K20

Анатолій Капіносов

АЛГЕБРА

7 клас

Систематичний курс

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
«ПІДРУЧНИКИ І ПОСІБНИКИ»
2004

	Початкове вивчення теорії	Практичне відтворення і застосування теорії	Перевірочні роботи, оцінювання навчальних досягнень	Усього
1	2	3	4	5
Вступ.				
Дійсні числа.	3	—	—	3
Вирази.	2	—	—	2
				Усього: 5 год
І. Рівняння.				
Рівняння з однією змінною.	1	—	—	1
Лінійні рівняння та рівняння, які зводяться до лінійних.	2	3	1	6
Розв'язування задач за допомогою рівнянь, які зводяться до лінійних.	2	3	1	6
Контрольна робота №1.				1
				Усього: 14 год
ІІ. Цілі вирази.				
Степінь з натуральним показником.	2	3	1	6
Одночлени.	2	3	1	6
Контрольна робота №2.				1
Многочлен стандартного вигляду. Додавання і віднімання многочленів.	2	3	1	6
Множення одночлена на многочлен, многочлена на многочлен.	2	3	1	6
Контрольна робота №3.				1
Формули скороченого множення.	2	3	1	6
Контрольна робота №4.				1
				Усього: 33 год

1	2	3	4	5
III. Розкладання многочлена.				
Розкладання на множники способом винесення за дужки спільного множника і способом групування.	2	3	1	6
Контрольна робота №5.				1
Різниця квадратів двох виразів. Квадрат суми (різниці) двох виразів.	2	3	1	6
Формули різниці і суми кубів виразів.	1	3	1	5
Контрольна робота №6.				1
				Усього: 19 год
IV. Системи лінійних рівнянь із двома змінними.				
Рівняння із двома змінними.	1	—	—	1
Лінійні рівняння із двома змінними.	3	3	1	7
Система лінійних рівнянь із двома змінними.	3	3	1	7
Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь.	2	3	1	6
Контрольна робота №8.				1
				Усього: 22 год

Усього: 93 год

Резерв: 12 год

Програмовий (загальний) час: 105 год

Особливості посібника і технологія його використання

1. Даний посібник призначений для вивчення систематичного курсу алгебри у сьомому класі. Теоретичною базою розробки посібника є класичний дидактичний метод Я. А. Коменського.

2. У посібнику матеріал поділений на 13 основних програмових тем і 4 оглядових, допоміжних. Основні теми пронумеровані.

Вивчення всіх програмових розділів курсу спирається на систему знань про числа, основні властивості дій з ними, тому вивчення починається з розділу «Вступ», який складається з тем «Дійсні числа» і «Вирази». Мета вивчення двох вступних тем — закласти теоретичну основу курсу, систематизувати знання учнів про числа, дії з ними, а також «оглянути» алгебраїчні об'єкти, що розглядатимуться в програмових розділах.

Матеріали з основних тем курсу подані у посібнику під трьома рубриками: «Виклад теорії», «Початкове вивчення теорії» і «Відтворення і застосування теорії». З оглядових тем матеріали подані тільки під першими двома рубриками, оскільки головною метою вивчення цих тем є формування загального поняття (уявлення) про предмети, що розглядаються в темі, і вироблення початкових, елементарних умінь, достатніх для вивчення основних програмових тем.

3. Основна мета «Викладу теорії» у кожній навчальній темі — дати цілісну базову (основну) систему знань про алгебраїчні об'єкти, що вивчаються в ній, достатню для успішного застосування її на практиці в різних ситуаціях і використання для подальшого поглиблення основного змісту.

Виклад теорії у темах поділений на 2–3 підтеми. У більшості випадків він починається з підтеми «Поняття про об'єкти вивчення в темі». Основна мета підтеми — викласти теоретичні знання, необхідні для успішного розпізнавання об'єктів, що вивчаються в темі, їх відрізнювання від близьких, споріднених та розрізнювання між собою. Підтема містить описи чи означення об'єктів вивчення, їх видів, частин, елементів. При цьому виклад теорії ілюструється прикладами і контрприкладами. Підтеми, в яких розкриваються властивості вивчуваних об'єктів, дій з ними, містять теореми та їх доведення, формули, правила (перетворень, зведення до найпростіших видів, послідовності виконання дій), формулювання основних кроків методів розв'язування задач. Знання про способи дій з об'єктами вивчення ілюструються прикладами їх застосувань.

У кожній темі елементи знань пронумеровані.

4. Призначення матеріалів посібника під рубрикою «Початкове вивчення теорії» — забезпечити активне сприйняття, усвідомлення і осмислення учнями основного змісту теорії, сформувати в них повноцінні, цілісні

уявлення про алгебраїчні об'єкти, способи дій з ними і виробити початкові, елементарні уміння (уміння виконувати основні дії з елементами знань за їх змістом, смислом).

Кожному пронумерованому елементу знань викладу теорії у розділі «Початкове вивчення теорії» відповідає система завдань, згрупованих під одним номером. Перша частина блоку складається з найпростіших питань на називання алгебраїчних об'єктів, їх розпізнавання та завдань на короткі, фрагментарні доповнення формулювань властивостей, правил чи формул. Завдання другої частини блоку є складнішими. Це завдання на розпізнавання предметів, що вивчаються в темі, їх відрізнювання від інших, розрізнювання між собою, знаходження правильно виконаних основних дій серед неправильних. Бажано, щоб правильні відповіді на ці завдання учні відзначили. Вони слугуватимуть їм орієнтиром, прикладом для виконання завдання третьої частини блоку.

У класно-урочному навчанні рекомендуємо фронтальний спосіб виконання завдань. Вони можуть бути використані як додатковий матеріал для навчання учнів з низьким темпом оволодіння знаннями, зокрема, як завдання для домашніх робіт.

Для закріплення початкових, елементарних умінь призначені тренувальні вправи розділу. З багатьох тем до розділу включені номери із зірочкою. Такі номери містять завдання, які є елементами задач високого рівня.

Перевірити свої досягнення на початковому етапі учні можуть за допомогою завдань для самоперевірки, які подані у двох варіантах. На послідовне початкове вивчення підтем, що складають тему, відводяться, як правило, сумарно 2–3 уроки.

5. Під рубрикою «Відтворення і застосування теорії» містяться відповідно системи рівневих завдань на відтворення теорії, складені відповідно до вимог чинної програми, та системи завдань середнього достатнього і високого рівнів на застосування теорії (у чотирьох варіантах). Завдання на застосування теорії розроблені за принципами поступового нарощування складності, повноти за теоретичним змістом і видами рівневої діяльності. Набір завдань кожного рівня охоплює всі елементи теорії теми й основні рівневі уміння.

Один з варіантів системи завдань з теми може бути використаний для ознайомлення, «відкриття» способів розв'язання основних задач з теми у фронтальному навчанні на відповідному етапі вивчення теми, решту — для самостійних робіт учнів навчального або перевірного характеру. Варіанти самостійних робіт можна запропонувати учням як домашні завдання.

Самостійне виконання систем рівневих завдань рекомендуємо проводити в три етапи на 3–4 уроках розв'язування задач (по 15–25 хв). Спочатку на першому з цих уроків всі учні виконують завдання середнього рівня. На другому етапі учні, що досягли середнього рівня (поточних балів 5 або 6), виковдання середнього рівня іншого варіанта.

На третьому етапі системи завдань високого рівня пропонуються учням, що досягли достатнього рівня. Учням, які не досягли середнього чи достатнього рівнів, рекомендуються для виконання систем завдань відповідного рівня.

Рекомендуємо просту для учнів систему оцінювання і самооцінювання успіхів при виконанні систем завдань рівня.

Якщо учень виконав правильно завдання усіх трьох номерів рівня, його успіхів оцінюються вищими балами рівня (наприклад, балом 6 за завдання середнього рівня, балом 9 — достатнього рівня, балом 12 — високого рівня); якщо виконано завдання двох номерів (будь-яких) — середнім балом рівня (відповідно бали 5, 8, 11); якщо ж виконано завдання одного номера — нижчим балом рівня (відповідні бали 4, 7, 10).

Якщо у поточному навчанні учень допустив у завданні помилку, яку він може виправити, то завдання йому зараховується як правильно виконане.

По закінченні самостійної роботи бажано відразу розглянути розв'язання задач, правильні відповіді. Це дасть можливість кожному учневі самому оцінити свої успіхи на основі зіставлення одержаних результатів з правильними.

Оцінка за самостійну роботу виставляється за результатами її виконання на завершальному етапі.

6. За темою або двома темами під рубрикою «Контроль навчальних досягнень учнів» дані у чотирьох варіантах контрольні роботи, два з яких можуть бути використані, зокрема, для домашніх завдань.

Під час проведення тематичних контрольних робіт учням рекомендуються для виконання системи завдання того рівня, що відповідає його поточним успіхам при вивченні теми (за результатами самостійних робіт).

ТЕМА. ДІЙСНІ ЧИСЛА

- **Поняття дійсного числа**
- **Основні властивості додавання і множення дійсних чисел**
- **Віднімання і ділення дійсних чисел і піднесення їх до степеня з натуральним показником**

Виклад теорії

1. Поняття дійсного числа

(1)

Означення. Раціональними числами називають числа, які можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де n — натуральне число, а m — ціле число.

Існує безліч раціональних чисел.

Приклади.

1. Раціональними числами є усі цілі числа, оскільки кожне з них можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{1}$, де m — ціле число: $2=\frac{2}{1}$; $13=\frac{13}{1}$; $-4=\frac{-4}{1}$.

2. Раціональними числами є: усі звичайні дроби; дробові числа, у яких ціла частина деяке натуральне число, а дробова частина — звичайний дріб, а також протилежні їм числа: $\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$; $\frac{-3}{4}$; $-5\frac{1}{2}=\frac{-11}{2}$.

Будь-яке раціональне число, записане у вигляді $\frac{m}{n}$, можна подати у вигляді скінченого десяткового дробу або нескінченного десяткового періодичного дробу.

Приклади.

$\frac{1}{5}=0,5$; $\frac{3}{4}=0,75$; $\frac{1}{3}=0,333...=0,(3)$; $5\frac{2}{3}=5,6666...=5,(6)$.

Раціональне число можна розглядати як результат вимірювання деякої величини (наприклад, довжини відрізка, площі фігури, температури тощо). Однак не всі числа, що утворюються при вимірюванні величин, можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де n — натуральне число, а m — ціле число.

Наприклад, не можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$ довжину діагоналі квадрата зі стороною 1 см. Не є раціональним числом і відношення довжини кола до його діаметра.

Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де n — натуральне число, а m — ціле число, не є раціональними, їх називають ірраціональними.

Існує безліч ірраціональних чисел. Ірраціональними числами є усі нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Наприклад, 0,1010010001... — ірраціональне число.

Раціональні й ірраціональні числа утворюють множину чисел, яку називають множиною дійсних чисел. Отже, кожне дійсне число є або раціональним, або ірраціональним числом.

В алгебрі букви a, b, c, x, y тощо позначають як раціональні числа, так і ірраціональні числа. Коли кажуть, що a — будь-яке число, то мають на увазі, що a — будь-яке дійсне число.

Для наочного представлення дійсних чисел їх зображують точками на прямій. Пряму, на якій відкладено одиничний відрізок, один з кінців якого зображає число 0, а другий кінець — число 1, називають координатною прямою. Будь-якому дійсному числу на координатній прямій відповідає точка і, навпаки, кожна точка координатної прямої зображує деяке дійсне число (раціональне або ірраціональне).

2. Основні властивості додавання і множення дійсних чисел

2

Основними діями з дійсними числами є дії додавання і множення. Для цих дій виконуються такі властивості (закони).

Властивості додавання дійсних чисел

1. Для будь-яких дійсних чисел a і b існує число $a + b$, що є їх сумою.

2. Переставна властивість: для будь-яких дійсних чисел a і b $a + b = b + a$.

3. Сполучна властивість: для будь-яких дійсних чисел a, b і c $(a + b) + c = a + (b + c)$.

число, протилежне до нього, яке позначають $-a$ і $a + (-a) = 0$. Для числа 0 протилежним є число 0.

5. Властивість **нуля: для будь-якого дійсного числа a $a + 0 = a$.**

Приклади.

1. Для числа $\frac{2}{3}$ протилежним є число $-\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=0\right)$.

2. Для числа –0,(3) протилежним є число 0,3.

(3)

Властивості множення дійсних чисел

1. Для будь-яких дійсних чисел a і b існує число $a \cdot b$, що є їх добутком.

2. Переставна властивість: для будь-яких дійсних чисел a і b $a \cdot b = b \cdot a$.

3. Сполучна властивість: для будь-яких дійсних чисел a, b і c $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

4. Розподільна властивість: для будь-яких дійсних чисел a, b і c $(a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c$.

5. Властивість числа 0: для будь-якого дійсного числа a $a \cdot 0 = 0$.

6. Властивість числа 1: для будь-якого дійсного числа a $a \cdot 1 = a$.

7. Існування оберненого числа: для будь-якого дійсного числа a, відмінного від 0, існує обернене до нього число, яке позначається $\frac{1}{a}$ і $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Для числа 0 оберненого числа не існує.

Приклади.

Для числа 5 оберненим є число $\frac{1}{5}$; для числа $\frac{2}{3}$ оберненим є число $\frac{3}{2}$, тобто $1\frac{1}{2}$; для числа 0,2 оберненим є число 5 $(0,2 \cdot 5 = 1)$.

4

Дії віднімання і ділення дійсних чисел зводяться відповідно до дій додавання і множення дійсних чисел.

Означення. $a - b = a + (-b)$, тобто щоб від числа a відняти число b, потрібно до числа a додати число, протилежне до числа b.

Приклади.

$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$; $7 - (-9) = 7 + 9 = 16$; $a - (-b) = a + b$.

Означення. $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ (де $b \neq 0$), тобто щоб число a поділити на відмінне від нуля число b, потрібно число a помножити на число $\frac{1}{b}$.

Приклади.

1. $a : 5 = a \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}a$; $c : \frac{2}{7} = c \cdot \frac{7}{2} = 3{,}5c$.
2. $3 : c = 3 \cdot \frac{1}{c}$ (де $c \neq 0$).

Якщо a і b — дійсні числа і $b \neq 0$, то завжди існує число $\frac{a}{b}$, що є їх часткою.

Якщо a і b — дійсні числа і $b = 0$, то дія ділення не виконується і запис $\frac{a}{b}$ не має смислу (змісту).

Степінь дійсного числа з натуральним показником

5

Якщо a — дійсне число, то добуток n множників, кожний з яких дорівнює a, називають n степенем числа a і записують a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} \quad (n \text{ — натуральне число, } n \geq 1).$$

Дія піднесення дійсних чисел до степеня з натуральним показником є окремим випадком дії множення, вона зводиться до виконання скінченого числа дій множення.

1. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
2. $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$.
3. $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^5$.
4. $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = 81$.

Дії додавання, множення, віднімання, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником називають *арифметичними діями*.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Поняття дійсного числа

(1)

№1.

1. **1)** Як називають числа, які можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне число?

2) Як називають числа, які не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне число?

Яким числом — раціональним чи ірраціональним — є...

3) натуральне число 8;
4) ціле число — 13;
5) нескінченний неперіодичний десятковий дріб 0,2021222324...;
6) нескінченний періодичний десятковий дріб 0,433333...;
7) скінчений десятковий дріб 0,123; дробове число $15\frac{1}{3}$;
8) звичайний дріб $\frac{3}{8}$?

2. *Серед дійсних чисел а)–е) вказати три числа, які є...*

1) раціональними числами:

а) $3\frac{1}{3}$;	б) 0,(3);	в) 0,12131415...;
г) –17;	д) 0,123456...;	е) 10,13579111315...

а) 6,1357911…; б) 2,(6); в) 0,(23);
г) 7,(123); д) 10,111213141516…; е) 0,2468101214…

Серед записів а)–в) вказати той, у якому подано раціональне число:

3) 15:

а) $\frac{30}{3}$; б) $\frac{60}{3}$; в) $\frac{30}{2}$.

4) $4\frac{1}{3}$:

а) $\frac{12}{3}$; б) $\frac{13}{3}$; в) $\frac{8}{3}$.

5) 0,013:

а) $\frac{13}{100}$; б) $\frac{13}{10}$; в) $\frac{13}{1000}$.

3. *Записати три дійсних числа у вигляді...*
   1) нескінченного періодичного дробу;
   2) нескінченного неперіодичного дробу.

2. Основні властивості додавання і множення дійсних чисел

(2)

№2.

1. 1) Назвати дві основні дії з дійсними числами.
   2) a і c — дійсні числа. Чи завжди існує число $a + c$?

   a, b і c — дійсні числа. Доповнити запис:

   3) переставної властивості додавання: $a + c =$ ____________;
   4) сполучної властивості додавання: $(a + c) + b =$ ____________;
   5) властивості числа 0 при додаванні: $c + 0 =$ ____________;
   6) властивості протилежних чисел: яке б не було дійсне число c існує протилежне до нього число $-c$ таке, що $c + (-c) =$ ____________.

2. *Вказати правильну відповідь:*

   1) $-3 - 7 = \ldots$

   а) 10; б) –10; в) –4.

   2) $-5 + 14 = \ldots$

   а) –19; б) 9; в) –9.

   3) $7 - 20 = \ldots$

   а) 13; б) –13; в) –27.

4) $0,3 - 0,4 = \ldots$

а) $0,7$; б) $-0,7$; в) $-0,1$.

5) $0,8 - 1,5 = \ldots$

а) $0,7$; б) $-0,7$; в) $-2,3$.

6) $-3,4 + 1,4 = \ldots$

а) 2; б) $-4,8$; в) -2.

Записати:

1) переставну властивість додавання для дійсних чисел m і k;
2) сполучну властивість додавання для чисел m, n і k;
3) властивість числа нуль при додаванні його до дійсного числа m;
4) властивість протилежного числа до дійсного числа k.

Виконати дії:

5) $-12 - 10$; 6) $-6 + 20$; 7) $3 - 30$;
8) $-7,3 - 1,2$; 9) $9 - 10,6$; 10) $-11,2 + 14,4$.

③

3.

1) m і n — дійсні числа. Чи завжди існує число $m \cdot n$?

m, n і k — дійсні числа. Доповнити запис:

2) переставної властивості множення $m \cdot n =$ __________;
3) сполучної властивості множення $(m \cdot n) \cdot k =$ __________;
4) властивості числа нуль при множенні $m \cdot 0 =$ _____;
5) властивості числа 1 при множенні $1 \cdot k =$ __________.
6) властивості існування оберненого числа: якщо $m \neq 0$, то існує число ______ таке, що ______ $= 1$.

Вказати правильну відповідь:

1) $-9 \cdot (-4) = \ldots$

а) -13; б) -36; в) 36.

2) $-8 \cdot 5 = \ldots$

а) -40; б) 40; в) -3.

3) $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \ldots$

а) $-\frac{1}{9}$; б) 1; в) -1.

4) $-8 \cdot \frac{1}{4} = \ldots$

а) -2; б) 2; в) $\frac{1}{32}$.

3) $-12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \ldots$

а) -8; б) 8; в) $\frac{1}{18}$.

3. *Записати:*
1) переставну властивість множення для чисел a і c;
2) сполучну властивість множення для чисел a, c і d;
3) розподільну властивість множення для чисел a, m і k;
4) властивість числа 0 при множенні на число c;
5) властивість числа 1 при множенні на число b;
6) властивість числа, оберненого до числа $b \neq 0$.

Виконати дії:

7) $-12 \cdot (-4)$; 8) $-11 \cdot 6$; 9) $-3 \cdot 14$;

10) $-1{,}2 \cdot (-14)$; 11) $\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$; 12) $-\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)$.

3. Віднімання, ділення і піднесення дійсних чисел до степеня з натуральним показником

4

№4.

1. *Вказати дію, до якої зводиться за означенням дія...*
1) віднімання дійсних чисел;
2) ділення дійсних чисел;
3) піднесення дійсного числа до степеня з натуральним показником.

Вказати, чому дорівнює за означенням...

4) $m - n$ — різниця чисел m і n:

а) $m + (-n)$; б) $m \cdot (-n)$; в) $m : (-n)$;

5) $m : k$ — частка чисел m і k, де $k \neq 0$:

а) $m + \frac{1}{k}$; б) $m \cdot \frac{1}{k}$; в) $m - \frac{1}{k}$;

6) b^n — n-ий степінь числа b:

а) $\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{n\ \text{разів}}$; б) $\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ \text{разів}}$; в) $b \cdot n$.

7) Вказати умову, за якої існує $m : k$ — частка чисел m і k?

а) $k \neq 0$; б) $m \neq 0$.

2. *Вказати правильну відповідь:*

1) $x^4 = \ldots$

а) $x + x + x + x$; б) $x \cdot x \cdot x \cdot x$; в) $4x$.

2) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m = ...$

а) $5m$; б) $m + 5$; в) m^5.

3) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = ...$

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$.

4) $\frac{1}{7} : 7 = ...$

а) 1; б) $\frac{1}{49}$; в) 7.

5) $-42 : (-6) = ...$

а) 7; б) -7; в) -6.

6) $4{,}8 : (-0{,}4) = ...$

а) 12; б) -12; в) $-1{,}2$.

3. *Записати означення:*

1) віднімання для чисел m і n;

2) ділення чисел a і c, де $c \neq 0$;

3) b^n — n-го степеня числа b.

Виконати дії:

4) $\frac{1}{8} : 8$. 5) $15 : \frac{1}{3}$. 6) $\frac{3}{4} : \frac{9}{20}$. 7) $-32 : (-4)$.

8) $40 : (-5)$. 9) $-4{,}8 : 0{,}6$. 10) $15 : (-0{,}1)$.

4. Степінь з натуральним показником

(5)

№5*.

1. *Вказати число, яке є модулем (абсолютною величиною)...*

1) числа a, якщо $a > 0$:

а) $-a$; б) a; в) $2a$.

2) числа m, якщо $m < 0$:

а) m; б) $-m$; в) $-2m$.

3) числа x, якщо $x \geq 0$:

а) $-x$; б) x; в) $2x$.

2. *Вказати модуль:*

1) числа $a + b$, якщо $a > 0$, $b > 0$:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) $-(a + b)$.

2) числа $a + b$, якщо $a < 0$, $b < 0$:
а) $a + b$; б) $a - b$; в) $-(a + b)$.

3) числа $5x$, якщо $x > 0$:
а) $-5x$; б) $5 + x$; в) $5x$.

4) числа $3m$, якщо $m < 0$:
а) $-3m$; б) $3 + m$; в) $3m$.

5) числа $\frac{10}{p}$, якщо $p > 0$:
а) $-\frac{10}{p}$; б) $10p$; в) $\frac{10}{p}$.

6) числа $\frac{m}{10}$, якщо $m < 0$:
а) $-\frac{m}{10}$; б) $10m$; в) $\frac{m}{10}$.

7) числа $-0{,}3a$, якщо $a < 0$:
а) $-0{,}3a$; б) $0{,}3a$; в) $-0{,}3 + a$.

Тренувальні вправи

№6.

Виконати дії:

1. 1) $-5 - 8$; 2) $-7 - 12$; 3) $-0{,}6 - 1{,}9$; 4) $-8 - 2{,}3$.
2. 1) $-5 + 11$; 2) $7 - 15$; 3) $2 - 3{,}3$; 4) $-3{,}6 + 4{,}1$.
3. 1) $-2{,}3 \cdot (-2)$; 2) $-16 \cdot (-3)$; 3) $-2{,}4 \cdot (-0{,}1)$; 4) $-0{,}8 \cdot (-0{,}3)$.
4. 1) $-9 \cdot 11$; 2) $7 \cdot (-13)$; 3) $-5{,}1 \cdot 0{,}2$; 4) $36 \cdot (-0{,}2)$.
5. 1) $-16 : (-2)$; 2) $-44 : (-4)$; 3) $-9 : (-0{,}1)$; 4) $-0{,}6 : (-0{,}2)$.
6. 1) $-30 : 3$; 2) $42 : (-6)$; 3) $-72 : 0{,}2$; 4) $8{,}4 : (-4)$.

№7.

1. 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$.
2. 1) $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$; 2) $\frac{5}{6}-\frac{1}{18}$; 3) $\frac{7}{20}-\frac{1}{30}$; 4) $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$.
3. 1) $\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8}$; 2) $\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{19}\cdot\frac{8}{9}$; 4) $\frac{4}{21}\cdot\frac{7}{16}$.
4. 1) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$; 3) $\frac{4}{7}:\frac{8}{21}$; 4) $\frac{4}{15}:\frac{12}{45}$.
5. 1) $5:\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}:9$; 3) $16:\frac{1}{4}$; 4) $32:\frac{8}{9}$.

ТЕМА. ВИРАЗИ. ЦІЛІ ВИРАЗИ І ЇХ ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

- Поняття про вирази
- Поняття про цілі вирази
- Тотожні перетворення цілих виразів

Виклад теорії

1. Поняття про вирази

①

Записи, що містять дії над числами, позначеними цифрами або буквами, називають *виразами*.

Вираз є символічним записом послідовності дій, які потрібно виконати над числами за встановленими правилами порядку дій після заміни букв числами.

***Виразами* вважають і записи чисел тільки за допомогою цифр чи окремих букв, які не містять дій над числами.**

Приклади.

1. 7; $0,(3)$; $5,4$; a; x; m — вирази, що не містять дій.
2. $7+2$; $10-3$; $a+5$; $5x$; $a+b$ — вирази, що містять тільки одну дію.
3. $7+2\cdot 3$; $\dfrac{100}{5-3}$; $a+5\cdot c$; $(a+5)\cdot c$ — вирази, що містять дві дії.
4. $(5-3\cdot 4)\cdot 12$; $(5ab-4)\cdot c$; $\dfrac{x+4}{x^2+5}$ — вирази, що містять більше ніж дві дії.

②

Вирази, в яких числа записані тільки за допомогою цифр, називають *числовими виразами*.

Число, що одержують у результаті виконання дій у числовому виразі, називають *значенням числового виразу*.

Приклади.

1. 5; $0,(3)$; $0,12131415\ldots$; $7+13$; $(8-0,2)\cdot 3$; $0,(7)+0,(2)$ — числові вирази.
2. Значенням виразу $7-2\cdot 3$ є число 1. Його одержують у результаті виконання дії множення ($2\cdot 3=6$) і дії віднімання ($7-6=1$).
3. Значенням виразу $14\cdot(0,2+1,8)$ є число 28 (1) $0,2+1,8=2$; 2) $14\cdot 2=28$).

При обчисленні значень числових виразів, які містять дії додавання, віднімання, множення і ділення:

- спочатку виконують дію множення чи ділення у порядку їх запису зліва направо;
- потім виконують дії додавання і віднімання у порядку їх запису;
- якщо вираз містить дужки, то спочатку виконують дії в дужках.

Приклади.

Знайти значення виразу:

1. $17 - 2 : 0{,}4 \cdot 3$.

1) $2 : 0{,}4 = 20 : 4 = 5$;

2) $5 \cdot 3 = 15$;

3) $17 - 15 = 2$.

Число 2 — значення виразу.

2. $26 : (-17 + 8 : 2)$.

1) $8 : 2 = 4$; **2)** $-17 + 4 = -13$; **3)** $26 : (-13) = -2$.

Число -2 — значення виразу.

Якщо числовий вираз містить дію, яку не можна виконати, то про вираз кажуть, що він не має смислу (змісту).

Вирази, що містять тільки арифметичні дії, не мають смислу тоді і тільки тоді, коли вони містять ділення на число 0.

Приклади.

Вирази $\frac{18-3}{0}$; $\frac{15}{7-7}$; $\frac{20}{8-4\cdot 2}$ не мають смислу (змісту), оскільки містять ділення на число 0.

3

Вирази, що містять хоча б одну букву, називають *буквеними* або *виразами зі змінними*.

Букви у виразах називають *змінними*. Якщо у вираз входить тільки одна буква (записана один раз чи більше), то кажуть, що це є *вираз з однією змінною*; якщо вираз містить дві різні букви, то кажуть, що це *вираз із двома змінними* тощо.

Приклади.

1. x; c; $5a - 2$; $7b - \frac{4}{b} + 3$; $x^2 - 3x + 5$ — буквені вирази з однією змінною.

2. xy; $xy + 7$; $x^2 + y^2 - xy + 4$; $5x - 3y + 7$ — вирази з двома змінними x та y.

3. abc; $a + 3b - c + 7$; $(a^2 + 4b + 3) \cdot c$ — вирази з трьома змінними a, b і c.

Значеннями змінних у буквених виразах називають числа, які підставляють замість змінних (букв).

Числовим значенням, або просто *значенням* буквеного виразу при вказаних значеннях змінних називають число, яке одержують у результаті виконання дій після заміни букв вказаними числами (значеннями змінних).

Щоб знайти значення буквеного виразу для даних значень змінних, потрібно:

- **підставити у вираз замість букв числа — дані значення змінних;**
- **обчислити значення одержаного числового виразу.**

Приклади.

1. Знайти числове значення виразу $5x - 3$, якщо $x = 4$ (число 4 — дане значення змінної x).

Підставляємо число 4 замість x: $5 \cdot 4 - 3$; обчислюємо значення одержаного числового виразу $20 - 3 = 17$.

Число 17 є значенням виразу: $5x - 3$, якщо $x = 4$.

2. Знайти значення виразу $4a - 3b$, якщо: 1) $a = 1$ і $b = 4$; 2) $a = 0$ і $b = 7$.

Замінюємо у виразі змінні їхніми значеннями: $4 \cdot 1 - 3 \cdot 4$.

Обчислюємо значення одержаного числового виразу: $4 - 12 = -8$.

Число -8 є значенням виразу $4a - 3b$, якщо $a = 1$ і $b = 4$.

Якщо $a = 0$ і $b = 7$, то значенням виразу $4a - 3b$ є число -21 ($4 \cdot 0 - 3 \cdot 7 = = 0 - 21 = -21$).

4

Для позначення значень, що набуває буквений вираз, використовують букву, відмінну від тих, що позначають змінні у виразі.

Рівність, у якій права частина — вираз зі змінними, а ліва частина — буква, називають *формулою*. Вона виражає залежність значень виразу від значень змінних у виразі.

Приклади.

$y = 2x$; $y = 3x + 1$; $y = x(x + 2)$; $y = a^2 + 4a - 3$ — формули, в яких права частина — вираз зі змінними, а ліва частина — буква y.

За допомогою формул виражають залежності між числовими значеннями різних величин (геометричних, фізичних).

Приклади.

$S = a \cdot b$ — формула площі S прямокутника зі сторонами a і b;

$C = 2\pi R$ — формула довжини C кола радіуса R;

$S = v \cdot t$ — формула відстані S, пройденої тілом при рівномірному русі зі швидкістю v за час t.

В алгебрі формули часто використовують для позначення чисел за їхніми властивостями.

Приклади.

1. $m = 2n$, де n — будь-яке натуральне число, — формула усіх парних чисел (2; 4; 6; 8; 10...).

2. $m = 2n - 1$, де n — будь-яке натуральне число, — формула усіх непарних чисел (1; 3; 5; 7; 9...).

3. $m = 5n$, де n — натуральне число, — формула усіх натуральних чисел, кратних числу 5 (5; 10; 15; 20...).

4. $k = 3m - 2$, де n — натуральне число, — формула усіх натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2 (2; 5; 8; 11; 14; 17...).

(5)

У процесі словесного читання виразів вживають терміни (слова), що позначають результати дій: «сума», «різниця», «добуток», «частка».

Якщо вираз містить більше, ніж одну дію, то при називанні виразу:

- **першою називають дію, яку виконують останньою.**

  Приклади.

  1. $(a + b) \cdot 5$ — добуток суми чисел a і b та числа 5.
  2. $(a - 2)(a + 2)$ — добуток різниці чисел a і 2 і їх суми.
  3. $a : b + a \cdot b$ — сума частки чисел a і b і їх добутку.

2. Поняття про цілі вирази

(6)

Вирази зі змінними поділяють на класи залежно від дій, що входять у них.

Вирази, у яких містяться тільки арифметичні дії (додавання, множення, віднімання, ділення) і степені з натуральним показником та дужки, називають *раціональними виразами*.

У раціональні вирази може входити тільки одна з арифметичних дій (наприклад, множення) або кілька чи всі дії.

Раціональними виразами **вважають також і всі вирази, що не містять дій.**

Приклади.

1. a; $ab - 3$; $2a - b - c$; $x^2 - 4x$; $(a + 4) \cdot 7$; $\dfrac{x+5}{x+4}$ — раціональні вирази.

2. Вирази $x^{\frac{1}{3}} - 5x$; $\sqrt{x} - 5y + 1$ не є раціональними, оскільки містять дії, відмінні від арифметичних дій.

Цілими раціональними виразами, **або просто *цілими виразами,* називають раціональні вирази, які не містять ділення на вираз зі змінними.**

Цілі вирази можуть містити ділення на число, відмінне від 0.

Цілими виразами вважають також вирази, що не містять знака дій.

Приклади.

1. $5 \cdot a$; $a + 10$; $x^2 - 4x$; $\frac{a}{4} - 5$ — цілі вирази.

2. $5a^3$; $5ab^2 + 4$; $x^2 - y^3 + 7$ — цілі вирази, що містять степені з натуральними показниками.

3. $\frac{x}{2}$; $\frac{a}{3} + \frac{b}{5}$; $xy : 4$ — цілі вирази, що містять ділення на число, відмінне від 0.

4. Цілими є вирази зі змінною x: $2x + 5$; $-4x + 7$; $0{,}1x - 3$. Усі вирази виду $ax + b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійними відповідно змінної x.

У курсі алгебри 7 класу ми вивчатимемо цілі вирази, різні їх види, а також рівності, утворені з допомогою цілих виразів — тотожності і рівняння.

Раціональні вирази, що містять ділення на вираз зі змінними, називають дробовими. Такі вирази подані для вивчення у 8 класі.

Приклади.

1. $\frac{5}{x}$; $\frac{7}{x-5}$; $x + \frac{1}{x}$; $\frac{2}{x} + \frac{x}{4}$ — дробові вирази з однією змінною.

2. $\frac{1}{a-b}$; $\frac{4}{x-y+2}$; $\frac{x+4+5}{x-3}$; $y - \frac{1}{x+4}$ — дробові вирази з двома змінними.

Основна властивість цілих виразів зі змінними

Числові значення цілих виразів існують при будь-яких значеннях змінних.

Приклади.

1. Числові значення цілих виразів $5a$; $9 - 5a$; $\frac{a}{7}$ — існують при будь-яких дійсних значеннях змінної a.
2. Числові значення цілого виразу $7a + 3b$ — існують при підставлянні замість букв a і b будь-яких дійсних чисел.

3. Числове значення дробового виразу $\frac{17}{a-3}$ не існує, якщо $a = 3$, оскільки вираз $\frac{17}{3-3}$ не має смислу.

