V 20

А. М. Капіносов

Алгебра 7-9

668 899

ФУНКЦІЇ

Дидактичні матеріали для рівневого навчання

Кам'янець-Подільський «Абетка» 2000

ББК 22.1
К20

Рецензенти:

М.І. Бурда – член-кореспондент АПН України, професор, доктор педагогічних наук;

Л.Ю. Рибалко – учитель-методист Рівненської державної загальноосвітньої школи-комплексу І-ІІІ ступенів №28.

Капіносов А.М.

К20 Алгебра 7-9: Функції. Дидактичні матеріали для рівневого навчання. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 232 с.

ISBN 966-7835-19-7

Посібник призначений для рівневого навчання математичним поняттям зі змістової лінії "Функції". Методологічною основою посібника є логічна концепція чотирьох рівнів засвоєння математичних понять як заданих систем знань. Три рівні (первинне розуміння і осмислення, алгоритмічний і конструктивно-алгоритмічний) відповідають основному навчанню, а четвертий (ускладнений конструктивно-алгоритмічний) – підвищеному.

Перша частина посібника містить матеріал для навчання на кожному з рівнів, а друга рівневі перевірочні роботи, які дозволяють "вимірювати" засвоєння знань з лінії: встановлювати рівень засвоєння понять і степінь навченості на ньому (мінімально-достатню, середню чи повну). Для оцінювання знань використовується 12-ти бальна система.

ББК 22.1

ISBN 966-7835-19-7

«АБЕТКА», м. Кам'янець-Подільський,
вул. Лесі Українки, 31, тел. (03849) 2-73-84; а/с 83

ПЕРЕДМОВА

ШАНОВНИЙ ДРУЖЕ!

Ти відкрив посібник, призначення якого – допомогти тобі в оволодінні знаннями однієї з центральних ліній (розділу) шкільного курсу алгебри "Функції".

Як відомо, знання – велика сила. У знаннях особливостей математичних знань та діяльності по їх засвоєнню автор бачить ту силу, яка сприятиме твоєму активному і високорезультативному навчанню за даним посібником. Саме ці питання і розглянуті в передмові.

Математичні об'єкти і поняття про них.

Математичні знання, як і будь-які, є предметними, тобто знаннями про щось. За видами предметів знання поділяють на дві групи: про матеріальні речі і явища, що існують у просторі і часі незалежно від людини, і про мислимі, абстрактні об'єкти, що утворені думкою людини і позначені словом, символом чи іншим знаком. Математика має справу саме з останніми об'єктами. Відомі тобі математичні об'єкти: натуральні і дробові числа, алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, прямі, трикутники і чотирикутники – все це приклади мисленнєво-мовних об'єктів. Такі предмети створені людством як засіб, інструмент пізнання матеріального світу, як моделі реальних речей, явищ.

У даному посібнику тебе очікує зустріч з новими математичними об'єктами, спільним іменем для яких є "функція". Їх вивчення в посібнику поділено на 12 тем. Засвоюючи перші три теми, ти дізнаєшся, які математичні об'єкти іменують терміном "функція", яка будова предметів, тобто, з яких компонентів, елементів вони складені, а також про те, якими властивостями можуть володіти. Оскільки всі вони є мовними предметами, ти зможеш їх бачити, записувати, чути їх імена і т.д. Вони будуть доступні твоєму сприйняттю завдяки їх мовному "одягу" словесному, символічному, графічному чи табличному. У наступних темах ти будеш ознайомлюватись з функціями, об'єднаними в окремі групи (класи). Такими, наприклад, як прямі пропорційності, лінійні функції, арифметичні прогресії. До речі, прямі пропорційності і лінійні функції у графічному "одязі" (зображенні) постануть перед тобою як старі знайомі – прямі. Властивості нових для тебе математичних об'єктів будуть, як і завжди, сформульовані у вигляді означень, теорем або виражені формулами. Вони і будуть складати системи знань про математичні предмети – наукові поняття про них. Звичайно, в межах часу, що відводиться в курсі загальноосвітньої школи на вивчення функцій, ти оволодієш тільки частиною знань про них. Однак вони достотні для розв'язування широкого кола різноманітних пізнавальних і практичних задач.

Допомогти тобі засвоїти наукові поняття про функції – саме так може бути уточнено призначення посібника.

Задачі – показники засвоєння математичних понять.

Звичайно, відразу постає питання: що ж значить засвоїти наукові поняття? Які показники, критерії цього?

Дехто з твоїх однокласників, певно, вбачає це в заучуванні означень і теорем та їх відтворенні. Однак запам'ятання є тільки умовою засвоєння понять.

Знання про будь-які об'єкти є засобом освоєння людиною цих об'єктів, основою виконання з ними різних дій. Відповідно цьому *головною мірою* засвоєння наукових понять є розуміння, осмислення їх змісту як основи дій з об'єктами.

Такими діями, що виконують з *математичними об'єктами* на основі понять про них, є:

- ❑ зорове впізнавання математичних об'єктів і їх елементів, заданих в тій чи іншій словесно-символічній або графічній формі;
- ❑ логічне і алгоритмічне розпізнавання об'єктів;
- ❑ конструювання (побудова) об'єкту за даними його властивостями чи елементами;
- ❑ перетворення об'єкту, зведення до стандартного вигляду;
- ❑ знаходження невідомих елементів за відомими;
- ❑ логічне (дедуктивне) виведення, встановлення властивостей об'єкту;
- ❑ моделювання – конструювання математичного об'єкту як моделі предметів матеріальної дійсності (наприклад, складання функцій, що описують деякий фізичний процес).

Виконання дій з математичними об'єктами виступає як розв'язування задач, оскільки дія завжди спрямована на виконання деякої вимоги, а самі математичні об'єкти задані в певних умовах. Тому вміння розв'язувати набори задач, що включають основні дії з об'єктами, і є показником засвоєння наукових понять про них.

Рівні засвоєння математичних понять.

В освоєнні існуючих об'єктів на основі знань людина може досягати різних рівнів. Так, *наприклад*, телевізор можна освоїти на рівні споживача (вмикати і вимикати, налаштовувати його на різні програми), а можна на рівні майстра (знаходити пошкодження і ремонтувати його) або винахідника (створювати нові моделі).

Рівні освоєння об'єкту відрізняються як складом дій, так і особливостями застосування знань. Якщо людина може застосовувати знання як норму, правила дій з об'єктами в певних незмінних, стандартних ситуаціях, то говорять про репродуктивне або нормативно-алгоритмічне освоєння об'єкту та знань про нього. Можна сказати, що користувач телевізора освоїв його на репродуктивному рівні.

Більш високим рівнем є конструктивно-репродуктивне (або конструктивно-алгоритмічне) освоєння об'єктів. Воно означає, що людина не просто володіє певними наборами алгоритмічних дій по відношенню до об'єктів, а може проаналізувати певну ситуацію, вибрати або сконструювати з відомий дій таку, що відповідає ситуації. Рівень освоєння телевізора майстром по ремонту і є прикладом конструктивно-репродуктивного освоєння об'єкту.

Коли людина, освоюючи об'єкт, виявляє нові його властивості, створює нові продукти, об'єкти, то говорять про продуктивне освоєння.

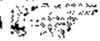
Даний посібник зорієнтований на алгоритмічне і конструктивно-алгоритмічне освоєння тобою математичних об'єктів. При цьому виділено чотири рівні засвоєння математичних понять: перші два відповідають алгоритмічному освоєнню, а два наступних – конструктивно-алгоритмічному. Ці рівні можуть бути названі і коротко охарактеризовані так:

- перший рівень: первинне розуміння і осмислення поняття – застосування поняття як заданої системи знань для виконання основних дій з математичними об'єктами (впізнавання, розпізнавання, конструювання, встановлення властивостей) в ситуаціях, що безпосередньо відповідають умовам означень, теорем, а також для зведення алгоритмічних задач до відомих;
- другий рівень: алгоритмічний – застосування поняття в системі з іншими поняттями для розв'язання типових алгоритмічних задач;
- третій рівень: конструктивно-алгоритмічний – застосування поняття як системи знань для аналізу умов і вимог задач та конструювання способів розв'язань з відомих;
- четвертий рівень: ускладнений конструктивно-алгоритмічний – застосування поняття в деякій системі понять для аналізу і конструювання способів розв'язань задач в ситуаціях ускладнених, нестандартних по відношенню до умов означень і теорем, що утворюють поняття.

Краще зрозуміти рівні засвоєння знань і особливості твоєї навчальної діяльності допоможе тобі наступний розділ передмови.

Рівнева навчальна діяльність по засвоєнню математичних понять за посібником.

Твоє навчання поняттям автор образно уявляє як поступове сходження по східцях чотириповерхової будівлі. Сходженню на кожний поверх у посібнику відповідає розділ теми, а східцям – завдання у ньому. Кожний поверх будівлі – це досягнутий тобою рівень освоєння математичних об'єктів, засвоєння понять про них.

Навчальні матеріали з кожної теми поділені в посібнику на чотири розділи. Головним розділом з кожної теми є перший. У ньому міститься інформація про вивчуваний об'єкт у вигляді коротких текстів трьох видів. Тексти першого виду, позначені знаком , містять означення вивчуваного об'єкту, його елементів та теореми про них. З них ти дізнаєшся, які предмети і при яких умовах позначаються тим чи іншим терміном, які властивості їм притаманні. За кожною інформацією зі знаком йде система завдань, яка і допоможе тобі її зрозуміти, запам'ятати і застосувати при розв'язуванні задач. Набори завдань сконструйовані за принципом зростання твоєї самостійності у виконанні дій. Спочатку ти вибираєш правильні відповіді, тобто оцінюєш правильність уже виконаної дії, далі вибираєш доповнення записів до правильних тверджень, і, нарешті, самостійно виконуєш завдання. У кожний номер входить декілька однотипних завдань.

Другий вид інформації представлений у коротких текстах зі знаком .

Сприймай ці тексти як повідомлення, що "освітлюють", пояснюють тобі шлях виконання завдань. Спеціально запам'ятовувати їх не потрібно.

Третім видом коротких повідомлень є тексти зі знаком . У них інформація першого роду розгорнуто в правила, алгоритми дій з вивчуваними об'єктами, заданими в ситуаціях, що відповідають умовам означень, теорем (стандартних). Алгоритми, що є в таких текстах, – це приписи (записи), що вказують тобі послідовність дій, яку треба виконати, щоб звести розв'язання будь-якої задачі з деякого класу до розв'язань відомих задач. Образно кажучи, алгоритми – це ключі до розв'язування задач.

Матеріали першого розділу в цілому зорієнтовані на твоє навчання діям з математичними об'єктами в ситуаціях, що безпосередньо відповідають умовам означень і теорем. Опрацювавши матеріали розділу, ти зможеш впізнавати вивчувані функції, встановлювати умови, при яких вони володіють певною властивістю, за однією властивістю "бачити" інші, зводити за алгоритмами розв'язання задач з певного набору класів задач до розв'язання відомих. Такі дії і будуть показниками твого засвоєння математичних функцій на першому рівні – первинному розумінні і осмисленні наукових понять.

Передбачається, що матеріали першого розділу здебільшого ти будеш опрацьовувати разом з однокласниками під керівництвом учителя, активно міркуючи над питаннями, даючи власні відповіді, слухаючи пояснення товаришів. Виконання всіх вправ носитиме переважно усний характер, на дошці чи в зошиті ви будете записувати тільки деякі короткі відповіді. Тому нехай не засмучує тебе і твоїх однокласників досить великий сторінковий обсяг навчального матеріалу розділу: в досить швидкому темпі за урок, інколи за два, ви зможете опрацювати зміст розділу.

Матеріали трьох інших розділів містять тільки задачний матеріал.

Другий розділ складають основні типи задач, які є показниками засвоєння понять на другому рівні – алгоритмічному. Усі типи завдань у посібнику здубльовані чотирма вправами.

Своєрідність багатьох математичних алгоритмів як правил дій полягає в тому, що дії з даним об'єктом вони "замінюють" на відомі дії з іншими об'єктами. При вивченні функцій ти будеш "діяти" не тільки з ними, а і з такими, раніше вивченими, предметами, як рівняння, вирази, нерівності, і майже на кожному кроці з _____(?). Так, звичайно, з числами. Тому твій успіх в освоєнні різних видів функцій буде залежати від того, як раніше ти "заприятелював" з їх математичними сусідами.

Якщо ти засвоїв знання про вивчувану функцію і володієш системами знань про "сусідні", зв'язані з нею математичні об'єкти, тобі достатньо розв'язати одну вправу з кожного номера другого розділу або взагалі відразу виконати перевірочну роботу з другої частини посібника. Якщо в тебе є деякі "прогалини" в знаннях, бажано розв'язати декілька вправ кожного номера.

Третій і четвертий розділи посібника складають задачі, умови і вимоги яких безпосередньо не відповідають означенням і теоремам. Тому для виконання вимоги ти не можеш відразу застосувати відомий алгоритм (спосіб розв'язання задачі). Щоб розв'язати такі задачі, тобі треба їх проаналізувати – розчленити умову і вимогу; вивести наслідки з умови; відшукати достатні умови для виконання вимоги; вибрати найбільш значиму властивість для розв'язання задачі; знайти допоміжні елементи; ввести в хід міркувань нові об'єкти. Коротко кажучи, проаналізувати і "домислити" задану ситуацію. Одна чи декілька з таких пошукових дій дозволять тобі звести ситуацію до стандартної, виконати відомий алгоритм чи їх послідовність, тим самим сконструювати спосіб розв'язання задачі. Інструментом, засобом або, образно, "ножицями" для такого логічного аналізу, конструювання є засвоєні тобою наукові поняття – системи знань про математичний об'єкт. Таке застосування знань засвідчує про їх засвоєння на конструктивному рівні.

Третьому рівню навчання відповідають нескладні задачі конструктивно-алгоритмічного типу, а четвертому – ускладнені. Для знаходження способів розв'язань задач третього розділу достатньо застосувати поняття про вивчувану функцію. Задачі четвертого розділу ти розв'яжеш, якщо "залучиш" до аналізу умов і вимог раніше вивчені поняття. Так, зокрема, твоє уміння розв'язувати задачі цього розділу буде залежати від того, як ти володієш поняттям "модуль числа". Задачі четвертого розділу не входять в основне навчання всіх учнів класу, вони віднесені до підвищеного.

Основною формою навчання на третьому і четвертому рівнях є твоя самостійна пошукова діяльність з наступним колективним обговоренням розв'язань. Способи розв'язань значної частини задач цих рівнів ти зможеш сконструювати самостійно, а частини – за допомогою вказівок учителя.

Передбачається, що з одного рівня навчання на інший ти будеш переходити, виконавши відповідну перевірочну роботу (для першого рівня – тестову). Для цього призначена друга частина посібника – рівневі перевірочні роботи. Останні можуть бути складені також із задач відповідних розділів першої частини посібника.

Режими (форми) навчання за посібником.

Посібник розрахований на декілька режимів (форм) організації твого навчання. Перший режим навчання – фронтально-індивідуальний. Ця форма групового (класного) навчання є основною в школі. Саме так ти навчаєшся з більшості шкільних предметів. Сприйнявши пояснення вчителем теоретичного матеріалу, зразки розв'язання задач, ти і твої однокласники колективно чи самостійно виконуєте завдання по їх засвоєнню. Кількість і складність завдань, що виконує кожний з вас, може бути різною. Однак від одного етапу навчання до іншого ви переходите одночасно (єдиним фронтом).

Навчання у фронтально-індивідуальному режимі за даним посібником схематично можна представити так:

- перший етап: колективне опрацювання матеріалів першого розділу посібника; самостійне виконання завдань розділу; тестова перевірочна робота;
- другий етап: колективне розв'язування основних стандартних задач; самостійна тренувальна робота (2 розділ); перевірочна робота другого рівня;
- третій етап: самостійна робота (класна чи домашня) пошукового характеру по розв'язанню задач третього розділу; колективний аналіз розв'язань задач; перевірочна робота третього рівня;
- четвертий етап (необов'язковий для всіх): індивідуальна або групова консультація; самостійне розв'язування задач четвертого розділу (домашня робота); перевірочна робота четвертого рівня.

Другий режим навчання – індивідуально-консультаційний – передбачає, що ти самостійно опрацьовуєш всі розділи з теми, причому перший, як правило вдома, опережально. У всіх здубльованих номерах ти виконуєш одну вправу. Виконання завдань кожного рівня перевіряє вчитель, вони зараховуються тобі як перевірочні роботи. У разі потреби отримуєш консультації у вчителя. Завершити навчання з теми можеш як на четвертому рівні, так і на третьому. В кінці вивчення теми виконуєш перевірочну роботу (відповідно четвертого або третього рівня).

Третій режим навчання – комбінований. Він передбачає, що на першому рівні ти навчаєшся у фронтально-індивідуальному режимі, а на решті – у індивідуально-консультаційному. Автор вважає цю форму навчання найбільш оптимальною для більшості твоїх однокласників.

Четвертий режим – фронтально - додаткове навчання. У цьому режимі будуть навчатись ті твої однокласники, хто не досягає одночасно з усіма учнями мінімально-обов'язкової навченості на першому і другому рівнях. Він передбачає повторне опрацювання матеріалів першого розділу – повне чи вибіркове; додаткове навчання розв'язанням раніше вивченим алгоритмічним задачам, які є складовими вивчуваних; повторне виконання рівневих перевірочних робіт.

Критерії рівневої навченості.

Зупинимось на наукових критеріях твоєї навченості на кожному рівні. Користуючись ними, ти зможеш самостійно оцінити (науково!) свої навчальні досягнення.

Виділяють три степені навченості на будь-якому рівні: мінімально-достатню, середню (неповну) і повну.

Якщо з набору завдань, який містить всі основні типи задач рівня, ти правильно розв'язуєш приблизно 70% задач (наприклад, 7 з 10), ти досягаєш мінімальної навченості. Вважають, що хоча при такому засвоєнні ти допускаєш достатньо багато помилок, однак маєш об'єктивну можливість їх виправити і самостійно знайти правильні варіанти розв'язань інших задач. Зауважимо, що інколи показник мінімальної навченості для вищих рівнів знижують і до 50%.

Другої степені навченості – середньої (неповної) ти досягаєш, якщо правильно виконуєш приблизно 80% завдань набору.

90% правильно виконаних завдань розглядаються як показник твоєї повної навченості.

Приведемо приклад оцінки степені навченості. З теми "Лінійна функція" другий розділ посібника містить 18 номерів завдань. Мінімально – достатньо навченості ти досягаєш, якщо правильно виконуєш 13, неповної – 15, а повної – 17 завдань.

Однак такий спосіб встановлення навченості поняттю на тому чи іншому рівні є громіздким, об'ємним і вимагає багато часу. Тому "вимірювання" засвоєння понять здійснюється шляхом складання вибірок завдань кожного рівня. Степінь навченості на кожному рівні визначається за числом правильно виконаних завдань. Кількість завдань для виявлення степеня навченості на рівні повинно бути не менша чотирьох (при трьох завданнях мінімальній навченості відповідає виконання одного завдання, що становить менше 50% всіх завдань і не відповідає нижній межі мінімальної навченості).

Рівневі перевірочні роботи з розділу "Функції" складають другу частину посібника. За допомогою них ти зможеш "виміряти" свої знання: визначити рівень і степінь засвоєння поняття.

Оцінювання засвоєння понять у дванадцятибальній системі.

Для оцінювання твого поступального руху в освоєнні математичних об'єктів, успіхів на кожному рівні навчання найкраще прилаштована дванадцятибальна система. Вона дозволяє чітко фіксувати як проміжні, так і кінцевий результат твоєї навченості з теми. Мінімально-достатній, неповній (середній) і повній навченості на першому рівні відповідають бали "**1**", "**2**" і "**3**". Сприймай їх не як негативні оцінки у п'ятибальній системі, а як відмітки, умовні позначення, якщо хочеш "засічки", що характеризують перший досягнутий тобою проміжний результат. Образно, це перша висота, яку подолав стрибун, і завдяки якій продовжив змагання, щоб по їх завершенню стати переможцем.

Другому рівню навчання відповідають відмітки **"4"**, **"5"** і **"6"**, третьому – **"7"**, **"8"**, **"9"**, а четвертому – **"10"**, **"11"** і **"12"**. Загальним показником результатів навчання, їх оцінкою є не сума відміток за кожний рівень, а відмітка, яку ти одержав за найвищий рівень, на якому ти навчався. Наприклад, якщо в тебе відмітки за вивчення теми **"3"**, **"6"**, **"9"** і **"12"** (ідеальний варіант), то оцінка з теми **"12"** балів. Якщо відмітки **"3"**, **"6"** і **"8"**, то оцінка – **"8"**. Це означає, що ти не навчався на підвищеному рівні або не досяг на ньому мінімально – достатньої степені навченості. Отже, "відмітка" – це показник, що характеризує степінь навченості на деякому рівні, а "оцінка" – це найбільша з відміток, тобто відмітка за найвищий рівень, який ти освоїв.

Оцінки в межах **"3"** – **"1"** показують, що ти вмієш застосовувати зміст поняття для виконання основних дій з математичними об'єктами в ситуаціях, що відповідають умовам означень, теорем, а також вмієш зводити розв'язання основних задач до раніше вивчених. При цьому ти можеш виконувати всі основні дії з вивчуваними математичними об'єктами в повному обсязі і безпомилково (бал **"3"**), можеш інколи допускати помилки (бал **"2"**) або навіть не володіти деякими діями (бал **"1"**).

Оцінки в межах **"6"** – **"4"** є показниками того, що ти вмієш застосовувати в стандартних ситуаціях як вивчуване поняття, так і зв'язані з ним, тобто в цілому сформована система знань, якою ти вмієш оперувати в ситуаціях алгоритмічного типу. При цьому систему знань ти можеш застосовувати практично безпомилково (бал **"6"**), допускати інколи помилки (бал **"5"**). При балі **"4"** частота таких помилок значно більша.

Оцінки в межах **"9"** – **"7"** засвідчують, що ти вмієш оперувати поняттям – системою знань як в стандартних ситуаціях, так і застосовувати його для аналізу нескладних, змінених ситуацій, конструювати способи розв'язань задач. Бал **"9"** говорить про твою готовність розв'язувати будь-які нескладні задачі на застосування вивчуваного поняття. Бал **"8"** – про те, що ти можеш це робити в більшості випадків, а бал **"7"** – що аналітичні вміння сформовані в тебе в мінімальній степені.

Оцінки в межах **"12"** – **"9"** інформують про твої вміння застосовувати вивчуване поняття в системі з раніше вивченими в ситуаціях суттєво змінених, ускладнених в порівнянні з основними, в яких відбувалось формування поняття. Діапазон виходу за межі основного навчання може бути різним: максимальним (**"12"** балів), середнім (**"11"** балів) і мінімальним (**"10"** балів).

Автор посібника сподівається, що розповідь про деякі особливості математичних об'єктів, рівні їх освоєння, твою рівневу навчальну діяльність та оцінювання її результатів допоможуть тобі виробити власну стратегію тактику навчання і, використовуючи даний посібник, досягти максимальних результатів у вивченні розділу "Функція".

Щиро бажаю тобі успіхів!

Алгебра 7-9:

ФУНКЦІЇ

Частина 1.

Навчальні матеріали

ФУНКЦІЯ

Т 1. Функція: означення, область визначення, множина значень

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

І

В алгебрі буквені позначення чисел *x, y, z, t,...*, а також вирази, що їх містять, називають **змінними**, якщо вони можуть набувати різних числових значень.

Якщо значення, яких набуває одна із змінних, залежать від значень, яких набуває інша змінна, то першу змінну називають **залежною**, а другу – **незалежною**.

№1. Перевірити, чи правильно заповнена таблиця значень залежної змінної (другий рядок):

а)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$3x$	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12

б)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

в)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$x-2$	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2

г)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\|x\|$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

№2. Заповнити таблицю значень залежної змінної:

а)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$4x$									

б)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$-5x$									

в)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x^2-2									

г)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$2x+1$									

№3. Обчислити значення залежної змінної:

а) $t+5$, **якщо незалежна змінна** t **дорівнює** 0; −10;

б) $\frac{x+2}{3}$, **якщо незалежна змінна** x **набуває значень** −2; 4;

в) y^2+2, **якщо незалежна змінна** y **дорівнює** −3; 0;

г) $\frac{1}{z-2}$, **якщо** z **дорівнює** 3; −4.

Якщо кожному значенню незалежної змінної x з множини D відповідає значення змінної y (причому одне і тільки одне), то змінну y називають **функцією** від незалежної змінної x (аргументу) на множині D.

Змінна y задана як функція від змінної x ($y=f(x)$), якщо:

1) визначена множина значень, яких може набувати змінна x (**область визначення функції** ($D(f)$));

2) встановлено правило (спосіб, закон), за яким можна для кожного допустимого значення змінної x знайти відповідне єдине значення змінної y.

Усі значення, які набуває змінна y, утворюють **множину значень функції**.

№4. Функція $y=f(x)$ задана таблицею:

x	−10	−5	−1	0	1	5	10
y	100	25	1	0	1	25	100

Які з тверджень є правильними?

1) Областю визначення функції y є множина $\{-10; -5; -1; 0; 1; 5; 10\}$.
2) Область визначення функції складається з семи чисел.
3) Множиною значень функції є $\{0; 1; 25; 100\}$.
4) Множина значень функції складається з чотирьох чисел.
5) Найменше число в області визначення функції − число −10.
6) Найбільше число у множині значень функції − число 10.
7) При значенні аргументу −5 функція набуває значення, що дорівнює 25.
8) Значення 100 функція набуває при значеннях аргументу, що дорівнюють −5 і 5.
9) $f(100)=\pm 10$.
10) $f(10)=100$ і $f(-10)=100$.

№5. Функція $y=f(x)$ задана таблицею:

x	−4	−3	−1	0	1	3	4
y	9	7	3	0	3	7	9

Доповнити записи до правильних тверджень, вибравши одне з доповнень а) − б).

1) Областю визначення функції є множина...
а) $\{0; 3; 7; 9\}$; б) $\{-4; -3; -1; 0; 1; 3; 4\}$.
2) Множиною значень функції є...
а) $\{-4; -3; -1; 0; 1; 3; 4\}$; б) $\{0; 3; 7; 9\}$.
3) Найменше значення аргументу... а) −4; б) 0.
4) При значенні аргументу −1 функція набуває значення...
а) −3; б) 3.

№6. Функція $y=f(x)$ задана таблицею (верхній рядок – значення незалежної змінної x, нижній рядок – відповідні значення змінної y). Вказати: 1) область визначення функції; 2) множину значень функції; 3) записати пари відповідних значень змінних у вигляді рівності $y_0=f(x_0)$, де x_0 – значення змінної x, y_0 – відповідне значення функції y.

а)

x	1	2	4	5
y	2	3	5	6

б)

x	–10	–8	–6	–4	–2
y	10	8	6	4	2

в)

x	–20	–10	10	20
y	20	10	–10	–20

г)

x	1	2	3	4	5
y	0	0	0	0	0

№7. З наведених тверджень а) – е) вибрати правильні:

а) якщо $y=f(x)$, то x – незалежна змінна (аргумент), а y – залежна змінна (функція);

б) якщо $S=\varphi(t)$, то t – аргумент, S – функція;

в) якщо $m=\mu(V)$, то m – незалежна змінна, а V – функція від неї;

г) якщо $y=\varphi(x)$, то x – незалежна змінна, а y – функція від неї;

д) якщо $S=f(x)$, то S – аргумент, x – функція;

е) якщо $y=f(t)$, то t – аргумент, y – функція.

№8. Доповнити записи до правильних тверджень:

а) якщо $y=f(x)$, то __ – незалежна змінна, а __ – залежна змінна;

б) Якщо $y=\varphi(x)$, то x – ______________, а y – ______________;

в) якщо $S=f(a)$, то ______ – аргумент, а _______ – функція;

г) якщо $S=\varphi(t)$, то t – ______________, а – S ______________;

д) якщо $y=\varphi(x)$, то ____ – незалежна змінна, а _____ – функція;

е) якщо $m=\mu(V)$, то ____ – аргумент, а ____ – залежна змінна.

№9. Яке з позначень а) – б) є символічним записом словесного твердження 1) – 6)?

1) При значенні аргументу 3 функція $y=f(x)$ набуває значення, що дорівнює 5.

а) $f(3)=5$; б) $f(5)=3$.

2) У функції $y=f(x)$ аргументу 2 відповідає значення функції –8.

а) $f(-8)=2$; б) $f(2)=-8$.

3) При значеннях аргументу –3 і 3 функція $y=f(x)$ набуває значення, що дорівнює 9.

а) $f(9)=3$ і $f(9)=-3$; б) $f(-3)=9$ і $f(3)=9$.

4) Значенню функції $y=\varphi(x)$, яке дорівнює 20, відповідає значення незалежної змінної 2.

а) $\varphi(2)=20$; б) $\varphi(20)=2$.

5) Значення 16 функція $y=\varphi(x)$ набуває при значеннях аргументу –4 і 4.

а) $\varphi(4)=16$ і $\varphi(-4)=16$; б) $\varphi(16)=4$ і $\varphi(16)=-4$.

6) При значеннях аргументу 2 і 5 значення функції $y=f(x)$ дорівнюють 0.

а) $f(0)=2$ і $f(0)=5$; б) $f(2)=0$ і $f(5)=0$.

№10. **Записати символічно словесні твердження:**

а) при значенні аргументу -2 значення функції $y=f(x)$ дорівнює 10;

б) при значенні аргументу 5 значення функції $y=f(x)$ дорівнює 0;

в) якщо значення незалежної змінної x дорівнює 6, то відповідне значення функції $y=\varphi(x)$ дорівнює 12;

г) значення -20 функція $y=f(x)$ набуває при значенні аргументу 1;

д) при значеннях аргументу -6 і 6 функція $y=f(x)$ набуває значення 36;

е) значення 100 функція $y=f(x)$ набуває при значеннях аргументу -10 і 10.

№11. Доповнити записи а) – г) до правильних тверджень:

а) Змінна y є функцією від змінної x на деякій області, якщо кожному значенню змінної _____ з цієї області відповідає одне і ___________________________ значення змінної _____. При цьому одне й те саме значення змінна _____ може набувати при різних значеннях змінної ________.

б) Змінна S є функцією від змінної t на деякій області, якщо кожному значенню змінної ____ з цієї області поставлено у відповідність певним способом ___________________ значення змінної _____.

в) Змінна x є функцією від змінної _____ на деякій області, якщо кожному значенню змінної y з цієї області відповідає _______________ значення змінної ___. Змінна ___ може набувати одне й те саме значення при різних значеннях змінної____.

г) Змінна y є функцією від змінної x, якщо кожному дійсному числу з деякої множини, яке є значенням змінної _____, відповідає одне і___________________________________число, яке є значенням змінної ___.

Функція y від змінної x задана формулою, якщо вона записана у вигляді рівності, лівою частиною якої є її скорочене *позначення* (y чи $f(x)$), а у правій частині вона представлена (виражена) як алгебраїчний вираз із змінною x (тобто як запис, що містить змінну x і числа, сполучені знаками математичних дій).

№12. **В яких із записів змінна y задана формулою як функція від змінної x?**

а) $y>x+5$; б) $y=x+5$; в) $x=y+5$;
г) $x+y=y+x$; д) $y=x^2+x-3$; е) $xy+5=y$.

№13. **З наведених тверджень вибрати правильні.**

а) Якщо $y=2x+3$, то x – незалежна змінна, а $2x+3$ – функція від x.

б) Якщо $S=2t+3$, то S – незалежна змінна, а $2t+3$ – функція від неї.
в) Якщо $y=3x$, то x – незалежна змінна, а $3x$ – залежна від неї змінна.
г) Якщо $y=x^2+4$, то y – незалежна змінна, а x^2+4 – функція.
д) Якщо $y=5(x+3)$, то x – незалежна змінна, а $x+3$ – функція від неї.
е) Якщо $U=5t^2-3$, то t – незалежна змінна, а $5t^2-3$ – функція від t.

№14. Функція задана формулою $y=5x+1$. Які з тверджень є правильними, а які – неправильними?
а) x – незалежна змінна. б) y – аргумент.
в) $5x+1$ – функція. г) $5x+1$ – незалежна змінна.
д) y – функція. е) y і $5x+1$ – різні позначення функції.

№15. Функція задана формулою $y=x^2-15$. Доповнити записи до правильних тверджень.
а) ____ – незалежна змінна;
б) y – ______________________ або ______________;
в) ______ і ___________ – два позначення функції;
г) _____ – аргумент.

№16. З наведених тверджень вибрати правильні.
Щоб знайти при заданому значенні аргументу значення функції...
а) $y=x+3$, треба виконати одну дію: додавання;
б) $y=5x+3$, треба виконати дві дії у порядку: множення, додавання;
в) $y=x^2+3$, треба виконати одну дію: додавання;
г) $y=\dfrac{1}{x+3}$, треба виконати дві дії у порядку: ділення; додавання;
д) $y=x^2+4x$, треба виконати три дії у порядку: піднесення до квадрату; множення; додавання.
е) $y=\dfrac{1}{x^2+5x}$, треба виконати чотири дії у порядку: піднесення до квадрату; множення; додавання; ділення.

№17. Для даних функцій вказати кількість дій і записати їх назви у порядку виконання (якщо дій декілька).
а) $y=5x$; б) $y=\dfrac{x}{5}$; в) $y=\dfrac{5}{x}$; г) $y=5x^2$;
д) $y=x(x+5)$; е) $y=x^3-5x$; є) $y=x^2+5x+5$; ж) $y=x^2+\dfrac{5}{x}$.

№18. Записати приклад формули функції, значення якої обчислюється виконанням:
а) однієї дії – множення; б) однієї дії – додавання; в) однієї дії – ділення; г) двох дій у порядку: множення; додавання; д) двох дій у порядку: додавання; множення; е) трьох дій у порядку: піднесення до степеня; додавання; ділення.

№19. **Яка з формул а) – г) відповідає словесному заданню функції 1) – 4)?**

Кожному значенню змінної x ставиться у відповідь значення змінної y, яке є:

1) **числом, оберненим до значення змінної x.**

а) $y=x$; б) $y=\frac{1}{x}$; в) $y=-x$; г) $x=y$;

2) **сумою значення змінної x і числа 6.**

а) $y=x-6$; б) $y=6x$; в) $x=y+6$; г) $y=x+6$;

3) **добутком значення змінної x і числа 5.**

а) $y=5x$; б) $x=5y$; в) $y=5+x$; г) $y=\frac{5}{x}$;

4) **часткою від ділення змінної x і числа 8.**

а) $y=\frac{8}{x}$; б) $y=8x$; в) $x=\frac{y}{8}$; г) $y=\frac{x}{8}$.

№20. **Задану словесно залежність між змінною y і змінною x записати за допомогою формули. Пояснити, чому змінна y є функцією від змінної x.**

Кожному значенню змінної x відповідає значення змінної y, яке є:

а) **числом, протилежним до значення змінної x;**

б) **подвоєним значенням змінної x;**

в) **квадратом значення змінної x;**

г) **сумою значення змінної x і числа 5;**

д) **добутком значення змінної x і числа 20;**

е) **часткою від ділення числа 10 на значення змінної x.**

Якщо функція задана формулою, в якій *права частина* є цілим раціональним виразом (тобто виразом, у який можуть входити чотири арифметичні операції і піднесення до степеня, але який не містить ділення на змінну чи вираз із змінною), то функцію називають **цілою раціональною**.

Якщо функція задана формулою, в якій *права частина* є дробовим раціональним виразом (містить ділення на змінну x або на вираз із змінною x), то функцію називають **дробовою раціональною**.

№21. **В яких із формул змінна y виражена через змінну x за допомогою цілого раціонального виразу, а в яких – за допомогою дробового раціонального виразу?**

1) $y=x+4$; 2) $y=\frac{x}{4}$; 3) $y=\frac{4}{x}$;

4) [illegible]; 5) [illegible]; 6) $y=x^2-3x+1$.

№22. Записати три функції, в яких змінна y виражена через змінну x за допомогою:
а) цілого раціонального виразу;
б) дробового раціонального виразу.

Алгоритм знаходження значення функції, заданої формулою, за даним значенням аргументу

1. Замість незалежної змінної (аргументу) підставити у формулу дане її значення.

2. Обчислити значення одержаного числового виразу в порядку, заданому формулою.

Одержане число — шукане значення функції.

№23. Функція задана формулою $y=5x-3$. Які з тверджень є правильними?

1) Щоб обчислити значення функції $y=5x-3$ у точці $x_0=-1$, треба у вираз $5x-3$ підставити замість x число -1 і знайти значення виразу $5\cdot(-1)-3$.
2) $f(2)=5\cdot2-3=7$.
3) $f(3)=53-3=50$.
4) Значенню незалежної змінної 0 відповідає значення залежної змінної 2.
5) Значенню аргументу 10 відповідає значення функції 47.
6) Числу 4 (значенню змінної x) відповідає число 17 (значення функції y).

№24. Функція y задана формулою $y=x^2+5$. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу:
а) -1; б) 1; в) 0; г) 3; д) 4; е) 10.

№25. Функція задана формулою $S=3t+4$. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу:
а) -2; б) -1; в) 0; г) 1; д) 2; е) 3.

№26. Функція задана формулою $f(x)=x^2+4$. Обчислити:
а) $f(0)$; б) $f(1)$; в) $f(2)$; г) $f(-1)$; д) $f(-2)$; е) $f(-10)$.

№27. Функція задана формулою $y=\dfrac{1}{x}$. Обчислити:

а) $y(1)$; б) $y(-1)$; в) $y(-2)$; г) $y(4)$; д) $y(-6)$; е) $y(100)$.

№28. Функція задана формулою $y=3x+2$ на множині $[0; 5]$. Чи входять в область визначення функції числа:

а) -2; б) 0; в) $\dfrac{1}{3}$; г) $5\dfrac{1}{3}$; д) 6; е) 3?

Для чисел, які належать області визначення, знайти відповідні їм значення функції.

№29. **Дано функцію $y=-2x+3$ з областю визначення $D(y)=(0;\ \infty)$. Чи входять в область визначення функції числа:**

а) -2; б) 0; в) 1; г) -1; д) 2; е) $\frac{1}{2}$?

Для чисел, які належать області визначення, знайти відповідні їм значення функції.

№30. **Дано функцію $y=4x+3$, яка визначена на множині натуральних чисел. Чи входять в область визначення функції** числа:

а) -3; б) 3; в) $3\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 0; е) 100?

Для чисел, які належать області визначення, знайти відповідні їм значення функції.

№31. **Функція $y=2x+5$ задана на множині $D=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Знайти множину значень функції.**

Функція може бути задана декількома формулами, записаними для різних проміжків області визначення. Наприклад: $y=x$, якщо $x \geq 0$ і $y=-x$, якщо $x<0$, або

$$\text{скорочено } y = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

№32. **Функція $y=f(x)$ задана формулами**

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x - \text{невід'ємне число}, \\ -x, \text{ якщо } x - \text{від'ємне число}. \end{cases}$$

Які з записів є правильними:

а) $f(5)=5$; б) $f(-13)=13$; в) $f(10)=-10$; г) $f(-12)=-12$;
д) $f(0)=0$; е) $f(-20)=20$; є) $f(-20)=-20$?

№33. **Функція задана формулами**

$$f(x) = \begin{cases} 3x, \text{ якщо } x - \text{додатне число}, \\ -3x, \text{ якщо } x - \text{від'ємне число}, \\ 0, \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$$

Обчислити:

а) $f(3)$; б) $f(-3)$; в) $f(10)$; г) $f(-10)$;
д) $f(0)$; е) $f(-1)$; є) $f(-0,5)$; ж) $f(0,5)$.

Якщо функція задана формулою і область визначення не вказана, то вважають, що її область визначення складається з усіх значень незалежної змінної, при яких формула має зміст. (Таку область визначення називають **природною**).

Знайти область визначення функції, заданої формулою, — це значить знайти природну область визначення.

№34. Які з тверджень правильні?

1) **Формула $y=2x+3$ має зміст при всіх значеннях змінної x.**

2) **Природною областю визначення функції $y=5x-3$ є множина всіх дійсних чисел.**

3) **Формула $y = \frac{10}{x}$ має зміст при всіх дійсних числах.**

4) **Природною областю визначення функції $y = \frac{20}{x}$ є множина всіх дійсних чисел.**

5) **В область визначення функції $y = \frac{10}{x-2}$ не входить число 2.**

6) **Формула $y = \frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях змінної x, крім $x=0$.**

№35. Які числа не входять в область визначення функції:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x+2}$; в) $y = \frac{1}{x+3}$;

г) $y = \frac{x}{x+6}$; д) $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$; е) $y = \frac{1}{x(x+6)}$;

є) $y = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$; ж) $y = \frac{1}{x^2-4}$?

Якщо функція задана формулою через цілий вираз, то областю визначення (природною) є множина всіх дійсних чисел.

Щоб знайти область визначення функції, заданої формулою через дробовий раціональний вираз, треба:

1. Прирівняти до нуля вираз із змінною, який є знаменником дробу.

2. Розв'язати одержане рівняння.

3. Виключити з множини дійсних чисел корені рівняння.

Одержана множина є шуканою областю визначення функції.

№36. У яких з функцій областю визначення є множина всіх дійсних чисел:

а) $y=4x+11$; б) $y = \frac{4}{x+11}$; в) $y = \frac{x+11}{4}$; г) $y=x^2+4x$;

д) $y = \frac{x}{x-3}$; е) $y=x^7+6x^5+3$?

№37. Знайти область визначення функції:

а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{-2}{x}$; в) $y = \frac{1}{x-2}$; г) $y = \frac{1}{x+4}$;

д) $y = \frac{4}{x(x+3)}$; е) $y = \frac{1}{(x-4)(x+5)}$.

№38. Знайти область визначення функції:

а) $y=4x$; б) $y=x^2-4x+3$; в) $y = \frac{1}{5}x$; г) $y = \frac{5}{x}$; д) $y = \frac{x+5}{4}$;

е) $y = \frac{4}{x+5}$; є) $y = \frac{4}{(x+2)(x-3)}$; ж) $y = \frac{5}{x^2-25}$.

№39. Записати три функції, областю визначення яких є:

а) множина всіх дійсних чисел;
б) множина всіх дійсних чисел, крім 0;
в) множина всіх дійсних чисел, крім числа 3;
г) множина всіх дійсних чисел, крім числа −1;
д) множина всіх дійсних чисел, крім чисел 0 і 1;
е) множина всіх дійсних чисел, крім 0 і −4.

Алгоритм знаходження значення аргументу для даного значення функції, заданої формулою

1. Скласти рівняння, в якого одна частина − функція, виражена через аргумент, а друга − значення функції.

2. Розв'язати одержане рівняння.

Корені рівняння − шукані значення аргументу.

№40. Які з тверджень правильні?

а) Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=3x+5$ дорівнює 14, треба скласти рівняння $3x+5=14$ і розв'язати його.

б) Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=x^2+4$ набуває значення 5, треба підставити у вираз x^2+4 число 5 і обчислити значення одержаного числового виразу.

в) Значенням аргументу, при якому функція $y=4x-3$ набуває значення 13, є таке x_0, для якого виконується рівність $4x_0-3=13$.

г) Функція $y=8x$ набуває значення, що дорівнює 16, при значенні аргументу 2.

д) Функція $y = \frac{4}{x-2}$ набуває значення, що дорівнює 4, при значенні аргументу 3.

е) Якщо $y=3x+5$, то $y_0=14$ при $x_0=3$.

№41. При якому значенні аргументу функція $y=4x$ приймає значення, що дорівнює:
а) 8; б) 32; в) −40; г) 10; д) 0; е) −100?

№42. При якому значенні аргументу функція $S=5t+2$ приймає значення, що дорівнює:
а) 7; б) 17; в) −8; г) 2; д) 52; е) −48?

№43. Знайти значення аргументу, при якому функція а) – г) набуває значення, що дорівнює 10:
а) $y=3x+1$; б) $y=-4x+7$; в) $y=\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{1}{x+2}$.

Нулями функції називають значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 0.

Алгоритм знаходження нулів функції, заданої формулою $y=f(x)$

1. Записати рівняння, ліва частина якого – функція, виражена через змінну x, а права частина – число 0 ($f(x)=0$).

2. Розв'язати рівняння.

Одержані корені рівняння – шукані нулі функції.

Якщо рівняння не має коренів, то функція не має нулів.

№44. Записати рівняння для знаходження нулів функції:
а) $y=5x$; б) $y=5x-3$; в) $y=\frac{x}{4}$; г) $y=x^2-4$; д) $y=x^2+4$; е) $y=\frac{x-4}{5}$.

№45. Знайти нулі функції:
а) $y=4x$; б) $y=4x+1$; в) $y=-4x+1$; г) $y=\frac{x+5}{2}$.

№46. Довести, що функція не має нулів:
а) $y=x^2+2$; б) $y=2x^2+10$; в) $y=-x^2-2$; г) $y=-2x^2-4$.

Знаходження множини значень функції

Якщо функція задана формулою $y=f(x)$, то її множину значень складають усі дійсні числа a, при яких рівняння $f(x)=a$ має розв'язки.

Якщо функція задана формулою $y=f(x)$ і рівняння $f(x)=a$ не має розв'язків, то число a не належить множині значень функції.

Якщо функція задана формулою $y=f(x)$ і рівняння $f(x)=a$ при будь-якому дійсному числу a має розв'язки, то множиною значень функції $y=f(x)$ є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty;\infty)$.

№47. Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.

а) **Довести, що множиною значень функції $y=5x$ є множина всіх дійсних чисел.**

Доведення.

Рівняння $5x=a$ при будь-якому a має розв'язок: $x=$________.
Отже, множиною значень функції $y=5x$ є____________________.

б) Довести, що множиною значень функції, заданої формулою $y=3x+5$, є множина всіх дійсних чисел.

Доведення.

Рівняння $3x+5=a$ при будь-якому дійсному a має розв'язок $3x=$________, $x=$________. Отже, множиною значень функції $y=3x+5$ є ________________.

в) Довести, що число -3 не належить множині значень функції $y=x^2$.

Доведення.

Рівняння $x^2=-3$________________, бо при будь-якому значенні x вираз $x^2 \geq 0$. Отже, число -3 не входить у ________________.

г) Довести, що множиною значень функції $y=x^2$ є множина невід'ємних дійсних чисел.

Доведення.

Рівняння $x^2=a$ має розв'язки, якщо a ________. Якщо $a<0$, то рівняння $x^2=a$ ____________________________. Отже, множиною значень функції $y=x^2$ є____________________________.

№48. Вказати функції, множиною значень яких є всі дійсні числа:

а) $y=x$; б) $y=3x-4$; в) $y=x^2+5$;

г) $y=x-5$; д) $y=\frac{x}{10}$; е) $y=-x^2-3$.

№49. Довести, що в множину значень функції не входять від'ємні числа: а) $y=x^2$; б) $y=4x^2$; в) $y=x^2+1$; г) $y=3x^2+2$.

Проміжками знакосталості функції називають найбільші з проміжків області визначення, на яких функція приймає або тільки додатні значення, або тільки від'ємні.

№50. Доповнити записи до правильних тверджень:

а) Функція $y=x^3$ набуває додатних значень на проміжках $(2; 5)$; $(2; 10)$; $(0; 1)$, $(0; \infty)$ та інших, однак проміжком знакосталості (додатних значень) функції є найбільший серед проміжків – ________________.

б) Функція $y=x^3$ набуває від'ємних значень на проміжках $(-1; 0)$; $(-5; -2)$; $(-\infty; -4)$, $(-\infty; 0)$ та інших, однак проміжком знакосталості (від'ємних значень) є найбільший серед проміжків – ______________.

Алгоритм знаходження проміжків додатних (від'ємних) значень функції, заданої формулою ($y = f(x)$)

1. Скласти нерівність зі знаком > (<), ліва частина якої функція виражена через незалежну змінну x, а права частина – число 0: $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

2. Розв'язати нерівність.

Множина розв'язків нерівності є шуканим проміжком додатних (від'ємних) значень функції.

Якщо нерівність не має розв'язків, то функція не набуває додатних (від'ємних) значень.

№51. **Знайти проміжки області визначення, на яких функція набуває додатних значень:**
а) $y=4x$; б) $y=2x+3$; в) $y=4x-1$; г) $y=-3x+2$.

№52. **Знайти значення незалежної змінної x, при яких функція набуває від'ємних значень:**
а) $y=3x$; б) $y=-2x$; в) $y=2x-5$; г) $y=-3x+4$.

Алгоритм знаходження значень незалежної змінної, при яких функції, задані формулами $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, набувають однакових значень

1. Записати рівняння, лівою і правою частинами якого є дані функції, виражені через незалежну змінну: $f(x) = \varphi(x)$.

2. Розв'язати рівняння.

Розв'язки рівняння є шуканими значеннями незалежної змінної.

№53. **Скласти рівняння для знаходження значень аргументів, при яких функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ набувають однакових значень:**
а) $f(x)=3x-2$ і $\varphi(x)=x+2$; б) $f(x)=x^2-4x+3$ і $\varphi(x)=x+1$;
в) $f(x)=x^2+2x$ і $\varphi(x)=x^3$; г) $f(x)=\frac{35}{x+2}$ і $\varphi(x)=x+4$.

№54. **Знайти значення змінної x, при яких функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ набувають однакових значень:**
а) $f(x)=4x$ і $\varphi(x)=x+3$; б) $f(x)=5x-2$ і $\varphi(x)=3x-8$;
в) $f(x)=x+4$ і $\varphi(x)=5x-8$; г) $f(x)=7x-2$ і $\varphi(x)=x+22$.

Алгоритм знаходження значень незалежної змінної, при яких одна з функцій ($y=f(x)$) набуває значень більших (менших) від значень, другої функції ($y=\varphi(x)$)

1. Записати нерівність із знаком > (<), в якій лівою частиною є перша функція, а правою – друга функція, виражені через змінну x: $f(x) > \varphi(x)$ $(f(x) < \varphi(x))$.

2. Розв'язати нерівність.

Множина розв'язків нерівності є шуканою множиною значень аргументу.

№55. **Скласти нерівність для знаходження значень змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, більших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$:**

а) $f(x)=x^2-4x+3$ і $\varphi(x)=x+3$; б) $f(x)=x^3+x^2-3$ і $\varphi(x)=x^3-2x$;

в) $\varphi(x)=x^3+2x$ і $f(x)=x^4+x^3+2x$; г) $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ і $f(x)=x$.

№56. **Скласти нерівність для знаходження значень змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, менших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$:**

а) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ і $\varphi(x)=x$; б) $f(x)=\dfrac{-2}{x}$ і $\varphi(x)=-x$;

в) $\varphi(x)=x^3$ і $f(x)=x^2$; г) $\varphi(x)=x^2+1$ і $f(x)=x^4+1$.

№57. **Знайти значення змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, більших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$:**

а) $f(x)=2x-5$ і $\varphi(x)=x-2$; б) $f(x)=4x-3$ і $\varphi(x)=x$;

в) $f(x)=2x+1$ і $\varphi(x)=x-5$; г) $f(x)=2x+7$ і $\varphi(x)=3x-2$.

№58. **Знайти значення змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, менших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$:**

а) $f(x)=x+4$ і $\varphi(x)=2x$; б) $f(x)=-4x-3$ і $\varphi(x)=x+2$;

в) $f(x)=2x+3$ і $\varphi(x)=-x$; г) $f(x)=7x-2$ і $\varphi(x)=x+14$.

!!!!! **Додатковий матеріал**

Дві функції, задані однією й тією ж формулою, але на різних областях визначення, різні.

Дві функції називають **рівними**, якщо в них однакові області визначення і при однакових значеннях аргументу вони набувають рівних значень.

Функції, задані формулами, є рівними, якщо в них однакові області визначення і вони виражені через тотожно рівні вирази.

Алгоритм розпізнавання рівних функцій, заданих формулами

1. Встановити, що області визначення функцій однакові.

2. Показати, що вираз, через який представлено одна з функцій, тотожно рівний виразу, через який представлено інша функція.

№59. Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.

а) Задано функції $f(x)=x(x+1)$ і $\varphi(x)=x^2+x$.
Доведемо, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ рівні.
1. $D(f)=$ ____________________, $D(\varphi)=$ ________________________.
2. $x(x+1)=$ ________________________.

Отже, $f(x)$ і $\varphi(x)$ ____________________.

б) Задано функції $f(x)=x(x+1)-x^2$ і $\varphi(x)=x$.
Доведемо, що $f(x)=\varphi(x)$.
1. $D(f)=$ ____________________, $D(\varphi)=$ ________________________.
2. $x(x+1)-x^2=$ ________________ $=$ ____________________.

Отже, $f(x)=$ ________________.

в) Задано функції $f(x)=x$ і $\varphi(x)=\frac{x^2}{x}$. Довести, що функції не рівні.
$D(f)=$ ____________________, $D(\varphi)=$ ____________________.
Так як області визначення функції ____________________, **то функції** ____________________.

г) Функції $f(x)=x$ і $\varphi(x)=\frac{x^2}{x}$ задані на області визначення $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Доведемо їх рівність.
1. **За умовою** $D(f)=D(\varphi)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.
2. **Так як $x\neq0$, то** $\frac{x^2}{x}=$ ____________.

Отже, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – ________________________ **на області визначення** ________________________.

№60. **Встановити, чи є рівними функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$:**
а) $f(x)=3x+4$, $D(f)=(-\infty;0)$; $\varphi(x)=3x+4$, $D(\varphi)=(0;\infty)$;
б) $f(x)=\frac{x}{2}$, $D(f)=(1;5)$; $\varphi(x)=\frac{x}{2}$, $D(\varphi)=[0;4]$.
в) $f(x)=x(x+2)$, $D(f)=[0;4]$; $\varphi(x)=x^2+2x$, $D(\varphi)=[0;4]$.
г) $f(x)=5(x-2)+10$, $D(f)=[0;4]$; $\varphi(x)=5x$, $D(\varphi)=(0;4)$.
д) $f(x)=\frac{x^3}{x^2}$; $\varphi(x)=x$;
е) $f(x)=\frac{x^3}{x^2}$; $\varphi(x)=x$, $D(\varphi)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

№61. **Довести, що функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ рівні:**
а) $f(x)=x(x-4)+4x$ і $\varphi(x)=x^2$; б) $f(x)=-5(x-3)-15$ і $\varphi(x)=-5x$;
в) $f(x)=x(x-3)-x^2$ і $\varphi(x)=-3x$; г) $f(x)=2x$, $\varphi(x)=-x^2+x(x+2)$.

№62. **Контрольні питання.**

1. В якому випадку змінну y називають функцією від змінної x?
2. Як називається множина значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент); залежна змінна (функція)?
3. Чи є залежність змінної y від змінної x функцією, якщо $y(2)=10$ і $y(2)=20$? Відповідь пояснити.
4. Як знайти значення функції, заданої формулою, при даному значенні аргументу?
5. Як знайти значення аргументу функції, заданої формулою, при даному значенні функції?
6. Що є областю визначення (природною) функції, яка задана формулою через цілий раціональний вираз?
7. Як знайти область визначення (природну) функції, яка задана формулою через дробовий раціональний вираз?
8. При якій умові множину значень функції, яка задана формулою $y=f(x)$, складають усі дійсні числа?
9. При якій умові дійсне число a не входить у множину значень функції, яка задана формулою $y=f(x)$?
10. Які числа називаються нулями функції?
11. Як знайти нулі функції $y=f(x)$?
12. Які проміжки області визначення функції називають проміжками знакосталості?
13. Як знайти проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень?
14. В якому випадку функції, задані формулами через різні вирази, є рівними?
15. Як знайти значення аргументу, при яких функції, задані формулами, набувають однакових значень?
16. Як знайти значення аргументу, при яких одна з функцій, заданих формулами, набуває значень більших від значень іншої?

II

№63. **Дано функцію:**

а) $y=5x-2$. Знайти значення змінної y, якщо змінна x дорівнює -2; 1; 3.

б) $f(x)=x^2-4$. Знайти $f(-1)$; $f(1)$; $f(10)$.

в) $y=\frac{10}{x}$. Знайти значення функції y, яке відповідає значенню незалежної змінної -10; 2; 5.

г) $y=\frac{5}{x-3}$. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу -2; 4; 8.

№64. **Дано функцію:**

а) $y=6x$. Знайти значення змінної x, якщо значення змінної y дорівнює -24.

б) $y=-10x$. Знайти значення x, якщо $y=50$.

в) $f(x)=5x-4$. Знайти x, якщо $f(x)=44$.

г) $y=-2x+1$. Знайти значення аргументу x, що відповідає значенню функції -33.

№65. **Дано функцію:**

а) $y=2x+4$. Знайти значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.

б) $f(x)=-x+5$. Знайти значення x, якщо $f(x)=0$.

в) $f(x)=2x+3$. Знайти нулі функції.

г) $y=-4x-1$. Знайти значення аргументу, при якому функція набуває значення, що дорівнює 0.

№66. **Знайти область визначення функції, заданої формулою:**

а) $y=\frac{1}{x-3}$; б) $y=\frac{x}{x+2}$;

в) $y=\frac{5}{x(x-3)}$; г) $y=\frac{x}{(x-3)(x-4)}$.

№67. **Довести, що додатним значенням аргументу відповідають додатні значення функції:**

а) $y=5x$; б) $y=\frac{x}{5}$; в) $y=ax$, де $a>0$; г) $y=\frac{a}{x}$, де $a>0$.

№68. **Довести, що від'ємним значенням аргументу відповідають від'ємні значення функції:**

а) $y=7x$; б) $y=\frac{x}{7}$; в) $y=ax$, де $a>0$; г) $y=\frac{a}{x}$, де $a>0$.

№69. **Довести, що від'ємним значенням аргументу відповідають додатні значення функції:**

а) $y=-6x$; б) $y=\frac{-x}{6}$; в) $y=ax$, де $a<0$; г) $y=\frac{a}{x}$, де $a<0$.

№70. **Довести, що додатним значенням аргументу відповідають від'ємні значення функції:**

а) $y=-7x$; б) $y=\dfrac{-x}{10}$; в) $y=ax$, де $a<0$; г) $y=\dfrac{a}{x}$, де $a<0$.

№71. **Довести, що будь-яке дійсне число c належить множині значень функції:**

а) $y=5x$; б) $y=\dfrac{x}{5}$; в) $y=ax$, де $a\neq0$; г) $y=ax+b$, де $a\neq0$.

№72. **Довести, що будь-яке від'ємне дійсне число c не належить множині значень функції:**

а) $y=x^2$; б) $y=5x^2$; в) $y=\dfrac{x^2}{5}$; г) $y=ax^2$, де $a>0$.

№73. **Довести, що будь-яке додатне дійсне число с не належить множині значень функції:**

а) $y=-x^2$; б) $y=-5x^2$; в) $y=\dfrac{-x^2}{5}$; г) $y=ax^2$, де $a<0$.

№74. **Знайти обчисленням значення x, при якому набувають однакових значень функції:**

а) $f(x)=4x-4$ і $\varphi(x)=11$; б) $f(x)=5x-2$ і $\varphi(x)=x-18$.

№75. а) **Знайти обчисленням значення змінної x, при яких функція $f(x)=3x-2$ набуває значень, більших від відповідних значень функції $\varphi(x)=7$.**

б) Знайти обчисленням значення змінної x, при яких функція $f(x)=4x+5$ набуває значень, менших від відповідних значень функції $\varphi(x)=x-4$.

№76. **Задати змінну y формулою, як функцію від змінної x, якщо кожному значенню змінної x відповідає таке значення змінної y, яке дорівнює:**

а) значенню змінної x;

б) числу, протилежному до значення змінної x;

в) квадрату значення змінної x;

г) добутку числа 5 і значення змінної x;

д) оберненому числу до значення змінної x;

е) сумі числа 8 та добутку числа 5 і значення змінної x.

№77. а) У порожній бак починають вливати воду, щохвилини по 15 л. Задати формулою залежність об'єму води V у баці (у літрах) від часу заповнення t (у хвилинах).

б) З пункту А виїхав мотоцикліст, швидкість руху якого 50 км/год. Задати формулою залежність відстані S (у кілометрах), що проїхав мотоцикліст, від часу t (у годинах).

в) Кожну годину робітник виготовляв 3 деталі. Задати формулою залежність кількості деталей n, що виготовив робітник, від часу t (у годинах).

г) Один зошит коштує 0,4 гривні. Задати формулою залежність вартості зошитів К від їх кількості n.

III

№78. Залежність між значеннями змінної x і відповідними значеннями змінної y виражається рівнянням:

а) $x+y=20$; б) $y-x=10$; в) $xy=20$; г) $\frac{y}{x}=4$;

д) $\frac{x}{y}=5$; е) $1+xy=10$; є) $x^2+y=10$; ж) $x+2y=4$.

Задати формулою змінну y як функцію від змінної x.

№79. Задати формулою змінну y як функцію від змінної x, якщо кожному значенню змінної x поставлено у відповідність таке значення змінної y, що:

а) їх добуток дорівнює 30;

б) їх сума дорівнює 10;

в) добуток значення змінної x і числа, оберненого до значення змінної y, дорівнює 20;

г) сума числа 5 і добутку відповідних значень змінних x і y дорівнює 30;

д) сума квадрата значення змінної x і відповідного значення змінної y дорівнює 10.

№80. а) Дано функцію $f(x)=x^2-2$. Знайти: $f(2)-f(1)$; $f(4)-f(0)$; $f(-2)-f(1)$.

б) Дано функцію $f(x)=-3x+4$. Довести, що: $f(2)+f(0)=2f(1)$; $f(3)+f(-2)=f(0)$; $f(a-1)+f(a+2)=2f(a)$.

в) Дано функцію $f(x)=x^2+x+a$. Довести, що $f(a-1)=a^2-2a$.

г) Дано функцію $f(x)=\frac{1}{x^2-x-a}$. Довести, що $f(a+1)=\frac{1}{a^2}$.

№81. Дано функцію:

а) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\geq 0,\\ 2x, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\geq 0,\\ -4x+1, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ якщо } x\geq 0,\\ 3x+1, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x\geq 0,\\ x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

Знайти $f(-2)$; $f(10)$.

№82. а) Функція $y=3x+2$ задана на відрізку $[2; 10]$. Які з чисел 5; 14; 31 належать множині значень функції?

б) Функція $y=4x+3$ задана на відрізку $[-2; 20]$. Довести, що функція не набуває значення, що дорівнює -19.

в) Функція $y=-3x+5$ задана на відрізку $[-5; 1]$. Довести, що функція не має нулів.

г) Функція $y=3x+2$ задана на відрізку $[0; 10]$. Довести, що функція не набуває значення, що дорівнює 0.

№83. а) Дано функцію $y = \begin{cases} 3x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -5x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ Знайти значення аргументу, при яких функція набуває значення, що дорівнює 15.

б) Дано функцію $y = \begin{cases} 5x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ 2x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ Знайти значення аргументу, при яких функція набуває значення, що дорівнює 10.

в) Дано функцію $y = \begin{cases} 5x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -4x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ Довести, що в множину значень функції не входить число -40.

г) Дано функцію $y = \begin{cases} -3x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ 2x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ Довести, що в множину значень функції не входить число 12.

