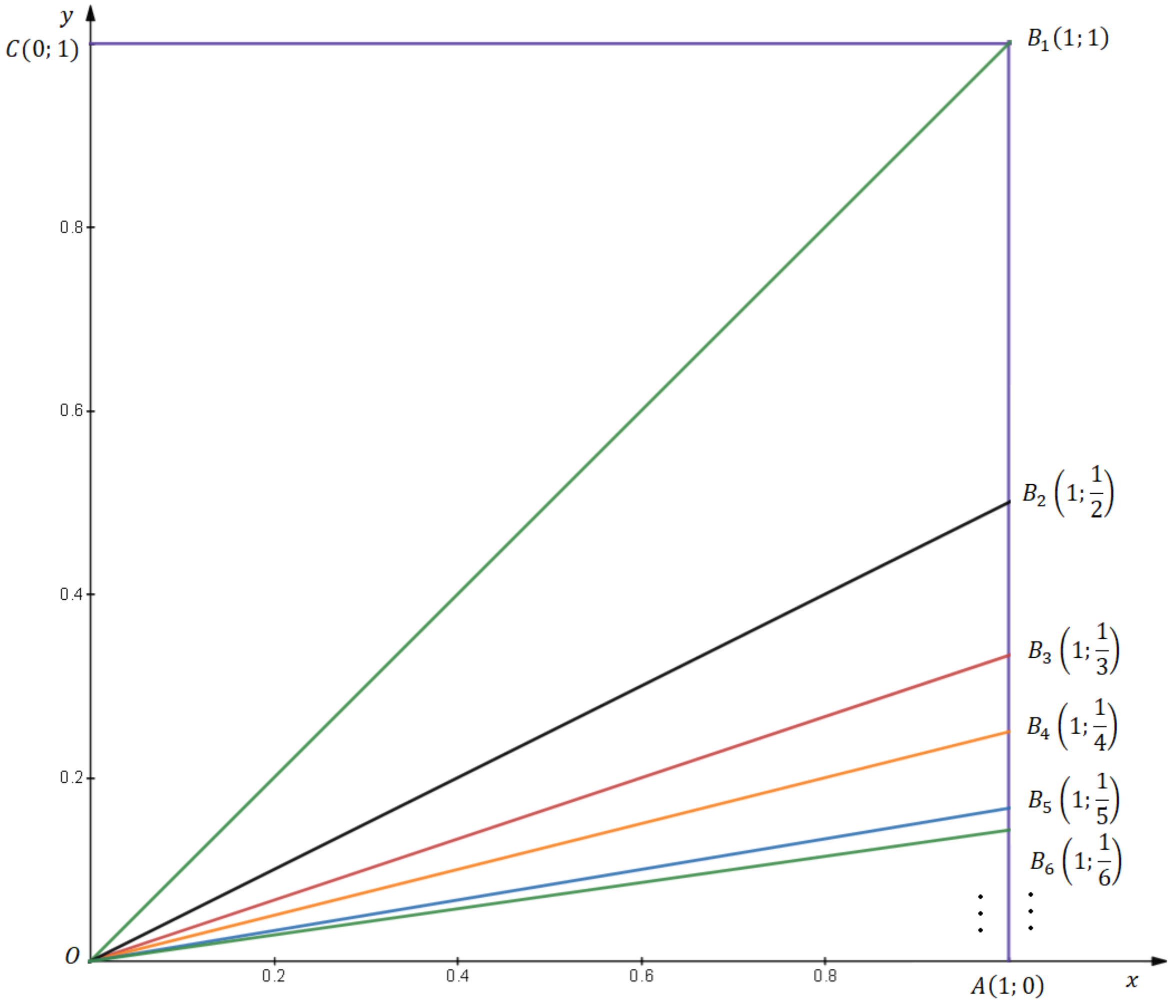


Рис. 1 Графік до задачі 5

Задача 6. Дано квадрат OAB_1C зі стороною $a = 1$. Сторона квадрата B_1A розбиваються на відрізки $|B_nB_{n+1}|$ за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ точками $B_n\left(1;\frac{1}{n}\right)$:

a) складіть ряд величин площ послідовності трикутників декількома способами: $\Delta OB_1B_2;\ \Delta OB_2B_3;\ \Delta OB_3B_4; \dots ; \Delta OB_nB_{n+1};$

b) скласти ряд величин прямих $|\overline{OB_n}|$, значення членів яких є значення об'ємів тіл, що одержуються обертанням навколо осі Ox, розташованих в межах квадрата, представленого на рис.1.