Цілий вираз, який при будь-яких значеннях змінних набуває одного і того ж числового значення, називають *постійним*. Цілий вираз, який при будь-яких значеннях змінних дорівнює 0, називають *нульовим виразом*, або *нуль-виразом*.

Приклади.

1. Значення виразу $0 \cdot x + 5$ при будь-яких значеннях змінної x дорівнює 0.
2. Значення виразів $0x$, $y - y$, $0ab$ при будь-яких значеннях змінних дорівнює 0. Отже, $0x$, $y - y$, $0ab$ — нульові вирази.

Основою обґрунтування тотожностей та виведення нових тотожностей є властивості додавання і множення дійсних чисел (переставна, сполучна, розподільна, властивості чисел 0 та 1). Рівності, що виражають ці властивості, називають *основними тотожностями*. При вивченні (дослідженні) алгебраїчних об'єктів вони виконують таку ж роль, як і аксіоми при вивченні геометричних фігур.

Тотожним перетворенням, або просто *перетворенням* виразу, називають його заміну тотожно рівним виразом.

Тотожні перетворення виразів виконують з метою спрощення виразів — зменшення числа дій або змінних у виразі. Заміна виразу спрощеним виразом дозволяє раціоналізувати, спростити обчислення його значень і вчиняти інші дії над ним.

Основними перетвореннями цілих виразів є розкриття дужок і зведення подібних доданків.

Приклади.

1. Розкрити дужки: $\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{4}\right)\cdot 20=\frac{a}{5}\cdot 20+\frac{b}{4}\cdot 20=4a+5b$.

Вирази $\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{4}\right)\cdot 20$ і $4a + 5b$ є тотожно рівними.

2. Звести подібні доданки.

$-2a + 5a = a \cdot (-2 + 5) = a \cdot 3 = 3a$.

$-9x - 14x = -23x$.

Основні тотожності дозволяють виконувати і зворотні перетворення цілих виразів: вводити нові змінні, перетворювати числа, змінні у вирази, що містять дії.

Приклади.

1. Число 5 можна подати, наприклад, як вираз зі змінною $5 + 0 \cdot x$.

Будь-яке число можна перетворити у вираз, що містить змінні. Тому окремі числа, вирази, які не містять знаків дій, також вважають виразами.

2. Вираз x можна замінити тотожно рівним виразом із двома змінними, наприклад, $x + 0y$.

7

Якщо рівність, яку утворюють два цілі вирази, перетворюється у правильну числову рівність при будь-якому значенні змінної або будь-яких наборах значень змінних, то її називають *тотожністю*. Вирази, які утворюють тотожність, називають *тотожно рівними*.

Приклади.

1. За розподільною властивістю множення рівність $3(a + 2) = 3a + 6$ перетворюється у правильну числову рівність при будь-яких дійсних значеннях змінної a. Отже, рівність $3(a + 2) = 3a + 6$ є тотожністю.

2. Рівність $2(x + y) = 2x + 2y$ при будь-яких значеннях змінної x і будь-яких значеннях змінної y перетворюється у правильну числову рівність. Наприклад, якщо $x = 5$ і $y = 3$. Матимемо: $2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$; $2 \cdot 8 = 10 + 6$; $16 = 16$.

3. Рівність $0 \cdot x + 5 = 5$ є тотожністю, а вирази $0x + 5$ і 5 тотожно рівними, оскільки $0 \cdot x = 0$ при будь-якому дійсному числі x, і $0 + 5 = 5$.

4. За основними властивостями множення і додавання утворюють тотожність і є тотожно рівними вирази $0 \cdot a + c$ і c.

Тотожно рівними можуть бути:

- **два цілі вирази з однаковими змінними;**
- **цілий вираз зі змінною і число;**
- **два цілі вирази, що відрізняються змінними.**

Приклади.

1. Рівність $3(a + 2) = 3a + 6$ є тотожністю на основі розподільного закону множення. При заміні a будь-яким дійсним числом утворюється правильна числова рівність.

Наприклад, якщо $a = 2$, то рівність $3(2 + 2) = 3 \cdot 2 + 6$ є правильною ($3 \cdot 4 = 6 + 6$; $12 = 12$).

2. Тотожно рівними є вирази $7a - 14b$ і $7(a - 2b)$. При будь-яких значеннях змінних a і b рівність $7a - 14b = 7(a - 2b)$ перетворюється в правильну числову рівність.

3. Вираз $0 \cdot a + 5$ зі змінною a тотожно рівний числу 5.

4. Вираз $0 \cdot a + 0 \cdot b$ зі змінними a і b тотожно рівний числу 0.

5. Рівність $0x + 2y = 2y$ є тотожністю, а вираз $0x + 2y$ зі змінними x та y тотожно рівний виразу $2y$ зі змінною y.

Навчальні завдання

І. Поняття про вирази

①

№8.

1. 1) Яка спільна назва у записів 5; 0,(7); x; $5a$; $a + 3$; $(x + y) \cdot y$?
   2) Як називаються записи дій, які складаються з чисел, позначених за допомогою цифр чи букв?
   3) Чи є виразами записи 0,(3); $\frac{1}{7}$; –9; a; y?
2. *Серед виразів а)–е) вказати три, які...*
   1) не містять дії:
      а) 8; б) $4a$; в) –0,4;
      г) $\frac{3}{a}$; д) x; е) a^2;
   2) містять дві дії:
      а) $ab + 3$; б) $abc + 5$; в) $(x + y) \cdot 4$;
      г) $2a$; д) $\frac{x}{y} + 5a$; е) $4x + 3$;
   3) містять три дії:
      а) $2x + 3$; б) $2x + 5y$; в) $\frac{3}{x} + 4$;
      г) $\frac{3}{x} + 4y$; д) $a^2 + b^2$; е) $4a + 1$;
3. *Записати три вирази, які...*
   1) не містять знака дії;
   2) містять букву й один знак дії;
   3) містять дві різні букви і два знаки дії;
   4) містять три дії.

②

№9.

1. 1) Яка спільна назва у записів 4; –9; 0,(3); $4 + 9$; $4 \cdot 9 - 3$; $\frac{7}{2-3}$?

2) **Як називають вирази, що містять числа, позначені тільки за допомогою цифр, і не містять буквених позначень чисел?**
а) Цифровими; б) числовими; в) дійсними.
3) **Чи вважають числовими виразами записи окремих чисел за допомогою цифр?**
4) **Як називають число, що одержують у результаті послідовного виконання всіх дій у числовому виразі?**
5) **Чим є число 7 для виразу $2 \cdot 3 + 1$?**
6) ***Доповнити записи.***
У числових виразах, що містять дії додавання, множення, віднімання і ділення та не містять дужок, спочатку виконують дії ____________________, а потім ____________________.
7) **У виразі, що містить дві дії — додавання і множення — спочатку виконують дію множення.**
8) ***У якому випадку а)–в) числовий вираз, складений за допомогою дій додавання, множення, віднімання і ділення, не має змісту (смислу)?***
а) Коли він містить множення на число 0;
б) коли він містить ділення числа 0 на деяке дійсне число, відмінне від 0;
в) коли він містить ділення на число 0.

Серед виразів а)–в) вказати той, у якому дії виконують у порядку:
1) **додавання; множення:**
а) $7 + 2 \cdot 3$; б) $4 \cdot (8 + 7)$; в) $6 \cdot 9 + 1$.
2) **множення; віднімання:**
а) $\frac{9}{14} \cdot \left(5 - \frac{2}{3}\right)$; б) $(7 - 0{,}1) \cdot 2$; в) $7 - 0{,}1 \cdot 2$.

Вказати число, що є значенням виразу:
3) $5 + 2 \cdot 3 = ...$
а) 21; б) 11; в) 10.
4) $0{,}1 \cdot (7 + 8) = ...$
а) 150; б) 1,5; в) 8,7.
5) $7 - 4 \cdot 0{,}2 = ...$
а) 0,6; б) −1; в) 6,2.
6) Серед виразів а)–е) вказати три, що не мають смислу (змісту)?
а) $\frac{0}{5}$; б) $\frac{13}{0}$; в) $\frac{6-2\cdot3}{5}$;
г) $\frac{5}{6-2\cdot3}$; д) $\frac{3}{-9+2\cdot4{,}5}$; е) $\frac{-9+2\cdot4{,}5}{3}$.

1) **Записати три вирази, які не мають смислу.**

Знайти значення числового виразу...

2) $18 - 3 \cdot 0{,}2$;

3) $19 \cdot (0{,}3 + 0{,}2)$;

4) $-27 : (5 - 5{,}9)$;

5) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 12$;

6) $9 - \frac{2}{3} : \frac{4}{9}$.

3

№10.

1. **1)** **Як називають вираз, що містить хоча б одну букву?**

2) **Як називають у виразах букви, що позначають числа?**

3) **Як називають дійсні числа, які підставляють замість змінної у буквений вираз?**

а) **Значеннями виразу;** б) **значеннями змінної.**

4) **У який вираз перетворюється буквений вираз після підставлення замість букв їх числових значень?**

5) **Як називають число, що одержують у результаті виконання усіх дій після заміни букв числами?**

Вказати, скільки змінних містить вираз:

6) $4 + 3 \cdot 2$;

7) $3a + 2$;

8) $3a^2 + a - 3$;

9) $(4x - 3) \cdot (x + 2)$;

10) $(4a - 3) \cdot (b + 2)$;

11) $ab + 2c$;

12) $(m + 4) \cdot (k + c)$;

2. *Серед виразів а)–е) вказати:*

1) три вирази з однією змінною:

а) $2a + b$; б) $x^2 + 5x - 4$; в) $(a - 3)(b + 4)$;

г) $2c + 3$; д) $3x + 4y - 7$; е) $(a - 3)(a + 4)$;

2) три вирази з двома змінними:

а) $x^2 + 7x - 3$; б) $m(m + n) - 3$; в) $(a + 3)(a + 5)$;

г) $abc + 1$; д) $3x + 3y - 2$; е) $a + 2ab + 3b + 7$;

3) три вирази з трьома змінними:

а) $xyz - 3$; б) $5x - 4x^2 + x^3 - 7$; в) $(a + 2)(b - 2)(c + 3)$;

г) $m(n + 1)(p + 2)$; д) $x + xy + 3y - 4$; е) $a^3 + 2a^2 + a - 4$.

Вказати вираз, у який перетворюється вираз:

4) $2a + 5$, якщо значення змінної дорівнює 3:

а) $23 + 5$; б) $2 \cdot 3 + 5$.

5) $3a + 4b$, якщо $a = 10$ і $b = 100$:

а) $3 \cdot 10 + 4 \cdot 100$; б) $30 + 400$.

Знайти числове значення виразу:

6) $4x - 5$, якщо $x = 7$:
   а) 42; б) 23.

7) $3a + 7$, якщо $a = -9$:
   а) -32; б) -20.

8) $2a + 5b$, якщо $a = -3$ і $b = -4$:
   а) -77; б) -26; в) 26.

3. *Записати три вирази:*

1) зі змінною x;
2) зі змінними x та y;
3) зі змінними a і b.

Знайти числове значення виразу:

4) $5x - 3$, якщо $x = 2$; $x = 3$; $x = 0$;
5) $-3a + 4$, якщо $a = 4$; $a = -5$; $a = 0$;
6) $5a - 7b$, якщо $a = 2$ і $b = 3$; $a = 0$ і $b = -4$; $a = -3$ і $b = 0$.

Вказати послідовність виконання дій при обчисленні числових значень виразу:

7) $7 - 5a$; 8) $(a - 2)(a + 6)$; 9) $7(a - 3) + b$;
10) $3a + 4b$; 11) $m + n(k - p)$; 12) $(m + n)k - p$.

№11.

1. *Вказати у формулах 1–6...*

а) вираз;
б) змінну (змінні) у виразі;
в) букву, що позначає вираз:

1) $y = 5x + 2$; 2) $S = 10 \cdot t$; 3) $S = v \cdot t$;
4) $m = 2n + 1$; 5) $z = 2x + 3y + 1$; 6) $y = 4m + 3n - 5$.

2. *Вказати формулу, за якою обчислюють:*

1) площу прямокутника S зі сторонами a і b:
   а) $S = 2(a + b)$; б) $S = 2ab$; в) $S = ab$;
2) площу квадрата S зі стороною a:
   а) $S = 4a$; б) $S = a^2$; в) $S = 2a$;
3) периметр P квадрата зі стороною a:
   а) $P = 4a$; б) $P = 2a$; в) $P = a^2$;
4) периметр P рівностороннього трикутника зі стороною a:
   а) $P = 2a$; б) $P = 3a$; в) $P = 4a$.

n — натуральне число. Вказати формулу:

5) парного числа k:
   а) $k = 2n + 1$; б) $k = 2n$; в) $k = 2n - 1$;

6) непарного числа p:

а) $p = 2n$; б) $p = 2n - 1$; в) $p = 4n$;

7) числа m, кратного 9:

а) $m = 9 + n$; б) $m = 9n$, в) $m = 9n - 1$;

8) числа c, кратного числам 2 і 3:

а) $c = 23n$; б) $c = 6n$; в) $c = n + 6$.

За формулою $y = 3x$ вказати значення y, якщо:

9) $x = 4$:

а) 34; б) 12; в) 7;

10) $x = -2$:

а) 6; б) –32; в) –6;

11) $x = \frac{2}{15}$:

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{32}{15}$; в) $\frac{45}{2}$;

За формулою $y = 5x + 2$ вказати значення y, якщо:

12) $x = 4$:

а) 56; б) 22; в) 542;

13) $x = -3$:

а) –51; б) –17; в) –13;

14) $x = 0{,}1$:

а) 7,1; б) 2,5; в) 52.

3. *Записати формулу (1–3):*

1) парного числа p;
2) числа m, кратного 5;
3) числа c, кратного 7.
4) $y = 4x - 3$. Обчислити значення y, якщо: $x = -9$; $x = \frac{3}{4}$; $x = 0{,}2$.
5) $y = -2x + 5$. Обчислити значення y, якщо: $x = 6$; $x = -\frac{1}{6}$; $x = -0{,}4$.

5

№12.

1. *Назвати дію, яку слід виконувати першою при знаходженні значення виразу:*

1) $a \cdot (b + c)$; 2) $m + ab$; 3) $n - a : c$;
4) $(a - 2) : (б + 3)$; 5) $(a + 2)(b + 3)$; 6) $a + (b - c) \cdot d$.

Назвати дію, яку слід виконувати останньою при знаходженні значення виразу:

7) $xy - z$; 8) $(x - y)z$; 9) $(a + b)c - d$;

10) $(a + b)(c - d)$; 11) $m + (n - k)p$; 12) $(m + n - k) \cdot p$.

13) *Доповнити запис.*

У процесі словесного читання виразів першою називають дію, яку виконують ________________.

2. *Серед виразів а)–е) вказати три, у яких останньою виконують...*

1) дію додавання:

а) $a + b \cdot m$; б) $(a + b) \cdot m$; в) $3(a - 2) + 5$;

г) $3a + 4$; д) $(a - b)(a + b)$; е) $\frac{a}{a+3}$.

2) дію віднімання:

а) $(a - 2) \cdot 3$; б) $5 - a \cdot b$; в) $3a - 2$;

г) $(a + 2) \cdot 5 - 3$; д) $(a - 5)(a - 3)$; е) $(5 - a) \cdot b$.

3) дію множення:

а) $a + b \cdot c$; б) $(a + b) \cdot c$; в) $ab + c$;

г) $3x + 4$; д) $5 \cdot (a - 3)$; е) $(3x + 4) \cdot y$.

4) дію ділення:

а) $a : (b + c)$; б) $a : b + c$; в) $a - b : c$;

г) $x + y : 5$; д) $(a - b) : (a - c)$; е) $(m + n) : p$.

Серед виразів а)– е) вказати три, які називають...

5) сумою:

а) $a + bc$; б) $5(a + 3)$; в) $5 : (a + 3)$;

г) $(a + 3)(a + 2)$; д) $a + b$; е) $5x + 2$.

6) добутком:

а) $ab + 1$; б) ab; в) $4a - 3$;

г) $a(a + b)$; д) $2a + 5$; е) $4a$.

7) різницею:

а) $(x - y) \cdot a$; б) $x - y$; в) $10 - xy$;

г) $(a - b)(a + b)$; д) $ab - c$; е) $(a - 2) : (a - 5)$.

8) часткою:

а) $a : b + c$; б) $a : b$; в) $a : b - c$;

г) $a + b : c$; д) $a : (b - c)$; е) $(a + b) : c$.

3. *Вказати порядок виконання дій у поданих виразах і прочитати вирази:*

1) $ab + c$; 2) $a : b + c$; 3) $a \cdot (b + c)$;

4) $a : (b + c)$; 5) $(a - b) \cdot c$; 6) $a - bc$;

7) $a + bc$; 8) $(a + b) : (c + d)$; 9) $(a + b) \cdot (c + d)$.

Записати за допомогою букв, знаків дій і дужок вирази:

10) добуток суми чисел m і n і числа a;

11) добуток числа p і різниці чисел a і c;

12) сума числа a і різниці чисел m і k;

13) різниця числа a і добутку чисел c і d;

14) сума добутку чисел a і b і їх частки;

15) добуток різниці чисел m і n і їх суми.

Тренувальні вправи

№13.

Знайти значення виразу:

1. **1)** $4a - 9$, якщо $a = -12$; **2)** $3a + 7$, якщо $a = -14$;

3) $-2a + 3$, якщо $a = -8$; **4)** $-5a - 6$, якщо $a = 12$;

2. **1)** $-2x + 0{,}3$, якщо $x = -0{,}2$; **2)** $-0{,}1x + 2{,}6$, якщо $x = -8$;

3) $0{,}4x + 2{,}5$, якщо $x = -3$; **4)** $-0{,}7x - 3{,}2$, якщо $x = 8$;

3. **1)** $\frac{3}{4}b + \frac{1}{16}$, якщо $b = \frac{1}{2}$; **2)** $\frac{5}{8}b - \frac{3}{2}$, якщо $b = \frac{2}{4}$;

3) $\frac{7}{9}b - \frac{2}{27}$, якщо $b = \frac{1}{2}$; **4)** $\frac{9}{15}b - \frac{5}{42}$, якщо $b = -\frac{2}{3}$.

№14.

Знайти значення виразу:

1. **1)** $2a + 3b$, якщо $a = 3$, $b = -2$; **2)** $3x + 4y$, якщо $x = 5$, $y = -6$;

3) $3x - 5y$, якщо $x = -1$, $y = 4$; **4)** $4x + y$, якщо $x = 6$, $y = -9$;

2. **1)** $10x + 4y$, якщо $x = 4{,}2$, $y = 2{,}3$; **2)** $7a - 10b$, якщо $a = 2{,}3$, $b = -7{,}4$;

3) $a - 5c$, якщо $a = 2{,}3$, $c = -1{,}2$; **4)** $8a - b$, якщо $a = 0{,}4$, $b = -0{,}9$;

3. **1)** $\frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y$, якщо $x = -12$, $y = -14$; **2)** $\frac{a}{4} + \frac{b}{5}$, якщо $a = 3{,}6$, $b = 2{,}5$;

3) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y$, якщо $x = 12$, $y = -36$; **4)** $\frac{a}{7} - \frac{b}{8}$, якщо $a = -21$, $b = -56$.

№15.

Записати у вигляді алгебраїчного виразу.

1. **1)** Сума числа a та числа 5; **2)** добуток числа m і числа 12;

3) різниця чисел m і p; **4)** частка чисел x та y.

2. **1)** Сума числа 10 та добутку чисел a і c;

2) різниця числа m та добутку чисел x та y;

3) сума добутку чисел x та y та числа 12;

4) різниця добутку чисел m і n та числа c.

1) Добуток суми чисел a і c та числа b;
2) частка різниці чисел m і n та числа x;
3) добуток числа m та різниці чисел a і b;
4) частка числа 10 і суми чисел x та y.

4. 1) Добуток різниці чисел x та y і суми чисел a і b;
2) добуток різниці чисел m і n та суми цих чисел;
3) частка різниці чисел 10 і a та суми чисел 12 і c;
4) частка різниці чисел x та y і їх суми.

5. 1) Подвоєний добуток чисел x та y;
2) подвоєна сума чисел m і n;
3) подвоєна різниця чисел a і c;
4) потроєний добуток чисел m і p.

№16.

1. 1) Скільки секунд у t хвилинах?
2) Скільки хвилин у t годинах?
3) Скільки годин у t добах?
4) Скільки секунд у t годинах?

2. 1) Скільки дециметрів у n метрах?
2) Скільки сантиметрів у n метрах?
3) Скільки міліметрів у p метрах?
4) Скільки дециметрів у p кілометрах?

3. 1) Скільки грамів у m кілограмах?
2) Скільки кілограмів у p тоннах?
3) Скільки кілограмів у k центнерах?
4) Скільки грамів у m тоннах?

4. 1) Скільки одиниць у числі, в якого a десятків?
2) Скільки одиниць у числі, в якого a сотень?
3) Скільки всього одиниць у числі, що складається з a десятків і 7 одиниць ($\overline{a7}$ — запис числа)?
4) Скільки всього одиниць у числі, що складається з b десятків і 4 одиниць ($\overline{b4}$ — запис числа)?

⑥

№17.

1. 1) Як називають вирази, до яких входять тільки арифметичні дії (додавання, множення, віднімання, ділення, записи добутків однакових множників у вигляді степеня)?

а) Арифметичними; б) дійсними; в) раціональними.

2) Серед виразів а)–в) вказати той, що не є раціональним.

а) $x^2 - 3x + 4$; б) $\frac{5a-3}{a+1}$; в) $\sqrt{2x+5}$.

У якому випадку раціональний вираз називають:

3) цілим; 4) дробовим.

Серед виразів а)–в) вказати цілий вираз (5–7):

5) а) $\frac{9}{3x-5}$; б) $\frac{4}{a}$; в) $3x - 5$.

6) а) $\frac{3}{x} + y$; б) $\frac{x}{3} + y$; в) $3x + \frac{1}{y}$.

7) а) $0{,}1x(x-y)$; б) $7x\left(\frac{1}{y}+3\right)$; в) $\frac{1}{a}$.

Серед виразів а)–в) вказати дробовий вираз (8–9).

8) а) $x(x-4)$; б) $x + x : 4$; в) $x + 4 : x$.

9) а) $\frac{a}{3} + b$; б) $a + \frac{b}{4}$; в) $\frac{3}{a} + b$.

10) Дано цілий вираз зі змінною x. Чи існує дійсне число — значення змінної x, при якому вираз не має смислу?

11) Дано цілий вираз зі змінними a і b. Чи існують дійсні числа — значення змінних a і b, при яких вираз не має смислу (змісту)?

12) Дано цілий вираз з однією змінною. Чи існують дійсні числа — значення змінної, при яких не існує значення виразу?

При якому значенні змінної x не існує значення виразу?

13) $\frac{1}{x}$:

а) $x = 1$; б) $x = -1$; в) $x = 0$.

14) $\frac{1}{x-5}$:

а) $x = 0$; б) $x = 5$; в) $x = -5$.

15) $\frac{-}{x+4}$:

а) $x=0$; б) $x=-4$; в) $x=4$.

2. *Серед виразів а)–е) вказати...*

1) три раціональних вирази:

а) $x-5$; б) $\sqrt{x+5}$; в) $x^{\frac{1}{2}}+5$;

г) $(x+5)x$; д) $\frac{x}{5}+7$; е) $\lg x-3$.

2) три цілих вирази:

а) $\frac{4}{x}$; б) $\frac{x}{4}$; в) $\frac{x}{4}+5$;

г) $\frac{2}{x}+5$; д) $x(4x+5)$; е) $2:x+7$;

3) три дробових вирази:

а) $\frac{a}{3}+8$; б) $\frac{3}{a}+8$; в) $a\left(\frac{a}{3}-4\right)$;

г) $\frac{5}{a-3}$; д) $7+\frac{2}{a}$; е) $(a-2)\left(a+\frac{1}{3}\right)$;

3. *Записати три вирази, що...*

1) не є раціональними; 2) є цілими;

3) є дробовими; 4) є цілими і містять дію ділення.

3. Тотожні перетворення цілих виразів

7

№18.

1. *Серед рівностей а)–в) вказати ту, що перетворюється у правильну числову рівність при підставленні замість букв будь-яких дійсних чисел (1–4):*

1) а) $a+b=b$; б) $a+b=b+a$; в) $a+b=a\cdot b$.
2) а) $3(a+2)=3a+6$; б) $3(a+2)=3a+2$; в) $3(a+2)=a+6$.
3) а) $0\cdot a+5=0$; б) $0\cdot a+b=0$; в) $0\cdot x+5=5$.
4) а) $0\cdot x+0\cdot y+7=0$; б) $0\cdot x+0\cdot y=0$; в) $0\cdot x+y=0$.
5) Як називають рівність, утворену двома цілими виразами, що перетворюється у правильну числову рівність при заміні букв будь-якими дійсними числами?
6) Як називають два цілі вирази, що утворюють тотожність?

ми?

Чи можуть бути тотожно рівними (8–9):

8) цілий вираз зі змінною і число;

9) цілий вираз з двома змінними і цілий вираз з однією змінною?

2. *Серед виразів а)–в) вказати тотожно рівний виразу:*

1) $7(a-2)$:
а) $7a-2$; б) $7+a-2$; в) $7a-14$.

2) $5(x+3)$:
а) $5x+3$; б) $5x+15$; в) $x+15$.

3) $3\cdot\left(\dfrac{a}{3}+4\right)$:
а) $3a+12$; б) $a+12$; б) $a+4$;

4) $\left(\dfrac{b}{2}-5\right)\cdot 4$:
а) $\dfrac{b}{8}-20$; б) $2b-5$; в) $2b-20$.

5) $\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{6}\right)\cdot 12$:
а) $\dfrac{x}{48}+\dfrac{1}{72}$; б) $3x+2$; в) $3x+\dfrac{1}{6}$.

6) $-2a+5a$:
а) $-7a$; б) $-3a$; в) $3a$;

7) $-4x-x$:
а) $-3x$; б) -4; в) $-5x$.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний числу:

8) 5:
а) $5a+b$; б) $5a+5b$; в) $0\cdot a+5$.

9) 7:
а) $7a+7b$; б) $0a+0b+7$; в) $a+b+7$.

10) 13:
а) $13x+13y+13$; б) $13x+13y$; в) $0x+0y+13$.

3. *Розкрити дужки:*

1) $3(a-4)$; 2) $5(x+2y)$;

3) $-2(a+3)$; 4) $-7(x-2y)$;

5) $5\cdot\left(\dfrac{x}{5}+1\right)$; 6) $\left(\dfrac{x}{7}-2\right)\cdot 14$;

7) $\left(\frac{\ldots}{3}+\frac{\ldots}{9}\right)\cdot 9$; 8) $\left(\frac{\ldots}{6}+\frac{\ldots}{8}\right)\cdot 24$.

Звести подібні доданки:

9) $-7x+10x$; 10) $-14a-12a$;

11) $-8a+13a+2$; 12) $-4x-x+3$.

Подати число 15 у вигляді виразу:

13) зі змінною x; 14) зі змінною y;

15) зі змінними a і b; 16) зі змінними m і n.

Тренувальні вправи

№19.

Розкрити дужки:

1. 1) $9(a-1)$; 2) $7(3b+2)$; 3) $-3(4x-5)$; 4) $-4(7x+2)$.
2. 1) $-(x-3)$; 2) $-(2a+3)$; 3) $-(5y-2)$; 4) $-(7x+5)$.
3. 1) $\left(\frac{x}{8}+1\right)\cdot 8$; 2) $\left(\frac{a}{5}+2\right)\cdot 15$; 3) $\left(\frac{y}{9}-2\right)\cdot 27$; 4) $\left(\frac{b}{12}+1\right)\cdot 48$.
4. 1) $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 6$; 2) $\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot 24$; 3) $\left(\frac{b}{7}-\frac{3}{14}\right)\cdot 28$; 4) $\left(\frac{m}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot 30$.

№20.

Звести подібні доданки:

1. 1) $-2x-5x$; 2) $-7x-3x$; 3) $-0{,}4x-1{,}1x$; 4) $-1{,}5x-0{,}1x$.
2. 1) $-a-5a$; 2) $-b-4b$; 3) $-c-1{,}1c$; 4) $-m-2{,}3m$.
3. 1) $2a-8a$; 2) $-3a+9a$; 3) $-2{,}2a+7{,}4a$; 4) $5a-6{,}8a$.
4. 1) $a-4a$; 2) $b-11b$; 3) $c-2{,}3c$; 4) $m-5{,}6m$.

№21.

Спростити вираз:

1. 1) $2(x-3)+7$; 2) $3(x+5)-8$;
   3) $5(x-7)+30$; 4) $6(x-3)+20$.
2. 1) $-(2x+5)-3x$; 2) $-(4x-7)+3x$;
   3) $-(3x-9)-x$; 4) $-(7x+3)+2x$.
3. 1) $-3(2a-1)-4a$; 2) $-5(4a+3)+18a$;
   3) $-6(5a-1)-a$; 4) $-7(2a-3)+a$.

ТЕМА: РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- Поняття про рівняння з однією змінною
- Рівносильні перетворення цілих рівнянь з однією змінною

Виклад теорії

1. Поняття про рівняння з однією змінною

1

Рівність зі змінною, складену для знаходження усіх значень змінної, при яких вона перетворюється у правильну числову рівність, називають *рівнянням з однією змінною*.

Рівняння є символічним записом задач на знаходження усіх значень змінної, при яких значення даного виразу зі змінною дорівнює значенню іншого виразу з цією ж змінною або деякому числу.

Вираз, записаний у рівнянні ліворуч від знака рівності («=»), називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч — *правою частиною*. Змінну у рівнянні називають також *невідомим*, а рівняння з однією змінною інакше називають рівнянням з одним невідомим. Змінна (невідоме) може входити в обидві частини рівняння або тільки в одну.

Якщо обидві частини рівняння є цілими виразами, то і рівняння називають *цілим*. Одна з частин цілого рівняння може бути і числом, оскільки число — цілий вираз.

Приклади.

1. $4x-3=x$; $\frac{4}{x}=x+1$; $x^2-5=4$; $x(x+3)=\frac{1}{x+2}$ — рівняння зі змінною x.
2. $x^2-3x=4x-1$; $x(x+1)=3x$ — рівняння, у яких змінна x входить в обидві частини.
3. $x(x+3)=4$; $4x=3$; $x(x-1)=0$; $\frac{x^2}{x-4}=1$ — рівняння, у яких змінна входить тільки в ліву частину, а права є числом.
4. $2x-3=4x+3$; $x(x-3)=70$; $4x^2-3x+5=0$ — цілі рівняння зі змінною x.
5. $5y^2=0$; $8y=y$; $y(y+2)=y^2-1$; $9y^3+5=0$ — цілі рівняння зі змінною y.
6. $\frac{4}{x}=x+3$; $(4x+3)x=\frac{1}{x+3}$; $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x+1}$ — рівняння з однією змінною, які не є цілими (дробові рівняння).

②

Значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називають *коренем* або *розв'язком* рівняння.

Приклад.

Число 5 є коренем рівняння $4x = x + 15$, бо якщо $x = 5$, то дане рівняння перетворюється у правильну числову рівність: $4 \cdot \overset{x}{5} = \overset{x}{5} + 15$, тобто $20 = 20$.

Щоб встановити, чи є дане число коренем рівняння, потрібно:

- **підставити замість змінної у рівняння дане число;**
- **знайти значення частин рівняння.**

Якщо значення лівої і правої частин рівняння рівні, то число є коренем рівняння.

Якщо ж значення лівої і правої частин рівняння не рівні, то число не є коренем рівняння.

Існують рівняння з однією змінною, які:

- не мають коренів;
- мають один корінь;
- мають скінченне число коренів (більше ніж один);
- мають безліч коренів.

1. Рівняння $0 \cdot x = -20$ не має коренів: при будь-якому значенні x ліва частина рівняння дорівнює 0, а права частина завжди не дорівнює нулю.

2. Рівняння $4x = 48$ має один корінь — число 12, бо тільки при цьому значенні вираз $4x$ дорівнює 48.

3. Рівняння $(x-1)(x-3)(x-5) = 0$ має три корені — числа 1, 3 і 5.

4. Рівняння $0 \cdot x = 0$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем, оскільки добуток числа 0 і будь-якого числа завжди дорівнює 0 — правій частині рівності.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

2. Рівносильні перетворення рівнянь з однією змінною

③

Рівняння з однією змінною називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті ж корені або не мають коренів взагалі.

Приклади.

1. Рівняння $5x = 3x + 10$ і $2x = 10$ рівносильні, бо кожне з них має один і той же корінь — число 5.

2. Рівняння $x^2 = -10$ і $0 \cdot x = -5$ рівносильні, бо обидва не мають коренів.

Заміну даного рівняння рівносильним йому рівнянням називають *рівносильним перетворенням*.

Якщо в одній або в обох частинах рівняння виконати тотожні перетворення (звести подібні доданки, розкрити дужки тощо), то рівняння перетвориться у рівносильне йому рівняння.

Приклади.

1. Якщо у рівнянні $5-(x+3)=12$ розкрити дужки, то отримаємо рівняння $5-x-3=12$ — рівносильне даному.
2. Якщо у рівнянні $5x-3x=8$ звести подібні доданки, то одержимо рівняння $2x=8$, рівносильне даному.

④

Якщо в рівнянні деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то рівняння перетвориться у рівносильне йому рівняння.

Приклад.

Якщо у рівнянні $5x+2=17$ перенести доданок 2 з лівої частини у праву, змінивши його знак, то одержимо рівняння $5x=17-2$ — рівносильне даному.

⑤

Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж число, відмінне від нуля, то утвориться рівняння, рівносильне даному.

Приклади.

1. Якщо обидві частини рівняння $\frac{x}{3}=x+1$ помножити на 3, то одержимо рівняння $x=3(x+1)$ — рівносильне даному.
2. Якщо обидві частини рівняння $4x=48$ поділити на 4, то одержимо рівняння $x=12$ — рівносильне даному.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Поняття про рівняння з однією змінною

①

№22.

1. 1) Як називається рівність $4x-3=7$, що містить змінну x (невідоме число)?

2. 1) Серед записів а)–е) вказати три, які є рівняннями з однією змінною.

а) $3x + 1 = 10$; б) $3x + 1 > 10$; в) $3x + 1$;

г) $3 \cdot 3 + 1 = 10$; д) $3x = 9$; е) $4x - 1 = x + 10$.

3. *Записати рівняння з однією змінною, ...*

1) ліва частина якого містить змінну, а права частина — число 0;

2) ліва та права частини містять змінну.

②

№23.

1. 1) Вказати число, при якому рівняння $x + 7 = 10$ перетворюється у правильну числову рівність.