№84. Знайти область визначення функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ та множину значень змінної x, на якій функції рівні.

а) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ і $\varphi(x)=x$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{x}{x^2}$;

в) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x+3}$ і $\varphi(x)=x+3$; г) $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-4}$ і $\varphi(x)=x-4$.

IV

№85. **Дано рівняння:**

а) $x+y=5$; б) $x+2y=3$; в) $2x+y=5$; г) $3x-y=5$.

Виразити змінну x через змінну y. Пояснити, чому змінну x можна розглядати як функцію від змінної y з областю визначення $(-\infty; \infty)$.

№86. **Дано рівняння:**

а) $xy=10$; б) $xy=-10$.

Виразити змінну x через змінну y. Пояснити, чому змінна x є функцією від змінної y на області визначення $(\infty; 0)\cup(0; \infty)$.

№87. **Дано функцію $f(x)=5x$. Записати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка при тих самих значеннях аргументу набуває значень:**

а) більших на 7 від значень даної функції;

б) менших на 3 від значень даної;

Знайти $f(10)$ і $\varphi(10)$ та порівняти їх.

№88. **Дано функцію $f(x)=2x-3$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, якщо для будь-якого x_0 з області визначення цієї функції виконується рівність:**

а) $\varphi(x_0)=5f(x_0)$; б) $f(x_0)=3\varphi(x_0)$.

№89. **Дано функцію:**

а) $f(x)=4x$; б) $f(x)=-3x$; в) $f(x)=4x-1$; г) $f(x)=-5x-2$.

Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка з даною функцією при тих самих значеннях аргументу набуває протилежних значень.

№90. **Дано функцію:**

а) $f(x)=-3x$; б) $f(x)=2x+1$; в) $f(x)=4x-3$; г) $f(x)=-5x-2$.

Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка при протилежних значеннях аргументу з функцією $y=f(x)$ набуває з нею однакових значень.

№91. **Дано функцію $f(x)=5x+1$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових значень з даною при значеннях аргументу, які менші від значень аргументу даної функції на: а) 3; б) 2.**

№92. **Дано функцію $f(x)=5x+1$. Записати формулу функції, яка набуває тих самих значень, що і дана функція, при значеннях аргументу, які більші від значень аргументу даної функції на: а) 4; б) 10.**

№93. **Дано функцію $y=f(x)$. Записати через $f(x)$ функцію $\varphi(x)$, яка:**

а) при однакових значеннях аргументу з даною функцією набуває значень, більших від її значень на a;

б) при однакових значеннях аргументу з даною функцією набуває значень, менших від її значень на a;

в) при однакових значеннях аргументу з даною функцією набуває з нею протилежних значень функції;
г) при протилежних значеннях аргументів набуває однакових з нею значень;
д) набуває однакових з даною функцією значень при значеннях аргументу, які на a менші від значення аргументу функції $f(x)$;
е) набуває однакових з даною функцією значень при значеннях аргументу, які на в більші від значень аргументу функції $f(x)$

№94. **Дано функцію:**
а) $y=|x|$; б) $y=2|x|$; в) $y=|x|-4$; г) $y=3|x|-5$.
Представити дану функцію у вигляді двох виразів, що не містять знака модуля.

№95. **Дано функцію:**
а) $y=-|x|$; б) $y=-3|x|$; в) $y=-4|x|+1$; г) $y=-4|x|-2$.
Представити дану функцію у вигляді двох виразів, що не містять знака модуля.

№96. **Доповнити записи представлення функції, заданих через модуль, у вигляді двох виразів:**

а) $y=|4x+3|$; $y=\begin{cases}4x+3, \text{ якщо } 4x+3\geq 0,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;\end{cases}$

б) $y=|2x-1|$; $y=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_, \text{ якщо } 2x-1\geq 0,\\ \_\_\_\_\_\_, \text{ якщо } 2x-1<0;\end{cases}$

в) $y=|5x+2|$; $y=\begin{cases}-(5x+2), \text{ якщо } \_\_\_\_\_\_,\\ 5x+2, \text{ якщо } \_\_\_\_\_\_\_\_;\end{cases}$

а) $y=|x-7|$; $y=\begin{cases}-(x-7), \text{ якщо } x-7<0,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

№97. **Записати функцію у вигляді двох виразів, що не містять знака модуля:** а) $y=|f(x)|$, б) $y=f(|x|)$.

№98. Задати формулою за допомогою знака модуля функцію $y=f(x)$, яка:
а) при невід'ємних значеннях аргументу набуває значень, які дорівнюють почетвереному значенню аргументу, а при від'ємних – значення функції, протилежні до почетвереного значення аргументу. Знайти $f(-5)$; $f(5)$.
б) при невід'ємних значеннях аргументу набуває значень, протилежних значенню аргументу, а при від'ємних значеннях аргументу значення функції дорівнюють значенню аргументу. Знайти $f(-10)$ і $f(10)$.

№99. а) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – проміжок $(0; \infty)$. Знайти область визначення функції $y=f(-x)$.

б) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – множина $(-\infty; 2)\cup(2; \infty)$. Знайти область визначення функції $y=f(-x)$.

№100. а) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – проміжок $(0; \infty)$. Знайти область визначення функції $y=-f(x)$.

б) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – проміжок $(-\infty; 0)$. Знайти область визначення функції $y=-f(x)$.

№101. а) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – проміжок $(0; \infty)$. Знайти область визначення функції $y=|f(x)|$.

б) Природна область визначення функції $y=f(x)$ – проміжок $(-\infty; 0)$. Знайти область визначення функції $y=|f(x)|$.

№102. Множиною значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[1; 5]$. Знайти множину значень функції:

а) $y=-f(x)$; б) $y=f(x)+2$; в) $y=f(x)-5$; г) $y=3\cdot f(x)$.

№103. Знайти множину значень функції $y=|f(x)|$, якщо множиною значень функції $y=f(x)$ є проміжок:

а) $[1; 105]$; б) $[-10; -2]$; в) $[-4; 1]$; г) $[-4; 7]$.

№104. а) Знайти множину значень функції $y=f(|x|)$, якщо множиною значень функції $y=f(x)$ для додатних значень аргументу є проміжок $(1; 5)$, а для від'ємних значень аргументу – $(6; 10)$.

б) Знайти множину значень функції $y=f(|x|)$, якщо множиною значень функції $y=f(x)$ для додатних значень аргументу є проміжок $(-10; -1)$, а для від'ємних – $(1; 10)$.

в) Знайти множину значень функції $y=h(|x|)$, якщо множиною значень функції $y=h(x)$ для додатних значень аргументу є проміжок $[-3; 10]$, а для від'ємних – відрізок $[1; 12]$.

№105. а) Знайти множину значень функції $y=|f(|x|)|$, якщо множиною значень функції $y=f(x)$ для додатних значень аргументу є відрізок $[3; 10]$, а для від'ємних – $[-4; -1]$.

б) Знайти множину значень функції $y=|f(|x|)|$, якщо множиною значень функції $y=f(x)$ для додатних значень аргументу є проміжок $[-3; 10]$, а для від'ємних – $[15; 20]$.

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

№106. **Які з тверджень а) – е) правильні?**

а) **Якщо точка $A(a; b)$ – точка графіка функції $y=f(x)$, то $f(a)=b$.**

б) **Якщо точка $B(c; d)$ – точка графіка функції $y=f(x)$, то $f(d)=c$.**

в) **Якщо точка $M(1; 2)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то $f(2)=1$.**

г) **Якщо точка $P(3; 4)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то $f(3)=4$.**

д) **Якщо $f(2)=5$, то точка $(2; 5)$ належить графіку функції $y=f(x)$.**

е) **Якщо $f(3)=10$, то точка $(10; 3)$ належить графіку функції $y=f(x)$.**

№107. 1) **Пряма, яка перпендикулярна до осі абсцис,** перетинає графік функції $y=f(x)$ **у точці $A(2; 5)$. Яке значення функції можна знайти: $f(2)$ чи $f(5)$? Чому воно дорівнює?**

2) **Через точку графіка функції $y=f(x)$ проведено пряму, перпендикулярну до осі x, яка перетинає її у точці з абсцисою 3, і** пряму, **перпендикулярну до осі y, яка перетинає її в точці з** ординатою 5. **Яка з рівностей: правильна: а) $f(5)=3$; б) $f(3)=5$?**

3) **Чи існує функція, графік якої проходить через точки:**

а) $A(2; 5)$ і $B(2;(6)$; б) $A(5; 2)$ і $B(6; 2)$?

Відповідь пояснити.

4) **Чи можуть графіку функції належати точки з однаковими абсцисами і різними ординатами? Відповідь пояснити.**

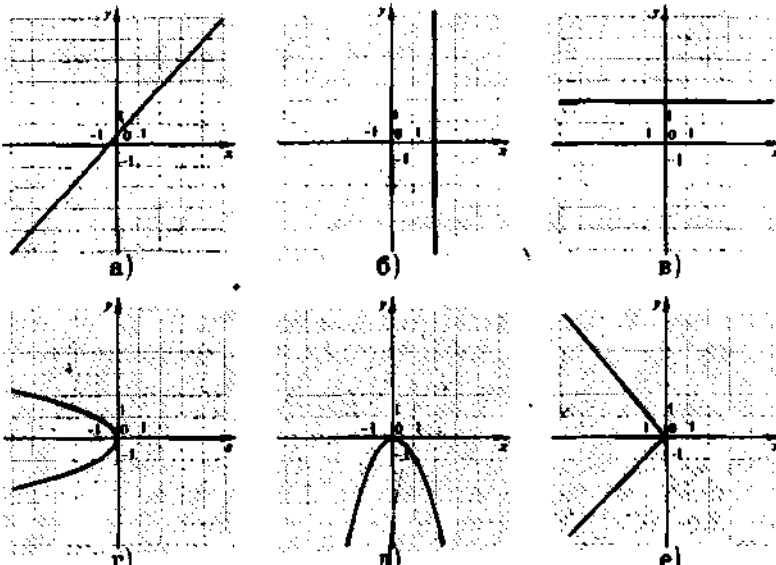
5) **Чи може пряма, перпендикулярна до осі абсцис, перетинати графік функції у двох точках?**

Розпізнавання графіка функції серед інших графіків

Будь-яка пряма, яка перпендикулярна до осі абсцис і перетинає графік функції, має з ним тільки одну спільну точку, тобто графіку функції не належать точки з однаковими абсцисами.

Якщо графіку належать хоча б дві точки, у яких однакова абсциса і різні ординати, то графік не є графіком функції.

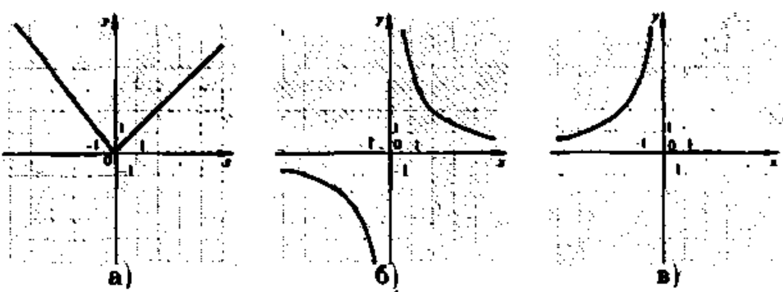
№108. **Які з графіків, зображених на малюнку 1, є графіками функцій, а які – ні? Відповідь пояснити.**

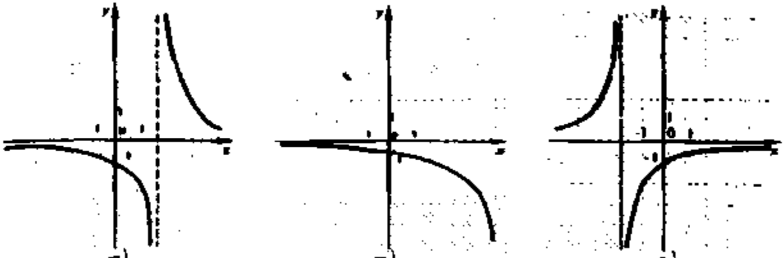


Мал. 1

Графіком функції може бути неперервна крива (ламана), яку можна накреслити одним розчерком інструменту, або розривна крива, яку не можна накреслити одним розчерком.

№109. **Які з графіків функцій, зображених на малюнку 2, є неперервними кривими, а які – розривними? Для розривних кривих вказати абсцису точки розриву графіка.**





г) д) е)

Мал. 2

Алгоритм знаходження відповідних значень аргументу та функції, яка задана графіком

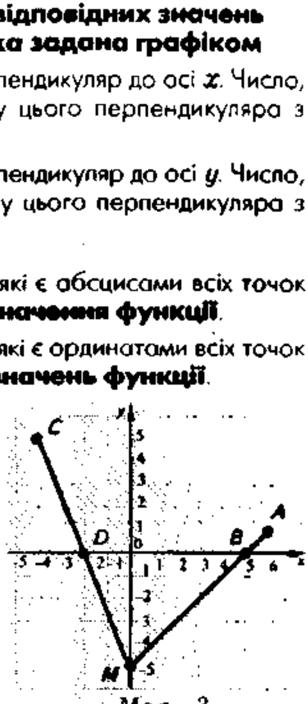
1. З точки графіка провести перпендикуляр до осі x. Число, що є абсцисою точки перетину цього перпендикуляра з віссю x, є значенням аргументу.

2. З точки графіка провести перпендикуляр до осі y. Число, що є ординатою точки перетину цього перпендикуляра з віссю y, є значенням функції.

Множина чисел на осі абсцис, які є абсцисами всіх точок графіка функції, є **областю визначення функції**.

Множина чисел на осі ординат, які є ординатами всіх точок графіка функції, є **множиною значень функції**.

№110. За графіком функції (мал. 3) доповнити записи до правильних тверджень, вибравши одне з доповнень.



Мал. 3

1) Серед точок графіка функції найменшу абсцису має точка ...

а) C; б) D; в) M; г) A.

2) Найменшим числом у області визначення функції є число ...

а) -5; б) -4; в) -3; г) 1.

3) Серед точок графіка функції найбільшу абсцису має точка ...

а) A; б) B; в) C; г) M.

4) Найбільшим числом у області визначення функції є число ...

а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

5) Абсцисами точок графіка функції є числа, що належать проміжку ...

а) $[-5; 5]$; б) $[-2; 5]$; в) $[-4; 6]$; г) $[-2; 6]$.

6) Області визначення функції відповідає числовий відрізок осі абсцис ...

а) $[-5; 5]$; б) $[-4; 6]$; в) $[0; 5]$; г) $[-3; 5]$.

7) Серед точок графіка функції найменшу ординату має точка...

а) A; б) B; в) C; г) M.

8) Найменше значення функції дорівнює...

а) -4; б) -2; в) -3; г) -5.

9) Серед точок графіка функції найбільшу ординату має точка...

а) B; б) C; в) M; г) A.

10) Найбільше значення функції дорівнює...

а) 2; б) 5; в) 6; г) 0.

11) Ординатами точок графіка функції є числа, що належать проміжку...

а) $[-4; 6]$; б) $[-5; 5]$; в) $[0; 5]$; г) $[-3; 5]$.

12) Множині значень функції відповідає відрізок осі ординат...

а) $[-4; 6]$; б) $[0; 5]$; в) $[-2; 5]$; г) $[-5; 5]$.

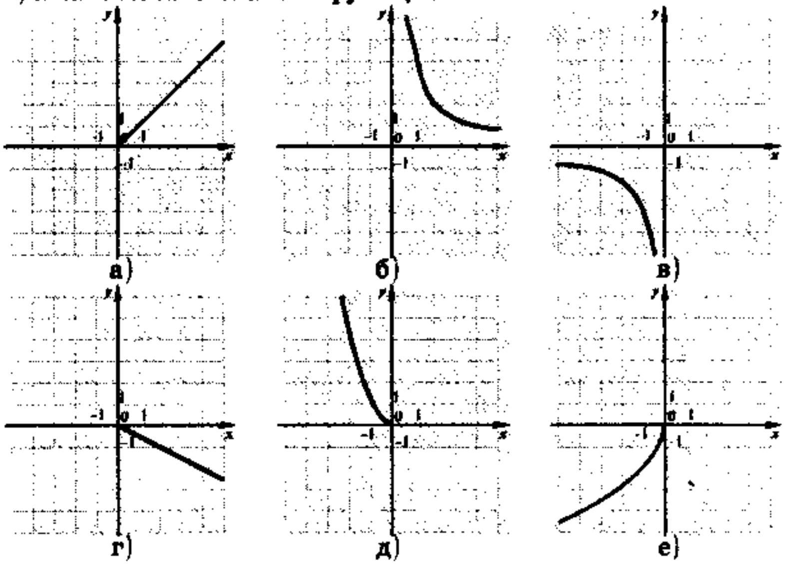
№111. За графіками функцій, зображених на мал. 4–6, дати відповіді на питання:

а) Який числовий проміжок утворюють на осі x абсциси всіх точок графіка функції?

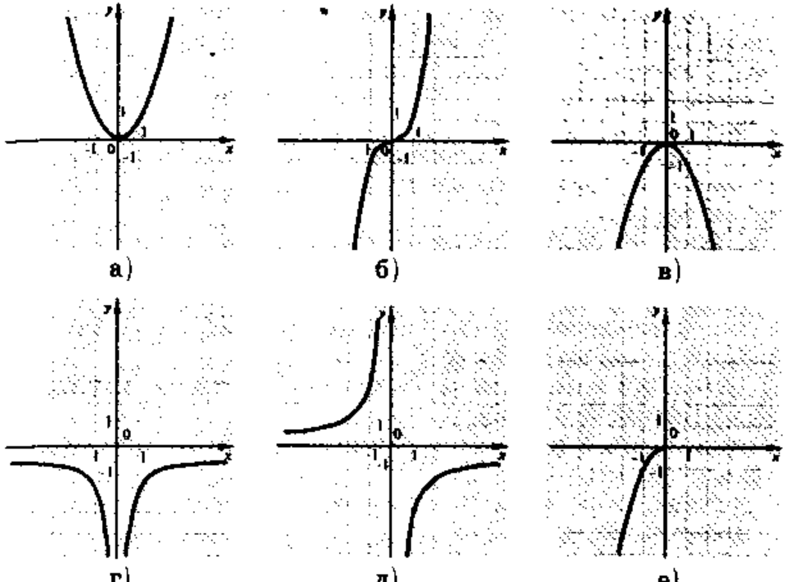
б) Який числовий проміжок утворюють на осі y ординати всіх точок графіка функції?

в) Яка область визначення функції?

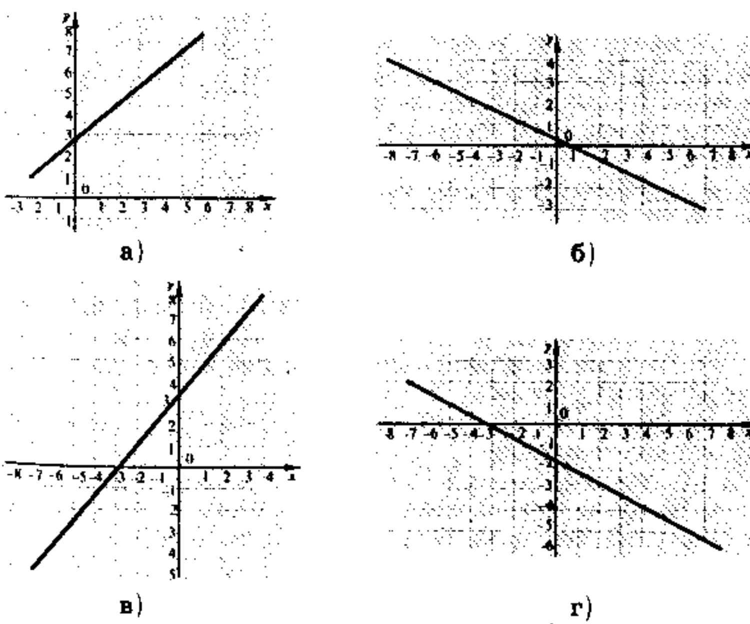
г) Яка множина значень функції?



Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6

№112. Встановити область визначення та множину значень функції, якщо її графіком є промінь, який виходить з початку координат і знаходиться в:

а) першій чверті; б) другій чверті;
в) третій чверті; г) четвертій чверті.

№113. $D(f)$ – область визначення функції $y=f(x)$, а $E(f)$ – множина значень. Встановити, в яких чвертях знаходиться графік функції:

а) $D(f)=(0;\infty)$; $E(f)=(0;\infty)$; б) $D(f)=(-\infty;\infty)$; $E(f)=(0;\infty)$;
в) $D(f)=(-\infty;\infty)$; $E(f)=(-\infty;0)$; г) $D(f)=(-\infty;0)$; $E(f)=(0;\infty)$;
д) $D(f)=(0;\infty)$; $E(f)=(-\infty;0)$; е) $D(f)=(-\infty;0)$; $E(f)=(-\infty;0)$.

№114. Встановити область визначення і множину значень функції, якщо її графіком є:

а) пряма, що проходить через початок координат і не співпадає з осями координат;
б) промінь, який виходить з початку координат і розміщений у другій чверті;
в) промінь, який виходить з початку координат і розміщений у четвертій чверті;
г) пряма, яка перпендикулярна осі y і перетинає її в точці з ординатою 2;
д) пряма, яка паралельна осі x і проходить через точку (0;4);
е) пряма, що співпадає з віссю абсцис.

№115. Встановити, в яких чвертях знаходиться графік функції $y=f(x)$, якщо її область визначення $D(f)$ і множину значень $E(f)$ відповідно утворюють:

а) $D(f)$ – усі числа осі абсцис; $E(f)$ – усі числа додатної півосі ординат;
б) $D(f)$ – усі числа осі абсцис; $E(f)$ – усі числа від'ємної півосі ординат;
в) $D(f)$ – усі числа додатної півосі абсцис; $E(f)$ – усі числа від'ємної півосі ординат;
г) $D(f)$ – усі числа від'ємної півосі абсцис; $E(f)$ – усі числа додатної півосі ординат;
д) $D(f)$ – усі числа додатної півосі абсцис; $E(f)$ – усі числа додатної півосі ординат;
е) $D(f)$ – усі числа від'ємної півосі абсцис; $E(f)$ – усі числа додатної півосі ординат.

№116. Для функції $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4; 4]$, дано таблицю значень функції для цілих чисел. Побудувати графік функції, сполучивши задані його точки плавною лінією.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

б)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−8	−4,5	−2	−0,5	0	0,5	2	4,5	8

в)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

г)

№117. **Накреслити систему координат і схематично зобразити в ній графік функції, для якої:**

а) **областю визначення є проміжок $(-\infty;\infty)$, а множиною значень – $(0;\infty)$;**

б) областю визначення є проміжок $(-\infty;\infty)$, а множиною значень – $(-\infty;0)$;

в) областю визначення є проміжок $(0;\infty)$, а множиною значень – $[0;\infty)$;

г) **областю визначення є проміжок $(0;\infty)$, а множиною значень – $(-\infty;0)$;**

д) **областю визначення є проміжок $(-\infty;0)$, а множиною значень – $(0;\infty)$;**

е) областю визначення є проміжок $(-\infty;0)$, а множиною значень – $(-\infty;0)$.

№118. **Схематично накреслити в системі координат довільний графік функції, для якої:**

а) **областю визначення є проміжок $[1;5]$, а множиною значень – $[-5;0]$;**

б) областю визначення є проміжок $[1;5]$, а множиною значень – $[0;4]$;

б) областю визначення є проміжок $[-5;0]$, а множиною значень – $[-3;4]$;

в) **областю визначення є проміжок $[-2;3]$, а множиною значень – $[-1;-4]$.**

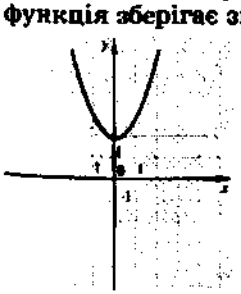
№119. **Вказати, які з функцій, зображених на малюнку 7, набувають:**

а) тільки додатних значень;

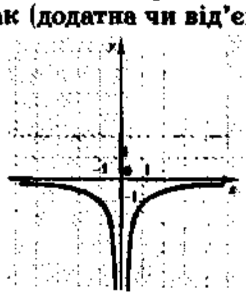
б) тільки від'ємних значень;

в) **і додатних, і від'ємних значень.**

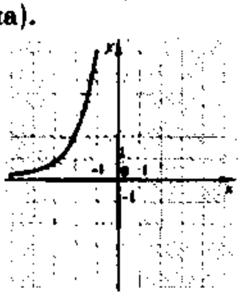
Для кожного графіка записати проміжки осі абсцис, на яких функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).



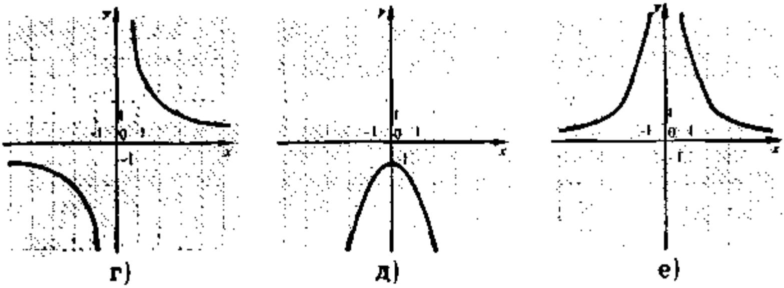
а)



б)

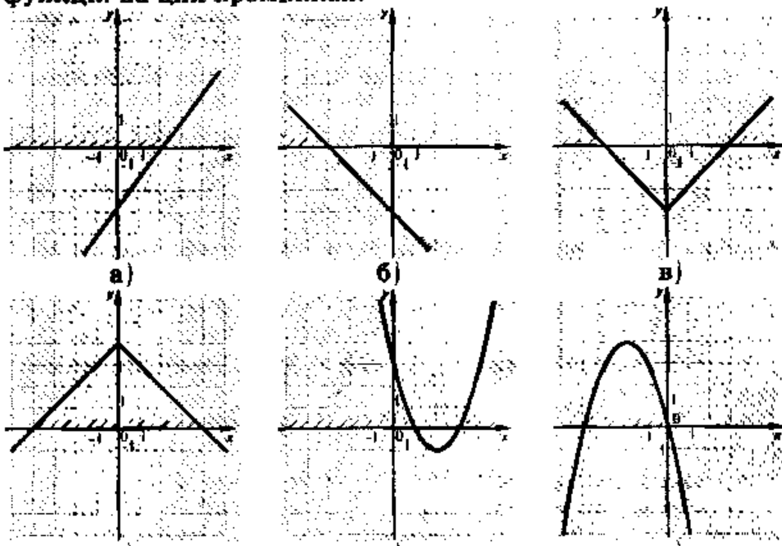


в)



Мал. 7

№120. Записати проміжки, заштриховані на малюнку 8. Встановити, яких значень (додатних чи від'ємних) набуває функція на цих проміжках.



Мал.8

№121. Яка з функцій, зображених на малюнку 9, є:

а) від'ємною на проміжку $(-\infty;-1)$ і додатною на проміжку $(-1;\infty)$;

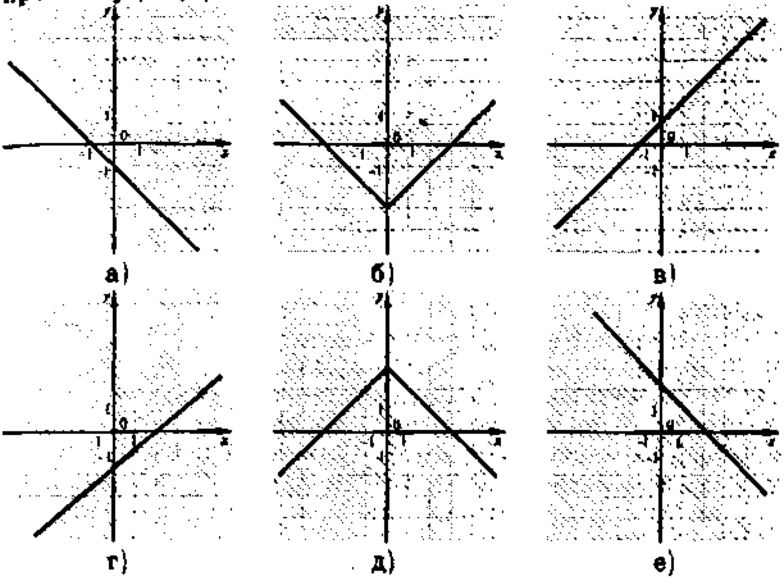
б) від'ємною на проміжку $(-\infty;2)$ і додатною на проміжку $(2;\infty)$;

в) додатною на проміжку $(-\infty;2)$ і від'ємною на проміжку $(2;\infty)$;

г) додатною на проміжку $(-\infty;-1)$ і від'ємною на проміжку $(1;\infty)$;

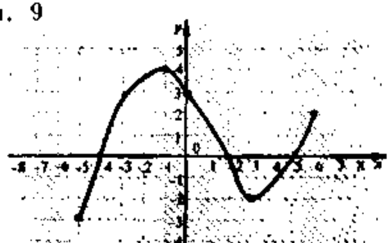
д) додатною на проміжку $(-3;3)$ і від'ємною на проміжках $(-\infty;-3)$ і $(3;\infty)$;

в) додатною на проміжках $(-\infty;-3)$ і $(3;\infty)$ та від'ємною на проміжку $(-3;3)$?



Мал. 9

№122. На малюнку 10 зображено графік функції $y=f(x)$. Кожне з речень 1) – 8) доповнити до правильного твердження, вибравши одне з доповнень а) – г).



Мал.10

1) Областю визначення функції є проміжок ...

а) $[-4;5]$; б) $[-3;4]$; в) $[-5;6]$; г) $[-3;3]$.

2) Множиною значень функції є числовий відрізок...

а) $[-5;6]$; б) $[-4;5]$; в) $[-3;3]$; г) $[-3;4]$.

3) $f(-5)=$... а) 0; б) -3; в) -2; г) 3.

4) $f(-4)=$... а) -4; б) 0; в) 4; г) -5.

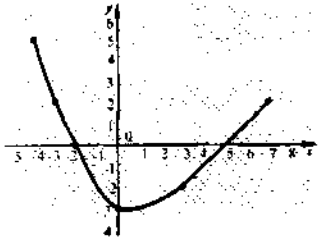
5) $f(3)=$... а) 0; б) 2; в) 0; г) -2.

6) Функція має... а) два нулі: $x_1=-4$, $x_2=2$; б) один нуль: $x=0$; в) три нулі: $x_1=-4$, $x_2=2$, $x_3=5$; г) один нуль: $x=3$.

7) Функція набуває додатних значень... а) на двох проміжках $(-4;2)$ і $(5;6)$; б) на двох проміжках $(-5;2)$ і $(5;6)$; в) на одному проміжку $(-5;-4)$; г) на одному проміжку $(5;6)$.

8) Функція набуває від'ємних значень на ... а) одному проміжку $(-5;4)$; б) одному проміжку $(0;6)$; в) двох проміжках $(-5;2)$ і $(2;6)$; г) двох проміжках $(-5;-4)$ і $(2;5)$.

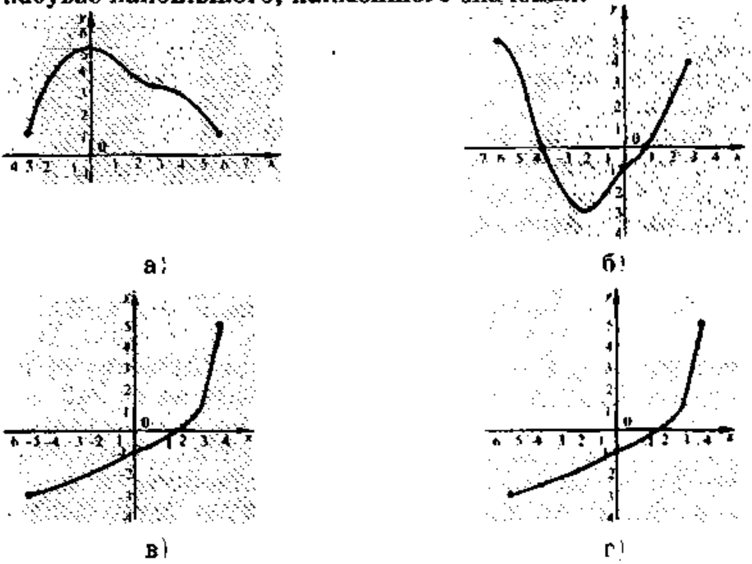
№123. На малюнку 11 зображено графік функції $y=f(x)$. Доповнити записи 1) – 8) до правильних тверджень.



Мал.11

1) Областю визначення функції є ...
2) Множиною значень функції є ...
3) $f(-4)=...$; $f(-3)=...$; $f(-2)=...$; $f(3)=...$; $f(5)=...$; $f(7)=...$.
4) Нулями функції є числа ... .
5) Значення −2 функція набуває при значенні аргументу ... .
6) Найбільшого значення функція набуває при значенні аргументу ... .
7) Від'ємних значень функція набуває на ... .
8) Додатних значень функція набуває на ... .

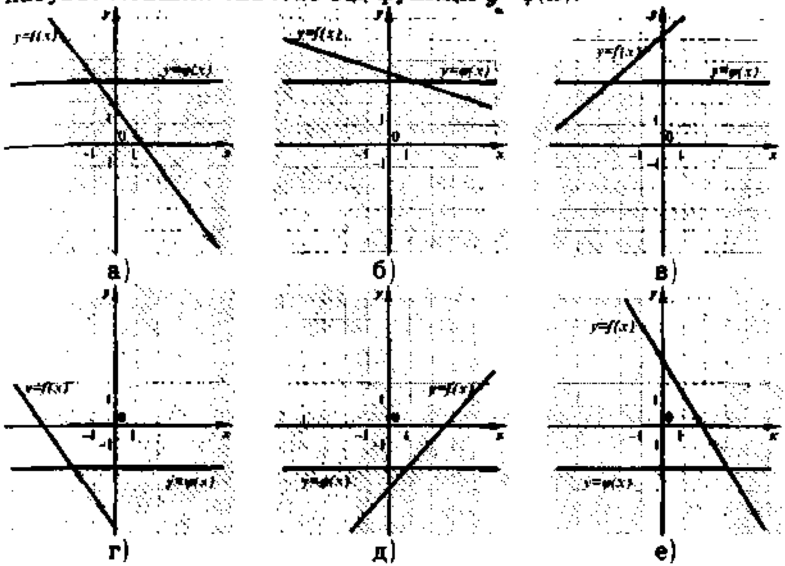
№124. На малюнку 12 зображено графіки функцій. За графіком для кожної функції знайти:
а) область визначення функцій; б) множину значень функції; в) координати точок перетину графіка з осями координат; г) нулі функції; д) проміжки знакосталості (проміжки, на яких функція набуває тільки від'ємних значень; тільки додатних значень); е) значення функції при значеннях аргументу −2; 0; 4; є) значення аргументу, при яких функція набуває значення 3; ж) значення аргументу, при якому функції набуває найбільшого; найменшого значення.



а) б) в) г)

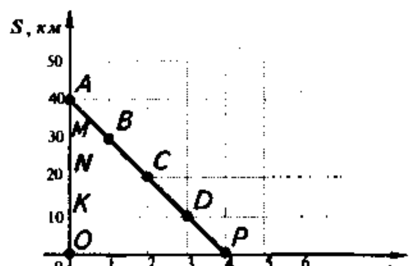
Мал.12

№125. За графіками функцій, зображених на малюнку 13, встановити: а) при яких значеннях аргументу функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ набувають однакових значень; б) функція $y=f(x)$ набуває більших значень від функції $y=\varphi(x)$; в) функція $y=f(x)$ набуває менших значень від функції $y=\varphi(x)$.



Мал. 13

№126. На малюнку 14 зображено графік залежності відстані S (у кілометрах), велосипедиста до пункту O від часу його руху t (у годинах).



Мал. 14

Які з тверджень 1) – 8) правильні?

1) Координати точки B показують, що через одну годину від початку руху велосипедист знаходився на відстані 30 км від пункту O.

2) На початку руху велосипедист знаходився на відстані 40 км від пункту O.

3) Координати точки D показують, що через 10 год велосипедист був на відстані 3 км до пункту O.

4) У пункті O велосипедист був через 4 год від початку руху.

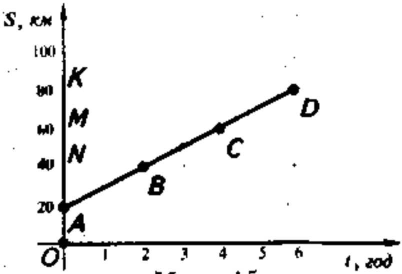
5) Через 0,5 год від початку руху велосипедист був від пункту O на відстані 30 км.

6) Відстані, що проїхав велосипедист за першу годину, відповідає відрізок AM.

7) Відстані, що проїхав велосипедист за перші три години, відповідає відрізок AK;

8) Відстані, що проїхав велосипедист за перші дві години відповідає відрізок AC.

№127. На малюнку 15 зображено графік руху велосипедиста – залежності відстані S (у кілометрах) до пункту O від часу руху t (у годинах).



Мал. 15

Доповнити записи до правильних тверджень:

1) У початковий момент велосипедист знаходився на відстані .... км від пункту O.

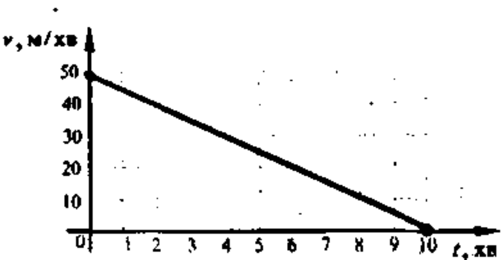
2) Через 6 год велосипедист був від пункту O на відстані ... км.

3) Відстані, що проїхав велосипедист за перші 4 год, відповідає відрізок ... .

4) Через 4 год від початку руху велосипедист був на відстані ... км від пункту O;

5) За 6 год руху велосипедист проїхав відстань, що дорівнює ... км.

№128. На малюнку 16 зображено графік залежності швидкості руху v (у метрах) тіла від часу руху t (у хвилинах). Дати відповіді на питання:



Мал. 16

1) Як змінювалась швидкість руху тіла (збільшувалась чи зменшувалась)?

2) В який момент часу швидкість руху була найбільшою?

3) В який момент часу тіло зупинилось?

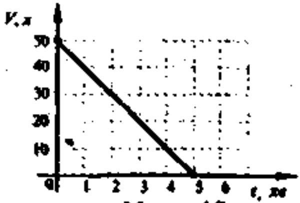
4) В який момент часу швидкість дорівнювала 30м/хв; 20м/хв?

5) Якою була швидкість руху тіла через 2 хв; 4 хв; 5 хв після початку руху?

№129. На малюнку 17 зображено графік витікання води з баку $V=V(t)$, де V – об'єм води (у літрах) в баці через t хвилин після відкриття крану.

Дати відповіді на питання:

1) Скільки літрів води було в баці спочатку?



Мал. 17

2) Скільки літрів води було в баці через 2 хв; 4 хв після відкриття крану?

3) Через скільки хвилин після відкриття крану в баці стало 20 л? 5 л води?

4) Через скільки хвилин у баці не залишилось води?

5) Скільки літрів води витекло з баку за першу хвилину? за перші 2 хвилини? за перші 4 хвилини?

№130. Контрольні питання.

1) Що називають графіком функції?

2) Як відрізнити графік функції від графіків, які не є в системі координат графіками функцій?

3) Числа якої осі відповідають області визначення функції?

4) Числа якої осі відповідають множині значень функції?

5) На якій осі знаходяться нулі функції?

II

№131. Для функції $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4; 4]$, дано таблицю значень функції для цілих чисел. Побудувати графік функції, сполучивши точки плавною лінією.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−10	−7	−4	−1	2	5	7	11	14

а)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

б)

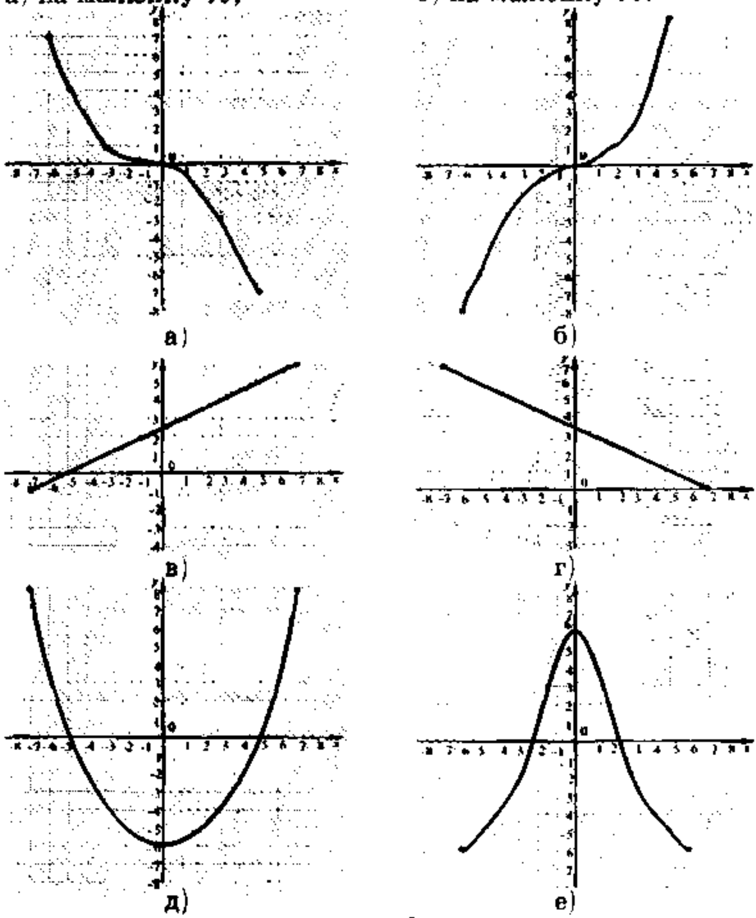
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−9	−5,5	−3	−1,5	−1	−0,5	1	3,5	7

в)

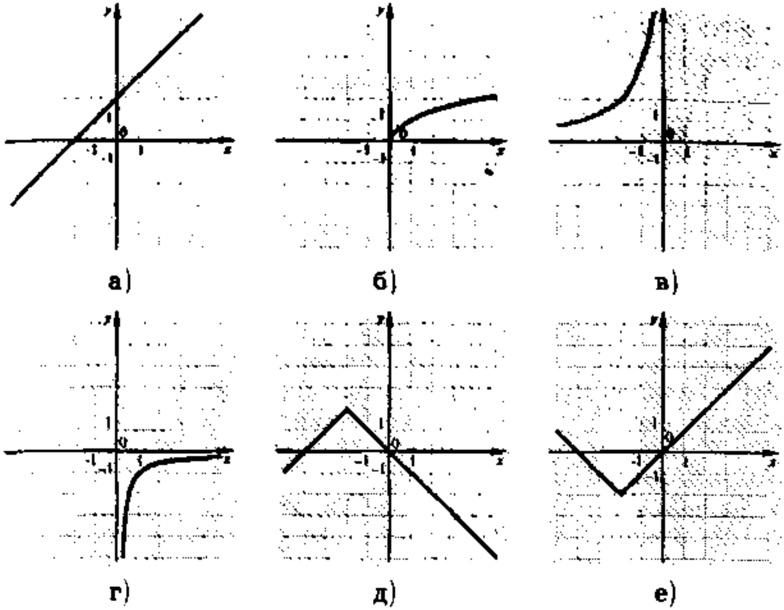
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	4	3	2	1	2	3	4	5

г)

№132. **Знайти область визначення функцій, зображених:**
а) на малюнку 18; б) на малюнку 19.



Мал 18

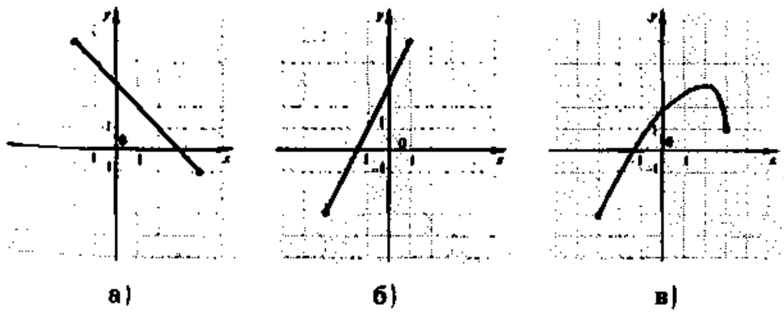


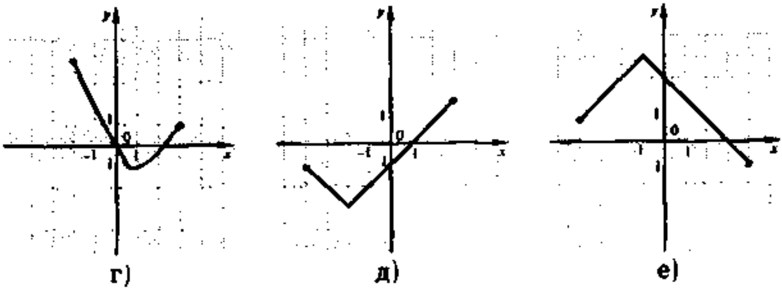
Мал. 19

№133. **За графіками функцій, зображених на малюнку 18, знайти значення кожної функції при значеннях аргументу −5; −3; 0; 3; 5.**

№134. **За графіками функцій, зображених на малюнку 18, знайти значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють −5; 1; 6.**

№135. **За графіками функцій, зображених на малюнку 20, знайти найбільше та найменше значення функції та відповідні їм значення аргументу.**





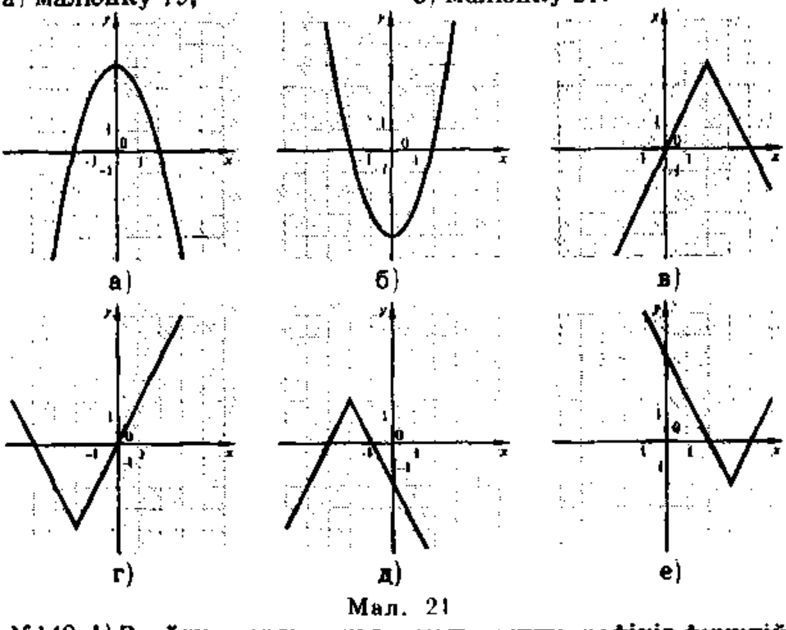
Мал. 20

№136. **Знайти множину значень функцій, зображених на:**
а) малюнку 18; **б) малюнку 19.**

№137. **Знайти нулі функцій, зображених на:**
а) малюнку 18; **б) малюнку 21.**

№138. **Знайти проміжки, на яких набувають додатних значень функції, зображені на:**
а) малюнку 19; **б) малюнку 21.**

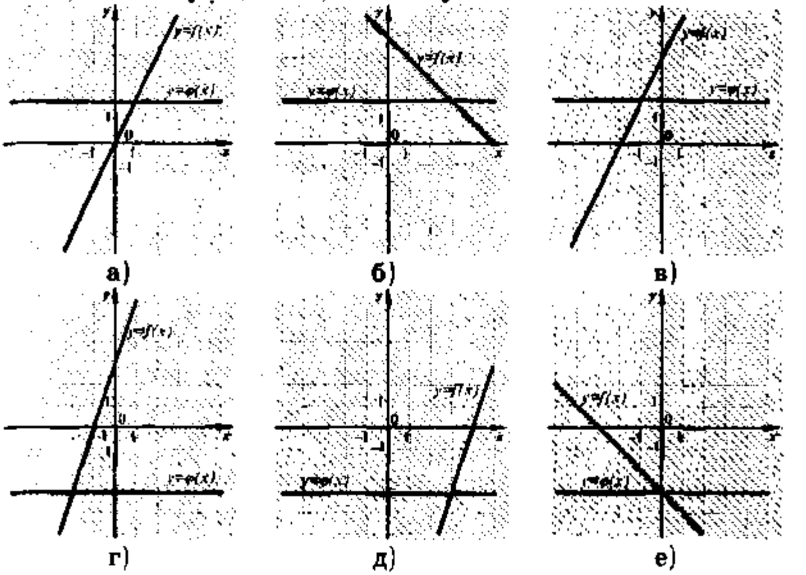
№139. **Знайти проміжки, на яких набувають від'ємних значень функції, зображені на:**
а) малюнку 19; **б) малюнку 21.**



Мал. 21

№140. **1) Знайти координати точок перетину графіків функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, зображених на:**
а) малюнку 22, **б) малюнку 23.**

2) Знайти значення аргументу x, при яких набувають однакових значень функції $y=f(x)$ і $y=(x)$, графіки яких зображено на: а) малюнку 22; б) малюнку 23.



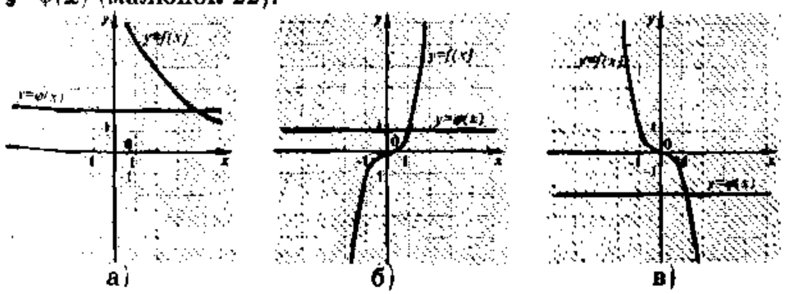
Мал. 22

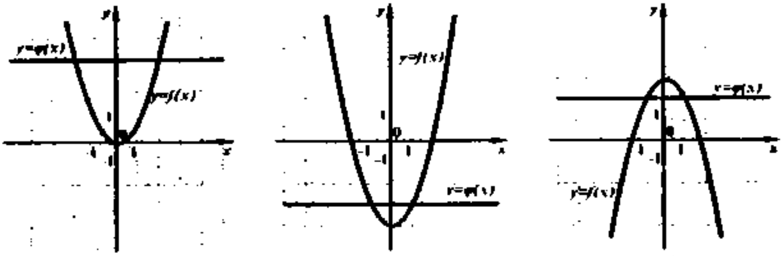
№141. а) Знайти значення аргументу x, при яких графік функції $y=f(x)$ розміщений в системі координат над графіком функції $y=\varphi(x)$ (малюнок 22).

б) Знайти значення аргументу x, при яких графік функції $y=f(x)$ розміщений в системі координат під графіком функції $y=\varphi(x)$ (малюнок 23).

в) Знайти значення аргументу x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, більших від відповідних значень функції. $y=\varphi(x)$ (малюнок 23).

г) Знайти значення аргументу x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, менших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$ (малюнок 22).





г) д) е)

Мал. 23

№142. а) Графіку функції $y=6x$ належать точки $A(-1;a)$, $B(4;b)$, $C\left(\frac{1}{2};c\right)$. Знайти a, b і c.

б) Графік функції $y=x$ проходить через точки $A(-2;a)$, $B(-1;b)$, $C(2;c)$. Знайти a, b і c.

в) Які з точок $A(-3;-11)$, $B(2;8)$, $C(7;9)$ належать графіку функції $y=3x-2$?

г) Через які з точок $A(-1;9)$, $B(5;0)$, $C(-1;-1)$ проходить графік функції $y=-4x+5$?

№143. Дано функцію:

а) $y=5x+3$. Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої дорівнює 0.

б) $y=x^2+5$. Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої відповідає значенню аргументу $x=0$.

в) $y=x^2+x+3$. Знайти координати точки перетину графіка функції з віссю ординат.

г) $y=-7x+2$. Знайти координати спільної точки графіка функції та осі y.

№144. а) Графіку функції $y=2x$ належить точка $A(a;10)$. Знайти значення a.

б) Графік функції $y=-5x$ проходить через точку $A(a;-10)$. Знайти значення a.

в) Графіку функції $y=-3x+4$ належить точка $A(a;-5)$. Знайти значення a.

г) Графік функції $y=\dfrac{x}{4}-3$ проходить через точку $A(a;1)$. Знайти значення a.

№145. Знайти обчисленням координати точки перетину графіків функцій:

а) $f(x)=3x+4$ і $\varphi(x)=13$; б) $f(x)=2x-1$ і $\varphi(x)=x-17$.

№146. а) Знайти обчисленням значення змінної x, при яких графік функції $y=2x+3$ розміщений в системі координат вище графіка функції $y=5$;

б) Знайти обчисленням значення змінної x, при яких графік функції $y=3x-4$ розміщений в системі координат вище графіка функції $y=x+10$.

№147. 1) Довести, що графік функції $y=ax+b$ проходить через точку $(1; a+b)$.

2) Довести, що графік функції $y=ax^2$ проходить через точку $(1; a)$.

3) Довести, що графік функції $y=ax^2$ проходить через точку $(-1; a)$.

4) Довести, що графік функції $y=ax^2+bx+c$ проходить через точку $(1; a+b+c)$.

№148. Довести, що функції а) – г) перетинають вісь y у точці з ординатою c:

а) $f(x)=ax+c$; б) $f(x)=ax^2+bx+c$;

в) $f(x)=ax^3+bx^2+dx+c$; г) $f(x)=ax^4+bx^3+dx^2+c$.

№149. а) На графіку (малюнок 24) зображено залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу t (у годинах).

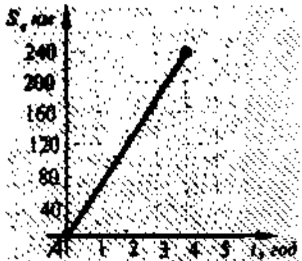
За графіком пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t і дати відповіді на питання:

1) Яка область визначення функції $S=S(t)$?

2) Яка множина значень цієї функції?

3) На якій відстані від пункту A знаходився мотоцикліст через 1 год; 1,5 год і 2 год від початку руху?

4) Через скільки годин від початку руху мотоцикліст знаходився від пункту А на відстані 100 км; 200 км; 220 км?



Мал. 24

б) Зображений на малюнку 25 графік є графіком залежності відстані велосипедиста S до пункту A від часу руху t.

За графіком знайти:

1) область визначення функції $S=S(t)$;

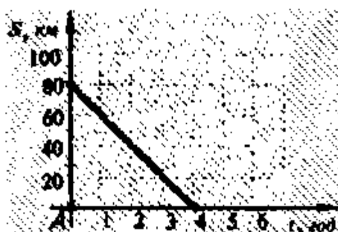
2) множину значень цієї функції;

3) на якій відстані від пункту A знаходився велосипедист в початковий момент часу; через 2 год.; 3 год. від початку руху;

4) через скільки годин від початку руху велосипедист був від пункту A на відстані 60 км; 40 км;

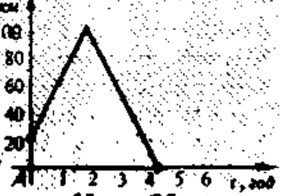
5) через скільки годин від початку руху велосипедист приїхав у пункт A;

6) наближався чи віддалявся велосипедист до пункту A із збільшенням часу руху.



Мал. 25

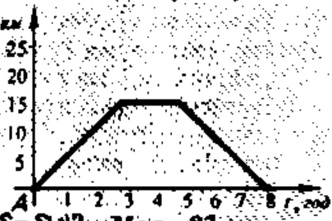
в) На графіку (малюнок 26) зображено залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах). За графіком пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t і дати відповіді на питання:



Мал. 26

1) Яка область визначення функції $S=S(t)$?
2) Яка множина значень цієї функції?
3) Де знаходився мотоцикліст в початковий момент руху? через 4,5 год від початку руху?
4) На якій відстані від пункту A знаходився мотоцикліст через 1 год; 4 год від початку руху?
5) Через скільки годин від початку руху мотоцикліст був на відстані 100 км; 40 км від пункту A.
6) В який проміжок часу мотоцикліст віддалявся від пункту A, а в який проміжок часу він наближався до пункту A?

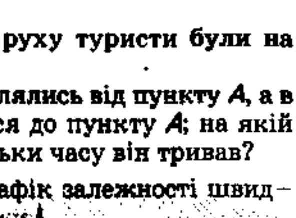
г) На графіку (малюнок 27) зображено залежність відстані S (у кілометрах) туристів до пункту A від часу руху t (у годинах). За графіком пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t і дати відповіді на питання:



Мал. 27

1) Яка область визначення функції $S=S(t)$?
2) Яка множина значень цієї функції?
3) Скільки часу потратив турист на похід?
4) На якій відстані від пункту A знаходились туристи через 1 год; 3 год?
5) Через скільки годин від початку руху туристи були на відстані 10 км від пункту A?
6) В який проміжок часу туристи віддалялись від пункту A, а в який проміжок часу вони наближалися до пункту A; на якій відстані туристи зробили привал і скільки часу він тривав?

№150. а) На малюнку 28 зображено графік залежності швидкості v (у метрах) руху матеріального тіла від часу t (у хвилинах). За графіком функції пояснити, чому дана залежність змінної v від t є функцією і дати відповіді на питання:



Мал. 28

1) Яка область визначення заданої функції $v=v(t)$?
2) Яка множина значень цієї функції?
3) Яких значень набуває функція при значеннях аргументу, що дорівнюють: 2; 4; 5,5?

4) При яких значеннях аргументу значення функції дорівнюють: 10; 25?

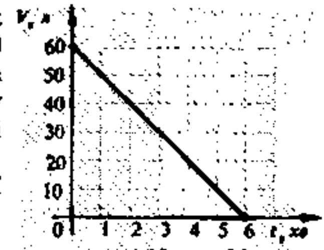
5) В який проміжок часу швидкість тіла зменшувалась; залишалась постійною?

б) На малюнку 29 зображено графік залежності об'єму води V (у літрах) у баці від часу t (у хвилинах). За графіком функції пояснити, чому змінна V є функцією від змінної t і дати відповіді на питання:

1) Яка область визначення функції $V=V(t)$?

2) Яка множина значень цієї функції?

3) Скільки літрів води було в баці в початковий момент часу?

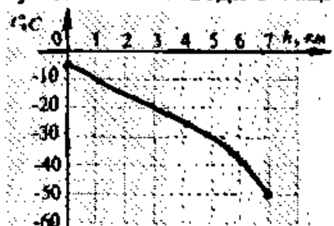


Мал. 29

4) Через скільки хвилин бак став порожнім?

5) Через скільки хвилин від початку виливання води в баці стало 50 л; 25 л?

в) На малюнку 30 зображено графік залежності температури повітря t (t°, C) від висоти h (у кілометрах) над рівнем моря. За графіком функції пояснити, чому змінна t є функцією від змінної h і дати відповіді на питання:



Мал. 30

1) На якій множині задана функція $t=t(h)$?

2) Яка множина значень цієї функції?

3) Збільшується чи зменшується значення температури при збільшенні висоти?

4) Яка температура повітря над рівнем моря; на висоті 2000 м; 5000 м від рівня моря?

5) На якій висоті над рівнем моря температура дорівнює -20°C; -40°C.

г) На малюнку 31 зображено графік залежності маси m (у кілограмах) посудини від об'єму V (у літрах) рідини в ній. За графіком знайти:

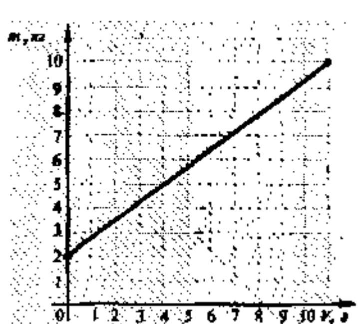
1) масу порожньої посудини;

2) масу посудини з 4 л; 7 л; 10 л рідини;

3) об'єм рідини, якщо маса посудини 6 кг; 3 кг;

4) область визначення функції $m=m(V)$;

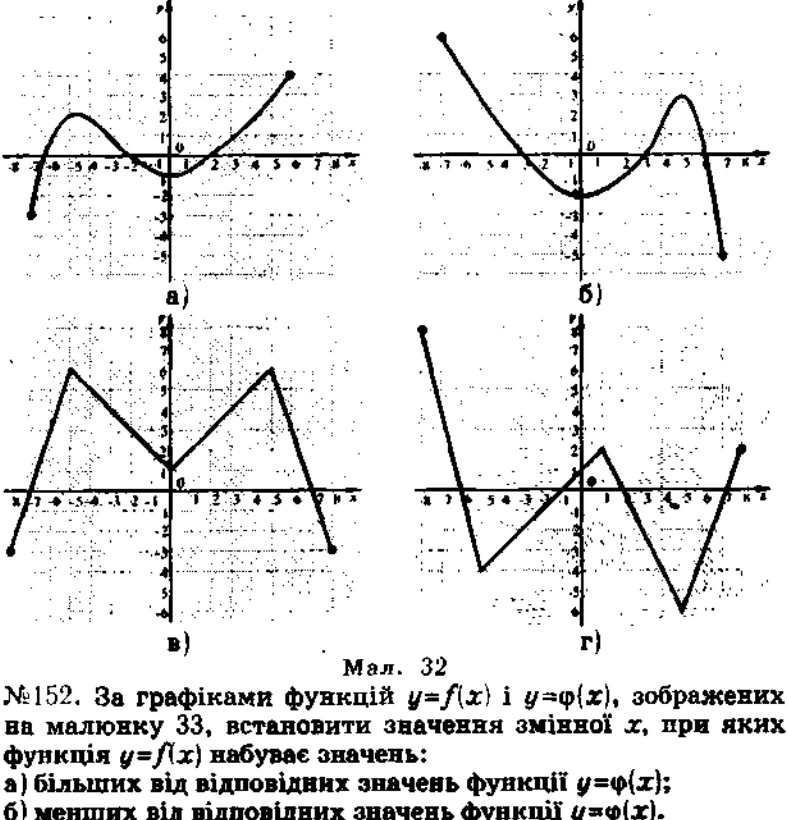
5) множину значень цієї функції.