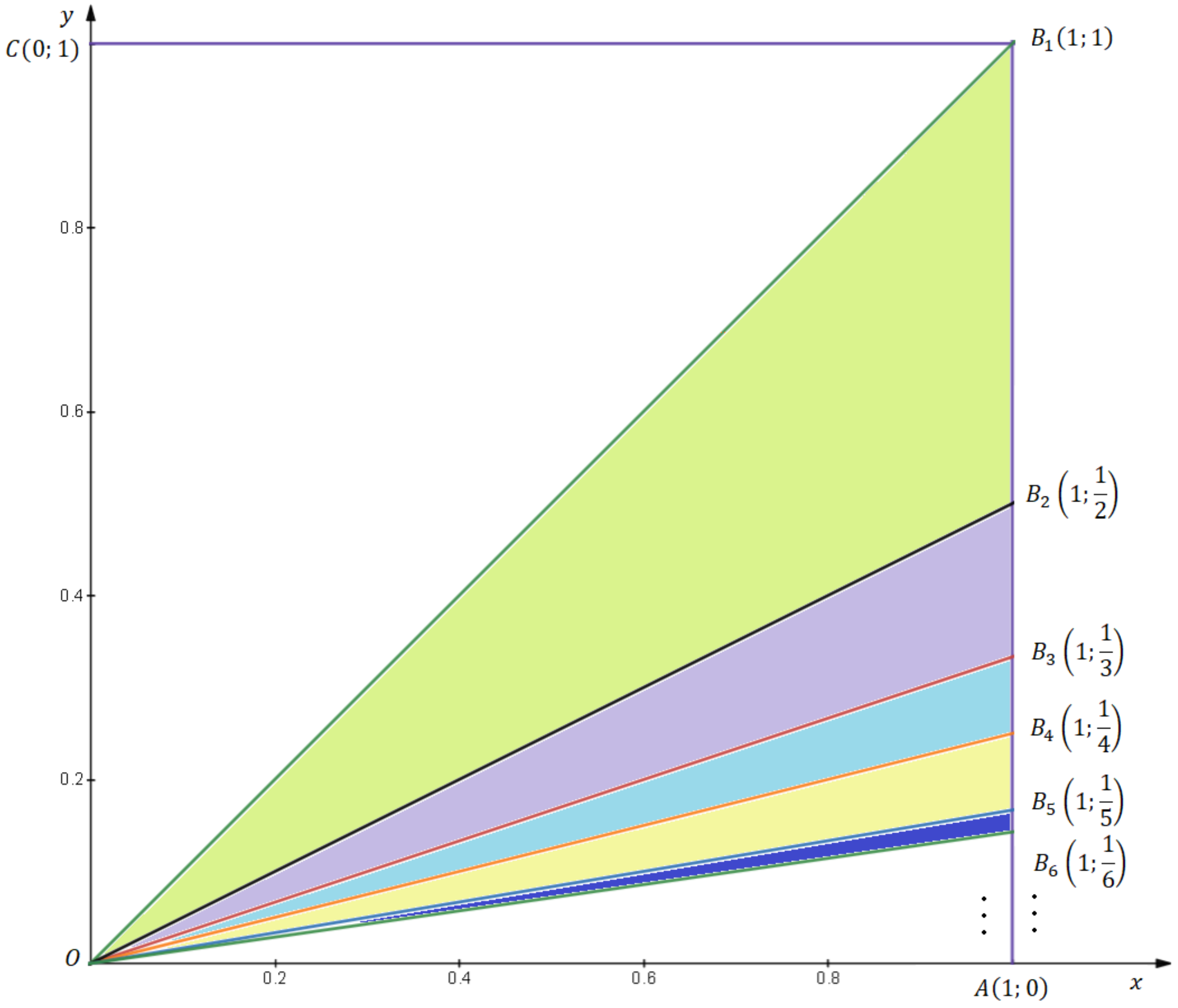


Рис.2 Графік до задачі 6

При вивченні розділу «Числові ряди» також можна використовувати «сігма-моделі» раніше отриманих рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2n+1}{2^{3n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n(n+1)};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n+n^2)\sqrt{1+n^2}}{(1+n^2)\sqrt{1+(1+n)^2}};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+(1+n)^2}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{(n+1)^2};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\pi;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\pi\frac{3n^2+3n+1}{\left(n(n+1)\right)^3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3n^2};$$

$$\frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi}{24n^2(n+1)^2}\,;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(n+1)^3}\cdot\frac{3n+1}{3n^2}.$$