а) 2; б) 3; в) 0.

2) **Як називається значення змінної, при якому рівняння перетворюється в правильну числову рівність?**

3) Яке з наведених чисел є коренем (розв'язком) рівняння $x - 8 = 2$?

а) 8; б) 10; в) −10.

4) **Коренем якого з рівнянь а)–в) є число 2?**

а) $x + 2 = 0$; б) $x - 2 = 0$; в) $x^2 - 2 = 0$.

5) Що означає розв'язати рівняння?

а) Знайти хоча б один розв'язок;

б) **знайти всі розв'язки або довести, що їх немає.**

2. 1) **Яке з наведених рівнянь має один корінь?**

а) $x + 7 = 0$; б) $x^2 = 49$; в) $x^2 = -49$.

2) Яке з наведених рівнянь має два корені?

а) $x^2 = -25$; б) $x + 5 = 0$; в) $x^2 = 25$.

3) **Яке з рівнянь а)–в) не має коренів?**

а) $x^2 = 16$; б) $x^2 = 0$; в) $x^2 = -4$.

3. *Записати три рівняння з однією змінною, які...*

1) мають тільки один корінь (розв'язок);

2) **не мають коренів;**

3) **мають два корені.**

2. Рівносильні перетворення цілих рівнянь з однією змінною

③

№24.

1. 1) **Як називаються рівняння, які мають одні й ті ж корені або не мають коренів?**

а) $x - 6 = 0$; б) $x + 6 = 0$; в) $(x - 6)(x + 6) = 0$.

3) При яких з наведених перетворень одержують рівняння рівносильне даному рівнянню?

в) При множенні обох частин рівняння на нуль;

б) при множенні або діленні однієї частини рівняння на число, відмінне від нуля;

в) при множенні або діленні обох частин рівняння на одне й те саме число, відмінне від нуля;

г) при перенесенні доданків з однієї частини рівняння в іншу;

д) при перенесенні доданка з однієї частини рівняння в іншу зі зміною його знака на протилежний.

1) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $4x - x = 12$.

а) $4x = 12$; б) $5x = 12$; в) $3x = 12$.

2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $5x + 3x + 1 = 12$.

а) $8x = 12$; б) $8x + 1 = 12$; в) $9x = 12$.

Звести подібні доданки у лівій частині рівняння:

1) $7x + 3x = 40$. 2) $9x - x = 32$. 3) $3x + 2x + 1 = 26$.

№25.

1) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $3(x + 2) = x$.

а) $3x + 2 = x$; б) $3x + 6 = x$; в) $x + 6 = x$.

2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $-(x - 3) = 12$.

а) $-x - 3 = 12$; б) $-x + 3 = 12$.

Записати рівняння, які утворяться при розкриванні дужок (1–3):

1) $4(x + 5) = 3$. 2) $7(x - 3) = -5$. 3) $-2(x + 2) = 6$.

1) Якими є рівняння $2(x + 3) = 7$ і $2x + 6 = 7$?

4

№26.

1) *Доповнити запис.*

Рівняння перетворюється у рівносильне йому рівняння, якщо при перенесенні доданка з однієї частини рівняння в іншу ...

а) змінити знак доданка на протилежний;

б) не змінювати знак.

$3x - 4 = 0$ перенесенням доданка -4 в іншу частину рівняння.

а) $3x = -4$; б) $3x = 4$; в) $3x = 0$.

2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $4x = x + 5$ перенесенням доданка x в іншу частину рівняння.

а) $4x - x = 5$; б) $4x + x = 5$; в) $4x - x = -5$.

3. *Записати рівняння, яке утвориться:*

1) з рівняння $2x - 5 = 7$ при перенесенні доданка -5 в іншу частину рівняння;

2) з рівняння $3x = x - 10$ при перенесенні доданка x в іншу частину рівняння.

(5)

№27.

1. 1) *Доповнити запис.*

Рівняння перетвориться у рівносильне йому рівняння, якщо помножити на одне й те ж число, відмінне від нуля, ...

а) одну з його частин; б) обидві його частини.

2) *Доповнити запис.*

Рівняння перетвориться у рівносильне йому рівняння, якщо поділити на одне й те ж число, відмінне від нуля, ...

а) одну з його частин; б) обидві його частини.

2. 1) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $\frac{1}{3}x = 5$ при множенні обох його частин на 3.

а) $x = 5$; б) $x = 15$; в) $\frac{1}{9}x = 5$.

2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $4x = 36$ при діленні обох його частин на 4.

а) $x = 36$; б) $x = 9$; в) $x = 4$.

3) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $-3x = 1$ при діленні обох його частин на 3.

а) $x = \frac{1}{3}$; б) $x = -\frac{1}{3}$; в) $x = -3$.

3. *Записати рівняння, яке утвориться з рівняння:*

1) $\frac{x}{4} = 2$, якщо обидві його частини помножити на 4.

2) $0{,}1x = 30$, якщо обидві його частини помножити на 10:

3) $3x = 2$, якщо обидві його частини поділити на 3.
4) $-8x = 32$, якщо обидві його частини поділити на -8.
5) $2x = -18$, якщо обидві його частини поділити на 2.

Тренувальні вправи

№28.

1. *Перевірити, чи буде коренем рівняння:*
   1) $x + 4 = 2x + 1$ число 3;
   2) $2x + 1 = x - 5$ число -6;
   3) $x(x + 3) = 10$ число 2;
   4) $x(x - 4) = 18 - x$ число 6.
2. *Звести подібні доданки у лівій частині рівняння (1–4):*
   1) $3x + 2x - 1 = 26$;
   2) $4x - x + 5 = 0$;
   3) $x + 3 + 4x = 0$;
   4) $9x - x + 5 = 0$.
3. *Розкрити дужки у лівій частині рівняння:*
   1) $3(x + 1) + 2 = 0$;
   2) $1 - (x + 4) = 5$;
   3) $4(x - 2) - 3 = 1$;
   4) $2 - (x - 5) = 0$.
4. *Записати рівняння, що утвориться з рівняння:*
   1) $3x = x + 5$, якщо перенести доданок x з його правої частини в ліву;
   2) $3x + 2 = 4$, якщо перенести доданок 2 з його лівої частини в праву;
   3) $2x = 5 - 3x$, якщо перенести доданок $-3x$ з його правої частини в ліву;
   4) $4x - 7 = 2$, якщо перенести доданок -7 з його лівої частини в праву.
5. *Записати рівняння, що утвориться з рівняння:*
   1) $\frac{x}{2} = x + 1$, якщо помножити обидві його частини на 2;
   2) $\frac{x}{3} = 4 - x$, якщо помножити обидві його частини на 3;
   3) $\frac{x}{8} = x + 3$, якщо помножити обидві його частини на 8;
   4) $\frac{x}{5} = 2 - x$, якщо помножити обидві його частини на 5.

Завдання для самоперевірки

№29. Варіант 1

1. 1) Як називається рівність $2x - 7 = 14$?
   2) Якщо $x = 2$, то рівняння $x + 3 = 2x + 1$ перетворюється у правильну числову рівність. Як називається число 2?

коренів?

2. 1) Серед чисел а)–в) вказати те, яке є коренем рівняння $2x + 1 = x + 9$.
а) 0; б) 8; в) 7.
2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $4x = x + 9$, якщо перенести доданок x з правої його частини в ліву.
а) $4x + x = 9$; б) $4x - x = 9$; в) $4x + x = -9$.
3) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $\frac{x+7}{4} = 2x + 1$, якщо обидві його частини помножити на 4.
а) $x + 7 = 8x + 4$; б) $x + 7 = 8x + 1$; в) $x + 7 = 2x + 4$.

3. *Записати рівняння, яке утвориться з рівняння ...*
1) $3x = x - 8$, якщо перенести доданок x із правої його частини в ліву;
2) $4x + x = 20$, якщо звести подібні доданки;
3) $7x = 28$, якщо обидві його частини поділити на 7.

№30. Варіант 2

1. 1) Як називається рівність $3x - 4 = x + 5$?
2) Якщо $x = 3$, то рівняння $3x + 1 = x + 7$ перетворюється у правильну числову рівність. Як називається число 3?
3) Як називаються рівняння $x + 5 = 0$ і $3x = -15$, якщо вони мають лише один і той же корінь — число -5?

2. 1) Серед чисел а)–в) вказати те, яке є коренем рівняння $3x = x + 18$.
а) 8; б) 9; в) -9.
2) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $4x - 2 = 13$, якщо перенести доданок -2 з його лівої частини в праву.
а) $4x = 13 - 2$; б) $4x = 13 + 2$; в) $4x = -13 + 2$.
3) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, яке утвориться з рівняння $\frac{x+4}{2} = 3x + 1$, якщо обидві його частини помножити на 2.
а) $x + 4 = 3x + 2$; б) $x + 4 = 6x + 2$; в) $x + 4 = 6x + 1$.

3. *Записати рівняння, яке утвориться з рівняння:*
1) $4x - 7 = 13$, якщо перенести доданок -7 з лівої його частини в праву;
2) $7x - x = 42$, якщо звести подібні доданки;
3) $9x = 36$, якщо обидві його частини поділити на 9.

ТЕМА 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- **Поняття про лінійні рівняння з однією змінною**
- **Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною**
- **Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь з однією змінною**

Виклад теорії

1. Поняття про лінійне рівняння з однією змінною

(1)

При виконанні рівносильних перетворень рівнянь з метою їх спрощення у багатьох випадках отримують рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа ($5x = 4$; $-7x = 3$; $0{,}1x = 4$).

Зокрема, до рівнянь такого виду зводять розв'язування рівнянь, у яких обидві частини є лінійними виразами. Наприклад, рівняння $4x - 7 = 5x + 6$; $3x - 4 = 2x$; $7x = 6x - 2$; $5x + 7 = 0$.

Лінійним рівнянням з однією змінною **називають рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — числа.**

Приклади.

1. $4x = 12$; $\frac{1}{3}x = -5$; $0{,}1x = 6$ — лінійні рівняння зі змінною x.

2. $9y = 27$, $\frac{2}{5}y = 3$ — лінійні рівняння зі змінною y.

Якщо у лінійному рівнянні $ax = b$ коефіцієнт $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають *рівнянням першого степеня*.

Приклад.

$4x = 12$; $0{,}1x = 14$; $\frac{2}{3}x = 16$ — рівняння першого степеня.

У лінійному рівнянні $ax = b$ ліва та права частини є окремими випадками лінійних виразів.

Зауваження. У літературі лінійним рівнянням інколи називають рівняння виду $ax + b = 0$.

2. Розв'язування лінійних рівнянь

(2)

Якщо до лінійного рівняння першого степеня $ax = b$ застосувати правило ділення рівняння на число, відмінне від нуля, одержимо рівносильне йому рівняння $x = b : a$ або $x = \frac{b}{a}$, яке має тільки один корінь — число $\frac{b}{a}$. Число $\frac{b}{a}$ є єдиним коренем лінійного рівняння $ax = b$ $(a \neq 0)$.

Приклад.

Коренем рівняння $3x = 2$ є число $\frac{2}{3}$.

Якщо в рівнянні $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ перенести доданок b у праву частину, то одержимо рівняння $ax = -b$. Оскільки $a \neq 0$, то за правилом ділення на число, відмінне від нуля, одержимо рівняння $x = -\frac{b}{a}$, яке має єдині **корінь — число $-\frac{b}{a}$. Отже, коренем рівняння $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ є число $-\frac{b}{a}$**

Приклад.

Коренем рівняння $3x + 2 = 0$ є число $-\frac{2}{3}$.

Лінійне рівняння $0 \cdot x = 0$. Коренем лінійного рівняння $0 \cdot x = 0$ є бу **яке число, оскільки при будь-якому значенні x ліва частина рівн дорівнює 0 і рівняння перетворюється у правильну числову рів $0 = 0$.**

Лінійне рівняння $0 \cdot x = c$ $(c \neq 0)$. Оскільки ліва частина рівнян будь-якому значенні x дорівнює 0, а права частина — числу c, в **ному від 0, то не існує таких значень змінної x, при яких утво правильна числова рівність. Отже, лінійне рівняння виду $0 \cdot x = c$ не має коренів.**

Рівняння $0 \cdot x = 2$; $0 \cdot x = -0{,}4$; $0 \cdot x = \frac{2}{3}$ не мають коренів.

3. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь з однією змінно

3

Щоб звести рівняння вигляду $ax + bx = c$, де x — змінна, a, числа, до лінійного, потрібно звести подібні доданки у лівій

Приклад.

$-7x + 12x = 15$; $5x = 15$.

4

Щоб звести рівняння вигляду $ax + b = cx + d$, де x — змінна, a, b, c і d — числа, до лінійного за правилами рівносильних перетворень, потрібно:

- **перенести доданок cx у ліву частину, помінявши його знак, а доданок b — у праву частину, помінявши його знак (одержимо $ax - cx = d - b$);**
- **звести подібні доданки (одержимо $(a - c)x = d - b$).**

  Приклад.

  $15x - 3 = 8x + 39$; $15x - 8x = 39 + 3$; $7x = 42$.

5

Щоб звести рівняння вигляду $\dfrac{x+m}{a} + \dfrac{x+n}{b} = c$, де x — змінна, a, b, c, m і n — числа, до лінійного за правилами рівносильних перетворень, потрібно:

- **помножити обидві частини рівняння на добуток чисел a і b або на їх найменше спільне кратне;**
- **розкрити дужки у лівій частині рівняння та звести подібні доданки;**
- **перенести доданок, який не містить змінної, з лівої частини рівняння у праву.**

  Приклад.

  $\dfrac{3x+5}{5} - \dfrac{x+1}{3} = 1$. Помножимо обидві частини рівняння на 15 і розкриємо дужки: $\left(\dfrac{3x+5}{5} - \dfrac{x+1}{3}\right) \cdot 15 = 15$; $3(3x + 5) - 5(x + 1) = 15$; $9x + 15 - 5x - 5 = 15$; $4x + 10 = 15$; $4x = 5$; $x = 5 : 4$; $x = 1{,}25$.

За означенням модуля числа, якщо $|x - a| = b$, то $x - a = b$ і $x - a = -b$. **Тому рівняння виду $|x - a| = b$, де $b > 0$, рівносильне сукупності двох рівнянь $x - a = b$ і $x - a = -b$. Отже, розв'язками даного рівняння є числа $x_1 = b + a$, $x_2 = -b + a$.**

Приклад.

Рівняння $|x - 4| = 10$ рівносильне сукупності двох рівнянь $x - 4 = 10$ і $x - 4 = -10$, тобто його корені дорівнюють $x_1 = 10 + 4 = 14$, $x_2 = -10 + 4 = -6$.

Рівняння виду $|x - a| = b$, де $b < 0$, не має коренів за означенням модуля, оскільки ліва частина рівняння при будь-яких значеннях x є невід'ємним числом, а права — від'ємним числом.

Приклад.

Рівняння $|x+5|=-3$ не має коренів.

Рівняння виду $|x-a|=0$ має один корінь $x=a$, оскільки рівняння перетворюється у правильну числову рівність тоді і тільки тоді, коли $x-a=0$.

Приклад.

$|x-3|=0$, $x-3=0$, $x=3$.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Поняття про лінійне рівняння з однією змінною

1

№31.

1\. 1) Як називається рівняння виду $ax=b$, де x — змінна, a і b — дані числа?

2) Як називається лінійне рівняння $ax=b$, якщо $a \neq 0$?

а) Рівнянням нульового степеня;

б) рівнянням першого степеня.

2\. 1) Середрівнянь а)–е) вказати три, які є лінійними.

а) $5x=7$; б) $-0{,}1x=13$; в) $-4x^2=7$;

г) $\frac{4}{3}x=-5$; д) $0{,}5x^3=4$; е) $4x^2-3=0$.

2) Серед рівнянь а)–е) вказати три, у яких коефіцієнт біля змінної дорівнює 0.

а) $0 \cdot x=-5$; б) $2x=0$; в) $-4y=0$;

г) $0 \cdot x=-0{,}2$; д) $0 \cdot y=0$; е) $2x=10$.

3) Серед рівнянь а)–е) вказати три, які є рівняннями першого степеня.

а) $4x=7$; б) $-0{,}3y=0$; в) $0 \cdot x=7$;

г) $0 \cdot z=8$; д) $\frac{x}{2}=14$; е) $0 \cdot x=0$.

3\. *Записати три лінійних рівняння з...*

1) коефіцієнтом $\frac{1}{3}$ біля змінної.

2) коефіцієнтом 0 біля змінної.

3) Записати три рівняння першого степеня.

②

№32.

1. **1)** Скільки коренів має рівняння $5x = 2$?

   2) Скільки коренів має будь-яке рівняння першого степеня $ax = b$ $(a \neq 0)$?

   3) При якому значенні x рівняння $5x = 2$ перетворюється у правильну числову рівність?

   а) $\frac{5}{2}$; **б)** $\frac{2}{5}$; **в)** 7.

   4) Чому дорівнює корінь рівняння першого степеня $ax = b$ $(a \neq 0)$?

   а) ab; **б)** $\frac{a}{b}$; **в)** $\frac{b}{a}$.

   5) Щоб знайти корінь рівняння $7x = 2$, потрібно...
   а) $7 : 3$; **б)** $2 : 7$; **в)** $2 \cdot 7$.

2. *Вказати число, яке є коренем рівняння:*

   1) $2x = 7$:

   а) $\frac{2}{7}$; **б)** $\frac{7}{2}$, тобто 3,5; **в)** 9.

   2) $3x = 2$:

   а) $\frac{2}{3}$; **б)** 6; **в)** $\frac{3}{2}$, тобто 1,5.

   3) $-4x = 20$:

   а) 5; **б)** -5; **в)** $-\frac{4}{20}$, тобто $-\frac{1}{5}$.

   4) $-2x = -16$:

   а) -8; **б)** 8; **в)** $(-2):(-16)$, тобто $\frac{1}{8}$.

3. *Знайти корінь рівняння (1–4):*

   1) $3x = 11$. **2)** $5x = 4$. **3)** $-3x = -24$. **4)** $-7x = 28$.

№33.

1. **1)** Чому дорівнює значення виразу $0 \cdot x$ при будь-якому значенні змінної x?
   а) 1; **б)** 0; **в)** x.

   2) Чи існують значення x, при яких рівняння $0 \cdot x = -5$ перетворюєтся у правильну числову рівність?

3) Скільки коренів має лінійне рівняння $0 \cdot x = -5$?
а) Один; б) безліч; в) жодного.

4) Скільки коренів має лінійне рівняння $0 \cdot x = b$, якщо $b \neq 0$?
а) Один; б) безліч; в) жодного.

5) Скільки коренів має лінійне рівняння $0 \cdot x = 0$?
а) Один; б) безліч; в) жодного.

2. 1) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, які не мають кореня.
а) $0 \cdot x = 4$; б) $0 \cdot x = -0{,}7$; в) $5x = 0$;
г) $0 \cdot x = \frac{1}{3}$; д) $0 \cdot x = 0$; е) $0{,}1x = -10$.

3. 1) Записати три лінійних рівняння, які не мають коренів.
2) Записати лінійне рівняння, яке має безліч коренів.

Розв'язати рівняння:

3) $0 \cdot x = -8$. 4) $0 \cdot x = 12$.

5) $0 \cdot x = -0{,}4$. 6) $0 \cdot x = -\frac{1}{2}$.

№34.

1. 1) Вказати корінь рівняння $5x = 0$.
а) 0; б) 5; в) 1.

2) Яке з чисел є коренем рівняння першого степеня $ax = 0$ $(a \neq 0)$?
а) a; б) 0; в) 1.

3) Скільки коренів має рівняння першого степеня $ax = 0$?
а) Один; б) багато; в) безліч.

2. 1) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, кожне з яких має тільки один корінь — число 0.
а) $4x = 0$; б) $\frac{1}{2}x = 0$; в) $0 \cdot x = -4$;
г) $0 \cdot x = 0$; д) $-7x = 0$; е) $0 \cdot x = -9$.

3. 1) Записати три рівняння, коренем кожного з яких є число 0.

Розв'язати рівняння:

2) $14x = 0$. 3) $-8x = 0$. 4) $\frac{1}{4}x = 0$.

№35*.

1) При якому значенні a рівняння $ax = 5$ не має коренів?
а) $a = 0$; б) $a \neq 0$.

2) При якому значенні a рівняння $ax = 0$ має безліч коренів?
а) $a = 0$; б) $a \neq 0$.

3) Вказати значення b, при якому рівняння $7x = b$ має корінь, що дор внює 0.
   а) $b = 0$; б) $b \neq 0$.
4) За якої умови рівняння $(a - 1) \cdot x = 5$ має один корінь?
   а) $a - 1 = 0$, тобто $a = 1$; б) $a - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$.
5) За якої умови рівняння $(a + 2) \cdot x = 7$ не має коренів?
   а) $a = -2$; б) $a \neq -2$.
6) За якої умови коренем рівняння $7x = b - 2$ є число 0?
   а) $b = 0$; б) $b = 2$.

3. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь з однією змінною

(3)

№36.

1. 1) Серед рівнянь а)–е) вказати три, які зводяться до лінійного рівнян зведенням подібних доданків у лівій частині:
   а) $4x - x = 9$; б) $7 + x = 8$; в) $4x - 1 = 5$;
   г) $17x + 3x = 60$; д) $5x = x - 3$; е) $7x + 3x = 12$.
2. *До якого з наведених лінійних рівнянь зводиться рівняння?*
   1) $5x + 2x = 3$:
   а) $3x = 3$; б) $7x = 3$; в) $7x = 0$.
   2) $4x - x = 5$:
   а) $2x = 5$; б) $5x = 5$; в) $3x = 5$.
   3)* $ax + bx = c$:
   а) $abx = c$; б) $(a + b)x = c$; в) $(a - b)x = c$.
   4)* $ax - x = c$:
   а) $(a + 1)x = c$; б) $ax = c$; в) $(a - 1)x = c$.
   5)* $ax + x = c$:
   а) $ax = c$; б) $(a + 1)x = c$; в) $(a - 1)x = c$.
3. *Звести рівняння до лінійного (1–4):*
   1) $12x + x = 26$. 2) $11x - x = 40$. 3) $17x + 3x = 0$. 4) $0{,}2x + x = 14$

(4)

№37.

1. 1) Як перетворити рівняння $4x = x - 5$ у лінійне?
   а) Перенести доданок x, не змінюючи його знака;
   б) перенести доданок x, змінивши його знак на протилежний.

2. *До якого з наведених лінійних рівнянь зводиться рівняння:*

1) $5x = x + 7$?

а) $4x = 7$; б) $6x = 7$; в) $4x = -7$.

2) $5x = 8 - x$?

а) $4x = 8$; б) $6x = 8$; в) $6x = -8$.

3) $7x = 2x + 3$?

а) $9x = 3$; б) $5x = 3$; в) $5x = -3$.

4) $6x = 9 - 5x$?

а) $x = 9$; б) $11x = 0$; в) $11x = 9$.

3. *Звести до лінійного рівняння:*

1) $4x = x + 12$. 2) $9x = 5 - x$. 3) $10x = 2x + 9$. 4) $6x = 5 - 2x$.

5

№38.

Вказати рівняння, яке утвориться після розкривання дужок у лівій частині рівняння:

1) $\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)\cdot 6 = 1$:

а) $3x+\frac{x}{3}=1$; б) $\frac{x}{2}+2x=1$; в) $3x+2x=1$.

2) $\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{6}\right)\cdot 6 = 5$:

а) $2x-x=30$; б) $2x-x=5$; в) $3x-x=5$.

3) $\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)\cdot 12 = 1$:

а) $3x+2x=12$; б) $3x+2x=1$; в) $3x+\frac{x}{2}=1$.

Серед чисел а)–г) вказати число, на яке зручно помножити обидві частини рівняння (4–6) для перетворення його у лінійне:

4) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=2$:

а) 3; б) 5; в) 2; г) 15.

5) $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=2$:

а) 10; б) 15; в) 30; г) 2.

6) $\frac{x}{6}+\frac{x}{8}=3$:

а) 6; б) 8; в) 12; г) 24.

7)* **Вказати число, на яке зручно помножити обидві частини рівняння** $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$ для перетворення його у лінійне:

а) ac; б) bc; в) ab.

8)* *Доповнити запис.*

Щоб перетворити рівняння виду $\frac{x+m}{a}+\frac{x+n}{b}=c$ **у лінійне, потрібно помножити обидві частини рівняння на...**

а) добуток чисел a і c або їхнє найменше спільне кратне;

б) добуток чисел a і b або їхнє найменше спільне кратне;

в) добуток чисел b і c або їхнє найменше спільне кратне.

№39.

1) При яких значеннях x виконується рівність $|x| = 14$?
   а) Тільки при 14;
   б) тільки при -14;
   в) при $x = 14$ або $x = -14$.
2) Вказати всі корені рівняння $|x| = 25$.
   а) 25; б) 5 і -5; в) -25; г) -25 або 25.
3) Чи існує число, у якого модуль (абсолютна величина) дорівнює -12?
4) Скільки коренів має рівняння $|x| = -12$?
   а) Один; б) два; в) жодного; г) безліч.
5) Серед рівнянь а)–е) вказати три, які не мають коренів:
   а) $|x| = 0{,}7$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -9$;
   г) $|x| = -4{,}3$; д) $|x| = 5{,}6$; е) $|x| = -\frac{3}{4}$.
6) Яким двом рівнянням рівносильне рівняння $|x + 3| = 4$?
   а) $x - 3 = 4$; $x - 3 = -4$; б) $x + 3 = 4$; $x + 3 = -4$;
   в) $x + 3 = 8$; $x + 3 = -8$.
7) Скільки коренів має рівняння $|x - 7| = 5$?
   а) Один; б) два; в) жодного.
8) Скільки коренів має рівняння $|x + 5| = -9$?
   а) Один; б) два; в) жодного.
9) Скільки коренів має рівняння $|x - 4| = 0$?
10) Серед рівнянь а)–е) вказати три, які мають два корені.
   а) $|2x + 1| = 4$; б) $|x + 5| = 0$; в) $|x - 8| = 12$;
   г) $|x + 5| = -5$; д) $|x - 7| = 14$; е) $|x - 3| = -0{,}1$.

Розв'язати рівняння:

11) $|x - 5| = 10$. 12) $|x + 9| = 11$. 13) $|x - 4| = 0$.

14) $|x + 5| = 0$. 15) $|x + 7| = -3$.

Тренувальні вправи

№40.

Розв'язати рівняння:

1. 1) $7x = 21$; 2) $7x = -21$; 3) $-3x = 15$; 4) $-12x = -36$.
2. 1) $5x = 0$; 2) $3x = 2$; 3) $4x = -3$; 4) $-5x = 3$.
3. 1) $0 \cdot x = 2$; 2) $0 \cdot x = -4$; 3) $0 \cdot x = -0,5$; 4) $0 \cdot x = -2,4$.
4. 1) $\frac{x}{2} = 1$; 2) $\frac{x}{4} = 3$; 3) $\frac{x}{5} = -6$; 4) $\frac{x}{7} = -3$.

№41.

Звести рівняння до лінійного:

1. 1) $9x = x - 16$; 2) $13x = 3x + 8$; 3) $7x = 5 - x$; 4) $9x = 4 - 3x$.
2. 1) $7x - 1 = 5$; 2) $4x + 1 = 3$; 3) $10x - 2 = 5$; 4) $15x - 8 = 7$.
3. *Звести до лінійного рівняння:*

1) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 1$, помноживши обидві його частини на 10 та звівши подібні доданки;

2) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2$, помноживши обидві його частини на 12 та звівши подібні доданки;

3) $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = 1$, помноживши обидві його частини на 24 та звівши подібні доданки;

4) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 2$, помноживши обидві його частини на одне й те ж число та звівши подібні доданки.

Завдання для самоперевірки

№42. Варіант 1

1. 1) Як називається рівняння $4x = 17$?

2) Вказати число, яке є коренем рівняння першого степеня $ax = c$ $(c \neq 0)$:

а) ac; б) $\frac{a}{c}$; в) $\frac{c}{a}$.

3) Скільки коренів має рівняння $0 \cdot x = -12$?

а) Один; б) безліч; в) жодного.

2. 1) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, які не мають коренів:
а) $0 \cdot x = -0{,}2$; б) $0 \cdot x = 4$; в) $4x = 0$;
г) $11x = 11$; д) $0 \cdot x = \frac{2}{3}$; е) $-2x = 0$.

2) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, які є рівняннями першого степеня:
а) $0 \cdot x = 0$; б) $4x = -3$; в) $2x = 0$;
г) $0 \cdot x = -5$; д) $2x = -5$; е) $0 \cdot x = 2$.

3) Вказати лінійне рівняння, рівносильне рівнянню $9x = 3x + 5$:
а) $12x = 5$; б) $6x = 5$; в) $6x = -5$.

3. 1) Записати три рівняння, які не мають коренів.
2) Знайти корінь рівняння $7x = -3$.
3) Записати лінійне рівняння, рівносильне рівнянню $5x - 4 = 12$.

№43. Варіант 2

1. 1) Як називається рівняння $-2x = 5$?
2) Вказати число, яке є коренем лінійного рівняння $3x = 2$:
а) 6; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$.
3) Скільки коренів має рівняння $0 \cdot x = 0$?
а) Один; б) безліч; в) жодного.

2. 1) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, які мають корінь:
а) $0 \cdot x = 4$; б) $0{,}1x = -8$; в) $7x = 0$;
г) $0 \cdot x = -8$; д) $0 \cdot x = -6{,}3$; е) $\frac{1}{3}x = 7$.

2) Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати три, які є рівняннями першого степеня:
а) $0 \cdot x = 0$; б) $0 \cdot x = 7$; в) $7x = 0$;
г) $0{,}4x = 9$; д) $0 \cdot x = -12$; е) $\frac{2}{3}x = 9$.

3) Вказати лінійне рівняння, рівносильне рівнянню $17x - 2 = 8$:
а) $17x = 10$; б) $17x = 6$; в) $17x = 8$.

3. 1) Записати три лінійних рівняння, які мають корені.
2) Знайти корінь рівняння $-9x = 5$.
3) Записати лінійне рівняння, рівносильне рівнянню $14x = 4x + 3$.

Завдання на відтворення

№44.

Середній рівень

1. Навести приклад рівняння зі змінною x.
2. Дати означення кореня рівняння. Встановити, яке з чисел 0; 3; 4 є коренем рівняння $2x - 1 = x + 3$.
3. Що означає розв'язати рівняння?
4. Дати означення лінійного рівняння і навести три приклади лінійних рівнянь.
5. Дати означення рівняння першого степеня. У якому випадку лінійне рівняння $cx = d$ є рівнянням першого степеня?
6. Записати корінь рівняння першого степеня $ax = b$.

Достатній рівень

1. Які рівняння називають рівносильними?
2. Сформулювати правило:
   1) перенесення доданків у рівнянні;
   2) множення (ділення) обох частин рівняння на число.
3. За якої умови рівняння $ax = b$ не має розв'язків?
4. Записати лінійне рівняння розв'язками якого є будь-яке число.

Завдання на застосування

№45. Варіант 1

Середній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $-8x = 24$; 2) $13x - 2 = 24$.
2. 1) $\frac{x}{7} = -8$; 2) $3x - 4 = x + 10$.
3. 1) $5x - 18 = 2(x - 3)$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$.

Достатній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $5(x - 3) - 2(x + 7) = 7$; 2) $\frac{x-3}{5} - \frac{x}{2} = 0$.

2. $2{,}7x + 3{,}2 = 3(2{,}4 - 1{,}1x)$.

3. $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{5x-2}{4} = 2$.

Високий рівень

Розв'язати рівняння (1–2):

1. 1) $\dfrac{3x+1}{2} + \dfrac{4x+3}{5} - \dfrac{7x-1}{10} = 6$;

   2) $0{,}5 - 2x - (0{,}7x - 2{,}1) = 0{,}1 - 0{,}9(3x - 1)$.

2. $|5x + 4| = 34$.

3. Знайти всі натуральні значення a, при яких корінь рівняння $(a - 1)\,x = 15$ є натуральним числом.

№46. Варіант 2

Середній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $7x = -4$; 2) $17x + 2 = 53$.

2. 1) $\dfrac{x}{5} = 13$; 2) $5x - 8 = 3x - 24$.

3. 1) $7x - 6 = 2(x + 12)$; 2) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{5} = 21$.

Достатній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $10(2x - 1) - 3(4x - 5) = 66$; 2) $\dfrac{x+4}{3} + \dfrac{x}{2} = 0$.

2. $14x - 13{,}5 = 3(2x - 2{,}5)$.

3. $\dfrac{8x-3}{7} - \dfrac{3x+1}{10} = 2$.

Високий рівень

Розв'язати рівняння (1–2):

1. 1) $\dfrac{5x-4}{2} - \dfrac{2(x+1)}{9} - \dfrac{x+10}{8} = 6$; 2) $5(5x - 1) + 0{,}2x = 2{,}7x - 6{,}5 - 0{,}5x$.

2. $|2x - 3| = 17$.

3. Знайти всі натуральні значення a, при яких корінь рівняння $(a - 3)\,x = 80$ є натуральним числом (x — змінна).

№47. Варіант 3

Середній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $-36x = 12$; 2) $12x - 3 = 27$.

2. 1) $\frac{x}{4} = -9$; 2) $5x - 4 = 2x + 11$.

3. 1) $5x - 9 = 2(x + 3)$; 2) $\frac{x}{3} - \frac{x}{7} = 8$.

Достатній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $3(2x + 1) - 7(x - 1) = 4$; 2) $\frac{x-6}{7} + \frac{x}{3} = 0$.

2. $(2x - 1)(0{,}1x + 5)\left(\frac{2}{3}x + 18\right) = 0$.

3. $\frac{6x+3}{11} - \frac{1-3x}{2} = 20$.

Високий рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $\frac{x-1}{5} - \frac{x}{3} = \frac{x-2}{2} - \frac{7x-12}{10}$;
   2) $3x(14x - 11) - 7x(6x - 5) = 3(2x + 5) - 5x$.
2. $5ax + 9x = a$, де x — змінна, a — параметр.
3. $\big||x| - 1\big| = 9$.

№48. Варіант 4

Середній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $32x = -8$; 2) $15x + 3 = -42$.

2. 1) $\frac{x}{7} = -5$; 2) $9x - 2 = 4x - 22$.

3. 1) $9x - 2 = 4(x + 7)$; 2) $\frac{x}{4} - \frac{x}{9} = 20$.

Достатній рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $8(9 + 2x) - 5(1 - 3x) = 5$; 2) $\frac{x-4}{7} - \frac{x}{3} = 0$.
2. $(3x - 2)(0{,}2x - 1{,}8)\left(\frac{3}{4}x - 24\right) = 0$.
3. $\frac{6x+7}{7} - \frac{5x-3}{8} = 3$.