Мал. 31

III

№151. **За графіками функцій, зображених на малюнку 32, для кожної з функцій знайти: а) область визначення; б)множину значень; в) нулі функції; г) проміжки, на яких функція набуває додатних значень.**

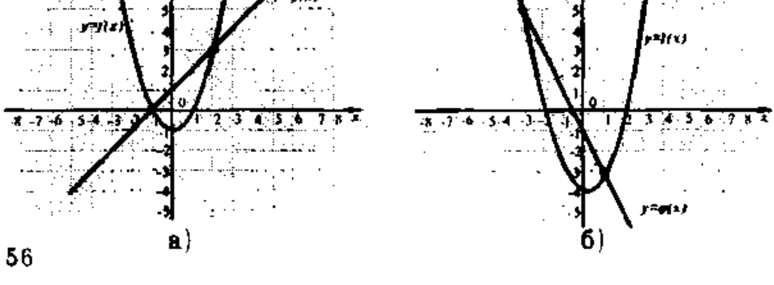


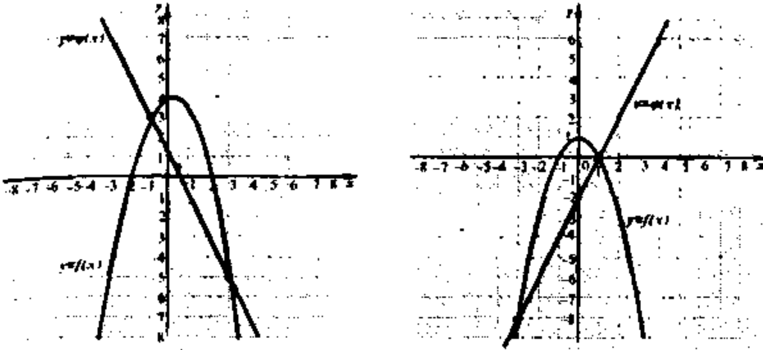
Мал. 32

№152. **За графіками функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, зображених на малюнку 33, встановити значення змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень:**

а) більших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$;

б) менших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$.





в) г)

Мал. 33

№153. а) **Довести, що графіки функцій $y=2x$, $y=-x+6$ і $y=\frac{1}{2}x+3$ перетинаються в одній точці.**

б) Знайти значення змінної x, при яких функції $y=-x+1$, $y=-x+3$ і $y=-2x+4$ набувають однакових значень.

в) Довести, що не існує точки, через яку проходить кожний з графіків функцій $y=2x$, $y=x+1$ і $y=-x+4$.

г) Довести, що не існує значення змінної x, при якому функції $y=x+4$, $y=-x$ і $y=-2x+1$ набувають однакового значення.

№154. **Знайти обчисленням координати точок графіка функції, у яких абсциса та ордината рівні:**

а) $y=2x+1$; б) $y=3x+4$; в) $y=-4x+3$; г) $y=-5x-12$.

№155. **Знайти обчисленням координати точок графіка функції, у яких абсциса і ордината протилежні числа:**

а) $y=2x+6$; б) $y=x+3$; в) $y=-2x+5$; г) $y=-3x+8$.

№156. **Знайти обчисленням координати точок графіка функції $y=x+3$, що знаходяться від осі ординат на відстані, що дорівнює:** а) 4; б) 5; в) 10; г) 12.

№157. Знайти обчисленням координати точок графіка функції $y=4x$, що знаходяться від осі абсцис на відстані, що дорівнює: а) 4; б) 12; в) 24; г) 30.

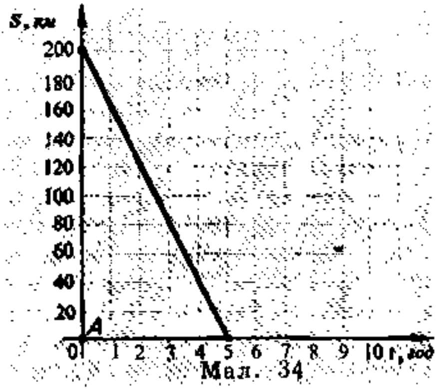
№158. а) **У бак, в якому 50 л води, а місткість 250 л, починають доливати воду, щохвилини по 10 л. Задати формулою залежність об'єму води V (в літрах) у баці від часу заповнення t (у хвилинах). Пояснити чому змінна V є функцією від змінної t. Знайти множину значень і область визначення цієї функції, що відповідають умові задачі.**

б) З пункту B, що знаходиться на відстані 30 км, від пункту A, в напрямі протилежному до пункту A виїхав мотоцикліст. Задати формулою залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах), якщо він їхав з швидкістю 50км/год і всього проїхав 200 км. Пояснити, чому змінна S є функцією від t. Знайти множину значень і область визначення цієї функції, що відповідають умові задачі.

№159. а) З пункту A в пункт B, відстань між якими 180 км, виїхав мотоцикліст із швидкістю 45 км/год. Задати формулою залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту B від часу руху t (у годинах). Пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t. Знайти множину значень і область визначення цієї функції, що відповідають умові задачі.

б) З баку, в якому 200л води, щохвилини виливають 10 л води. Задати формулою залежність об'єму V (у літрах) води у баці від часу t (у хвилинах). Пояснити, чому змінна V є функцією від змінної t. Знайти множину значень і область визначення цієї функції, що відповідають умові задачі.

№160. а) З пункту B в пункт A, відстань між якими 200 км, виїхав мотоцикліст. На малюнку 34 зображено залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах). Пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t. За графіком функції дати відповіді на питання:



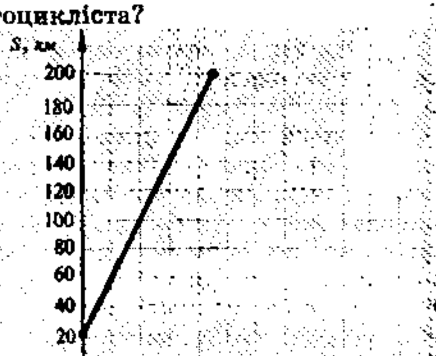
Мал. 34

1) Яку відстань проїхав мотоцикліст за перші дві години руху; за перші чотири години руху?

2) За скільки часу мотоцикліст проїхав перші 40 км; 140 км?

3) Яка швидкість руху мотоцикліста?

б) З пункту B у напрямі, протилежному до пункту A, виїхав мотоцикліст. Графік залежності відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах) зображено на малюнку 35. Пояснити, чому змінна S є функцією від змінної t. За графіком функції дати відповіді на питання:



Мал. 35

1) Яка відстань між пунктами *A* і *B*?

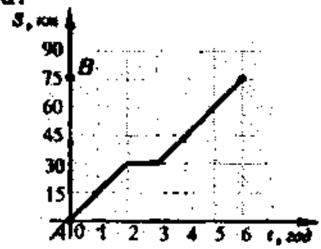
2) На якій відстані від пункту *B* знаходиться мотоцикліст через перші 2 год руху; 3,5 год?

3) Яку відстань залишилось проїхати мотоциклісту до кінцевого пункту через 3 години після виїзду з пункту *B*?

4) Через скільки годин після виїзду з пункту *B* мотоцикліст знаходився від нього на відстані 60 км; 80 км?

5) Яка швидкість руху мотоцикліста?

№161. а) З пункту *A* в пункт *B*, відстань між якими 75 км, виїхав велосипедист. На малюнку 36 зображено залежність відстані велосипедиста *S* (у кілометрах) від часу *t* (у годинах) з моменту виїзду із пункту *A*.



Мал. 36

Пояснити, чому змінна *S* є функцією від змінної *t*. За графіком функції дати відповіді на питання:

1) Скільки часу відпочивав велосипедист під час поїздки?

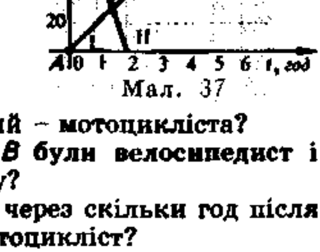
2) Яку відстань залишилось проїхати велосипедисту після відпочинку?

3) Якою буде відстань до пункту *B* через дві години після початку руху велосипедиста?

4) З якою швидкістю рухався велосипедист у перші дві години поїздки?

5) Яка середня швидкість руху велосипедиста під час поїздки?

б) З пункту *A* у пункт *B* виїхав велосипедист. Одночасно з ним з пункту *B* у пункт *A* виїхав мотоцикліст. Графіки залежності відстані *S* (у кілометрах) велосипедиста і мотоцикліста до пункту *A* від часу *t* (у годинах) зображені на малюнку 37. За малюнком дати відповіді на питання:



Мал. 37

1) Який з графіків (I чи II) є графіком руху велосипедиста, а який – мотоцикліста?

2) На якій відстані від пункту *B* були велосипедист і мотоцикліст через 1 год після виїзду?

3) На якій відстані від пункту *A* і через скільки год після виїзду зустрілись велосипедист і мотоцикліст?

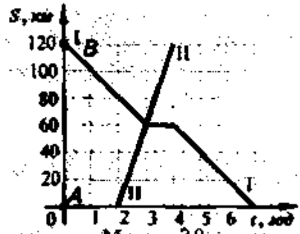
4) Скільки часу був після зустрічі в дорозі велосипедист; мотоцикліст?

5) Скільки часу відпочивав велосипедист і яку відстань він проїхав після відпочинку?

6) Яка середня швидкість руху велосипедиста; мотоцикліста?

IV

№162. а) З пунктів A і B назустріч один одному неодночасно виїхали велосипедист і мотоцикліст. На графіках I і II (малюнок 38) показана залежність відстані кожного з них до пункту A від часу t (у годинах), що минув з моменту виїзду першого з них. Дати відповіді на питання:



Мал. 38

1) Який з графіків (I чи II) є графіком руху велосипедиста, а який – мотоцикліста?

2) В якому напрямі рухався кожний з них (від A до B чи навпаки)?

3) Хто виїхав раніше і на скільки годин?

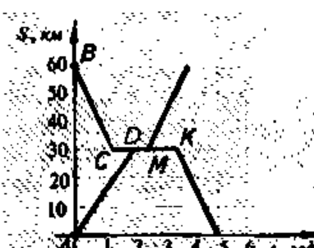
4) Якою була середня швидкість руху велосипедиста й мотоцикліста?

5) На якій відстані був кожний з них від пункту B через годину після свого виїзду?

6) Скільки часу був кожний із них у дорозі після зустрічі?

7) Яку відстань проїхав велосипедист після зустрічі з мотоциклістом і за який час?

б) З пункту A до пункту B по прямолінійному шосе виїхав перший велосипедист. Одночасно з пункту B до пункту A виїхав другий велосипедист. На малюнку 39 зображено залежності зміни відстані S (у кілометрах) велосипедистів до пункту A від часу руху t (у годинах). Дати відповіді на питання:



Мал. 39

1) Яка ламана є графіком руху першого велосипедиста, а яка – другого?

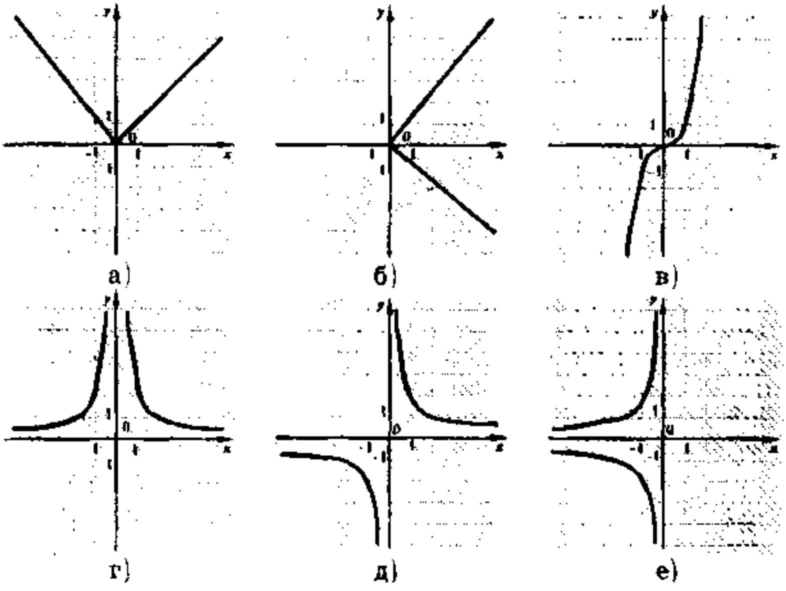
2) Який відрізок на малюнку відповідає траєкторії руху велосипедистів?

3) Через скільки годин від початку руху був у пункті B перший велосипедист; з якою швидкістю він їхав до зупинки, а з якою – після зупинки; якою була середня швидкість його руху?

№163. а) З пункту A до пункту B виїхав мотоцикліст. Перші дві години він їхав зі швидкістю 50 км/год, а наступні три години – зі швидкістю 60 км/год. Задати формулою, що складається з двох виразів, залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу t (у годинах) з моменту виїзду.

б) З пункту A до пункту B виїхав велосипедист. Перші дві години він їхав зі швидкістю 30 км/год, а після години відпочинку наступні три години він їхав зі швидкістю 20 км/год. Задати формулою, що складається з трьох виразів, залежність відстані S (у кілометрах) велосипедиста до пункту A від часу t (у годинах) з моменту виїзду.

№164. а) На малюнку 40 зображено графіки. Які з даних графіків задають змінну x як функцію від змінної y? Відповідь пояснити.



Мал. 40

б) Для графіків, які задають на малюнку 41 x як функцію від змінної y, знайти область визначення і множину значень функції x.

№165. а) Дати означення графіка функції, якщо змінну x розглядати як функцію від змінної y.

б) Пояснити, чому в системі координат вісь ординат є графіком функції x від незалежної змінної y.

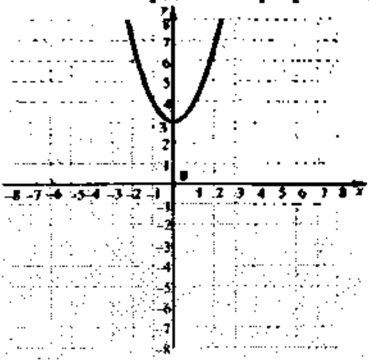
в) Пояснити, чому в системі координат вісь абсцис не є графіком функції x від змінної y.

№166. а) На малюнку 41 зображено графік функції $y=f(x)$. Накреслити графік функції, яка

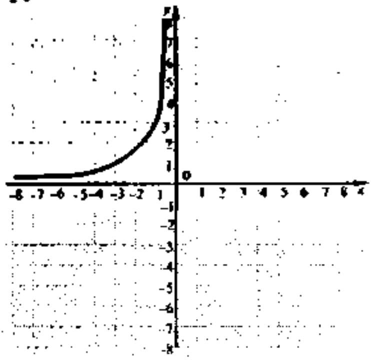
Мал. 41

при тих самих значеннях аргументу набуває протилежних значень до значень функції $y=f(x)$.

б) На малюнку 42 зображено графік функції $y=f(x)$. Побудувати графік функції $y=-f(x)$. Як розміщені в одній системі координат графіки цих функцій?



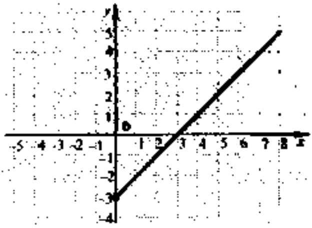
Мал. 42



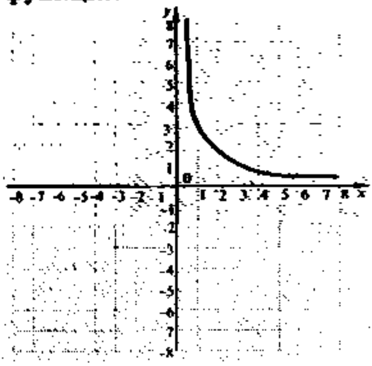
Мал. 43

№167. **а) На малюнку 44 зображено графік функції $y=f(x)$. Накреслити графік функції, яка при протилежних значеннях аргументу набуває з даною функцією однакових значень.**

б) На малюнку 44 зображено графік функції $y=f(x)$. Побудувати графік функції $y=f(-x)$. Як розміщені в одній системі координат графіки цих функцій?



Мал. 44



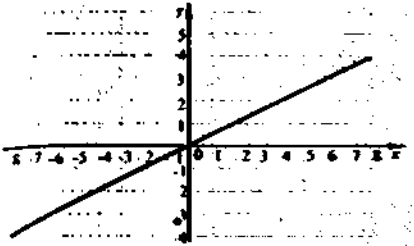
Мал. 45

в) На малюнку 46 зображено графік функції $y=h(x)$. Побудувати графік функції $y=-h(-x)$. Як розміщені в одній системі координат графіки цих функцій?

№168. а) Довести, що графіки функцій $y=f(x)$ і $y=-f(x)$ симетричні відносно осі x.

б) Довести, що графіки функцій $y=f(x)$ і $y=f(-x)$ симетричні відносно осі y.

№169. **а) На малюнку 46 зображено графік функції $y=f(x)$. Накреслити графік функції $y=f(x)+2$.**

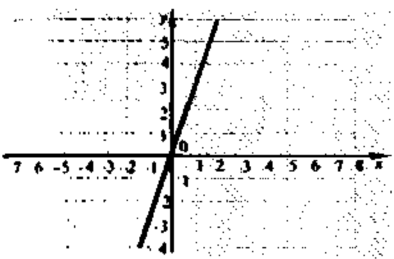


Мал. 46

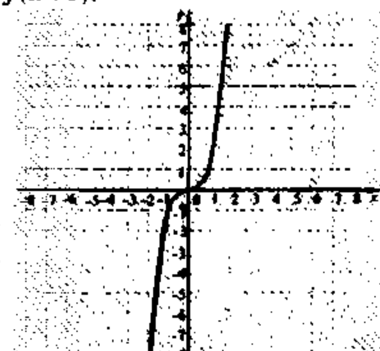
Мал. 47

б) **На малюнку 47 зображено графік функції $y=h(x)$. Накреслити графік функції $y=h(x)-3$.**

№170. **а) На малюнку 48 зображено графік функції $y=f(x)$. Накреслити графік функції $y=f(x+3)$.**



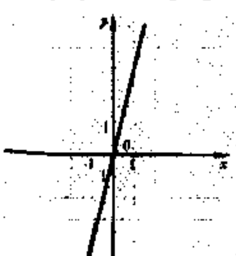
Мал. 48



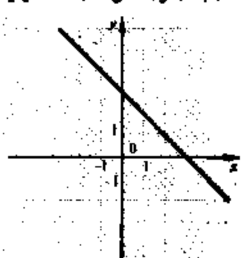
Мал. 49

б) На малюнку 50 зображено графік функції $y=h(x)$. Накреслити графік функції $y=h(x-4)$.

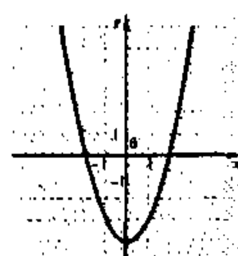
№171. **На малюнку 50 зображено графіки функції $y=f(x)$. Побудувати графіки функції $y=|f(x)|$.**



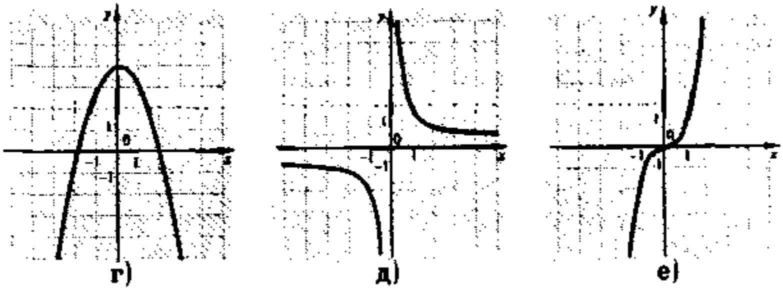
а)



б)

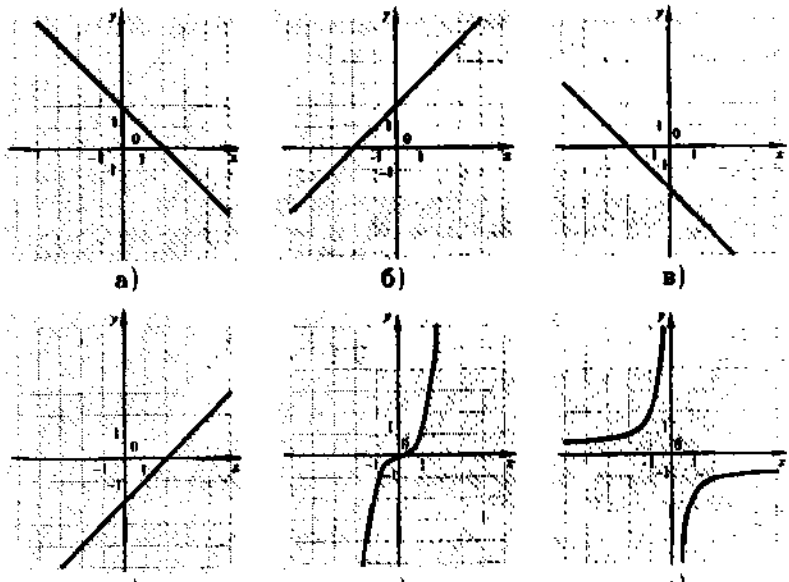


в)



Мал. 50

№172. **На малюнку 51 зображено графіки функції $y=f(x)$. Побудувати графіки функції $y=f(|x|)$.**



Мал. 51

Т 3. Функція: зростання і спадання, парність і непарність

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

І

Функція **зростає** на проміжку області визначення, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Найбільші з проміжків області визначення, на яких функція зростає, називають **проміжками зростання** функції.

Функція називається **зростаючою**, якщо вона зростає на всій області визначення.

№173. **Функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і зростає на проміжку $[0;\ \infty)$. Яке з чисел більше:**
а) $\varphi(15)$ чи $\varphi(10)$; б) $\varphi(15)$ чи $\varphi(17)$; в) $\varphi(3{,}4)$ чи $\varphi(2{,}4)$;
г) $\varphi(3{,}4)$ чи $\varphi(5{,}4)$; д) $\varphi\left(\frac{2}{5}\right)$ чи $\varphi\left(\frac{3}{5}\right)$; е) $\varphi\left(\frac{2}{5}\right)$ чи $\varphi\left(\frac{1}{5}\right)$?

№174. **Функція $y=f(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і є зростаючою. x_1, x_2, x_3, x_4 – дійсні числа такі, що $x_1>x_2>x_3>x_4$. Порівняти:**
а) $f(x_1)$ і $f(x_2)$; б) $f(x_1)$ і $f(x_4)$; в) $f(x_2)$ і $f(x_3)$;
г) $f(x_4)$ і $f(x_2)$; д) $f(x_4)$ і $f(x_3)$; е) $f(x_3)$ і $f(x_1)$;

Функція **спадає** на проміжку області визначення, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Найбільші з проміжків області визначення, на яких функція спадає, називають **проміжками спадання** функції.

Функція називається **спадною**, якщо вона спадає на всій області визначення.

Проміжки зростання чи спадання називають **проміжками монотонності**.

№175. **Функція $y=f(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і спадає на проміжку $[0;\ \infty)$. Які з тверджень правильні?**
а) $f(10)>f(5)$; б) $f(10)$ і $f(13)$; в) $f(7)$ і $f(14)$;
г) $f(7)$ і $f(0)$; д) $f(6{,}7)$ і $f(8{,}7)$; е) $f(6{,}7)$ і $f(4{,}7)$;

№176. **Функція $y=h(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і є спадною. Які з чисел більші:**
а) $h(23)>h(25)$; б) $h(23)$ і $h(21)$; в) $h(-5)$ і $h(-1)$;
г) $h(-5)>h(0)$; д) $h(-5)$ і $h(-10)$; е) $h(-5)$ і $h(5)$;

№177. **Функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і є спадною. x_1, x_2, x_3, x_4 – дійсні числа такі, що $x_1>x_2>x_3>x_4$ Порівняти:**
а) $h(x_1)$ і $h(x_3)$; б) $h(x_1)$ і $h(x_4)$; в) $h(x_2)$ і $h(x_1)$;
г) $h(x_2)$ і $h(x_3)$; д) $h(x_3)$ і $h(x_4)$; е) $h(x_4)$ і $h(x_2)$;

№178. **Доповнити записи до правильних тверджень:**
а) Якщо функція зростаюча, то більшому значенню аргументу відповідає ____________________________.
б) Якщо функція зростаюча, то меншому значенню аргументу відповідає ____________________________.
в) Якщо функція спадна, то більшому значенню аргументу відповідає ____________________________.
г) Якщо функція спадна, то меншому значенню аргументу відповідає ____________________________.

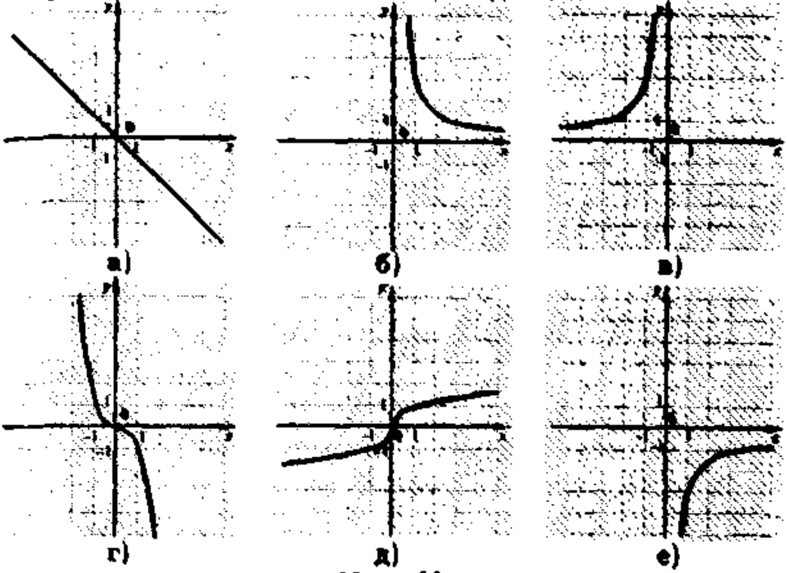
№179. **а) Дано функцію $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[0;\ 5]$ і зростає на ньому.**
Порівняти числа: $f(0)$ і $f(5)$; $f(4)$ і $f(1)$. Чи можна стверджувати, що $f(0)<f(6)$?
б) Дано функцію $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[1;\ 4]$ і спадає на ньому. Порівняти числа: $f(1)$ і $f(4)$; $f(3)$ і $f(2)$. Чи можна стверджувати, що $f(4)<f(10)$?
в) Дано функцію $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[0;\ 10]$, при цьому на відрізку $[0;\ 5]$ вона зростає, а на відрізку $[5;\ 10]$ – спадає. Порівняти: $f(5)$ і $f(0)$; $f(10)$ і $f(5)$; $f(4)$ і $f(1)$; $f(9)$ і $f(6)$.
г) Дано функцію $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[0;\ 10]$, при цьому на відрізку $[0;\ 5]$ вона спадає, а на відрізку $[5;\ 10]$ – зростає. Порівняти: $f(5)$ і $f(0)$; $f(10)$ і $f(5)$; $f(4)$ і $f(1)$; $f(9)$ і $f(6)$.

Розпізнавання за графіком зростаючих і спадних функцій

Якщо зі збільшенням абсцис точок графіка ординати їх збільшуються, то функція зростаюча, тобто при русі зліва направо по осі x точки графіка «піднімаються».

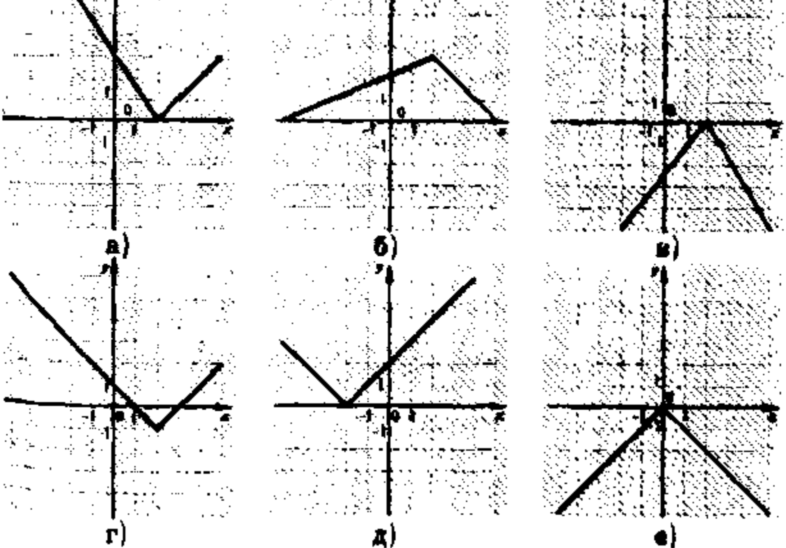
Якщо зі збільшенням абсцис точок графіка ординати їх зменшуються, то функція спадна, тобто при русі зліва направо по осі x точки графіка «опускаються».

№180. **Які з функцій, зображених на малюнку 52, є:**
а) зростаючими; б) спадними?



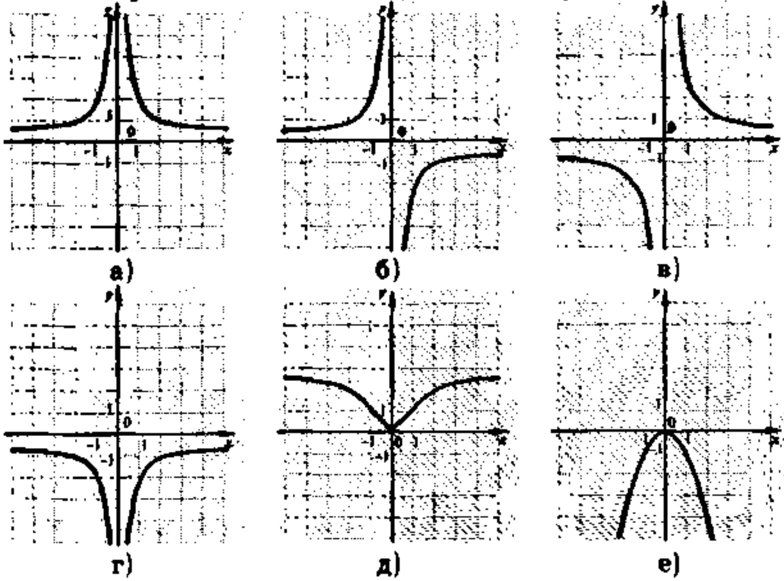
Мал. 52

№181. **За графіками функцій, зображених на малюнку 53, вказати проміжки зростання і спадання функцій.**



Мал. 53

№182. **Які з функцій, зображених на малюнку 54, мають:**
а) два проміжки зростання;
б) два проміжки спадання;
в) проміжок зростання і проміжок спадання?
Записати проміжки монотонності (спадання чи зростання) функцій.



Мал. 54

№183. **Накреслити систему координат і зобреазити графік функції:**
а) зростаючої з областю визначення $(-\infty;\infty)$ і множиною значень $(0;\infty)$;
б) спадної з областю визначення $(-\infty;\infty)$ і множиною значень $(0;\infty)$;
в) зростаючої з областю визначення $(-\infty;\infty)$ і множиною значень $(-\infty;0)$;
г) спадної з областю визначення $(-\infty;\infty)$ і множиною значень $(-\infty;0)$;
д) спадної з областю визначення $(-\infty;0)$ і множиною значень $(0;\infty)$;
е) спадної з областю визначення $[0;\infty)$ і множиною значень $(-\infty;0]$.

№184. 1) Графік зростаючої функції проходить через точки $A(-4;a)$, $B(7;b)$, $C(3;c)$. Записати дані точки в порядку зростання їх: а) абсцис; б) ординат.
2) Графік спадної функції проходить через точки $A(10;a)$, $B(1;b)$, $C(4;c)$. Записати дані точки в порядку зростання: а) абсцис; б) ординат.

Доведення зростання (спадання) функції

Щоб довести, що функція $y = f(x)$ є зростаючою (або зростає на проміжку області визначення), треба довести, що для довільних x_1 і x_2 з області визначення функції (проміжку), таких, що $x_2 > x_1$, (тобто $x_2 - x_1 > 0$), виконується нерівність $y_2 > y_1$, (тобто $y_2 - y_1 > 0$).

Щоб довести що функція $y = f(x)$ є спадною (або спадає на проміжку області визначення), треба довести, що для довільних x_1 і x_2 з області визначення функції (проміжку), таких, що $x_2 > x_1$, (тобто $x_2 - x_1 > 0$), виконується нерівність $y_2 < y_1$, (тобто $y_2 - y_1 < 0$).

№185. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.**

а) **Дано функцію $f(x) = 10x$.**

1. Природною областю визначення функції є проміжок ________.

2. Нехай x_1 і x_2 – довільні числа з області визначення функції, такі, що $x_2 > x_1$.

$f(x_2) = 10x_2$, $f(x_1) =$ ________ ,

$f(x_2) - f(x_1) = 10x_2 - 10x_1 = 10($________$)$.

3. Так як $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$, тобто $x_2 - x_1$ – додатне число. Значить, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ як добуток двох додатних чисел 10 і $x_2 - x_1$.

Отже, $f(x_2) >$ ________ і функція $f(x) = 10x$ є ______________ на області визначення.

б) **Дано функцію $f(x) = -5x$.**

1. Природною областю визначення функції є проміжок ________.

2. Нехай x_1 і x_2 – довільні числа з області визначення функції, такі, що $x_2 > x_1$, $f(x_2) =$ ______ , $f(x_1) = -5x_1$,

$f(x_2) - f(x_1) =$ ________ $= -5(x_2 - x_1)$.

3. Так як $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$, тобто $x_2 - x_1$ – додатне число. $f(x_2) - f(x_1) = -5(x_2 - x_1)$ є від'ємним числом, як добуток від'ємного і ________. Отже, $f(x_2) <$ ________ і функція $f(x) = -5x$ є ________________ на області визначення.

№186. **а) Довести, що функція $y=4x$ зростаюча.**

б) Довести, що функція $y= -10x$ спадна.

Якщо функція $y = f(x)$ зростаюча (спадна), то кожного свого значення на області визначення воно досягає тільки при одному значенні аргументу.

Якщо функція $y = f(x)$ зростаюча, то для будь-яких y_1 і y_2 з множини значень, таких, що $y_2 > y_1$, для відповідних їм значень аргументу x_1 і x_2 виконується нерівність $x_2 > x_1$.

Якщо функція $y = f(x)$ спадна, то для будь-яких y_1 і y_2 з множини значень, таких, що $y_2 > y_1$, для відповідних їм значень аргументу x_1 і x_2 виконується нерівність $x_2 < x_1$.

№187. **Чи правильними є твердження? Відповідь обгрунтувати.**

а) Якщо функція зростаюча, то точки її графіка з більшими ординатами мають і більші абсциси.

б) Якщо функція зростаюча, то будь-яка пряма, що перетинає її графік і перпендикулярна до осі ординат, має тільки одну спільну точку з графіком функції.

в) Якщо функція спадна, то точки її графіка з більшими ординатами мають і більші абсциси.

г) Якщо функція спадна, то будь-яка пряма, що перпендикулярна до осі ординат, має з графіком функції не більше як одну спільну точку.

№188. **1) Графіку зростаючої функції належать точки $A(a; 7)$, $B(b; -2)$ і $C(c; 9)$. Записати дані точки в порядку зростання їх:**

а) ординат; б) абсцис.

2) Графіку спадної функції належать точки $A(a; -2)$; $B(b; -8)$ і $C(c; 0)$. Записати дані точки в порядку спадання їх:

а) ординат; б) абсцис.

Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо для кожного значення аргументу функції протилежне йому число також належить області визначення і значення функції для протилежних значень аргументу рівні, тобто для будь-якого x_0 з області визначення функції $f(x_0) = f(-x_0)$.

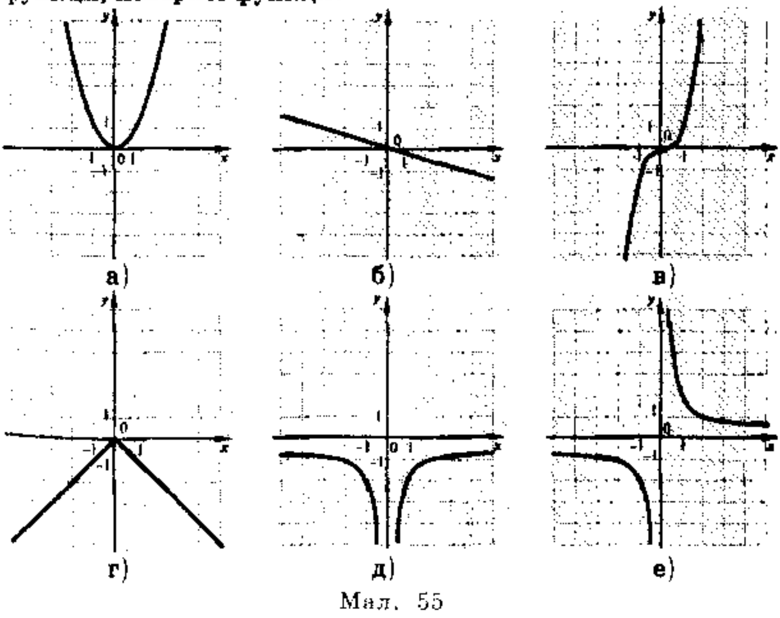
Для будь-якого x_0 з області визначення парної функції $y = f(x)$ її графіку належить точка $(-x_0;\ f(x_0))$, яка симетрична точці $(x_0;\ f(x_0))$ відносно осі ординат. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо для кожного значення аргументу функції протилежне йому число також належить області визначення і значення функції для протилежних значень аргументу — протилежні числа, тобто для будь-якого x_0 з області визначення функції $f(x_0) = -f(-x_0)$.

Для будь-якого x_0 з області визначення непарної функції $y = f(x)$ її графіку належить точка $(-x_0; -f(x_0))$, яка симетрична точці $(x_0; f(x_0))$ відносно початку координат. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

№189. 1) **Графіку парної функції належить точка $A(-3;4)$. Які з точок належать графіку функції:**
$B(-3;-4)$, $C(3;-4)$, $M(3;4)$?
2) **Графік парної функції проходить через точку $A(2;-7)$. Через які з точок проходить графік функції:**
$B(-2;7)$, $C(2;7)$, $M(-2;-7)$?
3) **Графіку непарної функції належить точка $A(-2;5)$. Які з точок належать графіку функції:**
$B(-2;-5)$, $C(2;5)$, $D(2;-5)$?
4) **Графік парної функції проходить через точку $A(-4;-1)$. Через які з точок проходить графік функції:**
$B(-4;1)$, $C(4;1)$, $M(4;-1)$?

№190. **Які з графіків на малюнку 55 є графіками парної функції; непарної функції?**



Мал. 55

Доведення парності функції

1. Встановити, чи є область визначення симетричною відносно нуля, тобто чи складають область визначення протилежні числа.

2. Довести, що для довільного x_0 з області визначення функції $f(x_0)=f(-x_0)$.

Доведення непарності функції

1. Встановити, чи є область визначення симетричною відносно нуля.

2. Довести, що для довільного x_0 з області визначення функції $f(x_0)=-f(-x_0)$.

№191. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.**

а) Дано функцію $f(x)=5x$.

1. Природною областю визначення функції є проміжок ________, який симетричний відносно ______________ .

2. $f(-x)=5(-x)=$________.

Так як $f(-x)=-f(x)$, то функція $f(x)=5x$ є ____________.

б) Дано функцію $f(x)=5x^2$.

1. Природною областю визначення функції є проміжок ________, який симетричний відносно ____________ .

2. $f(-x)=5(-x)^2=$________, бо квадрати протилежних чисел ____________ .

Так як $f(-x)=$________, то функція $f(x)=5x^2$ є ____________.

в) Дано функцію $f(x)=x^2+4$.

1. Природною областю визначення функції є проміжок ________, який ____________________ .

2. $f(-x)=(-x)^2+4=$________.

Так як $f(-x)=$________, то функція $y=f(x)$ є ________.

г) Дано функцію $f(x)=ax$, де $a\neq 0$.

1. Областю визначення функції є проміжок ________, який симетричний відносно ______________ .

2. $f(-x)=a$________$=$________.

Так як ____________, то функція $f(x)=ax$ є непарною.

№192. **1) Довести, що функція $y=13x$ є непарною.**

2) Довести, що функція $y=-10x$ є непарною.

3) Довести, що функція $y=4x^2$ є парною.

4) Довести, що функція $y=-3x^2$ є парною.

№193. **Доповнити записи до правильних тверджень:**

а) Якщо непарна функція при додатних значеннях аргументу набуває додатних значень, то при від'ємних значеннях аргументу вона набуває ______________________________.

б) Якщо непарна функція при від'ємних значеннях аргументу набуває від'ємних значень, то при додатних значеннях аргументу вона набуває ______________________________.

в) Якщо непарна функція при додатних значеннях аргументу набуває від'ємних значень, то її графік розташований в ____________________ .

г) Якщо непарна функція при від'ємних значеннях аргументу набуває від'ємних значень, то її графік знаходиться в____________________ .

д) Якщо пряма, паралельна осі y, перетинає графік непарної функції в точці з абсцисою x_0, то графік цієї функції перетинає і пряма, симетрична цій прямій відносно _______.

е) Якщо пряма, що проходить через початок координат, перетинає графік непарної функції у точці з абсцисою x_0, то вона перетинає графік цієї функції і у точці з абсцисою _______.

№194. Доповнити записи до правильних тверджень:

а) Якщо парна функція при додатних значеннях аргументу набуває додатних значень, то при від'ємних значеннях аргументу вона набуває ____________________

б) Якщо парна функція при додатних значеннях аргументу набуває від'ємних значень, то при від'ємних значеннях аргументу вона набуває ____________________

в) Якщо парна функція при додатних значеннях аргументу набуває від'ємних значень, то її графік розміщений у ____________________.

г) Якщо парна функція при від'ємних значеннях аргументу набуває додатних значень, то її графік розміщений у ____________________.

д) Якщо пряма, перпендикулярна осі y, перетинає графік парної функції в точці з абсцисою x_0, то вона перетинає цей графік і в точці з абсцисою ________.

е) Якщо пряма, паралельна осі y, перетинає графік парної функції, то і пряма, симетрична їй відносно осі ______, перетинає цей графік.

№195. а) Чи може парна функція бути спадною? Відповідь обґрунтувати.

б) Чи може зростаюча функція бути парною? Відповідь обґрунтувати.

в) Парна функція зростає на проміжку $[0; \infty)$. Якою вона є на проміжку $(-\infty; 0]$? Відповідь обґрунтувати.

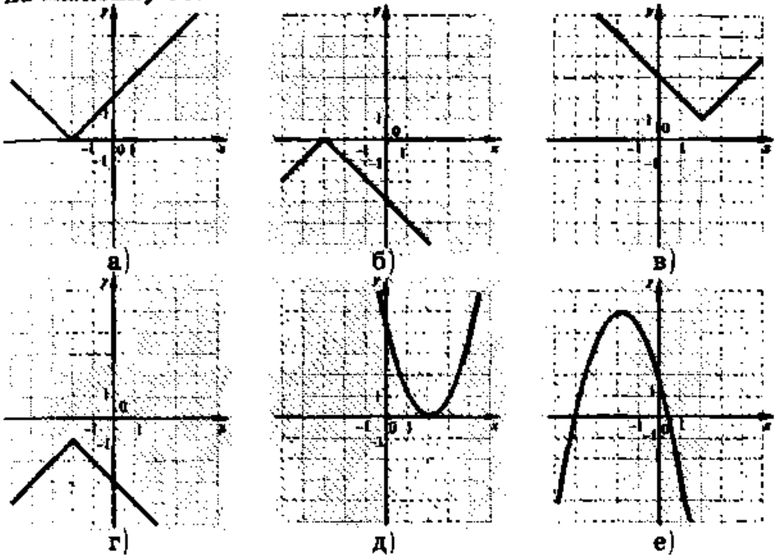
г) Непарна функція зростає на проміжку $[0; \infty)$. Якою вона є на проміжку $(-\infty; 0]$? Відповідь обґрунтувати.

№196. **Контрольні питання.**

1. Як називається функція, яка на всій області визначення при переході від менших значень аргументу до більших приймає більші значення?
2. В якому випадку кажуть, що функція зростає на проміжку з області визначення функції?
3. Як розпізнати за графіком зростаючу функцію?
4. Яка властивість зростаючої функції?
5. Як довести, що функція зростає на проміжку (або є зростаючою)?
6. Як називається функція, яка на всій області визначення при переході від менших значень аргументу до більших приймає менші значення?
7. В якому випадку кажуть, що функція спадає на проміжку з області визначення?
8. Як розпізнати за графіком спадну функцію?
9. Яка властивість спадної функції?
10. Як довести, що функція спадає на проміжку (або є спадною)?
11. Як називається функція, яка при зміні знаку аргументу не змінює свого значення?
12. Як називається функція, яка при зміні знаку аргументу змінює значення на протилежне?
13. Якій умові задовольняють області визначення парних і непарних функцій?
14. Чи може бути парною функція, визначена на множині всіх додатних дійсних чисел?
15. Як довести, що функція $y=f(x)$ є парною?
16. Як довести, що функція $y=\varphi(x)$ є непарною?

II

№197. а) **Знайти проміжки зростання функцій, зображених на малюнку 56.**



Мал. 56

б). **Знайти проміжки спадання функцій, зображених на малюнку 57.**

№198. а) **Функція $y=f(x)$ визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є зростаючою на ній. Порівняти значення функції: $f(2)$ і $f(5)$; $f(-10)$ і $f(-15)$; $f(10)$ і $f(-20)$.**

б) **Функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є спадною на ній. Порівняти значення функції: $\varphi(-5)$ і $\varphi(20)$; $\varphi(-2)$ і $\varphi(-5)$; $\varphi(-10)$ і $\varphi(1)$.**

в) **Функція $y=h(x)$ визначена на множині $(-\infty;\infty)$, при цьому на проміжку $(-\infty;0]$ вона спадає, а на проміжку $[0;\infty)$ – зростає. Порівняти значення функції: $h(-10)$ і $h(-5)$; $h(-1)$ і $h(-30)$; $h(20)$ і $h(6)$; $h(20)$ і $h(30)$.**

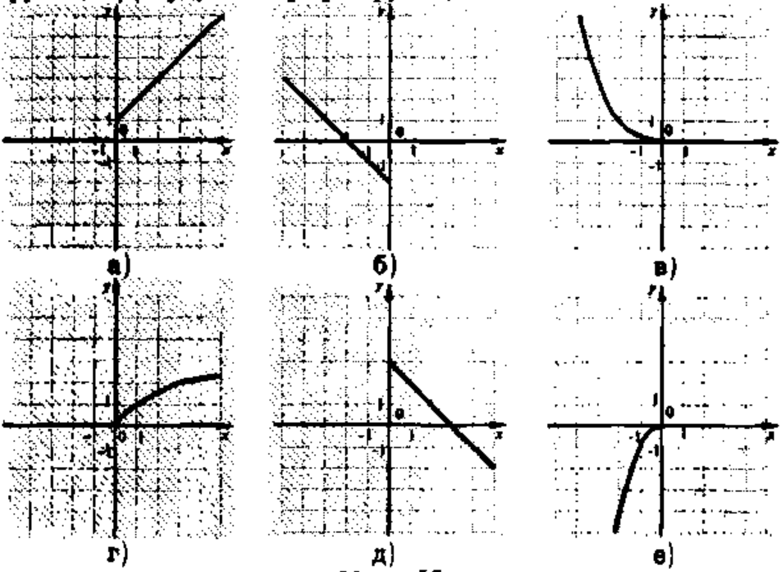
г) **Графіку функції, визначеної на множині $(-\infty;\infty)$ і зростаючої на ній, належать точки $A(4;a)$, $B(10;b)$ і $C(-2;c)$. Записати числа a, b і c у порядку збільшення.**

д) **Графіку функції, визначеної на множині $(-\infty;\infty)$ і спадної на цій множині, належать точки $A(-5;a)$, $B(-8;b)$ і $C(2;c)$. Записати числа а, b, с в порядку збільшення.**

№199. **Довести, що функція зростає на множині всіх дійсних чисел: а) $y=5x$; б) $y=0{,}2x$; в) $y=4x+1$; г) $y=ax$, де $a>0$.**

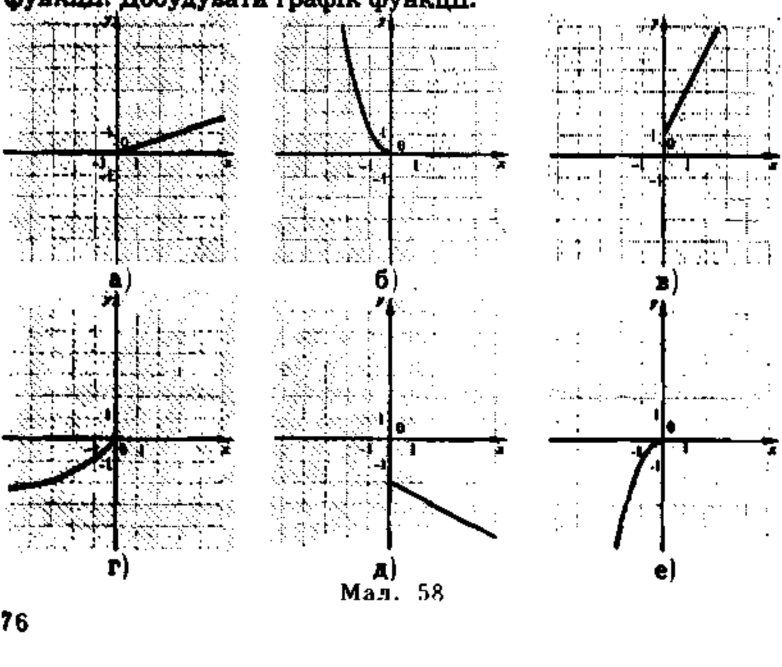
№200. **Довести, що функція спадає на множині всіх дійсних чисел: а) $y=-5x$; б) $y=-0{,}2x$; в) $y=-2x+3$; г) $y=ax+b$, де $a<0$.**

№201. **На малюнку 57 зображено частину графіка парної функції. Добудувати графік функції.**



Мал. 57

№202. **На малюнку 58 зображено частину графіка непарної функції. Добудувати графік функції.**



Мал. 58

№203. а) Функція $y=f(x)$ визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є парною. Відомо, що $f(-5)=10$, $f(2)=12$ і $f(10)=24$. Знайти значення функції при трьох інших значеннях аргументу.

б) Функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є непарною. Відомо, що $\varphi(-10)=13$, $\varphi(-2)=4$ і $\varphi(8)=-5$. Знайти значення функції при трьох інших значеннях аргументу.

в) Графіку функції $y=f(x)$, яка визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є парною на ній, належать точки $A(-5;4)$, $B(-1;3)$ і $C(2;1)$. Знайти координати трьох інших точок, що належать графіку цієї функції.

г) Графіку функції $y=\varphi(x)$, яка визначена на множині $(-\infty;\infty)$ і є парною на ній, належать точки $A(-2;-5)$, $B(-3;-1)$ і $C(8;5)$. Знайти координати трьох інших точок, що належать графіку цієї функції.

№204. Довести, що функція є парною:

а) $y=5x^2$; б) $y=-4x^2$; в) $y=2x^4+3$; г) $y=ax^2$.

№205. Довести, що функція є непарною:

а) $y=5x$; б) $y=-4x$; в) $y=2x^3$; г) $y=ax$.

III

№206. а) Довести, що функція $y=\begin{cases}7x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ -7x, & \text{якщо } x<0\end{cases}$ зростає на проміжку $[0;\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty;0]$.

б) Довести, що функція $y=\begin{cases}-5x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 5x, & \text{якщо } x<0\end{cases}$ зростає на проміжку $(-\infty;0]$ і спадає на проміжку $[0;\infty)$.

№207. Довести, що функція є непарною:

а) $f(x)=\dfrac{10-x^2}{x+x^3}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{10+x^4}$.

№208. Довести, що функція є парною:

а) $y=\begin{cases}15x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ -15x, & \text{якщо } x<0\end{cases}$; б) $y=\begin{cases}-10x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 10x, & \text{якщо } x<0\end{cases}$.

№209. а) Довести, що коли парна функція на множині невід'ємних чисел набуває тільки додатних значень, то і на всій області визначення вона приймає тільки додатні значення.

б) Довести, що коли парна функція на множині невід'ємних чисел набуває тільки від'ємних значень, то і на всій області визначення вона приймає тільки від'ємні значення.

№210. а) Довести, що коли функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ – парні, то і функція $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ є парною.

б) Довести, що коли функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ – парні, то і функція $y=f(x)+\varphi(x)$ є парною.

в) Довести, що коли функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ – непарні, то і функція $y=f(x)+\varphi(x)$ є непарною.

г) Довести, що коли функції $y=f(x)$ є парною, а функція $y=\varphi(x)$ – непарною, то функція $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ є непарною.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№211. а) Довести, що функція $y=-3|x|$ зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; \infty)$.
б) Довести, що функція $y=5|x|$ зростає на проміжку невід'ємних дійсних чисел і спадає на множині недодатних дійсних чисел.

№212. а) Дано, що $y=f(x)$ – зростаюча функція, множиною значень якої є проміжок $(-\infty; \infty)$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y є функцією від змінної y з областю визначення $(-\infty; \infty)$.

б) Дано, що $y=f(x)$ – спадна функція, множиною значень якої є проміжок $[0; \infty)$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y змінна x є функцією від змінної y з областю визначення $[0; \infty)$.

№213. а) Дано, що $y=f(x)$ – зростаюча функція, множина значень якої проміжок $(-\infty; \infty)$. Довести, що при тих самих відповідних значеннях x і y змінна x є зростаючою функцією від змінної y з областю визначення $(-\infty; \infty)$.

б) Дано $y=f(x)$ – спадна функція, множиною значень якої є проміжок $(-\infty; \infty)$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y є спадною функцією від змінної y з областю визначення $(-\infty; \infty)$.

№214. Довести, що функція є парною:
а) $y=3|x|-2$; б) $y=f(|x|)$.

№215. Дано, що $y=f(x)$ – парна функція, множиною значень якої є проміжок $[0; \infty)$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y на множині $[0; \infty)$ не є функцією від змінної y.

ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Функція, яка задана формулою $y=kx$, де x - незалежна змінна, k – число (кутовий коефіцієнт), що не дорівнює 0, називається **прямою пропорційністю**.

№216. **Які з функцій є прямими пропорційностями:**

а) $y=0{,}4x$; б) $y=-3x$; в) $y=4x^2$; г) $y=\frac{x}{4}$; д) $y=\frac{4}{x}$; е) $y=2x+1$?

№217. **Вказати кутові коефіцієнти прямих пропорційностей:**

а) $y=5x$; б) $y=\frac{1}{5}x$; в) $y=\frac{x}{7}$; г) $y=x$;

д) $y=0{,}2x$; е) $y=-4x$; є) $y=\frac{-x}{3}$; ж) $y=-0{,}4x$.

№218. **Які з функцій є прямими пропорційностями:**

а) $y=mx$; б) $y=kx$; в) $y=\frac{k}{x}$; г) $S=5t$; д) $V=\frac{12}{t}$; е) $V=at$.
(x, y, S, t, V – змінні)?

№219. **Записати три прямі пропорційності, в яких кутовий коефіцієнт:**

а) натуральне число; **б) ціле від'ємне число;**
в) додатне дробове число; **г) від'ємне дробове число.**

№220. **Яких значень набувають функції при значенні аргументу 2:** а) $y=-3x$; б) $y=0{,}3x$; в) $y=\frac{x}{4}$; г) $y=\frac{-x}{4}$?

№221. **При яких значеннях аргументу функції набувають значення, що дорівнює 40:**

а) $y=4x$; б) $y=\frac{1}{4}x$; в) $y=-8x$; г) $y=-\frac{1}{2}x$?

Областю визначення прямої пропорційності є множина дійсних чисел R.

№222. **Доповнити варіанти пояснень до правильних тверджень. Область визначення прямої пропорційності $y=kx$ є множина всіх дійсних чисел, бо:**

а) функція ____________________ є цілою ________________;
б) вираз ________ має зміст ____________________________;

в) на множині дійсних чисел дія ______________ виконується для будь-яких чисел.

№223. **Знайти область визначення функції:**

а) $y=\frac{x}{10}$; б) $y=10x$; в) $y=0{,}4x$; г) $y=-4x$.

Множиною значень прямої пропорційності є множина всіх дійсних чисел R.

№224. **Доповнити запис пояснення до правильного твердження.**

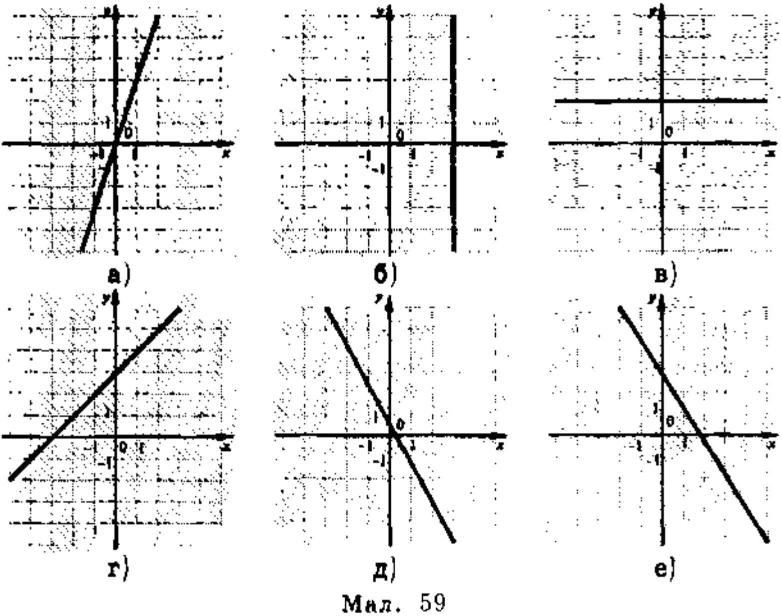
Будь-яке дійсне число b входить у множину значень функції $y=kx$, бо рівняння ________ при $a\neq0$ завжди має розв'язок.

№225. **Знайти множину значень функції:**

а) $y=4x$; б) $y=\frac{x}{4}$; в) $y=-4x$; г) $y=-\frac{x}{4}$.

Графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат.

№226. **Які з графіків на малюнку 59 є графіками прямої пропорційності?**



Мал. 59

№227. **Доповнити запис пояснення до правильного твердження.**

Графік прямої пропорційності проходить через початок координат, бо при значенні аргументу ______ функція $y=kx$ набуває значення, що дорівнює _____.

Алгоритм побудови графіка прямої пропорційності

1. Знайти координати точки *A*, яка належить графіку функції (наприклад, точка, з абсцисою 1).

2. Провести пряму через точку *A* і початок координат $O\,(0;0)$.

Побудована пряма – шуканий графік.

№228. **Побудувати графіки функцій:**
а) $y=4x$; **б)** $y=x$; **в)** $y=-x$; **г)** $y=-5x$.

Будь-яка пряма, що проходить через початок координат і не співпадає з осями координат, є графіком прямої пропорційності.

Вісь ординат не є графіком функції y від x.

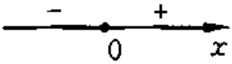
Вісь абсцис є графіком постійної: $y=0$.

№229. 1) **Пояснити, чому вісь y не є графіком функції y від змінної x.**
2) **Яка область визначення та множина значень функції $y=ax$, якщо $a=0$, тобто $y=0$?**

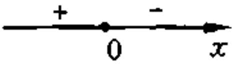
Нулем прямої пропорційності є число 0.

Пряма пропорційність має два проміжки знакосталості: $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$.

При $a>0$ функція набуває додатних значень на проміжку $(0;\infty)$, тобто справа від нуля; від'ємних значень – на проміжку $(-\infty;0)$, тобто зліва від нуля.

$a>0$ 

При $a<0$ функція набуває додатних значень на проміжку $(-\infty;0)$, тобто зліва від нуля; від'ємних значень на проміжку $(0;\infty)$, тобто справа від нуля.

$a<0$ 

№230. **Доповнити записи до правильних тверджень:**
а) Графік функції $y=7x$ розташований у ________ чвертях, бо точки з додатними абсцисами мають __________ ординати, а з від'ємними абсцисами – ________________ ординати.
б) Графік $y=-3x$ розташований у _________ чвертях, бо всі точки з від'ємними абсцисами мають ______________________, а з додатними абсцисами – ____________________.

в) Графік функції $y=ax$ при $a>0$ розташований у ________ чвертях.
г) Графік функції $y=ax$ при $a<0$ розташований у ________ чвертях.
д) При додатних значеннях аргументу всі значення функції $y=\dfrac{x}{3}$ ______________.
е) При від'ємних значеннях аргументу всі значення функції $y=0,7x$ ______________.
є) При додатних значеннях аргументу всі значення функції $y=\dfrac{-x}{3}$ ______________.
ж) При $x<0$ функція $y=-0,2x$ набуває ________________.

Функція $y=ax$ монотонна: якщо $a>0$, то вона зростаюча; якщо $a<0$, то вона спадна.

№231. Одна з точок графіка прямої пропорційності знаходиться в: а) 1 чверті; б) 2 чверті; в) 3 чверті; г) 4 чверті. В яких чвертях знаходиться графік функції? Яким (додатним чи від'ємним) є кутовий коефіцієнт? Відповідь пояснити.
№232. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень:**
а) Дано функцію $y=7x$. Доведемо, що дана функція – ______________.
1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 __________.
2. $y_2=$ __________, $y_1=$ __________, $y_2-y_1=$ __________ $=7(x_2-x_1)$.
3. Так як x_2-x_1 ________, то і добуток $7(x_2-x_1)$ ________, тобто $7x_2>7x_1$, $y_2>y_1$. Значить, функція $y=7x$ – __________.
б) Дано функцію $y=-7x$. Доведемо, що дана функція – ______________.
1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 __________.
2. $y_2=$ __________, $y_1=$ __________, $y_2-y_1=$ __________ $=-7(x_2-x_1)$.
3. Так як x_2-x_1 ________, то добуток $-7(x_2-x_1)$ – ________, тобто $7x_2<7x_1$, $y_2<y_1$. Значить, функція $y=-7x$ – ________.
в) Дано функцію $y=ax$, де $a>0$. Доведемо, що дана функція – ______________:
1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 __________.
2. $y_2=$ __________, $y_1=$ __________, $y_2-y_1=$ __________ $=$ __________.
3. Так як x_2-x_1 ________, то і добуток $a(x_2-x_1)$ ________, тобто ax_2 ___ ax_1. Значить, функція $y=ax$ при $a>0$ ________.
г) Дано функцію $y=ax$, де $a<0$. Доведемо, що дана функція – ______________:
1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 __________.
2. $y_2=$ __________, $y_1=$ __________ $y_2-y_1=$ __________ $=$ __________.

3. Так як x_2-x_1 _______ , то і добуток $a(x_2-x_1)$ _______ , тобто ax_2 ___ ax_1. Значить, функція $y=ax$ при $a<0$ ________.

№233. Які з функцій є зростаючими, а які спадними:

а) $y=7x$; б) $y=-100x$; в) $y=\frac{x}{3}$; г) $y=\frac{-x}{10}$; д) $y=x$; е) $y=-x$?

№234. Функція задана формулою $y=3{,}4x$. Не виконуючи обчислень, порівняти:

а) $y(17{,}2)$ і $y(15{,}2)$;
б) $y(-20{,}4)$ і $y(-10)$;
в) $y(1{,}4)$ і $y(-1{,}4)$;
г) $y(0)$ і $y(-1{,}4)$.