Високий рівень

Розв'язати рівняння (1–3):

1. 1) $\frac{8x-2}{4} + \frac{5x+3}{3} - \frac{9x-5}{2} = 2$;
   2) $7x(4x - 1) - 2x(14x - 3) = 2(x + 4) - 5x$.
2. $5ax - 6x = a$, де x — змінна, a — параметр.
3. $\left||x| - 4\right| = 13$.

ТЕМА 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ

Виклад теорії

Основні кроки під час розв'язування задач:

- **позначити через x деяке число чи значення величини;**
- **виразити через x інші невідомі числа, допоміжні невідомі значення величини на основі умови задачі або залежностей між величинами;**
- **скласти вираз, числове значення якого відоме за умовою задачі**

  або

  скласти два вирази, що за умовою задачі набувають рівних значень;
- **скласти рівняння, у якому ліва частина — складений вираз, а права частина — його значення**

  або

  скласти рівняння, у якому ліва і права частини — вирази, що набувають рівних значень;
- **розв'язати одержане рівняння, використовуючи правила рівносильних перетворень цілих рівнянь.**

Приклади.

Задача 1. Одне з чисел утричі більше від іншого, а їх сума дорівнює 40. Знайти менше з чисел.

Розв'язання

1. Позначимо через x менше число.
2. Виразимо через x більше число: $3x$.
3. Складемо вираз, який є сумою цих чисел: $x + 3x$.
4. Складемо рівняння за умовою задачі: $x + 3x = 40$.
5. Розв'язуємо рівняння:

$x + 3x = 40$; $4x = 40$; $x = 10$.

Отже, менше число дорівнює 10.

Задача 2. За два дні учні зібрали 70 кг лікарських рослин, причому за другий день вони зібрали на 12 кг більше, ніж за перший. Скільки кілограмів лікарських рослин зібрали учні за перший день?

Розв'язання

Нехай за перший день учні зібрали x кг лікарських рослин.
Тоді за другий день вони зібрали $(x + 12)$ кг.

За два дні учні зібрали $(x + (x + 12))$ кг.
Складаємо та розв'язуємо рівняння: $x + (x + 12) = 70$; $x + x + 12 = 70$; $2x + 12 = 70$; $2x = 58$; $x = 29$.
Отже, за перший день учні зібрали 29 кг лікарських рослин.

Задача 3. У Михайлика було марок у 4 рази більше, ніж в Андрійка. Якщо Михайлик подарує Андрійкові 60 марок, то в Андрійка марок стане удвічі менше, ніж у Михайлика. Скільки марок було у кожного хлопчика спочатку?

Розв'язання

1. Нехай у Андрійка було x марок.
2. Тоді в Михайлика було $4x$ марок.
Якщо Михайлик подарує 60 марок, то у нього стане $(4x - 60)$ марок, а в Андрійка — $(x + 60)$ марок.
3. За умовою, в Андрійка стане удвічі менше марок, ніж у Михайлика. Тому рівними мають бути значення виразів $4x - 60$ і $2(x + 60)$.
4. Складаємо і розв'язуємо рівняння: $4x - 60 = 2(x + 60)$.
$4x - 60 = 2(x + 60)$; $4x - 60 = 2x + 120$; $4x - 2x = 120 + 60$; $2x = 180$; $x = 90$.
Отже, в Андрійка було 90 марок, а в Михайлика — $4 \cdot 90 = 360$ (марок).

При розв'язуванні задач з кількома величинами допоміжні невідомі виражають через x на основі залежностей між величинами (наприклад, між відстанню, швидкістю і часом).

Приклади.

Задача 1. Відстань від одного села до іншого пішохід проходить за 3 год, а спортсмен — за 2 год. Яка відстань між селами, якщо швидкість спортсмена на 2 км/год більша від швидкості пішохода?

Розв'язання

1. Позначимо через x км відстань між селами.
2. Виразимо через x швидкість пішохода та швидкість спортсмена: $\frac{x}{3}$ км/год — швидкість пішохода; $\frac{x}{2}$ км/год — швидкість спортсмена (використали залежність між швидкістю v, шляхом s та часом t: $v = \frac{s}{t}$).
3. Складаємо вираз, який є різницею швидкостей: $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$.
4. Складаємо рівняння: $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$ (за умовою, швидкість спортсмена на 2 км/год більша від швидкості пішохода).
5. Розв'язуємо рівняння: $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$; $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) \cdot 6 = 2 \cdot 6$; $3x - 2x = 12$; $x = 12$.
Отже, відстань між селами дорівнює 12 км.

Задача 2. За 10 год теплохід проходить за течією річки таку ж відстань, як за 11 год проти течії річки. Знайти власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

Розв'язання

1. Позначимо через x км/год власну швидкість теплохода.
2. Тоді $(x+1)$ км/год — швидкість теплохода за течією річки, $(x-1)$ км/год — швидкість теплохода проти течії річки.
3. $10 \cdot (x+1)$ км — відстань, яку пройшов теплохід за 10 год за течією річки, $11 \cdot (x-1)$ км — відстань, яку пройшов теплохід за 11 год проти течії річки.
4. Складаємо рівняння: $10 \cdot (x+1) = 11 \cdot (x-1)$.

$10 \cdot (x+1) = 11 \cdot (x-1)$; $10x + 10 = 11x - 11$; $10x - 11x = -11 - 10$; $-x = -21$; $x = 21$.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

№49.

1. ***Дано два числа. Перше число позначено через x. Чому дорівнює друге число, якщо воно...***

1) на 10 більше від першого?
   а) $x - 10$; б) $x + 10$; в) $10x$;
2) на 5 менше від першого?
   а) $x - 5$; б) $x + 5$; в) $\frac{x}{5}$;
3) утричі більше від першого?
   а) $x + 3$; б) $3x$; в) $\frac{x}{3}$;
4) у 4 рази менше від першого?
   а) $x - 4$; б) $4x$; в) $\frac{x}{4}$.

2. *Дано два числа. Перше число позначено через x. Чому дорівнює друге число, якщо воно...*

1) становить 0,6 від першого?
   а) $x + 0,6$; б) $0,6x$; в) $\frac{x}{0,6}$;
2) становить 40% від першого?
   а) $40x$; б) $0,04x$; в) $0,4x$;
3) становить 150% від першого?
   а) $150x$; б) $1,5x$; в) $15x$.

3. *Дано два числа. Друге число позначено через x. Виразити через x перше число, якщо воно...*

1) на 17 менше від другого;
2) на 12 більше від другого;
3) у 5 разів більше від другого;
4) становить 0,3 від другого;
5) становить 75% від другого;
6) становить 130% від другого.
7) Одне з чисел на 15 більше від іншого. Менше з чисел позначено через x. Виразити через x більше число.
8) Одне з додатних чисел у 6 разів більше від іншого. Менше з цих чисел позначене через x. Виразити через x більше число.
9) Середня швидкість потяга становить x км/год. Яку відстань він проїде за 4 години?
10) Швидкість човна у стоячій воді дорівнює x км/год. Яка його швидкість за течією річки, якщо швидкість течії річки 2 км/год?
11) Швидкість течії річки дорівнює 3 км/год. Яка швидкість човна проти течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді позначено через x км/год?
12) Поле, площа якого x га, було засіяно за 4 дні, порівну кожного дня. Виразити через x площу, що засівали за один день.
13) За 5 год робітник виготовив x деталей. Виразити через x кількість деталей, яку виготовляв робітник за одну годину.
14) Відстань, що дорівнює x км, мотоцикліст проїжджає за 3 год. Виразити через x його середню швидкість руху.

050.

1. 1) Одне з чисел у 4 рази більше від іншого, а їх сума дорівнює 50. Менше з чисел позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі:

   а) $x + x + 4 = 50$; б) $x + 4x = 50$; в) $x + x : 4 = 50$?

2) Сума двох чисел дорівнює 56. Одне з чисел на 10 менше від іншого. Менше з чисел позначене через x. Вказати рівняння, складене для розв'язання задачі:

   а) $x + (x + 10) = 56$; б) $x + (x - 10) = 56$; в) $x + 10x = 56$.

3) Одне з додатних чисел у 5 разів більше від іншого, а їх різниця дорівнює 32. Менше з чисел позначено через x. Яке з рівнянь відповідає умові задачі:

   а) $x + 5 - x = 32$; б) $5x + x = 32$; в) $5x - x = 32$?

4) Менше з чисел становить 0,8 від більшого, а їх сума дорівнює 36. Більше з чисел позначено через x. Яке з рівнянь відповідає умові задачі:

а) $x - 0{,}8x = 36$; б) $x + 0{,}8x = 36$; в) $x + 1{,}8x = 36$?

2. 1) **У першій пачці утричі більше зошитів, ніж у другій, а разом у них 80 зошитів. Скільки зошитів у кожній пачці? Кількість зошитів у другій пачці позначена через x. Вказати рівняння, що відповідає умові задачі:**

а) $3x + x = 80$; б) $3x - x = 80$; в) $(x + 3) - x = 80$.

2) **У другій бригаді утричі більше робітників, ніж у першій. Скільки робітників у першій бригаді, якщо у другій на 12 робітників більше. Кількість робітників у першій бригаді позначена через x. Вказати рівняння, що відповідає умові задачі:**

а) $3x + x = 12$; б) $3x - x = 12$; в) $(x + 3) - x = 12$.

3. *Дано два числа. Позначити перше число через x, виразити друге число через x і скласти рівняння, якщо:*

1) друге число більше від першого у 7 разів, а їх сума дорівнює 72;
2) друге число більше від першого у 8 разів, а їх різниця дорівнює 56;
3) друге число на 15 більше від першого, а їх сума дорівнює 105;
4) друге число становить 0,9 від першого, а їх сума дорівнює 38.

№51.

1. 1) **Відстань між пунктами А і В позначена через x км. Виразити через x час руху велосипедиста від пункту А до пункту В, якщо його швидкість дорівнює 30 км/год.**

а) $\frac{30}{x}$ год; б) $30x$ год; в) $\frac{x}{30}$ год.

2) Швидкість руху потяга дорівнює 70 км/год. За скільки годин він проходить відстань, що дорівнює x км:

а) за $70x$ год; б) за $\frac{x}{70}$ год; в) за $\frac{70}{x}$ год?

3) **Відстань між містами дорівнює 300 км. За скільки годин проїде цю відстань автомобіль, рухаючись зі швидкістю x км/год?**

а) За $\frac{300}{x}$ год; б) за $\frac{x}{300}$ год; в) за $300x$ год.

4) **Робітник виготовив 240 деталей за x год. Скільки деталей виготовляв робітник за 1 годину?**

а) $\frac{240}{x}$ дет.; б) $\frac{x}{240}$ дет.; в) $240x$ дет.

5) Робітник виготовив x деталей за 7 год. Скільки деталей виготовляв робітник за 1 годину?

а) $7x$ дет.; б) $\frac{x}{7}$ дет.; в) $\frac{7}{x}$ дет.

6) За годину робітник виготовив 12 деталей. За скільки годин він виготовив x деталей?

а) $\frac{12}{x}$ год; б) $12x$ год; в) $\frac{x}{12}$ год.

7) З пункту А у пункт В виїхав велосипедист зі швидкістю 30 км/год, а назад він повертався зі швидкістю 20 км/год. Відстань між пунктами позначено через x км. Чому дорівнює загальний час руху?

а) $\left(\frac{x}{30}+\frac{x}{20}\right)$ год; б) $\left(\frac{30}{x}+\frac{20}{x}\right)$ год; в) $(30x+20x)$ год.

2\. 1) З пункту А у пункт В велосипедист їхав зі швидкістю 30 км/год, а назад він повертався зі швидкістю 25 км/год. На весь шлях він затратив 6 год. Відстань між пунктами позначена через x км. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $\frac{x}{25}-\frac{x}{30}=6$; б) $\frac{30}{x}+\frac{25}{x}=6$; в) $\frac{x}{30}+\frac{x}{25}=6$.

2) З пункту А у пункт В автомобіль їхав зі швидкістю 90 км/год, а назад він повертався зі швидкістю 80 км/год, і тому затратив на це на 1 год більше часу. Відстань між пунктами А та В позначено через x км. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\frac{x}{80}+\frac{x}{90}=1$; б) $\frac{x}{80}-\frac{x}{90}=1$; в) $\frac{x}{90}-\frac{x}{80}=1$.

3) Одну й ту ж кількість деталей робітник виготовив за 3 год, а його учень — за 4 год, оскільки робітник виготовляв за годину на 10 деталей більше. Кількість деталей, що становили завдання, позначено через x. Вказати рівняння, що відповідає умові задачі.

а) $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}=10$; б) $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=10$; в) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=10$.

3\. 1) За 5 год човен за течією річки проходить такий же шлях, як і за 6 год у стоячій воді. Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Для знаходження власної швидкості човна її позначено через x км/год. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $5x=6(x+2)$; б) $5(x+2)=6x$; в) $5(x+2)=6(x-2)$.

2) Відстань між двома пристанями човен, рухаючись за течією річки, проходить за 6 год, а рухаючись назад проти течії, він проходить її за 8 год. Швидкість течії річки дорівнює 2,5 км/год. Для знаходжен-

вняння, яке відповідає умові задачі.

а) $6(x-2,5)=8(x+2,5)$; б) $6(x+2,5)=8(x-2,5)$;

в) $6(x+2,5)=8x$.

3) На одній ділянці кущів малини в 5 разів більше, ніж на іншій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 22 кущі малини, то на обох ділянках кущів стало порівну. Для встановлення кількості кущів малини, що була спочатку на другій ділянці, її позначили через x. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $5x+22=x-22$; б) $5x-22=x+22$; в) $5x+22=x+22$.

4) Одне число утричі більше від іншого. Після того як перше число зменшили на 20, воно стало удвічі більше від другого. Для знаходження меншого з чисел його позначили через x. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $3x-20=2(x+20)$; б) $3x+20=2x$; в) $3x-20=2x$.

5) Одне число у 6 разів більше від іншого. Після того як перше число зменшили на 40, а друге збільшили на 30, одержали рівні числа. Для знаходження меншого з чисел його позначено через x. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $6x+40=x-30$; б) $6x-40=x+30$; в) $6x-40=x-30$.

6) На одному елеваторі було 2800 т зерна, а на іншому — 1500 т. З першого елеватора щоденно вивозили по 50 т зерна, а на другий привозили по 80 т. Через x днів зерна на обох елеваторах стало порівну. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $2800-50x=1500-80x$; б) $2800+50x=1500+80x$;

в) $2800-50x=1500+80x$.

7) В одній цистерні міститься 50 т бензину, а в іншій — 7 т. Після того як x т бензину перелили з першої цистерни в другу, у першій стало бензину удвічі більше, ніж у другій. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $2(50-x)=7+x$; б) $50-x=2(7+x)$; в) $50-x=7+x$.

Тренувальні вправи

№52.

1. *Дано два числа. Позначивши через х друге число, виразити через х перше й скласти рівняння, якщо...*

1) перше число у 10 разів більше від другого, а їх сума дорівнює 220;
2) перше число на 8 більше від другого, а їх сума дорівнює 32;
3) перше число у 5 разів більше від другого, а їх різниця дорівнює 44;
4) перше число становить 0,6 від другого, а їх сума дорівнює 32.

2. *За даними умовами скласти рівняння, позначивши через x менше зна-чення величини (1–4):*

1) За два дні учні зібрали 700 кг макулатури, причому за другий день зібрали у 6 разів більше, ніж за перший.
2) За дві години потяг проїхав 120 км, причому за другу годину він проїхав на 10 км більше, ніж за першу.
3) У другому зерносховищі зерна утричі більше, ніж у першому, і на 14 т більше, ніж у першому.
4) За два дні туристи подолали 60 км, причому за другий день вони пройшли удвічі більше, ніж за перший.

Завдання для самоперевірки

№53. Варіант 1

1. 1) Одне з чисел у 4 рази більше від іншого. Вказати більше число, якщо менше число позначено через x.

   а) $x+4$; б) $4x$; в) $\frac{x}{4}$.

   2) Швидкість човна у стоячій воді позначено через x км/год. Знайти швидкість човна проти течії річки, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

   а) $(x+3)$ км/год; б) $(3-x)$ км/год; в) $(x-3)$ км/год.

   3) За 6 год робітник виготовив x деталей. Вказати кількість деталей які виготовив робітник за 1 год.

   а) $6x$ дет.; б) $\frac{x}{6}$ дет.; в) $\frac{6}{x}$ дет.

2. 1) Одне з додатних чисел утричі більше від іншого, а їх сума дорівнює 40. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо менше з чисел позначили через x?

   а) $x+3x=40$; б) $3x-x=40$; в) $x+(x+3)=40$.

   2) Майстер і учень виготовили разом 70 деталей, причому майстер виготовив на 20 деталей більше. Яке з рівнянь відповідає умові задачі якщо кількість деталей, які виготовив учень, позначили через x?

   а) $x+(x-20)=70$; б) $x+(x+20)=70$; в) $x+(20-x)=70$.

   3) Швидкість моторного човна в стоячій воді позначено через x км/год а швидкість течії дорівнює 2 км/год. Вказати відстань, яку пройшов човен за течією річки за 4 год.

   а) $4(x+2)$ км; б) $4(x-2)$ км; в) $4x$ км.

Одне з чисел на 20 більше від іншого, а їх сума дорівнює 150. Позначити через x менше число, виразити через x більше число і скласти рівняння.

2) У двох цистернах міститься 40 т бензину, причому в меншій з них міститься утричі менше бензину, ніж у більшій. Позначити через x т кількість бензину в меншій цистерні і скласти рівняння для знаходження цієї кількості.

3) Одне з чисел становить 20% від іншого, а їх сума дорівнює 44. Більше з чисел позначили через x. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $x + 20x = 44$; б) $x + 0{,}2x = 44$; в) $x + 0{,}02x = 44$.

4. Варіант 2

1) Одне з чисел на 18 більше від іншого. Вказати більше число, якщо менше число позначили через x.

а) $x - 18$; б) $18 - x$; в) $x + 18$.

2) Швидкість човна у стоячій воді позначили через x км/год. Вказати швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,5 км/год.

а) $(x - 2{,}5)$ км/год; б) $(x + 2{,}5)$ км/год; в) $(2{,}5 - x)$ км/год.

3) За 4 дні засіяли x га поля. Яку площу поля засівали щодня?

а) $\frac{4}{x}$ га; б) $\frac{x}{4}$ га; в) $4x$ га.

1) Одне з чисел удвічі менше від іншого, а їх сума дорівнює 60. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо менше з чисел позначили через x?

а) $x + (x + 2) = 60$; б) $x + 2x = 60$; в) $x + \frac{x}{2} = 60$.

2) За 2 дні туристи пройшли 38 км, причому за другий день вони пройшли на 8 км більше, ніж за перший. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо відстань, пройдену за перший день, позначили через x км?

а) $x + (x - 8) = 38$; б) $x - x - 8 = 38$; в) $x + (x + 8) = 38$.

3) Швидкість моторного човна в стоячій воді позначили через x км/год, а швидкість течії дорівнює 1,5 км/год. Знайти відстань, яку пройшов човен проти течії річки за 3 год.

а) $3x$ км; б) $3(x + 1{,}5)$ км; в) $3(x - 1{,}5)$ км.

1) Менше з двох додатних чисел становить 0,7 від більшого, а їх сума дорівнює 28. Знайти ці числа. Позначити через x більше число, виразити через x менше число і скласти рівняння.

працює на 8 робітників більше, ніж у першій. Позначити через x кількість робітників у першій бригаді та скласти рівняння для знаходження цієї кількості.

3) Менше з двох чисел становить 30% від більшого, а їх різниця дорівнює 70. Більше з чисел позначили через x. Вказати рівняння, яке відповідає умові задачі.

а) $x + 0{,}3x = 70$; б) $x - 0{,}3x = 70$; в) $x - 0{,}03x = 70$.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на застосування

№55. Варіант 1

Середній рівень

1. Одне з додатних чисел утричі більше від іншого. Знайти ці числа, якщо їх різниця дорівнює 24.
2. У двох цистернах міститься 78 т бензину, причому в першій на 6 т менше, ніж у другій. Скільки тонн бензину було у кожній цистерні?
3. З пункту А в пункт В велосипедист їхав зі швидкістю 24 км/год, а назад повертався зі швидкістю 16 км/год. Усього в дорозі він був 5 год. Знайти відстань між пунктами, позначивши її через x км.

Достатній рівень

1. У першій пачці було утричі більше зошитів, ніж у другій. Після того як з першої пачки переклали у другу 20 зошитів, в обох пачках зошитів стало порівну. Скільки зошитів було в кожній пачці спочатку?
2. За 5 год човен проходить за течією річки таку ж відстань, як і за 7 год проти течії. Знайти власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.
3. Сума двох чисел дорівнює 63. Одне з них на 10% більше, ніж інше. Знайти менше з чисел.

Високий рівень

1. 20% одного числа дорівнюють 40% іншого числа. Знайти ці числа, якщо їх різниця дорівнює 25.
2. З пункту А в пункт В виїхав мотоцикліст, а через 4 хв услід за ним виїхав автобус, який прибув у пункт В на 6 хв раніше від мотоцик

[illegible] відстань між пунктами, якщо швидкість руху мотоцикліста 40 км/год, а автобуса — 60 км/год.

3. Батько старший від сина у 8 разів. Через 10 років батько буде старший від сина утричі. Скільки років батькові тепер?

56. Варіант 2

Середній рівень

1. Сума двох додатних чисел дорівнює 84, причому одне з них у 6 разів більше від іншого. Знайти ці числа.
2. На першому складі вугілля утричі більше, ніж на другому. Скільки вугілля на кожному складі, якщо на другому на 20 т менше, ніж на першому?
3. З пункту А в пункт В автомобіліст їхав зі швидкістю 60 км/год, а з пункту В у пункт А він повертався зі швидкістю 80 км/год. Усього в дорозі він був 7 год. Знайти відстань між пунктами А і В, позначивши її через x.

Достатній рівень

1. У першому мішку було в 4 рази більше цукру, ніж у другому. Коли з першого мішка взяли 30 кг цукру, а в другий додали 15 кг, то в обох мішках цукру стало порівну. Скільки цукру було в кожному мішку спочатку?
2. За 3 год човен пройшов за течією річки таку ж відстань, як за 4 год проти течії. Знайти власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,5 км/год.
3. Два робітники виготовили за зміну 88 деталей, причому перший з них виготовив на 20% деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив за зміну кожний робітник?

Високий рівень

1. $\frac{1}{4}$ першого числа дорівнює $\frac{2}{3}$ другого числа. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 120.
2. З пункту А в пункт В вийшов пасажирський потяг, середня швидкість руху якого дорівнює 50 км/год. Через 40 хв назустріч йому вийшов швидкий потяг із середньою швидкістю руху 90 км/год. Відстань між пунктами 360 км. Яку відстань пройшов до зустрічі пасажирський потяг?
3. Батько старший від сина у 8 разів, а сума їхніх років дорівнює 36. Через скільки років батько стане старшим від сина утричі?

Середній рівень

1. Одне з додатних чисел у 4 рази менше від іншого. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 75.
2. У двох бригадах працює 86 робітників, причому у першій на 14 менше, ніж у другій. Скільки робітників у кожній бригаді?
3. З пункту А в пункт В велосипедист їхав зі швидкістю 18 км/год, а назад повертався із швидкістю 24 км/год. Знайти відстань між пунктами А та В, якщо на зворотній шлях велосипедист витратив на одну годину менше.

Достатній рівень

1. За 3 дні зорали 123 га землі. За перший день зорали в 1,2 разу більше, ніж за другий, а за третій на 5 га менше, ніж за другий. Скільки гектарів зорали за другий день?
2. По шосе їдуть два автомобілі з однаковою швидкістю. Якщо перший автомобіль збільшить швидкість на 15 км/год, а другий зменшить на 15 км/год, то перший за 5 год проїде стільки ж, скільки другий за 8 год. З якою швидкістю їдуть автомобілі?
3. В першій пачці було удвічі більше зошитів, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій пачці стало в 4 рази менше зошитів, ніж у першій. Скільки зошитів було в кожній пачці спочатку?

Високий рівень

1. 80% одного числа дорівнюють 60% іншого числа. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 280.
2. З пункту А в пункт В виїхав велосипедист. Через 1,2 год слідом за ним виїхав мотоцикліст, швидкість якого на 30 км/год більша. Через 0,5 год після свого відправлення мотоцикліст проїхав на 3 км більше, ніж велосипедист. Знайти швидкість мотоцикліста.
3. Батько старший від сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим від сина удвічі?

№58. Варіант 4

Середній рівень

1. Одне з додатних чисел у 6 разів менше від іншого, а різниця цих чисел дорівнює 105. Знайти ці числа.
2. На двох полицях 163 книжки. Скільки книжок на кожній полиці, якщо на одній з них на 17 книжок більше, ніж на іншій?

спортсмен — за 2 год. Яка відстань між селами, якщо швидкість спортсмена на 2 км/год більша від швидкості пішохода?

Достатній рівень

1. За три дні робітник виготовив 63 деталі. За другий день він виготовив на 8 деталей більше, ніж за перший, а за третій день — на 5 деталей менше, ніж за перший. Скільки деталей виготовляв робітник кожного дня?
2. Одну й ту ж відстань один автомобіль проїжджає за 3 год, а інший — за 2 год. Знайти швидкість руху кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 24 км/год більша, ніж швидкість іншого.
3. У першій бригаді було в 4 рази більше робітників, ніж у другій. Після того, як з першої бригади перевели в другу 6 робітників, у ній стало утричі більше робітників, ніж у другій. Скільки робітників було в кожній бригаді спочатку?

Високий рівень

1. 0,4 першого числа дорівнюють 0,3 другого числа. Знайти ці числа, якщо їх різниця дорівнює 30.
2. З пункту А в пункт В виїхав автобус. Через 0,5 год услід за ним виїхав автомобіль. Через 1,1 год після свого відправлення автомобіль проїхав на 2 км більше, ніж автобус. Знайти швидкість автобуса, якщо відомо, що вона на 20 км/год менша від швидкості автомобіля.
3. Сергійко старший від Михайлика у 6 разів, а сума їхніх років дорівнює 14. Через скільки років Сергійко буде старшим від Михайлика утричі?

Контроль навчальних досягнень учнів

№59. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $-30x = 5$.

   2) Сума двох чисел дорівнює 113. Одне з них на 17 більше, ніж інше. Знайти ці числа.
2. Розв'язати рівняння $7x - 8 = 5x + 12$.
3. Відстань від пункту А до пункту В мотоцикліст проїхав зі швидкістю 60 км/год, а зворотний шлях — зі швидкістю 40 км/год. Знайти

тратив 5 год.

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{x+5}{7} - \frac{x}{9} = 0$.

   2) На першій ділянці утричі більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 20 кущів, то на обох ділянках кущів малини стало порівну. Скільки кущів малини було на кожній ділянці спочатку?

2. Розв'язати рівняння $(5-2x)(0{,}4x+1{,}6)\left(\frac{3}{7}x-42\right)=0$.

3. За 9 год теплохід проходить за течією річки такий же шлях, як за 10 год по озеру (у стоячій воді). Знайти власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Високий рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{4x+1}{21} + \frac{x+1}{2} = \frac{5x+3}{7}$.

   2) За планом бригада повинна була засівати щодня 73 га поля. Перевиконуючи план, бригада засівала щодня на 14 га більше, ніж планувалося, тому за 2 дні до терміну їй залишилося засіяти тільки 6 га. Яку площу поля повинна була засіяти бригада?

2. Розв'язати рівняння $|5x| - 7 = 8$.
3. Знайти всі натуральні значення a, при яких корінь рівняння $(a-3)\cdot x = 18$ є натуральним числом (x — змінна).

660. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $-28x = 7$.

   2) Різниця двох додатних чисел дорівнює 63. Знайти ці числа, якщо одне із цих чисел у 8 разів більше від іншого.

2. Розв'язати рівняння $15x - 7 = 12x + 8$.
3. Відстань від пункту А до пункту В турист пройшов зі швидкістю 6 км/год, а зворотний шлях — зі швидкістю 4 км/год. Знайти відстань між пунктами А та В, якщо на зворотний шлях турист затратив на 1 год більше, ніж на прямий.

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{x-4}{3}-\frac{x}{11}=0$.

2) У першій бригаді було в 4 рази менше робітників, ніж у другій. Після того як із другої бригади 15 робітників перевели у першу, в обох бригадах робітників стало порівну. Скільки робітників було в першій бригаді спочатку?

2. Розв'язати рівняння $(7+2x)(0{,}3x-1{,}2)\left(\frac{4}{7}x+56\right)=0$.

3. За 7 год по озеру (у стоячій воді) теплохід проходить такий же шлях, як і за 8 год проти течії річки. Знайти власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

Високий рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{2x+1}{15}-\frac{3x-1}{10}=\frac{2(2x+1)}{15}-\frac{x-1}{2}$.

2) Робітник повинен був виконати завдання за 5 днів. Щоденно перевиконуючи норму на 18 деталей, він за 3,5 дні роботи не тільки виконав завдання, але і виготовив 27 деталей понад план. Скільки деталей щоденно виготовляв робітник?

2. Розв'язати рівняння $|3x|+4=25$.
3. Знайти всі натуральні значення a, при яких корінь рівняння $(2a-1)\cdot x=30$ є натуральним числом.

№61. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $-14x=7$.

2) Різниця двох додатних чисел дорівнює 54, причому одне з них у 7 разів більше від іншого. Знайти ці числа.

2. Розв'язати рівняння $12x-8=8x+32$.
3. Два робітники виготовляли однакову кількість деталей. Перший робітник за годину виготовляв на 12 деталей більше, ніж другий, і виконав завдання за 4 год. Скільки деталей виготовляв кожний робітник, якщо другий робітник виконав завдання за 5 год?

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{x-8}{7}+\frac{x}{3}=0$.

му. З першого зерносховища вивезли 750 тонн зерна, а в друге привезли 350 тонн, після чого в обох сховищах зерна стало порівну. Скільки зерна було спочатку в кожному зерносховищі?

2. Розв'язати рівняння $(5x-1)(0{,}3x+1{,}2)\left(\frac{3}{7}x-42\right)=0$.

3. Відстань від пристані А до пристані В за течією човен пройшов за 4 год, а зворотний шлях проти течії він пройшов за 8 год. Знайти швидкість течії річки та відстань між пристанями, якщо швидкість човна у стоячій воді (власна швидкість) дорівнює 6 км/год.

Високий рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{3x+1}{2}-\frac{4x+3}{5}=6-\frac{7x-1}{10}$.

   2) З пунктів А і В, відстань між якими 400 км, вирушили одночасно назустріч один одному два потяги, причому швидкість одного з них на 15 км/год більша від швидкості іншого. Через 3 год потяги, ще не зустрівшись, перебували на відстані 25 км один від одного. Яка швидкість кожного потяга?

Розв'язати рівняння (2–3):

2. $4ax-x=a$, де x — змінна, a — параметр.
3. $\left||5x|+4\right|=6$.

662. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $-6x=2$.

   2) Сума двох чисел дорівнює 70. Знайти ці числа, якщо одне з них у 9 разів більше від іншого.
2. Розв'язати рівняння $4x-7=x+14$.
3. Задану кількість деталей (завдання) робітник може виготовити за 2 год, а його учень — за 6 год. Скільки деталей становить завдання, якщо за годину робітник виготовляє на 8 деталей більше, ніж учень?

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{x-7}{5}+\frac{x}{3}=0$.

   2) На залізничній станції стояли два потяги, причому в одному з них було удвічі більше вагонів, ніж в іншому. Коли від одного потяга відчепили 14 вагонів і причепили їх до іншого, то вагонів у потягах стало порівну. Скільки вагонів було в кожному потязі спочатку?

2. Розв'язати рівняння $(4x+1)(0{,}2x-6)\left(\frac{\ }{4}x-48\right)=0$.

3. Відстань від пристані А до пристані В за течією моторний човен пройшов за 3 год, а зворотний шлях проти течії він пройшов за 4 год. Знайти швидкість човна у стоячій воді та відстань між пристанями, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

Високий рівень

1. 1) Розв'язати рівняння $\frac{7x-12}{10}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{3}-\frac{x-1}{5}$.

   2) Відстань між містами А та В дорівнює 210 км. З міста А до міста В виїхав велосипедист зі швидкістю 15 км/год, а через 40 хв назустріч йому з міста В виїхав мотоцикліст, швидкість якого 45 км/год. Через скільки годин після виїзду велосипедиста вони зустрінуться?

Розв'язати рівняння (2–3):

2. $3ax+x=a$, де x — змінна, a — параметр.
3. $||3x|-2|=7$.

ТЕМА 3. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

- Поняття про степінь з натуральним показником
- Множення і ділення степенів з однаковими основами
- Степінь добутку та степеня

Виклад теорії

1. Поняття про степінь з натуральним показником

1

Степенем **числа a з натуральним показником n, більшим від 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. Степенем числа a з показником 1 називають саме число a.**

a^n — степінь з основою a і показником n. Запис «a^n» читають «a в степені n» або «n-й степінь числа a».

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ разів}},\ n > 1,\ a^1 = a.$$

Другий степінь числа a називають квадратом числа a; третій степінь числа a називають кубом числа a.

Приклади.

1. c^7 — степінь з основою c і показником 7; читають: «c у сьомому степені» або «сьомий степінь числа c».
2. x^2 — степінь з основою x і показником 2; читають: «x у квадраті» або «квадрат числа (виразу, змінної) x».
3. m^3 — степінь з основою m і показником 3; читають: «m у кубі» або «куб числа (виразу, змінної) m».
4. За означенням, $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)\times$ $\times(a + b)(a + b)$; $(ac)^2 = (ac)(ac)$.

2

Натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

$$0^n = 0.$$

$0^1 = 0$; $0^2 = 0$; $0^{100} = 0$; $0^{1002} = 0$.

Натуральним степенем додатного числа є додатне число.

Якщо n — натуральне число, a — додатне, то a^n — додатне. Дійсно, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} > 0$ як добуток додатних чисел.

Приклади.

1. 5^3; $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; $0{,}7^6$; $0{,}001^{1001}$ **— додатні числа.**

2. Якщо $b > 0$, **то** $b^2 > 0$, $b^5 > 0$, $b^{13} > 0$, $b^{1002} > 0$.

Степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом (як добуток парної кількості від'ємних множників).

Якщо $n = 2; 4; 6; 8; \ldots; 2k; \ldots$, a — від'ємне, то a^n — додатне число.

Приклади.

1. $(-5)^2$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; $(-0{,}002)^8$; $\left(-1\frac{1}{7}\right)^{102}$ — додатні числа.

2. Якщо $x < 0$, то $x^2 > 0$, $x^4 > 0$, $x^{10} > 0$, $x^{104} > 0$.

Степінь від'ємного числа з непарним показником є від'ємним числом (як добуток непарної кількості від'ємних множників).

Якщо $n = 1; 3; 5; 7; \ldots; 2k + 1; \ldots$, a — від'ємне, то a^n — від'ємне число.

Приклади.

1. $(-5)^3$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^5$; $(-0{,}56)^7$; $(-0{,}001)^{1001}$ **— від'ємні числа.**

2. Якщо $x < 0$, **то** $x^3 < 0$, $x^5 < 0$, $x^{11} < 0$, $x^{1003} < 0$.

3

Дію знаходження степеня називають *піднесенням до степеня*.

Піднесення до степеня **називають дією третього ступеня. Множення і ділення — дії другого ступеня; додавання і віднімання — дії першого ступеня.**

Приклади.

1. Піднести до квадрата:

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$;

$0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

2. Піднести до куба:

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125;$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125;$

$0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001;$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}.$$

3. Піднести до степеня:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16;$

$(-10)^4 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = 10000;$

$(-0{,}1)^4 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = 0{,}0001;$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}.$$

4

Якщо вираз містить дії різних ступенів, то виконують:

- **спочатку дії третього ступеня;**
- **потім дії другого ступеня;**
- **останніми дії першого ступеня.**

Якщо вираз містить дужки, то спочатку виконують дії у дужках.

Приклади.

1. $2 + 7 \cdot 2^3 = 2 + 7 \cdot 8 = 2 + 56 = 58.$
2. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$
3. $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49.$
4. $50 - (2 + 5)^2 = 50 - 7^2 = 50 - 49 = 1.$

5

У процесі словесного читання виразів, які містять степені, дотримують загального правила:

- **першою називають дію, яку виконують останньою.**

Приклади.

1. $a^2 + b^2$ — сума квадратів чисел (виразів) a та b.
2. $a^3 - b^3$ — різниця кубів чисел (виразів) a та b.
3. $(a + m)^2$ — квадрат суми чисел (виразів) a та m.
4. $(x - 5)^3$ — куб різниці чисел (виразів) x та 5.

2. Множення і ділення степенів з однаковими основами

6

Теорема. Добуток степенів будь-якого числа a з показниками m і n дорівнює степеню числа a з показником $m + n$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Щоб помножити степені з однаковими основами, потрібно:

- **основу залишити без змін;**
- **показники степенів додати.**

Приклади.

1. $a^5 \cdot a^8 = a^{13}$; $b^4 \cdot b^{10} = b^{14}$.
2. $7^4 \cdot 7^8 = 7^{12}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $0{,}1^{50} \cdot 0{,}1^{20} = 0{,}1^{70}$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^5 = \left(2\frac{1}{3}\right)^{20}$.

Доведення теореми

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

Ілюстрація доведення

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ рази}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ рази}}}_{7 \text{ разів}} = a^7.$$

7

Теорема. Частка степенів будь-якого числа $a \neq 0$ з показниками m і n такими, що $m > n$, дорівнює степеню числа a з показником $m - n$:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно:

- **основу залишити без змін;**
- **від показника діленого відняти показник дільника.**

Приклади.

1. $a^8 : a^5 = a^3$; $b^{10} : b^2 = b^8$.
2. $7^{12} : 7^4 = 7^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$; $0{,}1^{50} : 0{,}1^{20} = 0{,}1^{30}$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^{15} : \left(2\frac{1}{3}\right)^5 = \left(2\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Доведення теореми

1. $a^{m-n}\cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$.
2. Оскільки $a^{m-n}\cdot a^n = a^m$, то за означенням ділене a^{m-n} є часткою чисел $a^m : a^n$, тобто $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Ілюстрація доведення

Оскільки $a^7\cdot a^3 = a^{10}$ за властивістю добутків степенів, то за означенням частки $a^{10} : a^7 = a^3$.

3. Степінь добутку та степеня

8

Теорема. Для будь-яких чисел a і b n-й степінь їх добутку дорівнює добутку n-х степенів цих чисел:

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n.$$

Щоб піднести до степеня добуток, можна піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити:

$$(abc)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n;\ (abcd)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n\cdot d^n.$$

Приклади.
$(ax)^3 = a^3\cdot x^3$; $(5a)^2 = 5^2\cdot a^2 = 25a^2$; $(10ab)^4 = 10^4\cdot a^4\cdot b^4 = 10000a^4b^4$;
$(2ab)^3 = 2^3\cdot a^3\cdot b^3 = 8a^3b^3$.

Доведення теореми

$$(ab)^n = \underbrace{ab\cdot ab\cdot\ldots\cdot ab}_{n\ \text{разів}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\ \text{разів}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\ \text{разів}} = a^n\cdot b^n.$$

Ілюстрація доведення

$$(ab)^4 = \underbrace{ab\cdot ab\cdot ab\cdot ab}_{4\ \text{рази}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot a)}_{4\ \text{рази}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot b\cdot b)}_{4\ \text{рази}} = a^4\cdot b^4.$$

9

Теорема. Для будь-якого числа a і довільних чисел m і n справедли рівність:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

При піднесенні степеня до степеня основу залишають тією ж, а показники степеня перемножують.

Приклади.
$(a^3)^4 = a^{12}$; $(b^5)^2 = b^{10}$; $(2^8)^2 = 2^{16}$; $(5^4)^3 = 5^{12}$; $(c^{100})^5 = c^{500}$; $(10^{40})^{20} = 10^{800}$.

Доведення теореми

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ \text{разів}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{разів}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{разів}}}_{n\ \text{разів}}}_{\text{множник } a \text{ взято } mn \text{ разів}} = a^{mn}.$$

Ілюстрація доведення

$$(a^3)^4 = \underbrace{a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3}_{4\ \text{рази}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{рази}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{рази}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{рази}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ \text{рази}}}_{4\ \text{рази}}}_{\text{множник } a \text{ взято } 12 \text{ разів}} = a^{12}.$$

Початкове вивчення теми

Навчальні завдання

1. Поняття про степінь з натуральним показником

1

№63.

1. 1) Яка спільна назва у виразів a^5; b^3; 10^2; $8{,}5^4$; $(a+b)^3$; $(ab)^{10}$; $(a-c)^4$?
   а) Сума; б) частка; в) степінь.
   2) Який із записів а)–в) називають n-м степенем числа a?
   а) na; б) n^a; в) a^n.
   3) Який із записів а)–г) є п'ятим степенем числа b?
   а) 5^b; б) $5 + b$; в) b^5; г) $5b$.
   4) Який із записів а)–в) є шостим степенем виразу $a + 1$?
   а) $6(a + 1)$; б) 6^{a+1}; в) $(a + 1)^6$.
   5) Який із записів а)–в) є шостим степенем числа $a + 1$?
   а) $6(a + 1)$; б) 6^{a+1}; в) $(a + 1)^6$.
   6) Як по-іншому називають другий степінь числа a?
   а) Кубом числа a; б) квадратом числа a.
   7) Як по-іншому називають третій степінь числа a?
   8) У записі a^{10} назвати основу степеня.

9) У записі x^8 назвати показник степеня.

Доповнити запис (10–12).

Якщо n — натуральне число, то...

10) n-им степенем числа a називають ________________.

11) у степені a^n основою називають число ___.

12) у степені a^n показником називають число ___.

2. *Прочитати (1–5):*

1) b^2;
2) c^3;
3) m^2;
4) 7^3;
5) 8^{12}.

3. *Записати:*

1) третій степінь числа b;
2) m у другому степені;
3) добуток ab у першому степені;
4) суму $a + b$ у другому степені;
5) п'ятий степінь числа m;
6) квадрат числа b;
7) куб числа m;
8) квадрат числа $a + 5$;
9) куб числа $a - 3$;
10) куб числа ac.

№64.

1. *Чому дорівнює...*

1) $a \cdot a \cdot a$:
   а) a^3; б) $3a$; в) 3^a.
2) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$:
   а) 9^4; б) $4 \cdot 9$; в) 4^9.
3) y^5:
   а) $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$; б) $5y$; в) $y + y + y + y \cdot y$.
4) 2^3:
   а) $2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $2 \cdot 3$; в) $2 + 2 + 2$.

Доповнити запис (5–6):

5) $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} =$ ____________.

6) Якщо m — натуральне число, то $a^m =$ ____________.

2. *Серед виразів а)–в) вказати вираз, якому дорівнює...*

1) $x \cdot x \cdot x$:

а) x^3; б) $3x$; в) 3^x.

2) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$:

а) 9^4; б) $4 \cdot 9$; в) 4^9.

3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$:

а) a^6; б) $6a$; в) 6^a.

4) $(a-2)(a-2)(a-2)$:

а) $3(a-2)$; б) $3^{(a-2)}$; в) $(a-2)^3$.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, якому за означенням степеня дорівнює:

5) 3^5:

а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; б) $3+3+3+3+3$; в) $5 \cdot 5 \cdot 5$;

6) a^6:

а) $a+a+a+a+a+a$; б) $6a$;

в) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;

7) $(a-b)^3$:

а) $(a-b)+(a-b) \cdot (a-b)$; б) $(a-b)(a-b)(a-b)$;

в) a^3-b^3.

3. *Записати у вигляді степеня (1–4):*

1) $2 \cdot 2 \cdot 2$; 2) $x \cdot x \cdot x \cdot x$;

3) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Записати у вигляді добутку однакових множників (5–8):

5) 4^5; 6) 2^4;

7) a^5; 8) $(a-b)^3$.

№65.

1. 1) b — довільне число. Чому дорівнює b^1?

а) 0; б) 1; в) b.

2) Чому дорівнює перший степінь будь-якого даного числа?

а) Даному числу; б) 0; в) 1.

3) Доповнити запис: $a^1 =$ _____.

2. *Вказати правильну відповідь:*

1) $5^1 = ...$:

а) 5; б) 1; в) 0.

2) $m^1 = ...$:

а) 1; б) 0; в) m.

3) $(-0{,}4)^1 = ...$:

а) 1; б) 4; в) $-0{,}4$.

4) $\left(10\frac{1}{3}\right)^1 = ...$:

а) $10\frac{1}{3}$; б) 10; в) 1.

5) $(a-2)^1 = ...$:

а) 0; б) $a-2$; в) 1.

6) $(ab)^1 = ...$:

а) 0; б) 1; в) ab.

3. *Знайти значення степеня:*

1) 7^1; 2) $(-0{,}6)^1$; 3) z^1; 4) $\left(12\frac{1}{5}\right)^1$;

5) $(x+3)^1$; 6) $(xz)^1$.

②

№66.

1. *Яким — додатним чи від'ємним — є кожне з чисел (1–3):*

1) 7^2; 10^3; $0{,}2^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $\left(1\frac{1}{3}\right)^{98}$;

2) $(-4)^2$; $(-8)^4$; $(-0{,}5)^6$; $\left(-\frac{1}{7}\right)^{10}$; $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{96}$;

3) $(-4)^3$; $(-8)^5$; $(-0{,}5)^7$; $\left(-\frac{1}{7}\right)^{11}$; $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{97}$?

4) Якому числу дорівнюють степені 0^1; 0^2; 0^3; 0^7; 0^{99}; 0^{100}?

Доповнити записи.

5) Натуральний степінь числа 0 дорівнює числу __________.

6) Натуральним степенем будь-якого додатного числа є __________.

7) Степенем від'ємного числа з парним показником є __________.

8) Степенем від'ємного числа з непарним показником є __________.

Назвати, яким — додатним чи від'ємним — числом є число (9–16):

9) a^2, якщо $a > 0$; 10) a^2, якщо $a < 0$;
11) c^3, якщо $c > 0$; 12) c^3, якщо $c < 0$;
13) x^4, якщо $x < 0$; 14) x^5, якщо $x < 0$;
15) y^{20}, якщо $y < 0$; 16) y^{21}, якщо $y < 0$.

2. 1) Серед чисел а)–е) вказати три числа, які дорівнюють 0:

а) 0^2; б) 5^2; в) 0^{1003};
г) 1^{10}; д) 0^{100}; е) $(-1)^{100}$.

Серед степенів а)–е) з від'ємними основами вказати три, які є додатними числами:

а) $(-5)^4$; б) $(-5)^7$; в) $(-5)^{11}$;
г) $(-0,5)^6$; д) $(-0,5)^{54}$; е) $(-0,5)^3$.

Серед степенів а)–е) з від'ємними основами вказати три, які є від'ємними числами:

а) $(-11)^2$; б) $(-11)^3$; в) $(-11)^{13}$;
г) $(-1,1)^4$; д) $(-1,1)^{20}$; е) $(-1,1)^{41}$.

Серед степенів а)–е) вказати три, які є додатними числами:

а) $(-8)^4$; б) 102^3; в) $(-7)^{12}$;
г) $(-9)^5$; д) $(-0,4)^6$; е) $(-10)^{11}$.

Серед степенів а)–е) вказати три, які є від'ємними числами:

а) $0,4^{100}$; б) $(-8,2)^3$; в) $(-8,2)^{10}$;
г) $(-0,3)^5$; д) $\left(-\frac{1}{7}\right)^9$; е) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{12}$.

x — від'ємне число. Серед степенів а)–е) числа x вказати три, які є додатними числами:

а) x^6; б) x^{11}; в) x^{81};
г) x^{203}; д) x^2; е) x^{20}.

y — від'ємне число. Серед степенів а)–е) числа y вказати три, які є від'ємними числами:

а) y^{11}; б) y^{12}; в) y^{77};
г) y^{102}; д) y^{200}; е) y^{201}.

a — додатне число, b — від'ємне число. Серед степенів а)–е) вказати три, які є додатними числами:

а) a^{13}; б) b^{13}; в) a^{14};
г) b^{14}; д) b^{21}; е) b^7.

исати (1–5):

три степені з різними показниками, значення яких дорівнюють нулю;
три степені числа –7, які є додатними числами;
три степені числа –8,1, які є від'ємними числами;
три степені від'ємного числа c, які є додатними числами;
три степені від'ємного числа p, які є від'ємними числами.

3

Яке число є значенням виразу 5^2?

а) 10; б) 25; в) 7.

2) *Доповнити запис.*

Дію знаходження значення степеня називають ______________

Назвати число, яке одержать при піднесенні до степеня (3–10):

3) $7^2 = ...$:

а) 14; б) 49; в) 9;

4) $(-6)^2 = ...$:

а) –12; б) 36; в) –36;

5) $2^3 = ...$:

а) 6; б) 8; в) 5;

6) $(-2)^3 = ...$:

а) –6; б) –5; в) –8;

7) $2^5 = ...$:

а) 10; б) 32; в) 4;

8) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = ...$:

а) $\frac{1}{25}$; б) $\frac{1}{10}$; в) $\frac{2}{5}$;

9) $0{,}2^2 = ...$:

а) 0,4; б) 0,04; в) 2,2;

10) $(-0{,}3)^3 = ...$:

а) –0,027; б) –0,9; в) 0,9.

2. *Вказати правильну відповідь:*

1) $9^2 = ...$:

а) 18; б) 11; в) 81; г) –81;

2) $(-7)^2 = ...$:

а) –14; б) 14; в) –49; г) 49;

3) $2^4 = ...$:

а) 8; б) 16; в) 4; г) 32;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = ...$:

а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{32}$;

5) $(-3)^3 = ...$:

а) –9; б) 9; в) –27; г) 27;

6) $0{,}3^2 = ...$:

а) 0,9; б) 0,6; в) 0,09; г) 0,009;

7) $(-0{,}6)^2 = ...$:

а) 1,2; б) 0,36; в) 0,036; г) 0,12;

8) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = ...$:

а) $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; б) $\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; в) $\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$; г) $\frac{25}{4} = 1\frac{1}{6}$.

3. *Піднести до степеня:*

1) 8^2; 2) $(-9)^2$; 3) 2^5; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-5)^3$; 6) $0,5^2$; 7) $(-0,4)^2$; 8) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2$.

4

№68.

1. *Назвати дію, яку виконують першою при знаходженні значення виразу:*
   1) $5 - 2^3$; 2) $7 \cdot 2^5$; 3) $(3 + 4)^2$; 4) $5^2 + 2^2$.
   5) Які з наведених дій є діями першого ступеня?
      а) Додавання і віднімання; б) множення і ділення;
      в) піднесення до степеня.
   6) Назвати дві дії другого ступеня.
   7) Дією якого ступеня є піднесення до степеня?
      а) Першого ступеня; б) другого ступеня; в) третього ступеня.
   8) Обчислюючи значення виразу, що містить дії трьох ступенів, спочатку виконують дію...
      а) першого ступеня; б) другого ступеня; в) третього ступеня.

   Доповнити запис (9–10).

   9) Якщо вираз містить дії різних ступенів, то виконують спочатку дії ____________ ступеня, потім дії ____________ ступеня, а останніми — дії ____________ ступеня.
   10) Як...о вираз містить дужки, то спочатку виконують дії ____________.

2. *Вказати правильну відповідь:*
   1) $3 + 7^2 = ...$:
      а) $10^2 = 10$...; б) $3 + 14 = 17$; в) $3 + 49 = 52$;
   2) $10 - 2^3 = ...$:
      а) $(10 - 2)^3 = 8^3$; б) $10 - 8 = 2$; в) $10 - 6 = 4$;
   3) $7 \cdot 2^5 = ...$:
      а) 9^5; б) $7 \cdot 10 = 70$; в) $7 \cdot 32 = 224$;
   4) $(3 + 4)^2 = ...$:
      а) $7^2 = 49$; в) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$;

5) $5^2 + 2^2 = ...$:

а) $7^2 = 49$; б) $25 + 4 = 29$; в) $10 + 4 = 14$.

3. *Виконати дії:*

1) $5 + 4^2$; 2) $17 - 3^2$; 3) $34 + 3^2$; 4) $6 \cdot 2^3$;

5) $(8 - 4)^3$; 6) $(3 + 8)^2$; 7) $2^2 + 3^2$; 8) $3^2 - 2^2$.

(5)

№69.

1. 1) *Доповнити запис.*

При читанні виразів першою називають дію, яку вико
ють _________________.

Вказати дію, яку виконують останньою, і вираз (2–10):

2) $(a + b)^2$:

а) сума квадратів чисел a і b; б) квадрат суми чисел a і b;

3) $a^2 + c^2$:

а) сума квадратів чисел a і c; б) квадрат суми чисел a і c;

4) $(a - 7)^2$:

а) різниця квадратів чисел a і 7; б) квадрат різниці чисел a і 7;

5) $(a - m)^3$:

а) куб різниці чисел a і m; б) різниця кубів чисел a і m;

6) $a^3 + 5^3$:

а) сума кубів чисел a і 5; б) куб суми чисел a і 5;

7) $(ab)^4$:

а) четвертий степінь добутку чисел a і b;

б) добуток четвертих степенів чисел a і b;

8) $x^4 \cdot y^4$:

а) четвертий степінь добутку чисел x та y;

б) добуток четвертих степенів чисел x та y;

9) $a^5 \cdot c^5$:

а) п'ятий степінь добутку чисел a і c;

б) добуток п'ятих степенів чисел a і c;

10) $(mn)^5$:

а) п'ятий степінь добутку чисел m і n;

б) добуток п'ятих степенів чисел m і r

2. *Серед виразів а)–е) вказати вираз, яку*

1) квадратом суми чисел a і m:

а) $a^2 + m^2$; б) (... в) $(a + m)^2$;

2) квадратом різниці чисе... $-y)^2$; в) $(x + y)^2$;

а) $x^2 - y^2$;

3) квадратом добутку чисел m і p:
а) m^2p^2; б) $(mp)^2$; в) $(m+p)^2$;
4) квадратом частки чисел 5 і a:
а) $(5a)^2$; б) $\frac{5^2}{a^2}$; в) $\left(\frac{5}{a}\right)^2$;
5) кубом суми чисел m і n:
а) $(m+n)^3$; б) $(mn)^3$; в) m^3+n^3;
6) кубом різниці чисел x і z:
а) x^3-z^3; б) $(x+z)^3$; в) $(x-z)^3$;
7) четвертим степенем суми чисел a і 4:
а) $(a-5)^4$; б) $(a+5)^4$; в) a^4+5^4;
8) п'ятим степенем добутку чисел x та y:
а) $(xy)^5$; б) $x^5 \cdot y^5$; в) $(x+y)^5$;
9) сумою квадратів чисел x і z:
а) $(x+z)^2$; б) $(xz)^2$; в) x^2+z^2;
10) різницею квадратів чисел x і z:
а) $(x-z)^2$; б) x^2+z^2; в) x^2-z^2;
11) добутком квадратів чисел x і z:
а) $(xz)^2$; б) $x^2 \cdot z^2$; в) x^2+z^2;
12) сумою кубів чисел m і n:
а) m^3+n^3; б) $(m+n)^3$; в) m^3-n^3;
13) різницею кубів чисел m і n:
а) $(m-n)^3$; б) $m^3 \cdot n^3$; в) m^3-n^3;
14) четвертим степенем добутку чисел x та y:
а) $x^4 \cdot y^4$; б) $(xy)^4$; в) $(x+y)^4$;
15) добутком шостих степенів чисел 2 та x:
а) $(2x)^6$; б) 2^6+x^6; в) $2^6 \cdot x^6$.

...писати (1–16):

1) ...вадрат суми чисел m і p;
2) ...ат різниці чисел a і c;
3) ...
4) квадрат добутку чисел m і n;
5) куб суми ...и чисел z і c;
6) куб різниці ... і c;
7) шостий степінь ... z;
8) четвертий степінь ...чисел b і 8;
9) різницю квадратів ... чисел 3 і c;
10) суму квадратів чисел m і n,
11) різницю кубів чисел x і z,

12) суму кубів чисел x і z;

13) десятий степінь добутку чисел 2 і a;

14) восьмий степінь добутку чисел a і c;

15) п'ятий степінь добутку чисел $2a$ і c;

16) добуток п'ятих степенів чисел m і n.

Тренувальні вправи

№70.

Виконати піднесення до степеня (1–5):

1.	1) 2^2;	2) 2^3;	3) 2^4;	4) 2^5.
2.	1) 3^2;	2) 3^3;	3) 3^4;	4) 3^5.
3.	1) 4^3;	2) 5^3;	3) 10^4;	4) 20^3.
4.	1) $(-2)^2$;	2) $(-4)^2$;	3) $(-5)^2$;	4) $(-2)^4$.
5.	1) $(-2)^3$;	2) $(-2)^5$;	3) $(-3)^3$;	4) $(-3)^4$.

Обчислити:

6.	1) $3 \cdot 5^2$;	2) $3 + 4^2$;	3) $(3 + 4)^2$;	4) $(10 - 2)^2$.

Завдання для самоперевірки

№71. Варіант 1

1. 1) Назвати показник степеня 2^{10}.

2) Записати у вигляді степеня добуток $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

3) Записати у вигляді добутку степінь a^5.

2. *Обчислити значення виразу:*

1) $2^3 = ...$:

а) 6; б) 5; в) 8;

2) $(-3)^3 = ...$:

а) –6; б) 9; в) –27;

3) $4^2 + 5 = ...$:

а) 81; б) 13; в) 21.

3. *Виконати дії:*

1) $(-2)^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; 3) $(4 + 5)^2$.

№72. Варіант 2

1. 1) Назвати основу степеня 3^7. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

2) Записати у вигляді степеня доб» a^4.

3) Записати у вигляді добутку

2. *Обчислити значення виразу:*

1) $2^4 = ...$:

а) 8; б) 16; в) 32;

2) $(-5)^2 = ...$:

а) –10; б) 25; в) –25;

3) $3^2 - 2 = ...$:

а) 4; б) 7; в) 30.

3. *Виконати дії:*

1) $(-3)^3$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; 3) $(11-5)^2$.

2. Множення і ділення степенів з однаковими основами

6

№73.

1) Чим є вираз $a^2 \cdot a^5$?

а) Добутком степенів з однаковими показниками;

б) добутком степенів з однаковими основами.

2) Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком степенів з однаковими основами:

а) $a^{10} \cdot b^{10}$; б) $a^{10} \cdot a^8$; в) $5^3 \cdot 5^4$;

г) $2^8 \cdot 5^8$; д) $c^8 \cdot c^{12}$; е) $7^4 \cdot 8^5$.

Чому дорівнює:

3) a^m:

а) $\underbrace{a+a+a+...+a}_{m \text{ разів}}$ б) $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m \text{ разів}}$;

4) a^n:

а) $\underbrace{a+a+a+...+a}_{n \text{ разів}}$ б) $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ разів}}$;

5) ... $\cdot ... \cdot a \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ разів}}$:

а) $a \cdot$ ... б) $(m+n)^2$; в) a^{m+n};

6) $b^m \cdot b^n$:

а) b^{mn}; б) b^{m+n}; в) $(2b)^{m+n}$.

7) *Доповнити за...*

При множенні сте... ...днаковими основами основу __________,

а показники степенів ______.

2. *Визначити правильну відповідь (1–5):*

1) $a^2 \cdot a^5 = \ldots$:

а) a^{10}; б) a^7; в) $(2a)^7$;

2) $5^{11} \cdot 5^3 = \ldots$:

а) 5^{33}; б) 25^4; в) 5^{14};

3) $x^{10} \cdot x = \ldots$:

а) x^{11}; б) x^{10}; в) $(2x)^{10}$;

4) $b^m \cdot b^4 = \ldots$:

а) b^{4m}; б) b^{m+4}; в) $(2b)^{m+4}$;

5) $y^{20} \cdot y^3 \cdot y^2 = \ldots$:

а) y^{25}; б) $(2y)^{25}$; в) y^{120}.

3. *Виконати дії (1–4):*

1) $x^7 \cdot x^3$; 2) $7^{14} \cdot 7^2$; 3) $a^{11} \cdot a$; 4) $c^m \cdot c^6$.

7

№74.

1. 1) Чим є вираз $a^{10} : a^2$?

а) Часткою степенів з однаковими основами;

б) часткою степенів з однаковими показниками;

в) степенем частки.

2) Серед виразів а)–е) вказати три, які є частками степенів з однаковими основами:

а) $a^{20} : a^2$; б) $a^{10} : 6^{10}$; в) $7^3 : 7$;

г) $0{,}8^{12} : 0{,}6^{12}$; д) $m^{26} : m^2$; е) $11^2 : 10^2$.

3) $a^m : a^k$, якщо $m > k$, дорівнює …

а) a^{mk}; б) a^{m-k}; в) a^{k-m}.

4) *Доповнити запис.*

При діленні степенів з однаковими основами основу ______, а показники степенів ______________ .

2. *Визначити правильну відповідь (1–5):*

1) $a^{12} : a^2 = \ldots$:

а) a^{10}; б) a^6; в) 1^{15};

2) $5^{18} : 5^3 = \ldots$:

а) 5^6; б) 5^{15}; в) x^{11};

3) $x^{12} : x = \ldots$:

а) x^{12}; б) x в) 1^{m-4};

4) $c^m : c^4 = \ldots$ $(m > 4)$:

а) $c^{m:4}$;

5) $a^{\dots} \cdot a^{\dots} : a = \dots$:

а) a^{12}; б) a^{20}; в) a^{11}.

3. *Виконати дії (1–4):*

1) $c^{14} : c^2$; 2) $3^{21} : 3^3$; 3) $y^{15} : y$; 4) $x^k : x^3,\ k > 3$.

Тренувальні вправи

№75.

Виконати дії (1–3):

1. 1) $x^2 \cdot x^8$; 2) $x^{11} \cdot x^4$; 3) $a \cdot a^{10}$; 4) $a^{11} \cdot a$.
2. 1) $a^4 \cdot a^5 \cdot a^6$; 2) $x^7 \cdot x^8 \cdot x^5$; 3) $y \cdot y^2 \cdot y^5$; 4) $c^8 \cdot c^2 \cdot c^{20}$.
3. 1) $a^{20} : a^{11}$; 2) $x^{17} : x^7$; 3) $a^{11} : a^2$; 4) $m^{40} : m^4$.

Завдання для самоперевірки

№76. Варіант 1

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати частку степенів з однаковими основами:

   а) $10^5 : 2^5$; б) $12^{10} : 12^4$; в) $10^3 + 10^2$.

   2) Чому дорівнює добуток степенів $a^p \cdot a^t$?

   а) a^{p-t}; б) a^{pt}; в) a^{p+t}.

   3) Чому дорівнює частка степенів $b^m : b^n$, де $m > n$?

   а) b^{mn}; б) $b^{m:n}$; в) b^{m-n}.

2. *Серед виразів а)–в) вказати степінь, який дорівнює:*

   1) $7^9 \cdot 7^3$:

   а) 49^{27}; б) 7^{27}; в) 7^{12};

   2) $12^{20} : 12^2$:

   а) 12^8; б) 12^{10}; в) 12^{18};

   3) $(-5)^{16} : (-5)^4$:

   а) 1^{12}; б) $(-5)^{12}$; в) $(-15)^4$.

3. ...*писати у вигляді степеня:*

   1) ...$^7 \cdot 3^2$; 2) $a^{18} : a^3$; 3) $c^8 \cdot c^7 \cdot c$.

№77. Варі...

1. 1) Сере... ...зів а)–в) вказати добуток степенів з однаковими основами:

   а) $2^{10} + 2^{\dots}$; б) $3^{10} \cdot 4^{10}$; в) $7^{10} \cdot 7^{25}$.

   2) Чому дорівн... ...ток степенів $b^m \cdot b^n$?

   а) b^{mn}; б) $2b^{m+n}$; в) b^{m+n}.

   3) Чому дорівнює ча... ...нів $c^m : c^k$, де $m > k$?

   а) c^{m+k}; в) $c^{m:k}$.

2. *Серед виразів а)–в) вказати степінь, який дорівнює:*

1) $5^4 \cdot 5^{11}$:

а) 5^{44}; б) 25^{44}; в) 5^{15};

2) $7^8 : 7^2$:

а) 7^4; б) 7^6; в) 49^6;

3) $(-3)^{12} : (-3)^2$:

а) 1^{10}; б) $(-3)^6$; в) $(-3)^{10}$.

3. *Записати у вигляді степеня (1–3):*

1) $2^5 \cdot 2^3$; 2) $a^{12} : a^2$; 3) $b^4 \cdot b^5 \cdot b$.

3. Степінь добутку та степеня

8

№78.

1. 1) Як називається вираз $(ab)^m$?

а) Степенем суми; б) степенем добутку; в) добутком степенів

2) Серед виразів а)–е) вказати три, які є степенем добутку:

а) $(2a)^5$; б) $(a^2bc)^m$; в) $(a+b)^m$;

г) $(2+a)^5$; д) $(x+y+z)^5$; е) $(xyz)^5$.

3) $(ac)^m = \ldots$:

а) $a^m \cdot c$; б) $a^{m/2} \cdot c^{m/2}$; в) $a^m \cdot c^m$.

4) *Доповнити запис.*

Щоб піднести до степеня добуток, потрібно піднести до цього сте-
пеня ________________ й одержані степені ________________

2. *Вказати правильну відповідь (1–5):*

1) $(ab)^5 = \ldots$:

а) a^5b; б) ab^5; в) a^5b^5;

2) $(mnp)^3 = \ldots$:

а) m^3np; б) $m^3n^3p^3$; в) m^3np^3

3) $(2a)^3 = \ldots$:

а) $2a^3$; б) $6a^3$; в) $8a^3$;

4) $(-5a)^2 = \ldots$:

а) $-10a$; б) $-25a^2$; в) $25a^2$;

5) $(-2x)^3 = \ldots$:

а) $-6x^3$; б) $-8x^3$; в) $8x^3$.

3. *Піднести до степеня добуток*

1) $(ac)^4$; 2) $(a$ 3) $(3x)^2$; 4) $(2y)^3$;

5) $(-6ab)^2$; 6 7) $(-3py)^3$; 8) $(-4xz)^2$.

№79.

1) *Як називають вираз* $(a^n)^m$?

2) Серед виразів а)–е) вказати три, які є степенем степеня:

а) $(5^2)^3$; б) $(a^2 + b^2)^3$; в) $(a^p)^3$;

г) $(a - b)^4$; д) $(m^n)^k$; е) $(a^5 - b^5)^2$.

3) $(a^m)^k = \ldots$:

а) a^{m+k}; б) a^{mk}; в) mak.

4) *Доповнити запис.*

Щоб піднести до степеня степінь, потрібно основу ______________,
а показники ________________.

Вказати правильну відповідь:

1) $(a^5)^3 = \ldots$:

а) a^8; б) a^{15}; в) $3a^5$;

2) $(2^7)^3 = \ldots$:

а) 2^{10}; б) 2^{21}; в) $3 \cdot 2^7$;

3) $(2^5)^2 \cdot 2^3 = \ldots$:

а) $2^7 \cdot 2^3 = 2^{10}$; б) $2^{10} \cdot 2^3 = 2^{30}$; в) $2^{10} \cdot 2^3 = 2^{13}$.

Виконати дії:

1) $(x^4)^5$; 2) $(3^8)^5$; 3) $(2^7)^2 \cdot 2$; 4) $(5^3)^4 \cdot 5^2$.

Тренувальні вправи

№80.

Виконати дії (1–4):

1) $(x^2)^5$; 2) $(x^7)^3$; 3) $(a^{18})^2$; 4) $(a^{50})^2$.

1) $(ab)^7$; 2) $(a^2b)^7$; 3) $(a^3b^2)^7$; 4) $(a^2b^8)^4$.

1) $(a^5)^2 \cdot a^{13}$; 2) $(b^4)^7 \cdot b^2$; 3) $(b^{10})^2 : b^{12}$; 4) $(x^{12})^2 : x^{10}$.

1) $(2x^3b^4)^5$; 2) $(2ab^5)^2$; 3) $(4ac^4b)^2$; 4) $(5ac^5b^2)^2$.

Завдання для самоперевірки

№81. Варіант I

1) Серед виразів а)–в) вказати степінь степеня:

а) 2^5; б) 2^{10}; в) $(2^5)^2$.

2) *Доповнити запис.*

При піднесенні степеня до степеня основу залишають тією ж, а показники степенів ...

а) перемножують; б) додають; в) підносять до степеня.

3) Назвати вираз, якому дорівнює степінь $(ac)^m$.

а) $a^m c$; б) mac; в) $a^m c^m$.

2. *Серед виразів а)–в) вказати той, якому дорівнює...*

1) $(7^5)^2 = ...$:

а) 7^7; б) 7^{10}; в) 49^{10};

2) $(3a)^2 = ...$:

а) $6a^2$; б) $9a^2$; в) $9a$;

3) $(2ab)^3 = ...$:

а) $6a^3b^3$; б) $8ab$; в) $8a^3b^3$.

3. *Піднести до степеня:*

1) $(a^7)^3$; 2) $(4b)^2$; 3) $(3ac)^3$; 4) $(xz)^5$.

№82. Варіант 2

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати степінь степеня:

а) 3^{42}; б) $(3^4)^2$; в) $3^4 + 3$.

2) Назвати вираз, якому дорівнює степінь $(b^m)^k$.