№235. Функція задана формулою $y=-0{,}6x$. Не виконуючи обчислень, порівняти:

а) $y(14{,}3)$ і $y(17{,}3)$;
б) $y(-11)$ і $y(-30{,}6)$;
в) $y(2{,}3)$ і $y(-2{,}3)$;
г) $y(-8{,}4)$ і $y(2{,}4)$.

Властивості прямої пропорційності

При $a>0$ більшому (меншому) значенню функції відпозідає більше (менше) значення аргументу.

При $a<0$ більшому (меншому) значенню функції відповідає менше (більше) значення аргументу.

№236. Записати в порядку збільшення абсцис точки $A(a; 4)$, $B(b; -2)$ і $C(c; 7)$ графіка прямої пропорційності з додатним кутовим коефіцієнтом.

№237. Записати в порядку збільшення абсцис точки $A(a; 9)$, $B(b; -4)$ і $C(c; 5)$ графіка прямої пропорційності з від'ємним кутовим коефіцієнтом.

№238. Якими (додатними чи від'ємними) є коефіцієнти прямої пропорційності, якщо:

а) $y(2{,}3)>y(1{,}2)$;
б) $y(0{,}1)>y(10)$;
в) $y(-0;4)>y(-4)$;
г) $y(-0{,}1)>y(0{,}1)$?

!!!!!

Додатковий матеріал

№239. Які з тверджень є правильними?

а) **Якщо точка $A(2;\ 10)$ належить графіку прямої пропорційності $y=kx$, то $k=10:2$.**

б) **Якщо точка $B(1;\ 10)$ належить графіку прямої пропорційності $y=kx$, то $k=10$.**

в) **Якщо точка $C(1;\ -5)$ належить графіку прямої пропорційності $y=kx$, то $-\frac{1}{5}$.**

г) **Якщо точка $D(1;\ 4)$ належить графіку прямої пропорційності, то формула прямої пропорційності $y=4x$.**

№240. Знайти кутовий коефіцієнт прямої пропорційності, якщо її графіку належить точка:

а) $A(1; 8)$; б) $B(1; -6)$; в) $C(2; -8)$; г) $D(2; 1)$.

№241. Задати пряму пропорційність формулою, якщо її графіку належить точка:

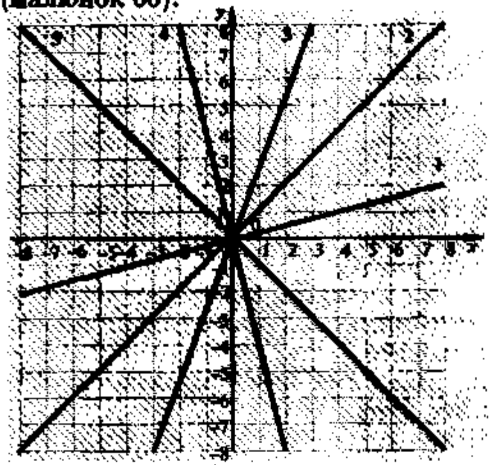
а) $A(1; 4)$; б) $B(1; -3)$; в) $C(3; 12)$; г) $D(2; -20)$.

Алгоритм знаходження кутового коефіцієнта прямої пропорційності за її графіком

1. Знайти ординату точки графіка, абсциса якої дорівнює 1.

2. Знайдене число – шуканий коефіцієнт.

№242. Задати формулами прямі пропорційності за їх графіками (малюнок 60).



Мал. 60

№243. Контрольні питання.

1. **Яка функція називається прямою пропорційністю?**
2. **Пояснити, чому областю визначення прямої пропорційності є множина всіх дійсних чисел.**
3. **Пояснити, чому множиною значень прямої пропорційності є множина всіх дійсних чисел.**
4. **Яка фігура є графіком прямої пропорційності?**
5. **Як побудувати графік прямої пропорційності, заданої формулою?**
6. **Як за графіком прямої пропорційності записати її формулу?**
7. **Записати загальну формулу всіх прямих, що проходять через початок координат і не співпадають з віссю ординат.**
8. **Що є графіком функції $y=ax$ при $a=0$, тобто функції $y=0$?**
9. **Назвати проміжки знакосталості прямої пропорційності при додатному; від'ємному кутовому коефіцієнті.**
10. **При якій умові пряма пропорційність зростаюча; спадна функція?**

II

№244. **Дано функцію:**

а) $y=7x$. Знайти значення змінної y, якщо значення змінної x дорівнює -3; 0; 3.

б) $f(x)=-5x$. Знайти $f(-2)$; $f(-1)$; $f(3)$.

в) $y=\frac{4}{5}x$. Знайти значення функції, якщо x дорівнює -5; -1; 5.

г) $y=\frac{-x}{7}$. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу -14; -7; 7.

№245. а) Графіку функції $y=6x$ належать точки $A(2;\ a)$, $B(-3;\ b)$, $C(0{,}1;\ c)$. Знайти a, b і c.

б) Графік функції $y=-5x$ проходить через точки $A(-2;\ a)$, $B(3;\ b)$, $C\left(\frac{1}{5};c\right)$. Знайти a, b і c.

в) Які з точок $A(-2;-16)$, $B(-2;\ 16)$, $C(16;-2)$ належать графіку функції $y=-8x$?

г) Через які з точок $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $B(4;\ 16)$, $C\left(-1;\frac{-1}{4}\right)$. проходить графік функції $y=\frac{x}{4}$?

№246. **Дано функцію:**

а) $y=4x$. Знайти значення змінної x, якщо значення змінної y дорівнює 32.

б) $y=-10x$. Знайти значення x, якщо $y=40$.

в) $f(x)=\frac{x}{5}$. Знайти x, якщо $f(x)=10$.

г) $y=\frac{-x}{3}$. Знайти значення аргументу x, що відповідає значенню функції -10.

№247. а) Графіку функції $y=10x$ належить точка $A(a;\ 30)$. Знайти значення a.

б) Графік функції $y=-4x$ проходить через точку $A(a;\ -2)$. Знайти значення a.

в) Графіку функції $y=\frac{x}{6}$ належить точка $A(a;3)$. Знайти значення a.

г) Графік функції $y=\frac{-x}{4}$ проходить через точку $A(-20;\ a)$. Знайти значення a.

№248. **Побудувати графік функції:**

а) $y=4x$. **Знайти за графіком значення** y, **яке відповідає** $x=-2$; **значення** x, **яке відповідає** $y=10$.

б) $y=-5x$. **Знайти за графіком значення функції, яке відповідає значенню аргументу** -2; **значення аргументу, яке відповідає значенню функції** 10.

в) $f(x)=\frac{x}{2}$. **Знайти за графіком** $f(6)$; **значення** a, **якщо** $f(a)=9$.

г) $f(x)=\frac{x}{4}$. **Знайти за графіком** $f(-2)$; **значення аргументу** x, **якщо** $f(x)=-6$.

№249. **Побудувати графік функції:**

а) $y=3x$; б) $y=\frac{x}{3}$; в) $y=-3x$; г) $y=-\frac{x}{3}$.

За графіком встановити значення x, **при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.**

№250. **Функція задана формулою** $f(x)=1{,}23x$. **Не виконуючи обчислень, порівняти:**

а) $f(1{,}23)$ і $f(1{,}45)$; б) $f(100{,}4)$ і $f(99{,}4)$;

в) $f(-1{,}23)$ і $f(-1{,}45)$; г) $f(-100{,}4)$ і $f(-99{,}4)$.

№251. **Функція задана формулою** $f(x)=-5{,}43x$. **Не виконуючи обчислень, порівняти:**

а) $f(2{,}23)$ і $f(2{,}45)$; б) $f(100{,}2)$ і $f(99{,}2)$;

в) $f(3{,}24)$ і $f(3{,}45)$; г) $f(200{,}4)$ і $f(205{,}4)$.

№252. **Довести, що функція є непарною:**

а) $y=4x$; б) $y=-0{,}2x$; в) $y=-3x$; г) $y=0{,}3x$.

№253. а) **Довести, що графік прямої пропорційності проходить через початок координат.**

б) **Довести, що будь-яке дійсне число** c **належить множині значень прямої пропорційності.**

№254. 1) **Довести, що при** $a>0$ **функція** $y=ax$ **зростаюча.**

2) **Довести, що при** $a<0$ **функція** $y=ax$ **спадна.**

№255. **Периметр квадрата обчислюється за формулою** $P=4a$, **де** a – **довжина сторони квадрата. Виразити формулою залежність** a **від** P.

№256. **Периметр рівностороннього трикутника обчислюється за формулою** $P=3a$, **де** a – **довжина сторони трикутника. Виразити формулою залежність** a **від** P.

№257. **Залежність відстані** S **від часу** t **виражається формулою:**

а) $S=5t$; б) $S=60t$; в) $S=at$.

Виразити формулою залежність t **від** S.

№258. **Залежність змінної** m **від змінної** b **виражається формулою:**

а) $m=10b$; б) $m=0{,}3b$; в) $m=ab$ (a – **стала**).

Виразити формулою залежність b **від** m.

№259. **Виразити формулою залежність змінної** x **від змінної** y, **якщо:**

а) $y=4x$; б) $y=10x$; в) $y=ax$.

III

№260. **Функція задана формулами:**

а) $f(x) = \begin{cases} 4x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -4x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -5x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ 5x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -\frac{x}{3}, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{3}, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{x}{3}, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Знайти $f(-6)$;$f(-1)$; $f(1)$; $f(6)$.

№261. 1) **Графіку функції, заданої формулами** $y = \begin{cases} 4x, \text{ якщо } x \ge 0 \\ -4x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$ **належать точки** $A(-2;a)$, $B(2;b)$, $C\left(\frac{1}{2};c\right)$. **Знайти** a, b і c.

2) Графік функції $y = \begin{cases} 5x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -3x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$ **проходить через точки** $A\,(-4;\,a)$, $B\,(4;\,b)$, $C\left(\frac{1}{15};c\right)$. **Знайти** a, b і c.

3) **Які з точок** $A\,(-2;\,-12)$, $B\,(-3;\,12)$, $C\,(3;\,18)$ **належать графіку функції** $y = \begin{cases} 6x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -4x, \text{ якщо } x < 0? \end{cases}$

г) **Через які з точок** $A\,(-2;\,4)$, $B\,(3;\,-6)$, $C\,(-2;\,-10)$ **проходить графік функції** $y = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ 5x, \text{ якщо } x < 0? \end{cases}$

№262. **Побудувати графік функції:**

а) $y=5x$ **з областю визначення** $[0;\,\infty)$;
б) $y=4x$ **з областю визначення** $[1;\,\infty)$;
в) $y=3x$ **з областю визначення** $[2;\,\infty)$;
г) $y=-3x$ **з областю визначення** $[0;\,\infty)$.

За графіком встановити проміжки зростання та спадання функції; множину значень функції.

№263. **Побудувати графік функції:**

а) $y = \begin{cases} 6x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -2x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{x}{2}, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -3x, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{-x}{3}, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити значення x, **при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.**

№264. Побудувати графік функції:

а) $y = \begin{cases} 7x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -7x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 5x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ \dfrac{x}{5}, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -5x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ \dfrac{x}{5}, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -6x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -\dfrac{x}{6}, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити проміжки зростання та спадання функції; множину значень функції.

№265. Побудувати графік функції:

а) $y=4(x-2)+8$; б) $y=-3(x+2)+6$;

в) $y=\frac{1}{3}(x-15)-5$; г) $y = \frac{1}{4}(x+16)+x$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№266. Побудувати графік функції:

а) $y=5(x+3)-15$; б) $y=-6(x-2)-12$;

в) $y = \frac{1}{5}(x+20)-4$; г) $y=-\frac{1}{3}(x-12)-4$.

За графіком встановити проміжки зростання та спадання функції; множину значень функції.

№267. Встановити графічно значення x, при яких:

а) графік функції $y=5x$ розміщений у системі координат вище графіка функції $y=2x$;

б) графік функції $y=10x$ розміщений у системі координат нижче графіка функції $y=-10x$;

в) графік функції $y=-6x$ розміщений у системі координат вище графіка функції $y=-3x$;

г) графік функції $y=-8x$ розміщений у системі координат нижче графіка функції $y=8x$.

№268. Встановити графічно значення x, при яких:

а) функція $y=6x$ набуває значень, більших від значень функції $y=\frac{x}{2}$;

б) функція $y=4x$ набуває значень, менших від значень функції $y=-4x$;

в) функція $y=-5x$ набуває значень, більших від значень функції $y=-2x$;

г) функція $y=-2x$ набуває значень, менших від значень функції $y=2x$.

№269. Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі ординат на вказаній відстані:

а) $y=2x$, відстань дорівнює 8;

б) $y=\frac{x}{2}$, **відстань дорівнює 6;**

в) $y=-2x$, **відстань дорівнює 10;**

г) $y=\frac{x}{2}$, **відстань дорівнює 8.**

№270. **Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі абсцис на вказаній відстані:**

а) $y=3x$, **відстань дорівнює 12;**

б) $y=\frac{x}{3}$, **відстань дорівнює 9;**

в) $y=-3x$, **відстань дорівнює 9;**

г) $y=-\frac{x}{3}$, **відстань дорівнює 12.**

№271. а) **Функція $f(x)=4x$ задана на проміжку $[2; 5]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.**

б) **Функція $f(x)=\frac{x}{5}$ задана на проміжку $[5; 20]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.**

в) **Функція $f(x)=4x$ задана на проміжку $[1; 4]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.**

г) **Функція $f(x)=\frac{x}{5}$ задана на проміжку $[6; 18]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.**

№272. **Знайти множину значень функції:**

а) $f(x)=9x$, **заданої на проміжку $[2; 5]$;**

б) $f(x)=\frac{x}{4}$, **заданої на проміжку $[12; 40]$;**

в) $f(x)=\frac{x}{5}$, **заданої на проміжку $[10; 50]$;**

г) $f(x)=\frac{-x}{6}$, **заданої на проміжку $[12; 60]$.**

№273. **Знайти число a, якщо графіку прямої пропорційності належать точки:**

а) $A(3; 15)$ і $B(a; 100)$; б) $A(9; 3)$ і $B(-18; a)$;

в) $A(a; 90)$ і $B(-4; -12)$; г) $A(-40; a)$ і $B(16; -2)$.

№274. 1) **Графіку функції $f(x)=ax$ належить точка $A(5;15)$. Знайти коефіцієнт a.**

2) **Графіку функції $f(x)=bx$ належить точка $A(15; 5)$. Знайти коефіцієнт b.**

3) Графіку функції $f(x)=cx$ належить точка $A(-6; 60)$. Знайти коефіцієнт c.
4) Графіку функції $f(x)=cx$ належить точка $A(-18; 3)$. Знайти коефіцієнт c.
№275. а) Графіку функції $f(x)=ax$ належить точка $A(2; 6)$. Чи належить графіку функції точка $B(5; 10)$?
б) Графіку функції $f(x)=ax$ належить точка $A(3; -12)$. Чи належить графіку функції точка $B(-2; 8)$?
в) Графіку функції $f(x)=ax$ належить точка $A(4; -12)$. Чи належить графіку функції точка $B(-2; 6)$?
г) Графіку функції $f(x)=ax$ належить точка $A(10; 2)$. Чи належить графіку функції точка $B(4; 20)$?
№276. Знайти число a, якщо графіку прямої пропорційності належать точки:
а) $A(4; 12)$ і $B(-8; a)$; б) $A(20; -5)$ і $B(-60; a)$;
в) $A(-2; 6)$ і $B(-24; a)$; г) $A(8; -2)$ і $B(-16; a)$.
№277. Встановити, якою, спадною чи зростаючою є пряма пропорційність, якщо її графіку належать точки:
а) $A(3; 5)$; б) $A(-2; 4)$; в) $A(-4; -1)$; г) $A(5; -2)$.
№278. Знайти проміжки, на яких пряма пропорційність набуває додатних значень; від'ємних значень, якщо її графіку належить точка:
а) $A(2; 18)$; б) $B(18; 2)$; в) $C(-2; 18)$; г) $K(-18; 2)$.
№279. У порожній басейн щохвилини починає надходити 0,8 $м^3$ води. Задати формулою залежність об'єму води V (у кубічних метрах) у басейні від часу t (в хвилинах) його наповнення? Якою функцією є дана залежність?
№280. З пункту A виїхав велосипедист, швидкість руху якого 20км/год. На якій відстані S (у кілометрах) він буде від пункту A через t годин ? Якою функцією є залежність S від t ?
№281. Щогодини робітник виготовляє 2 деталі. Скільки деталей виготовить робітник за t годин роботи? Задати формулою залежність кількості деталей k, виготовлених робітником, від часу t (у годинах). Якою функцією є дана залежність?
№282. а) Довести, що у прямої пропорційності відношення будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 дорівнює відношенню відповідних значень функції y_1 і y_2.
б) Довести, що у будь-яких двох точок, що належать графіку прямої пропорційності, відношення їх ординат y_1 і y_2 дорівнює відношенню їх абсцис x_1 і x_2.
№283. а) Довести, що при $a>0$ функція $y=ax$ при додатних значеннях аргументу набуває тільки додатних значень.
б) Довести, що при $a>0$ функція $y=ax$ при від'ємних значеннях аргументу набуває тільки від'ємних значень.

в) Довести, що при $a<0$ функція $y=ax$ при додатних значеннях аргументу набуває тільки від'ємних значень.

г) Довести, що при $a<0$ функція $y=ax$ при від'ємних значеннях аргументу набуває тільки додатних значень

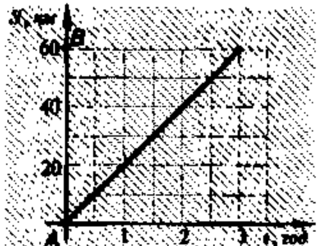
д) Довести, що при $a>0$ графік функції $y=ax$ розміщений в 1 і 3 чвертях.

е) Довести, що при $a<0$ графік функції $y=ax$ розміщений в 2 і 4 чвертях.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№284. **З пункту *A* до пункту *B* по прямолінійному шосе виїхав велосипедист і через 3 години був у пункті *B*. Графік залежності відстані велосипедиста *S* (у кілометрах) до пункту *A* від часу руху *t* (у годинах) зображено на малюнку 61.**



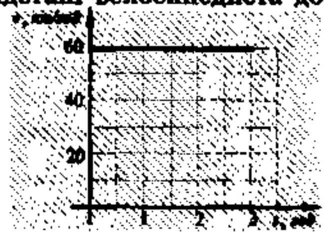
Мал. 61

1) Задати дану залежність формулою. Встановити вид функції та область її визначення.

2) Побудувати графік швидкості руху велосипедиста.

3) Задати формулою залежність відстані велосипедиста до пункту B від часу руху.

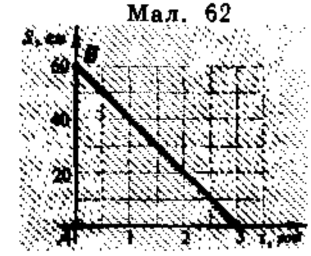
№285. З пункту *A* до пункту *B* по прямолінійному шосе виїхав автомобіль. Графік швидкості його руху під час поїздки зображено на малюнку 62.



Мал. 62

За даним графіком побудувати графік залежності відстані *S* (у кілометрах) автомобіля до пункту *A* від часу руху *t* (у годинах).

№286. З пункту *B* до пункту *A* по прямолінійному шосе виїхав мотоцикліст і через 3 години був у пункті *A*. Графік залежності відстані *S* (у кілометрах) мотоцикліста до пункту *A* від часу виїзду *t* (у годинах) з пункту *B* зображено на малюнку 63.



Мал. 63

Функція $y = kx + b$ монотонна:
якщо $k > 0$, то вона зростаюча; якщо $k < 0$ - спадна.

№319. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень:**

а) **Дано функцію $y=3x+4$. Довести, що дана функція – ________________.**

1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 ____________.

1. $y_2=3x_2+4$, $y_1=$ ________________

$y_2-y_1=$ ________________ $=3(x_2-x_1)$.

1. Так як x_2-x_1 ____________, то і добуток $3(x_2-x_1)$ – ____________________, тобто

$3x_2+4>3x_1+4$, тобто $y_2>y_1$. Значить, функція $y=3x+4$ – ______________.

б) **Дано функцію $y=kx+b$, де $k<0$. Довести, що дана функція – ________________.**

1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 ________________.

1. $y_2=kx_2+b$, $y_1=$ ________________

$y_2-y_1=$ ________________ $= k(x_2-x_1)$.

3. Так як x_2-x_1 __________, а k __________, то добуток $k(x_2-x_1)$ ____________.

Отже, $kx_2+b<kx_1+b$, тобто ____________ . Значить, функція $y=kx+b$ при $k<0$ ____________.

№320. **Які з функцій зростаючі, а які – спадні:**

а) $y=-2x+1$; б) $y=x+3$; в) $y=-x-7$;

г) $y=\frac{x}{3}-4$; д) $y=0,1x$; е) $y=\frac{-x}{2}$?

Властивості лінійної функції $y = kx + b$

При $k > 0$ більшому (меншому) значенню функції відповідає більше (менше) значення аргументу.

При $k < 0$ більшому (меншому) значенню функції відповідає менше (більше) значення аргументу.

№321. **а) Графік лінійної функції з додатним кутовим коефіцієнтом проходить через точки $A(a; 4)$, $B(b; -3)$ і $C(c; 10)$. Записати точки A, B, C у порядку збільшення абсцис.**

б) Графік лінійної функції з від'ємним кутовим коефіцієнтом k проходить через точки $A(a; 12)$, $B(b; -8)$ і $C(c; 1)$. Записати точки A, B і C у порядку зменшення абсцис.

б) при невід'ємних значеннях аргументу набуває значень, що дорівнюють "мінус" подвоєному значенню аргументу, а при від'ємних – подвоєному значенню аргументу;
в) при невід'ємних значеннях аргументу x набуває значення ax, а при від'ємних значеннях – значення, що дорівнює $-ax$;
г) при невід'ємних значеннях аргументу набуває значення $-ax$, а при від'ємних значеннях – значення, що дорівнює ax.

№296. **Знайти множину значень функції:**

а) $y=|4x|$; б) $y=-|3x|$; в) $y=|ax|$, де $a>0$;
г) $y=|ax|$, де $a<0$; д) $y=b|x|$, де $b>0$; е) $y=c|x|$, де $c<0$.

№297. **Записати функцію у вигляді двох виразів і без побудови графіка встановити проміжки знакосталості та монотонності:** а) $y=|3x|$; б) $y=|4x|$.

№298. **Записати функцію у вигляді двох виразів і без побудови графіка встановити проміжки знакосталості та монотонності:**
а) $y=|ax|$, де $a>0$; б) $y=|bx|$, де $b<0$.

№299. **Записати функцію у вигляді двох виразів і без побудови графіка встановити проміжки знакосталості і монотонності:**
а) $y=3|x|$; б) $y=-3|x|$; в) $y=a|x|$, де $a>0$; г) $y=b|x|$, де $b<0$.

№300. **Побудувати графік функції:**

а) $y=|4x|$; б) $y=\left|\frac{1}{4}x\right|$; в) $y=-|x|$; г) $y=-2|x|$.

№301. а) **Позначивши на осі ординат умовно додатне число b, побудувати графіки функцій:** $y=bx$; $y=|bx|$; $y=-|bx|$.
б) **Позначивши на осі ординат умовно від'ємне число c, побудувати графіки функцій:** $y=cx$; $y=|cx|$; $y=-|cx|$.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Функція, яка задано формулою $y = kx + b$, де k і b – число, x – незалежна змінна, називається **лінійною**. Число k називають кутовим коефіцієнтом, b – вільним членом.

№302. **Вказати кутовий коефіцієнт і вільний член у формулі лінійної функції:**

а) $y=2x+5$; **б)** $y=-3x-4$; **в)** $y=\frac{x}{3}+4$;

г) $y=x+5$; **д)** $y=-x+3$; **е)** $y=4$.

№ 303. **Записати три формули лінійних функцій із кутовим коефіцієнтом:**

а) 3; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** 0; **г)** 1; **д)** -1; **е)** $-\frac{1}{2}$.

№304. **Записати три формули лінійних функцій із вільним членом:**

а) 2; **б)** -2; **в)** 1; **г)** 0; **д)** $\frac{1}{3}$; **е)** $-\frac{1}{4}$.

№305. **Які з функцій є лінійними:**

а) $y=3x+5$; **б)** $y=-x^2-5$; **в)** $y=\frac{x}{3}+2$; **г)** $y=\frac{3}{x}+2$;

д) $y=-5x$; **д)** $y=-4$; **е)** $y=0$?

№306. **Які з тверджень правильні?**

а) Пряма пропорційність є лінійною функцією $y=kx+b$ з вільним членом $b=0$.

б) Пряма пропорційність є лінійною функцією $y=kx+b$ з кутовим коефіцієнтом $k=0$.

в) Будь-яка пряма пропорційність є лінійною функцією.

г) Будь-яка лінійна функція є прямою пропорційністю.

№307. **Які із залежностей змінної S від t є лінійними функціями:**

а) $S=4t+1$; **б)** $S=4t^2+1$; **в)** $S=4t^2$;

г) $S=4t$; **д)** $S=\frac{4}{t}$; **е)** $S=-\frac{t}{3}+2$?

Областю визначення лінійної функції є множина дійсних чисел R.

№308. **Доповнити варіанти пояснень до правильних тверджень.**
Областю визначення лінійної функції є множина всіх дійсних чисел, бо:
а) вона є ____________________ функцією;
б) вираз ______________ має зміст при ________________;
в) на множині дійсних чисел дії ________________ виконуються для будь-яких дійсних чисел;
г) вираз ______________ є раціональним виразом, який не містить ділення на ________.

№309. **Знайти область визначення функції:**

а) $y=5x+1$; **б)** $y=\frac{x}{5}+1$; **в)** $y=-5x+2$;

г) $y=4x$; **д)** $y=-3$; **е)** $y=4$.

Множиною значень лінійної функції $y=kx+b$ при $k\neq 0$ є множина дійсних чисел R.

№310. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.**
Дано лінійну функцію $y=kx+b$. Доведемо, що будь-яке число a з множини дійсних чисел належить множині значень функції $y=kx+b$, тобто множиною значень цієї функції є __________.
Рівняння $kx+b=$______ при $k\neq 0$ має завжди розв'язок.
$kx=a-b$, $x=$______.

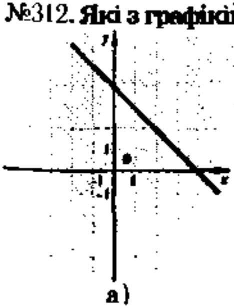
Множиною значень лінійної функції $y=kx+b$ при $k=0$ ($y=b$) є число b.
Функція $y=b$ є постійною.

№311. **Знайти множину значень функції:**
а) $y=4x-3$; **б)** $y=-3x$; **в)** $y=3$;

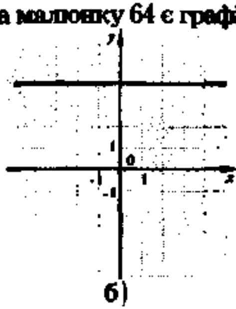
г) $y=-3$; **д)** $y=\frac{x}{3}-1$; **е)** $y=-0{,}3x-4$.

Графіком лінійної функції $y=kx+b$ є пряма, яка не перпендикулярна до осі x.

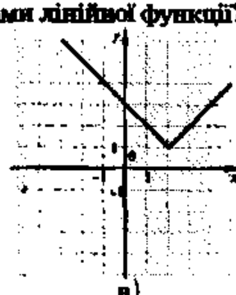
№312. **Які з графіків на малюнку 64 є графіками лінійної функції?**



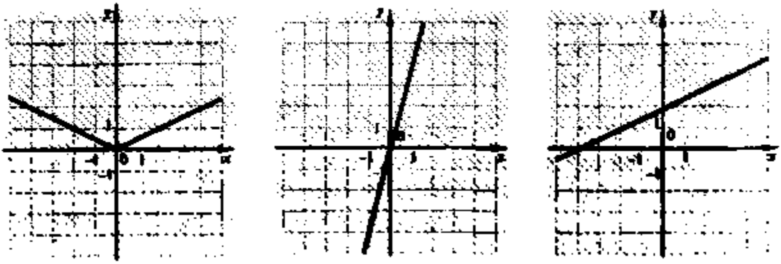
а)



б)



в)



г) д) е)

Мал. 64

Алгоритм побудови графіка функції $y = kx + b$

1. Вибрати два довільних числа як абсциси точок графіка.

2. Знайти відповідні їм значення функції – ординати точок.

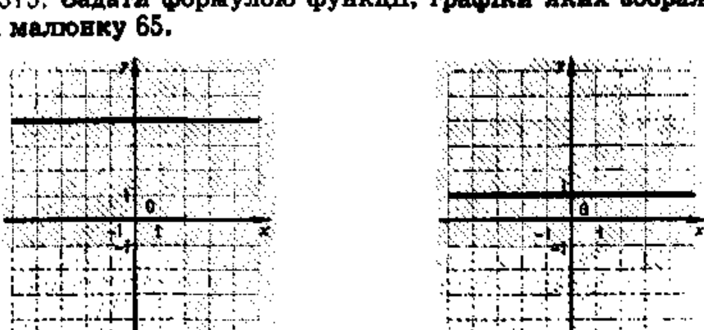
3. Позначити в системі координат обчислені точки та провести через них пряму.

Побудована пряма – шуканий графік лінійної функції.

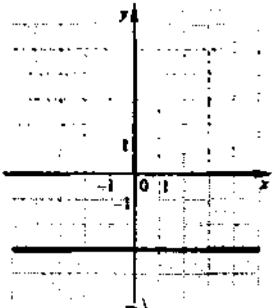
№313. **Побудувати графік лінійної функції:**
а) $y=x+2$; **б)** $y=-x+2$; **в)** $y=4x+1$; **г)** $y=\frac{x}{4}+1$.

Графіком функції $y = kx + b$ при $k = 0$, тобто $y = b$, є пряма, яка перпендикулярна до осі y і перетинає її у точці з ординатою b.

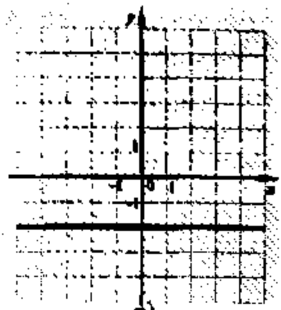
№314. **Побудувати графік функції: а)** $y=4$; **б)** $y=-3$.
№315. **Задати формулою функції, графіки яких зображені на малюнку 65.**



а) б)



в)



г)

Мал. 65

№316. Пояснити ,чому в системі координат пряма, перпендикулярна до осі x, не є графіком лінійної функції $y=kx+b$.

№317. Доповнити записи до правильних тверджень:

а) Графік лінійної функції $y=kx+b$ перетинає вісь y в точці з координатою________.

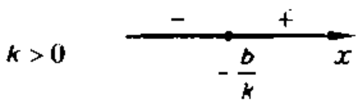
б) Графік будь-якої лінійної функції перетинає вісь _______.

в) Якщо графік лінійної функції проходить через початок координат, то вона є_________________________.

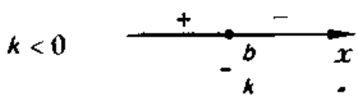
г) Якщо графік лінійної функції не перетинає вісь абсцис, то функція є ___________________.

Лінійна функція $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ має два проміжки знакосталості $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ і $\left(-\frac{b}{k}; \infty\right)$.

При $k > 0$ функція набуває додатних значень на проміжку справа від точки $-\frac{b}{k}$, а від'ємних – зліва від точки $-\frac{b}{k}$.



При $k < 0$ функція набуває додатних значень на проміжку зліва від точки $-\frac{b}{k}$, а від'ємних - справа від точки $-\frac{b}{k}$.



№318. Без побудови графіка знайти проміжки знакосталості функції:

а) $y=2x+3$; б) $y=4x-3$; в) $y=x+7$;
г) $y=-3x+4$; д) $y=-2x-5$; е) $y=-x-3$.

Функція $y = kx + b$ монотонна:
якщо $k > 0$, то вона зростаюча; якщо $k < 0$ - спадна.

№319. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень:**

а) Дано функцію $y=3x+4$. Довести, що дана функція – ________________.

1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1 ______________.

1. $y_2=3x_2+4$, $y_1=$________________

$y_2-y_1=$________________$=3(x_2-x_1)$.

1. Так як x_2-x_1 ____________, то і добуток $3(x_2-x_1)$ – ____________________, тобто

$3x_2+4>3x_1+4$, тобто $y_2>y_1$. Значить, функція $y=3x+4$ – ________________.

б) Дано функцію $y=kx+b$, де $k<0$. Довести, що дана функція –________________.

1. Нехай $x_2>x_1$, тобто x_2-x_1________________.

1. $y_2=kx_2+b$, $y_1=$________________

$y_2-y_1=$________________$= k(x_2-x_1)$.

3. Так як x_2-x_1 _________, а k__________, то добуток $k(x_2-x_1)$____________.

Отже, $kx_2+b<kx_1+b$, тобто ____________ . Значить, функція $y=kx+b$ при $k<0$ ____________.

№320. **Які з функцій зростаючі, а які – спадні:**

а) $y=-2x+1$; б) $y=x+3$; **в)** $y=-x-7$;

г) $y=\dfrac{x}{3}-4$; д) $y=0{,}1x$; **е)** $y=\dfrac{-x}{2}$?

Властивості лінійної функції $y = kx + b$

При $k > 0$ більшому (меншому) значенню функції відповідає більше (менше) значення аргументу.

При $k < 0$ більшому (меншому) значенню функції відповідає менше (більше) значення аргументу.

№321. **а) Графік лінійної функції з додатним кутовим коефіцієнтом проходить через точки $A(a; 4)$, $B(b; -3)$ і $C(c; 10)$. Записати точки A, B, C у порядку збільшення абсцис.**

б) Графік лінійної функції з від'ємним кутовим коефіцієнтом k проходить через точки $A(a; 12)$, $B(b; -8)$ і $C(c; 1)$. Записати точки A, B і C у порядку зменшення абсцис.

№322. 1) **Довести, що графік лінійної функції $y=kx+b$ перетинає вісь x у точці з абсцисою $a = -\dfrac{b}{k}$.**

2) З рівності $a = -\dfrac{b}{k}$ знайти k.

3) Зробити висновок, як знайти кутовий коефіцієнт за координатами точок перетину графіка лінійної функції з осями координат.

Кутовий коефіцієнт k лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$ дорівнює $\dfrac{b}{-a}$, де b — ордината точки перетину графіка функції з віссю y, a — абсциса точки перетину графіка з віссю x.

Алгоритм складання формули лінійної функції за координатами точок перетину з осями координат

1. Знайти за графіком функції ординату точки перетину графіка функції з віссю y — число b.

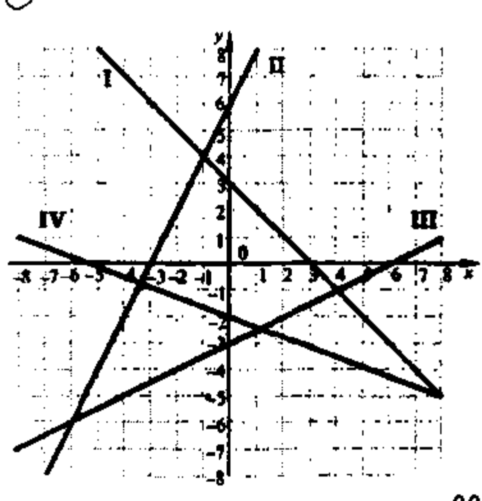
2а. Якщо графік не перетинає вісь x, то формула функції $y = b$.

2б. Якщо графік перетинає вісь x, знайти абсцису точки перетину — число a.

3. Обчислити $\dfrac{b}{-a} = k$

4. У формулу $y = kx + b$ підставити одержані значення b і k

№323. **Знайти координати точок перетину графіків функції з осями координат і записати формули функцій (мал. 66)**



Мал. 66

№324. Контрольні питання.

1. Яка функція називається лінійною?
2. Пояснити чому областю визначення лінійної функції є множина всіх дійсних чисел.
3. При якій умові множиною значень лінійної функції є множина всіх дійсних чисел; одне число?
4. Яка фігура є графіком лінійної функції?
5. При якій умові графік лінійної функції не перетинає вісь x?
6. Назвати координати точок перетину графіка лінійної функції $y=kx+b$ ($k\neq0$) з осями координат.
7. Яке число є нулем лінійної функції $y=kx+b$ ($k\neq0$)?
8. Як побудувати графік лінійної функції?
9. Як за графіком лінійної функції записати її формулу?
10. Записати проміжки знакосталості лінійної функції $y=kx+b$ при додатному k.
11. Записати проміжки знакосталості лінійної функції $y=kx+b$ при від'ємному k.
12. При якій умові лінійна функція зростаюча; спадна?

II

№325. Дано функцію:

а) $y=3x+2$. Знайти значення змінної y, якщо змінна x дорівнює -2; 1; 4.

б) $f(x)=-4x$. Знайти $f(-3)$; $f(-1)$; $f(5)$.

в) $y=0{,}2x+5x$. Знайти значення функції, якщо x дорівнює 3; 1; -2.

г) $y=-\dfrac{x}{6}+3$. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу -6; -12; 12.

№326. Дано функцію:

а) $y=6x-5$. Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої дорівнює 0.

б) $y=-3x+4$. Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої відповідає значенню аргументу $x=0$.

в) $y=5x-2$. Знайти координати точки перетину графіка функції з віссю ординат.

г) $y=-7x+9$. Знайти координати спільної точки графіка функції та осі y.

№327. 1) Графіку функції $y=4x-1$ належать точки $A(5;a)$, $B(-2;b)$, $C\left(\dfrac{1}{4};c\right)$. Знайти a, b і c.

2) Графік функції $y=-7x+3$ проходить через точки $A(-4; a)$, $B(5; b)$, $C(10; c)$. Знайти a, b і c.
3) Які з точок $A(8; 7)$, $B(-12; -8)$, $C(16; 9)$ належать графіку функції $y=\frac{x}{4}+5$?
4) Через які з точок $A(-10; -6)$, $B(20; -8)$, $C(-40; 4)$ проходить графік функції $y=-\frac{x}{5}-4$?
№328. **Дано функцію:**
а) $y=2x+9$. Знайти значення змінної x, якщо значення змінної $y=3$.
б) $y=-3x+4$. Знайти значення x, якщо $y=10$.
в) $f(x)=\frac{x}{3}+5$. Знайти x, якщо $f(x)=1$.
г) $y=\frac{-x}{4}-7$. Знайти значення аргументу x, що відповідають значенню функції -12.
№329. **Дано функцію:**
а) $y=2x+7$. Знайти значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.
б) $f(x)=-x+9$. Знайти значення аргументу x, якщо $f(x)=0$.
в) $y=-\frac{x}{6}+5$. Знайти нулі функції.
г) $y=0{,}1x-5$. Знайти значення аргументу, при яких функція набуває значення, що дорівнює 0.
№330. 1) Графіку функції $y=10x+3$ належить точка $A(a; 33)$. Знайти значення a.
2) Графік функції $y=-7x+1$ проходить через точку $A(a; -27)$. Знайти значення a.
3) Графіку функції $y=-0{,}4x+3$ належить точка $A(a; 1)$. Знайти значення a.
4) Графік функції $y=\frac{x}{3}+4$ проходить через точку $A(a; -14)$. Знайти значення a.
№331. **Побудувати графік функції:**
а) $y=x+5$; б) $y=-x+3$; в) $y=\frac{x}{2}+4$; г) $y=\frac{-x}{3}+9$.
№332. **Побудувати графік функції:**
а) $y=3x+2$. Знайти за графіком значення y, яке відповідає $x=-3$; значення x, яке відповідає $y=-7$.
б) $y=-5x-4$. Знайти за графіком значення функції, яке відповідає значенню аргументу 2; значення аргументу, яке відповідає значенню функції 1;

в) $f(x)=\frac{x}{3}+2$. Знайти за графіком $f(-9)$; значення x, якщо $f(x)=7$.

г) $f(x)=\frac{x}{2}-4$. Знайти за графіком $f(8)$; значення аргументу x, якщо $f(x)=1$.

№333. Побудувати графік функції:

а) $y=5x+1$; б) $y=-2x-3$; в) $y=\frac{x}{4}+1$; г) $y=-\frac{x}{3}+4$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№334. Не виконуючи побудови графіка, встановити проміжки, на яких функція $f(x)=4x+3$ набуває додатних значень.

№335. Не виконуючи побудови графіка, встановити проміжки, на яких функція $f(x)=-3x-4$ набуває від'ємних значень.

№336. Знайти обчисленням координати точки перетину графіків функцій:

а) $y=7x-2$ і $y=-x+6$; б) $y=\frac{x}{4}+2$ і $y=-x+12$;

в) $y=\frac{-x}{3}-3$ і $y=-x+5$; г) $y=\frac{x}{5}+7$ і $y=x+20$.

№337. Знайти обчисленням значення x, при яких набувають однакових значень функції:

а) $y=\frac{x}{4}-5$ і $y=x+10$; б) $y=\frac{-2}{5}x-3$ і $y=2x+13$;

в) $y=x-20$ і $y=\frac{x}{6}+10$; г) $y=\frac{-x}{7}-30$ і $y=2x+15$.

№338. Дано функцію $f(x)=2{,}24x+3$. Не виконуючи обчислень, порівняти:

а) $f(1{,}23)$ і $f(1{,}45)$; б) $f(-1{,}23)$ і $f(-1{,}45)$;

в) $f(-100{,}6)$ і $f(-99{,}6)$; г) $f(2{,}4)$ і $f(0{,}3)$.

№339. Дано функцію $f(x)=-3{,}6x-4$. Не виконуючи обчислень, порівняти:

а) $f(2{,}4)$ і $f(2{,}7)$; б) $f(100{,}2)$ і $f(99{,}2)$;

в) $f(-3{,}7)$ і $f(-3{,}9)$; г) $f(-100{,}6)$ і $f(-90{,}6)$.

№340. Виразити формулою залежність t від S, якщо залежність S від часу t виражається формулою:

а) $S=5t+3$; б) $S=12t+5$; в) $S=at+b$; г) $S=at+b$.

№341. Виразити формулою залежність змінної k від змінної m, якщо залежність змінної m від змінної k виражається формулою:

а) $m=5k+2$; б) $m=5k-3$; в) $m==-5k+3$; г) $m=-5k-2$;

е) $m=ak-3$; є) $m=ak+b$; ж) $m=ak-b$.

№342. **Виразити формулою залежність змінної x від змінної y, якщо залежність змінної y від змінної x виражається формулою:**

а) $y=4x+5$; б) $y=4x-3$; в) $y=-4x+1$; г) $y=-4x-3$;
д) $y=ax+4$; е) $y=ax-7$; є) $y=ax+b$; ж) $y=ax-b$.

№343. а) **Довести, що графік функції $y=ax+b$ при $a\neq0$ перетинає вісь x у точці з абсцисою $-\dfrac{b}{a}$.**

б) Довести, що графік функції $y=ax+b$ перетинає вісь y в точці з ординатою b.

в) **Довести, що графік функції $y=ax+b$ проходить через точку $(1; a+b)$.**

г) **Довести, що будь-яке дійсне число c належить множині значень функції $y=ax+b$ при $a\neq0$.**

д) **Довести, що графіку функції $y=ax+b$ при $a\neq0$ належить точка з ординатою m, де m – довільне дійсне число.**

№344. а) Довести, що при $a>0$ функція $y=ax+b$ зростаюча.

б) Довести, що при $a<0$ функція $y=ax+b$ спадна.

III

№345. **Функція задана формулами:**

а) $y=\begin{cases}2x+1, \text{ якщо } x\geq0,\\ -2x+1, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-3x+2, \text{ якщо } x\geq0,\\ 3x+2, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-4, \text{ якщо } x\geq0,\\ -\dfrac{x}{3}-4, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ г) $y=\begin{cases}\dfrac{-x}{4}-1, \text{ якщо } x\geq0,\\ \dfrac{x}{4}-1, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

Знайти значення функції при значеннях аргументу -10; 5.

№346. 1) **Графіку функції, заданої формулами** $y=\begin{cases}3x+2, \text{ якщо } x\geq0,\\ -3x+2, \text{ якщо } x<0\end{cases}$ **належать точки $A(-4; a)$, $B(0; b)$, $C(3; c)$. Знайти a, b і c.**

2) Графік функції $y=\begin{cases}4x+1, \text{ якщо } x\geq0,\\ -4x-1, \text{ якщо } x<0\end{cases}$ **проходить через точки $A(-3; a)$, $B(1; b)$, $C(0; c)$.** Знайти a, b і c.

3) **Які з точок $A(2;11)$, $B(-2;-5)$, $C(7;-11)$ належать графіку функції** $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ якщо } x\geq0,\\ 4x+3, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$

4) **Через які з точок $A(-2; 9)$, $B(2; -9)$, $C(0; 5)$ проходить графік функції** $y=\begin{cases}-5x+1, \text{ якщо } x\geq0,\\ 2x+5, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$

№347. Знайти нулі функції, заданої формулами:

а) $y=\begin{cases} x-3, \text{ якщо } x \ge 0, \\ x+4, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 2x-1, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -x-4, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} -x+4, \text{ якщо } x \ge 0, \\ x+5, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} -x-8, \text{ якщо } x \ge 0, \\ x-8, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

№348. Побудувати графік функції:

а) $y=2x-5$ з областю визначення $[0;\ \infty)$;

б) $y=4x+3$ з областю визначення $(-\infty;\ 0]$;

в) $y=-3x-2$ з областю визначення $(-\infty;\ 0]$;

г) $y=-5x+4$ з областю визначення $[0;\ \infty)$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№349. Побудувати графік функції:

а) $y=3x-5$ з областю визначення $[1;\ 4]$;

б) $y=-2x+3$ з областю визначення $[-1;\ 5]$;

в) $y=\frac{x}{3}+2$ з областю визначення $[-3;\ 6]$;

г) $y=\frac{-x}{4}+1$ з областю визначення $[-4;\ 0]$.

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№350. Побудувати графік функції:

а) $y=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{x}{3}+1, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} \frac{-x}{2}, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{x}{2}+1, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x+2, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -x+2, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} \frac{-x}{3}+1, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -3x+1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№351. Побудувати графік функції:

а) $y=\begin{cases} \frac{x}{3}+1, \text{ якщо } x \ge 0, \\ x+1, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} -x+2, \text{ якщо } x \ge 0, \\ \frac{-x}{2}+x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x-2, \text{ якщо } x \ge 0, \\ -x-2, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} -x+2, \text{ якщо } x \ge 0, \\ x+2, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№352. Побудувати графік функції:

а) $y=4\left(x-\frac{1}{4}\right)-3x$;   б) $y=-2(x-3)-5$;

в) $y=x^2-x(x+3)+1$;   г) $y=-x(x+3)+x^2-4$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№353. Побудувати графік функції:

а) $y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)-4$;   б) $y=-2(x-4)-5$;

в) $y=x^2-(x-4)\cdot x-3$;   г) $y=-x(x-2)+x^2+3$.

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№354. Знайти графічно значення змінної x, при яких набувають однакових значень функції:

а) $y=x+5$ і $y=-2x+2$;

б) $y=4x+1$ і $y=-2x+7$;

в) $y=x+2$ і $y=-2x+5$;

г) $y=2x+1$ і $y=x+4$.

№355. Знайти графічно координати точок перетину графіків функцій:

а) $y=x+9$ і $y=-4x-6$;   б) $y=\frac{x}{3}-3$ і $y=-x-8$;

в) $y=-x+8$ і $y=\frac{x}{3}+3$;   г) $y=\frac{x}{3}-3$ і $y=-3x+4$.

№356. Встановити графічно значення x, при яких:

а) графік функції $y=\frac{x}{3}+1$ розміщений у системі координат вище прямої $y=3$;

б) графік функції $y=-\frac{x}{4}+1$ розміщений у системі координат нижче прямої $y=2$;

в) графік функції $y=\frac{x}{2}+2$ розміщений в системі координат вище графіка функції $y=-x+7$;

г) графік функції $y=-x-2$ розміщений в системі координат нижче графіка функції $y=\frac{x}{3}+2$.

№357. Встановити графічно значення x, при яких:

а) функція $y=3x+1$ набуває значень, більших від числа 4;

б) функція $y=\frac{-x}{2}+4$ набуває значень, менших від числа 5;

в) функція $y=\frac{x}{4}+4$ набуває значень, більших від значень функції $y=\frac{-x}{4}+6$;

г) функція $y=\frac{x}{2}+3$ набуває значень, менших від значень функції $y=\frac{-x}{3}-4$.

№358. Функція задана формулою $f(x)=|5x+3|$. Обчислити:
а) $f(-2)$; б) $f(-1)$; в) $f(2)$; г) $f(5)$.

№359. Знайти точку графіка функції, в якої абсциса та ордината рівні:

а) $y=5x-2$; б) $y=-4x-3$; в) $y=\frac{x}{5}+2$; г) $y=\frac{-x}{3}-8$.

№360. Знайти точку графіка функції, в якої абсциса і ордината протилежні числа:

а) $y=2x+9$; б) $y=-5x+15$; в) $y=\frac{x}{6}+7$; г) $y=\frac{-x}{3}+8$.

№361. Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі ординат на вказаній відстані:
а) $y=4x+3$, відстань дорівнює 2;
б) $y=-3x-2$, відстань дорівнює 3;
в) $y=\frac{x}{5}-2$, відстань дорівнює 10;
г) $y=\frac{-x}{4}+3$, відстань дорівнює 12.

№362. Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі абсцис на вказаній відстані:
а) $y=3x+1$, відстань дорівнює 7;
б) $y=-4x+1$, відстань дорівнює 7;
в) $y=\frac{x}{2}+3$, відстань дорівнює 5;
г) $y=\frac{-x}{3}+2$, відстань дорівнює 4.

№363. а) Функція $f(x)=4x+5$ задана на відрізку $[1; 10]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.

б) Функція $f(x)=-2x+3$ задана на відрізку $[1; 5]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.

в) Функція $f(x)=\frac{x}{4}+3$ задана на відрізку $[4; 20]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.

г) Функція $f(x)=\frac{-x}{5}+6$ задана на відрізку $[6; 12]$. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.

№364. Знайти множину значень функції:

а) $f(x)=2x+3$, заданої на відрізку $[2; 10]$;

б) $f(x)=-3x+5$, заданої на відрізку $[2; 7]$;

в) $f(x)=\frac{x}{4}+1$, заданої на відрізку $[8; 16]$;

г) $f(x)=\frac{-x}{5}+6$, заданої на відрізку $[10; 30]$.

№365. а) Графіку функції $y=ax-3$ належить точка $A(2; 7)$. Знайти коефіцієнт a.

б) Графіку функції $y=bx+7$ належить точка $A(-3; 5)$. Знайти коефіцієнт b.

в) Графіку функції $y=13x+c$ належить точка $A(-24; -30)$. Знайти коефіцієнт c.

г) Графіку функції $y=\frac{x}{5}+b$ належить точка $A(10; 5)$. Знайти коефіцієнт b.

№366. а) Графіку функції $y=ax+3$ належить точка $A(2; 13)$. Чи належить графіку функції точка $B(-2; 15)$?

б) Графіку функції $y=ax-4$ належить точка $A(-2; 2)$. Чи належить графіку функції точка $B(2; 10)$?

в) Графіку функції $y=3x+b$ належить точка $A(3; -1)$. Чи належить графіку функції точка $B(-3; -19)$?

г) Графіку функції $y=\frac{x}{5}+b$ належить точка $A(10; -2)$. Чи належить графіку функції точка $B(5; -1)$?

№367. Знайти числа a і b, якщо графік лінійної функції $y=ax+b$ перетинає вісь y в точці з ординатою -5 і проходить через точку: а) $A(2; 3)$; б) $B(3; 8)$; в) $C(5; 15)$; г) $M(-2; 7)$.

№368. Записати формулу лінійної функції $y=ax+b$, графік якої перетинає вісь y в точці з ординатою 4, а вісь x у точці з абсцисою: а) 4; б) -2; в) 1; г) -8.

№369. 1) Довести, що коли $a>0$, то при $x>-\frac{b}{a}$ функція $y=ax+b$ набуває тільки додатних значень.

2) Довести, що коли $a>0$, то при $x<-\frac{b}{a}$ функція $y=ax+b$ набуває тільки від'ємних значень.

3) Довести, що коли $a<0$, то при $x>-\frac{b}{a}$ функція $y=ax+b$ набуває тільки від'ємних значень.

4) Довести, що коли $a<0$, то при $x<-\frac{b}{a}$ функція $y=ax+b$ набуває тільки додатних значень.

№370. а) У басейні 100 $м^3$ води. Щохвилини в басейн починає надходити 1,6 $м^3$ води. Задати формулою залежність об'єму води V (у кубічних метрах) у басейні від часу t (у хвилинах) його заповнення. Якою функцією є дана залежність?

б) Маса порожнього ящика 700 г, а маса цвяха 8 г. Задати формулою залежність маси ящика m (в грамах) від кількості цвяхів x. Якою функцією є дана залежність?

в) Довжина прямокутника x см, ширина – на один см менша, а периметр – P см. Задати формулою залежність P від x. Якою функцією є дана залежність?

г) У басейні 800 $м^3$ води. Щосекунди з басейна виливають 0,8 $м^3$ води. Задати формулою залежність об'єму води V (у $м^3$) в басейні від часу виливання t (у секундах). Через скільки часу в басейні не залишиться води? Знайти область визначення функції, що відповідає змісту задачі.

№371. а) Поїзд вирушив з станції A, і пройшовши при розгоні 10 км до пункту B, почав рухатись рівномірно із швидкістю 50 км/год. Знайти:

1) на якій відстані S від до пункту A знаходився поїзд через t годин рівномірного руху;

2) на якій відстані S до пункту B знаходився поїзд через t годин рівномірного руху.

б) З пункту A в пункт B, відстань між якими 120 км, виїхав велосипедист із швидкістю 20 км/год. Знайти:

1) на якій відстані S (у км) від пункту A буде велосипедист через t годин після початку руху;

2) на якій відстані S (км) від пункту B буде велосипедист через t годин після початку руху.

№372. а) Бак, у якому було 10 літрів води, почали наповнювати водою. Кожну хвилину в бак вливають 5 літрів води. Бак заповнюється водою 10 хвилин. Задати формулою залежність об'єму V води у баці через t хвилин після початку заповнення. Побудувати графік даної залежності, відклавши на осі абсцис значення t (довжина однієї клітки відповідає 1 хв, а на осі ординат – значення V (довжина однієї клітки відповідає 10 л води). За графіком дати відповіді на питання:

1) Скільки літрів води було в баці через 2 хв, 4 хв, 10 хв після початку заповнення баку?

2) Через скільки хвилин після початку заповнення у баці виявилось 40 л води?

б) У бак налили води, температура якої 20°C, і нагрівали її до 100°C. Нагрівання здійснювалось так, що через кожну хвилину температура підвищувалась на 2°C. Задати формулою залежність температури води T (у градусах Цельсія) від часу нагрівання t (у хвилинах) і побудувати її графік, відклавши на осі абсцис значення часу t (довжина однієї клітки відповідає 10 хв.), а на осі ординат – значення температури T (довжина однієї клітки відповідає 20°С). За графіком дати відповіді на питання:

1) Якою була температура через 30 хв; 50хв після початку нагрівання?

2) Через скільки часу вода нагрівалась до 80°С?

в) Поїзд вирушив із станції A і, пройшовши при розгоні 10 км, почав рухатись рівномірно зі швидкістю 50 км/год. Знайти, на якій відстані S (у кілометрах) від станції A перебував поїзд через t годин рівномірного руху. Побудувати графік зміни відстані S залежно від часу t рівномірного руху поїзда, відклавши на осі абсцис значення t у годинах (довжина однієї клітки відповідає 0,5 год), а на осі ординат – значення S (довжина однієї клітки відповідає 20 км). За графіком залежності дати відповіді на питання:

1) На якій відстані від пункту A знаходився поїзд через 1,5 год; 2,5 год рівномірного руху?

2) Через скільки годин від початку рівномірного руху поїзд знаходився на відстані 140 км від пункту A?

г) З баку, у якому було 120 л води, почали рівномірно виливати воду, щохвилини 10 л. Задати формулою залежність об'єму V (у літрах) води у баці через t хвилин після початку виливання. Побудувати графік даної функції, відклавши на осі абсцис значення t (довжина однієї клітки відповідає 1 хв), а на осі ординат – значення V (довжина однієї клітки відповідає 10 л води). За графіком дати відповіді на питання:

1) Скільки літрів води було в баці через 4 хв; 6 хв?

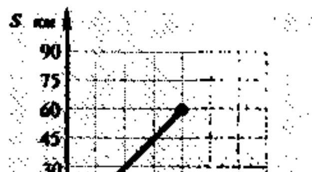
2) Через скільки хвилин у баці було 60 л води?

3) Через скільки хвилин у баці не лишилось води?

Задати область визначення функції, яка відповідає змісту задачі.

№373. З пункту A до пункту B по прямолінійному шосе виїхав велосипедист і через 4 години був у пункті B. Графік залежності відстані велосипедиста до пункту A від часу руху зображено на малюнку 67.

За даним графіком задати формулою залежність відстані велосипедиста до пункту B від часу виїзду з пункту A і побудувати її графік.



Мал. 67

IV

№374. **Знайти кутовий коефіцієнт k лінійної функції $y=kx+b$, якщо її графіку належать точки:**

а) $A(2; 2)$ і $B(4; 1)$; б) $A(1; -4)$ і $B(-5;2)$.

№375. **Знайти k і b, якщо графік лінійної функції $y=kx+b$ проходить через точки:**

$A(1; 4)$ і $B(-2; 2)$; б) $A(3; 1)$ і $B(-3; 3)$.

№376. **Задати формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки:**

а) $A(-2; -2)$ і $B(4; 1)$; б) $A(-2; 6)$ і $B(-1; 4)$.

№377. **Знайти ординату точки перетину графіка лінійної функції з віссю y, якщо він проходить через точки:**

а) $A(-3; -1)$ і $B(-1; 5)$; б) $A(3; 4)$ і $B(-1; -4)$.

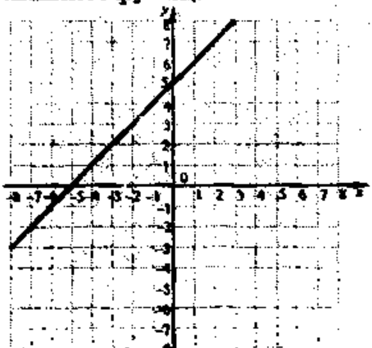
№378. **Знайти абсцису точки перетину графіка лінійної функції з віссю x, якщо йому належать точки:**

а) $A(2; 1)$ і $B(3; -3)$; б) $A(1; 5)$ і $B(7; 3)$.

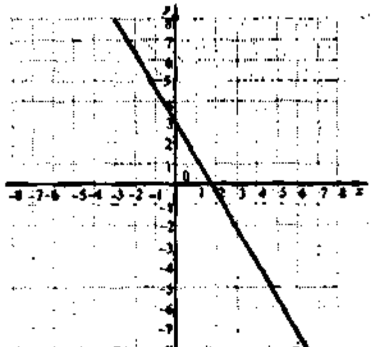
№379. **а) Довести, що коли графік лінійної функції $y=kx+b$ проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то кутовий коефіцієнт $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.**

б) Сформулювати алгоритм (правило) знаходження кутового коефіцієнта лінійної функції, заданої графіком; складання формули лінійної функції, заданої графіком.

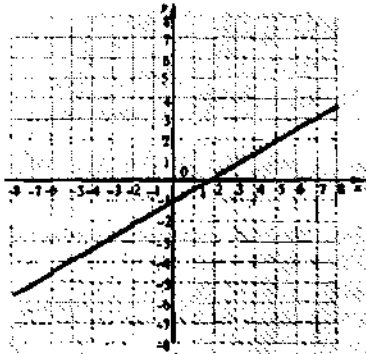
№380. **За графіками лінійних функцій на малюнку 68 обчислити кутовий коефіцієнт, число b і скласти формулу лінійної функції.**

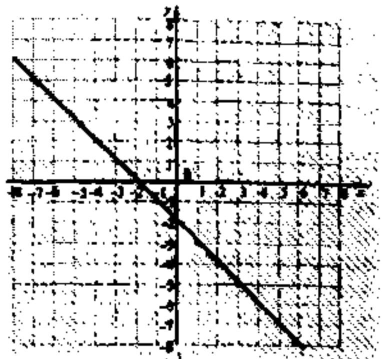


а)



б)


в)


г)

Мал. 68

№381. Дано рівняння:

а) $x-3y=5$; б) $2x-y=3$.

Виразити змінну x через змінну y. Пояснити, чому одержана формула задає змінну x як функцію від змінної y. Встановити вид, область визначення і множину значень цієї функції.

№382. а) Довести, що функції $y=ax+b$ і $y=-ax+b$ при однакових значеннях аргументу набувають протилежних значень.

б) Довести, що графіки функцій $y=ax+b$ і $y=-ax+b$ симетричні відносно осі x.

в) Довести, що функції $y=ax+b$ і $y=-ax+b$ при протилежних значеннях аргументу набувають однакових значень.

г) Довести, що функції $y=ax+b$ і $y=-ax+b$ симетричні відносно осі y.

№383. Дано функцію:

а) $f(x)=3x+2$; б) $f(x)=-4x+3$.

Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка при тих самих значеннях аргументу набуває:

1) протилежних з даною функцією значень функції;
2) значень функції, які на 4 більші від значень даної функції;
3) значень функції, які на 3 менші від значень даної функції.

№384. Дано функцію:

а) $f(x)=4x-1$; б) $f(x)=4x-5$.

Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка приймає однакові значення функції з даною функцією при значеннях аргументу, які:

1) на 5 більші від значень аргументу даної функції;
2) на 3 менші від значень аргументу даної функції.

№385. Побудувати графік функції $f(x)=2x+1$ і функції $y=\varphi(x)$, яка приймає однакові значення з даною функцією при значеннях аргументу, що:

а) на 1 менші; б) на 3 більші.

Побудувати графік функції (№414–417):

№386. а) $y=|x|+3$; б) $y=|x|-4$.

№387. а) $y=|x+4|$; б) $y=|x-4|$.

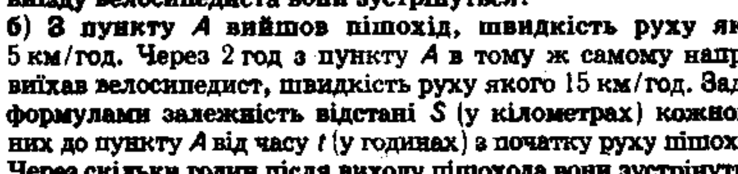
№388. а) $y=-|x+7|$; б) $y=-|x+2|$.

№389. а) $y=-|x|+3$; б) $y=-|x|-4$.