а) b^{m+k}; б) $(2b)^{mk}$; в) b^{mk}.

3) Назвати вираз, якому дорівнює степінь $(abc)^n$.

а) $a^nb^nc^n$; б) a^nbc; в) $nabc$.

2. *Серед виразів а)–в) вказати той, якому дорівнює...*

1) $(11^3)^5 = ...$:

а) 11^8; б) 11^{15}; в) 55^{15};

2) $(4b)^2 = ...$:

а) $8b^2$; б) $16b^2$; в) $16b$;

3) $(5ac)^3 = ...$:

а) $15a^3c^3$; б) $125ac$; в) $125a^3c^3$.

3. *Піднести до степеня:*

1) $(a^8)^3$; 2) $(5b)^2$; 3) $(2ac)^3$; 4) $(xy)^4$.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на відтворення

№83.

Середній рівень

1. Сформулювати означення степеня числа з натуральним показником. У степені b^n назвати основу і показник.
2. Сформулювати правило множення степенів з однаковими основами і записати його для степенів c^m і c^k.
3. Сформулювати правило ділення степенів з однаковими основами і записати його для степенів b^m і b^k $(m > k)$.

4. Сформулювати правило піднесення степеня до степеня і записати його для степеня a^m і показника k.

Достатній рівень

1. Довести властивість:
   1) множення степенів; 2) ділення степенів;
   3) піднесення степеня до степеня; 4) піднесення добутку до степеня.
2. Сформулювати властивість степеня від'ємного числа:
   1) з парним показником; 2) з непарним показником.

Завдання на застосування

№84. Варіант I

Середній рівень

1. 1) Обчислити: 2^3; $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $(-2)^2$; $(-2)^3$.

   2) Виконати дії: $a^3 \cdot a^5$; $a^{16} : a^2$; $(a^4)^3$; $(2b)^3$.
2. Знайти значення виразу: $4^2 + 3^2$; $(4 + 3)^2$; $5^4 + 2^4$.
3. Спростити вираз $\frac{\left(a^3\right)^5 \cdot a^7}{a^8}$.

Достатній рівень

1. 1) Обчислити:

   а) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^5$.

   2) Розв'язати рівняння:
   а) $11^9 \cdot x = 11^{11}$; б) $x : 2^2 = 2^3$; в) $(7^2)^x = 7^{14}$.
2. Подати у вигляді степеня з основою 2:
   а) 16; б) $2^7 \cdot 16$; в) $8^5 \cdot 2^{13}$.
3. Знайти значення виразу $\frac{11^6 \cdot 2^7}{22^5}$.

Високий рівень

1. 1) Знайти значення виразу:

   а) $\frac{24^5}{8^6 \cdot 81}$; б) $0{,}2^{11} \cdot 5^{10}$.

   2) Подати добуток у вигляді a^n або $-a^n$:
   а) $(a^5)^4 \cdot (-a^5)^6$; б) $(-a^3)^4 \cdot (-a^4)^3$.

2. Довести, що значення виразу $\dfrac{5^{3n+2}\cdot 2^{3n+1}}{1000^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число:
а) $15^7 + 46^{13} + 26^{20}$;
б) 3^{4n+1}, де n — довільне натуральне число.

№85. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Обчислити: 3^3; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; $(-3)^3$; $(-3)^2$.

   2) Виконати дії: $a^4 \cdot a^7$; $a^{20} : a^2$; $(a^5)^4$; $(2b)^4$; $\left(\dfrac{5}{a}\right)^2$.

2. Знайти значення виразу: $5^2 + 7^2$; $(7+3)^2$.

3. Спростити вираз $\dfrac{\left(a^7\right)^2 \cdot a^5}{a^9}$.

Достатній рівень

1. 1) Обчислити:
   а) $\left(3\dfrac{1}{3}\right)^2$; б) $\left(4\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{14}\right)^4$.

   2) Розв'язати рівняння:
   а) $7^5 \cdot x = 7^7$; б) $x : 3^2 = 3^3$; в) $(11^2)^x = 11^{16}$.

2. Подати у вигляді степеня з основою 2:
   а) 32; б) $2^9 \cdot 32$; в) $8^3 \cdot 2^{11}$.

3. Знайти значення виразу $\dfrac{2^5 \cdot 32}{4^3}$.

Високий рівень

1. 1) Знайти значення виразу:
   а) $\dfrac{35^8 \cdot 2^7}{5^9 \cdot 14^8}$; б) $0{,}125^{11} \cdot 8^{12}$.

   2) Подати добуток у вигляді a^n або $(-a)^n$:
   а) $(a^9)^2 \cdot (-a^9)^3$; б) $(-a^6)^5 \cdot (-a^6)^5$.

2. Довести, що значення виразу $\dfrac{2^{2n+1}\cdot 7^{2n+2}}{196^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число:
   а) $64^{64} - 1$; б) 7^{4n+1}.

№86. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Обчислити: 9^2; $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{8}\right)^2$; $(-4)^2$; $(-4)^3$.

   2) Виконати дії: $a^8 \cdot a^3$; $a^{16} : a^2$; $(a^7)^3$; $(2b)^3$.

2. Знайти значення виразу: $5^2 + 2^3$; $(5 + 3)^2$; $5^6 + 2^6$.

3. Спростити вираз $\frac{\left(a^6\right)^4 \cdot a^3}{a^7}$.

Достатній рівень

1. 1) Обчислити:

   а) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$;   б) $\left(7\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{23}\right)^9$.

   2) Розв'язати рівняння:

   а) $9^{11} \cdot x = 9^{13}$;   б) $x : 2^4 = 2$;   в) $(5^2)^x = 5^{18}$.

2. Подати у вигляді степеня з основою 3:

   а) 27;   б) $3^5 \cdot 9$;   в) $3^{15} \cdot 9^4$.

3. Знайти значення виразу $\frac{3^5 \cdot 81^3}{9^4}$.

Високий рівень

1. 1) Знайти значення виразу:

   а) $\frac{24^5 \cdot 6^4}{48^4 \cdot 3^5}$;   б) $0{,}25^{18} \cdot 4^{19}$.

   2) Подати добуток у вигляді a^n або $(-a)^n$:

   а) $(a^{11})^2 \cdot (-a^{11})^3$;   б) $(-a^3)^8 \cdot (-a^4)^3$.

2. Довести, що значення виразу $\frac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n+2}}{100^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число:

   а) $25^9 + 36^9 + 49^9$;

   б) 2^{4n+1}, де n — довільне натуральне число.

№87. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Обчислити: 4^3; $\left(\frac{1}{9}\right)^3$; $(-5)^2$; $(-5)^3$.

2) Виконати дії: $a^7 \cdot a^5$; $a^{22} : a^2$; $(a^4)^8$; $(3b)^2$; $\left(\frac{a}{5}\right)^3$.

2. Знайти значення виразу: $6^2 + 2^2$; $(6+2)^2$; $6^6 + 2^8$; $25^4 \cdot 4^4$.

3. Спростити вираз $\frac{\left(a^8\right)^3 \cdot a^5}{a^9}$.

Достатній рівень

1. 1) Обчислити:

а) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(8\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{41}\right)^7$.

2) Розв'язати рівняння:

а) $5^8 \cdot x = 5^{11}$; б) $x : 4^2 = 4$; в) $(13^2)^x = 13^{20}$.

2. Подати у вигляді степеня з основою 5:

а) 125; б) $5^7 \cdot 25$; в) $25^2 \cdot 5^{11}$.

3. Знайти значення виразу $\frac{2^7 \cdot 16}{4^5}$.

Високий рівень

1. 1) Знайти значення виразу:

а) $\frac{15^7 \cdot 2^8}{5^8 \cdot 6^8}$; б) $2{,}5^4 \cdot 4^5$.

2) Подати добуток у вигляді a^n або $(-a)^n$:

а) $(-a^7)^2 \cdot (-a^7)^4$; б) $-(-a^3)^6 \cdot (-a^6)^3$.

2. Довести, що значення виразу $\frac{2^{4n+1} \cdot 5^{4n+2}}{10^{4n}}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число:

а) $37^8 + 9$; б) 8^{4n}.

ТЕМА 4. ОДНОЧЛЕНИ

- Поняття про одночлен і його стандартний вигляд
- Додавання, множення, піднесення до степеня одночленів

Виклад теорії

1. Поняття про одночлен і його стандартний вигляд

①

Цілі вирази, в які з чотирьох арифметичних дій входить тільки дія множення, називають *одночленами*. При цьому добутки однакових множників можуть бути подані у вигляді степеня. Одночленами вважають і вирази, які не містять дій (числа, змінні).

Означення. Одночленами називають числа, змінні, їхні добутки і степені.

Приклади.

1. 5; $7{,}5$; $\frac{1}{3}$; $0,(3)$ — одночлени, що є числами.
2. a; b; x; y — одночлени, що є змінними.
3. 5^3; a^3; x^4; m^{100} — одночлени, що є степенями.
4. $4xyz$; $5xx$; $8aa\cdot 2bbb$ — одночлени, добутки чисел і змінних.
5. $3x^3y$; $1{,}3^2xab^4$ — одночлени, добутки і степені чисел зі змінними.

Якщо в одночлені хоча б одним з множників є число 0, то одночлен тотожно дорівнює 0 (на основі властивості множення числа 0).
Одночлен, у якого хоча б один із числових множників дорівнює 0, називають *нульовим одночленом* або *нуль-одночленом*.

Приклади.

1. 0; $0x$; $0x^2$; $0ab$; $0a^3bc^2$ — нульові одночлени.
2. z; $4x$; $2x^2y$; $-3ab$; $3ab\cdot 2c$ — ненульові одночлени.

Якщо в ненульовому одночлені тільки один числовий множник, записаний на першому місці, а добутки однакових буквених множників подані у вигляді степеня, то такий вигляд одночлена називають *стандартним*. Подані таким чином одночлени називають також *одночленами стандартного виду*. Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають *коефіцієнтом одночлена*. Якщо коефіцієнт дорівнює 1, то його прийнято не записувати. Стандартним виглядом нульового одночлена є його запис у вигляді числа 0.

Приклади.

1. 5; x; a^3; $5a^{10}$; $4ab^2c$; $0{,}7xyz^3$ — одночлени стандартного виду (стандартний вигляд одночлена).

2. $5aba^2$; $xxxx^4y$; $-0{,}8a^2bca^4 \cdot 5a$ — одночлени нестандартного вигляду.

3. Стандартним виглядом одночленів $0ab$; $0x$; $0a3b^2x$ є їх запис у вигляд числа 0.

4. В одночлена $0{,}8x^2y$ число 0,8 є коефіцієнтом.

5. В одночленів x; a^2; a^2b коефіцієнти дорівнюють 1.

6. В одночленів $-x$; $-a^2$; $-y^2b$ коефіцієнти дорівнюють -1.

②

Кількість усіх буквених множників одночлена визначає степінь *одночлена.***

***Степенем одночлена* стандартного вигляду з кількома змінними називають суму показників степенів усіх змінних одночлена.**

***Степенем одночлена* стандартного вигляду з однією змінною називают показник степеня змінної.**

Числа, відмінні від нуля, вважають одночленами нульового степеня Число 0 і нульові одночлени вважають такими, що не мають степеня.

- ***Приклади.***

1. Степенем одночлена $5x^2y^3z$ є число 6 (як сума чисел $2 + 3 + 1 = 6$ — показників степенів змінних x, y і z), тобто число всіх буквених множників у цьому одночленові дорівнює 6.

2. x; $2x$; $0{,}8a$; $-\frac{1}{3}b$ — одночлени першого степеня ($x = x^1$; $a = a^1$; $b = b^1$).

2. a^2b^2 — одночлен 4 степеня, xy — одночлен 2 степеня, $a^{10}b^2c$ — одночле 13 степеня.

4. x^2; $4a^2$; $-b^2$ — одночлени другого степеня.

5. x^3; $4x^3$; $-a^3$ — одночлени третього степеня.

6. 5; $\frac{1}{2}$ — одночлени нульового степеня.

7. 0; $0a^2b^2$; $0xy$ — одночлени, що не мають степеня.

2. Дії з одночленами

③

Додавання одночленів

Одночлени з однаковими буквеними частинами можна додавати (віднімати), використовуючи розподільний закон.

потрібно:

- **додати (віднати) їхні коефіцієнти;**
- **дописати до одержаного числа спільну буквену частину.**

Приклади.

1. $2x^2 + 7x^2 = (2 + 7)x^2 = 9x^2$.
2. $9x^3 - 15x^3 = (9 - 15)x^3 = -6x^3$.
3. $-11a^2b - 4a^2b = (-11 - 4)a^2b = -15a^2b$.
4. $-8abc - 2abc = (-8 - 2)abc = -10abc$.

④

Множення одночленів

Одночлени можна перемножувати, використовуючи переставний закон множення.

Щоб перемножити одночлени, потрібно:

- **перемножити їхні коефіцієнти та степені з однаковими основами;**
- **записати у вигляді добутку одержані коефіцієнти і степені, а також решту змінних і степенів.**

Приклади.

1. $5a^2b \cdot 4a^3 = (5 \cdot 4) \cdot (a^2 \cdot a^3) \cdot b = 20a^5b$.
2. $7x^3y \cdot (-2x^2z) = (7 \cdot (-2)) \cdot (x^3 \cdot x^2) \cdot yz = -14x^5yz$.
3. $-2a^3b \cdot 4a^5bc = -8a^8b^2c$.

⑤

Піднесення одночленів до степеня

Одночлени можна підносити до степеня, використовуючи властивості степеня добутку та піднесення степеня до степеня.

Щоб піднести одночлен до степеня, потрібно:

- **піднести до степеня кожний множник;**
- **застосувати до степенів змінних правило піднесення степеня до степеня.**

Приклади.

1. $(3ab)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 9a^2b^2$.
2. $(-5a^3b^4)^2 = (-5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^4)^2 = 25a^6b^8$.
3. $(2xy^2z^5)^3 = 8x^3y^6z^{15}$.

Навчальні завдання

1. Поняття про одночлен і його стандартний вигляд

(1)

№88.

1\. 1) Серед цілих виразів а)–е) вказати три, які не містять алгебраїчного додавання, тобто дій додавання і віднімання.

а) $xy \cdot 7$; б) $a^2 - 1$; в) $-a + 1$;
г) $-m^2n^2$; д) $0{,}7a^2b^3c$; е) $m^4 + 1$.

2) Яка спільна назва у цілих виразів 5; a; a^4; $5a^3$; $4aaaab^2$; $7a^2b^2c^3$?

3) Яка спільна назва у цілих виразів, які є числами, змінними, степенями змінних, добутками чисел, змінних та степенів змінних?

4) Серед цілих виразів а)–е) вказати три, які є одночленами.

а) $4a^2bc$; б) a; в) $a + 1$;
г) $(a - b)(a + b)$; д) $x(x + 2)$; е) -3.

5) Як називають одночлен $5a^2b^3c$, який містить один числовий множник, розміщений на першому місці, а степені змінних мають різні основи?

6) Як називають вирази, які є числами, змінними, степенями змінних та їхніми добутками?

7) Як називають одночлени, які не містять добутку чисел і степенів змінних з однаковими основами?

8) Серед одночленів а)–е) вказати три, які є одночленами стандартного вигляду.

а) a^2bac; б) $2ab$; в) $-4a \cdot 3b$;
г) $0{,}2a^2bb^2c$; д) a^2; е) a^2bc.

9) Якому з чисел тотожно рівні одночлени $0a$; $0x$; $0ab$; $0x^2y^2z^2$?

10) Як записати в стандартному вигляді кожен з одночленів $0a$; $0x$; $0xy$; $0abc$?

11) Як називають числовий множник в одночлені стандартного вигляду?

12) Назвати коефіцієнти одночленів.

а) $7a$; б) $-4x^2$; в) x;
г) $-3x$; д) $\frac{x}{3}$; е) $-x$.

1) які не мають змінної:

а) $4x$; б) 7; в) x;

г) $\frac{1}{3}$; д) a^2bc; е) $0{,}2$;

2) з однією змінною з показником степеня 1:

а) $4a$; б) $-7b$; в) a^2;

г) $4c^2$; д) $0{,}1m$; е) y^2;

3) які містять дві змінні:

а) $0{,}4ab$; б) $7abc$; в) $0{,}4a$;

г) x^2y; д) $-0{,}1m^3n^5$; е) 2;

4) які містять три змінні:

а) $4abc$; б) $0{,}2x^2y$; в) $-8a$;

г) $4mn$; д) $0{,}2xyz$; е) $9m^2nk$.

3. 1) Записати три одночлени нестандартного вигляду.

Записати три одночлени стандартного вигляду, які (2–5) ...

2) не містять змінних;

3) містять одну змінну;

4) містять дві змінних;

5) містять три змінних.

Записати три одночлени стандартного вигляду з коефіцієнтом...

6) 5; 7) 1;

8) -1; 9) $\frac{1}{7}$.

(2)

№89.

1. 1) Назвати число, яке є сумою показників степенів змінних в одночлені $7a^2b^3c^{10}$.

а) 7; б) 10; в) 15.

2) Як називають число 7, яке дорівнює сумі показників степенів змінних в одночлені $5a^2b^5$?

а) Показником одночлена; б) степенем одночлена.

3) Як називають число 7, яке дорівнює сумі показників степенів змінних в одночлені стандартного вигляду?

4) Назвати показники степенів у одночленів.

а) x^2; б) $5a^2$; в) $7a^3$;

г) $-a^{20}$; д) y^{100}; е) $-0{,}1a^6$.

5) Одночленами якого степеня є одночлени a; $-a$; $2y$; $3z$?

б) Одночленами якого степеня вважають одночлени 3; 0,5; 7; $\frac{}{2}$.

2. *Серед одночленів а)–е) вказати три одночлени...*

1) другого степеня:

а) $0,5a^2$;	б) $0,5xy$;	в) $0,5xy^2$;
г) $4m^2n$;	д) $-7mn$;	е) $2x$;

2) третього степеня:

а) 3;	б) a^2b;	в) b^3;
г) $2a^3b$;	д) $4ab^2$;	е) $0,1ab^4$;

3) четвертого степеня:

а) $0,5x^2y^2$;	б) $2x^3$;	в) $0,2x^4$;
г) 4;	д) $0,5xy^3$;	е) 0,2;

4) першого степеня:

а) $5x$;	б) 0,4;	в) $0,4m$;
г) $0,4m^2$;	д) -1;	е) $-c$;

5) нульового степеня:

а) $7x$;	б) 7;	в) $-1,6$;
г) $9a$;	д) m;	е) 0,5.

3. *Записати три одночлени...*

1) нульового степеня;
2) першого степеня;
3) другого степеня;
4) третього степеня;
5) десятого степеня.

2. Дії з одночленами

(3)

№90.

1. *Доповнити записи.*

1) При додаванні одночленів з однаковими буквеними частинами ...
   а) їхні коефіцієнти ______________;
   б) спільну буквену частину ______________.
2) Щоб додати одночлени $3x^2$ і $5x^2$, потрібно додати коефіцієнти ____ і дописати множником спільну буквену частину ______.

2. *Вказати правильну відповідь:*

1) $5x + 7x = \ldots$:

а) $24x$;	б) $12x$;	в) $12x^2$;

2) $-5x - 7x = \ldots$:

а) $-24x$;	б) $-12x$;	в) $-12x^2$;

а) $2a^2$; б) $-2a^2$; в) $-22a^4$;

4) $-15ab + 10ab = \ldots$:
а) $5ab$; б) $-5ab$; в) $-25ab$;

5) $-4a^2b - a^2b = \ldots$:
а) $-5a^4b^2$; б) $-4a^2b$; в) $-5a^2b$;

6) $5xy^2 - 15xy^2 = \ldots$:
а) $5xy^2$; б) $-5xy^2$; в) $-10xy^2$.

. *Виконати алгебраїчне додавання одночленів:*

1) $-4a - 9a$;
2) $-20a^2 + 22a^2$;
3) $-16ac + 10ac$;
4) $20x^2y + 5x^2y$;
5) $abc + 2abc$;
6) $-4mnk - 3mnk$.

4

91.

***Доповнити записи* (1–2).**

. При множенні одночлена на одночлен ...

1) коефіцієнти ______________ ;
2) показники степенів однакових змінних ______________ .

. *Вказати правильну відповідь (1–6):*

1) $a \cdot (-b) = \ldots$:
а) ab; б) $-ab$; в) ba;

2) $-x \cdot (-y) = \ldots$:
а) $-xy$; б) $-x + (-y)$; в) xy;

3) $2b \cdot 3c = \ldots$:
а) $6bc$; б) $2b + 3c$; в) $5bc$;

4) $-2x^2 \cdot 3x^3 = \ldots$:
а) $-6x^6$; б) $-6x^5$; в) $6x^5$;

5) $5a^2b \cdot 2a = \ldots$:
а) $10a^3$; б) $10a^2b$; в) $10a^3b$;

6) $5a^2b^3 \cdot 4a^3b = \ldots$:
а) $20a^4b^3$; б) $20a^6b$; в) $20a^5b^4$.

. *Спростити:*

1) $-x \cdot 2y$;
2) $-m \cdot (-n)$;
3) $-4a \cdot 5b$;
4) $3x \cdot (-4x^2)$;
5) $-4a^2 \cdot (-3a^3)$;
6) $4a \cdot 3a^3b$;
7) $-2x \cdot 4x^2y$.

(5)

№92.

Доповнити записи (1–2).

1. При піднесенні одночлена до степеня ...
 кожний множник одночлена ______________________.

2. *Вказати правильну відповідь (1–8):*

1) $(4a)^2 = \ldots$:
а) $16a$; б) $16a^2$; в) $8a^2$;
2) $(-5b)^2 = \ldots$:
а) $25b^2$; б) $-25b^2$; в) $25b$;
3) $(2x^3)^2 = \ldots$:
а) $2x^6$; б) $4x^5$; в) $4x^6$;
4) $(-7ab^3)^2 = \ldots$:
а) $49a^2b^6$; б) $-14a^2b^6$; в) $14ab^3$;
5) $(2a)^3 = \ldots$:
а) $4a^3$; б) $8a^3$; в) $8a$;
6) $(-3a^2)^3 = \ldots$:
а) $-27a^6$; б) $27a^6$; в) $-9a^6$;
7) $(-2a^5b^4)^3 = \ldots$:
а) $2a^{15}b^{12}$; б) $8a^8b^7$; в) $-8a^{15}b^{12}$;
8) $(a^3b^4c)^4 = \ldots$:
а) $a^{12}b^{16}c^4$; б) $a^7b^8c^5$; в) $4a^{12}b^{16}c^4$.

3. *Піднести одночлен до степеня (1–8):*

1) $(7a)^2$; 2) $(-6c)^2$;
3) $(3x^5)^2$; 4) $(-8ab^5)^2$;
5) $(-2a)^3$; 6) $(2a^2)^3$;
7) $(-3a^4b^5)^3$; 8) $(a^4b^5c)^4$.

(6*)

№93.

1. 1) Серед рівностей а)–е) вказати три, у яких ліва та права частини — одночлени однакового степеня.

а) $4x = 0$; б) $5x^2 = 7x^2$; в) $0x^4 = 0$;
г) $7x = 2$; д) $0x = -5$; е) $4x = 0{,}9y$.

Тренувальні вправи

№94.

Подати у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1. 1) $-5xyyzzz$; 2) $4x^2xy^3y$; 3) $-5a^{10}a^2b$; 4) $7ab^3b$.

3. 1) $-2{,}4a \cdot 2a^3$; 2) $8b \cdot (-3b^4)$; 3) $10x \cdot (-7x^5)$; 4) $9b^2 \cdot 3b^3$.

4. 1) $9a^2b \cdot (-3a^3)$; 2) $3c^2 \cdot (-2c^5b)$; 3) $-ab^2 \cdot 3b^6$; 4) $-7x^4y \cdot 2x^5$.

5. 1) $(-7a)^2$; 2) $(10b)^2$; 3) $(4xy)^2$; 4) $(-8xyz)^2$.

6. 1) $(-2ax)^3$; 2) $(2mn)^3$; 3) $(2mn)^4$; 4) $(-2m^2n)^4$.

Завдання для самоперевірки

№95. Варіант 1

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати той, який є одночленом.
   а) $2a^2 + b$; б) $2a^2b$; в) $\frac{a}{b}$.
   2) Серед виразів а)–в) вказати той, який не є одночленом.
   а) $2a$; б) $4x^2yz$; в) $2a + b$.
   3) Серед одночленів а)–в) вказати одночлен третього степеня.
   а) $3x^2$; б) $5x^2y$; в) 3.
2. *Вказати:*
   1) добуток одночленів $(-3ab) \cdot 2a^2$:
   а) $6a^3b$; б) $-6a^3b$; в) $-6a^2b$;
   2) стандартний вигляд одночлена $5xxxxyy$:
   а) $5x^4y^4$; б) $5x^4y^2$; в) $5x^4 + y^2$;
   3) одночлен, що утворюється при піднесенні до степеня $(2x^2y)^3$:
   а) $6x^5y^3$; б) $8x^5y^3$; в) $8x^6y^3$.
3. *Подати у вигляді одночлена стандартного вигляду:*
   1) $5aaaabb$; 2) $4a^2b^3 \cdot 3ab^5$; 3) $(-4a^2b^5)^2$.

№96. Варіант 2

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати той, який є одночленом.
   а) $a + 1$; б) $3a^4bc$; в) $\frac{a}{b}$.
   2) Серед виразів а)–в) вказати той, який не є одночленом.
   а) b; б) $b + 1$; в) $4ab^2$.
   3) Серед одночленів а)–в) вказати одночлен четвертого степеня.
   а) $4x^3$; б) $2x^3y$; в) 4.
2. *Вказати:*
   1) добуток одночленів $(-5xy^2) \cdot 3y^3$:
   а) $-15xy^5$; б) $-15xy^6$; в) $-8xy^5$;
   2) стандартний вигляд одночлена $-3xxzzzz$:
   а) $3x^2z^4$; б) $-3x^2z^2z^2$; в) $-3x^2z^4$;
   3) одночлен, що утворюється при піднесенні до степеня $(-5x^3z^2)^2$:
   а) $-25x^6z^4$; б) $25x^6z^4$; в) $-10x^5z^4$.

3. *Подати у вигляді одночлена стандартного вигляду:*
   1) $7aaaaaac$;   2) $5a^4c^5 \cdot 2ac^5$;   3) $(-3a^3b^4)^2$.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на відтворення

№97.

Середній рівень

1. **Навести приклад одночлена стандартного вигляду зі змінними a і b.**
2. **Навести приклад одночлена стандартного вигляду четвертого степеня:**
   1) з однією змінною;   **2) із двома змінними.**

Достатній рівень

1. Дати означення одночлена.
2. Який одночлен називають одночленом стандартного вигляду?
3. Сформулювати означення степеня одночлена.

Завдання на застосування

№98. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Записати добуток у вигляді одночлена стандартного вигляду:
   а) $3ab \cdot 7$;   б) $4aaab$;   в) $5ab \cdot 2a$;   б) $10a^2 \cdot 4a^6b^3$.
   2) Піднести одночлен до степеня:
   а) $(4a^2b^3)^2$;   б) $(4a^5b^4)^3$.

Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

2. а) $-8a^4b^4 \cdot (-3a^3b^5)$;   б) $(-5a^4b)^2$.
3. а) $\frac{1}{3}a^2b \cdot \left(-\frac{3}{4}a^5b^3\right)$;   б) $(-0{,}1a^4b)^3$.

Достатній рівень

Виконати дії (1–2):

1. а) $1\frac{1}{3}a^2b^3c \cdot \left(-1\frac{1}{2}a^3b^4\right)$;   б) $\left(\frac{1}{3}a^2b^3\right)^4$.
2. а) $(2ab)^3 \cdot (-3ab)^2$;   б) $(2a^6)^3 \cdot (-5a^2b^3)^2$.

3. Подати вираз у вигляді квадрата одночлена:

а) $121a^6b^{10}$; б) $-6a^3b^5\cdot\left(-\frac{1}{6}a^3b^3\right)$.

Високий рівень

1. **Виконати дії:**

а) $(-a^2b^4)^4\cdot(-0{,}1a^5b)^3$; б) $\dfrac{(2a^2b^3)^3\cdot(0{,}5ab^2)^2}{(3a^2b^3)^4}$.

2. **Знайти** x **з рівняння** $\frac{1}{8}a^{20}b^{10}c^5 : x=\left(\frac{1}{2}a^5b^2c\right)^3$.

3. **Виконати дії:** $\dfrac{(a^4b^3)^m\cdot(a^mb^6)^2}{(a^{2m}b^4)^3}$.

№99. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Записати добуток у вигляді одночлена стандартного вигляду.
а) $8ab\cdot 3$; б) $15abbbba$; в) $6a\cdot 4ab$; г) $5a^7\cdot 3a^3b^2$.
2) Піднести одночлен до степеня:
а) $(3a^2b^5)^2$; б) $(3a^4b^6)^3$.

Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду (2–3):

2. а) $-7a^3b^3\cdot(-3a^4b^2)$; б) $(-8a^4b^5)^2$.

3. а) $\frac{1}{11}a^2b^5\cdot\left(-\frac{11}{13}ab^3\right)$; б) $(-0{,}1a^5b)^2$.

Достатній рівень

Виконати дії (1–2):

1. а) $1\frac{1}{13}a^4bc^4\cdot\left(3\frac{1}{4}a^6b^2\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}a^7b^3\right)^4$.

2. а) $(-3a^2b^3)^2\cdot(-2a^4b^3)^3$; б) $\left(-\frac{1}{2}a^7b^3\right)^2\cdot(-5a^2b)^3$.

3. Подати вираз у вигляді квадрата одночлена:
а) $64a^{12}b^2$; б) $(-0{,}01a^4b^7)\cdot(-a^6b^{11})$.

Високий рівень

1. Виконати дії:

а) $(-10a^3b^5)^2\cdot(-4\,a^4b)^3$; б) $\frac{(0,5a^2b)^3\cdot(2a^3b^6)^4}{(a^2b^4)^3}$.

2. Знайти x з рівняння $x\cdot\left(\frac{1}{3}a^2b^4c\right)^2=a^6b^{10}c$.

3. Виконати дії: $\frac{(a^5b^2)^m\cdot(a^mb^6)^3}{(a^{4m}b^9)^2}$.

№100. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Записати добуток у вигляді одночлена стандартного вигляду.
а) $-2ac\cdot5$; б) $7aaabb$; в) $3ab\cdot2b$; г) $5a^3\cdot2a^4b^2$.
2) Піднести одночлен до степеня:
а) $(5a^3b^4)^2$; б) $(2a^2b^5)^3$.

Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду (2–3):

2. а) $(-9a^5b^4)\cdot(-2a^2b^3)$; б) $(-6a^7b^3)^2$.
3. а) $\frac{1}{8}ac^3\cdot\left(-\frac{8}{9}a^2c^5\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}a^3b^4\right)^4$.

Достатній рівень

Виконати дії (1–2):

1. а) $1\frac{3}{4}a^2b^2\cdot\left(-1\frac{1}{7}a^3b^4c\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}a^3b^4\right)^4$.
2. а) $(-4a^2b)^2\cdot(-10\,a^3b^2)^3$; б) $\left(-\frac{1}{4}a^3b^2\right)^2\cdot(-4a^5b)^3$.
3. Подати вираз у вигляді квадрата одночлена:
а) $81a^{10}b^{14}$; б) $\left(-\frac{1}{2}a^{11}b^2\right)(-32a^3b^8)$.

Високий рівень

1. Виконати дії:

а) $-(-a^5b^6)^4\cdot(-0,2a^2b^3)^2$; б) $\frac{(-2a^2b)^5\cdot(0,5a^5b^3)^4}{(a^2b^5)^3}$.

2. Знайти x з рівняння $\frac{1}{7}a^{22}b^6c^2 : x = \left(\frac{1}{7}a^6b^3c\right)^2$.

3. Виконати дії: $\frac{(a^2b^5)^n \cdot (a^nb^5)^2}{(a^{2n}b^5)^2}$.

1. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Записати добуток у вигляді одночлена стандартного вигляду.
 а) $-4ac \cdot 8$; б) $12aabbbb$; в) $7a \cdot 3ab$; г) $8a^4 \cdot 2a^3b^2$.
 2) Піднести одночлен до степеня:
 а) $(7a^4b^5)^2$; б) $(3a^4b^2)^3$.

Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду (2–3):

2. а) $(-6a^5b^5) \cdot (-2a^4b^6)$; б) $(-7a^4b)^2$.

3. а) $\frac{1}{5}a^2b \cdot \left(-\frac{5}{7}a^3b^6\right)$; б) $(-0{,}3a^5b)^2$.

Достатній рівень

Виконати дії (1–2):

1. а) $\left(-1\frac{3}{5}a^6b^4c\right) \cdot \left(2\frac{1}{2}a^4c^2\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2}a^4b^2\right)^4$.

2. а) $(2ab)^3 \cdot (-5a^2b)^2$; б) $\left(\frac{1}{3}a^2b\right) \cdot (-3a^5b^3)^3$.

3. Подати вираз у вигляді квадрата одночлена:
 а) $144a^8b^{12}$; б) $(-50a^{13}b^4) \cdot (-0{,}5a^5b^8)$.

Високий рівень

1. Виконати дії:

 а) $-(-a^3b^5)^4 \cdot (-0{,}1a^6b^2)^3$; б) $\frac{\left(\frac{1}{9}a^9b^5\right)^2 \cdot (3a^3b^4)^3}{(a^4b^2)^4}$.

2. Знайти x з рівняння $x \cdot \left(\frac{1}{5}a^3b^4\right)^3 = \frac{1}{5}a^{10}b^{12}$.

3. Виконати дії: $\frac{(a^3b^4)^n \cdot (a^nb^2)^5}{(a^{2n}b^5)^2}$.

№102. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Записати одночлен $3aaab^3 \cdot 7a^2b^4$ у стандартному вигляді та знайти його степінь.
   2) Виконати дії:
   а) $a^{15} : a^3$; б) $(a^7)^3$; в) $(9a^3b^4)^2$.
2. Обчислити значення одночлена:
   а) $-3ab$, якщо $a = 4$ і $b = 5$; б) $5a^3$, якщо $a = 2$.
3. Виконати дії:
   а) $\dfrac{(c^8)^2 \cdot c^4}{c^5}$; б) $(-2a^3b)^2 \cdot a^5$.

Достатній рівень

1. 1) Записати властивість добутку степенів для степенів $b^m \cdot b^k$, де m k — натуральні числа, та довести її.
   2) Виконати дії:
   а) $2{,}1a^3b^2 \cdot (-5a^4bc)$; б) $(-3a^4b^3)^2 \cdot 2a^2b$.
2. Обчислити значення одночлена $(-3a^2b^3)^2 \cdot (-2a^2b)^3$, якщо $a = \dfrac{2}{3}$
   $b = 1\dfrac{1}{2}$.
3. Подати одночлен $144a^{20}b^{14}$ у вигляді:
   а) добутку двох одночленів, одним з яких є $-36a^4b^2$;
   б) квадрата одночлена.

Високий рівень

1. 1) Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:
   а) $-\left(-0{,}1a^3b^5\right)^3 \cdot \left(-a^3b^2\right)^6$; б) $\dfrac{\left(a^2b^5\right)^3 \cdot \left(a^6d^5\right)^4}{\left(-a^3d^4\right)^2}$.
   2) Знайти значення виразу $(x^3y^5)^2x^4$, якщо $x = 0{,}125$ і $y = -8$.
2. Довести, що значення виразу $\dfrac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n+2}}{100^n}$ не залежить від n.
3. Якою цифрою закінчується число $79^{2n+1} + 23^{4n}$, де n — натуральн число?

№103. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Записати одночлен $8a^4bb \cdot 5a^6b^3$ у стандартному вигляді та знайти його степінь.

   2) Виконати дії:

   а) $a^{24} : a^2$; б) $(a^{11})^3$; в) $(6a^7b^4)^2$.

2. Обчислити значення одночлена:

   а) $-8ac$, якщо $a = 3$ і $c = -10$; б) $5a^3$, якщо $a = 2$.

3. Виконати дії:

   а) $\dfrac{(c^{11})^3 \cdot c^2}{c^{15}}$; б) $(-2a^5b^2)^4 \cdot b^3$.

Достатній рівень

1. 1) Записати властивість степеня добутку для степеня $(ac)^m$, де m — натуральне число, і довести її.

   2) Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду і знайти його степінь:

   а) $2{,}4a^7b^8 \cdot (-3a^3b^2c)$; б) $(-6a^2b^9)^2 \cdot 2a^5b$.

2. Спростити вираз $(5a^3b^4)^2 \cdot (-a^2b)^4$ і знайти його значення, якщо $a = \frac{3}{5}$ і $b = 1\frac{2}{3}$.

3. Подати одночлен $225a^{18}b^4$ у вигляді:

   а) добутку двох одночленів, одним з яких є $-75a^3b$;

   б) квадрата одночлена стандартного вигляду.

Високий рівень

1. 1) Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

   а) $-(-a^2b^3)^4 \cdot (-0{,}2a^4b^5)^3$; б) $\dfrac{(a^7b^3)^4 \cdot (-a^5b^6)^3}{(a^4b^3)^2}$.

   2) Знайти значення виразу $(x^2y^3)^3x^3$, якщо $x = -0{,}5$ і $y = 2$.

2. Довести, що значення виразу $\dfrac{2^{4n+1} \cdot 5^{4n+2}}{10000^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число $45^n + 51^{2n} + 33^{4n}$, де n — натуральне число?

№104. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Записати одночлен $7a^2bbb \cdot 4a^3b^2$ у стандартному вигляді та знайти його степінь.

   2) Виконати дії:

   а) $a^{14} : a^2$; б) $(a^8)^3$; в) $(7a^4b^5)^2$.

2. Обчислити значення одночлена:

   а) $-7ab$, якщо $a = 3$ і $b = -2$; б) $4a^3$, якщо $a = 3$.

3. Виконати дії:

   а) $\dfrac{(c^3)^5 \cdot c^4}{c^9}$; б) $(-3a^4b)^2 \cdot a^6$.

Достатній рівень

1. 1) Записати властивість піднесення степеня до степеня для виразу $(b^m)^k$, де m і k — натуральні числа і довести її.

   2) Виконати дії:

   а) $3{,}6a^4b^5 \cdot (-2a^3b^2c)$; б) $(-5a^3b^7)^2 \cdot 3a^4b$.

2. Обчислити значення одночлена $(5a^3b^4)^2 \cdot (-2a^2b)^3$, якщо $a = \dfrac{4}{5}$ і $b = 1\dfrac{1}{4}$.

3. Подати одночлен $-125a^9b^{15}$ у вигляді:

   а) добутку двох одночленів, одним з яких є $25a^6b^3$;

   б) куба одночлена.

Високий рівень

1. 1) Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

   а) $(-10a^3b^5)^3 \cdot (-a^4b)^2$; б) $\dfrac{(0{,}5a^8b^3)^4 \cdot (2a^2b^4)^3}{(a^3b^2)^4}$.

   2) Знайти значення виразу $(x^4y^5)^2x^2$, якщо $x = 8$ і $y = 125$.

2. Довести, що значення виразу $\dfrac{2^{2n+1} \cdot 3^{2n+2}}{36^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число $7^{4n} + 45^{3n} + 33^{4n}$, де n — натуральне число?

105. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Записати одночлен $9aaaab^5bbb \cdot (-3a)$ у стандартному вигляді та знайти його степінь.

   2) Виконати дії:

   а) $a^{30} : a^3$; б) $(a^5)^4$; в) $(8a^7b^3)^2$.

2. Обчислити значення одночлена:

   а) $-9ab$, якщо $a = -3$ і $b = -10$; б) $3a^4$, якщо $a = -2$.

3. Виконати дії:

   а) $\dfrac{(c^7)^3 \cdot c^4}{c^5}$; б) $(-4a^3b^2)^2 \cdot a^6$.

Достатній рівень

1. 1) Записати властивість частки степенів для степенів c^m і c^k, де m і k — натуральні числа і $m > k$, та довести її.

   2) Виконати дії:

   а) $2{,}7a^4b^5 \cdot (-3a^6b)$; б) $(-4a^5b^2)^2 \cdot (a^3b^2)^3$.

2. Обчислити значення одночлена: $(3a^3b^4)^3 \cdot (-a^2b)^2$, якщо $a = 1\frac{1}{2}$ і $b = \frac{2}{3}$.

3. Подати одночлен $-27a^{12}b^{15}$ у вигляді:

   а) добутку двох одночленів, одним з яких є $9a^4b^{10}$;

   б) куба одночлена.

Високий рівень

1. 1) Подати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

   а) $-(-a^2b^4)^6 \cdot (-0{,}3a^2b^4)^3$; б) $\dfrac{(3a^3b^5)^4 \cdot (\frac{1}{9}a^3b^6)^3}{(a^2b^3)^3}$.

   2) Знайти значення виразу $(x^3y^2)^2y^3$, якщо $x = 0{,}25$ і $y = 4$.

2. Довести, що значення виразу $\dfrac{2^{3n+1} \cdot 5^{3n+2}}{1000^n}$ не залежить від n.

3. Якою цифрою закінчується число $17^{4n} + 35^{3n} + 31^{2n}$, де n — натуральне число?

ТЕМА 5. МНОГОЧЛЕН СТАНДАРТНОГО ВИГЛЯДУ. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

- Поняття про многочлен і його стандартний вигляд
- Додавання і віднімання многочленів

Виклад теорії

1. Поняття про многочлен і його стандартний вигляд

1

Означення многочлена

Многочленом називають суму одночленів.

Одночлени, які складають многочлен, називають *членами многочлена*.

Залежно від кількості членів многочлени відповідно називають двочленами, тричленами тощо. Одночлен також вважають многочленом.

Приклади.

1. 7; x; $4a$; $3a^2b$ — многочлени, які є одночленами.
2. $5x-2$; $5xyz+3$; a^2+b^2; $4x^2-3$ — двочлени.
3. x^2+4x-3; $a^2+2ab+b^2$; $4xyz-x^2-5$ — тричлени.
4. $3a$; $a^{10}-1$; $2a^2+a-3$; $a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a-5$ — многочлени з однією змінною.
5. x^2+y; x^2-xy; x^2+y^2+2xy — многочлени з двома змінними.
6. Членами многочлена $5x^4-x^3+2xy-5$ є одночлени $5x^4$, $-x^3$, $2xy$ і -5.

2

Подібні члени многочлена

Подібними членами многочлена називають його члени, які мають однакову буквену частину.

Приклади.

1. У тричлені $x^2+\underline{5x}+\underline{2x}$ подібними є члени $5x$ і $2x$.
2. У многочлені $x^2+\underline{4}-5x-\underline{7}$ подібними є члени 4 і -7.
3. У многочлені $\underline{5a^2b}+\underline{14ab}-\underline{3ab}-7ab^2-\underline{6a^2b}+5$ подібними членами є $5a^2b$ і $-6a^2b$ та $14ab$ і $-3ab$.

Зведенням подібних членів многочлена називають додавання подібних членів.

Многочлен стандартного вигляду

Означення. **Многочленом стандартного вигляду називають многочлен, який не має подібних членів і у якого кожний член є одночленом стандартного вигляду.**

Приклади.

1. $x^4 - 5x^3 - x^2 - 7x - 3$ — многочлен стандартного вигляду з однією змінною.
2. $a^2 + b^2 - 2ab + a - 4b + 7$ — многочлен стандартного вигляду з двома змінними a і b.
3. $a^3 + b^3 + abc + a^2b - 4c$ — многочлен стандартного вигляду з трьома змінними a, b і c.
4. Многочлен $x^2 - 5x + 7x - 3$ не є многочленом стандартного вигляду, оскільки містить подібні члени $-5x$ і $7x$.
5. Многочлен $x^3y - 2xy \cdot 3x^2 + y^2y$ не є многочленом стандартного вигляду, оскільки містить одночлени нестандартного вигляду $2xy \cdot 3x^2$ і y^2y.

Будь-який многочлен можна звести до многочлена стандартного вигляду.

Щоб звести многочлен до стандартного вигляду, потрібно:

- **подати його одночлени у стандартному вигляді;**
- **звести подібні члени.**

Приклад.

$5x^2 - 3x + 5xx = 5x^2 - 3x + 5x^2 = 10x^2 - 3x$ — спочатку подали третій член у стандартному вигляді, а потім звели подібні члени.

3

Степінь многочлена

Степенем многочлена **називають степінь того його доданка (члена), у якого він є найбільшим.**

Щоб знайти степінь многочлена, потрібно:

- **встановити степені всіх його членів;**
- **серед цих степенів визначити найбільший і прийняти його за степінь многочлена.**

Приклади.

1. У многочлені $7x^3 - 4x^2 + 5$ члени мають степені 3, 2, 0. Найбільший степінь у члена $7x^3$ — число 3. Отже, степінь многочлена дорівнює 3.
2. У многочлені $3a^4 - a^2b^3 + 4ab^2 + b^2$ найбільший степінь у члена $-a^2b^3$; він дорівнює 5. Отже, степінь многочлена дорівнює 5.
3. a; $5x + 3$; $0{,}7a - 1$; $-19a$ — многочлени першого степеня.
4. $a^2 - 4a + 5$; $a^2 + 2ab + b^2 - 3$; $x^2 - 3$ — многочлени другого степеня.

Як правило, многочлени стандартного вигляду записують у порядку спадання степенів його членів, що дозволяє швидко встановити степінь многочлена.

Член многочлена, який має найбільший степінь, називають *старшим*, а член, який не містить змінних, називають *вільним членом*.

Приклади.

1. Члени многочленів $2x+1$; x^4-5x^3-4x+7; $a^4-a^2b-b^2-ab-b+3$ записані у порядку спадання степенів.
2. У многочлена $5x^3-2x^2+7x-3$ старший член — $5x^3$, вільний член — -3.

2. Додавання і віднімання многочленів

4

Розкривання дужок

Якщо многочлен узято в дужки, перед якими стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, потрібно:

- **опустити дужки та записати всі члени, не змінюючи їхніх знаків.**

  Приклад.

  $+(a^2-4ab-c)=a^2-4ab-c.$

Якщо многочлен узято в дужки, перед якими стоїть знак «–», то, розкриваючи дужки, потрібно:

- **опустити дужки та записати всі члени, змінивши їхні знаки на протилежні.**

  Приклади.

  1. $-(x^2+4x-7)=-x^2-4x+7.$
  2. $-(-ab+b^2+a^2-4)=ab-b^2-a^2+4.$

5

Додавання многочленів

Щоб додати два многочлени, потрібно:

- **записати послідовно у вигляді алгебраїчної суми всі члени обох многочленів;**
- **звести подібні доданки (якщо вони є).**

  Приклад.

  $6x^2+(3x^2-4)=6x^2+3x^2-4=9x^2-4.$

6

Віднімання многочленів

Щоб від многочлена A відняти многочлен B, потрібно:

- **до всіх членів многочлена A дописати усі члени многочлена B, змінивши знак кожного його члена на протилежний;**
- **звести подібні доданки (якщо вони є).**

Приклади.
1. $4x^2-(x-3)=4x^2-x+3$.
2. $a^3-4a^2-(-3a^2+5)=a^3-4a^2+3a^2-5=a^3-a^2-5$.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Многочлен. Стандартний вигляд многочлена

1

№106.

1. **1)** **Який з наведених виразів а)–в) є сумою одночленів?**

а) $a^2(a-3)$; б) $ab+a^2-b^2-4$; в) $\dfrac{a^4}{a-5}$.

2) **Яка спільна назва у цілих виразів, які є одночленами або сумою одночленів?**

3) *Доповнити запис.*

Многочленом називають ________________ або суму ____________.

2. *Серед многочленів а)–е)*

а) $x-2$; б) $4x^2$; в) $4x^2+x-2$;
г) a^2+ab-b^2; д) a^2-b^2; е) 2

вказати два, які є (1–3) ...

1) одночленами;

2) двочленами;

3) тричленами.

Серед многочленів а)–е)

а) x^2-2x+5; б) $ab-a^2-b^2$; в) $x^2y+x^2+4y^2$;
г) $a^2+b^2+c^2-2$; д) $xyz+x^2-z^2$; е) $2a+1$.

вказати два многочлени (4–6) ...

4) з однією змінною;

5) із двома змінними;

6) із трьома змінними.

7) У многочлені x^3-4x^2+5x-4 вказати члени зі знаком «–».

8) Серед виразів а)–е) вказати три, які є многочленами:

а) $x^2(x+2)$; б) x^2+x+2; в) $\dfrac{x}{x+2}$;

г) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$; д) a^2-ab+b^2; е) $3x+1$

9) Серед цілих виразів а)–е) вказати три, які є многочленами:

а) $4xx^2y$; б) $4x(x^2+y)$; в) $(x-2)^2(x+2)$;

г) $x^2-3x+5+3x$; д) $(x+1)(x+2)$; е) x^2-2x+2.

3. *Записати три многочлени, які є ...*

1) одночленами; 2) двочленами; 3) тричленами.

Записати три многочлени (4–6) з ...

4) однією змінною;

5) двома змінними;

6) трьома змінними.

7) Записати три цілих раціональних вирази, які не є многочленами.

2

№107.

1. 1) У многочлені x^3-2x+x^2-4x+5 вказати два члени з однаковими буквеними частинами.

2) Як називають члени одночлена з однаковими буквеними частинами?

Назвати подібні члени многочлена:

3) $4x-3-7x$; 4) $a^3-4a^2-7+a^2$;

5) $ab-a^2b^2+4ab-a^2b$.

Назвати члени нестандартного вигляду у многочлені:

6) x^3-2xx^2+4x-2; 7) $a^2b^2-2ab\cdot 4a+1$.

8) *Доповнити запис.*

Многочленом стандартного вигляду називають многочлен, у якого всі члени ________________ і не має ________________.

2. 1) Серед многочленів а)–е) вказати три многочлени стандартного вигляду:

а) x^2+3x^2x-4; б) x^2+3x^3-4; в) $a^2-6a-4a-5$;

г) $a^2-10a-5$; д) $4a^3-b^2b-a^2b$; е) $4a^3-b^3-a^2b$.

Назвати многочлен стандартного вигляду, в який перетвориться многочлен:

2) $x^2x-3x=\ldots$:

а) $-x$; б) x^3-3x; в) $2x^2-3x$;

3) $a^3a^2+4=\ldots$:

а) a^6+4; б) a^5+4; в) $2a^5+4$;

4) $-4x^2+5x^2+1=\ldots$:

а) $-2x^2+1$; б) x^2+1; в) $-x^2+1$;

5) $-4a^2+9a^2+7=\ldots$:

а) $-5a^2+7$; б) $5x^2-7$; в) $5a^2+7$;

6) $2ab + 8 - 3ab = \ldots$:

а) $-ab + 8$; б) $-5ab + 8$; в) $ab + 8$.

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1) $2 \cdot 3a - 2 \cdot 5$; 2) $x \cdot 2x^2 + x \cdot 5$;

3) $-2a - 4a + a^2$; 4) $-3a^2 + 4a^2 - 8$;

5) $12ab - 14ab + 3$; 6) $-5 + 2m^3 - 3m^3 - 10$.

③

№108.

1) Що називають степенем многочлена?

а) Суму степенів усіх його членів;

б) степінь члена, в якого він найбільший.

2) *Доповнити запис.*

Степенем многочлена називають степінь члена, у якого він ______.

Назвати член многочлена, в якого степінь найбільший (старший член):

3) $3x + 2$; 4) $1 - 3x + x^2$; 5) $4a^2 - 3a + 1$; 6) $1 + 4a^{10}$;

7) $a^2 - a^2b + b + 10$; 8) $x^3y^3 - x^8 + x^2$.

Серед многочленів а)–е) вказати три многочлени:

1) першого степеня:

а) $4x - 5$; б) $4x^2 - 5$; в) $xy - 5$;

г) $0{,}2a - 3$; д) $0{,}2ab - 3$; е) $\frac{x}{3} + 7$;

2) другого степеня:

а) $2x + 3$; б) $4x^2 - 3x + 7$; в) $4 - 3x + 5x^3$;

г) $a^3 - b^3$; д) $4ab - 5a + b$; е) $a^2 + b^2 - 3$;

3) четвертого степеня:

а) $a^2b^2 - 5a^3 + 4$; б) $2ab^2 - 3 + a^2$; в) $5x^4 - 3x^3 - 2$;

г) $4x - 1$; д) $a^3b - a^2 + b^2$; е) $a^3b^2 - a^4 + b$.

Записати три многочлени:

1) першого степеня; 2) другого степеня;

3) третього степеня; 4) п'ятого степеня.

№109.

Назвати розклад за розрядами:

1) числа 24:

а) $2 \cdot 10 + 4 \cdot 1$; б) $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10$; в) $4 \cdot 10 + 2 \cdot 1$;

2) числа 783:

а) $3 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 100$; б) $3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7$; в) $7 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0$;

3) числа 402:

а) $4 \cdot 100 + 2 \cdot 10$; б) $4 \cdot 100 + 2 \cdot 1$; в) $4 \cdot 10 + 2 \cdot 1$.

Назвати запис, у якому подано у вигляді многочлена число, яке має...

4) a десятків і b одиниць:
а) $100a + 10b$; б) $10a + b$;
5) a сотень, b десятків і c одиниць:
а) $100a + 10b + c$; б) $10a + b + 0c$;
6) x сотень і y одиниць:
а) $100x + y$; б) $10x + y$.

Подати у вигляді многочлена число, в якому (7–10):

7) b десятків і c одиниць;
8) m сотень, n десятків і k одиниць;
9) a десятків і 4 одиниці;
10) a сотень і b десятків.

Тренувальні вправи

№110.

Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1. 1) $4a - 5a + 1$; 2) $3 - 2a - 7a$; 3) $4 - 2b + 8b$; 4) $x - 5 - 5x$.
2. 1) $a^2 - 3a^2 + 7$; 2) $-a^2 - 7 - 5a^2$; 3) $7 + x^2 - 3x^2$; 4) $-2x^2 + 14 + x^2$.
3. 1) $2ab - 3ab + a$; 2) $-7xy + x - xy$; 3) $4a^2b^2 - b^2 - 5a^2b^2$; 4) $-4y^2 - 4 + y^2$.

Записати старший член і степінь многочлена:

4. 1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 10$; 2) $x - 3x^2 + 2x^4 + 5$;
3) $a^7 - 4a^6 + a^3 - a^8$; 4) $a^4 - 5a^5 + 1$.
5. 1) $xy - x^2y + x^2 - 10$; 2) $x^2y^3 - x^5 + 2x^3y^4 - 12$;
3) $a^3 + b^3 + a^2b^2 - 4$; 4) $a^2b - 7 + a^3 - b^4$.

Завдання для самоперевірки

№111. Варіант 1

1. 1) Як називають цілі раціональні вирази, які є одночленами або сумою одночленів?
2) Назвати подібні члени многочлена $2x^3 - 4x^2 + 2x - 6x^2$.
3) Назвати старший член і степінь многочлена $6 - 12x^2 + 2x^4$.
2. *Назвати многочлен стандартного вигляду, в який перетвориться многочлен:*
1) $4x^2 \cdot x^4 - 3x^2 = \ldots$:
а) $4x^8 - 3x^2$; б) $4x^6 - 3x^2$; в) $7x^2 + x^2$;
2) $-17ab + 5 + 20ab = \ldots$:
а) $-37ab + 5$; б) $-3ab + 5$; в) $3ab + 5$.
3) Серед многочленів а)–е) вказати три многочлени третього степеня:
а) $1 - 4x^2 + x^3$; б) $x^2y - x^2 - 5$; в) $3x + 5$;
г) $a^3 - a^3b + a^2$; д) $a^3 - ab + a^2$; е) $x^3 - x^4 + 5$.

3. *Звести многочлен до стандартного вигляду (1–2):*
   1) $-9a^2+5-2a^2$; 2) $3a^2a^6-a^2+5$.
   3) Записати многочлен третього степеня:
   а) з однією змінною; б) із двома змінними.

№112. Варіант 2

1. 1) Як називають многочлен, у якого всі члени є одночленами стандартного вигляду і який не має подібних доданків?
   2) Назвати подібні члени многочлена $x^2-5x+3+7x$.
   3) Назвати старший член і степінь многочлена $1-5x^2+2x^3$.
2. *Назвати многочлен стандартного вигляду, в який перетвориться многочлен (1–2):*
   1) $5x^3\cdot x^2+7=\ldots$:
   а) $5x^6+7$; б) $5x^5+7$; в) $12x^6$;
   2) $-4x+7x-5=\ldots$:
   а) $3x-5$; б) $-3x-5$; в) $-11x-5$.
   3) Серед многочленів а)–е) вказати три многочлени другого степеня:
   а) a^2-5a+3; б) a^2b-a^2+3; в) $2x+1$;
   г) x^2-2x+x^3; д) $1-4x-x^2$; е) $1-4x-x^2$.
3. *Звести многочлен до стандартного вигляду (1–2):*
   1) $-4a^2+7a^2+8$; 2) $5x^2x^3-x^2+4$.
   3) Записати многочлен другого степеня:
   а) з однією змінною; б) із двома змінними.

2. Додавання і віднімання многочленів

4

№113.

1. *Доповнити записи.*
   1) Якщо многочлен узято в дужки, перед якими стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, потрібно опустити дужки і записати всі члени, ...
   а) змінивши знак кожного члена на протилежний;
   б) змінивши знак першого члена на протилежний;
   в) не змінюючи їхні знаки.
   2) Якщо многочлен узято в дужки, перед якими стоїть знак «–», то, розкриваючи дужки, потрібно опустити їх і записати всі члени, ...
   а) змінивши знак першого з них на протилежний;
   б) змінивши знак кожного члена на протилежний;
   в) не змінюючи їхніх знаків.

Доповнити запис властивості розкривання дужок (3–4):

3) $+(a+b+c)=$ ________________;

4) $-(a+b+c)=$ ________________.

2. *Вказати правильну відповідь (1–6):*

1) $+(2a-b+c)=\ldots$:
а) $-2a+b-c$; б) $2a-b+c$; в) $-2a-b-c$;

2) $(-x^2-y^2)=\ldots$:
а) $-x^2-y^2$; б) x^2+y^2; в) $-x^2+y^2$;

3) $-(2a+b)=\ldots$:
а) $-2a+b$; б) $2a+b$; в) $-2a-b$;

4) $-(2x^2-b)=\ldots$:
а) $2x^2+b$; б) $-2x^2-b$; в) $-2x^2+b$;

5) $-(-a-b)=\ldots$:
а) $a-b$; б) $a+b$; в) $-a+b$;

6) $-(2x+3y-7)=\ldots$:
а) $2x-3y+7$; б) $-2x-3y+7$; в) $2x+3y-7$.

3. *Розкрити дужки у многочлені:*

1) (a^2-3); 2) (a^2-4a+3); 3) $(-4a^3+2ab+b^2-1)$;
4) $-(a^2+4)$; 5) $-(a^3-4a+5)$; 6) $-(-a^3+ab-7+5)$.

(5)

№114.

1. 1) Щоб додати два многочлени, потрібно…

а) записати послідовно у вигляді алгебраїчної суми всі члени многочленів, змінивши їхні знаки на протилежні;

б) записати послідовно у вигляді алгебраїчної суми всі члени обох многочленів і звести подібні доданки, якщо вони є.

2) *Доповнити запис.*

$(a+b)+(c+d)=$ ________________.

2. *Вказати правильну відповідь (1–5):*

1) $8a+(3a+5)=\ldots$:
а) $5a+5$; б) $5a-5$; в) $11a+5$;

2) $-2x+(3x-2)=\ldots$:
а) $-5x-2$; б) $x-2$; в) $-5x+2$;

3) $-b^2+(-4b^2-3)=\ldots$:
а) $-4b^2-3$; б) $-5b^2-3$; в) $3b^2-3$;

4) $ab+(7-ab)=\ldots$:
а) 7; б) $7+ab$; в) $-7+2ab$;

5) $-2x^3 + (9 - 4x^3) = \ldots$:
а) $2x^3 + 9$; б) $-4x^6 + 9$; в) $-6x^3 + 9$.

3. *Виконати додавання:*
1) $9x + (4x + 2)$; 2) $a^2 + (3a^2 - 4)$;
3) $-5ab + (7ab - 3)$; 4) $-a^2 + (-3a^2 - 4)$;
5) $2ab + (-3 + 5ab)$; 6) $a^2 + (4 - 3a^2)$.

№115.

1. **1) Щоб від многочлена А відняти многочлен В, потрібно до усіх членів многочлена А дописати усі члени многочлена В, ...**
а) не змінюючи їхні знаки;
б) змінивши знак кожного члена на протилежний і звести подібні доданки, якщо вони є.

На основі правила віднімання доповнити записи (2–3):
2) $a + b - (c + d) =$ __________________;
3) $a + b - (c - d) =$ __________________.

2. *Вказати правильну відповідь (1–5):*
1) $a^2 - (a + 10) = \ldots$:
а) $a^2 - a + 10$; б) $a^2 + a + 10$; в) $a^2 - a - 10$;
2) $-a^2 - (-a + 10) = \ldots$:
а) $-a^2 - a - 10$; б) $-a^2 - a + 10$; в) $-a^2 + a - 10$;
3) $a^2 - (-a + 10) = \ldots$:
а) $a^2 + a - 10$; б) $a^2 - a + 10$; в) a^2;
4) $2x - (3x + 5) = \ldots$:
а) $-x - 5$; б) $-x + 5$; в) $5x - 5$;
5) $-4x - (2x - 3) = \ldots$:
а) $-6x - 3$; б) $-2x + 3$; в) $-6x + 3$.

3. *Виконати віднімання:*
1) $x^2 - (x + 5)$; 2) $x^2 - (x - 5)$;
3) $x^2 - (-x + 5)$; 4) $12b - (5b - 3)$;
5) $-ab - (4ab - 3)$; 6) $-ac - (2ac + 5)$.

№116*.

A, B і X — многочлени. Виразити многочлен X через многочлени A і B з рівності (1–3):
1) $A + X = B$; 2) $A - X = B$; 3) $X - A = B$.

Записати многочлен X як суму чи різницю даних многочленів з рівності:
4) $X + (a^2 - 4a) = a^3$; 5) $X - (a^3 + a^2) = a + 1$;
6) $(a^4 + a^3) - X = a^2 + a + 1$.

Тренувальні вправи

№117.

Розкрити дужки:

1. 1) $-(4x^2 - x + 3)$; 2) $-(-5x^2 + 2x - 7)$;
3) $-(-a^2 - 5a + 6)$; 4) $-(a^2b^2 + ab - 3)$.

Виконати дії:

2. 1) $7a + (3a - 4)$; 2) $-7a + (3a + 4)$;
3) $-7a + (-3a - 4)$; 4) $-7a + (-3a^2 + 4)$.

3. 1) $5b - (7b - 3)$; 2) $5b - (-7b - 3)$;
3) $-5b - (7b - 3)$; 4) $-5b - (-7b - 3)$.

4. 1) $4a^2 - (9a^2 - 7)$; 2) $xy - (8xy + 3)$;
3) $-5a^2 + (-4a^2 - 3)$; 4) $-7ab - (-4ab - 3)$.

5. 1) $2a + 3 + (4a - 5)$; 2) $4x - 3 - (7x - 2)$;
3) $a^2 - a - (4a + 3)$; 4) $x^2 - 2x - (-5x + 2)$.

Завдання для самоперевірки

№118. Варіант 1

1. *У якому з виразів а)–в) при розкритті дужок знак кожного члена многочлена потрібно змінити на протилежний:*

1) а) $-4a + (3a - 2)$; б) $-7a + (-2a + 5)$; в) $4a - (5a - 2)$;
2) а) $ab + (2ab - 3)$; б) $-x^2 + (x^2 - 4)$; в) $-3a^2 - (a^2 + 4)$;
3) а) $4a + b + (3a - 7)$; б) $4a - b + (3a - 7)$; в) $4a + b - (3a - 7)$.

2. *Вказати правильну відповідь:*

1) $-(-2a + 3) = \ldots$:
а) $2a - 3$; б) $-2a + 3$; в) $2a + 3$;

2) $2x^2 + (-3x^2 + 4) = \ldots$:
а) $5x^2 + 4$; б) $-x^2 + 4$; в) $-x^2 - 4$;

3) $a^2 - (5a^2 - 3) = \ldots$:
а) $-4a^2 - 3$; б) $-4a^2 + 3$; в) $4a^2 + 3$.

3. *Виконати дії:*

1) $-(4a - 3)$; 2) $-7a + (2a - 3)$; 3) $-4a^2 - (a^2 - 3)$.

№119. Варіант 2

1. *У якому з виразів а)–в) при розкриванні дужок знак кожного члена многочлена потрібно змінити на протилежний?*

1) а) $-4a - (2a - 3)$; б) $-5a + (-6a + 3)$; в) $7a + (-5a - 2)$;
2) а) $ac - (-2ac - 3)$; б) $x^2 + (-2x^2 - 4)$; в) $-9c^2 + (4c^2 + 5)$;
3) а) $3a + b + (4a + b)$; б) $-3a - b - (4a + b)$; в) $-3a - b + (4a + b)$.

Вказати правильну відповідь (1–5):

1) $-(-4a-5)=\ldots$:

а) $4a-5$; б) $-4a-5$; в) $4a+5$;

2) $3a^2+(5a^2-2)=\ldots$:

а) $8a^2-2$; б) $2a^2-2$; в) $8a^2+2$;

3) $y^2-(9y^2-3)=\ldots$:

а) $8y^2-3$; б) $10y^2+3$; в) $-8y^2+3$.

Виконати дії:

1) $-(-5ab+2)$; 2) $-14x+(3x-4)$; 3) $-9b^2-(2b^2-4)$.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на відтворення

120.

Середній рівень

1. Дати означення многочлена. Навести приклад двочлена; тричлена; чотиричлена.
2. Сформулювати означення подібних членів многочлена. Навести приклад тричлена, в якого є подібні доданки з буквеною частиною: a^2; ab.
3. Дати означення многочлена стандартного вигляду. Навести приклад тричлена стандартного вигляду зі змінною x.
4. Сформулювати означення степеня многочлена. Навести приклад тричлена:

   а) другого степеня зі змінною x;

   б) третього степеня зі змінною a;

   в) четвертого степеня зі змінними a і b.

Достатній рівень

1. Сформулювати правило зведення подібних доданків і проілюструвати його прикладом.
2. Сформулювати правило додавання многочленів і проілюструвати його прикладом.
3. Сформулювати правило віднімання двох многочленів і проілюструвати його прикладом.

№121. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Знайти значення двочлена $2x^2 + 1$, якщо $x = 3$.
   2) Виконати дії:
   а) $6x^2 + (3x^2 - 4)$; б) $7x - (4x - 3)$.

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду за спаданням показників степеня:

2. $5a^2 - 4a - (3a^2 - 4)$.
3. $4x - (3x^2 - 6) + (4 - 5x)$.

Достатній рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду многочлен $-3a^2 + a - (4 - 5a^2) + (8 - a)$.
   2) Спростити вираз $16b^2 - 5ab - (16b^2 - 7ab + 1)$ і обчислити його значення, якщо $a = -2$ і $b = 3$.
2. Знайти многочлен А, який в сумі з тричленом $5a^2 - 3ab^2 + 4$ дає двочлен $-a^2 + 7ab$, тобто $A + (5a^2 - 3ab) = -a^2 + 7ab$.
3. Знайти значення змінної x, при якому значення суми многочленів $2x^2 - 3x$ і $4x - 2x^2 + 9$ дорівнює 25.

Високий рівень

1. а) Замінити А многочленом, щоб виконувалась рівність $(a^4 + 7a^2 - - 1) + A = (5a^4 - 7a^2 + 10) - (3a^4 + 5a^2 - 13a + 2)$.
   б) Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{abc} + \overline{cba}$.
2. Довести, що сума двох непарних послідовних чисел ділиться на 4.
3. Довести, що сума двоцифрового числа і числа, записаного цими ж цифрами, але в зворотному порядку, ділиться на 11.

№122. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Знайти значення двочлена $3x^2 - 1$, якщо $x = -2$.
   2) Виконати дії:
   а) $-5a^2 + (4a^2 - 7)$; б) $9x - (3x - 2)$.

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду за спаданням показників степеня:

2. $3a - 7a^2 - (4 - 9a^2)$. 3. $2x - (2x^2 - 5) + (5x - 4)$.

1. **1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду $-7b^2 + b - (9 - 8b^2) + (b - 9)$.**

   2) Спростити вираз $20x^2 - 25xy - (20x^2 - 30xy - 2)$ і обчислити його значення, якщо $x = -5$ і $y = 4$.

2. **Знайти многочлен А, різниця якого і двочлена $4a^2 - 7$ дорівнює тричлену $9a^2 - 12a + 3$, тобто $A - (4a^2 - 7) = 9a^2 - 12a + 3$.**

3. Знайти значення змінної x, при якому значення різниці двочлена $2xy - 7x$ і тричлена $4x + 2xy - 3$ дорівнює 25.

Високий рівень

1. 1) Замінити А многочленом, щоб виконувалась рівність $(6a^2b - 3ab^2 + ab - 2) + A = (9a^2b - 4ab^2 + ab - 3) - (3a^2b + 5ab^2 + 2ab)$.

   2) Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{cab} + \overline{bca}$.

2. Довести, що сума чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8.

3. **Довести, що будь-яке трицифрове число, записане однаковими цифрами, ділиться на 37.**

№123. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Знайти значення тричлена $x^2 - 4x^2 + 3$, якщо $x = 5$.