№390. а) Велосипедист, що виїхав з пункту A, перші дві години їхав зі швидкістю 20 км/год, а наступні дві години – зі швидкістю 15 км/год. Задати формулами залежність відстані велосипедиста S (у кілометрах) до пункту A від часу t (у годинах). Обчислити за формулами відстань велосипедиста до пункту A через 1,5 год; 3,5 год від початку руху.
б) Мотоцикліст, що виїхав по прямолінійному шосе з пункту A до пункту B, перші дві години рухався зі швидкістю 60 км/год, а наступну годину – зі швидкістю 50 км/год. Задати формулою залежність відстані мотоцикліста S (у кілометрах) до пункту B від часу t (у годинах), що пройшов з моменту виїзду з пункту A. Обчислити за формулами відстань велосипедиста до пункту B через 0,5 год; 2,5 год після виїзду.

№391. а) З пункту A виїхав велосипедист, швидкість руху якого 20 км/год. Через 2 год з пункту A в тому ж самому напрямі виїхав мотоцикліст, швидкість руху якого 50 км/год. Задати формулами залежність відстані S (у кілометрах) кожного з них до пункту A від часу t (у годинах) з моменту виїзду велосипедиста. Через скільки годин після виїзду велосипедиста вони зустрінуться?
б) З пункту A вийшов пішохід, швидкість руху якого 5 км/год. Через 2 год з пункту A в тому ж самому напрямі виїхав велосипедист, швидкість руху якого 15 км/год. Задати формулами залежність відстані S (у кілометрах) кожного з них до пункту A від часу t (у годинах) з початку руху пішохода. Через скільки годин після виходу пішохода вони зустрінуться?

№392. На малюнку 69 зображено графік залежності відстані велосипедиста до пункту A від часу t. Задати формулами функцію $S=S(t)$.



Мал. 69

ОБЕРНЕНА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Функція, яка задана формулою $y = \frac{k}{x}$, де k – деяке постійне число $(k \neq 0)$, x – незалежна змінна, називається **оберненою пропорційністю**.

№393. **Які з функцій є оберненими пропорційностями:**

а) $y=4x$; **б)** $y=\frac{4}{x}$; **в)** $y=\frac{x}{4}$; **г)** $y=\frac{-2}{x}$; **д)** $y=\frac{x}{12}$; **е)** $y=\frac{-12}{x}$ **?**

№394. V, t, S **– змінні. Які з функцій є оберненими пропорційностями:**

а) $V=\frac{4}{t}$; **в)** $V=\frac{t}{4}$; **г)** $S=5t$; **д)** $S=\frac{t}{5}$; **е)** $S=\frac{5}{t}$ **?**

№395. **Записати обернені пропорційності з коефіцієнтом** k**, що дорівнює** -1; 1; -5; 5; $0{,}6$; $-0{,}6$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

№396. **Які значення набувають обернені пропорційності при значенні аргументу 4:**

а) $y=\frac{20}{x}$; **б)** $y=\frac{-20}{x}$; **в)** $y=\frac{12}{x}$; **г)** $y=\frac{-12}{x}$ **?**

№397. **При якому значенні аргументу значення оберненої пропорційності дорівнює 16:**

а) $y=\frac{8}{x}$; **б)** $y=\frac{4}{x}$; **в)** $y=\frac{-8}{x}$; **г)** $y=\frac{-2}{x}$ **?**

Областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ є множина дійсних чисел, крім $x=0$, тобто $D(y)=(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$.

№398. **Пояснити, чому в область визначення оберненої пропорційності не входить число 0.**

№399. **Знайти область визначення функції:**

а) $y=\frac{4}{x}$; **б)** $y=4x$; **в)** $y=\frac{-4}{x}$; **г)** $y=-4x$; **д)** $y=\frac{1}{4x}$; **е)** $y=\frac{0{,}4}{x}$.

№400. **При яких значеннях a має розв'язки рівняння:**

а) $\frac{10}{x}=a$; **б)** $\frac{-10}{x}=a$; **в)** $10x=a$; **г)** $\frac{1}{x}=a$?

№401. **При яких значеннях b рівняння не має розв'язків:**

а) $\frac{20}{x}=b$; **б)** $\frac{-20}{x}=b$; **в)** $20x=b$; **г)** $\frac{2}{x}=b$?

Множиною значень оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$ є множина всіх дійсних чисел, крім $y=0$, тобто $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

№402. **а) Пояснити, чому в множину значень функції $y=\frac{k}{x}$ не входить число 0.**

б) Пояснити, чому будь-яке дійсне число, відмінне від 0, входить у множину значень функції $y=\frac{k}{x}$.

№403. **Знайти множину значень функції:**

а) $y=\frac{-8}{x}$; **б)** $y=-8x$; **в)** $y=\frac{8}{x}$; **г)** $y=8x$; **д)** $y=\frac{0,8}{x}$; **е)** $y=0,8x$.

№404. **Скласти таблицю значень заданої функції для чисел, які є дільниками числа 10 і для протилежних їм чисел. Позначити в системі координат точки, що відповідають табличним значенням і сполучити точки плавною лінією:**

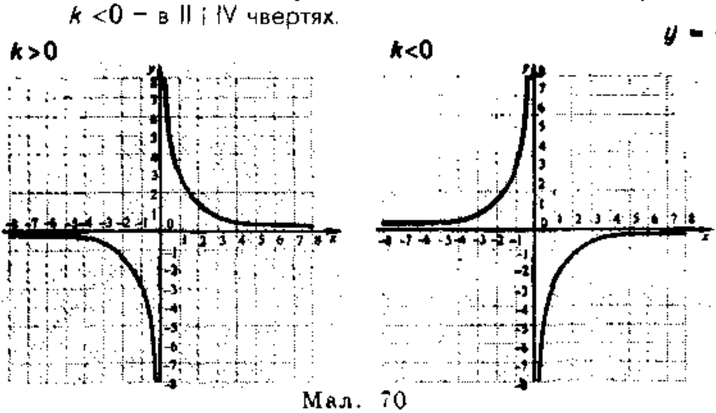
а) $y=\frac{10}{x}$; **б)** $y=\frac{-10}{x}$.

Графіком функції $y=\frac{k}{x}$ є гіпербола – розривна крива, що складається з двох неперервних віток.

При $k>0$ вітки гіперболи знаходяться в I і III чвертях, при $k<0$ – в II і IV чвертях.

$y=\frac{k}{x}$

$k>0$ $k<0$

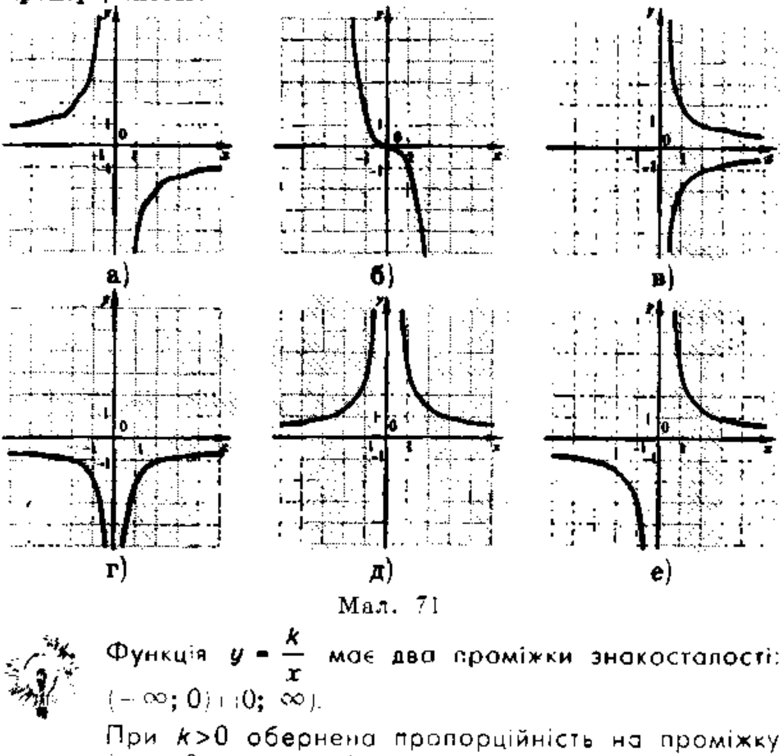


Мал. 70

№405. **В яких чвертях знаходиться графік функції:**

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=-\dfrac{1}{x}$; в) $y=\dfrac{20}{x}$; г) $y=\dfrac{0,4}{x}$; д) $y=-\dfrac{20}{x}$; е) $y=\dfrac{-0,4}{x}$?

№406. **Які з графіків на малюнку 71 є графіками оберненої пропорційності?**



Мал. 71

Функція $y=\dfrac{k}{x}$ має два проміжки знакосталості: $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$.

При $k>0$ обернена пропорційність на проміжку $(-\infty;\ 0)$ приймає від'ємні значення, а на проміжку $(0;\ \infty)$ – додатні значення.

При $k<0$ обернена пропорційність на проміжку $(-\infty;\ 0)$ приймає додатні значення, а на проміжку $(0;\ \infty)$ – від'ємні значення.

№407. **Які значення (додатні чи від'ємні) приймає на проміжку $(-\infty;\ 0)$ функція:**

а) $y=\dfrac{5}{x}$; б) $y=\dfrac{3}{x}$; в) $y=-\dfrac{4}{x}$; г) $y=\dfrac{0,4}{x}$; д) $y=\dfrac{1}{4x}$; е) $y=\dfrac{-1}{4x}$?

№408. **Які значення (додатні чи від'ємні) приймає на проміжку $(0;\ \infty)$ функція:**

а) $y=\dfrac{7}{x}$; б) $y=\dfrac{-7}{x}$; в) $y=\dfrac{-1,7}{x}$; г) $y=\dfrac{1}{7x}$; д) $y=-\dfrac{1}{7x}$; е) $y=\dfrac{100}{x}$?

Функція $y = \frac{k}{x}$ має два проміжки монотонності: $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$. При $k>0$ обернена пропорційність спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$. При $k<0$ обернено пропорційність зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$.

№409. **Скільки проміжків монотонності має функція:**

а) $y=\frac{14}{x}$; б) $y=14x$; в) $y=\frac{-14}{x}$; г) $y=-14x$; д) $y=0,2x$; е) $y=\frac{-0,2}{x}$?

№410. **Дано функцію $y=\frac{20}{x}$. Які з тверджень про дану функцію правильні?**

а) $D(y)=(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$.
б) $E(y)=(-\infty; \infty)$.
в) Якщо $x>0$, то $y(x)>0$.
г) Якщо $x>0$, то $y(x)<0$.
д) Якщо $x<0$, то $y(x)>0$.
е) Якщо $x<0$, то $y(x)<0$.

№411. **Дано функцію $y=\frac{-100}{x}$. Які з тверджень про дану функцію правильні?**

а) $D(y)=(-\infty; \infty)$.
б) $E(y)=(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$.
в) Якщо $x<0$, то $y(x)<0$.
г) Якщо $x<0$, то $y(x)>0$.
д) Якщо $x>0$, то $y(x)>0$.
е) Якщо $x>0$, то $y(x)<0$.

№412. **Які з функцій мають два проміжки монотонності та на кожному з них зростають:**

а) $y=\frac{-2}{x}$; б) $y=\frac{x}{2}$; в) $y=\frac{2}{x}$; г) $y=\frac{1}{2x}$; д) $y=\frac{-0,2}{x}$; е) $y=\frac{0,2}{x}$?

№413. **Дано функцію $f(x)=\frac{k}{x}$, де $k>0$. Порівняти:**

а) $f(-10)$ і $f(-5)$;
б) $f(-5,4)$ і $f(-10,4)$;
в) $f(-2)$ і $f(12)$;
г) $f(12,5)$ і $f(2,5)$.

№414. **Дано функцію $f(x)=\frac{k}{x}$, де $k<0$. Порівняти:**

а) $f(-9)$ і $f(-6)$;
б) $f(-6,4)$ і $f(-9,4)$;
в) $f(3)$ і $f(13)$;
г) $f(11,5)$ і $f(1,5)$.

№415. **Дано функцію $f(x)=\frac{k}{x}$, де $k>0$; $x_1<x_2$, x_1 і x_2 – від'ємні числа; $x_3<x_4$, x_3 і x_4 – додатні числа. Накреслити схематично графік функції та порівняти числа:**

а) $f(x_2)$ і $f(x_1)$; б) $f(x_4)$ і $f(x_3)$; в) $f(x_1)$ і $f(x_3)$; г) $f(x_1)$ і $f(x_4)$; д) $f(x_2)$ і $f(x_3)$; е) $f(x_2)$ і $f(x_4)$. **Відповіді пояснити.**

№416. Дано функцію $\varphi(x)=\frac{k}{x}$, де $k<0$; $x_1<x_2$, x_1 і x_2 – від'ємні числа; $x_3<x_4$, x_3 і x_4 – додатні числа. Накреслити схематично графік функції і порівняти числа:
а) $\varphi(x_2)$ і $\varphi(x_1)$; б) $\varphi(x_4)$ і $\varphi(x_3)$; в) $\varphi(x_1)$ і $\varphi(x_3)$; г) $\varphi(x_1)$ і $\varphi(x_4)$; д) $\varphi(x_2)$ і $\varphi(x_3)$; е) $\varphi(x_2)$ і $\varphi(x_4)$. Відповіді пояснити.

№417. Дано функцію $y=\frac{7}{x}$. Які з тверджень про дану функцію правильні?
1) Область визначення функції – множина всіх дійсних чисел.
2) Множину значень функції складають усі дійсні числа, крім 0.
3) Функція спадна.
4) Функція спадна на проміжках .
5) Якщо x_2 і x_1 належать області визначення функції та $x_2>x_1$, то $y_2<y_1$.
6) Якщо x_2 і x_1 – від'ємні числа і $x_2>x_1$, то $y_2<y_1$.

№418. Дано функцію $y=\frac{-15}{x}$. Які з тверджень про дану функцію правильні?
а) $D(y)=(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$.
б) $E(y)=(-\infty; \infty)$.
в) Функція зростаюча.
г) Функція зростаюча на проміжках.
д) Якщо $x>0$, то $y(x)<0$.
е) Якщо $x<0$, то $y(x)<0$.
є) Якщо $x_2>x_1$, то $y_2>y_1$.
ж) Якщо x_2 і x_1 – два додатних або два від'ємних числа та $x_2>x_1$, то $y_2>y_1$.

№419. Дано функцію $y=\frac{8}{x}$ і числа x_2 і x_1 такі, що $x_2>x_1$. Якими повинні бути за знаком (додатними чи від'ємними) числа x_2 і x_1, щоб виконувалась нерівність: а) $y_2>y_1$; б) $y_2<y_1$?

№420. Дано функцію $y=\frac{-8}{x}$ і числа x_2 і x_1 такі, що $x_2>x_1$. Якими повинні бути за знаком (додатними чи від'ємними) числа x_2 і x_1 , щоб виконувалась нерівність: а) $y_2>y_1$; б) $y_2<y_1$?

№421. Контрольні питання.
1. Яка функція називається оберненою пропорційністю?
2. Пояснити, чому областю визначення оберненої пропорційності є множина всіх дійсних чисел, крім 0.
3. Пояснити, чому множиною значень оберненої пропорційності є множина всіх чисел, крім 0.

4. Яка фігура є графіком оберненої пропорційності?

5. В яких чвертях розміщений графік функції $y=\frac{k}{x}$, якщо $k>0$; $k<0$?

6. Скільки проміжків знакосталості має функція $y=\frac{k}{x}$, де $k>0$? Назвати їх та знаки функції на них.

7. Скільки проміжків знакосталості має функція $y=\frac{k}{x}$, де $k<0$? Назвати їх та знаки функції на них.

8. Скільки та які проміжки монотонності має функція $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$?

9. Скільки і які проміжки монотонності має функція $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$?

II

№422. **Дано функцію:**

а) $y=\frac{18}{x}$. **Знайти значення змінної y, якщо змінна x дорівнює** -3; 1; 3.

б) $f(x)=\frac{-16}{x}$. **Знайти** $f(8)$; $f(-8)$; $f(32)$.

в) $y=\frac{40}{x}$. **Знайти значення функції, якщо x дорівнює** -2; 2; 80.

г) $y=-\frac{12}{x}$. **Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу** -3; 3; 6.

№423. **а) Графіку функції $y=\frac{4}{x}$ належать точки $A(2; a)$, $B(-4; b)$, $C(; c)$. Знайти a, b і c.**

б) Графік функції $y=-\frac{20}{x}$ проходить через точки $A(-2; a)$, $B(-10; b)$, $C(10; c)$. Знайти a, b і c.

в) Які з точок $A(3; -5)$, $B(5; 3)$, $C(-5; 3)$ належать графіку функції $y=\frac{15}{x}$?

г) Через які з точок $A(-4; 3)$, $B(-4; -3)$, $C(4; 3)$ проходить графік функції $y = -\frac{12}{x}$?

№424. Дано функцію:

а) $y = \frac{20}{x}$. Знайти значення змінної x, якщо значення змінної $y = 5$.

б) $y = \frac{-18}{x}$. Знайти значення x, якщо $y = -36$.

в) $f(x) = \frac{2}{x}$. Знайти x, якщо $f(x) = 48$.

г) $y = \frac{-36}{x}$. Знайти значення аргументу x, що відповідають значенню функції -4.

№425. а) Графіку функції $y = \frac{24}{x}$ належить точка $A(a; 3)$. Знайти значення a.

б) Графік функції $y = \frac{-48}{x}$ проходить через точку $A(a; -6)$. Знайти значення a.

в) Графік функції $y = \frac{-50}{x}$ проходить через точку $A(a; 10)$. Знайти значення a.

г) Графік функції $y = \frac{100}{x}$ проходить через точку $A(a; -4)$. Знайти значення a.

№426. Побудувати схематично графік функції, склавши таблицю значень функції для чисел виду $x = \pm a$, де a – відповідно дільники чисел 12 (а; в) і 8 (б; г):

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = \frac{8}{x}$; в) $y = \frac{-12}{x}$; г) $y = \frac{-8}{x}$.

На графіку функції позначити:

1) точки A, B і C, абсциси яких відповідно дорівнюють -5; -3; 5;

2) точки M, P і K, ординати яких відповідно дорівнюють -9; 4; 9.

№427. Побудувати схематично графік функції, склавши таблицю значень функції для чисел виду $x = \pm a$, де a – відповідно дільники чисел 4 (а; б) і 6 (в; г). За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень; знайти проміжки зростання та спадання функції:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=\frac{-4}{x}$; в) $y=\frac{6}{x}$; г) $y=\frac{-6}{x}$.

№428. **Функція задана формулою $f(x)=\frac{1,2}{x}$. Не виконуючи обчислень, порівняти:**

а) $f(1,23)$ і $f(1,45)$; б) $f(100,4)$ і $f(99,4)$;
в) $f(-1,23)$ і $f(-1,45)$; г) $f(-100,4)$ і $f(-99,4)$.

№429. **Функція задана формулою $f(x)=\frac{-3,2}{x}$. Не виконуючи обчислень, порівняти:**

а) $f(2,23)$ і $f(2,45)$; б) $f(100,2)$ і $f(99,2)$;
в) $f(-3,24)$ і $f(-3,45)$; г) $f(-200,4)$ і $f(-205,4)$.

№430. **Виразити формулою залежність сили струму I від опору провідника R, якщо:**

а) $R=\frac{1}{I}$; б) $R=\frac{10}{I}$; в) $R=\frac{12,4}{I}$; г) $R=\frac{U}{I}$.

№431. **Виразити змінну t через змінну m, якщо:**

а) $m=\frac{1}{t}$; б) $m=\frac{7}{t}$; в) $m=\frac{12,4}{t}$; г) $m=\frac{a}{t}$.

№432. **Виразити змінну x через змінну y, якщо:**

а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{6}{x}$; в) $y=\frac{9,6}{x}$; г) $y=\frac{1}{x}$.

№433. **Знайти обчисленням координати точок перетину графіків функцій:**

а) $y=\frac{32}{x}$ і $y=2x$; б) $y=\frac{-36}{x}$ і $y=-4x$;
в) $y=\frac{25}{x}$ і $y=\frac{x}{4}$; г) $y=\frac{-27}{x}$ і $y=\frac{-x}{3}$.

№434. **Знайти обчисленням координати спільних точок графіків функцій:**

а) $y=\frac{5}{x}$ і $y=5x$; б) $y=\frac{7}{x}$ і $y=\frac{x}{7}$;
в) $y=\frac{-4}{x}$ і $y=-4x$; г) $y=\frac{-9}{x}$ і $y=-\frac{1}{9}x$.

№435. **Знайти обчисленням значення x, при яких набувають однакових значень функції:**

а) $y=\frac{18}{x}$ і $y=\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{-18}{x}$ і $y=\frac{-x}{2}$;

в) $y=\frac{40}{x}$ і $y=10x$;　　　　　г) $y=\frac{-40}{x}$ і $y=-10x$.

№436. Довести, що функція є непарною:

а) $y=\frac{4}{x}$;　б) $y=\frac{-3}{x}$;　в) $y=\frac{0,1}{x}$;　г) $y=\frac{-0,1}{x}$.

№437. а) Довести, що будь-яке дійне число m, відмінне від нуля, є значенням функції $y=\frac{k}{x}$.

б) Довести, що обернена пропорційність не має нулів.

в) Довести, що проміжки, які складають область визначення оберненої пропорційності, є її проміжками знакосталості, тобто проміжками, на яких вона зберігає знак.

г) Довести, що при $k>0$ графік функції $y=\frac{k}{x}$ розміщений у I і III чвертях.

д) Довести, що при $k<0$ графік функції $y=\frac{k}{x}$ розміщений у II і IV чвертях.

№438. а) Функція задана формулою $y=\frac{k}{x}$, де $k>0$. Довести, що коли x_2 і x_1 такі, що належать одному й тому самому проміжку області визначення функції і $x_2>x_1$, то для відповідних їм значень функції y_2 і y_1 виконується нерівність $y_2<y_1$.

б) Функція задана формулою $y=\frac{k}{x}$, де $k<0$. Довести, що коли x_2 і x_1 такі, що належать одному й тому самому проміжку області визначення функції і $x_2>x_1$, то для відповідних значень їм значень функції y_2 і y_1 виконується нерівність $y_2>y_1$.

№439. Довести, що функція $y=\frac{k}{x}$ є непарною функцією.

III

№440. Побудувати схематично графік функції:

а) $y=\frac{6}{x}$ з областю визначення $(0;\ \infty)$;

б) $y=\frac{10}{x}$ з областю визначення $(-\infty;\ 0)$;

в) $y=-\frac{6}{x}$ з областю визначення $(-\infty; 0)$;

г) $y=-\frac{10}{x}$ з областю визначення $(0; \infty)$.

За графіком встановити множину значень функції.

№441. Знайти $f(-4)$, $f(4)$, $f(-10)$, $f(10)$, якщо функція задана формулами:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{8}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{-8}{x}, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\frac{40}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{-40}{x}, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\frac{-8}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{8}{x}, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\frac{-40}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{40}{x}, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

№442. а) Графіку функції, заданої формулами $y=\begin{cases}\frac{4}{x}, \text{ якщо } x>0\\ \frac{-4}{x}, \text{ якщо } x<0\end{cases}$ належать точки $A(-2; a)$, $B(2; b)$, $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Знайти a, b і c.

б) Графік функції $y=\begin{cases}\frac{4}{x}, \text{ якщо } x<0,\\ \frac{-4}{x}, \text{ якщо } x>0\end{cases}$ проходить через точки $A(-4; a)$, $B(4; b)$, $C\left(\frac{1}{4}; c\right)$. Знайти a, b і c.

в) Які з точок $A(5; 4)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 10)$ належать графіку функції $y=\begin{cases}\frac{20}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{-20}{x}, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$

г) Через які з точок $A(10; -5)$, $B(10; 5)$, $C(-10; 5)$ проходить графік функції $y=\begin{cases}\frac{-50}{x}, \text{ якщо } x>0,\\ \frac{50}{x}, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$

№443. Побудувати схематично графік функції:

а) $y=\begin{cases} \frac{-10}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{10}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} \frac{8}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{-8}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} \frac{12}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{4}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} \frac{-12}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{-4}{x}, \text{ якщо } x<0. \end{cases}$

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№444. Побудувати графік функції:

а) $y=\begin{cases} \frac{6}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{-6}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} \frac{-6}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{6}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} \frac{12}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{-12}{x}, \text{ якщо } x<0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} \frac{-4}{x}, \text{ якщо } x>0, \\ \frac{4}{x}, \text{ якщо } x<0. \end{cases}$

За графіком встановити проміжки зростання та спадання; множину значень функції.

№445. **Знайти графічно значення змінної x, при яких набувають однакових значень функції:**

а) $y=\frac{8}{x}$ і $y=2x$; б) $y=\frac{-8}{x}$ і $y=-2x$;

в) $y=\frac{12}{x}$ і $y=3x$; г) $y=\frac{-12}{x}$ і $y=-3x$.

№446. **Знайти графічно координати точок перетину графіків функцій:**

а) $y=\frac{6}{x}$ і $y=\frac{2x}{3}$; б) $y=\frac{-6}{x}$ і $y=-\frac{1}{3}x$;

в) $y=\frac{10}{x}$ і $y=\frac{2}{5}x$; г) $y=\frac{-10}{x}$ і $y=\frac{-2}{5}x$.

№447. **Встановити графічно значення x, при яких:**

а) **графік функції $y=\frac{10}{x}$ розміщений у системі координат вище графіка функції $y=-2x$;**

б) графік функції $y=\frac{10}{x}$ розміщений у системі координат нижче графіка функції $y=-4x$;

в) графік функції $y=\frac{12}{x}$ розміщений у системі координат вище графіка функції $y=\frac{x}{3}$;

г) графік функції $y=\frac{-12}{x}$ розміщений у системі координат нижче графіка функції $y=-3x$.

№448. **Встановити графічно значення x, при яких:**

а) функція $y=\frac{12}{x}$ набуває значень, більших від значень функції $y=4$;

б) функція $y=\frac{10}{x}$ набуває значень, менших від значень функції $y=2$;

в) функція $y=\frac{8}{x}$ набуває значень, більших від значень функції $y=2x$;

г) функція $y=\frac{-8}{x}$ набуває значень, менших від значень функції $y=-2x$.

№449. **Функція задана формулою $f(x)=x+\frac{20}{x}$. Обчислити:**

а) $f(2)-f(1)$; б) $f(4)-f(2)$; в) $f(-2)-f(-1)$; г) $f(-19)-f(-1)$.

№450. **Записати у вигляді суми постійної та оберненої пропорційності функцію:**

а) $y=\frac{2x+5}{x}$; б) $y=\frac{3x-7}{x}$; в) $y=\frac{2-5x}{x}$; г) $y=\frac{-3x-7}{x}$.

№451. **Побудувати схематично графік функції, склавши таблицю значень функції для чисел виду $x=\pm a$, де a – відповідно дільники чисел 8 (а; в) і 12 (б; г). За графіком встановити проміжки монотонності функції.:**

а) $y=4+\frac{8}{x}$; б) $y=\frac{12}{x}-2$; в) $y=2-\frac{8}{x}$; г) $y=\frac{-12}{x}-3$.

№452. **Побудувати схематично графік функції, склавши таблицю значень функції для чисел виду $x=\pm a$, де a – відпо-**

відно дільники чисел 6 (а; в) і 4 (б; г). За графіком встановити проміжки знакосталості та множину значень функції:

а) $y=3+\frac{6}{x}$; б) $y=\frac{4}{x}-4$; в) $y=2-\frac{6}{x}$; г) $y=\frac{-4}{x}-2$.

№453. Знайти точки графіка функції, у яких однакові абсциса та ордината:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=\frac{-9}{x}$; в) $y=\frac{-16}{x}$; г) $y=\frac{-100}{x}$.

№454. Знайти точки графіка функції, у яких абсциса та ордината – протилежні числа:

а) $y=-\frac{4}{x}$; б) $y=\frac{-9}{x}$; в) $y=\frac{-16}{x}$; г) $y=\frac{-100}{x}$.

№455. Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі ординат на вказаній відстані:

а) $y=\frac{18}{x}$, відстань дорівнює 8;

б) $y=\frac{36}{x}$, відстань дорівнює 10;

в) $y=\frac{10}{x}$, відстань дорівнює 2;

г) $y=\frac{-100}{x}$, відстань дорівнює 20.

№456. Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі абсцис на вказаній відстані:

а) $y=\frac{18}{x}$, відстань дорівнює 9;

б) $y=\frac{36}{x}$, відстань дорівнює 9;

в) $y=\frac{-18}{x}$, відстань дорівнює 2;

г) $y=\frac{-36}{x}$, відстань дорівнює 4.

№457. а) Функція $f(x)=\frac{20}{x}$ задана на відрізку [2; 5]. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.

б) Функція $f(x)=\frac{-40}{x}$ задана на відрізку [1; 10]. Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.

в) Функція $f(x)=\frac{30}{x}$ задана на відрізку [5; 15]. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.

г) Функція $f(x)=\frac{-50}{x}$ задана на відрізку [2; 10]. Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.

№458. **Знайти множину значень функції:**

а) $f(x)=\frac{60}{x}$**, заданої на відрізку [5; 30];**

б) $f(x)=\frac{80}{x}$**, заданої на відрізку [2; 10];**

в) $f(x)=\frac{-60}{x}$**, заданої на відрізку [2; 10];**

г) $f(x)=\frac{-80}{x}$**, заданої на відрізку [4; 40].**

№459. **а) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(8;2)$. Знайти коефіцієнт k.**

б) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(8;-4)$. Знайти коефіцієнт k.

в) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A\left(4;\frac{1}{2}\right)$. Знайти коефіцієнт k.

г) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A\left(\frac{1}{4};-12\right)$. Знайти коефіцієнт k.

№460. **а) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(4;3)$. Чи належить графіку функції точка $B(-2;6)$?**

б) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(12;1)$. Чи належить графіку функції точка $B(-3;4)$?

в) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(3;-4)$. Чи належить графіку функції точка $B\left(24;-\frac{1}{2}\right)$?

г) Графіку функції $f(x)=\frac{k}{x}$ належить точка $A(-6;2)$. Чи належить графіку функції точка $B(3;4)$?

№461. **Знайти число a, якщо дані точки належать графіку оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$:**

а) $A(5; 9)$ і $B(15; a)$; б) $A(a; 2)$ і $B(40; 8)$;
в) $A(10; 15)$ і $B(a; 3)$; г) $A(8; a)$ і $B(-2; 40)$.

№462. **Знайти проміжки монотонності функції, якщо графіку оберненої пропорційності належить точка:**

а) $A(4; -3)$; б) $B(2; 8)$; в) $C\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$; г) $K(-10; 5)$.

№463. **Знайти проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень, якщо графіку оберненої пропорційності належить точка:**

а) $A(-3; -4)$; б) $B(8; 10)$; в) $C(-12; 4)$; г) $K(1; -6)$.

№464. **Виразити формулою залежність t від V, якщо залежність швидкості руху матеріальної точки від часу t виражається формулою:** а) $V = \frac{1}{t}$; б) $V = \frac{10}{t}$; в) $V = \frac{4{,}8}{t}$; г) $V = \frac{a}{t}$.

№465. **Виразити формулою залежність b від a, якщо залежність довжини прямокутника a від ширини b виражається формулою:** а) $a = \frac{1}{b}$; б) $a = \frac{10}{b}$; в) $a = \frac{9{,}6}{b}$; г) $a = \frac{S}{b}$.

№466. а) **Задати формулою залежність часу t (у годинах) проходження відстані, що дорівнює 360 км, від швидкості V (у км/год). Якою функцією є дана залежність? За формулою знайти: 1) значення функції, що відповідають значенням аргументу 60; 90; 2) значення аргументу, що відповідають значенням функції 3; 8.**

б) **Задати формулою залежність маси m овочів (у кілограмах), яка може бути придбана на 20 гривень, в залежності від ціни n одного кілограма овочів (у гривнях). Якою функцією є дана залежність? За формулою дати відповіді на питання: 1) Скільки кілограмів овочів можна купити, якщо ціна одного кілограма овочів дорівнює 2 гривні; 5 гривень? 2) Яка ціна одного кілограма овочів, якщо можна купити 4 кг, 8 кг?**

в) **Задати наближену формулу залежності кількості n обертів колеса, які воно зробить на відстані 360 м, від його діаметра d (у метрах) (взяти наближене значення числа π, рівне 3). Якою функцією є дана залежність? За формулою знайти значення функції, що відповідають значенням аргументу 0,2 і 0,8. Знайти їх відношення та порівняти з відношеннями аргументів. Обчислити значення аргументів, що відповідають значенням функції 300; 1000.**

г) Задати формулою залежність часу t (у годинах) виконання робітником завдання, що становить 10 деталей, від продуктивності n – кількості деталей, що може виготовити робітник за одну годину. Якою функцією є дана залежність? Вважаючи, що продуктивність праці виражається цілим числом, встановити множину значень і область визначення даної функції, які відповідають змісту задачі. Скільки точок у системі координат складають графік такої функції?
д) Задати формулою залежність часу t (у годинах) виконання завдання, що становить 50 деталей, від кількості робітників n з однаковою продуктивністю праці – виготовленням однієї деталі за одну годину. Якою функцією є дана залежність? Встановити область визначення функції, яка відповідає змісту задачі. Скільки точок у системі координат складають графік функції?
е) Завдання, що складає 40 деталей, один робітник може виконати за 10 годин. Задати формулою залежність часу t (у годинах) виконання завдання від кількості n робітників із такою самою продуктивністю праці.
Дати відповіді на питання: 1) Якою функцією є дана залежність? 2) Яка область визначення функції відповідає змісту задачі? 3) Скільки точок у системі координат складають графіки цієї функції? 4) Які значення функції відповідають значенням аргументу 2; 5? 5) При яких значеннях аргументу функція набуває значень 1,5; 2,5?

№467. а) Задати формулою залежність часу t (у годинах) проходження відстані, що дорівнює 100 км, від швидкості v (у км/год). Якою функцією є дана залежність ? Побудувати графік функції з областю визначення [10; 100], відклавши на осі абсцис значення v (довжина однієї клітки відповідає 10 км/год), а на осі ординат – значення t (довжина однієї клітки відповідає двом годинам).
б) Задати формулою залежність швидкості v (у км/год) проходження відстані, що дорівнює 240 км, від часу t (у годинах). Якою функцією є дана залежність? Побудувати графік даної функції з областю визначення [10; 24], відклавши на осі абсцис значення t (довжина однієї клітки відповідає 2 годинам), а на осі ординат – значення v (довжина однієї клітки відповідає 20 км/год).
в) Задати формулою залежність довжини а (у метрах) прямокутника, площа якого дорівнює 50м^2, від ширини в (у метрах). Якою функцією є дана залежність? Побудувати її графік з областю визначення, що відповідає змісту задачі.

г) Задати формулою залежність кількості кроків n, затрачених на проходження відстані, що дорівнює 48 м, від довжини e одного кроку (в метрах). Якою функцією є дана залежність? Побудувати графік даної функції з областю визначення [0,2; 1,3], відклавши на осі абсцис значення e (довжина однієї клітки відповідає 0,1 м), а на осі ординат – значення n (довжина однієї клітки відповідає 20 крокам). За графіком функції: 1) знайти значення функції, що відповідає значенням аргументу 0,4; 0,8; 1,2; 2) знайти довжину одного кроку, якщо кількість кроків дорівнює 160; 80; 40.

№468. а) Довести, що в оберненої пропорційності добуток значень аргументів і відповідних їм значень функцій дорівнюють одному й тому самому числу.

б) Довести, що коли точка $A(a; b)$ належить графіку оберненої пропорційності, то й точка $B(b; a)$ також належить даному графіку.

в) Довести, що у всіх точок, які є точками графіка оберненої пропорційності, добутки абсцис і ординат дорівнюють одному й тому самому числу.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

Знайти область визначення функції (№469–471):

№469. а) $y = \frac{20}{|x|}$; б) $y = -\frac{20}{|x|}$.

№470. а) $y = \frac{20}{|x| - 2}$; б) $y = \frac{30}{|x| - 5}$.

№471. а) $y = \frac{50}{|x| + 1}$; б) $y = \frac{x}{|x + 10|}$.

Знайти множину значень функції (№472–473):

№472. а) $y = \frac{12}{|x|}$; б) $y = \frac{100}{|x|}$.

№473. а) $y = -\frac{20}{|x|}$; б) $y = -\frac{50}{|x|}$.

№474. Довести, що графік функції симетричний відносно початку координат: а) $y = \frac{7}{x}$; б) $y = \frac{-7}{x}$; в) $y = \frac{0,3}{x}$; г) $y = -\frac{3}{x}$.

№475. **Дано функцію: а)** $f(x) = \frac{8}{x}$ **; б)** $f(x) = -\frac{10}{x}$**. Задати формулою функцію** $y=\varphi(x)$**, яка при тих самих значеннях аргументу набуває:**

1) **значень, які протилежні до значень даної функції;**
2) **значень, які на 2 більші від значень даної функції;**
3) **значень, які на 3 менші від значень даної функції.**

№476. Дано функцію: а) $f(x) = \frac{6}{x}$; б) $f(x) = \frac{-12}{x}$. Задати **формулою функцію** $y=\varphi(x)$**, яка набуває однакових із даною функцією значень при значеннях аргументу, які:**

1) **на 5 менші;** 2) **на 3 більші.**

№477. **Побудувати графік функції: а)** $f(x) = \frac{6}{x}$ **; б)** $f(x) = \frac{-8}{x}$ і графік функції $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових значень із функцією $f(x)$ при значеннях аргументу, які:

1) на 2 більші; 2) на 3 менші.

Записати формулу функції $y=\varphi(x)$.

Побудувати графіки функцій у одній системі координат (№478–479):

№478. а) $f(x) = \frac{12}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{12}{x-4}$;

б) $f(x) = \frac{-12}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{-12}{x-3}$.

№479. а) $f(x) = \frac{8}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{8}{x+3}$;

б) $f(x) = \frac{-8}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{-8}{x+2}$.

Побудувати графіки функцій (№480–481):

№480. а) $y = \frac{4}{|x|}$; б) $y = \frac{12}{|x|}$.

№481. а) $y = \frac{-4}{|x|}$; б) $y = \frac{-12}{|x|}$.

СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ
$y=x^2$ і $y=x^3$

Функція $y=x^2$

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Областю визначення функції $y = x^2$ є множиною дійсних чисел R.

№482. **Доповнити варіанти пояснень до правильних тверджень. Множина дійсних чисел R є областю визначення функції $y=x^2$, бо:**

а) дія ____________ виконується для _____________________;
б) $y=x^2$ є цілою ________________ функцією;
в) вираз __________ має зміст при будь-яких дійсних числах.

№483. 1) **Пояснити, чому в множину значень функції $y=x^2$ не входять від'ємні числа.**
2) **Які числа входять у множину значень функції $y=x^2$?**
3) **Яких значень набуває функція $y=x^2$ при протилежних значеннях аргументу?**
4) **При яких значеннях аргументу функція $y=x^2$ набуває значень, що дорівнюють: 1; 9; 16; 25; $\frac{4}{9}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{36}{81}$?**

№484. 1) **Заповнити таблицю значень функції $y=x^2$.**
2) **У системі координат позначити табличні точки графіка функції $y=x^2$.**
3) **Сполучити точки плавною лінією у порядку зростання їх абсцис.**

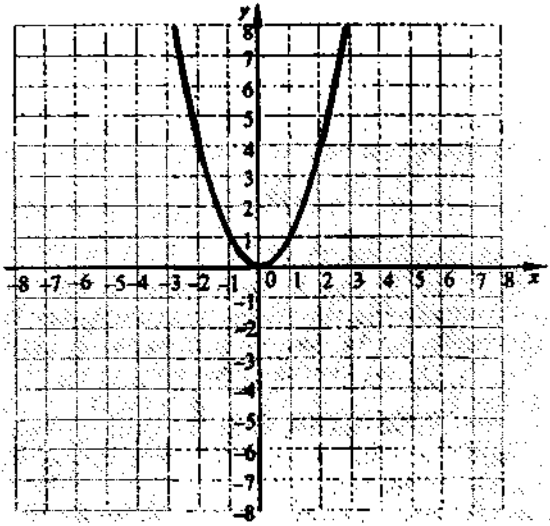
Графіком функції $y = x^2$ є множина всіх точок координатної площини, у яких ординати є квадратами абсцис.

Графіком функції $y = x^2$ є неперервна крива – парабола, що складається з двох віток, симетричних відносно осі y (мал. 72).

Найнижча точка параболи (початок координат) називається **вершиною параболи.**

№485. **За графіком функції $y=x^2$ (мал. 72) дати відповіді на питання:**
1) **Яка множина значень цієї функції?**
2) **Скільки нулів має функція?**
3) **Скільки проміжків знакосталості та які знаки функції на них?**
4) **Скільки проміжків монотонності у функції? Назвати проміжки зростання й спадання.**

Множиною значень функції $y = x^2$ є проміжок $[0;\ \infty)$.



Мал. 72

№486. **Знайти множину значень функції:**
а) $y=x^2$; б) $y=x^2+3$; в) $y=x^2+10$; г) $y=x^2-10$; д) $y=x^2-1$.

Функція $y = x^2$ має два проміжки знакосталості: проміжки $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$ є проміжками додатних значень функції.

Функція $y = x^2$ має два проміжки монотонності: на проміжку $(-\infty;\ 0)$ вона спадна, а на проміжку $(0;\ \infty)$ – зростаюча.

№487. **Дано функцію $f(x)=x^2$. Не виконуючи обчислень, порівняти:**

$f(-2{,}31)$ і $f(-3{,}31)$; $\quad f(2{,}31)$ і $f(3{,}31)$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ і $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

№488. **Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.**

Доведемо, що на проміжку $[0;\ \infty)$ функція $y=x^2$ зростаюча.
Нехай x_1 і x_2 – два довільних додатних числа такі, що $x_2>x_1$.
$y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$, тоді $y_2-y_1=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1)>0$, бо x_2-x_1 _______ 0 і x_2+x_1 _____ 0.
Отже, $y_2-y_1>0$. Звідси y_2 ________, тому, функція $y=x^2$ зростає на множині $[0;\ \infty)$.

Функція $y = x^2$ – парна, тобто $y(-x) = y(x)$.

№489. **Довести, що функція парна: а) $y=4x^2$; б) $y=\frac{1}{4}x^2$.**

Областю визначення функції $y = x^3$ є множина всіх дійсних чисел.

№490. **Пояснити, чому областю визначення функції $y=x^3$ є множина всіх дійсних чисел.**

№491. 1) **Заповнити таблицю значень функції $y=x^3$ для $x=0$; ±1; ±2.**

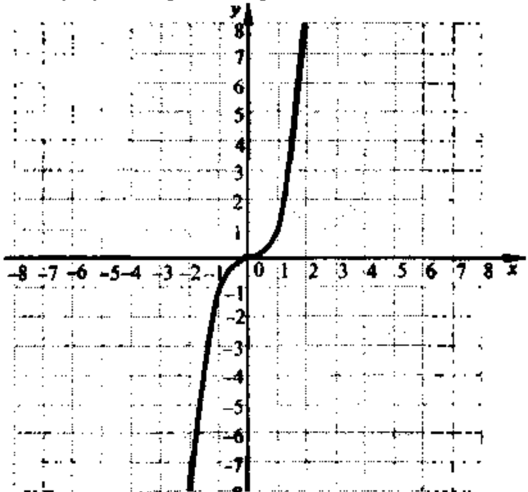
2) У системі координат позначити табличні точки графіка функції $y=x^3$.

3) Сполучити точки плавною лінією у порядку зростання їх абсцис.

Графіком функції $y = x^3$ є множина точок координатної площини, в яких ординати є кубами абсцис.

Графік функції $y=x^3$ – неперервна крива, що складається з двох віток, симетричних відносно початку координат.

№492. **За графіком функції $y=x^3$ дати відповіді на питання (мал. 73):**



Мал. 73

1) Яка множина значень цієї функції?

2) Скільки нулів має функція?

3) Скільки проміжків знакосталості та які знаки функції на них?

4) Яких значень набуває функція при протилежних значеннях аргументу?

5) Як змінюються значення функції зі збільшенням значень аргументу?

Множиною значень функції $y = x^3$ є множина дійсних чисел R.

№493. **Знайти множину значень функції:**

) $y=x^3+1$; б) $y=x^3-4$; в) $y=-x^3+2$; г) $y=-2x^3+4$.

Функція $y = x^1$ – монотонно зростаюча.

№494. **Дано функцію $f(x)=x^3$. Не виконуючи обчислень, порівняти:** $f(-0{,}001)$ і $f(-0{,}01)$; $f(-10{,}4)$ і $f(-11{,}4)$; $f(-1{,}902)$ і $f(-0{,}008)$; $f(999{,}1)$ і $f(10091)$.

№495. **Дано функцію $f(x)=x^3$. Без обчислень встановити знак виразу:** а) $f(-1{,}27)\cdot f(-0{,}43)$; б) $f(-4{,}2)\cdot f(3{,}5)$; в) $f(-0{,}07)\times$ $\times f(-0{,}02)\cdot f(0{,}04)$; г) $f(-3{,}6)\cdot f(-4{,}6)\cdot f(-5{,}6)$.

Функція $y = x^3$ – непарна, тобто $y(-x) = -y(x)$.

№496. **Довести, що функції непарні:**

) $y=4x^3$; б) $y=\frac{1}{3}x^3$; в) $y=-3x^3$; г) $y=-\frac{1}{4}x^3$.

№497. **Контрольні питання.**

. Яка область визначення функції: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$?

. Яка множина значень функції: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$?

. Скільки проміжків знакосталості та які знаки на них у функції: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$?

. Яка з функцій $y=x^2$ і $y=x^3$ монотонна на всій області визначення?

. Яка з функцій $y=x^2$ і $y=x^3$ має два проміжки монотонності? Назвати їх і вказати вид монотонності (зростання, спадання)?

. Яка з функцій $y=x^2$ і $y=x^3$ при протилежних значеннях аргументу приймає однакові значення, а яка – протилежні?

II

№498. **Дано функції $f(x)=x^2$ і $\varphi(x)=x^3$. Порівняти:**

) $f(2)$ і $\varphi(2)$; б) $f(-3)$ і $\varphi(-3)$; в) $f(5)$ і $\varphi(3)$; г) $f(-4)$ і $\varphi(2)$.

№499. **При яких значеннях a, b, c графіку функції $y=x^2$ належать точки $A(a; 64)$, $B\left(b; \frac{1}{4}\right)$ і $C(c; 0{,}04)$.**

№500. **Знайти область визначення функції:**

) $y=5x^2$; б) $y=-3x^2$; в) $y=x^3+1$; г) $y=3x^3$.

№501. **Знайти множину значень функції:**

) $y=2x^2$; б) $y=x^2+2$; в) $y=2x^3+1$; г) $y=x^3-2$.

№502. **Довести, що функції парні:**

) $y=x^2-4$; б) $y=x^2+3$; в) $y=2x^2+1$; г) $y=-3x^2+2$.

№503. **Довести, що функції непарні:**

) $y=2x^3$; б) $y=\frac{1}{3}x^3$; в) $y=x^3+x$; г) $y=x^3-x$.

III

№504. **Знайти найбільше значення функції $f(x)=x^2$, заданої на відрізку:**
а) $[1; 3]$; б) $[-1; 3]$; в) $[-3; -1]$; г) $[-3; 1]$.

№505. **Знайти множину значень функції $f(x)=x^2$, заданої на відрізку:** а) $[2; 5]$; б) $[-2; -2]$; в) $[-3; 4]$; г) $[-5; 2]$.

№506. **Знайти множину значень функції $f(x)=x^3$, заданої на відрізку:** а) $[1; 3]$; б) $[-1; 2]$; в) $[-3; 2]$; г) $[-4; -1]$.

№507. **Встановити графічно значення x, при яких функції набувають однакових значень:** а) $y=x^2$ і $y=2x+3$; б) $y=x^2$ і $y=-x+2$; в) $y=x^3$ і $y=x+6$; г) $y=x^3$ і $y=2x-4$.

№508. **Розв'язати графічно рівняння:**
а) $x^2=x+2$; б) $x^2=-x+6$; в) $x^3=-2x+3$; г) $x^3=-3x-4$.

№509. **Встановити графічно значення x, при яких:**
а) графік функції $y=x^2$ розміщений вище графіка $y=x+2$;
б) графік функції $y=x^3$ розміщений нижче графіка $y=-x+2$;
в) функція $y=x^3$ набуває значень більших від значень функції $y=-3x+4$;
г) функція $y=x^2$ набуває значень, менших від значень функції $y=-x+2$.

№510. **Знайти точки графіка функції, в яких рівні абсциси та ординати:**
а) $y=x^2$; б) $y=x^3$.

№511. **Побудувати графік залежності:**
а) площі квадрата S від його сторони a;
б) об'єму V куба від довжини його ребра a.

№512. **Знайти область визначення і побудувати графік функції:**
а) $y=\dfrac{x^3}{x}$; б) $y=\dfrac{x^4}{x}$.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№513. **Дано функцію $y=x^4$. Записати формулу функції $y=f(x)$, яка при однакових із нею значеннях аргументу набуває:**
а) протилежних значень;
б) значень, які на b більші;
в) значень, які на a менші.

№514. **Дано функцію $y=x^3$. Записати формулу функції $y=f(x)$, яка при однакових із нею значеннях аргументу набуває:**
а) протилежних значень;
б) значень, які на b більші;
в) значень, які на a менші.

5. Дано функцію $y=x^2$. Записати формулу функції, набуває з нею однакових значень при значеннях ар- енту, які:

а 3 менші; б) на a менші; в) на 4 більші; г) на b більші.

6. Дано функцію $y=x^3$. Записати формулу функції, набуває з нею однакових значень при значеннях ар- енту, які:

а 5 менші; б) на m менші; в) на 2 більші; г) на n більші.

7. Побудувати графік функції, яка при однакових ченнях аргументу з функцією $y=x^2$ набуває:

ротилежних значень;

начень, які на 3 більші;

начень, які на 2 менші.

8. Побудувати графік функції:

$=x^3$;   б) $y=x^3+2$;   в) $y=x^3-3$.

9. Побудувати графік функції, яка набуває з функцією ^{2} однакових значень при значеннях аргументу, які:

а 3 менші;   б) на 2 більші.

20. Побудувати графік функції: а) $y=(x+3)^3$; б) $y=(x-2)^3$.

21. Побудувати графік функції: а) $y=(x-1)^2$; б) $y=(x+4)^2$.

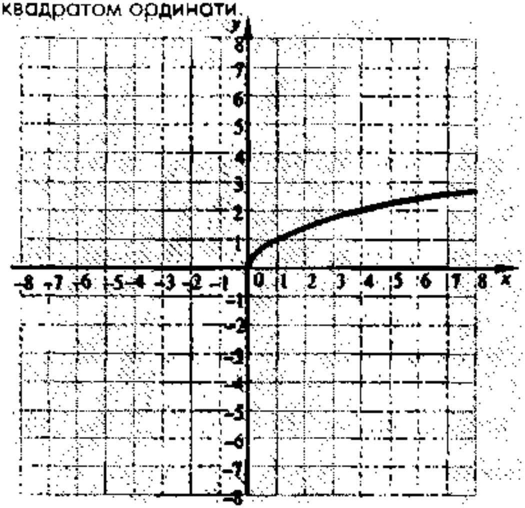
22. Побудувати графік функції $y=\left|x^3\right|$.

ФУНКЦІЯ $y=\sqrt{x}$

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є точки координатної площини, для яких виконується умова $x = y^2$, $y \geq 0$, тобто графіком функції є точки з невід'ємними координатами, в яких абсциса є квадратом ординати.



Мал. 74

№523. **Які з точок: $A(49;-7)$, $B(7;49)$, $C(49;7)$, $D(-49;7)$, $M\left(\frac{1}{49};\frac{1}{7}\right)$ задовольняють умовам належності графіку функції $y=\sqrt{x}$?**

№524. **Яку з умов належності графіку функції $y=\sqrt{x}$ не задовольняють точки: $A(9;-3)$, $B(3;9)$, $C(-16;4)$, $D\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$?**

№525. **Доповнити записи до правильних тверджень.**

1) **Умова $y=\sqrt{x}$ рівносильна умовам $y \geq 0$, $x=y^2$ на основі означення ________________.**

2) **З умови $x=y^2$ випливає, що змінна x може набувати тільки**

______________________________.

№526. **Які з точок A, $B(16;-4)$, $C(121;11)$, $D(11;121)$ належать графіку функції $y=\sqrt{x}$?**

№527. **Точки $A(49;a)$, $B(810;b)$, $C(144;c)$ належать графіку функції $y=\sqrt{x}$. Знайти числа a, b, c.**

№528. **У яких точках графіка функції $y=\sqrt{x}$ абсциса дорівнює ординаті?**

Властивості функції $y=\sqrt{x}$.

1. $D(y)=[0;\ \infty)$.

2. $E(y)=[0;\ \infty)$.

3. Функція зростаюча.

4. На парність не досліджується.

№529. **Які прямі перетинають графік функції $y=\sqrt{x}$:**

а) $y=3$; б) $y=-3$; в) $x=2$; г) $x=-\dfrac{1}{10}$?

№530. **Знайти значення функції $y=\sqrt{x}$ при значеннях аргументу:**

16; 49; 144; $\dfrac{1}{144}$; $\dfrac{1}{81}$; $\dfrac{1}{9}$.

№531. **При яких значеннях аргументу функція $y=\sqrt{x}$ набуває**

значення, що дорівнює 9; 1; 13; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{4}{25}$; $\dfrac{16}{81}$?

№532. **Доповнити записи про функцію $y=\sqrt{x}$ до правильних тверджень.**

1) ***В область визначення функції не входять*** ______________.
2) **Найменше число з області визначення функції** ________.
3) **При збільшенні аргументу значення функції** _________.
4) **Якщо y_2 і y_1 – додатні числа і $y_2>y_1$, то** ____________.
5) **Проміжками знакосталості є** ____________.

№533. **Контрольні питання.**

1. Яким умовам задовольняють точки графіка функція $y=\sqrt{x}$?
2. Які числа складають область визначення; множину значень функції $y=\sqrt{x}$?
3. Як змінюються значення функції $y=\sqrt{x}$ при збільшенні аргументу?

II

№534. а) Знайти числа a, b, c, якщо графіку функції $y=\sqrt{x}$ належать точки $A(9; a)$, $B(16; b)$, $C(100; c)$.

б) Знайти числа a, b і c, якщо графік функції $y=\sqrt{x}$ проходить через точки $A\left(\frac{1}{4}; a\right)$, $B\left(\frac{4}{9}; b\right)$, $C\left(\frac{16}{25}; c\right)$.

№535. Дано функцію $f(x)=\sqrt{x}$. Знайти x, якщо:

а) $f(x)=9$. б) $f(x)=\frac{4}{121}$.

№536. а) Знайти числа a, b, c, якщо графіку функції $y=\sqrt{x}$ належать точки $A(a; 9)$, $B(b; 144)$, $C\left(c; \frac{1}{4}\right)$.

б) Знайти числа a, b, c, якщо графіку функції $y=\sqrt{x}$ належать точки $A(a;4)$, $B(b;121)$, $C\left(c; \frac{1}{121}\right)$.

№537. Дано функцію $f(x)=\sqrt{x}$. Порівняти числа:

а) $f(4{,}3)$ і $f(3{,}8)$; $f(99{,}9)$ і $f(100{,}1)$;

б) $f(11{,}6)$ і $f(10{,}6)$; $f(199{,}8)$ і $f(200)$.

№538. 1) Порівняти числа: $\sqrt{0{,}9}$ і 1; 3 і $\sqrt{8{,}7}$; 4 і $\sqrt{15{,}3}$.

2) Порівняти числа: 1 і $\sqrt{1{,}1}$; 5 і $\sqrt{24{,}9}$; 6 і $\sqrt{35{,}99}$.

№539. Записати в порядку зростання числа:

а) $\sqrt{10}$; 3; $\sqrt{8{,}9}$; б) $\sqrt{17}$; 4; $\sqrt{16{,}2}$.

III

№540. Знайти область визначення функції:

а) $y=2\sqrt{x}$; б) $y=10\sqrt{x}$; в) $y=-4\sqrt{x}$; г) $y=-0{,}2\sqrt{x}$.

№541. Знайти область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x-4}$; б) $y=\sqrt{x+3}$; в) $y=\sqrt{2x-1}$; г) $y=\sqrt{5-x}$.

№542. Знайти множину значень функції:

а) $y=5\sqrt{x}$; б) $y=0{,}6\sqrt{x}$; в) $y=3\sqrt{x}$; г) $y=0{,}2\sqrt{x}$.

№543. Знайти множину значень функції:

а) $y=-2\sqrt{x}$; б) $y=-5\sqrt{x}$; в) $y=-\frac{1}{4}\sqrt{x}$; г) $y=-\sqrt{x}$.

№544. Знайти найбільше значення функції $y=\sqrt{x}$ на відрізку:

а) $[1; 49]$; б) $[4; 144]$; в) $\left[\frac{1}{9}; \frac{25}{49}\right]$; г) $[0; 0{,}49]$.

№545. **Знайти множину значень функції $y=\sqrt{x}$ на відрізку:**

а) $[0; 25]$; б) $[1; 36]$; в) $\left[\frac{1}{4}; \frac{25}{36}\right]$; г) $\left[\frac{1}{9}; \frac{49}{81}\right]$.

№546. **Знайти графічно число коренів рівняння:**

а) $\sqrt{x}=-x+4$; б) $\sqrt{x}=\frac{x}{2}$; в) $\sqrt{x}=\frac{x}{2}-1$; г) $\sqrt{x}=x+4$.

№547. **Виразити змінну x через змінну y, якщо залежність між змінними x і y $(x>0,\ y>0)$ виражається формулою:**

а) $y=3x^2$; б) $y=4x^2$; в) $y=\frac{x^2}{3}$; г) $y=\frac{x^2}{25}$.

№548. **Виразити змінну t через змінну m, якщо залежність між змінними m і t виражається формулою:**

а) $m=t^2$; б) $m=5t^2$; в) $m=\frac{t^2}{3}$; г) $m=at^2$.

№549. а) Площа квадрата S обчислюється за формулою $S=a^2$, де a – сторона квадрата. Виразити формулою залежність a від S.

б) Площа квадрата S обчислюється за формулою $S=\frac{d^2}{2}$, де d – діагональ квадрата. Виразити формулою залежність d від S.
в) Площа круга S обчислюється за формулою $S=\pi R^2$, де R – радіус круга. Виразити формулою залежність R від S.
г) Площа сфери S обчислюється за формулою $S=4\pi R^2$, де R – радіус сфери. Виразити формулою залежність R від S.

№550. **Виразити формулою залежність t від S, якщо відстань S, пройдена матеріальною точкою за час t, обчислюється за формулою:**

а) $S=t^2$; б) $S=5t^2$; в) $S=\frac{1}{2}t^2$; г) $S=at^2$, де t – час руху.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

Знайти область визначення функції (№551–554):

№551. а) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{|2-x|}$; б) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{|x+5|}$;

в) $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{|6-x|}$; г) $y=\sqrt{|x-6|}+\sqrt{4-x}$.

№552. а) $y=\sqrt{x+3}+\frac{x}{\sqrt{|x-5|}}$; б) $y=\sqrt{|x-3|}+\frac{x^2}{\sqrt{5-x}}$.

№553. а) $y=\frac{\sqrt{|x+3|}}{x-4}$; б) $y=\frac{\sqrt{5-x}}{|x+2|}$.

№554. а) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{|x-3|}}$;   б) $y=\sqrt{\dfrac{|x+2|}{x-3}}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{|x+4|}}{\sqrt{5-x}}$;   г) $y=\sqrt{\dfrac{x+4}{|5-x|}}$.

№555. Знайти множину значень функції:

а) $y=\sqrt{x+3}$, визначеної на відрізку $[6; 22]$;

б) $y=\sqrt{30-x}$, визначеної на відрізку $[6; 15]$.

Побудувати графік функцій (№556–557):

№556. а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=\sqrt{(2x+1)^2}$;

№557. а) $y=\left|\sqrt{x^2}\right|$; б) $y=\left|\sqrt{(2x+1)^2}\right|$.

№558. Дано функцію $y=\sqrt{x}$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка при однакових із нею значеннях аргументу набуває:

а) протилежних значень;

б) значень, які на n більші;

в) значень, які на n менші.

№559. Дано функцію $y=\sqrt{x}$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка набуває з нею однакових значень при:

а) протилежних значеннях аргументу;

б) значеннях аргументу, які на 3 менші;

в) значеннях аргументу, які на 2 більші.

№560. Побудувати графік функції:

а) $y=-\sqrt{x}$;   б) $y=\sqrt{-x}$;   в) $y=\sqrt{x}+2$;

г) $y=\sqrt{x}-2$;   д) $y=\sqrt{x+3}$;   е) $y=\sqrt{x-4}$.

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Функція, яка задано формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x − незалежна змінна, a, b, c − числа (коефіцієнти) і $a \neq 0$ називається **квадратичною**.

№561. **Які з функцій є квадратичними:**
а) $y=5x^2-3x+4$; **б)** $y=-4x^2+3$; **в)** $y=4x+3$;
г) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+4}$; **д)** $y=x^2+x$; **е)** $y=-5x^2$?

№562. **Записати квадратичну функцію, в якої:**
а) всі коефіцієнти дорівнюють 1;
б) всі коефіцієнти дорівнюють −1;
в) два коефіцієнти дорівнюють 0;
г) один коефіцієнт дорівнює 0.

№563. **Записати у вигляді квадратичної функції:**
а) $y=x(x+2)$; **б)** $y=(x-1)(x+2)$; **в)** $y=2x(x-3)$;
г) $y=(x-3)^2$; **д)** $y=(x+2)^2+3$; **е)** $y=-(x+4)^2$.

Областю визначення квадратичної функції є множина всіх дійсних чисел.

№564. **Пояснити чому природну область визначення квадратичної функції складають усі дійсні числа.**

№565. **Знайти область визначення функції:**
а) $y=-x^2+3x-4$; **б)** $y=x^2-4$; **в)** $y=\dfrac{1}{x}$; **г)** $y=5x^2-2x+1$.

№566. **1) Заповнити таблицю значень квадратичної функції** $y=x^2+4x+3$ **для чисел** −4; −3; −2; −1; 0; 1.
2) Позначити в системі координат точки, що відповідають табличним значенням. Сполучити точки у порядку збільшення абсцис плавною лінією.

№567. **Яких значень може набувати функція:**
а) $y=(x-3)^2$; **б)** $y=(x+2)^2$; **в)** $y=2(x-5)^2$; **г)** $y=(2x+3)^2$?
При якому значенні аргументу кожна з них приймає найменше значення?

№568. **Яких значень може набувати функція:**
а) $y=-(x+3)^2$; **б)** $y=-(x-3)^2$; **в)** $y=-2(x+3)^2$; **г)** $y=-(3x-1)^2$?
При якому значенні аргументу вона приймає найбільше значення?

№569. Знайти найменше значення функції:
а) $y=(x+1)^2+3$; б) $y=(x-2)^2+4$; в) $y=(x+5)^2-3$; г) $y=(x-4)^2-5$.
При якому значенні аргументу вона приймає найменше значення?

№570. Знайти найбільше значення функцій:
а) $y=-x^2+3$; б) $y=-(x+3)^2+4$; в) $y=-(x-4)^2-3$; г) $y=(x+5)^2-6$.
При якому значенні аргументу вона приймає найбільше значення?

№571. Встановити найменше значення функції та значення аргументу, при якому воно досягається, представити праву частину формули квадратичної функції у вигляді квадрата двочлена:
а) $y=x^2+4x+4$; б) $y=x^2-6x+9$;
в) $y=x^2-10x+25$; д) $y=x^2+14x+49$.

№572. Представити праву частини формули квадратичної функції у вигляді квадрата двохчлена і числа 1:
а) $y=x^2+4x+5$; б) $y=x^2-6x+10$;
в) $y=x^2-10x+26$; д) $y=x^2+14x+50$.
Знайти значення аргументу, при якому функція досягає найменшого значення.

№573. Перевірити, чи правильно представлено права частина квадратичної функції у вигляді алгебраїчної суми квадрата двочлена і деякого числа. Знайти значення аргументу, при якому квадратична функція набуває найменшого значення.
а) $y=x^2-6x+14$; $y=(x-2)^2+4$;
б) $y=4x^2+4x-3$; $y=(2x+1)^2-4$;
в) $y=2x^2-4x+7$; $y=(2x-1)^2+5$;
г) $y=-3x^2-6x-4$; $y=-3(x+1)^2-1$.

№574. Довести, що квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ і функція $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ рівні, тобто при однакових значеннях аргументу з множини дійсних чисел набувають однакових значень.

№575. 1) При якому значенні аргументу приймає найменше значення функція $y=a(x-m)^2+n$, де $a>0$ і чому воно дорівнює?
2) При якому значенні аргументу приймає найменше значення функція $y=a(x-m)^2+n$, де $a>0$ і рівна їй функція ax^2+bx+c? Чому дорівнює найменше значення цих функцій?

№576. 1) При якому значенні аргументу приймає найбільше значення функція $y=a(x-m)^2+n$, де $a<0$ і чому воно дорівнює?
2) При якому значенні аргументу приймає найбільше значення функція $y=a(x-m)^2+n$, де $a<0$ і рівна їй функція ax^2+bx+c? Чому дорівнює найбільше значення цих функцій?

При $a>0$ квадратична функція ax^2+bx+c у точці $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ приймає найменше значення, яке дорівнює

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

При $a<0$ квадратична функція ax^2+bx+c в точці $x_1=-\dfrac{b}{2a}$ приймає найбільше значення, яке дорівнює

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

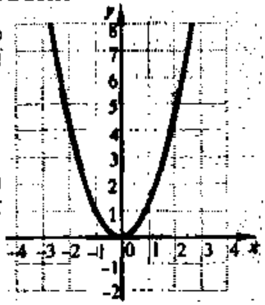
№577. **Знайти значення аргументу, при якому функція приймає найменше значення і обчислити відповідне значення функції:**
а) $y=x^2+4x+3$; б) $y=x^2-6x+5$; в) $y=2x^2+10x-5$; г) $y=3x^2+6x-1$.

№578. **Знайти значення аргументу, при якому функція приймає ~~найменше~~ найбільше значення і відповідне значення функції:**

а) $y=-x^2-6x+1$; **б) $y=-x^2+8x+2$;**
в) $y=-2x^2-8x+3$; **г) $y=-3x^2+6x-1$.**

Графіком квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ є неперервна крива – **парабола**

Властивості параболи



а) має вершину (найвищу або найнижчу точку), координати якої $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$;

б) симетрична відносно прямої, яка перпендикулярна до осі x і перетинає її в точці з абсцисою $-\dfrac{b}{2a}$;

в) перетинає вісь y в точці з ординатою c;

г$_1$) якщо $D=b^2-4ac>0$, парабола перетинає вісь x у точках $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ і $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$);

г$_2$) при $D=b^2-4ac=0$ дотикається до осі x у точці $-\dfrac{b}{2a}$;

г$_3$) при $D<0$ не перетинає вісь x;

д$_1$) при $a>0$ вітки параболи направлені вгору;

д$_2$) при $a<0$ вітки параболи – направлені вниз.

№579. **Знайти координати вершини графіка функції:**

а) $y=x^2-8x+3$; б) $y=x^2+12x-1$;
в) $y=-x^2+6x+1$; г) $y=-2x^2+4x-3$.

№580. **Записати рівняння осі симетрії графіка функції:**

а) $y=x^2+10x+3$; б) $y=2x^2-8x+3$;
в) $y=-x^2-6x+2$; г) $y=-4x^2-8x+3$.

№581. **Знайти ординату точки перетину графіка функції з віссю y:**

а) $y=x^2-3x+5$; б) $y=-x^2+4x-3$;
в) $y=2x^2+5x-7$; г) $y=-3x^2+5x+4$.

№582. **Встановити кількість точок перетину графіка функції з віссю x і знайти їх абсциси:**

а) $y=x^2-4x+3$; б) $y=x^2-4x+4$; в) $y=x^2-4x+5$; г) $y=x^2+6x+5$.

№583. **У яких з функцій вітки графіків напрямлені вгору; вниз:**

а) $y=x^2+4x-3$; б) $y=-2x^2-5x$; в) $y=-x^2+3$;
г) $y=4x^2+5$; д) $y=\frac{1}{3}x^2-2x+3$; е) $y=-\frac{x^2}{4}+4x$?

№584. **У яких з функцій вершина є найвищою точкою; найнижчою точкою:**

а) $y=x^2-8x+3$; б) $y=-x^2+8x-3$; в) $y=2x^2+3x-4$;
г) $y=3x^2-4$; д) $y=-\frac{1}{5}x^2+5$; е) $y=\frac{1}{3}x^2+3x$?

№585. **Дано квадратичну функцію $y=ax^2+bx+c$. Які з тверджень правильні?**

1) Парабола перетинає вісь y в точці з ординатою a.
2) Парабола перетинає вісь x у точці з абсцисою c.
3) **При $a>0$ вершина параболи є найнижчою її точкою.**
4) **При $a<0$ вітки параболи напрямлені вгору.**
5) **Будь-яка парабола перетинає вісь y в одній точці.**
6) **Будь-яка парабола перетинає вісь x в одній точці.**

№586. **Дано квадратичну функцію $y=ax^2+bx+c$. Доповнити записи до правильних тверджень:**

а) **Якщо $a>0$, то вершина параболи є** [illegible] **точкою.**
б) **Якщо $b^2-4ac>0$, то парабола перетинає** [illegible]
в) Якщо $b^2-4ac=0$, то парабола [illegible] осі [illegible].
г) Якщо віссю симетрії параболи є вісь ординат, то ______ $=0$.
д) Якщо $c=0$, то парабола [illegible] (0)
е) Якщо $a<0$, то вітки параболи [illegible].

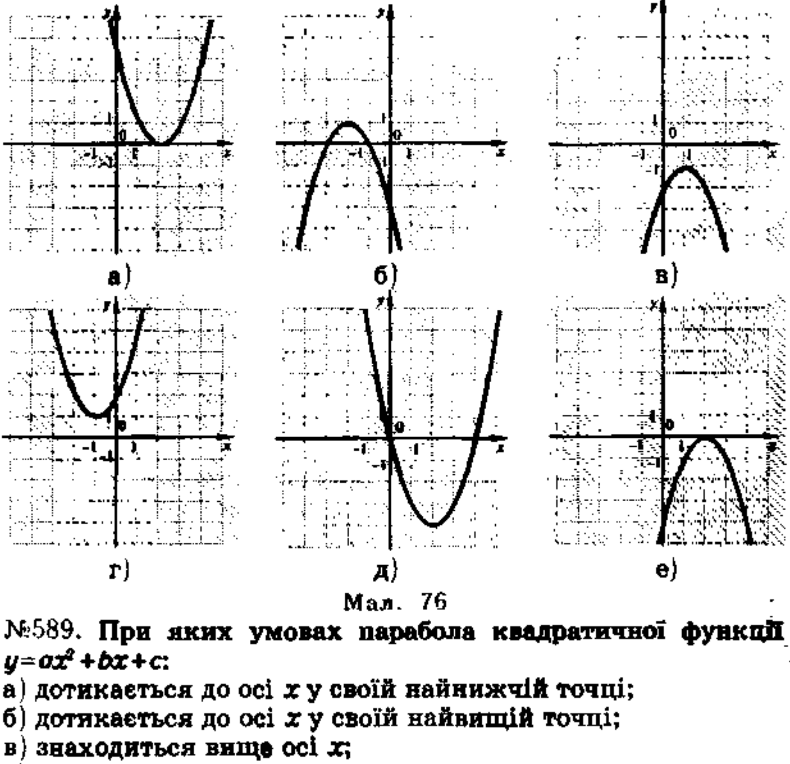
№587. **Дано функцію $y=ax^2+bx+c$. Сформулювати умови, при яких:**

а) вершина параболи є найнижчою точкою;
б) вершина параболи є найвищою точкою;
в) вітки параболи напрямлені вгору;
г) вітки параболи напрямлені вниз;
д) парабола не перетинає вісь x;

е) парабола дотикається до осі x;

є) парабола перетинає вісь x у двох точках.

№588. **На малюнку 79 схематично зображено графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$. За графіком для кожної функції встановити, якими числами (додатними, від'ємними, нулем) є:** а) a; б) $D=b^2-4ac$; г) x_0 – абсциса вершини; д) y_0 – ордината вершини; е) x_1 і x_2 – абсциси точок перетину графіка з віссю x (якщо вони існують); є) b.



Мал. 76

№589. **При яких умовах парабола квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$:**

а) дотикається до осі x у своїй найнижчій точці;

б) дотикається до осі x у своїй найвищій точці;

в) знаходиться вище осі x;

г) знаходиться нижче осі x;

д) має найнижчу точку і перетинає вісь x;

е) має найвищу точку і перетинає вісь y?

№590. **Знайти множину значень квадратичних функцій, зображених на малюнку 76.**

Алгоритм знаходження множини значень квадратичної функції, заданої формулою

$$y = ax^2 + bx + c$$

1. Знайти $-\frac{b}{2a}$.

2. Знайти $y\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (або число $-\frac{b^2-4ac}{4a}$);

3₁. Якщо $a > 0$, то множиною значень функції є проміжок

$$\left[y\left(-\frac{b}{2a}\right); \infty\right).$$

3₂. Якщо $a < 0$, то множиною значень функції є проміжок

$$\left(-\infty; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right].$$

№591. **Знайти множину значень функції: а) $y=x^2-10x+1$; б) $y=x^2+4x-3$; в) $y=2x^2+4x-3$; г) $y=-2x^2-6x+1$.**

Алгоритм побудови ескізу графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$

1. Обчислити координати точки A – вершини параболи: число $-\frac{b}{2a}$ і $y\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. Записати координати точки $B(0; c)$ – точки перетину графіка з віссю y.

3. Обчислити $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $D > 0$, обчислити x_1 і x_2 – абсциси точок перетину з віссю x.

4. Обчислити координати точок, абсциси яких на 1; 2 більші; менші від абсциси вершини.

5. Зобразити точки в системі координат і сполучити їх плавною кривою в порядку зростання абсцис.

№592. **Побудувати графік квадратичної функції:**
а) $y=x^2-6x+5$; б) $y=-x^2-6x-8$.
За графіком знайти: 1) множину значень; 2) проміжки знакосталості; 3) проміжки монотонності.

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ **має**

при $D<0$ один проміжок знакосталості (всю область визначення);

при $D = 0$ два проміжки знакосталості

$$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right), \quad \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right);$$

при $D > 0$ три проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; \infty)$, де x_1, x_2 - нулі функції, причому $x_1 < x_2$.

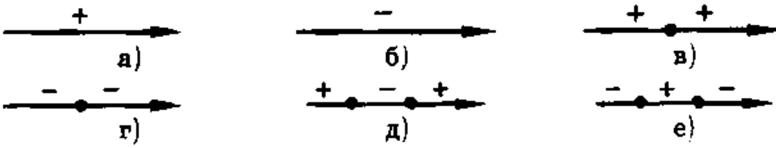
На всіх проміжках, крім проміжку $(x_1; x_2)$, їх знак співпадає зі знаком a, на проміжку $(x_1; x_2)$ – протилежний знаку a.

№593. **Скільки проміжків знакосталості та який знак на них має квадратична функція, якщо:**

а) $a>0$, $D=0$; б) $a>0$, $D<0$; в) $a>0$, $D>0$;

г) $a<0$, $D<0$; д) $a<0$, $D=0$; е) $a<0$, $D>0$.

№594. **На малюнку 77 схематично зображені проміжки знакосталості квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$. Для кожного випадку встановити знаки чисел a і D.**



Мал. 77

Алгоритм знаходження проміжків знакосталості квадратичної функції, заданої формулою $y = ax^2 + bx + c$

1. *Обчислити* $D = b^2 - 4ac$.

2_1. Якщо $D < 0$, то квадратична функція на множині всіх дійсних чисел має знак числа a.

2_2. Якщо $D = 0$, обчислити $-\frac{b}{2a}$.

Функція на проміжках $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ має знак числа a.

2_3. Якщо $D > 0$, обчислити нулі функції x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$).

Функція на проміжках $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; \infty)$ має знак числа a, а на проміжку $(x_1; x_2)$ –протилежний до знака числа a.

№595. **Знайти обчисленням проміжки знакосталості функцій:**
а) $y=x^2+6x+5$; б) $y=x^2+4x+5$; в) $y=-x^2-2x+3$; г) $y=-x^2-6x-5$.

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має два проміжки монотонності: $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$.

При $a > 0$ $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ – проміжок спадання,

а $\left[-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ – проміжок зростання.

При $a < 0$ $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ – проміжок зростання,

а $\left[-\frac{b}{2a}; \infty\right)$ – проміжок спадання.

№596. **Знайти проміжки монотонності функції:**

а) $y=x^2-4x+3$; **б)** $y=-x^2+6x+1$.

№597. **Контрольні питання.**

1. Яка функція називається квадратичною?

2. Яка область визначення квадратичної функції?

3. Як довести, що функції

(1) $y=ax^2+bx+c$ і (2) $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ – **рівні?**

4. При якому значенні аргументу приймають найбільше чи найменше значення функції (1) і (2)?

5. Як називається графік квадратичної функції?

6. При якій умові у параболи е

а) найвища точки; б) найнижча точка?

7. Записати координати вершини параболи.

8. Відносно якої прямої симетричний графік квадратичної функції?

9. У якій точці графік квадратичної функції перетинає вісь ординат?

10. Скільки спільних точок може мати графік квадратичної функції з віссю абсцис?

11. При якій умові графік квадратичної функції перетинає вісь x; дотикається до неї?

12. Записати проміжки знакосталості функції $y=ax^2+bx+c$ при

а) $a>0$, $D>0$; б) $a<0$, $D>0$;

в) $a>0$, $D=0$; г) $a>0$, $D<0$;

д) $a<0$, $D=0$; е) $a<0$, $D<0$.

13. Записати проміжки монотонності функції $y=ax^2+bx+c$ при:

а) $a>0$; б) $a<0$.

№598. **Дано функцію:**

а) $y=x^2-3x+4$. **Знайти значення змінної y, якщо змінна x дорівнює -1; 1; 5.**

б) $f(x)=-x^2+3x+7$. **Знайти $f(2)$; $f(-2)$; $f(10)$.**

в) $y=-2x^2+3x$. **Знайти значення функції, якщо x дорівнює -2; 1; 2.**

г) $y=-4x^2-x$. **Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу -10; 2; 10.**

№599. **Дано функцію:**

а) $y=2x^2+5x+7$. **Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої дорівнює 0.**

б) $y=3x^2-4x-5$. **Знайти ординату точки графіка функції, абсциса якої відповідає значенню аргументу $x=0$.**

в) $y=4x^2-3x$. **Знайти координати точки перетину графіка функції з віссю ординат.**

г) $y=-2x^2+5$. **Знайти координати спільної точки графіка функції та осі y.**

№600. а) **Знайти a, b і c, якщо графіку функції $y=x^2-5x-6$ належать точки $A(1; a)$, $B(-2; b)$, $C(10; c)$.**

б) **Знайти a, b і c, якщо графік функції $y=-x^2+5x+7$ проходить через точки $A(1; a)$, $B(2; b)$, $C(-3; c)$.**

в) **Які з точок $A(0; 3)$, $B(1; 0)$, $C(1; -1)$ належать графіку функції $y=x^2-3x+2$?**

г) **Через які з точок $A(1; 6)$, $B(-1; 6)$, $C(0; 3)$ проходить графік функції $y=x^2+2x+3$?**

№601. **Дано функцію:**

а) $y=x^2-10x-2$. **Знайти значення аргументу x, якщо значення змінної y дорівнює 11.**

б) $y=2x^2+7x+4$. Знайти значення x, якщо $y=1$.

в) $f(x)=5x^2-8x+8$. **Знайти x, якщо $f(x)=5$.**

г) $y=4x^2+7x-3$. Знайти значення аргументу x, що відповідають значенню функції -1.

№602. **Дано функцію:**

а) $y=3x^2+5x-2$. Знайти значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 0.

б) $y=4x^2-9x+2$. Знайти значення аргументу x, якщо $y=0$.

в) $y=3x^2+7x-6$. Знайти нулі функції.

г) $y=5x^2-3x-2$. Знайти значення аргументу, при яких функція набуває значення, що дорівнює 0.

№603. а) Графіку функції $y=x^2-2x+3$ належить точка $A(a;11)$. **Знайти значення a.**

б) Знайти значення a, якщо графік функції $y=-x^2+4x+1$ проходить через точку $A(a; 4)$.

в) Довести, що графіку функції $y=x^2+6x+10$ не належать точки, ординати яких дорівнюють -1.

г) Довести, що графік функції $y=-x^2-2x-5$ не проходить через точки, ординати яких дорівнюють 2.

№604. Обчислити координати точок перетину з віссю x графіка функції:

а) $y=x^2+5x-3$; б) $y=-x^2-2x-8$;
в) $y=-3x^2+5x+2$; г) $y=2x^2+5x-3$.

№605. Довести, що графік функції дотикається до осі x:

а) $y=x^2-4x+4$; б) $y=4x^2-4x+1$;
в) $y=x^2+6x-9$; г) $y=x^2+x+1$.

№606. Довести, що графік функції не має спільних точок з віссю x:

а) $y=x^2+4x+5$; б) $y=x^2+12x+5$;
в) $y=-x^2-6x-10$; г) $y=4x^2-4x+3$.

№607. Побудувати схематично графік функції (знайти координати вершини і точок перетину з віссю абсцис і ординат):

а) $y=4x^2+2x+3$. Знайти за графіком: значення y, яке відповідає $x=3$; значення x, яке відповідає $y=1$.

б) $y=4x^2+2x+2$. Знайти за графіком: значення функції, яке відповідає значенню аргументу -3; значення аргументу, яке відповідає значенню функції -6.

в) $f(x)=-x^2-6x+8$. Знайти за графіком: $f(-1)$; значення аргументу x, якщо $f(x)=-3$.

г) $f(x)=-x-6x+5$. Знайти за графіком: $f(6)$; значення аргументу x, якщо $f(x)=3$.

№608. Побудувати схематично графік функції:

а) $y=x^2+4x+3$; б) $y=x^2+4x+4$;
в) $y=-x^2-4x-3$; г) $y=-x^2-4x$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№609. Побудувати схематично графік функції:

а) $y=4x^2+6x+5$; б) $y=x^2+6$; в) $y=-x^2+6x-9$; г) $y=-x^2+6x-10$.

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№610. Знайти координати точки графіка функції, в якої найменша ордината серед усіх точок графіка:

а) $y=x^2+8x$; б) $y=x^2+4x+9$; в) $y=2x^2-8+11$; г) $y=x^2+12$.

№611. Знайти координати точки графіка функції, в якої найбільша ордината серед усіх точок графіка:

а) $y=-x^2-6x+3$; б) $y=-12x^2+12x+1$;
в) $y=-x^2+4x$; г) $y=-x^2+2$.

№612. Знайти обчисленням множину значень функції:

а) $y=x^2+10x-3$; б) $y=-3x^2+12x-1$; в) $y=-x^2+6x$; г) $y=-x^2+5$.

№613. **Не виконуючи побудови графіка функції, знайти проміжки її зростання:**

а) $y=x^2+4x+7$; б) $y=2x^2-16x+1$; в) $y=x^2-10x$; г) $y=x^2+10$.

№614. **Не виконуючи побудови графіка функції, знайти проміжки її спадання:**

а) $y=-x^2-4x-7$; б) $y=-2x^2+16x-1$;

в) $y=-x^2+10x$; г) $y=-x^2-10$.

№615. **Знайти обчисленням проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень:**

а) $y=x^2-8x+7$; б) $y=x^2-x-12$;

в) $y=2x^2+3x-2$; г) $y=3x^2-7x-6$.

№616. **Знайти обчисленням проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень:**

а) $y=-x^2+x+6$; б) $y=-x^2+5x$;

в) $y=-3x^2+x+2$; г) $y=-4x^2-x+3$.

№617. **Довести, що при будь-яких значеннях змінної x функція набуває тільки додатних значень:**

а) $y=x^2-2x+4$; б) $y=x^2+6x+11$;

в) $y=2x^2+4x+5$; г) $y=3x^2-4x+2$.

№618. **Довести, що при будь-яких значеннях змінної x функція набуває тільки від'ємних значень:**

а) $y=-x^2+2x-4$; б) $y=-x^2-6x-11$;

в) $y=-2x^2-4x-5$; г) $y=-3x^2+4x-2$.

№619. **Знайти обчисленням координати точок перетину графіків функцій:**

а) $y=x^2-9x$ і $y=x-9$; б) $y=5x^2-4x+1$ і $y=x^2+5x-1$;

в) $y=4x^2-3x+2$ і $y=x^2-4x$; г) $y=2x^2+5x-12$ і $y=3-2x^2$.

№620. **Знайти обчисленням значення x, при яких набувають однакових значень функції:**

а) $y=x^2+9$ і $y=10x$; б) $y=5x^2+3$ і $y=8x$;

в) $y=5x^2+7$ і $y=x^2+2$; г) $y=-4x^2-7x$ і $y=-x^2-6$.

№621. **Скласти рівняння осі симетрії графіка функції:**

а) $y=x^2+4x+9$; б) $y=2x^2+8x-1$; в) $y=-x^2+4x$; г) $y=x^2+6$.

№622. **Довести, що функція є парною:**

а) $y=x^2+4$; б) $y=-3x^2$; в) $y=5x^2+6$; г) $y=-4x^2-1$.

№623. **Довести, що функція ні парна, ні непарна:**

а) $y=x^2+x$; б) $y=-x^2+3x$; в) $y=x^2+3x$; г) $y=-x^2-x$.

№624. а) **Довести, що графік квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ перетинає осі y у точці з ординатою c.**

б) **Довести, що графік квадратичної функції $y=ax^2+bx$ проходить через початок координат.**

III

№625. **Знайти $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$, якщо функція задана формулами:**

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x^2-2x+3, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x-4, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x^2+5x-4, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x+2, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} -2x-5, \text{ якщо } x\ge 0,\\ -x^2-4x-5, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

№626. 1) **Знайти a, b і c, якщо графіку функції, заданої формулами $y=\begin{cases} x^2-x+1, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x-3, \text{ якщо } x<0,\end{cases}$ належать точки $A(-2;\ a)$, $B(-1;\ b)$, $C(2;\ c)$.**

2) **Графік функції $y=\begin{cases} 2x^2+x-4, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x^2+5x-4, \text{ якщо } x<0\end{cases}$ проходить через точки $A(-3;\ a)$, $B(3;\ b)$, $C(10;\ c)$. Знайти a, b і c.**

3) **Які з точок $A(-2;0)$, $B(1;1)$, $C(2;12)$ належать графіку функції $y=\begin{cases} x^2+3x+2, \text{ якщо } x\ge 0,\\ -x+2, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$**

4) **Через які з точок $A(-1;\ 7)$, $B(2;\ 13)$, $C(-2;\ 1)$ проходить графік функції $y=\begin{cases} 2x^2+5, \text{ якщо } x\ge 0,\\ 2x+5, \text{ якщо } x<0?\end{cases}$**

№627. **Знайти нулі функції, заданої формулами:**

а) $y=\begin{cases} x^2-9x+20, \text{ якщо } x\ge 0,\\ 2x+5, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x^2-3x-4, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x+5, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x^2-4x, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x-3, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ г) $y=\begin{cases} x^2+5x+4, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x-5, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

№628. **Знайти координати точок перетину з віссю x графіка функції, заданої формулами:**

а) $y=\begin{cases} x^2-7x+10, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x+10, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x-2, \text{ якщо } x\ge 0,\\ x^2+7x+12, \text{ якщо } x<0;\end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x^2-2x-3, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x+6, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} x^2-2x-3, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x+5, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

№629. **Побудувати схематично графік функції:**

а) $y=x^2-2x$ з областю визначення $[0; \infty)$;

б) $f(x)=x^2+2x$ з областю визначення $(-\infty; 0]$;

в) $y=-x^2+4x$ з областю визначення $[0; \infty)$;

г) $y=-x^2-4x$ з областю визначення $(-\infty; 0]$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№630. **Побудувати схематично графік функції:**

а) $y=x^2-2x+5$ з областю визначення $[0; \infty)$;

б) $y=x^2+2x-3$ з областю визначення $(-\infty; 0]$;

в) $y=-x^2+2x-5$ з областю визначення $[0; \infty)$;

г) $y=-x^2-2x+3$ з областю визначення $(-\infty; 0]$.

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№631. **Побудувати схематично графік функції:**

а) $y=\begin{cases} x^2+2x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x^2-2x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x^2+4x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x^2-4x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x^2+2x-3, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x^2-2x-3, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} x^2+6x+5, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x^2-6x+5, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№632. **Побудувати графік функції:**

а) $y=\begin{cases} x^2+2x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x^2-2x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x^2+2x-8, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x^2-2x+8, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} x^2-4x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x^2+4x, \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} x^2-8x+7, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x^2+8x-7, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№633. **Побудувати схематично графік функції:**

а) $y=(x-3)^2-1$; б) $y=(x-2)(x-3)$;

в) $y=(3-x)(x+1)$; г) $y=-(x-3)^2+1$.

За графіком встановити значення x, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

№634. **Побудувати схематично графік функції:**

а) $y=(x+3)^2+1$; б) $y=2x^2-x(x-2)$;

в) $y=-2x^2+x(x+4)$; г) $y=-(x-3)^2-1$.

За графіком встановити проміжки зростання і спадання функції; множину значень функції.

№635. **Знайти обчисленням множину значень функції:**

а) $y=(x-5)(x-3)$; б) $y=(x+1)(x+3)$;

в) $y=x^2+x(x+4)$; г) $=x^2+(x+1)(x+3)$.

№636. **Знайти обчисленням множину значень функції:**

а) $y=(1-x)(x+3)$; б) $y=(2-x)(x+4)$;

в) $y=-2x^2+(x-1)(x+3)$; г) $y=-2x^2+x(x-6)$.

№637. **Не виконуючи побудови графіка функції, знайти проміжки її зростання; спадання:**

а) $y=(x-2)(x+4)$; б) $y=(x+1)(x+5)$;

в) $y=(x-1)^2+3$; г) $y=-(x+2)^2+3$.

№638. **Знайти графічно значення змінної x, при яких набувають однакових значень функції:**

а) $y=x^2+4x$ і $y=2x$; б) $y=x^2-2x$ і $y=x$;

в) $y=x^2-2x+3$ і $y=x+5$; г) $y=-x^2-4x-2$ і $y=-2x-2$.

№639. **Знайти графічно координати точок перетину графіків функцій:**

а) $y=x^2-4x$ і $y=4-x$; б) $y=x^2+4x$ і $y=x-4$;

в) $y=x^2+2x+1$ і $y=x+3$; г) $y=-x^2-2x-1$ і $y=-x-3$.

№640. **Встановити графічно значення x, при яких:**

а) графік функції $y=x^2-4x+2$ розміщений в системі координат вище прямої $y=2$;

б) графік функції $y=x^2+6x-4$ розміщений в системі координат нижче прямої $y=1$;

в) графік функції $y=x^2-6x+10$ розміщений в системі координат вище графіка функції $y=-x+6$;

г) графік функції $y=-x^2-6x-7$ розміщений в системі координат нижче графіка функції $y=-x-3$.

№641. **Встановити графічно значення x, при яких:**

а) функція $y=x^2+2x$ набуває значень більших від числа 3;

б) функція $y=-x^2-2x+3$ набуває значень менших від числа 5;

в) функція $y=x^2+6x+5$ набуває значень більших від відповідних значень функції $y=2x+5$;

г) функція $y=-x^2+8x-12$ набуває значень менших від відповідних значень функції $y=2x-7$.

№642. **Знайти точки графіка функції, у яких однакові абсциса і ордината:**

а) $y=x^2-6x+10$; б) $y=x^2-8x+10$;

в) $y=x^2+3x-8$. г) $y=x^2-2x-18$.

№643. **Знайти точки графіка функції, у яких абсциса і ордината протилежні:**

а) $y=x^2-7x+8$; б) $y=x^2+2x-10$; в) $y=x^2-12x$; г) $y=x^2+x$.

№644. **Знайти точки графіка функції, що знаходяться від осі ординат на вказаній відстані:**

а) $y=x^2+2x$, **відстань дорівнює 2;**

б) $y=x^2-2x$, **відстань дорівнює 3;**

в) $y=x^2-2x+3$, **відстань дорівнює 3;**

г) $y=2x^2+4x-1$, **відстань дорівнює 2.**

№645. **Знайти точки графіка даної функції, що знаходяться від осі абсцис на вказаній відстані:**

а) $y=x^2-2x+2$, **відстань дорівнює 1;**

б) $y=x^2-2x$, **відстань дорівнює 3;**

в) $y=-x^2-6x-8$, **відстань дорівнює 8;**

г) $y=-x^2+5x-4$, **відстань дорівнює 5.**

№646. а) **Функцію задано формулою** $f(x)=x^2-2x+3$. **Не обчислюючи значень функції, порівняти:** $f(1,2)$ і $f(1,24)$; $f(0,8)$ і $f(0,88)$; $f\left(10\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(9\frac{1}{3}\right)$; $f(-10,5)$ і $f(-9,5)$.

б) **Функцію задано формулою** $f(x)=x^2+4x+5$. **Не обчислюючи значень функції, порівняти:** $f(-3)$ і $f(-4)$; $f(3)$ і $f(4)$; $f(1,2)$; $f(-10,7)$ і $f(-9,7)$; $f(9,7)$ і $f(10,7)$.

в) **Функцію задано формулою** $f(x)=-x^2+2x-3$. **Не обчислюючи значень функції, порівняти:** $f(1,2)$ і $f(1,24)$; $f(0,8)$ і $f(0,88)$;

$f\left(10\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(9\frac{1}{3}\right)$; $f\left(-10\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(-9\frac{1}{3}\right)$;

г) **Функцію задано формулою** $f(x)=-x^2-4x+3$. **Не обчислюючи значень функції, порівняти:** $f(-5,6)$ і $f(-6,6)$; $f(5,6)$ і $f(6,6)$; $f(-10)$ і $f(-11)$; $f(11)$ і $f(10)$;

№647. а) **Функція** $f(x)=x^2-6x+5$ **задана на відрізку** $[-2; 3]$. **Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.**

б) **Функція** $f(x)=-x^2+6x-5$ **задана на відрізку** $[2; 3]$. **Не виконуючи побудови графіка, знайти найбільше значення функції.**

в) **Функція** $f(x)=x^2-6x+5$ **задана на відрізку** $[4; 6]$. **Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.**

г) **Функція** $f(x)=x^2+6x-5$ **задана на відрізку** $[0; 2]$. **Не виконуючи побудови графіка, знайти найменше значення функції.**

№648. **Знайти множину значень функції:**

а) $y=x^2-4x+1$, **заданої на відрізку** $[2; 5]$;

б) $y=x^2+4x+3$, **заданої на відрізку** $[0; 2]$;

в) $y=-x^2+4x-2$, **заданої на відрізку** $[0; 2]$;

г) $y=-x^2-2x+3$, **заданої на відрізку** $[2; 5]$.

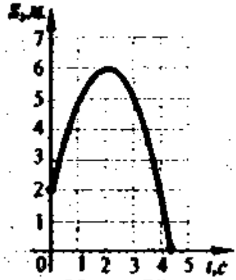
№649. 1) Графіку функції $y=ax^2+4x+5$ належить точка $A(1;2)$. Знайти коефіцієнт a.
2) Графіку функції $y=2x^2+bx+3$ належить точка $A(-1;6)$. Знайти коефіцієнт b.
3) Графіку функції $y=x^2+5x+c$ належить точка $A(2;6)$. Знайти коефіцієнт c.
4) Графіку функції $y=-x^2-3x+c$ належить точка $A(-2;5)$. Знайти коефіцієнт c.
№650. 1) Графіку функції $y=ax^2-3x+2$ належить точка $A(1;3)$. Чи належить графіку функції точка $B(-1;9)$?
2) Графіку функції $y=x^2+вx+5$ належить точка $A(2;3)$. Чи належить графіку функції точка $B(1;3)$?
3) Графіку функції $y=x^2+5x+c$ належить точка $A(-2;1)$. Чи належить графіку функції точка $B(2;21)$?
4) Графіку функції $y=ax^2+4x-3$ належить точка $A(1;2)$. Чи належить графіку функції точка $B(-1;-6)$?
№651. Знайти значення c, при яких функція приймає тільки додатні значення:
а) $y=x^2-6x+c$; б) $y=x^2-8x+c$; в) $y=2x^2-x+c$; г) $y=3x^2-2x+c$.
№652. Знайти найменше ціле значення c, при якому функція приймає тільки додатні значення:
а) $y=x^2-2x+c$; б) $y=x^2+8x+c$; в) $y=2x^2+3x+c$; г) $y=x^2+8x+c$.
№653. Знайти значення c, при яких функція приймає тільки від'ємні значення:
а) $y=-x^2-6x-c$; б) $y=-x^2+3x+c$;
в) $y=-2x^2+3x+c$; г) $y=-3x^2+5x+c$.
№654. Знайти найбільше ціле значення c, при якому функція приймає тільки від'ємні значення:
а) $y=-x^2-4x+c$; б) $y=-x^2+5x+c$;
в) $y=-2x^2+3x+c$; г) $y=-3x^2-5x+c$.
№655. Знайти найменше ціле значення a, при якому функція набуває тільки додатних значень:
а) $y=ax^2-4x+2$; б) $y=ax^2+5x+3$;
в) $y=ax^2+x+2$; г) $y=ax^2-x+5$.
№656. Знайти найбільше ціле значення a, при якому функція набуває тільки від'ємних значень
а) $y=ax^2-3x-1$; б) $y=ax^2+2x-3$;
в) $y=ax^2-x-5$; г) $y=ax^2+5x-1$.
№657. Точки A і B належать графіку квадратичної функції, причому точка A – його вершина. Знайти проміжки зростання і спадання функції, якщо:
а) $A(1;3)$, $B(-1;4)$; б) $A(1;5)$, $B(-1;-4)$;
в) $A(2;4)$, $B(-1;2)$; г) $A(2;6)$, $B(-1;1)$.

№658. Точки A і B належать графіку квадратичної функції, причому точка A – його вершина. Знайти множину значень функції, якщо:

а) $A(2; 5)$, $B(-1; 9)$; б) $A(3; 4)$, $B(5; 7)$;

в) $A(2; 3)$, $B(-1; -3)$; г) $A(1; 4)$, $B(3; -5)$.

№659. На малюнку 78 зображено графік прямолінійного руху матеріальної точки $S=S(t)$, де S – відстань у метрах від точки O, прийнятої за початок відліку, через t секунд від початку руху. За графіком руху дати відповіді на питання:



Мал. 78

1) На якій відстані від точки відліку знаходилась матеріальна точка в момент часу $t=0$?

2) У який момент часу матеріальна точка знаходилась у точці відліку?

3) Коли матеріальна точка знаходилась на відстані 3м від точки відліку?

4) В який момент часу матеріальна точка знаходилась на найдальшій відстані від точки відліку і чому дорівнювала ця відстань?

д) В який інтервал часу точка віддалялась від початку відліку, а в який – наближалась?

№660. Матеріальна точка рухалась прямолінійно за законом $S(t)=-t^2+4t+5$, де $0 \le t \le 5$ ($S(t)$ – відстань у метрах від точки, вибраної за початок відліку, у момент часу t (у секундах) від початку руху). Побудувати графік руху матеріальної точки і дати відповіді на питання:

1) На якій відстані від точки відліку знаходилась матеріальна точка в момент часу t, що дорівнює 1 с; 3с?

2) В який момент часу матеріальна точка знаходилась у точці відліку?

3) В який момент часу матеріальна точка знаходилась на найдальшій відстані від точки відліку? Знайти дану відстань.

4) В який момент часу точка знаходилась на відстані 8 м від точки відліку?

5) Якою була середня швидкість руху за перші дві секунди?

6) В який інтервал часу матеріальна точка віддалялась від точки відліку, а в який – наближалась?

№661. 1) Довести, що функція $y=ax^2$ при $a>0$ набуває на області визначення найменшого значення.
2) Довести, що функція $y=ax^2$ при $a<0$ набуває на області визначення найбільшого значення.
3) Довести, що функція $y=a(x-m)^2+n$ при $a>0$ набуває в точці $x_0=m$ найменшого значення на області визначення.
4) Довести, що функція $y=a(x-m)^2+n$ при $a<0$ набуває в точці $x=m$ найбільшого значення на області визначення.
№662. 1) Довести, що функції $y=ax^2+bx+c$ і

$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ рівні на множині дійсних чисел, тобто при однакових значення аргументу значення функцій рівні.

2) Довести, що функції $y=ax^2+bx$ і $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}$ рівні на множині дійсних чисел.

3) Довести, що при $a>0$ функції $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ і $y=ax^2+bx+c$ у точці $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ набувають найменшого значення.

4) Довести, що при $a<0$ функції $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ і $y=ax^2+bx+c$ у точці $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ набувають на області визначення найбільшого значення.

№663. а) Довести, що функція $y=ax^2$ при $a>0$ на проміжку $[0;\ \infty)$ зростає.
б) Довести, що проміжок $(-\infty; 0]$ є проміжком спадання функції $y=ax^2$ при $a>0$.
в) Довести, що проміжок $(-\infty; 0]$ є проміжком зростання функції $y=ax^2$ при $a<0$.
г) Довести, що функція $y=ax^2$ при $a<0$ на проміжку $[0;\ \infty)$ спадає.

IV

№664. 1) **Знайти числа m і n, якщо графік функції $y=x^2+mx+n$ перетинає вісь x у точках з абсцисами:**
а) 3 і 5; б) −3 і 5.
2) **Знайти числа m і n, якщо графік функції $y=x^2+mx+n$ дотикається осі x у точках з абсцисами:**
а) −3; б) 4.
3) **Знайти координати вершини параболи, якщо графік функції $y=x^2+mx+n$ перетинає вісь x у точках з абсцисами:**
а) 3 і 5; б) 0 і 2.

№665. а) **Графік функції $y=x^2+mx+n$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 1, а вісь y − в точці з ординатою 1. Знайти числа m і n та множину значень функції.**
б) **Графік функції $y=x^2+mx+n$ проходить через точку $A(1; 3)$ і перетинає вісь x у точці з абсцисою 4. Знайти числа m і n та множину значень функції.**
в) **Вершиною графіка функції $y=x^2+mx+n$ є точка $A(2; -1)$. Знайти числа m і n.**

№666. **Знайти числа a, b і c у функції, заданої формулою $y=ax^2+bx+c$, якщо:**
а) **її графік перетинає вісь y в точці з ординатою $y_0=6$, а вершиною графіка є точка $B(2; -2)$;**
б) **її графік перетинає вісь x у точці з абсцисою $x_0=-1$, а вершиною графіка є точка $B(-2; -2)$;**
в) **графік функції проходить через точку $A(-1; 6)$, а вершиною графіка є точка $B(-3; -2)$.**

№667. **Знайти числа a, b і c у функції, заданої формулою $y=ax^2+bx+c$, якщо:**
а) **її графік перетинає вісь абсцис у точках $x_1=1$ і $x_2=3$, а вісь ординат − у точці з ординатою $y_0=12$;**
б) **її графік дотикається до осі абсцис у точці $A(1; 0)$ і перетинає вісь y в точці з ординатою $y_0=2$;**
в) **графік функції дотикається до осі абсцис у точці $A(2; 0)$ і проходить через точку $B(1; 4)$.**

№668. а) **Довести, що графік функції $y=ax^2$ симетричний відносно осі y.**
б) **Довести, що графіки функції $y=ax^2$ і $y=-ax^2$ симетричні відносно осі x.**
в) **Довести, що графіки функції $y=ax^2+bx+c$ і $y=-ax^2-bx-c$ симетричні відносно осі x.**

№669. а) Функцію задано формулою $f(x)=x^2-2x+3$. Показати, що $f(-1-a)=f(-1+a)$. Відповідь пояснити.
б) Функцію задано формулою $f(x)=2x^2-4x+1$. При якому a рівність $f(a-b)=f(a+b)$ виконується для будь-якого дійсного числа b? Відповідь пояснити.
№670. а) При якому значенні аргументу сума значень функцій $y=x^2$ і $y=2x$ найбільша?
б) При якому значенні аргументу сума значень функцій $y=-x^2$ і $y=-1$ найменша?
в) Знайти число, яке, додане до свого квадрату, дає найменшу суму.
г) Знайти число, різниця якого і його квадрату є найбільшою.
№671. а) Знайти сторони прямокутника, у якого серед прямокутників з периметром 20 м найбільша площа.
б) Знайти катети прямокутного трикутника у якого серед прямокутних трикутників з сумою катетів 10 дм найбільша площа.
в) Довести, що серед прямокутників, периметр яких дорівнює p, найбільшу площу має квадрат.
г) Довести, що серед прямокутних трикутників, сума катетів яких дорівнює a, найбільшу площу має рівнобедрений трикутник.
№672. Дано функцію $f(x)=x^2+2x-3$. Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка при однакових значеннях аргументу з даною функцією набуває:
а) протилежних з нею значень;
б) значень, які на 5 більші від значень даної функції;
в) значень, які на 4 менші від значень даної функції.
№673. Дано функцію $f(x)=x^2+6x+5$.Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових значень з даною функцією при:
а) значеннях аргументу, які на 2 менші від протилежних значень аргументу даної функції;
б) значеннях аргументу, які на 2 менші від значень аргументу даної функції;
в) значеннях аргументу, які на 3 більші від значень аргументу даної функції.
Побудувати графік функції і за графіком встановити множину значень; проміжки знакосталості та проміжки монотонності функцій (№736–737):
№674. а) $y=x^2+6|x|+5$; б) $y=-x^2+6|x|-5$.
№675. а) $y=|x^2+2x-3|$; б) $y=|x^2+6x+5|$.

ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Функція, областю визначення якої є послідовність натуральних чисел, починаючи з числа 1, називається **числовою послідовністю**.

Якщо областю визначення функції є множина всіх натуральних чисел, то функція називається **нескінченною числовою послідовністю**.

Якщо областю визначення функції є скінченна послідовність натуральних чисел, починаючи з числа 1, то функція називається **скінченною числовою послідовністю**.

Коротко: числова послідовність – це функція натурального аргументу.

Значення функції, що є числовою послідовністю, називаються членами послідовності і позначаються $f(n) = a_n$. (a_n), (b_n), (c_n), . . – різні позначення числової послідовності.

Задати числову послідовність – значить встановити спосіб (правило, закон), за яким кожному натуральному числу з області визначення послідовності ставиться у відповідність одне і тільки одне число з множини дійсних чисел.

№676. Скінченна числова послідовність задана таблицею:

а)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	6	8	10	12

б)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	–2	–4	–6	–8	–10	–12

в)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	4	9	16	25	36

г)

n	1	2	3	4	5
a_n	3	5	7	9	11

Записати:

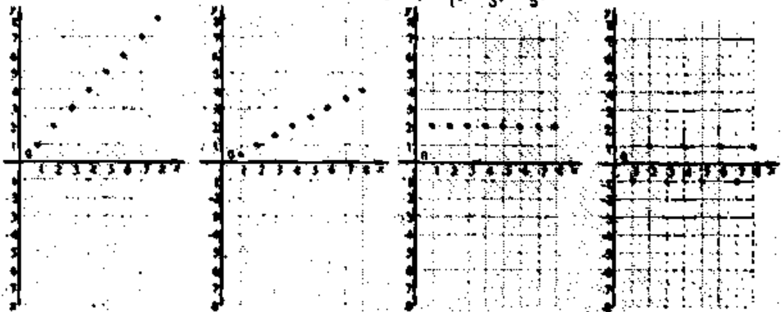
1) область визначення числової послідовності:

2) множину значень послідовності;

3) значення членів послідовності a_1; a_2; a_5.

Графіком числової послідовності є множина точок координатної площини, у яких абсциси утворюють нескінченну чи скінченну послідовність натуральних чисел, починаючи з числа 1.

№677. **За графіками числових послідовностей, зображених на малюнку 79 знайти: 1) область визначення; 2) множину значень членів послідовності; 3) a_1; a_3; a_5.**



а) б) в) г)

Мал. 79

№678. **Побудувати графік числової послідовності заданої формулою $a_n = -2n + 9$, заданої число членів послідовності дорівнює восьми.**

Послідовність (a_n) задана формулою n-го (загального) члена послідовності, якщо вона задана у вигляді рівності, в якій ліва частина є n-ий член послідовності, а права – вираз зі змінною n, що визначає послідовність дій з натуральним числом n. Результатом виконання цих дій є значення n-го члена послідовності a_n.

Формула n-го – члена дозволяє за номером члена послідовності знаходити його значення.

Алгоритм знаходження будь-якого члена послідовності за формулою n-го члена

1. Підставити в праву частину формули конкретне значення натурального числа (k).

2. Виконати обчислення у порядку, заданому формулою.

3. Одержане число – шуканий (k-ий) член послідовності

№679. **Знайти десятий член послідовності, заданої формулою загального члена:**

а) $a_n = 5n$; **б)** $b_n = 2n + 1$; **в)** $c_n = -3n + 4$

г) $a_n = (-1)^n$; **д)** $b_n = 3 \cdot (-1)^{n+1}$; **е)** $c_n = 5n^2$.

№680. **Послідовність задана формулою $a_n=4n^2+3$. Знайти:** a_1; a_3; a_5; a_k; a_{k+2}; a_{k-2}.

№681. **Задати формулою n-го члена послідовність, у якої кожний член є:**

а) квадратом натурального числа;
б) подвоєним натуральним числом;
в) сумою числа 5 і потроєного натурального числа n;
г) сумою квадрата натурального числа n і числа 10.

№682. **Задати формулою n-го члена послідовність, задану таблицею. Вказати область визначення послідовності.**

а)

n	1	2	3	4	5
x_n	2	8	18	32	2·25

б)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	3	9	19	33	2·25+1	73

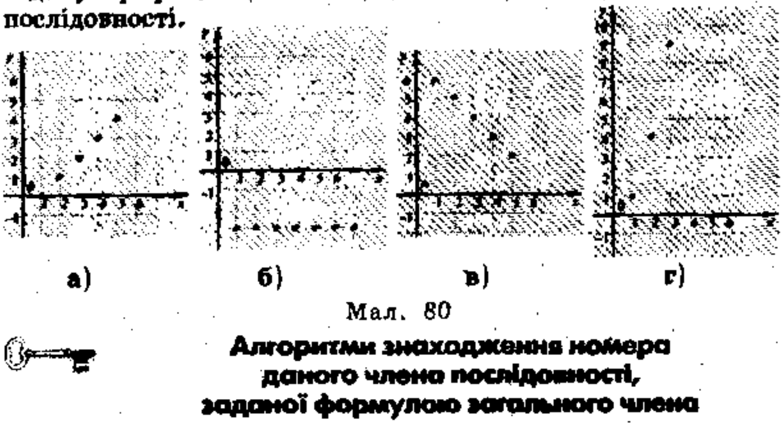
в)

n	1	2	3	4
b_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

г)

n	1	2	3	4	5	6
c_n	−1	−0,5	$-\frac{1}{3}$	−0,25	−0,2	$-\frac{1}{6}$

№683. **Задати формулою загального члена послідовність, задану графіком (мал. 80). Вказати область визначення послідовності.**



а) **б)** **в)** **г)**

Мал. 80

Алгоритм знаходження номера даного члена послідовності, заданої формулою загального члена

1. Скласти рівняння, в якого одна частина n-ий - член послідовності, представлений як вираз із натуральним числом n, а друга частина – даний член послідовності.

2. Розв'язати утворене рівняння. Одержаний натуральний розв'язок рівняння – шуканий номер члена послідовності.

№684. 7; 16; 301 – **члени послідовності (a_n), заданої формулою $a_n=3n+1$. Знайти номери даних членів послідовності.**

№685. **Знайти номер числа 16 – члена послідовності, в якої:** а) $a_n=3n+1$; б) $a_n=5n+1$; в) $a_n=4n^2$; г) $a_n=9n-11$.

Алгоритм знаходження номерів додатних (від'ємних) членів послідовності, заданої формулою загального члена

1. Записати нерівність зі знаком > (<), у якої ліва частина – це n-ий – член послідовності, представлений виразом із змінною n, а права частина – число нуль.

2. Розв'язати записану нерівність відносно n.

3. Знайти множину натуральних розв'язків нерівності. Одержана множина – номери додатних (від'ємних) членів послідовності.

№686. **Знайти номера додатних членів послідовності $a_n = -2n + 19$. Виконати завдання за схемою:**

1) записати нерівності зі знаком >, у якої ліва частина – це вираз $-2n + 19$, а права – число 0;

2) розв'язати одержану нерівність як лінійну відносно n;

3) записати натуральні розв'язки нерівностей.

№687. **Знайти номера додатних членів послідовності (a_n), заданої формулою $a_n = 4n - 41$.**

№688. **Встановити номер члена послідовності (b_n), заданої формулою n-го члена $b_n = 3n - 16$, починаючи з якого всі члени послідовності додатні.**

№689. **Знайти номери від'ємних членів послідовності (b_n), заданої формулою n-го члена $b_n = -3n + 28$, починаючи з якого всі члени послідовності від'ємні.**

№690. **Встановити номер члена послідовності (b_n), заданої формулою загального члена $b_n = -2n - 17$, починаючи з якого всі члени послідовності від'ємні.**

Послідовність називається **зростаючою**, якщо більшому номеру відповідає більший член послідовності, тобто якщо при будь-якому натуральному значенні n $a_{n+1} > a_n$.

Послідовність називається **спадною**, якщо більшому номеру відповідає менший член послідовності, тобто якщо при будь-якому натуральному значенні n $a_{n+1} < a_n$.

№691. **Які з послідовностей є зростаючими, а які – спадними?**

а) (a_n): $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{k}; \ldots$

б) (a_n): $2; 4; 6; 8; 10; \ldots; 2k; \ldots$.

в) (a_n): $-3; -6; -9; -12; -15; \ldots; -3k; \ldots$.

г) (a_n): $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots; a_{k-1} + a_{k-2}; \ldots$.

Алгоритм доведення зростання (спадання) послідовності, заданої формулою n-го члена послідовності

1. Записати a_{n+1}-ий член послідовності, підставивши у формулу загального члена $n+1$.

2. Скласти вираз $a_{n+1}-a_n$ і спростити його.

3₁. Якщо різниця $a_{n+1}-a_n$ – додатне число, то послідовність $\{a_n\}$ зростаюча.

3₂. Якщо різниця $a_{n+1}-a_n$ – від'ємне число, то послідовність $\{a_n\}$ спадна.

№692. **Довести за схемою, що послідовність, яка задана формулою $a_n = \frac{1}{5}n + 2$, є зростаючою:**

1) **Підставити у формулу $a_n = \frac{1}{5}n + 2$ замість n вираз $n+1$.**

2) **Записати різницю одержаного виразу й виразу $\frac{1}{5}n + 2$.**

3) **Спростити різницю виразів.**

4) **Встановити знак різниці.**

5) **За знаком зробити висновок про зростання чи спадання послідовності.**

№693. **Довести, що послідовність $\{a_n\}$, яка задана формулою загального члена, є зростаючою:**

а) $a_n=5n+2$; б) $a_n=n^2$.

№694. **Довести, що послідовність $\{b_n\}$, яка задана формулою загального члена, є спадною:**

а) $b_n=-4n+1$; б) $b_n=-2n^2$.

Послідовність задана рекурентною формулою, якщо кожний член послідовності, починаючи з деякого, заданий як функція від одного чи декількох попередніх членів.

№695. **Послідовність задана рекурентною формулою $a_{n+1}=a_n+2$ і першим членом $a_1=10$. Перевірити, чи правильно знайдені перші п'ять членів послідовності:**

а) $a_1=10$; б) $a_2=10+2=12$; в) $a_3=12+2=14$;

г) $a_4=14+2=16$; д) $a_5=16+5=21$.

№696. **Послідовність задана рекурентною формулою $a_{n+1}=3a_n+2$ і першим членом $a_1=5$. Записати перші п'ять членів послідовності.**

№697. **Послідовність задана першими двома членами: $a_1=5$, $a_2=10$ і формулою $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. Записати перші сім членів послідовності.**

№698. **Послідовність задана першим і другим членом: $a_1=6$, $a_2=12$ і формулою $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$. Записати перші сім членів послідовності.**

№699. **Контрольні питання.**

1. Як називається скінченний набір (сукупність, множина) дійсних чисел, якщо кожне з чисел має номер, починаючи з першого?

2. Що називають нескінченною числовою послідовністю?

3. Що значить задати числову послідовність?

4. Назвати способи задання числової послідовності.

5. Що називається графіком послідовності?

6. Як називається спосіб задання послідовності, якщо кожний член послідовності заданий формулою як функція свого номеру?

7. Навести три приклади послідовності, заданої формулою n-го (загального) члена послідовності.

8. Як знайти деякий член послідовності, заданої формулою n-го члена, за його номером?

9. Як знайти номер даного члена послідовності, заданої формулою загального члена, за його числовим значенням?

10. Як знайти номери додатних (від'ємних) членів послідовності, заданої формулою n-го члена?

11. Яка послідовність називається зростаючою; спадною?

12. Як довести, що числова послідовність є зростаючою (спадною)?

13. В якому випадку кажуть, що послідовність задана рекурентною формулою?

II

№700. **Скінченна числова послідовність $a_n=f(n)$ задана таблицею:**

а)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	6	9	14	15	18	21	24

б)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40

в)

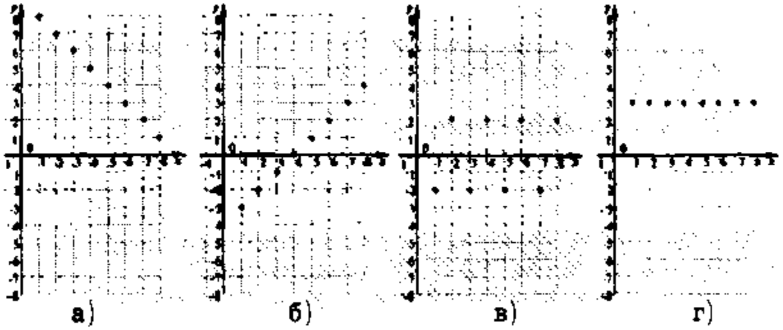
n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	5	10	17	26	37	50	65

г)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	−1	−3	−5	−7	−9	−11	−13	−15

Записати область визначення послідовності. Для кожної з послідовностей знайти: $f(2)$; $f(6)$; a_5; a_8.

№701. Записати члени скінченної послідовності, заданої графічно (мал. 81).



Мал. 81

№702. Знайти п'ятий і двадцятий члени послідовності, заданої формулою:

а) $a_n=2n+1$; б) $b_n=3n+2$; в) $c_n=\frac{1}{n+2}$; г) $x_n=3\cdot(-1)^n$.

№703. Знайти перші шість членів послідовності, заданої формулою загального члена:

а) $a_n=4n+5$; б) $b_n=2^n$; в) $c_n=\frac{1}{2n-1}$; г) $x_n=4\cdot(-1)^{n+1}$.

№704. Задати формулою n-го члена послідовність, у якої кожний член є:

а) потроєним натуральним числом n;

б) сумою числа 10 і почетвереного натурального числа;

в) добутком натурального числа n і наступного за даним числа;

г) потроєним квадратом натурального числа n.

№705. Дано послідовність:

а) $a_n=3n$; б) $a_n=4n+1$; в) $a_n=3n-2$; г) $a_n=3^{n+1}$.

Записати: 1) k-ий – член послідовності;

2) член послідовності, що передує k-ому члену послідовності;

3) член послідовності, що є наступним за k-тим членом;

4) член послідовності, що йде через два номери після k-го члена.

№706. а) Послідовність (a_n) задана формулою $a_n=5n$. Знайти номери членів послідовності 40; 100; 450; 1000.

б) Послідовність (b_n) задана формулою $b_n=4n+1$. Знайти номери членів послідовності 9; 45; 89; 405; 241.

в) Які з чисел 36; 72; 100; 200 є членами послідовності (a_n), заданої формулою $a_n=2n^2$ і з якими номерами?

г) Які з чисел 8; 20; 64; 200 є членами послідовності (a_n), заданої формулою $a_n=2^n$ і з якими номерами?

№707. Знайти додатні члени послідовності, заданої формулою:
а) $a_n=-13n+30$; б) $a_n=-2n+15$; в) $a_n=-3n+19$; г) $a_n=-5n+36$.

№708. Знайти від'ємні члени послідовності, заданої формулою:
а) $a_n=3n-34$; б) $a_n=10n-70$; в) $a_n=4n-50$; г) $a_n=7n-60$.

№709. Довести, що послідовність, задана формулою, є зростаючою:

а) $a_n=2n-3$; б) $b_n=\frac{n}{4}+3$; в) $c_n=10n^2$; г) $x_n=\frac{1}{2}n^2$.

№710. Довести, що послідовність, задана формулою, є спадною:

а) $a_n=-3n+5$; б) $b_n=-\frac{n}{5}+1$; в) $c_n=-4n^2$; г) $x_n=-\frac{n^2}{2}$.

№711. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої:
а) першим членом $a_1=10$ і формулою $a_{n+1}=5+a_n$;
б) першим членом $a_1=-10$ і формулою $a_{n+1}=-20a_n$;
в) першими двома членами: $a_1=2$, $a_2=20$ і формулою $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$;
г) першими двома членами $a_1=2$, $a_2=3$ і формулою $a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1}$.

№712. Побудувати графік скінченної послідовності, заданої формулою:
а) $a_n=2n-7$, $n\le 10$;
б) $a_n=-2n+12$, $n\le 10$;
в) $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, $a_1=-3$, $a_2=-1$; $n\le 6$;
г) $a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1}$, $a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=2$, $n\le 6$.

III

№713. Записати формулу загального члена послідовності:
а) 2; 4; 6; 8; 10; 12; ... б) 3; 5; 7; 9; 11; 13; ...
в) 4; 7; 10; 13; 16; 19; ... г) 5; 10; 15; 20; 25; ...
д) 7; 12; 17; 22; 27; ... е) 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ...
є) 3; 12; 27; 48; 75; 108; 127; ... ж) 4; 13; 28; 49; 76; 109; 128; ..

№714. Знайти суму перших п'яти членів послідовності, заданої формулою загального члена:
а) $a_n=3n+1$; б) $b_n=-2n+3$; в) $c_n=(-1)^n\cdot n$; г) $x_n=(-1)^{n+1}\cdot n^2$.

№715. Довести, що $a_k+a_{k+2}=2a_{k+1}$, якщо послідовність $\{a_n\}$ задана формулою загального члена:
а) $a_n=n+3$; б) $a_n=4n+1$; в) $a_n=-3n+1$; г) $a_n=-5n-2$.

№716. Довести, що $a_k\cdot a_{k+2}=a_{k+1}^2$, якщо послідовність $\{a_n\}$ задана формулою загального члена:

а) $a_n=2^n$; б) $a_n=3^n$; в) $a_n=5\cdot 4^n$; г) $a_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n$.

№717. а) Послідовність (a_n) задана формулою $a_n = \frac{1}{n}$. Довести, що $a_k - a_{k+1} = a_k \cdot a_{k+1}$.

б) Послідовність (a_n) задана формулою $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Довести, що $a_k - a_{k+1} = 2a_k \cdot a_{k+1}$.

в) Послідовність (b_n) задана формулою $b_n = \frac{1}{3n+1}$. Довести, що $b_k - b_{k+1} = 3b_k \cdot b_{k+1}$.

г) Послідовність задана формулою $x_n = \frac{1}{5n+1}$. Довести, що $x_k - x_{k+1} = 5x_k \cdot x_{k+1}$.

№718. Знайти найменший додатний член послідовності (a_n), заданої формулою:

а) $a_n = -3n+29$; б) $a_n = -2n+53$; в) $a_n = -\frac{n}{2}+15$; г) $a_n = -\frac{n}{3}+22$.

№719. Знайти найбільший від'ємний член послідовності (b_n), заданої формулою:

а) $b_n = 2n-17$; б) $b_n = 5n-46$; в) $b_n = \frac{n}{2}-9$; г) $b_n = \frac{n}{4}-15$.

№720. а) Довести, що коли послідовність (a_n) – зростаюча, то і послідовність (x_n), в якої $x_n = 5a_n$, є зростаючою.

б) Довести, що коли послідовність (a_n) – зростаюча, то і послідовність (x_n), в якої $x_n = 5a_n+2$, є зростаючою.

в) Довести, що коли послідовність (a_n) – зростаюча, то послідовність (x_n), в якої $x_n = -3a_n$, є спадною.

г) Довести, що коли послідовність (a_n) – зростаюча, то послідовність (x_n), в якої $x_n = -4a_n+1$, є спадною.

№721. а) Довести, що коли послідовність (b_n) – спадна, то і послідовність (x_n), в якої $x_n = 4b_n$, є спадною.

б) Довести, що коли послідовність (b_n) – спадна, то і послідовність (x_n), в якої $x_n = 3b_n+2$, спадна.

в) Довести, що коли послідовність (b_n) – спадна, то послідовність (x_n), в якої $x_n = -3b_n$, зростаюча.

г) Довести, що коли послідовність (b_n) – спадна, то послідовність (x_n), в якої $x_n = -2b_n+5$, зростаюча.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№722. Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яка задана формулою загального члена, є зростаючою:

а) $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$; б) $x_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$.

№723. Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яка задана формулою загального члена, є спадною:

а) $x_n = \dfrac{1-n}{2n+1}$; б) $x_n = \dfrac{2-n}{3n+1}$.

№724. а) Дано зростаючі послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. Довести, що послідовність $\{a_n\}$, в якої $a_n = x_n + y_n$, є зростаючою.

б) Дано спадні послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. Довести, що послідовність $\{a_n\}$, в якої $a_n = x_n \cdot y_n$, є спадною.

в) Дано зростаючі послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ з додатними членами. Довести, що послідовність $\{a_n\}$, в якої $a_n = x_n \cdot y_n$, є зростаючою.

г) Дано спадні послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ з додатними членами. Довести, що послідовність $\{a_n\}$, в якої $a_n = x_n \cdot y_n$, є спадною.

№725. Задати формулою загального члена скінченну послідовність, задану таблицею.

а)

n	1	2	3	4
x_n	1	−1	1	−1

б)

n	1	2	3	4
x_n	−1	4	−9	16

в)

n	1	2	3	4	5
a_n	1	4	27	256	625

г)

n	1	2	3	4	5
b_n	−1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{5}$

д)

n	1	2	3	4	5
b_n	−1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

е)

n	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

№726. Задати формулою загального члена нескінченну числову послідовність:

а) 1; −1; 1; −1; 1; −1; ...

б) −3; 3; −3; 3; −3; 3; −3; ...

в) 5; −5; 5; −5; 5; −5; ...

г) −1; 4; −9; 16; −25; 36; −49; 64; −81; ...

д) 2; 5; 10; 17; 26; 37; 50; 65; 82; ...

е) 3; 6; 12; 24; 48; 96; ...

є) 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; ...

ж) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{21}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{29}$; ...

№727. Знайти найменший член послідовності $\{x_n\}$, заданої формулою:

а) $x_n = n^2 + 6n + 11$; б) $x_n = n^2 - 14n + 51$.

№728. Знайти найбільший член послідовності $\{x_n\}$, заданої формулою:

а) $x_n = -n^2 + 10n - 29$; б) $x_n = -n^2 + 20n - 105$.

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Арифметичною прогресією називається послідовність чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює сумі попереднього члена та одного того й самого числа для всіх членів послідовності, тобто $a_{k+1} = a_k + d$, де d – різниця прогресії.

Інакше: арифметичною прогресією називається послідовність чисел, у якій різниця між будь-якими членом, починаючи з другого, і попереднім членом, є постійним, одним і тим же для всіх членів послідовності числом, тобто для будь-якого натурального k $a_{k+1} - a_k = d$ – різниці арифметичної прогресії.

Арифметична прогресія, яка визначена на скінченній послідовності натуральних чисел, починаючи з числа один, є скінченною.

Арифметична прогресія, яка визначена на множині всіх натуральних чисел, є нескінченною.

№729. **Які зі скінченних послідовностей є арифметичними прогресіями? Для послідовностей, які є арифметичними прогресіями, знайти різницю.**

а) 2; 5; 8; 11; 14; 17. **б) −3; 1; 5; 9; 13; 17.**

в) 21; 20; 19; 18; 17; 16. **г) 105; 90; 75; 60; 45; 30.**

д) 3; 5; 8; 12; 17; 23; 30. **е)** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}$.

Алгоритм розпізнавання послідовності, заданої формулою загального члена, як арифметичної прогресії

1. Записати за формулою загального члена k-ий член послідовності.

2. Записати за формулою загального члена $(k+1)$-ий член послідовності.

3. Обчислити різницю $a_{k+1} - a_k$.

Якщо різниця – постійне число, яке не залежить від k, то послідовність є арифметичною прогресією.

Якщо різниця – вираз від k, то послідовність не є *арифметичною прогресією.*

№730. Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.

а) Довести, що послідовність (a_n), задана формулою загального члена $a_n=3n+2$, є арифметичною прогресією.

Доведення.

1. Запишемо k–тий член послідовності: $a_k=$________.

2. Запишемо $(k+1)$–й член послідовності:

$a_k+1=3_{k+1}+2=$________________________.

3. Обчислимо різницю $a_{k+1}-a_k$.

$a_k+1-a_k=$_______________________ = ______________.

Так як $a_{k+1}-a_k$ при будь–якому k дорівнює _________, то послідовність – __________________ .

б) Довести, що послідовність (b_n), задана формулою $b_n=n^2$, не є арифметичною прогресією.

Доведення.

1. Запишемо k–ий член послідовності: $b_k=$________.

2. Запишемо $(k+1)$–й член послідовності: $b_{k+1}=(k+1)^2=$______.

3. Обчислимо різницю $b_{k+1}-b_k$. $b_{k+1}-b_k=$______________________ =

Так як значення $b_{k+1}-b_k$ залежить від k, то різниця не є постійною. Отже, (b_k) не є арифметичною прогресією.

№731. а) Довести, що послідовність (a_n), яка задана формулою $a_n=5n-2$, є арифметичною прогресією.

б) Довести, що послідовність (b_n), яка задана формулою $b_n=\frac{1}{n}$, не є арифметичною прогресією.

№732. Пояснити, чому послідовності, задані формулами загального члена, є арифметичними прогресіями:

а) $a_n=7n-2$; б) $b_n=-0{,}4n+3$; в) $c_n=\frac{n}{3}+2$; г) $x_n=\frac{n}{5}-1$?

Послідовність, яка є лінійною функцією, заданою на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією, тобто послідовність (y_n), в якої $y_n=an+b$, де a і b - числа, є арифметичною прогресією.

№733. Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.

Послідовність (y_n), задана формулою $y_n=an+b$. Довести, що (y_n) – арифметична прогресія.

Доведення.

1. Запишемо k-тий член послідовності: $y_k=$ __________.

2. Запишемо $(k+1)$-й член послідовності: $y_{k+1}=a(k+1)+b=$ ______.

3. Обчислимо різницю $y_{k+1}-y_k$.

$y_{k+1}-y_k=$ ______________________ $=a$.

Так як різниця $y_{k+1}-y_k$ при будь-якому k дорівнює a, то послідовність $y_n=a_n+b$ є ________________ .

Якщо a_1 – перший член арифметичної прогресії, d – її різниця, то за означенням арифметичної прогресії її можна записати як послідовність:

a_1; a_1+d; a_1+d+d; $a_1+d+d+d$; $a_1+d+d+d+d$; ...; $a_1+(n-1)d$.

Формула $a_n=a_1+(n-1)d$ є формулою n-го члена арифметичної прогресії.

Алгоритм знаходження члена послідовності за його номером k, a_1 і d

1. Скласти суму $a_1+(n-1)d$.

2. Знайти значення суми.

Одержане число є k-им членом послідовності.

№734. **Дано (b_n) – арифметична прогресія, d – її різниця. Виразити через b_1 і d:**

а) b_{10}; б) b_{20}; в) b_{23}; г) b_{34}; д) b_{42}; е) b_{101}.

№735. **а) (a_n) – арифметична прогресія, $a_1=10$, $d=3$. Знайти a_{10}; a_{15}; a_{101}.**

б) (b_n) – арифметична прогресія $b_1=15$, $d=-2$. Знайти b_8; b_{16}; b_{201}.

Алгоритм знаходження різниці d арифметичної прогресії за першим членом a_1 значенням деякого члена прогресії та його номером

1. Записати формулу загального члена для даного k-го номера прогресії.

2. Підставити в рівняння зі змінною d дані.

3. Розв'язати рівняння зі змінною d. Корінь рівняння – шукана різниця d.

№736. **Дано (a_n) – арифметична прогресія, $a_1=5$, $a_9=29$. Перевірити, чи правильно обчислена різниця прогресії d.**

1) $a_9=a_1+8d$; 2) $29=5+8d$; 3) $8d=24$; 4) $d=3$.

№737. **(a_n) – арифметична прогресія.**

а) $a_1=7$; $a_{10}=25$. Знайти d. б) $a_1=-2$; $a_{21}=-62$. Знайти d.

Алгоритм знаходження першого члена арифметичної прогресії за даним деяким членом послідовності a_k, його номером k та різницею прогресії d

1. Записати формулу загального члена для даного k-го номера прогресії.

2. Підставити у формулу значення d, a_k і k.

3. Розв'язати рівняння зі змінною a_1.

Розв'язок рівняння - шуканий перший член a_1.

№738. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. $a_{15}=-27$, $d=-2$. Перевірити, чи правильно обчислений перший член прогресії:**
1) $a_{15}=a_1+14d$; 2) $-27=a_1+14\cdot(-2)$;
3) $-27=a_1-28$, $a_1=28-27$, $a_1=1$.

№739. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти перший член прогресії, якщо:**
а) $a_{19}=41$, $d=2$. **б) $a_{34}=-69$, $d=-2$.**

Алгоритм знаходження номера (місця) n-го члена арифметичної прогресії за значенням члена прогресії, першим членом a_1 і різницею d

1. Записати формулу n-го члена послідовності.

2. Підставити у формулу дані значення a_n, a_1 і d.

3. Розв'язати рівняння зі змінною n.

Розв'язок рівняння – шукане значення n.

№740. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія, $a_1=-1$, $d=-4$. Перевірити, чи правильно обчислено номер члена послідовності, який дорівнює -37.**

Розв'язання.

1) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$; 2) $-37=-1+(n-1)\cdot(-4)$; 3) $-37=-1-4n+4$, **$4n=37-1+4$, $4n=40$, $n=10$.**

№741. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія.**
а) $a_1=7$, $d=5$. Знайти номер члена прогресії, який дорівнює 62.
б) $a_1=-1$, $d=-3$. Знайти номер члена прогресії, який дорівнює -43.

№742. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія.**
а) $a_1=5$, $d=4$. Встановити, чи є членом даної прогресії число 42.
б) $a_1=-1$, $d=-4$. Встановити, чи є членом даної прогресії число -80.

№743. **Доповнити записи до правильних тверджень.**
Якщо $\{a_n\}$ – арифметична прогресія з різницею d, то:

а) $a_5 = a_6 -$ ______ , $a_5 = a_4 +$ ______ , $2a_5 =$ ______ , $a_5 =$ ______ ;

б) $k \neq 1$, $a_k = a_{k-1} +$ _____ (1), $a_k = a_{k+1} -$ _____ (2).

Додавши рівності (1) і (2), одержимо:

$2a_k =$ ______ , **отже,** $a_k =$ _____.

Властивість арифметичної прогресії

Кожний член арифметичної прогресії, крім першого, є середнім арифметичним сусідніх з ним членів (попереднього й наступного): $k \neq 1$, $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

№744. **Записати властивість арифметичної прогресії для:**
а) a_{20}; **б)** a_{36}; **в)** a_m; **г)** a_{k+2}; **д)** a_{k-2}, **де** $k-2>1$; **е)** a_{k+5}.

№745. $\{a_n\}$ – **арифметична прогресія.**
1) $a_{15}=23$; $a_{17}=29$. **Знайти** a_{16}; d. 2) $a_{20}=36$; $a_{22}=46$. **Знайти** a_{21}; d

Ознака арифметичної прогресії

Якщо для кожного члена послідовності, крім першого, виконується рівність $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, тобто кожний член послідовності, крім першого, є середнім арифметичним сусідніх, то послідовність чисел є арифметичною прогресією.

Доведення.

Нехай для будь-якого $k \neq 1$ члена послідовності $\{a_n\}$ виконується рівність $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$. З рівності $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ випливає рівність $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ або $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$. За означенням арифметичної прогресії послідовність $\{a_n\}$ є арифметичною прогресією.

Якщо в арифметичній прогресії n членів, то два члени послідовності, в яких сума номерів дорівнює $n+1$, рівновіддалені від крайніх членів (першого й останнього).

№746. 1) **В арифметичній прогресії десять членів. Чи правильно записані пари членів прогресії, рівновіддалених від крайніх (першого й останнього):** a_2 і a_9; a_3 і a_8; a_4 і a_7; a_5 і a_6? **Відповідь пояснити.**

б) **В арифметичній прогресії** n **членів. Чи правильно записані пари членів прогресії, рівновіддалених від крайніх:** a_2 і a_{n-1}; a_3 і a_{n-2}; a_{10} і a_{n-9}; a_k і a_{n-k+1}; a_m і a_{n-m+1}? **Відповідь пояснити.**

Властивість скінченної арифметичної прогресії

Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів (першого та останнього), є величина постійна та дорівнює сумі першого та останнього члена:

$$a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n$$

Доведення.

$a_2+a_{n-1}=a_1+d+a_n-d=a_1+a_n$,
$a_3+a_{n-2}=a_2+d+a_{n-1}-d=a_2+a_{n-1}$,
$a_4+a_{n-3}=a_3+d+a_{n-2}-d=a_3+a_{n-2}$,
$a_k+a_{n-k+1}=a_{k-1}+d+a_{n-k+2}-d=a_{k-1}+a_{n-k+2}$.
Отже, $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}$.

№747. **(a_n) – арифметична прогресія, в якої:**
а) $a_1=10$; $a_{10}=64$. Знайти суми: a_2+a_9; a_5+a_6. Відповідь пояснити.
б) $a_1=4$; $a_{20}=137$. Знайти: a_2+a_{19}; a_7+a_{14}. Відповідь пояснити.

Сума перших членів арифметичної прогресії (a_n) дорівнює добутку півсуми крайніх членів і кількості членів (n):

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Доведення.

$(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_n+a_1)=(a_1+a_n)\cdot n=2S_n$.

Звідки $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

№748. **(a_n) – арифметична прогресія.**
1) $a_1=5$, $a_8=21$. Знайти суму перших восьми членів.
2) $a_1=-7$, $a_{10}=-25$. Знайти суму перших десяти членів прогресії.

Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

№749. **Вивести формулу $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, підставивши у формулу $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ значення $a_n=a_1+d(n-1)$.**

№750. **(a_n) – арифметична прогресія.**
1) $a_1=5$, $d=4$. Знайти S_{10}. **2) $a_1=15$, $d=-3$. Знайти S_{12}.**

№751. **Контрольні питання**

1. Яка числова послідовність називається арифметичною прогресією?

2. Що є областю визначення скінченної; нескінченної арифметичної прогресії?

3. Яке число називають різницею арифметичної прогресії?

4. Записати формулу загального (n–го) члена арифметичної прогресії.

5. Як знайти член арифметичної прогресії за його номером і різницею?

6. Як знайти різницю арифметичної прогресії за її першим членом та даним членом прогресії і його номером?

7. Як знайти перший член арифметичної прогресії за різницею, даним членом і його номером?

8. Як знайти номер даного члена арифметичної прогресії за різницею і першим членом?

9. Які з функцій: пряма пропорційність, обернена пропорційність, лінійна, квадратична, задані на множині натуральних чисел, є арифметичними прогресіями?

10. Сформулювати властивість трьох сусідніх членів арифметичної прогресії.

11. Сформулювати ознаку арифметичної прогресії за середнім арифметичним членів послідовності.

12. Чому дорівнює сума номерів членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів?

13. Яка властивість членів арифметичної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів?

14. Як знайти суму скінченної арифметичної прогресії за першим і останнім членом?

15. Записати формулу знаходження суми n–членів арифметичної прогресії за першим членом і різницею?

II

№752. Які зі скінченних послідовностей є арифметичними прогресіями:

а) 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29. б) $\frac{1}{5}; \frac{1}{9}; \frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{21}; \frac{1}{25}; \frac{1}{29}$.

в) −9; −5; −1; 3; 7; 11; 15. г) 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5.

д) 3; 5; 8; 12; 17; 23; 30. е) 30; 24; 18; 12; 6; 0; −6?

Знайти різницю послідовностей, які є арифметичними прогресіями.

№753. **Довести, що послідовність $\{a_n\}$, задана формулою загального члена, є арифметичною прогресією:**

а) $a_n=7n-2$; б) $a_n=10n+1$; в) $a_n=-4n-5$; г) $a_n=-0{,}8n+3$.

№754. **Довести, що послідовність $\{a_n\}$, задана формулою загального члена, не є арифметичною прогресією:**

а) $a_n=\frac{1}{n+1}$; б) $a_n=2n^2$; в) $a_n=-2n^2$; г) $a_n=n(n+1)$.

№755. **а) Довести, що пряма пропорційність, задана на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією.**

б) Довести, що лінійна функція, задана на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією.

в) Довести, що обернена пропорційність, задана на множині натуральних чисел, не є арифметичною прогресією.

г) Довести, що функція $y=x^2$, задана на множині натуральних чисел, не є арифметичною прогресією.

№756. **Записати перші п'ять членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо:**

а) $a_1=3$; $d=2$; б) $a_1=-3$; $d=5$;

в) $a_1=14$; $d=-3$; г) $a_1=-2$; $d=-4$.

№757. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти:

а) a_{10}, якщо $a_1=3$, $d=5$; б) a_{15}, якщо $a_1=-2$, $d=4$;

в) a_{21}, якщо $a_1=40$, $d=-2$; г) a_{41}, якщо $a_1=-1$, $d=-3$.

№758. **$\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти d – різницю прогресії, якщо:**

а) $a_1=8$, $a_{11}=78$; б) $a_1=7$, $a_{15}=63$;

в) $a_1=5$, $a_{21}=-35$; г) $a_1=-3$, $a_{26}=-128$.

№759. $\{b_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти b_1, якщо:

а) $d=2$, $b_{10}=27$; б) $d=3$, $b_{14}=44$;

в) $d=-5$, $b_{20}=-99$; г) $d=-2$, $b_{41}=-79$.

№760. **$\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти номер члена арифметичної прогресії, який дорівнює:**

а) 73, якщо $a_1=13$; $d=10$; б) 98, якщо $a_1=3$; $d=5$;

в) -49, якщо $a_1=-7$; $d=-3$; г) -13, якщо $a_1=11$; $d=-4$.

№761. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Чи є членом прогресії число:

а) 61, якщо $a_1=7$; $d=6$; б) 52, якщо $a_1=9$; $d=4$;

в) -29, якщо $a_1=8$; $d=-2$; г) -71, якщо $a_1=-10$; $d=-7$?

№762. **Записати формулу n-го члена арифметичної прогресії $\{a_n\}$, в якої:**

а) $a_1=7$; $d=2$; б) $a_1=9$; $d=-2$;

в) $a_1=-4$; $d=3$; г) $a_1=-10$; $d=-5$.

Знайти за формулою a_4 і a_{10}.

№763. Між даними числами вставити таке число, щоб воно разом з ними утворювало арифметичну прогресію:
а) 14 і 8; б) 7 і 13; в) −5 і 7; г) −12 і 6.

№764. а) Десять чисел утворюють арифметичну прогресію, першим членом якої є число 5, а останнім – число 32. Знайти суму цих чисел.

б) Вісім чисел утворюють арифметичну прогресію, першим членом якої є число 1, а останнім – число 20. Знайти суму цих чисел.

в) Двадцять чисел утворюють арифметичну прогресію, першим членом якої є число 7, а останнім – число 45. Знайти суму даних чисел.

г) Двадцять шість чисел утворюють арифметичну прогресію, першим членом якої є число 12, а останнім – число 38. Знайти суму цих чисел.

№765. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти суму перших:
а) десяти членів прогресії, якщо $a_1=3$, $d=4$;
б) п'ятнадцяти членів прогресії, якщо $a_1=-12$, $d=2$;
в) сорока членів прогресії, якщо $a_1=24$, $d=-3$;
г) ста членів прогресії, якщо $a_1=200$, $d=-3$.

III

№766. Знайти одинадцятий член арифметичної прогресії:
а) 5; 8; ... ; б) −10; −8; ... ; в) 20; 17; ... ; г) −1; −4; ... .

№767. Записати формулу n-го члена арифметичної прогресії:
а) 2; 6; ... ; б) 19; 7; ... ; в) −1; 3; ... ; г) −2; −5; ... .

№768. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти:
а) a_{10}, якщо $a_2=9$; $d=2$; б) a_{14}, якщо $a_2=-1$; $d=-2$;
в) a_{21}, якщо $a_2=-1$; $d=4$; г) a_{100}, якщо $a_2=48$; $d=-2$.

№769. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти:
а) a_{10}, якщо $a_3=16$; $d=5$; б) a_{14}, якщо $a_5=-8$; $d=-3$;
в) a_{21}, якщо $a_2=-3$; $d=-2$; г) a_{100}, якщо $a_{40}=-50$; $d=-2$.

№770. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти:
а) a_{15}, якщо $a_1=9$; $a_{10}=27$; б) a_{21}, якщо $a_1=6$; $a_{14}=71$;
в) a_{40}, якщо $a_1=1$; $a_{21}=-79$; г) a_{100}, якщо $a_1=68$; $a_{11}=48$.

№771. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти d – різницю прогресії, якщо:
а) $a_{10}=23$; $a_{15}=33$; б) $a_7=-11$; $a_{19}=-35$;
в) $a_3=19$; $a_{21}=109$; г) $a_{13}=-10$; $a_{23}=-30$.

№772. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайти a_1, якщо:
а) $a_{10}=61$; $a_{20}=121$; б) $a_{11}=-31$; $a_{25}=-73$;
в) $a_7=51$; $a_{30}=212$; г) $a_{15}=-72$; $a_{25}=-122$.

№773. (a_n) – арифметична прогресія. Знайти:

а) a_{32}, якщо $a_2=5$; $a_{12}=45$; б) a_{28}, якщо $a_7=-8$; $a_{16}=-26$;
в) a_{14}, якщо $a_5=4{,}5$; $a_{20}=12$; г) a_{10}, якщо $a_{20}=10$; $a_{30}=5$.

№774. Записати формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n), в якої:

а) $a_1=11$; $a_{10}=47$; б) $a_1=2$; $a_{15}=-40$;
в) $a_1=-3{,}5$; $a_{20}=6$; г) $a_1=-3$; $a_{25}=-99$.

№775. Записати формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n), в якої:

а) $a_2=17$; $a_{11}=80$; б) $a_5=35$; $a_9=59$;
в) $a_7=-16$; $a_{15}=-40$; г) $a_{14}=-31$; $a_{21}=39$.

№776. Знайти число членів скінченної арифметичної прогресії, у якої:

а) перший член дорівнює 1, останній член 54, а різниця прогресії 5;
б) другий член дорівнює −1, останній член −31, а різниця прогресії −3;
в) третій член дорівнює 33, останній член 83, а різниця прогресії 10;
г) третій член дорівнює −5, передостанній −49, а різниця прогресії −4.

№777. (a_n) – арифметична прогресія.

а) $a_1=11$; $a_2=13$. Знайти номер числа 33, що є членом прогресії.
б) $a_2=-7$; $a_5=-13$. Знайти номер числа −33, що є членом прогресії.
в) $a_3=4$; $a_7=16$. Знайти номер числа 55, що є членом прогресії.
г) $a_4=-21$; $a_{10}=-51$. Знайти номер числа −91, що є членом прогресії.

№778. а) Між числами 7 і 15 вставити три такі числа, щоб вони разом із даними утворили арифметичну прогресію.
б) Між числами 11 і −1 вставити п'ять таких чисел, щоб вони разом із даними утворили арифметичну прогресію.
в) Між числами 11 і 74 вставити шість чисел, щоб вони разом із даними утворили арифметичну прогресію.
г) Між числами −3 і −43 вставити сім таких чисел, щоб вони разом із даними утворили арифметичну прогресію.

№779. Знайти номери від'ємних членів арифметичної прогресії (x_n), в якої:

а) $x_1=-15$, $d=2$; б) $x_1=-37$, $d=3$;
в) $x_1=-19$, $d=4$; г) $x_1=-71$, $d=5$.

№780. Знайти номери додатних членів арифметичної прогресії (x_n), в якої:

а) $x_1=32$, $d=-3$; б) $x_1=21$, $d=-2$;
в) $x_1=42$, $d=-4$; г) $x_1=51$, $d=-5$.

№781. **Знайти номери від'ємних членів арифметичної прогресії $\{x_n\}$, в якої:**

а) $x_2=-19$, $x_5=-13$; б) $x_4=-33$, $x_7=-21$;

в) $x_3=-37$, $x_6=-22$; г) $x_2=-21$, $x_{10}=11$.

№782. **Знайти номери додатних членів арифметичної прогресії $\{x_n\}$, в якої:**

а) $x_2=34$, $x_5=25$; б) $x_4=5$, $x_8=-3$;

в) $x_3=27$, $x_7=11$; г) $x_2=41$, $x_6=21$.

№783. **Дано $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Довести, що:**

а) $a_3+a_{10}=a_6+a_7$; б) $a_{12}+a_8=a_3+a_{17}$;

в) $a_{k-2}+a_{k+5}=a_{k+1}+a_{k+2}$; г) $a_{k-1}+a_{k+4}=a_k+a_{k+3}$.

№784. $\{a_n\}$ – арифметична прогресія.

а) $a_1+a_{12}=100$. Знайти a_5+a_7. б) $a_4+a_{10}=48$. Знайти a_7.

в) $a_2+a_{14}=86$, $a_6=33$. Знайти a_{10}. г) $a_3+a_9=50$, $a_7=29$. Знайти a_5.

№785. а) Довести, що коли градусні міри кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію, то градусна міра одного з кутів дорівнює 60°.

б) Довести, що коли градусна міра кутів п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію, то градусна міра одного з кутів дорівнює 108°.

№786. а) Довести, що послідовність чисел, яка задана формулою $x_n=a\cdot n+b$, є арифметичною прогресією з різницею a.

б) Довести, що послідовність чисел, яка задана формулою $x_n=a\cdot n$, є арифметичною прогресією з різницею a.

№787. а) Довести, що арифметична прогресія з додатною різницею є зростаючою послідовністю.

б) Довести, що арифметична прогресія з від'ємною різницею є спадною послідовністю.

№788. **Знайти суму перших п'ятнадцяти членів арифметичної прогресії:**

а) $-4; -1; \ldots$; б) $2; 6; \ldots$; в) $7; 3; \ldots$; г) $4; -2; \ldots$.

№789. **Знайти суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, в якої:**

а) $a_4=-3$, $d=4$; б) $a_5=6$, $d=3$;

в) $a_7=4$, $d=-2$; г) $a_9=-1$, $d=-3$.

№790. **Знайти суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, в якої:**

а) $a_1=10$, $a_6=20$; б) $a_1=-3$, $a_7=21$;

в) $a_1=5$, $a_{12}=-39$; г) $a_1=7$, $a_{13}=-53$.

№791. **Знайти суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, в якої:**

а) $a_3=7$, $a_7=15$; б) $a_5=-17$, $a_{10}=-32$;

в) $a_6=-23$, $a_{13}=-44$; г) $a_{10}=-39$, $a_{15}=-59$.

№792. Знайти суму перших двадцяти членів послідовності $\{a_n\}$, заданої формулою:

а) $a_n=2n+3$; б) $a_n=5n-4$; в) $a_n=-3n+4$; г) $a_n=-10n+1$.

№793. Записати формулу суми n-перших членів послідовності $\{a_n\}$, якщо:

а) $a_n=3n-1$; б) $a_n=2n+3$; в) $a_n=-2n-1$; г) $a_n=-4n+1$.

№794. Знайти суму членів скінченної арифметичної прогресії, у якої:

а) перший член дорівнює 8, останній член 63, а різниця прогресії 5;

б) другий член дорівнює 1, останній член 53, а різниця прогресії 4;

в) третій член дорівнює −13, останній член −98, а різниця прогресії −5;

г) перший член дорівнює −7, передостанній член −39, а різниця прогресії −4.

№795. Знайти суму додатних членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо:

а) $b_1=-17$, $d=3$; б) $b_1=-29$, $d=3$;

в) $b_1=-4$, $d=4$; г) $b_1=-48$, $d=5$.

№796. Знайти суму перших:

а) двадцяти натуральних чисел;

б) сорока натуральних чисел; в) ста натуральних чисел;

г) трьохсот натуральних чисел.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№797. Знайти суму членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$:

а) з шостого по двадцятий включно, якщо $a_1=10$, $d=4$;

б) з восьмого по тридцятий включно, якщо $a_1=12$, $d=2$;

в) з десятого по двадцятий включно, якщо $a_1=12$, $d=-2$;

г) з дванадцятого по тридцятий включно, якщо $a_1=40$, $d=-3$.

№798. Знайти суму членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$:

а) з третього по двадцятий включно, якщо $a_5=14$, $d=3$;

б) з п'ятого по двадцятий включно, якщо $a_7=11$, $d=2$;

в) з восьмого по двадцять восьмий включно, якщо $a_{10}=23$, $d=-4$;

г) з десятого по тридцятий включно, якщо $a_{15}=22$, $d=-3$.

№799. Знайти суму членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$:

а) з шостого по двадцять шостий включно, якщо $a_8=2$, $a_{11}=14$;

б) з дев'ятого по тридцятий включно, якщо $a_{12}=16$, $a_{15}=7$;

в) з десятого по п'ятдесятий включно, якщо $a_{21}=10$, $a_{41}=-50$;

г) з п'ятнадцятого по тридцять п'ятий включно, якщо $a_{20}=-8$, $a_{30}=12$.

№800. Довести, що коли послідовність чисел a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ... є арифметичною прогресією, то і послідовність заданих чисел є арифметичною прогресією:

а) a_1+3; a_2+3; a_3+3; a_4+3, ..., a_n+3, ...;

б) $3a_1$, $3a_2$, $3a_3$, $3a_4$, ... , $3a_n$, ...;

в) a_1-2, a_2-2, a_3-2, a_4-2, ..., a_n-2, ...;

г) $-5a_1$, $-5a_2$, $-5a_3$, $-5a_4$, ..., $-5a_n$, ...

№801. Довести, що коли послідовності чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... і b_1, b_2, b_3, ..., b_n,... є арифметичними прогресіями, то й послідовність заданих чисел є арифметичною прогресією:

а) a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ..., a_n+b_n, ...;

б) a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, ..., a_n-b_n, ...;

в) b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3, ..., b_n-a_n, ...

№802. Знайти суму перших:

а) двадцяти парних натуральних чисел;

б) тридцяти парних натуральних чисел;

в) п'ятдесяти парних натуральних чисел;

г) ста парних натуральних чисел.

№803. Знайти суму перших:

а) п'ятнадцяти непарних натуральних чисел;

б) тридцяти непарних натуральних чисел;

в) п'ятдесяти непарних натуральних чисел;

г) ста непарних натуральних чисел.

№804. Знайти суму перших:

а) двадцяти натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 1, починаючи з числа 1;

б) тридцяти натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2, починаючи з числа 2;

в) п'ятнадцяти натуральних чисел, які при діленні на 4 дають остачу 3, починаючи з числа 3;

г) двадцяти натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 4, починаючи з числа 4.

№805. Знайти суму непарних натуральних чисел:

а) від 1 до 53 включно;

б) від 1 до 77 включно;

в) від 1 до 101 включно;

г) від 1 до 203 включно.

№806. **Знайти суму непарних натуральних чисел:**
а) від числа 1 до числа 60 включно;
б) від числа 1 до числа 100 включно;
в) від 1 до 250 включно;
г) від 1 до 500 включно.
№807. **Знайти суму натуральних чисел, які:**
а) кратні числу 3, від 3 до 300 включно;
б) кратні числу 5, від 5 до 1000 включно;
в) кратні числу 10, від 10 до 1000 включно;
г) кратні числу 7, від 7 до 7000 включно.
№808. **Знайти суму натуральних чисел:**
а) від 50 до 100 включно;
б) від 100 до 400 включно;
в) від 60 до 160 включно;
в) від 500 до 800 включно.
№809. **Знайти суму парних натуральних чисел:**
а) від 40 до 200 включно;
б) від 50 до 100 включно;
в) від 60 до 160 включно;
г) від 100 до 500 включно.
№810. **Знайти суму непарних натуральних чисел:**
а) від 21 до 81 включно;
б) від 51 до 101 включно;
в) від 101 до 201 включно;
г) від 83 до 123 включно.
№811. **Знайти суму натуральних чисел, які:**
а) кратні числу 3, від 21 до 102 включно;
б) кратні числу 5, від 20 до 200 включно;
в) кратні числу 6, від 60 до 600 включно;
г) кратні числу 4, від 80 до 400 включно.
№812. **Знайти суму цілих чисел від:**
а) 20 до 30 включно;
б) 40 до 50 включно.

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

ОСНОВНЕ НАВЧАННЯ

I

Геометрична прогресія - це числова послідовність (b_n), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й саме число q, що називається знаменником геометричної прогресії, причому $q \neq 0$ і $q \neq \pm 1$, тобто $b_{k+1} = b_k \cdot q$.

Геометрична прогресія, яка визначена на скінченній послідовності натуральних чисел, починаючи з числа один, є **скінченною**.

Геометрична прогресія, яка визначена на множині всіх натуральних чисел, є **нескінченною**.

№813. **Які зі скінченних послідовностей є геометричними прогресіями:**

а) $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; 8;$
б) $\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; 2; 3; 4; 5.$
в) $-0{,}001; 0{,}01; -0{,}1; 1; -10; 100; -1000.$
г) $0; 2; 6; 18; 54; 162; 486.$
д) $1; 2; 4; 7; 10; 14; 19; 26.$
е) $1; -5; 25; -125; 625$?

Алгоритм розпізнавання послідовності, заданої формулою загального члена, як геометричної прогресії

1. Записати за формулою загального члена k-тий член послідовності b_k.

2. Записати за формулою загального члена $k+1$-ий член послідовності b_{k+1}.

3. Знайти відношення $\frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Якщо відношення – постійне число, яке не залежить від k, то послідовність є геометричною прогресією.

Якщо відношення – вираз від k, який набуває при різних k різних значень, то послідовність не є геометричною прогресією.

№814. Доповнити записи, що складають доведення, до правильних тверджень.

а) Довести, що послідовність, яка задана формулою загального члена $b_n=2^n$, є геометричною прогресією.

Доведення.

1. Запишемо k-ий член послідовності: $b_k=2^k$.
2. Запишемо $k+1$-ий член послідовності $b_{k+1}=$________.
3. Знайдемо відношення $\frac{b_{k+1}}{b_k}$. $\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{2^{k+1}}{2^k}=$____________.

Так як при будь-якому k відношення дорівнює числу ___, то послідовність $b_n=2^n$ є ________________.

б) Довести, що послідовність, яка задана формулою $b_n=\frac{1}{n}$, не є геометричною прогресією.

Доведення.

1. Запишемо k-ий член послідовності: $b_k=$_____ .
2. Запишемо $k+1$-ий член послідовності $b_{k+1}=$________.
3. Відношення $\frac{b_{k+1}}{b_k}=$________ є виразом, що залежить від k.

При $k=1$ $\frac{b_{k+1}}{b_k}=$_________, при $k=2$ $\frac{b_{k+1}}{b_k}=$_________ .

Отже, послідовність $b_n=\frac{1}{n}$ __________________________.

№815. Довести, що послідовність $\{b_n\}$, яка задана формулою $b_n=2^{n+1}$, є геометричною прогресією.

№816. Довести, що послідовність $\{b_n\}$, яка задана формулою $b_n=2n$, не є геометричною прогресією.

Якщо b_1 – перший член геометричної прогресії, q – її знаменник, то геометричну прогресію за означенням можна записати:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ b_1q^4,\ \dots,\ b_1q^{n-1}.$$

Формула $b_n=b_1q^{n-1}$ є формулою загального (n-го) члена геометричної прогресії.

Алгоритм знаходження члена геометричної прогресії за його номером k, b_1 і q

1. Записати вираз b_1q^{k-1}.

2. Знайти значення виразу.

Одержане число є шуканим k-тим членом геометричної прогресії.

№817. Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія, q – її знаменник. Виразити через b_1 і q: а) b_8; б) b_{10}; в) b_{23}; г) b_{k+1}; д) b_{k+3}.

№818. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія.

а) $b_1=5$, $q=2$. Знайти b_3; b_6. б) $b_1=81$, $q=-\frac{1}{3}$. Знайти b_6; b_8.

Алгоритм знаходження знаменника геометричної прогресії за даним першим членом b_1, значенням деякого члена прогресії і його номером k

1. Записати формулу загального члена для даного k-го номера прогресії.

2. Підставити у формулу значення b_1 і b_k.

3. Розв'язати рівняння зі змінною q.

Розв'язок рівняння – шукане значення знаменника геометричної прогресії.

№819. Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія, $b_1=8$, $b_7=\frac{1}{4}$.

Перевірити чи правильно обчислено знаменник прогресії:

1) $b_7=b_1q^6$; 2) $\frac{1}{4}=8q^6$; 3) $q^6=\frac{1}{32}$, $q=\pm\frac{1}{2}$.

№820. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія.

а) $b_1=\frac{1}{81}$; $b_5=1$. Знайти q. б) $b_1=40$, $b_4=-5$. Знайти q.

Алгоритм знаходження першого члена геометричної прогресії за деяким членом прогресії, його номером k та знаменником прогресії q

1. Записати формулу загального члена геометричної прогресії для даного k-го номера.

2. Підставити дані значення q і b_k.

3. Розв'язати рівняння зі змінною b_1.

Розв'язок рівняння – шуканий перший член b_1

№821. Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія, $b_7=\frac{1}{4}$, $q=-\frac{1}{2}$.

Перевірити, чи правильно обчислений перший член прогресії.

1) $b_7=b_1q^6$; 2) $\frac{1}{4}=b_1\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; 3) $\frac{1}{4}=b_1\cdot\frac{1}{64}$, $b_1=\frac{1}{4}:\frac{1}{64}$, $b_1=16$.

№822. Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія.

а) $b_8=81$, $q=-3$. Знайти b_1. б) $b_5=15$, $q=\frac{1}{2}$. Знайти b_1.

Властивість (1) геометричної прогресії

Кожний член геометричної прогресії $\{b_n\}$, крім першого, є середнім геометричним сусідніх з ним членів (попереднього й наступного): $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ $(k\neq 1)$.

№823. Довести властивість геометричної прогресії $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ за планом:

1. Виразити b_{k-1} –ий член через b_k і q.

2. Виразити b_{k+1} –ий член через b_k і q.

3. Записати добуток $b_{k-1}\cdot b_{k+1}$ через b_k і q.

№824. Записати властивість (1) геометричної прогресії $\{b_n\}$ для:

а) b_{10}; б) b_{15}; в) b_m; г) b_{k+2}; д) b_{k+3}.

№825. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія.

а) $b_4=4$, $b_6=16$. Знайти b_5 і q. б) $b_7=\frac{1}{9}$, $b_9=\frac{1}{81}$. Знайти b_8 і q.

№826. Пояснити, чому послідовність $\{c_n\}$ не є геометричною прогресією, якщо:

а) $c_7=9$, $c_8=8$, $c_9=4$; б) $c_{11}=\frac{1}{8}$; $c_{10}=\frac{1}{4}$; $c_9=-\frac{1}{2}$.

Ознака геометричної прогресії

Якщо для будь-якого члена послідовності $\{b_n\}$, крім першого, виконується рівність $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k-1}$, то послідовність є геометричною прогресією.

Доведення.

З рівності $b_k^2=b_{k-1}\cdot b_{k-1}$ випливає рівність відношень $\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_k}{b_{k-1}}$. Це означає, що відношення всіх членів послідовності, крім першого, до попереднього рівні, тобто послідовність є геометричною прогресією.

№827. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія. Довести, що:

а) $b_1\cdot b_{10}=b_2\cdot b_9$; б) $b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}$; в) $b_1\cdot b_n=b_3\cdot b_{n-2}$;

г) $b_1\cdot b_n=b_4\cdot b_{n-3}$; д) $b_6\cdot b_{12}=b_9^2$.

У скінченній геометричній прогресії з n членами члени прогресії, сума номерів яких дорівнює $n+1$, рівновіддалені від крайніх членів: від першого і n-го.

Властивість (2) геометричної прогресії

Добутки членів геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх, рівні, тобто якщо b_1 і b_n - крайні члени геометричної прогресії, то

$$b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}=b_3\cdot b_{n-2}=\ldots=b_k\cdot b_{n-k+1}$$

№828. **Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія.**

а) $b_2 \cdot b_9 = 20$. Знайти $b_4 \cdot b_7$.

б) $b_7 \cdot b_5 = 36$. Яким числом може бути b_6?

в) $b_{10} = 5$. Знайти $b_6 \cdot b_{14}$.

Сума n-перших членів геометричної прогресії $\{b_n\}$ за першим членом і знаменником обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (a).$$

Доведення формули (а).

1. $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n$.
2. $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \text{в}_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}$.
3. $S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^n$.
4. $S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$.
5. $S_n(q - 1) = b_1(q^n - b_1)$.
6. $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

№829. **$\{b_n\}$ – геометрична прогресія. Знайти:**

а) S_5, якщо $b_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$; **б) S_7, якщо $b_1 = -\frac{1}{64}$, $q = 2$.**

Нескінченна геометрична прогресія, у якої $|q| < 1$, тобто $-1 < q < 1$, і $q \neq 0$, називається **нескінченно спадною**.

Сумою нескінченної спадної прогресії є число $\frac{b_1}{1 - q}$, де b_1 – перший член, q – знаменник.

№830. **Які з даних геометричних прогресій є нескінченно спадними:**

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; **б) $-81, -27, -9, \ldots$;**

в) $-4, -8, -16, \ldots$; **г) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \ldots$?**

№831. **Знайти суму прогресії, якщо:**

а) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$; **б) $b_1 = -25$, $q = -\frac{1}{5}$.**

№832. **Контрольні питання.**

1. Яка числова послідовність називається геометричною прогресією?

2. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?

3. Записати формулу загального (n–го) члена геометричної прогресії.
4. Сформулювати властивість трьох сусідніх членів геометричної прогресії.
5. Сформулювати ознаку геометричної прогресії.
6. Сформулювати властивість членів геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх.
7. За якою формулою обчислюють суму перших n – членів геометричної прогресії?
8. Яка геометрична прогресія називається нескінченно спадною?
9. Яке число є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії?

II

№833. Які зі скінченних послідовностей є геометричними прогресіями:
а) 1, 4, 18, 64, 256, 1024;
б) 2, 6, 12, 36, 72, 216;
в) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$;
г) −4, 8, −16, 32, −64, 128;
д) 3, 5, 7, 9, 11, 13.
е) −10, −100, −1000, −10000, −100000, −1000000?

№834. Довести, що послідовність (b_n), що задана формулою загального члена, є геометричною прогресією:

а) $b_n=4\cdot5^n$; б) $b_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$; в) $b_n=4^{n+1}$; г) $b_n=3\cdot2^{n+1}$.

№835. Записати перші п'ять членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1=3$, $q=2$; б) $b_1=2$, $q=-3$; в) $b_1=64$, $q=\frac{1}{2}$; г) $b_1=81$, $q=-\frac{1}{3}$.

№836. (b_n) – геометрична прогресія. Знайти:

а) b_7, якщо $b_1=32$, $q=\frac{1}{2}$; б) b_8, якщо $b_1=\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{2}$;

в) b_8, якщо $b_1=0{,}003$, $q=10$; г) b_{10}, якщо $b_1=-0{,}00001$, $q=-10$.

№837. (b_n) – геометрична прогресія. Знайти q – знаменник прогресії, якщо:

а) $b_1=\frac{2}{3}$, $b_5=54$; б) $b_1=20$, $b_4=20000$;

в) $b_1=32$, $b_7=\frac{1}{4}$; г) $b_1=3000$, $b_8=0{,}0003$.

№838. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія. Знайти b_1, якщо:

а) $q=\frac{1}{2}$, $b_5=\frac{1}{4}$; б) $q=\frac{1}{2}$, $b_4=-2$;

в) $q=-2$, $b_7=-64$; г) $q=-3$, $b_6=-27$.

№839. Записати формулу n-го члена геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

а) $b_1=0{,}2$, $q=3$; б) $b_1=35$, $q=-2$; в) $b_1=\frac{1}{3}$, $q=3$; г) $b_1=\frac{1}{8}$, $q=2$.

№840. Між даними числами вставити таке число, щоб воно разом з ними утворювало геометричну прогресію. Скільки розв'язків має задача?

а) 4 і 9; б) $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{8}$; в) $-\frac{1}{3}$ і -243; г) $\frac{1}{32}$ і $\frac{1}{2}$.

№841. $\{b_n\}$ – геометрична прогресія. Знайти суму перших:

а) п'яти членів прогресії, якщо $b_1=5$, $q=2$;

б) шести членів прогресії, якщо $b_1=8$, $q=\frac{1}{2}$;

в) семи членів прогресії, якщо $b_1=\frac{1}{27}$, $q=-3$;

г) восьми членів прогресії, якщо $b_1=32$, $q=-\frac{1}{2}$.

№842. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

а) $b_1=16$, $q=\frac{1}{4}$; б) $b_1=9$, $q=\frac{1}{3}$; в) $b_1=10$, $q=-\frac{1}{5}$; г) $b_1=-4$, $q=-\frac{1}{2}$.

№843. Знайти перший член нескінченно спадної геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

а) її сума $S=12$, а знаменник $q=-\frac{1}{3}$;

б) її сума $S=1$, а знаменник $q=\frac{1}{2}$;

в) її сума $S=25$, а знаменник $q=\frac{1}{5}$;

г) її сума $S=18$, а знаменник $q=-\frac{2}{3}$.

№844. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

а) $S=27$, $b_1=18$; б) $S=50$, $b_1=90$;

в) $S=-\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{3}$; г) $S=8$, $b_1=7$.

№845. Дано $\{b_n\}$ – геометрична прогресія. Довести, що:

а) $b_3\cdot b_{10}=b_6\cdot b_7$; б) $b_2\cdot b_7=b_4\cdot b_5$;

в) $b_{n-2}\cdot b_{n+8}=b_{n+2}\cdot b_{n+4}$; г) $b_{n-3}\cdot b_{n+7}=b_{n+1}\cdot b_{n+3}$.

№846. **Знайти шостий член геометричної прогресії:**

а) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$; б) $-3, 1, \ldots$; в) $\frac{2}{27}, \frac{1}{9}, \ldots$; г) $32, -16, \ldots$.

№847. **Записати формулу n-го члена геометричної прогресії:**

а) $2, 8, \ldots$; б) $\frac{1}{2}, 4, \ldots$; в) $4, -\frac{1}{2}, \ldots$; г) $0{,}002, 0{,}02, \ldots$.

№848. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти:**

а) b_5, якщо $b_2=\frac{1}{3}$, $q=3$;

б) b_6, якщо $b_2=64$, $q=-\frac{1}{2}$;

в) b_7, якщо $b_2=-\frac{1}{32}$, $q=3$;

г) b_4, якщо $b_2=64$, $q=-\frac{1}{4}$.

№849. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти:**

а) b_7, якщо $b_3=5$, $q=2$;

б) b_{10}, якщо $b_4=80$, $q=\frac{1}{2}$;

в) b_8, якщо $b_5=40$, $q=-\frac{1}{2}$;

г) b_{10}, якщо $b_6=\frac{2}{9}$, $q=-3$.

№850. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти:**

а) b_7, якщо $b_1=\frac{3}{2}$, $b_4=12$;

б) b_8, якщо $b_1=48$, $b_5=\frac{3}{16}$;

в) b_3, якщо $b_1=-1000$, $b_6=0{,}01$;

г) b_{10}, якщо $b_1=\frac{1}{32}$, $b_4=2$.

№851. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти q – знаменник прогресії, якщо:**

а) $b_4=2$, $b_7=\frac{1}{4}$;

б) $b_3=-90$, $b_6=3\frac{1}{3}$;

в) $b_2=12$, $b_6=192$;

г) $b_4=8$, $b_7=0{,}064$.

№852. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти b_1, якщо:**

а) $b_4=\frac{2}{9}$; $b_7=\frac{16}{243}$;

б) $b_3=5$, $b_7=\frac{1}{25}$;

в) $b_2=-27$, $b_5=-1$;

г) $b_4=-1$, $b_6=-100$.

№853. $\{b_n\}$ – **геометрична прогресія. Знайти:**

а) b_7, якщо $b_2=-1$, $b_5=243$;

б) b_4, якщо $b_3=\frac{1}{10}$, $b_6=100$;

в) b_5, якщо $b_2=1$, $b_6=\frac{2}{625}$;

г) b_5, якщо $b_3=3$, $b_7=243$.

№854. **Записати формулу загального члена геометричної прогресії $\{b_n\}$, в якої:**

а) $b_1=1$, $b_7=64$;

б) $b_1=\frac{1}{3}$, $b_6=81$;

в) $b_1=-\frac{1}{2}$, $b_5=-64$;

г) $b_1=32$, $b_6=1$.

№855. **Записати формулу n -го члена геометричної прогресії $\{b_n\}$, в якої:**

а) $b_2=\frac{1}{2}$, $b_7=16$; б) $b_3=1$, $b_6=243$; в) $b_1=\frac{1}{3}$, $b_3=\frac{1}{81}$; г) $b_2=-3$, $b_5=-81$.

№856. а) **Між числами 1 і 256 вставити три такі числа, щоб вони разом із даними утворювали геометричну прогресію.**

б) **Між числами 3 і 81 вставити два такі числа, щоб вони разом із даними утворювали геометричну прогресію.**

в) **Між числами − 3 і вставити два такі числа, щоб вони разом із даними утворювали геометричну прогресію.**

г) **Між числами 10 і 0,01 вставити три такі числа, щоб вони разом із даними утворювали геометричну прогресію.**

№857. **Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії:**

а) 27, 9, ... ; б) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ...; в) −0,01, 0,1, ...; г) 8, −2, ...

№858. **Знайти суму перших п'яти членів геометричної прогресії $\{b_n\}$, в якої:**

а) $b_1=5$, $b_4=80$; б) $b_1=8$, $b_5=\frac{1}{2}$; в) $b_1=\frac{1}{2}$, $b_6=-16$; г) $b_1=-2$, $b_4=\frac{1}{4}$.

№859. **Знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії $\{b_n\}$, в якої:**

а) $b_3=\frac{1}{2}$, $b_7=\frac{1}{32}$; б) $b_3=10$, $b_6=10000$;

в) $b_2=-1$, $b_5=\frac{1}{125}$; г) $b_2=1$, $b_5=\frac{27}{8}$.

№860. **Знайти суму перших шести членів послідовності $\{b_n\}$, заданої формулою:**

а) $b_n=4\cdot 2^n$; б) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$; в) $b_n=0{,}1\cdot 2^n$; г) $b_n=-3^n$.

№861. **Довести, що геометрична прогресія $\{b_n\}$, у якої:**

а) $b_1>0$ і $q>1$, є зростаючою послідовністю;

б) $b_1>0$ і $0<q<1$, є спадною послідовністю;

в) $b_1<0$ і $q>1$, є спадною послідовністю;

г) $b_1<0$ і $0<q<1$, є зростаючою послідовністю.

№862. **Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії $\{x_n\}$:**

а) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{54}$, ...; б) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...;

в) 9, −3, 1, $-\frac{1}{3}$, ...; г) −4, −2, −1, $-\frac{1}{2}$, ...

№863. **Знайти суму нескінченної геометричної прогресії $\{x_n\}$, якщо:**

а) $x_3=2{,}5$; $q=0{,}5$; б) $x_3=3\frac{1}{3}$; $q=\frac{1}{3}$;

в) $x_2=-0{,}4$; $q=-0{,}2$; г) $x_3=1$; $q=-0{,}1$.

№864. **Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яка задана формулою загального члена, є спадною геометричною прогресією та знайти суму прогресії:**

а) $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$; б) $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$; в) $x_n=(0{,}7)^n$; г) $x_n=-\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

№865. **Обчислити суму:**

а) $0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+\ldots$;

б) $0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots$;

в) $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\ldots$;

г) $2+0{,}2+0{,}02+0{,}002+0{,}0002+\ldots$.

№866. **Обчислити суму:**

а) $0{,}13+0{,}013+0{,}0013+0{,}00013+\ldots$;

б) $\frac{17}{100}+\frac{17}{10000}+\frac{17}{1000000}+\ldots$;

в) $0{,}23+0{,}0023+0{,}000023+\ldots$;

г) $0{,}07+0{,}0007+0{,}000007+\ldots$.

ПІДВИЩЕНЕ НАВЧАННЯ

IV

№867. **Довести, що коли послідовність чисел $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n, \ldots$ є геометричною прогресією, то геометричною прогресією є також і послідовність чисел:**

а) $3b_1, 3b_2, \ldots, 3b_n, \ldots$; б) $ab_1, ab_2, \ldots, ab_n, \ldots$;

в) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}, \ldots$; г) $\frac{a}{b_1}, \frac{a}{b_2}, \ldots, \frac{a}{b_n}, \ldots$.

№868. **Спростити вираз:**

а) $a^{20}+a^{19}+a^{18}+\ldots+a^2+a+1$;

б) $a^{20}+a^{18}+a^{16}+\ldots+a^4+a^2+1$;

в) $a^{20}-a^{19}+a^{18}-a^{17}+\ldots-a^3+a^2-a+1$;

г) $a^{10}+a^9b+a^8b^2+a^7b^3+\ldots+ab^9+b^{10}$.

№869. **Спростити вираз:**

а) $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+1+x^2+x^4+x^6+x^8$, де $x\neq\pm1$ і $x\neq0$;

б) $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1-x+x^2-x^3+x^4$, де $x\neq1$ і $x\neq0$;

в) $\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+x^4$, де $x\neq1$ і $x\neq0$;

г) $\frac{1}{x}-1+x-x^2+x^3-x^4$, де $x\neq1$ і $x\neq0$.

№870. **Записати нескінченний десятковий періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:**

а) 0,(3); б) 0,(1); в) 0,(11); г) 3,(05).

Алгебра 7-9:

ФУНКЦІЇ

Частина 2.

Рівневі перевірочні роботи

К-ть завд.	9-10	8	7
Бал	«3»	«2»	«1»

I РІВЕНЬ

. Змінна y є функцією від змінної x на множині D, якщо ...
а) кожному значенню змінної y відповідає деяке значення змінної x;
б) кожному значенню змінної x з множини D відповідають значення змінної y;
в) деяким значенням змінної x з множини D відповідають значення змінної y;
г) кожному значенню змінної x з множини D відповідає одне і тільки одне значення змінної y.

. Множину значень функції утворюють ...
а) усі значення незалежної змінної;
б) усі значення аргументу;
в) усі значення залежної змінної.

. Функція $y=f(x)$ задана таблицею.

x	−10	−5	−1	1	5	10
y	20	10	2	2	10	20

Які з тверджень є правильними?
а) При значенні аргументу −5 функція набуває значення 10.
б) Значення 20 функція набуває при значенні аргументу −10 і 10.
в) $f(20) = -10$;
г) $f(1) = 2$.

. Записати приклад формули функції, значення якої обчислюються виконанням двох дій у порядку: множення, віднімання.

. Щоб знайти значення функції $y=4x-1$ при значенні аргументу 10, треба ...
а) обчислити значення числового виразу $4\cdot 10-1$;
б) розв'язати рівняння $4x-1=10$.

. Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=3x$ набуває значення, що дорівнює −15, треба ...
а) обчислити значення числового виразу $3\cdot(-15)$;
б) розв'язати рівняння $3x=-15$.

7. Число 10 не належить області визначення функції ...

   а) $y = \frac{x}{10}$;   б) $y = \frac{x-10}{5}$;   в) $y = \frac{1}{x-10}$;   г) $y = \frac{1}{x+10}$.

8. Число -3 не входить у множину значень функції ...

   а) $y=x+5$;   б) $y=-3x+4$;   в) $y=x$;   г) $y=x^2$.

9. Які з тверджень є правильними?

   а) Нулем функції називають значення функції при значенні аргументу, що дорівнює 0.

   б) Нулем функції називають значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 0.

   в) Щоб знайти нулі функції $y=3x-7$, треба знайти значення числового виразу $3\cdot0-7$.

   г) Щоб знайти нулі функції $y=2x+9$, треба розв'язати рівняння $2x+9=0$.

10. Щоб знайти проміжки, на яких функція $y=2x+3$ набуває додатних значень, треба розв'язати ...

   а) рівняння $2x+3=0$;

   б) нерівність $2x+3<0$;

   в) нерівність $2x+3>0$.

	К-ть завд.	6	5	4
◆◆ 2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

1. Знайти значення функції $y=3x+1$ при значенні аргументу -3.
2. Знайти значення аргументу, при якому функція $y=5x+1$ набуває значення, що дорівнює 16.
3. Знайти область визначення функції $y = \frac{7}{2x+3}$.
4. Знайти обчисленням значення x, при якому функції $f(x)=3x+2$ і $\varphi(x)=x-8$ набувають однакових значень.
5. Кожному значенню змінної x відповідає значення змінної y, яке дорівнює сумі числа 10 і квадрата значення змінної x. Задати формулою змінну y як функцію від змінної x.
6. З пункту A виїхав велосипедист, швидкість руху якого 20 км/год. Задати формулою залежність відстані S (у кілометрах), що проїхав велосипедист, від часу руху t (у годинах).

	К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

1. Функцію задано формулами $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -4x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

   Знайти $f(-5)$; $f(5)$.

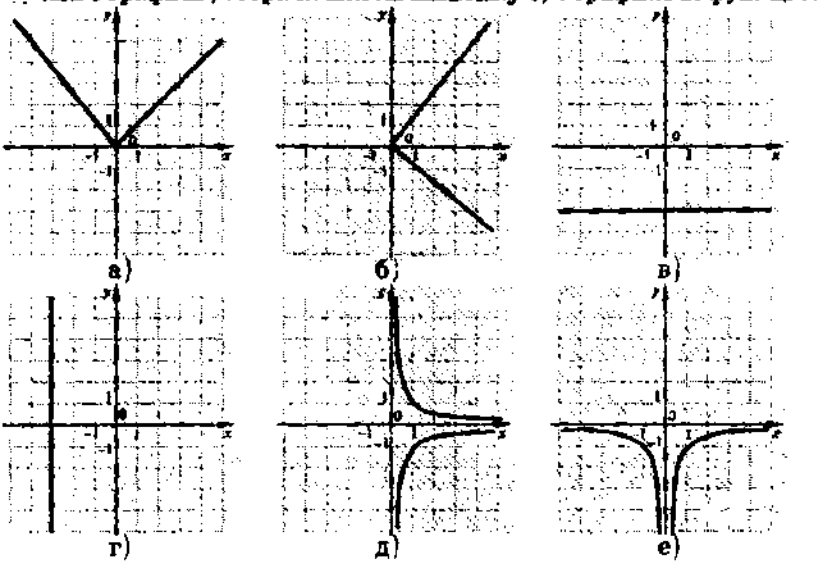
2. Дано функцію $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Довести, що $f(a-1) = \dfrac{1}{a}$.
3. Функція $y=3x+10$ задана на відрізку $[-1; 10]$. Довести, що функція не набуває значення, що дорівнює 62.
4. Дано $x-3y=5$. Задати формулою змінну y як функцію від змінної x.
5. Задати формулою змінну y як функцію від змінної x, якщо кожному значенню змінної x поставлено у відповідність таке значення змінної y, що різниця числа 10 і добутку відповідних значень змінних x і y дорівнює 20.

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	Бал	«12»	«11»	«10»

1. Дано рівняння $xy=15$. Виразити змінну x через змінну y. Чи є змінна x функцією від змінної y? Відповідь пояснити.
2. Дано функцію $f(x)=3x-2$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка з даною функцією при тих самих значеннях аргументу набуває протилежних з нею значень функції.
3. Дано функцію $y=|x|-5$. Записати дану функцію у вигляді двох виразів, що не містять модуля.
4. Множиною значень функції $y=f(x)$ є відрізок $[-4; 10]$. Знайти множину значень функції $y=|f(x)|$.

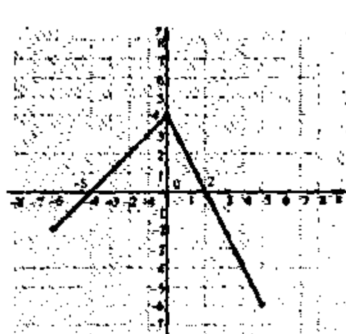
	К-ть завд.	9-10	8	7
1 РІВЕНЬ	Бал	«3»	«2»	«1»

1. **Які з графіків, зображених на малюнку 1, є графіками функцій?**



Мал. 1

2–8. ***На малюнку 2 зображено графік функції. Доповнити твердження до правильних.***



Мал. 2

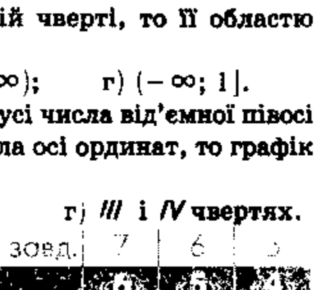
2. **Областю визначення функції є проміжок ...**
   а) [−4; 2]; б) [−6; 4]; в) [−6; 5]; г) [−4; 5].
3. **Множиною значень функції є проміжок ...**
   а) [−6; 5]; б) [−4; 2]; в) [−2; 4]; г) [−6; 4].
4. **При значенні аргументу 3 функція набуває значення, що дорівнює ...**
   а) −1; б) −2; в) −0,5; г) 0,5.
5. **Значення −4 функція набуває при значенні аргументу ...**
   а) −4; б) 4; в) 0; г) 1.

Нулями функції є ...
а) 4; б) 0; в) −4 і 2; г) −6 і 5.
Додатних значень функція набуває при значеннях аргументу, що належать проміжку ...
а) (−4; 2); б) [6; 4]; в) (−6; 4); г) [−6; 0].
Від'ємних значень функція набуває на множині ...
а) [−1; 0]; б) [−6; 0]; в) (−4; 2]; г) [−6; 4)∪(2; 5].
Якщо графіком функції є промінь, який виходить з початку координат і знаходиться в четвертій чверті, то її областю визначення є проміжок ...
а) (−∞; ∞); б) (−∞; 0]; в) [0; ∞); г) (−∞; 1].
Якщо областю визначення функції є усі числа від'ємної півосі абсцис, а множиною значень усі числа осі ординат, то графік функції розташований в ...
а) *II*; б) *II* і *IV*; в) *II* і *III*; г) *III* і *IV* чвертях.

	К-ть завд.	7	6	5
2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

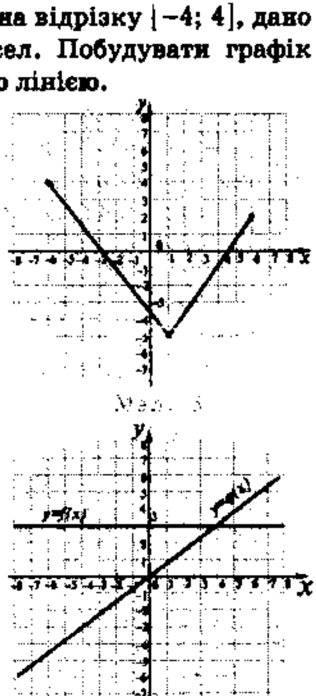
Для функції $y=f(x)$, яка визначена на відрізку [−4; 4], дано таблицю її значень для цілих чисел. Побудувати графік функції, сполучивши точки плавною лінією.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	10	7	4	1	−2	−5	−7	−9	−11



Мал. 3

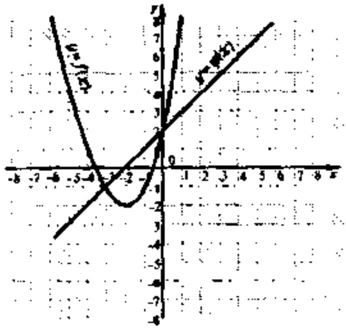
-5. ***На малюнку 3 зображено графік функції.***
Знайти область визначення функції.
Знайти множину значень функції.
Знайти проміжки (чи проміжок), на яких функція набуває від'ємних значень.
Знайти нулі функції.



-7. ***На малюнку 4 зображено графіки*** функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$.
Знайти значення аргументу, при яких функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ набувають однакових значень.
Знайти значення аргументу x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень більших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$.

	К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

1. **За графіками функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, зображених на малюнку 5, встановити значення змінної x, при яких функція $y=f(x)$ набуває значень, більших від відповідних значень функції $y=\varphi(x)$.**

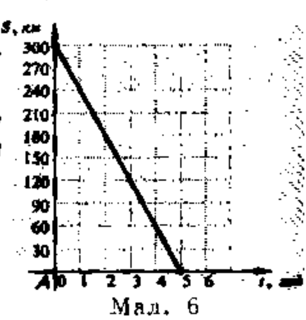


Мал. 5

2. **Знайти обчисленням координати точок графіка функції $y=3x+4$, у яких абсциса і ордината протилежні числа.**
3. **Довести, що графіки функцій $y=x+7$, $y=-x+1$ і $y=-2x-2$ перетинаються в одній точці.**

4–5. ***З пункту В у пункт А, відстань між якими 300 км, виїхав мотоцикліст. На малюнку 6 зображено залежність відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту А від часу руху t (у годинах).***

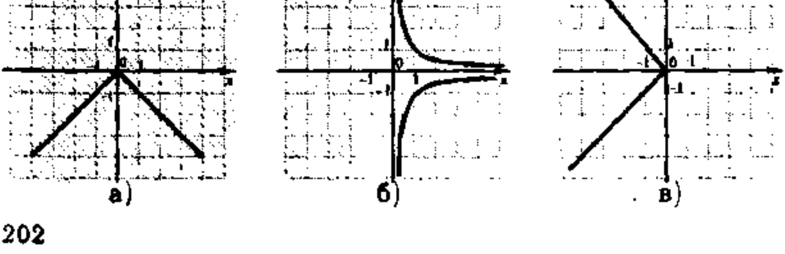
4. **Яка швидкість руху мотоцикліста?**
5. **Яку відстань проїхав мотоцикліст за перші дві години?**



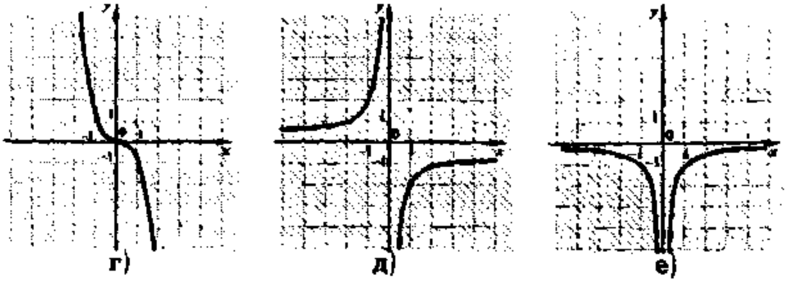
Мал. 6

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	Бал	«12»	«11»	«10»

1. **На малюнку 7 зображено графіки функцій. Які з даних графіків задають змінну x як функцію від змінної y?**

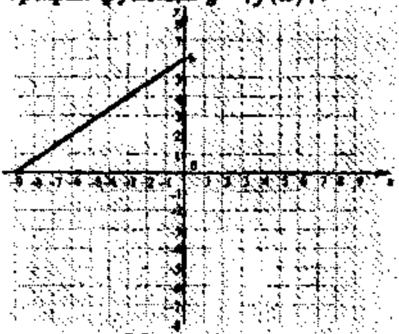


а) б) в)

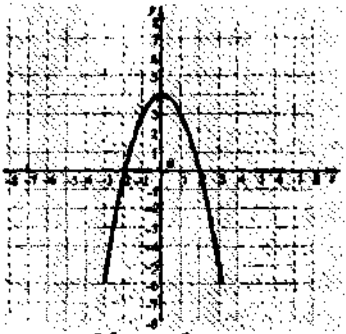


Мал. 7

2. **На малюнку 8 зображено графік функції $y=f(x)$. Побудувати графік функції $y=f(-x)$.**
3. **На малюнку 9 зображено графік функції $y=f(x)$. Побудувати графік функції $y=|f(x)|$.**

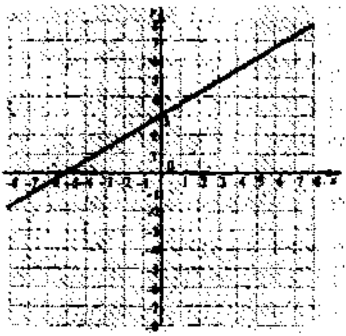


Мал. 8



Мал. 9

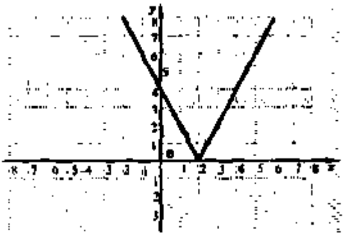
4. **На малюнку 10 зображено графік функції $y=h(x)$. Побудувати графік функції $y=h(|x|)$.**



Мал. 10

	К-ть завд.	9-10	8	7
◆ І РІВЕНЬ	Бал	«3»	«2»	«1»

1. **Функція $y=f(x)$ називається зростаючою, якщо для довільних x_1 і x_2 з області її визначення, таких, що $x_1>x_2$, виконується нерівність ...**
   а) $f(x_1)>f(x_2)$; б) $f(x_1)<f(x_2)$.
2. **Якщо функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і є зростаючою, то**
   а) $\varphi(5)>\varphi(2)$; б) $\varphi(5)<\varphi(2)$; в) $\varphi(5)=\varphi(2)$.
3. **Якщо функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел і спадна, то з чисел $\varphi(-5)$; $\varphi(-10)$; $\varphi(5)$ і $\varphi(20)$ найбільшим є число ...**
   а) $\varphi(20)$; б) $\varphi(5)$; в) $\varphi(-5)$; г) $\varphi(-10)$.
4. **Якщо графік спадної функції проходить через точки $A(a; -5)$ і $B(b; 8)$, то ...**
   а) $a>b$; б) $a<b$; в) $a=b$.
5. **На малюнку 11 зображено графік функції $y=f(x)$. Які твердження правильні?**
   а) зростає на проміжку $[0; \infty]$;
   б) зростає на проміжку $[2; \infty]$;
   в) спадає на проміжку $(-\infty; 3]$;
   г) спадає на проміжку $(-\infty; 2]$;



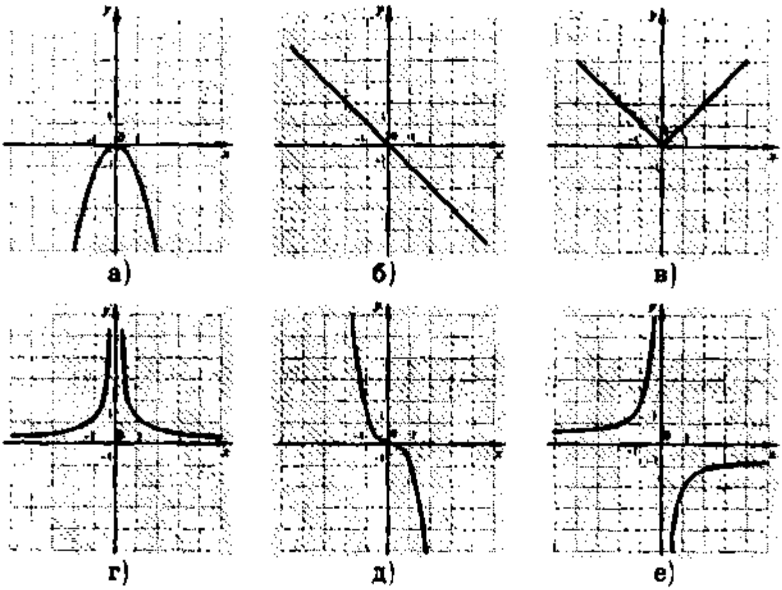
Мал. 11

6. **Функція $y=f(x)$ називається парною, якщо для будь-якого x_0 з області визначення функції виконується рівність ...**
   а) $f(x_0)=-f(x_0)$; б) $f(x_0)=f(-x_0)$;
   в) $f(x_0)=-f(-x_0)$; г) $f(x_0)=2f(-x_0)$.
7. **Якщо $y=f(x)$ непарна функція, у якої $f(3)=10$, то ...**
   а) $f(3)=10$; б) $f(-3)=10$; в) $f(-3)=-10$; г) $f(-10)=3$.
8. **Якщо графік парної функції проходить через точку $A(5; -3)$, то він проходить і через точку ...**
   а) $B(5; 3)$; б) $C(-3; 5)$; в) $D(3; 5)$; г) $E(-5; 3)$.

9. **Яка з функцій є парною?**

а) $y=4x$; **б)** $y=4x^2$; **в)** $y=4x^3$; **г)** $y=4x+1$;

10. **Які з графіків на малюнку 12 є графіками непарних функцій?**



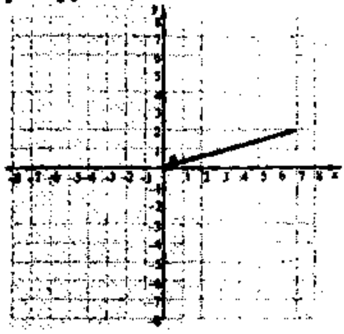
Мал. 12

◆◆ **2 РІВЕНЬ**

К-ть завд.	7	6	5
Бал	«6»	«5»	«4»

1. **Функція $y=f(x)$ визначена на множині $(-\infty;\ \infty)$ і є зростаючою на ній. Порівняти значення функції:**
$f(3)$ і $f(5)$; $f(-25)$ і $f(-20)$; $f(-30)$ і $f(20)$.
2. **Функція $y=\varphi(x)$ визначена на множині $(-\infty;\ \infty)$ і є спадною на ній. Записати у порядку збільшення числа:**
$\varphi(-4)$; $\varphi(10)$; $\varphi(-6)$; $\varphi(2)$.
3. **Довести за означенням, що функція $y=10x$ зростаюча.**
4. **Функція $y=\varphi(x)$ є непарною.** $\varphi(-20)=5$; $\varphi(-2)=-3$; $\varphi(8)=20$. **Знайти значення функції при трьох інших значеннях аргументу.**

5. **На малюнку 13 зображено частину графіка парної функції. Добудувати графік функції.**

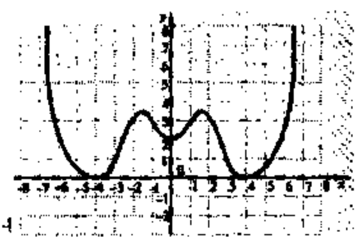


Мал. 13

6. **Довести за означенням, що функція $y=15x^2+3$ є парною.**

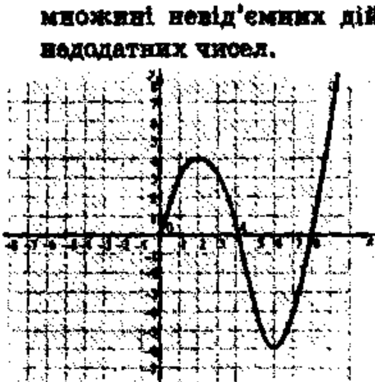
		К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆	3 РІВЕНЬ	5ог	«9»	«8»	«7»

1. **Знайти проміжки зростання і спадання функції, зображеної на малюнку 14.**



Мал. 14

2. **Довести, що функція** $y=\begin{cases}3x, \text{ якщо } x \ge 0,\\ -3x, \text{ якщо } x<0\end{cases}$ **зростає на множині невід'ємних дійсних чисел і спадає на множині недодатних чисел.**



3. **На малюнку 15 зображено частину графіка непарної функції. Добудувати графік функції.**

Мал. 15

. **Довести, що функція $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x - x^3}$ є непарною.**

. **Довести, що коли функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ – непарні, то функція $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ є парною.**

К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ 5	12	11	10

. Довести, що функція $y=2|x|$ зростає на множині невід'ємних дійсних чисел і спадає на множині недодатних дійсних чисел.

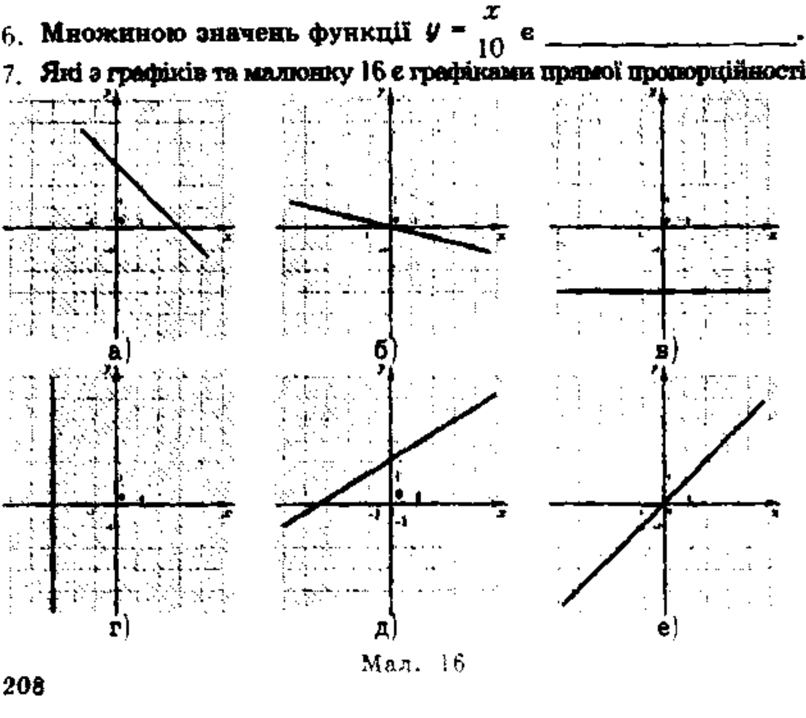
. **$y=\varphi(x)$ – зростаюча функція, множиною значень якої є проміжок $[0;\ \infty)$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y є зростаючою функцією від змінної y з областю визначення $[0;\ \infty)$.**

. Довести, що функція $y=5|x|+4$ є парною.

. **Дано $y=f(x)$ – парна функція, множиною значень якої є проміжок $(-\infty;\ 0]$. Довести, що змінна x при тих самих відповідних значеннях x і y на проміжку $(-\infty;\ 0]$ не є функцією від y.**

К-ть завд.	9-10	8	7
I РІВЕНЬ Бал	«3»	«2»	«1»

1. **Які з функцій є прямими пропорційностями?**
   а) $y=0{,}3x$; б) $y=0{,}3x^2$; в) $y=\frac{x}{3}$;
   г) $y=\frac{3}{x}$; д) $y=-5x$; е) $y=3x+2$.
2. **Записати формулу прямої пропорційності з кутовим коефіцієнтом -4.**
3. **Областю визначення функції $y=16x$ є ______________.**
4. **Щоб знайти значення функції $y=-8x$ при значенні аргументу 4, треба ...**
   а) розв'язати рівняння $-8x=4$.
   б) знайти значення числового виразу $-8\cdot4$;
5. **Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=2x$ набуває значення, що дорівнює 10, треба ...**
   а) розв'язати рівняння $2x=10$.
   б) знайти значення числового виразу $2\cdot10$;
6. **Множиною значень функції $y=\frac{x}{10}$ є ______________.**
7. **Які з графіків на малюнку 16 є графіками прямої пропорційності?**



Мал. 16

8. Функція $y = -4x$ набуває додатних значень на проміжку ...
   а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 0)$; в) $(0;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ -4)$.
9. Які з прямих пропорційностей є спадними:
   а) $y=17x$; б) $y=-20x$; в) $y=-0{,}1x$;
   г) $y=-x$; д) $y=0{,}4x$; е) $y=-\dfrac{x}{4}$?
10. Якщо $y=1{,}23x$, то ...
   а) $y(20)<y(10)$; б) $y(20)>y(10)$; в) $y(20)=y(10)$.

	К-ть завд.	6	5	4
◆◆ 2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

1. Знайти значення функції $y=12x$ при значенні аргументу -3.
2. Знайти значення аргументу, при якому функція $y=-4x$ набуває значення, що дорівнює 24.
3. Побудувати графік функції $y=-3x$.
4. Графіку функції $y=-12x$ належить точка $A(a;\ 36)$. Знайти значення a.
5. Дано функцію $\varphi(x)=ax$, де $a<0$. Записати у порядку збільшення числа $\varphi(3)$; $\varphi(-4)$; $\varphi(0)$; $\varphi(-7)$.
6. Довести за означенням, що функція $y=0{,}8x$ зростаюча.

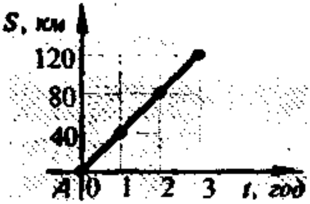
	К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

1. Побудувати графік функції $y=\begin{cases}4x, & \text{якщо } x\ge 0,\\ -2x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$ За графіком встановити проміжки монотонності функції.
2. Змінна S прямо пропорційна змінній t з коефіцієнтом 2. Виразити змінну t через змінну S.
3. Графіку прямої пропорційності належать точки $A(6;\ 24)$ і $B(-3;\ a)$. Знайти значення a.
4. Графік прямої пропорційності проходить через точку $A(-3;\ 16)$. Знайти проміжки, на яких вона набуває додатних значень; від'ємних значень.
5. Задати формулою функцію, графік якої зображено на малюнку 17.


Мал. 17

К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ Бал	12	11	10

1. З пункту A до пункту B по прямолінійному шосе виїхав мотоцикліст і через 3 години був у пункті B. Графік залежності відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах) зображено на малюнку 18.



Мал. 18

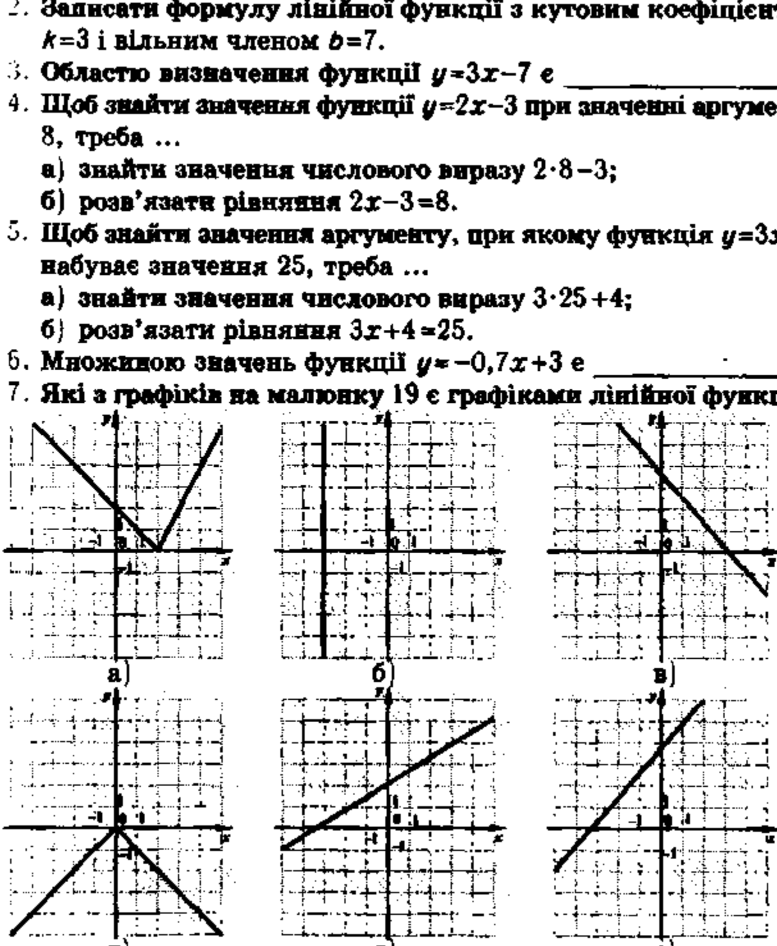
1) Задати дану залежність формулою. Встановити вид функції та область визначення.
2) Задати формулою залежність відстані мотоцикліста до пункту B від часу руху t.

2. Побудувати в одній системі координат графік функції $y=3x$ і функції $y=\varphi(x)$, яка набуває при однакових з нею значеннях аргументу значень функції, що на 4 менші.
3. Записати за допомогою знака модуля функцію $y=f(x)$, яка при невід'ємних значеннях аргументу набуває значень, що дорівнюють почетвереному аргументу, а при від'ємних – "мінус" почетвереному значенню аргументу.
4. Побудувати графік функції $y=|3x|$ і записати її проміжки монотонності.

К-ть завд.	12-11	10	9
Бал	«3»	«2»	«1»

I РІВЕНЬ

1. **Які з функцій є лінійними:**
   а) $y=-3x+2$; б) $y=-3x$; в) $y=2+3x^2$;
   г) $y=\frac{x}{3}+2$; д) $y=\frac{10}{x}+1$; е) $y=x(x+2)$; є) $y=-4$?
2. **Записати формулу лінійної функції з кутовим коефіцієнтом $k=3$ і вільним членом $b=7$.**
3. **Областю визначення функції $y=3x-7$ є ________________.**
4. **Щоб знайти значення функції $y=2x-3$ при значенні аргументу 8, треба ...**
   а) знайти значення числового виразу $2\cdot8-3$;
   б) розв'язати рівняння $2x-3=8$.
5. **Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=3x+4$ набуває значення 25, треба ...**
   а) знайти значення числового виразу $3\cdot25+4$;
   б) розв'язати рівняння $3x+4=25$.
6. **Множиною значень функції $y=-0,7x+3$ є ______________.**
7. **Які з графіків на малюнку 19 є графіками лінійної функції?**



Мал. 19

8. Графік функції $y=4x+3$ перетинає вісь y в точці з ординатою ...

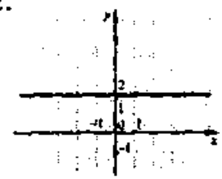
а) $-\frac{3}{4}$; б) 3; в) −3; г) $\frac{3}{4}$.

9. Щоб знайти абсцису точки перетину графіка функції $y=3x-5$ з віссю x, треба ...

а) 2:5; б) 2:(−5); в) −5:2; г) 5:2.

10. На малюнку 20 зображено графік функції ...

а) $x=2$; б) $y=2$;
в) $y=2x$; г) $x=-2$.



Мал. 20

11. Функція $y=2x+3$ набуває додатних значень на проміжку ...

а) $(-\infty; -1{,}5)$; б) $(-1{,}5; \infty)$; в) $(3; \infty)$; г) $(-\infty; 3)$.

12. Які з лінійних функцій є зростаючими?

а) $y=3x+4$; б) $y=-2x+1$; в) $y=-x+3$;
г) $y=\frac{x}{3}+1$; д) $y=2x+5$.

		К-ть завд.	6	5	4
◆◆	2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

1. Знайти значення функції $y=4x-4$ при значенні аргументу −5.
2. Знайти значення аргументу, при якому функція $y=-3x+2$ набуває значення, що дорівнює 20.
3. Побудувати графік функції $y=-5x+1$.
4. Не виконуючи побудови графіка функції $y=7x-2$, знайти проміжок, на якому функція набуває від'ємних значень.
5. Знайти обчисленням значення x, при яких набувають однакових значень функції $y=-\frac{x}{4}+1$ і $y=5x-2$.
6. Дано функцію $f(x)=5{,}64x-3$. Не виконуючи обчислень порівняти:

а) $f(5{,}23)$ і $f(4{,}5)$; б) $f(-3{,}2)$ і $f(-5{,}6)$.

		К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆	3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

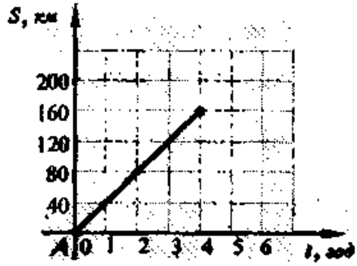
1. Графіку функції, заданої формулами $y=\begin{cases}4x+3, \text{ якщо } x \geq 0,\\ -4x+3, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

належать точки $A(-5; a)$, $B(0; b)$, $C(5; c)$. Знайти числа a, b, і c.

2. Побудувати графік функції $y = \begin{cases} x + 3, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x + 3, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$ За графіком встановити проміжки монотонності функції.
3. Функція $f(x) = -5x + 2$ задана на відрізку $[3; 20]$. Знайти найменше значення функції.
4. Записати формулу лінійної функції $y = ax + b$, графік якої перетинає вісь y в точці з ординатою 6, а вісь x – у точці з абсцисою -3.
5. З пункту A в пункт B, відстань між якими 200 км, виїхав мотоцикліст, швидкість руху якого 50 км/год. Записати формулу відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту B через t год від початку руху.

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	Бали	«12»	«11»	«10»

1. Задати формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки $A(1; 1)$ і $B(-1; 3)$.
2. З пункту A до пункту B по прямолінійному шосе виїхав мотоцикліст і через 4 год був у пункті B. Графік залежності відстані S (у кілометрах) мотоцикліста до пункту A від часу руху t (у годинах) зображено на малюнку 21.



Мал. 21

За даним графіком задати формулою залежність відстані мотоцикліста до пункту B від часу виїзду з пункту A і побудувати її графік.
3. Дано функцію $f(x) = 5x + 2$. Задати формулою функцію $y = \varphi(x)$, яка приймає однакові значення з даною функцією при значеннях аргументу, які на 4 більші від її значень аргументу.
4. Побудувати графік функції $y = |x| - 2$.

	К-ть завд.	9-10	8	7
◆ I РІВЕНЬ	Бал	3	2	1

1. **Які з функцій є оберненими пропорційностями:**

   а) $y = -\dfrac{8}{x}$; **б)** $y = \dfrac{x}{8}$; **в)** $y = \dfrac{4}{x}$;

   г) $y = \dfrac{x}{10}$; **д)** $y = 10x$; **е)** $y = \dfrac{0{,}1}{x}$?

2. **Записати формулу оберненої пропорційності з коефіцієнтом $k = 11$.**

3. **Областю визначення функції $y = -\dfrac{16}{x}$ є ________________.**

4. **Щоб знайти значення функції $y = \dfrac{8}{x}$ при значенні аргументу 2, треба ...**

   а) знайти значення виразу 8:2;

   б) розв'язати рівняння $\dfrac{8}{x} = 2$.

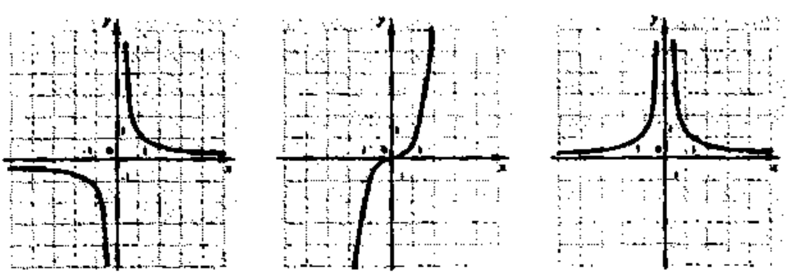
5. **Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y = -\dfrac{40}{x}$ набуває значення, що дорівнює 8, потрібно ...**

   а) знайти значення виразу $-\dfrac{40}{8}$;

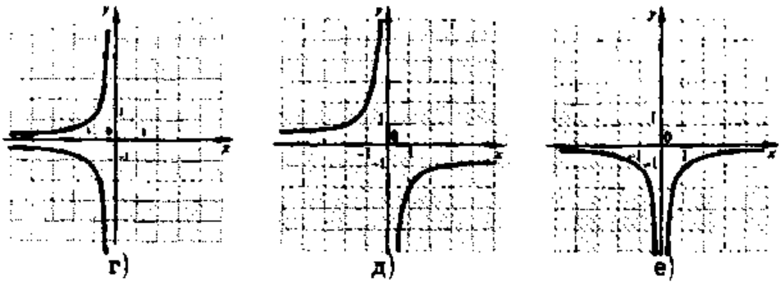
   б) розв'язати рівняння $-\dfrac{40}{x} = 8$.

6. **Множиною значень функції $y = \dfrac{12}{x}$ є ____________.**

7. **Які з графіків на малюнку 22 є графіками оберненої пропорційності?**



а) б) в)



Мал. 22

8. **Графік функції $y = -\dfrac{20}{x}$ розміщений в ...**

   а) *I* і *II* чвертях; б) *I* і *III* чвертях;
   в) *II* і *IV* чвертях; г) *II* і *III* чвертях.

9. **Які з функцій на проміжку $(-\infty; 0)$ набувають додатних значень?**

   а) $y = \dfrac{16}{x}$; б) $y = \dfrac{-2}{x}$; в) $y=2x$;

   г) $y = \dfrac{0,2}{x}$; д) $y = -\dfrac{1}{x}$; г) $y=x$.

10. **Які з функцій мають два проміжки монотонності, на кожному з яких спадають?**

   а) $y = \dfrac{0,2}{x}$; б) $y = -\dfrac{0,2}{x}$; в) $y = \dfrac{12}{x}$; г) $y=12x$.

	К-ть завд.	6	5	4
◆◆ 2 РІВЕНЬ	бал	«6»	«5»	«4»

1. **Знайти значення функції $y = \dfrac{12}{x}$ при значенні аргументу -3.**
2. **Знайти значення аргументу, при якому функція $y = \dfrac{-48}{x}$ набуває значення, що дорівнює 6.**
3. **Побудувати графік функції $y = \dfrac{8}{x}$, склавши таблицю значень для чисел $x = \pm a$, де a – дільники числа 8.**
4. **Функція задана формулою $f(x) = \dfrac{-6,4}{x}$. Не виконуючи обчислень, порівняти:**

   а) $f(3,34)$ і $f(3,56)$; б) $f(-100,2)$ і $f(-9,92)$.

5. Знайти обчисленням координати точок перетину графіків функцій $y = \frac{16}{x}$ і $y=4x$.
6. Довести, що функція $y = \frac{10}{x}$ є непарною.

3 РІВЕНЬ

К-ть завд.	5	4	3
Бал	«9»	«8»	«7»

1. Графіку функції, заданої формулами $y = \begin{cases} \frac{12}{x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -\frac{12}{x}, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ належать точки $A(-2;\ a)$ і $B(4;\ b)$. Знайти a і b.
2. Встановити графічно значення, при яких функція $y = \frac{12}{x}$ набуває значень, менших від значень функції $y=3x$.
3. Функція $f(x) = \frac{-60}{x}$ задана на відрізку $[2;\ 10]$. Не виконуючи побудови графіка знайти найбільше значення функції.
4. Графіку оберненої пропорційності належить точка $A(8;\ -6)$. Знайти проміжки монотонності.
5. Задати формулою залежність часу t (у годинах) виконання робітником завдання, що становить 8 деталей, від продуктивності n–кількості деталей, що може виготовити робітник за одну годину. Якою функцією є дана залежність? Вважаючи, що продуктивність праці виражається цілим числом, встановити множину значень, область визначення функції, які відповідають змісту задачі.

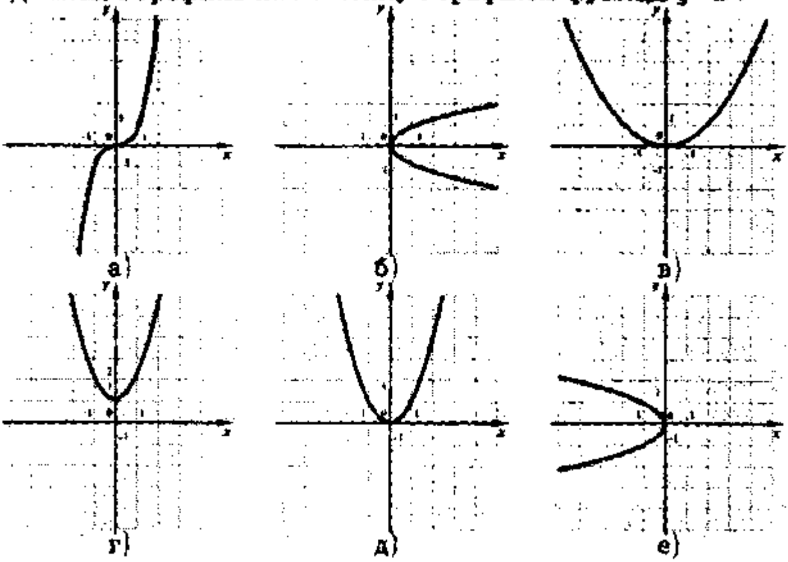
4 РІВЕНЬ

К-ть завд.	4	3	2
Бал	«12»	«11»	«10»

1. Знайти область визначення функції $y = \frac{20}{|x| - 4}$.
2. Дано функцію $f(x) = \frac{6}{x}$. Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка при тих самих значеннях аргументу набуває значень, які на 5 менші від значень даної функції.
3. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $f(x) = \frac{12}{x}$ і $\varphi(x) = \frac{12}{x + 4}$.
4. Побудувати графік функції $y = \frac{8}{|x|}$.

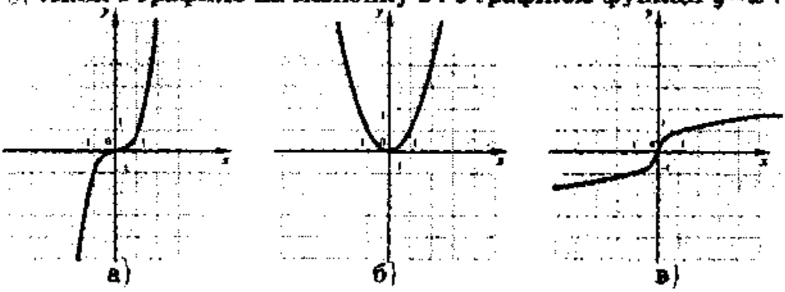
	К-ть завд.	9-10	8	7
◆ І РІВЕНЬ	Бал	«3»	«2»	«1»

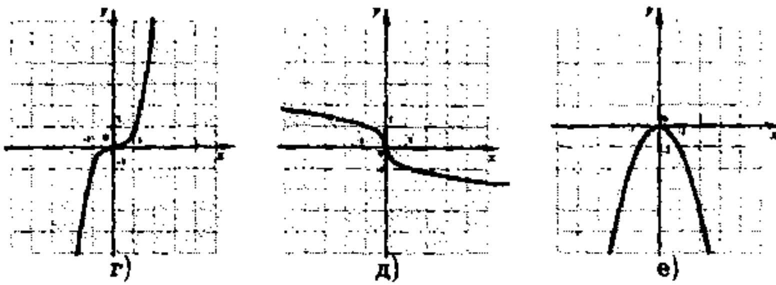
1. **Який з графіків на малюнку є графіком функції $y=x^2$?**



Мал. 23

2. **Областю визначення функції $y=x^2$ є __________.**
3. **Множиною значень функції $y=x^2$ є __________.**
4. **Функція $y=x^2$ зростає на проміжку ...**
   а) $(-\infty; 0]$; **б)** $(\infty; -\infty)$; **в)** $[0; \infty)$.
5. **Функція $y=x^2$ ...**
   а) парна; б) непарна; в) ні парна, ні непарна.
6. **Який з графіків на малюнку 24 є графіком функції $y=x^3$?**





Мал. 24

7. **Областю визначення функції $y=x^3$ є ___________.**
8. **Множиною значень функції $y=x^3$ є ___________.**
9. **Функція $y=x^3$ ...**
   а) зростаюча;
   б) спадна;
   в) спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; \infty)$;
   г) спадає на проміжку $[0; \infty)$ і зростає на проміжку $(-\infty; 0]$.
10. **Функція $y=x^3$ ...**
   а) парна; б) непарна; в) ні парна, ні непарна.

		К-ть завд.	6	5	4
◆◆	2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

1. **Дано функції $f(x)=x^2$ і $\varphi(x)=x^3$. Порівняти $f(3)$ і $\varphi(3)$.**
2. **При яких значеннях a графіку функції $y=x^2$ належить точка $A(a; 64)$?**
3. **При якому значенні b графіку функції $y=x^3$ належить точка $B(-4; b)$?**
4. **Знайти множину значень функції $y=x^2+4$.**
5. **Довести, що функція $y=10x^2$ парна.**
6. **Довести, що функція $y=-20x^3$ непарна.**

		К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆	3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

1. **Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^5}{x^2}$.**
2. **Знайти множину значень функції $y=x^2$, заданої на проміжку $[-5; 2]$.**
3. **Розв'язати графічно рівняння $x^2=-x+2$.**
4. **Встановити графічно значення x, при яких функція $y=x^2$ набуває значень, менших від значень функції $y=-3x+4$.**

Знайти точки графіка функції $y=x^3$, в яких абсциса і ордината рівні.

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	бал	«12»	«11»	«10»

Дано функцію $y=x^2$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка при однакових з нею значеннях аргументу набуває значень, які на 5 більші.

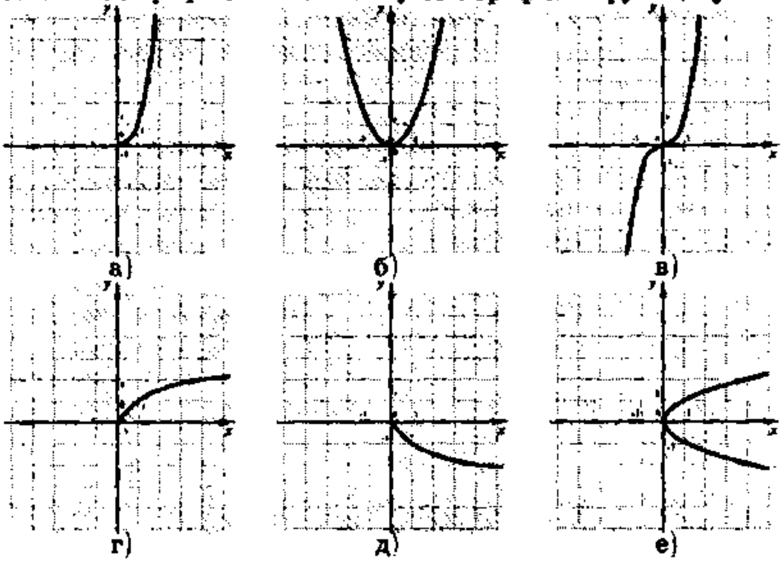
Побудувати графік функції $y=x^3-2$.

Дано функцію $y=x^3$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових значень з даною функцією при значеннях аргументу, які на 2 менші.

Побудувати графік функції $y=-|x^3|$.

	К-ть завд	7	6	5
◆ І РІВЕНЬ	Бал	«3»	«2»	«1»

1. **Який з графіків на малюнку 25 є графіком функції $y=\sqrt{x}$?**



Мал. 25

2. **Областю визначення функції $y=\sqrt{x}$ є ...**
   а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(0;\ \infty)$; в) $[0;\ \infty]$; г) $(-\infty;\ 0]$.
3. **Множиною значень функції $y=\sqrt{x}$ є ...**
   а) $(-\infty;\ 0]$; б) $(-\infty;\ \infty)$; в) $[0;\ \infty]$; г) $(0;\ \infty)$.
4. **Графіку функції $y=\sqrt{x}$ належать точки ...**
   а) $A(3;\ 9)$; б) $B(9;\ 3)$; в) $C(16;\ -4)$;
   г) $D\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$; д) $E\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{25}\right)$; е) $F(0;\ 0)$.
5. **Графік функції $y=\sqrt{x}$ перетинає пряма ...**
   а) $y=10$; б) $y=16$; в) $y=-5$; г) $y=-25$.
6. **Найменшим числом в області визначення функції $y=\sqrt{x}$ є число** ________.
7. **Якщо $y=\sqrt{x}$ і $x_2>x_1$, то ...**
   а) $y_2>y_1$; б) $y_1<y_2$; в) $y_2=y_1$.
8. **Функція $y=\sqrt{x}$ ...**
   а) парна; б) непарна; в) ні парна, ні непарна.

	К-ть завд.	6	5	4
◆◆ 2 РІВЕНЬ	Бал	«6»	«5»	«4»

. **Знайти значення функції $y=\sqrt{x}$ при значенні аргументу 81.**

. **Знайти значення аргументу, при якому функція $y=\sqrt{x}$ набуває значення, що дорівнює 4.**

. **Графіку функції $y=\sqrt{x}$ належить точка $A(25; a)$. Знайти число a.**

. **Графіку функції $y=\sqrt{x}$ належить точка $B(b; 100)$.**

. **Дано функції $f(x)=\sqrt{x}$. Порівняти числа:**
а) $f(0{,}123)$ і $f(0{,}243)$; **б)** $f(729)$ і $f(725)$.

. **Записати в порядку зростання числа: 5; $\sqrt{27}$; $\sqrt{24{,}1}$.**

	К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	Бал	«9»	«8»	«7»

. **Знайти область визначення функції $y=\sqrt{x+5}$.**

. **Знайти множину значень функції $y=-2\sqrt{x}$.**

. **Знайти найбільше значення функції $y=\sqrt{x}$ на проміжку $[4; 36]$.**

. **Дано $m=7t^2$. Виразити змінну t як функції змінної m.**

. **Знайти графічно число коренів рівняння $\sqrt{x}=\dfrac{x}{4}$.**

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	Бал	«12»	«11»	«10»

. **Знайти область визначення функції $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{|2-x|}$.**

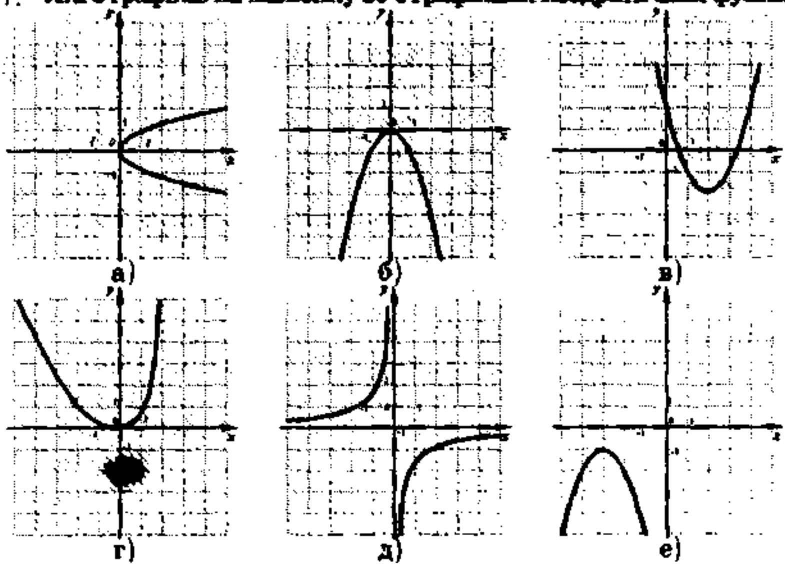
. **Побудувати графік функції $y=\sqrt{x}-4$.**

. **Дано функцію $y=\sqrt{x}$. Записати формулу функції $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових з нею значень при значеннях аргументу, що на 3 більші.**

. **Побудувати графік Функції $y=\sqrt{|x|}$.**

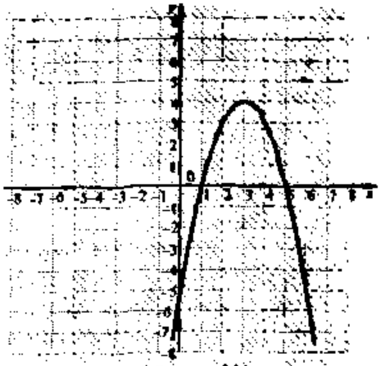
К-ть завд.	14-13	12	11-10
◆ І РІВЕНЬ Бал	«3»	«2»	«1»

1. Які з функцій є квадратичними?
   а) $y=4x^2-2x+1$; б) $y=x^2+x^3+5$; в) $y=5x+3$;
   г) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; д) $y=2x^4-4x$; е) $y=-10x^2$.
2. Записати приклад квадратичної функції, у формулі якої вільний член c дорівнює 0.
3. Областю визначення функції $y=4x^2-7x+8$ є __________.
4. Щоб знайти значення функції $y=x^2-4x+5$ при значенні аргументу -3, потрібно ...
   а) розв'язати рівняння $x^2-4x+5=-3$;
   б) знайти значення числового виразу $(-3)^2-4\cdot(-3)+5$.
5. Щоб знайти значення аргументу, при якому функція $y=x^2-10x+8$ набуває значення, що дорівнює -1, треба ...
   а) знайти значення числового виразу $(-1)^2-10\cdot(-1)+8$;
   б) розв'язати рівняння $x^2-10x+8=-1$.
6. Щоб знайти абсцису вершини графіка функції $y=4x^2+12x+5$, треба ...
   а) 12:4; б) −12:4; в) −12:8; г) 12:8.
7. Які з графіків на малюнку 26 є графіками квадратичних функцій?



Мал. 26

8. Графіки яких квадратичних функцій мають найвищу точку?
а) $y=4x^2-3x+1$; б) $y=-3x^2+2x+1$; в) $y=-x^2+3$;
г) $y=x^2+4x$; д) $y=0,7x^2+4x-3$; е) $y=-2x^2+3x$.
9. Графік квадратичної функції перетинає вісь x у двох точках, якщо ...
а) $a>0$; б) $b>0$; в) $b^2-4ac>0$;
г) $b^2-4ac<0$; д) $a^2-4ac>0$; е) $c^2-4ab<0$.
10. Графік функції $y=4x^2-3x+7$ перетинає вісь y у точці з ординатою ______.
11. Проміжком зростання функції, зображеної на малюнку 27, є ...
12. Від'ємних значень функція, зображена на малюнку 27, набуває на проміжках ...
а) $(-\infty; -5)$;
б) $(-5; \infty)$;
в) $(1; 5)$;
г) $(-\infty; 1)\cup(5; \infty)$;
д) $(-\infty; 0)\cup(3; \infty)$;
е) $(-\infty; 4)$.


Мал. 27

13. Квадратична функція $y=ax^2+bx+c$, у якої x_1 і x_2 – її нулі ($x_1<x_2$), набуває додатних значень на ...
а) $(-\infty; x_1)\cup(x_2; \infty)$; б) $(x_1; x_2)$.
14. Якщо точка $A(-6; 10)$ – вершина квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$, у якої $a>0$, то множиною значень функції є ...
а) $(-\infty; -6]$; б) $(-\infty; 10]$; в) $[-6; \infty)$; г) $[10; \infty)$.

К-ть завд.	10-9	8	7
Бал	«6»	«5»	«4»

◆◆ 2 РІВЕНЬ

1. Знайти значення функції $y=x^2-3x+1$ при значенні аргументу 10.
2. Знайти значення аргументу, при якому функція $y=x^2+2x-3$ набуває значення, що дорівнює 3.
3. Побудувати графік функції $y=x^2+4x+5$ (знайти координати вершини і точок перетину з віссю ординат та віссю абсцис, якщо вони існують).
4. За побудованим графіком функції $y=x^2+4x+5$ встановити значення x, при яких вона набуває додатних значень; від'ємних значень.
5. За графіком функції $y=x^2+4x+5$ знайти проміжки зростання і спадання функції.

6. За графіком функції $y=x^2+4x+5$ встановити множину її значень.
7. Знайти обчисленням проміжки зростання функції $y=x^2-6x+8$.
8. Знайти обчисленням проміжки, на яких функція $y=x^2+8x-20$ набуває додатних значень.
9. Знайти обчисленням множину значень функції $y=2x^2-4x+5$.
10. Знайти обчисленням значення x, при яких набувають однакових значень функції $y=2x^2+9x+7$ і $y=x^2+x$.

	К-ть завд.	5	4	3
◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	Бали	«9»	«8»	«7»

1. Графіку функції $y=x^2+2x+c$ належить точка $A(3;\ -5)$. Чи належать графіку функції точка $B(-1;\ -11)$?
2. Встановити графічно значення x, при яких функція $y=-x^2-6x-5$ набуває значень, більших від відповідних значень функції $y=-x-1$.
3. Знайти значення c, при яких функція $y=x^2+6x+c$ приймає тільки додатні значення.
4. Точка $A(-2;\ 5)$ і $B(1;\ 3)$ належить графіку квадратичної функції, причому точка A – його вершина. Знайти проміжки зростання і спадання функції; множину її значень.
5. Матеріальна точка рухалась прямолінійно за законом $S(t)=t^2-2t+5$, де $0 \le t \le 5$ ($S(t)$ – відстань у метрах від точки відліку через t секунд від початку руху).

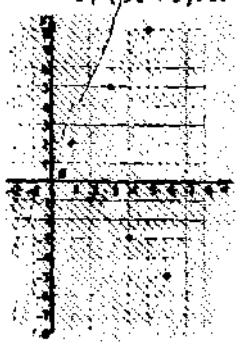
   Побудувати графік функції і дати відповіді на питання
   1) У який момент часу t тіло знаходилось найближче до точки відліку?
   2) В який проміжок часу тіло віддалялось від точки відліку?

	К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	Бали	12	11	10

1. Графік функції $y=x^2+mx+n$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 1, а вісь y – в точці з ординатою 5. Знайти числа m і n.
2. При якому значенні аргументу сума значень функцій $y=x^2$ і $y=4x-3$ найменша.
3. Дано функцію $f(x)=x^2+3x+4$. Задати формулою функцію $y=\varphi(x)$, яка набуває однакових значень з даною функцією при значеннях аргументу на 2 більші від її значень аргументу. Встановити вид функції $y=\varphi(x)$.
4. Побудувати графік функції $y=|x^2+6x+8|$. За графіком встановити проміжки монотонності функції.

К-ть зовд.	6	5	4
◆ 1 РІВЕНЬ Бал	3	2	1

1. Числовою послідовністю називається функція __________.
2. Числова послідовність задана формулою $a_n=6n+5$. Щоб знайти a_8, треба ...
   а) $68+5$; б) $6\cdot8+5$; в) $6\cdot(8+5)$; г) $(8-5):6$.
3. Числова послідовність задана формулою $a_n=4n+1$. Щоб знайти номер члена послідовності, який дорівнює 81, треба ...
   а) $4\cdot81+1$; б) $(81-1):4$; в) $481+1$; г) $(81+1):4$.
4. На малюнку 28 зображено графік скінченної послідовності (a_n). Які з тверджень правильні?
   а) $a_1=2$;
   б) $a_2=1$;
   в) $a_7=3$;
   г) $a_5=3$.



Мал. 28

5. Які з послідовностей є зростаючими?
   а) (a_n): $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{15}$; ... $\frac{1}{5n}$;...
   б) (b_n): 3; 6; 9; 12; ... $3n$; ...
   в) (c_n): -3; -6; -9; -12; -15; ... $-3k$ ...
   г) (m_n): -20; -15; -10; -5; ... $5n-25$ ...
6. Послідовність задана першими двома членами: $a_1=1$; $a_2=2$ і формулою $a_{n+2}=a_{n-1}+3a_n$. Третій член послідовності дорівнює ...
   а) 5; б) 7; в) 3; г) 9.

К-ть зовд.	6	5	4
◆◆ 2 РІВЕНЬ Бал	6	5	4

1. Знайти восьмий член послідовності, заданої формулою $a_n=-6n+5$.
2. Знайти номер члена послідовності, заданої формулою $a_n=3n+2$, який дорівнює 32.
3. Знайти номери від'ємних членів послідовності $b_n=3n-19$.
4. Задати формулою n-го члена послідовність (b_n), у якої кожний член є сумою числа 5 і потроєного натурального числа.

5. **Довести, що послідовність, яка задана формулою $a_n = -4n+1$, є спадною.**
6. Послідовність задана формулою $a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1}$ і першими двома членами $a_1 = -5$ і $a_2 = 4$. Записати перші п'ять членів послідовності.

		К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆	3 РІВЕНЬ	Бал	9	8	«7»

1. Послідовність $\{a_n\}$ задана формулою загального члена $a_n = 5n+1$. Довести, що $a_k + a_{k+2} = 2a_{k+1}$.
2. **Знайти найбільший від'ємний член послідовності $\{a_n\}$, заданої формулою $a_n = -4n+113$.**
3. Довести, що коли послідовність $\{a_n\}$ – зростаюча, то і послідовність $\{x_n\}$, в якої $x_n = 3a_n$, є зростаючою.
4. **Записати формулу загального члена послідовності 5; 9; 13; 17; 21 ...**

		К-ть завд.	4	3	2
◆◆◆◆	4 РІВЕНЬ	Бал	«12»	«11»	«10»

1. **Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яка задана формулою загального члена $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ є зростаючою.**
2. **Задати формулою загального члена послідовності нескінченну числову послідовність 3; 7; 3; 7; 3; 7...**
3. **Знайти найменший член послідовності $\{a_n\}$, заданої формулою $a_n = n^2 + 10n + 17$.**
4. **Знайти суму додатних членів послідовності $\{b_n\}$, заданої формулою $b_n = -n^2 + 8n - 7$.**

К-ть завд.	9-10	8	7
I РІВЕНЬ Бал	«3»	«2»	«1»

1. **Які з послідовностей є скінченними арифметичними прогресіями?**

   а) 1; −1; 1; −1; 1; −1.
   б) 5; 7; 9; 11; 13; 15.
   в) 10; 7; 4; 1; −2; −5.
   г) 2; 2; 5; 8; 11; 14.
   д) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$.
   е) 2; 6; 18; 54; 162; 186.

2. **Знайти різницю арифметичної прогресії 2; 7; 12; 17; ...**

3. $\{c_n\}$**–арифметична прогресія,** d **– її різниця. Які з формул правильні?**

   а) $c_8 = c_7 + d$;
   б) $c_{12} = c_{13} + d$;
   в) $c_{15} = c_1 + d$;
   г) $c_{12} = c_{11} - d$;
   д) $c_k = c_{k-1} + d$;
   е) $c_k = c_{k+1} + d$.

4. $\{a_n\}$**–арифметична прогресія,** d**–її різниця. Які з формул правильні?**

   а) $a_2 = a_1 + d$;
   б) $a_3 = a_1 + d$;
   в) $a_3 = a_1 + 2d$;
   г) $a_{10} = a_1 + 9d$;
   д) $a_{14} = a_1 + 14d$;
   е) $a_k = a_1 + kd$.

5. **Якщо** $\{a_n\}$**– арифметична прогресія, в якої** d**–різниця і** $a_1 = 4$, $a_{10} = 30$, **то ...**

   а) $30 = 4 + 10d$;
   б) $30 = 9 + 4d$;
   в) $30 = 4 + 9d$;
   г) $4 = 30 + 9d$.

6. **Якщо** $\{b_n\}$**–арифметична прогресія, в якої** $b_1 = 5$, $d = 3$, **то формулою** n**–члена є ...**

   а) $b_n = 3 + 5n$;
   б) $b_n = 3 + 5(n-1)$;
   в) $b_n = 5 + 3n$;
   г) $b_n = 5 + 3(n-1)$.

7. **Арифметична прогресія є ...**

   а) **квадратичною функцією, заданою на множині натуральних чисел;**
   б) **оберненою пропорційністю, областю визначення якої є множина натуральних чисел;**
   в) **лінійною функцією, визначеною на множині натуральних чисел.**

8. $\{a_n\}$ **– арифметична прогресія. Які з формул правильні?**

   а) $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 9$;
   б) $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10$;
   в) $S_{10} = \frac{a_1 + 2a_{10}}{2} \cdot 10$;
   г) $S_{25} = \frac{a_1 + 2a_{25}}{2} \cdot 25$;
   д) $S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 24$;
   е) $S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25$.

9. Яка з формул є сумою перших двадцяти членів арифметичної прогресії (a_n) з першим членом a_1 і різницею d?

а) $S_{20} = \frac{a_1 + 19d}{2} \cdot 20$;   б) $S_{20} = \frac{2a_1 + 20}{2} \cdot 19$;

в) $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20$;   г) $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 19$.

10. (a_n) – арифметична прогресія. Які формули правильні?

а) $a_3 + a_5 = a_4$; б) $\frac{a_3 + a_5}{2} = a_6$; в) $\frac{a_3 + a_4}{2} = a_5$; г) $\frac{a_3 + a_5}{2} = a_4$.

К-ть завд.: 6 | 5 | 4

◆◆ 6 5 4

1. (b_n) – арифметична прогресія. $b_1 = 2$, $d = -3$. Знайти b_{20}.
2. Знайти різницю арифметичної прогресії (a_n), в якої $a_1 = 9$ і $a_{12} = 86$.
3. (c_n) – арифметична прогресія, в якої $c_1 = 2$ і $d = -3$. Знайти номер члена прогресії, що дорівнює -40.
4. Двадцять чисел утворюють арифметичну прогресію, першим членом якої є число 10, а останнім – число 67. Знайти суму цих чисел.
5. Знайти суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), в якої $a_1 = -12$ і $d = 4$.
6. Довести, що послідовність (a_n), яка задана формулою $a_n = 5n - 3$, є арифметичною прогресією.

К-ть завд.: 5 | 4 | 3

◆◆◆ 9 8 7

1. (a_n) – арифметична прогресія. $a_3 = -4$ і $d = 5$. Знайти a_{11}.
2. (b_n) – арифметична прогресія. $b_3 = -19$ і $b_{12} = -82$. Знайти b_8.
3. Між числами 8 і 33 вставити такі чотири числа, щоб вони разом із даними утворювали арифметичну прогресію.
4. Скільки додатних членів у арифметичної прогресії, у якої $a_3 = 18$ і $a_7 = 6$?
5. Знайти суму перших двадцяти членів послідовності, заданої формулою $a_n = 3n - 2$.

К-ть завд.: 4 | 3 | 2

◆◆◆◆ 12 11 10

1. Знайти суму членів арифметичної прогресії (a_n) з сьомого по двадцятий включно, якщо $a_1 = -7$ і $d = 4$.
2. Довести, що коли (a_n) і (b_n) – арифметичні прогресії, і послідовність $(a_n + 2b_n)$ – арифметична прогресія.
3. Знайти суму перших сорока непарних чисел.
4. Знайти суму натуральних чисел, що кратні числу 7, від 14 до 140 включно.

К-ть завд.	9-10	8	7
	3	2	1

Які зі скінченних послідовностей є геометричними прогресіями?

а) 3; 6; 12; 24; 48. б) 2; 3; 9; 27; 81.

в) 5; –5; 5; –5; 5. г) $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{27}{5}$; $\frac{81}{5}$.

д) 81; 27; 9; 3; 1;. е) 100; 50; 25; 20; 10.

Знайти знаменник геометричної прогресії $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{4}$; 1 ...

(b_n) – арифметична прогресія, g – її знаменник. Які з формул є правильними?

а) $b_{10} = b_9 \cdot g$; б) $b_{20} = b_1 \cdot g$; в) $b_{18} = b_{19} \cdot g$;
г) $b_{20} = b_{19} : g$; д) $b_{10} = b_9 : g$; е) $b_k = b_{k-1} \cdot g$.

(b_n) – геометрична прогресія, g – її знаменник. Які з формул є правильними?

а) $b_{20} = b_1 \cdot g^{20}$; б) $b_{20} = b_1 \cdot 19g$; в) $b_{20} = b_1 \cdot g^{19}$;
г) $b_{20} = b_1 \cdot 20g$; д) $b_{k+1} = b_1 \cdot g^{k+1}$; е) $b_{k+1} = b_1 \cdot g^k$.

Якщо (b_n) – геометрична прогресія, в якої g – знаменник то ...

а) $g^3 = \frac{b_3}{b_1}$; б) $g^3 = \frac{b_2}{b_1}$; в) $g^3 = \frac{b_4}{b_1}$; г) $g^3 = b_4 \cdot b_1$.

Якщо (b_n) – геометрична прогресія, в якої g – знаменник, то ...

а) $b_1 = \frac{b_5}{g^4}$; б) $b_1 = \frac{b_4}{g^4}$; в) $b_1 = \frac{b_3}{g^4}$; г) $b_1 = \frac{b_4}{g^5}$.

(b_n) – геометрична прогресія. Які з формул є правильними?

а) $b_{10} = b_9 \cdot b_{11}$; б) $b_{15} = b_{16} \cdot b_{17}$; в) $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$;
г) $b_{20} = b_{19} \cdot b_{21}$; д) $b_{21}^2 = b_{19} \cdot b_{21}$; е) $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+2}$.

(b_n) – геометрична прогресія зі знаменником g. Які з формул для суми членів прогресії правильні?

а) $S_{10} = \frac{b_1 \cdot (g^{10} - 1)}{g - 1}$; б) $S_{10} = \frac{b_1 \cdot (g^9 - 1)}{g - 1}$;

в) $S_{20} = \frac{b_1 \cdot (g^{20} - 1)}{1 - g}$; г) $S_{20} = \frac{b_1 \cdot (1 - g^{20})}{1 - g}$.

Записати формулу для обчислення суми перших п'ятнадцяти членів геометричної прогресії (b_n), знаменник якої g.

Якщо перший член спадної геометричної прогресії 27, а знаменник дорівнює $\frac{1}{3}$, то її сума дорівнює ...

а) 27 і $\frac{1}{3}$; б) $\frac{27}{1 - \frac{1}{3}}$; в) $\frac{27}{1 + \frac{1}{3}}$; г) $\frac{1 + \frac{1}{3}}{27}$.

◆◆ 2 РІВЕНЬ	К-ть завд.	6	5	4
	Бал	«6»	«5»	«4»

1. (b_n) – геометрична прогресія. Знайти b_6, якщо $b_1=32$, $g_1=\frac{1}{2}$.
2. Знайти знаменник геометричної прогресії, у якої $b_1=\frac{2}{3}$, $b_5=162$.
3. Знайти суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=8$, $g=\frac{1}{2}$.
4. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=108$, $g=\frac{1}{3}$.
5. Сума членів нескінченної геометричної прогресії 36, а її знаменник дорівнює $\frac{-1}{3}$. Знайти перший член прогресії.
6. Довести, що послідовність (b_n), яка задана формулою загального члена $b_n=3\cdot 7^n$, є геометричною прогресією.

◆◆◆ 3 РІВЕНЬ	К-ть завд.	5	4	3
	Бал	«9»	«8»	«7»

1. (b_n) – геометрична прогресія. $b_2=\frac{1}{2}$, $g=3$. Знайти b_6.
2. Між числами 3 і 243 вставити три такі числа, щоб вони разом з даними утворювали геометричну прогресію.
3. Знайти суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n), в якої $b_2=1$ $b_7=100000$.
4. Знайти суму перших п'яти членів послідовності (b_n), яка задана формулою $b_n=3\cdot 2^n$.
5. Обчислити суму $0,11+0,011+0,0011+0,00011+\ldots$

◆◆◆◆ 4 РІВЕНЬ	К-ть завд.	4	3	2
	Бал	«12»	«11»	«10»

1. Довести, що коли послідовність чисел b_1; b_2; b_3; b_4, ... b_n; ... є геометричною прогресією, то і послідовність cb_1; cb_2; cb_3; ... cb_n; ... є геометричною прогресією.
2. Спростити вираз $a^{10}+a^9+a^8+a^7+\ldots+a^2+a+1$.
3. Спростити вираз $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+1+x^2+x^4$, де $x\neq\pm 1$ і $x\neq 0$.
4. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб 0,(13) у вигляді звичайного дробу.

ЗМІСТ

Навчально-технологічний посібник

Копіносов Анатолій Миколайович

АЛГЕБРА 7-9: Функції

Дидактичні матеріали для рівневого навчання

Здано в набір 6. 06. 00. Підписано до друку 21. 08. 00.
Друк офсетний. Папір офсетний. Тираж 2000.
Замовлення 7-20. Гарнітура Шкільна.
Формат 60х84 /16. Ум. друк. арк. 13,49. Обл. вид. арк. 11,03.

«АБЕТКА»

Кам'янець-Подільський, 2000
вул. Лесі Українки, 31, тел. (03849) 2-73-84; а/с 83
Свідоцтво № 131 від 17.10.1997.