   2) Виконати дії:

   а) $7a^2 + (4a^2 - 3)$; б) $-11x - (3x - 5)$.

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду за спаданням показників степеня:

2. $-11b^2 - 11b - (5 - 12a^2)$.
3. $7x - (4x^2 - 3) + (5 - 8x)$.

Достатній рівень

1. **1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду $-4a^2 + 3a - (7 - 9a^2) + (11 - 3b)$.**

   2) Спростити вираз $19x^2 - 4xy - (19x^2 + 3xy - 2)$ і обчислити його значення, якщо $x = -2$ і $y = -3$.

2. Знайти многочлен А, при якому рівність $(5a^2 - 3ab + 2) - A = -a^2 + 2ab$ є тотожністю.

3. **Знайти значення змінної x, при якому значення різниці двочлена $5 - 2x^2$ і тричлена $-2x^2 + 4x - 3$ дорівнює 32.**

1. 1) Замінити А многочленом, щоб виконувалась рівність $(7a^2-4ab-2b)+\text{A}=(3a^2-ab+2b^2)-(6a^2+3ab-4b^2)$.

   2) Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{acb}+\overline{cba}$.

2. Довести, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.
3. Довести, що різниця трицифрового числа a і трицифрового числа b, записаного цими ж цифрами, але в зворотному порядку ($a>b$) ділиться на 99.

№124. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Знайти значення тричлена a^2-2a+5, якщо $a=-4$.

   2) Виконати дії:

   а) $-11a^2+(a^2-3)$; б) $4x-(5x-2)$.

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду за спаданням показників степеня:

2. $4m-13m^2-(5+16m^2)$.
3. $5c+(4c^2-3)-(7-9c^2)$.

Достатній рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду $-17a^2+(a-11-12a^2)+(2a-5)$.

   2) Спростити вираз $31a^2-24ab-(3ab^2-6ab+1)$ і обчислити його значення, якщо $a=\frac{1}{3}$ і $b=-2$.

2. Знайти многочлен P, при якому рівність $(-3ab+b^2-4)+\text{P}=-5ab+3$ є тотожністю.
3. Знайти значення змінної x, при якому значення різниці тричлена $4x^2-3x-7$ і двочлена $3+4x^2$ дорівнює 5.

Високий рівень

1. 1) Замінити А многочленом, щоб виконувалась рівність $(5x^2y^2-5x^2y-3xy^2+4)+\text{A}=(4x^2y^2-7x^2y+2xy^2+3)-(x^2y^2-x^2y+2xy^2)$.

   2) Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{abo}+\overline{boa}$.

2. Довести, що сума двох парних послідовних чисел не ділиться на 4.
3. Довести, що різниця двоцифрового числа a і двоцифрового числа b, записаного цими ж цифрами, але в зворотному порядку ($a>b$) ділиться на 9.

ТЕМА 6. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН ТА МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Виклад теорії

1. Множення одночлена на многочлен

①

Множення одночлена на многочлен виконують на основі розподільного закону множення відносно додавання і віднімання:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно:

- **помножити одночлен на кожний член многочлена;**
- **отримані добутки додати (алгебраїчна сума).**

Приклади.

1. $5 \cdot (a - 4) = 5 \cdot a - 5 \cdot 4 = 5a - 20.$
2. $x \cdot (4x + 3) = x \cdot 4x + x \cdot 3 = 4x^2 + 3x.$
3. $-5b^2 \cdot (2b^4 - b + 4) = -5b^2 \cdot 2b^4 - 5b^2 \cdot (-b) - 5b^2 \cdot 4 = -10b^6 + 5b^3 - 20b^2.$

2. Множення многочлена на многочлен

②

При множенні многочлена на многочлен кожний член першого многочлена множать на другий многочлен, використовуючи правило множення одночлена на многочлен, і знайдені добутки додають (алгебраїчна сума).

Приклади.

1. $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$
2. $(a + b) \cdot (c + d + m) = a \cdot (c + d + m) + b \cdot (c + d + m) = ac + ad + am + bc +$
$+ bd + bm.$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно:

- **помножити кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена;**
- **отримані добутки додати (алгебраїчна сума);**
- **звести подібні доданки (якщо вони є).**

Приклади.

1. $(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$
2. $(a-b)\cdot(c-d)=a\cdot c+a\cdot(-d)+(-b)\cdot c+(-b)\cdot(-d)=ac-ad-bc+bd.$
3. $(x^2+3)\cdot(x-2)=x^3-2x^2+3x-6.$

Щоб помножити три многочлени, потрібно:

- **перемножити два многочлени;**
- **в одержаному многочлені звести подібні доданки (якщо вони є);**
- **помножити одержаний многочлен на третій з даних;**
- **звести подібні доданки (якщо вони є).**

Приклад.

$(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+2x+x+2)(x+3)=(x^2+3x+2)(x+3)=$
$=(x+3)(x^2+3x+2)=x^3+3x^2+2x+3x^2+9x+6=x^3+6x^2+11x+6.$

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Множення одночлена на многочлен

1

№125.

1. 1) Який з наведених виразів є добутком одночлена й многочлена?

   а) $a+(a^2+4)$; б) $a\cdot(a^2+4)$; в) $\frac{a}{a^2+4}$.

   2) Який з наведених виразів є добутком одночлена і тричлена?

   а) $a\cdot(a^2+4)$; б) a^2+5a+2; в) $(a^2-3a-4)\cdot a^3$.

   3) Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на ...

   а) перший член многочлена й додати до інших членів многочлена;
   б) кожний член многочлена й одержані добутки додати.

   4) На основі якого закону (властивості) виконують множення одночлена на многочлен?

   Доповнити запис розподільного закону множення відносно...

   5) додавання $a(b+c)=$ ____________;
   6) віднімання $a(b-c)=$ ____________.

2. Серед виразів а)–е) вказати вираз, який дорівнює добутку:

   1) $4(b+5)=\ldots$:
   а) $20b$; б) $4b+5$; в) $4b+20$;

   2) $3(c-6)=\ldots$:
   а) $3c+18$; б) $3c-18$; в) $3c-6$;

3) $-2(x+5) = \ldots$:
а) $-2x + 10$; б) $-2x - 10$; в) $-2x + 5$;

4) $a(a+4) = \ldots$:
а) $2a + 4$; б) $2a + 4a$; в) $a^2 + 4a$;

5) $a(a^2 + 1) = \ldots$:
а) $a^3 + 1$; б) $a^3 + a$; в) $a^2 + a$;

6) $a(a^3 - 1) = \ldots$:
а) $a^4 - a$; б) $a^4 + a$; в) $a^4 - 1$.

Виконати множення одночлена на многочлен:

1) $7(b+5)$;
2) $4(a-2)$;
3) $-7(a+3)$;
4) $a(a+6)$;
5) $b(b^2+3)$;
6) $a(a^4-1)$;
7) $x(x^3+x^2-x+1)$;
8) $a^2(a^3+a^5+1)$;
9) $c^4(c^{10}+c^{20}+2)$.

№126*.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, який дорівнює добутку (1–8):

1) $a^n(a^2+1) = \ldots$:
а) $a^{2n} + a^n$; б) $a^{n+2} + a^n$; в) $a^{n+2} + 1$;

2) $b^n(b+3) = \ldots$:
а) $b^{n+1} + 3$; б) $b^n + 3b^n$; в) $b^{n+1} + 3b^n$;

3) $a^4(a^n+1) = \ldots$:
а) $a^{4n} + a^4$; б) $a^{n+4} + a^4$; в) $a^{n+4} + 1$;

4) $a^n(a^m+b) = \ldots$:
а) $a^{n+m} + b$; б) $a^{n+m} + a^n b$; в) $a^{nm} + a^n b$;

5) $a^{3n}(a^n+1) = \ldots$:
а) $a^{3n^2} + a^{3n}$; б) $a^{4n} + 1$; в) $a^{4n} + a^{3n}$;

6) $a^n(a^n+2) = \ldots$:
а) $a^{2n} + 2a^n$; б) $a^{2n} + 2$; в) $a^{n^2} + 2a^n$;

7) $a(a^{n-1}-3) = \ldots$:
а) $a^{n-1} - 3a$; б) $a^n - 3$; в) $a^n - 3a$;

8) $x^3(x^{n-3}+4) = \ldots$:
а) $x^{3(n-3)} + 4x^3$; б) $x^n + 4$; в) $x^n + 4x^3$.

Виконати множення:

9) $a(a^3+1)$; 10) $a^7(a^n-1)$; 11) $a^n(a^k+2)$; 12) $a^{4n}(a^n+1)$;
13) $b^n(b^n+5)$; 14) $a^n(a^n+3)$; 15) $a(a^{n-1}-2)$; 16) $a^5(a^{n-5}+9)$.

Тренувальні вправи

№127.

Виконати множення:

1.	1) $4(a+3)$;	2) $5(a-2)$;	3) $(x+5)\cdot 7$;	4) $(y-2)\cdot 9$.
2.	1) $a(a-5)$;	2) $m(m+3)$;	3) $x(x+3)$;	4) $c(4-c)$.
3.	1) $-2(a+4)$;	2) $-3(b-2)$;	3) $-7(m+3)$;	4) $-10(-c-4)$.
4.	1) $x^2(x+3)$;	2) $a^4(a-2)$;	3) $(3-b)\cdot b^4$;	4) $(10-m)\cdot m^5$.
5.	1) $x^2(x^3-4)$;	2) $a^3(a^5-2)$;	3) $(a^7+3)\cdot a^3$;	4) $(-2-b^6)\cdot b^4$.
6.	1) $x^2(x^3-x+1)$;	2) $c^3(c^5-c^2+2)$;	3) $x^4(x^2+x-3)$;	4) $(p^2-3p-2)p^3$.
7.	1) $2a(a^2+3)$;	2) $-3a(a^3+4)$;	3) $(c^5-1)\cdot 2c$;	4) $(m^6-4)\cdot 3m$.

Завдання для самоперевірки

№128. Варіант 1

1. **1)** Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком одночлена й многочлена:

а) $a(a-3)$; б) $a^2(a^2-3a+4)$; в) $a+(a-3)$;
г) $a-a^2b$; д) $(m-3)\cdot m^2$; е) $7-3a(a+2)$.

2) Чому дорівнює добуток $a(b+c)$?

а) $ac+c$; б) $b+ac$; в) $ab+ac$.

3) *Доповнити запис.*

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен ...
а) помножити на один із членів многочлена;
б) додати до многочлена;
в) помножити на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

2. *Серед виразів а)–в) вказати той, якому дорівнює добуток:*

1) $3(x-5)=\ldots$:
а) $3x-5$; б) $3x-15$; в) $x-15$;

2) $a(a+4)=\ldots$:
а) $2a+4a$; б) a^2+4; в) a^2+4a;

3) $(x^4-2)\cdot x^2=\ldots$:
а) x^6-2x^2; б) x^8-2x^2; в) x^6-2.

3. *Виконати множення:*

1) $-7(x+2)$; **2)** $m(m-3)$; **3)** $x^4(x^3+5)$.

№129. Варіант 2

1. **1)** Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком одночлена й многочлена:

а) $x(x-3)$; б) $x+(x-3)$; в) $x^2(x-3)$;
г) $7(x^2-4)$; д) $7+x^2$; е) $(x+3)(x+5)$.

а) $a+b-c$; б) $ab-c$; в) $ab-ac$.

3) *Доповнити запис.*

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен ...

а) помножити на один із членів многочлена і додати до інших членів многочлена;

б) помножити на кожний із членів многочлена і знайдені добутки додати.

Серед виразів а)–в) вказати той, якому дорівнює добуток:

1) $4(x+5) = \ldots$:

а) $4x+20$; б) $4x+5$; в) x^4+20;

2) $m(m-7) = \ldots$:

а) $2m-7m$; б) m^2-7m; в) m^2-7;

3) $a^2(a^5-3) = \ldots$:

а) $a^{10}-3a^2$; б) a^7-3a^2; в) a^7-3.

Виконати множення:

1) $3(c-10)$; 2) $a(a+4)$; 3) $x^4(x^5+2)$.

2. Множення многочлена на многочлен

(2)

130.

Який з наведених виразів а)–в) є...

1) добутком двох многочленів:

а) $(a+2)+(a+3)$; б) $(a^2+3a)(a-4)$; в) $(a^2+3)-(a+3)$;

2) добутком двох двочленів:

а) $(a^2-1)-(a-4)$; б) $(2a-1)+(3a+5)$; в) $(2a-1)(3a+5)$;

3) добутком двочлена та тричлена:

а) $3a+1-(a^2-4a+5)$; б) $(3a+1)+(a^2-4a+5)$; в) $(3a+1)(a^2-4a+5)$.

4) Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно ...

а) кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена і знайдені добутки додати;

б) перший член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена;

в) перемножити члени одного многочлена і другого.

Доповнити запис (1–3):

1) $(a+2)(b+c) = \ldots$:

а) $ab+ac+b+c$; б) $ab+ac+2b+c$; в) $ab+ac+2b+2c$;

2) $(a-2)(b+c) = \ldots$:

а) $ab+ac-b-c$; б) $ab+ac-2b+2c$; в) $ab+ac-2b-2c$;

3) $(a+c)(m-2) = \ldots$:

а) $am-2a+cm-2c$; б) $am-2a+m-2$; в) $a+c+m+2$.

Доповнити запис правила множення многочлена на многочлен (4–6):

4) для двочленів $a+b$ і $c+d$:

$(a+b)(c+d) = ac + ad +$ ________________;

5) для двочленів $a+b$ і $c-d$:

$(a+b)(c-d) = ac - ad +$ ________________;

6) для двочлена $a+b$ і тричлена $m+n+k$:

$(a+b)(m+n+k) = am + an + ak + bm +$ ________________.

3. *Виконати дії:*

1) $a(b+c)+3(b+c)$; 2) $(a+4)(b+c)$;

3) $(a-5)(b+c)$; 4) $(x+1)(x-5)$;

5) $a(b+c)-3(b+c)$; 6) $(x+2)(x+3)$;

7) $(a-1)(a+2)$.

Тренувальні вправи

№131.

Виконати дії:

1. 1) $3(a+b)+4(c+b)$; 2) $4(a-b)+5(c+d)$;
   3) $7(a-b)+m(c+d)$; 4) $2(a-b)-3(c+d)$.
2. 1) $(a+1)(a+3)$; 2) $(m+3)(m+4)$;
   3) $(x+2)(x+5)$; 4) $(b+3)(b+7)$.
3. 1) $(a-1)(a+3)$; 2) $(m-3)(m+4)$;
   3) $(x-2)(x+5)$; 4) $(b+3)(b-4)$.
4. 1) $(a^2+1)(a+4)$; 2) $(b^2+1)(b+5)$;
   3) $(b^3+1)(b+2)$; 4) $(c^4+1)(c+7)$.
5. 1) $(x+1)(x^2+2x+3)$; 2) $(m+2)(m^2+3m+4)$;
   3) $7(a+1)(a^2+5a+4)$; 4) $(b+3)(b^2+4b+5)$.

Завдання для самоперевірки

№132. Варіант 1

1. 1) Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком многочленів.

   а) $(x^2-4)(x+3)$; б) $(x^2-4)x+3$; в) $(x+2)(x+5)$;

   г) $(a^2-4)(a-1)+a$; д) $(a^2-a+b)(a+3)$; е) $(a+2)+(3a-4)$.

   2) Якому з наведених виразів дорівнює добуток $(a+b)(c+d)$?

   а) $a(c+d)+b$; б) $a(c+d)+b(c+d)$; в) $a+(c+d)+b(c+d)$.

При множенні многочлена на многочлен потрібно ...

а) кожний член першого многочлена помножити на один із членів другого многочлена і знайдені добутки додати до решти членів другого многочлена;

б) до членів одного многочлена додати члени другого многочлена;

в) кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена і знайдені добутки додати.

Якому з наведених виразів дорівнює добуток многочленів:

1) $(m+2)(a+b)=\ldots$:
   а) $m(a+b)+2$; б) $m(a+b)+2(a+b)$; в) $m+2(a+b)$;
2) $(m+2)(a+b)=\ldots$;
   а) $ma+2b$; б) $ma+mb+2a+2b$; в) $ma+mb+a+b$;
3) $(a-1)(x+5)=\ldots$:
   а) $ax+5a-x-5$; б) $ax+5a+x+5$; в) $ax+5a-x+5$.

Виконати дії:

1) $(a+2)(c+d)$; 2) $(a-3)(c+d)$; 3) $(x+1)(x+4)$.

133. Варіант 2

1) Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком многочленів.
   а) $(a^2-2)(a+3)$; б) $(a^2-2)a+3$; в) $(a+2)+(3a-4)$;
   г) $(x^2+4x-4)(x+5)$; д) $(a-4)(a-3)$; е) $a^2+(a-5)$.
2) Якому з наведених виразів дорівнює добуток $(a+b)(c-d)$?
   а) $a(c-d)+b$; б) $a(c-d)+b(c-d)$; в) $a+(c-d)-b(c-d)$.
3) *Доповнити запис.*
   При множенні двочлена на тричлен потрібно ...
   а) до членів двочлена додати члени тричлена;
   б) кожний член двочлена помножити на кожний член тричлена й отримані добутки додати.

Якому з наведених виразів дорівнює добуток многочленів:

1) $(m-3)(a+b)=\ldots$:
   а) $m(a+b)+3(a+b)$; б) $m(a+b)-3(a+b)$; в) $m(a+b)-3$;
2) $(m-3)(a+b)=\ldots$:
   а) $ma+mb-3a+3b$; б) $ma+mb+3a-3b$; в) $ma+mb-3a-3b$;
3) $(a-1)(x+7)=\ldots$:
   а) $ax+7a-x-7$; б) $ax+7a-x+7$; в) $ax+7a+x+7$.

Виконати дії:

1) $(a+3)(m+k)$; 2) $(a-4)(m+n)$; 3) $(x+1)(x+6)$.

№134.

Середній рівень

1. Навести приклад одночлена стандартного вигляду зі змінними a і b.
2. Сформулювати правило множення одночлена і многочлена і записати його для одночлена a і многочлена $(b + c + d)$.
3. Сформулювати правило множення многочлена на многочлен і записати його для двочленів $a + b$ і $c + d$.

Завдання на застосування

№135. Варіант 1

Середній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1. а) $3a(2a-7)$; б) $(a+4)(a-3)$.
2. а) $a^2(a^3-4a+3)$; б) $(a+1)(a^2-2)$.
3. $(a+3)(a-1)-2a(1-3a)$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(a+3)(a^2-a+2)$; б) $(x-2)(x+3)-(x-1)(x+2)$.
2. $(a+1)(a-3)(a+4)$.
3. Довести тотожність $(a-1)(a^2-25)=(a-5)(a^2+4a-5)$.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $(a^2-a+1)(2a^2-a+4)$.
   2) Розв'язати рівняння $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=16$.
2. Довести, що добуток $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$ тотожно дорівнює двочлену.
3. Довести, що вирази $a(a+1)(a+2)(a+3)$ і $(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)$ тотожно рівні.

Середній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1. а) $2a(4a-5)$; б) $(a-3)(a+8)$.
2. а) $b^2(b^5-4b+3)$; б) $(a-1)(a^2+4)$.
3. $2(a-5)(a+1)-2a^2$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(a+4)(a^2-a+7)$; б) $(x-4)(x+3)-(x-1)(x+2)$.
2. $(a-1)(a+2)(a+3)$.
3. Довести тотожність $(a-2)(a^2-9)=(a^2-5a+6)(a+3)$.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $(a^2+a-2)(2a^2-a-1)$.
   2) Розв'язати рівняння $(3x+1)(4x-5)-(6x-11)(2x-7)=24$.
2. Довести, що добуток $(a+1)(a^5-a^4+a^3-a^2+a-1)$ тотожно дорівнює двочлену.
3. Довести, що вирази $a(a+3)(a+6)(a+9)$ і $(a^2+9a)^2+18(a^2+9a)$ тотожно рівні.

№137. Варіант 3

Середній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1. а) $5m(6m-7)$; б) $(a-2)(a+13)$.
2. а) $a^3(a^4-2a^2+3)$; б) $(a^2+1)(a-5)$.
3. $(3a-2)(5a+4)-3a^2$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(a-5)(a^2+2a-3)$; б) $(x+8)(x-2)-(x-1)(x+6)$.
2. $(a+8)(a+4)(a-1)$.
3. Довести тотожність $(a+3)(a^2-16)=(a-4)(a^2+7a+12)$.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $(a^2-a-2)(4a^2+a-3)$.

2) Розв'язати рівняння $(2x-3)(3x-1)-(6x+2)(x-5)=25$.

2. Довести, що добуток $(a-2)(a^4+2a^3+4a^2+8a+16)$ тотожно дорівнює двочлену.
3. Довести, що вирази $(a-1)a(a+1)(a+2)$ і $(a^2+a)^2-2(a^2+a)$ тотожно рівні.

№138. Варіант 4

Середній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1. а) $7a(3a+4)$; б) $(a+5)(a-6)$.
2. а) $a^3(a^2+5a-3)$; б) $(a+4)(a^2-1)$.
3. $(5a-3)(7a+2)-28a^2$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(a+5)(a^2+a-8)$; б) $(x-7)(x+1)-(x+3)(x-4)$.
2. $(a+1)(a-6)(a+2)$.
3. Довести тотожність $(a+4)(a^2-36)=(a-6)(a^2+10a+24)$.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $(a^2+a-1)(3a^2-a+5)$.

   2) Розв'язати рівняння $(x+1)(3x+6)-(3x-4)(x+2)=48$.
2. Довести, що добуток $(a+2)(a^5-2a^4+4a^3-8a^2+16a-32)$ тотожно дорівнює двочлену.
3. Довести, що вирази $a(a+2)(a+4)(a+6)$ і $8(a^2+6a)+(a^2+6a)^2$ тотожно рівні.

Контроль навчальних досягнень учнів

№139. Варіант 1

Середній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

   а) $7a^2+(3a^2-1)$; б) $10a-(3a-2)$; в) $(a-2)(a+3)$.
2. Спростити вираз $a(2a+1)-a$ і знайти його значення, якщо $a=-4$.
3. Розв'язати рівняння $(x-1)(x+2)-x^2=5$.

Достатній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
а) $(a^2 - a + 3)(a + 2) - a^3$; б) $a(2a + 3)(a - 7)$.
2. Знайти многочлен P, при якому рівність $(3a^2b^2 - 10ab^2 + ab) + P = 4a^2b^2 + 3ab$ є тотожністю.
3. Розв'язати задачу складанням рівняння.
Якщо одну сторону квадрата збільшити на 3 м, а іншу зменшити на 2 м, то площа одержаного прямокутника буде більшою від площі квадрата на 1 $м^2$. Знайти сторону квадрата.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $(x - 1)(x + 2)(x + 3) - x^3$.
2) Знайти многочлен A, при якому рівність $(7x^2y^2 - 5x^2y - 3xy^2 + 4) + A = (4x^2y^2 - 7x^2y + 2xy^2 + 3) - (x^2y^2 - x^2y + 2xy^2)$ є тотожністю.
2. Довести, що вираз $(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$ тотожно дорівнює двочлену.
3. Знайти значення змінної x, при яких значення виразів $(|x| - 1)(|x| + 2)$ і x^2 рівні.

140. Варіант 2

Середній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
а) $11a^2 + (4a^2 - 3)$; б) $-11a - (9a - 3)$; в) $(c - 3)(c + 5)$.
2. Спростити вираз $a(3a + 2) - 2a$ і знайти його значення, якщо $a = -5$.
3. Розв'язати рівняння $(x - 2)(x + 1) - x^2 = 7$.

Достатній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
а) $(a^2 + a - 2)(a + 3) - a^3$; б) $c(3c + 2)(c - 5)$.
2. Знайти многочлен P, при якому рівність $(3a^2b^2 - 10ab^2 + ab) - P = 4a^2b^2 - 2ab^2 + 3ab$ є тотожністю.
3. Розв'язати задачу складанням рівняння.
Якщо одну сторону квадрата збільшити на 2 м, а іншу зменшити на 3 м, то площа одержаного прямокутника буде меншою від площі даного квадрата на 12 $м^2$. Знайти сторону квадрата.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вир $(x+1)(x-2)(x+3)-x^3$.
   2) Знайти многочлен A, при якому рівність $A-(7a^2-5ab+b^2)$ $=(2a^2-ab+2b^2)-(7a^2+3ab-4b^2)$ є тотожністю.
2. Довести, що вираз $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$ тотожн дорівнює двочлену.
3. Знайти значення змінної x, при яких значеннях виразів $(|x|+1)(|x|-2$ і x^2 рівні.

№141. Варіант 3

Середній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

а) $9a^2+(4-5a^2)$; б) $-11c-(2c+5)$; в) $(a-4)(a+7)$.

2. Спростити вираз $b(4b+3)-3b$ і знайти його значення, якщо $b=5$.
3. Розв'язати рівняння $(x-5)(x+4)-x^2=12$.

Достатній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

а) $(a^3-2a+4)(a+1)-a^4$; б) $c(3c+2)(c-4)$.

2. Довести, що значення виразу $(2a^2-0{,}7a+3{,}4)+(9a^2-0{,}6a+2{,}1)$ $-(11a^2-1{,}3a+5{,}2)$ не залежить від значення змінної.
3. Знайти три послідовних натуральних числа, якщо відомо, що квадрат найменшого з них на 23 менший від добутку двох інших.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вира
   $$\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c\right).$$
   2) Довести, що добуток двох середніх з чотирьох послідовних цілих чисел на 2 більший від добутку двох крайніх із цих чисел.
2. Довести, що добуток $(a-3)(a^4+3a^3+9a^2+27a+81)$ дорівнює дво членy.
3. Розв'язати рівняння $(3|x|+2)(|x|-4)=3x^2$.

№142. Варіант 4

Середній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
   а) $6b^2+(4b^2-3)$; б) $-9c-(4c-3)$; в) $(a-5)(a+6)$.
2. Спростити вираз $c(5c-2)+2c$ і знайти його значення, якщо $c=-3$.
3. Розв'язати рівняння $(x-3)(x+2)-x^2=4$.

Достатній рівень

1. Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
   а) $(a^3 - 2a + 4)(a + 1) - a^4$;   б) $c(3c + 2)(c - 4)$.
2. Довести, що значення виразу $(5a^2 - 0{,}4a + 4{,}1) - (6{,}5a^2 + 0{,}7a - 3{,}9) + (1{,}5a^2 + 1{,}1a - 3)$ не залежить від значення змінної.
3. Знайти три послідовних натуральних числа, якщо відомо, що квадрат найбільшого з них на 31 більший від добутку двох інших.

Високий рівень

1. 1) Подати у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c\right)$.

   2) Добуток двох послідовних цілих чисел на 38 менший від добутку наступних двох послідовних цілих чисел. Визначити ці числа.
2. Довести, що добуток $(a - 2)(a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 16a + 32)$ дорівнює двочлену.
3. Розв'язати рівняння $(2|x| + 1)(|x| - 1) = 2x^2$.

ТЕМА 7. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

Виклад теорії

1. Добуток різниці двох виразів і їх суми

1

Добуток різниці двох виразів і їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Приклади.

1. $(x-5)(x+5)=x^2-5^2=x^2-25.$
2. $(2a-b^3)(2a+b^3)=(2a)^2-(b^3)^2=4a^2-b^6.$

Доведення

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

2. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

1

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого та другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Приклади.

1. $(a+5)^2=a^2+2\cdot a\cdot 5+5^2=a^2+10a+25.$
2. $(2a+b^3)^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot b^3+(b^3)^2=4a^2+4ab^3+b^6.$
3. $(a+7)^2=a^2+14a+49.$

Доведення

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

1

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого та другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Приклади.

1. $(a-3)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9.$
2. $(3a-4b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2.$
3. $(a-4)^2 = a^2 + 16 - 8a.$

Доведення

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Добуток різниці двох виразів і їх суми

1

№143.

1. 1) Назвати дію, яку виконують останньою при обчисленні значення виразу $(a-c)(a+c)$.
   2) Серед виразів а)–е) вказати три, які є добутком різниці двох виразів та їх суми:
      а) $(a-3)(a-3)$; б) $(a-3)(a+3)$; в) $(3a-4)(3a+4)$;
      г) $(3a+4)(3a+4)$; д) $(100+c^2)(100+c^2)$; е) $(100-c^2)(100+c^2)$.
   3) Якому чотиричлену дорівнює добуток $(a-b)(a+b)$ за правилом множення многочлена на многочлен?
      а) $a^2+ab+ab+b^2$; б) $a^2-ab-ab-b^2$; в) $a^2+ab-ab-b^2$.
   4) Якому з поданих двочленів а)–в) дорівнює добуток $(a-b)(a+b)$ після зведення подібних членів?
      а) a^2+b^2; б) b^2-a^2; в) a^2-b^2.
   5) Добуток різниці двох виразів і їх суми дорівнює ...
      а) сумі квадратів цих виразів;
      б) квадрату різниці цих виразів;
      в) різниці квадратів цих виразів.
   6) *Доповнити запис.*
      $(a-b)(a+b) =$ ____________________.
2. *Вказати правильну відповідь:*
   1) $(a-m)(a+m) = \ldots$:
      а) $a-m$; б) $(a-m)^2$ в) a^2-m^2;

2) $(b-c)(b+c)=\ldots$:
а) b^2+c^2; б) c^2-b^2; в) b^2-c^2;

3) $(a+b)(a-b)=\ldots$:
а) a^2+b^2; б) a^2-b^2; в) b^2-a^2;

4) $(a-5)(a+5)=\ldots$:
а) a^2-5; б) a^2+25; в) a^2-25;

5) $(3a-2)(3a+2)=\ldots$:
а) $3a^2-4$; б) $9a^2-4$; в) $9a^2-2$;

6) $(a^3-5)(a^3+5)=\ldots$:
а) a^3-25; б) a^6-25; в) a^6-5;

7) $(a^{10}+7)(a^{10}-7)=\ldots$:
а) $a^{10}-49$; б) $a^{20}+49$; в) $a^{20}-49$;

8) $((a+b)-c)((a+b)+c)=\ldots$:
а) $(a+b)^2+c^2$; б) $(a+b)-c^2$; в) $(a+b)^2-c^2$.

3. *Перетворити у многочлен стандартного вигляду:*

1) $(a-n)(a+n)$; 2) $(c-2)(c+2)$;
3) $(a+4)(a-4)$; 4) $(a^2-3)(a^2+3)$;
5) $(4b+3)(4b-3)$; 6) $(a^4-1)(a^4+1)$.

№144.

Серед виразів а)–в) вказати той, який тотожно дорівнює добутку:

1) $(a^n-1)(a^n+1)=\ldots$:
а) $(a^n)^2-1$; б) $(a^n)^2+1$; в) $a^{n+2}-1$;

2) $(x^n-1)(x^n+1)=\ldots$:
а) $x^{4n}-1$; б) $x^{2n}-1$; в) $x^{2n}+1$;

3) $(a^m-b)(a^m+b)=\ldots$:
а) $a^{2m}-b$; б) $a^{2m}-b^2$; в) $a^{2m}+b^2$;

4) $(x^m-b^n)(x^m+b^n)=\ldots$:
а) $x^{2m}-b^n$; б) $x^{2m}-b^{2n}$; в) $x^{2m}+b^{2n}$;

5) $(a^n-3)(a^n+3)=\ldots$:
а) $a^{2n}-3$; б) $a^{2n}+9$; в) $a^{2n}-9$.

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

6) $(c^n+1)(c^n-1)$; 7) $(y^m-1)(y^m+1)$;
8) $(a^n+b^m)(a^n-b^m)$; 9) $(a^n-5)(a^n+5)$;
10) $(a^{2n}-1)(a^{2n}+1)$; 11) $(c^{3n}+2)(c^{3n}-2)$.

Тренувальні вправи

№145.

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. 1) $(p-4)(p+4)$; 2) $(t-8)(t+8)$;

3) $(k+9)(k-9)$; 4) $(y+4)(y-4)$.

2. 1) $(2a+3)(2a-3)$; 2) $(3n-1)(3n+1)$;
3) $(1-2b)(1+2b)$; 4) $(2+3x)(2-3x)$.

3. 1) $(n^2-1)(n^2+1)$; 2) $(y^3+1)(y^3-1)$;
3) $(x^{10}-1)(x^{10}+1)$; 4) $(2-b^{25})(2+b^{25})$.

Завдання для самоперевірки

№146. Варіант 1

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати добуток різниці та суми виразів a і $3y$:
а) $(a-3y)(a+3y)$; б) $a-3y\cdot a+3y\cdot b$; в) $(a-3y)(a-3y)$.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, який тотожно дорівнює добутку:

2) $(a-m)(a+m)=\ldots$:
а) a^2+m^2; б) a^2-m^2; в) m^2-a^2;

3) $(b+c)(b-c)=\ldots$:
а) b^2+c^2; б) c^2-b^2; в) b^2-c^2.

2. *Серед виразів а)–в) вказати вираз, який тотожно дорівнює добутку:*

1) $(a-4)(a+4)=\ldots$:
а) a^2+16; б) $16-a^2$; в) a^2-16;

2) $(5a-1)(5a+1)=\ldots$:
а) $5a^2-1$; б) $25a^2-1$; в) $25a^2+1$;

3) $(x^7-1)(x^7+1)=\ldots$:
а) $x^{49}-1$; б) $x^{14}+1$; в) $x^{14}-1$.

3. *Виконати дії:*

1) $(p-9)(p+9)$. 2) $(6n-1)(6n+1)$.
3) $(m^8-1)(m^8+1)$.

№147. Варіант 2

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати добуток різниці та суми виразів $4a$ і y:
а) $(4a+y)(4a+y)$; б) $(4a-y)(4a+y)$; в) $(4a-y)+(4a-y)$.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, який тотожно дорівнює добутку:

2) $(a-d)(a+d)=\ldots$:
а) a^2+d^2; б) a^2-d^2; в) d^2-a^2.

3) $(x+y)(x-y)=\ldots$:
а) x^2+y^2; б) y^2-x^2; в) x^2-y^2.

2. *Серед виразів а)–в) вказати вираз, який тотожно дорівнює добутку:*

1) $(n-5)(n+5)=\ldots$:
а) n^2+25; б) $25-n^2$; в) n^2-25.

2) $(7c-1)(7c+1)=\ldots$:
а) $14c^2-1$; б) $49c-1$; в) $49c^2-1$.

3) $(c^8-1)(c^8+1)=\ldots$;
а) $c^{64}-1$; б) $c^{64}+1$; в) $c^{16}-1$.

3. *Виконати дії:*
1) $(m-8)(m+8)$. 2) $(5n-2)(5n+2)$.
3) $(c^{10}-1)(c^{10}+1)$.

2. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

2

№148.

1. 1) Який з виразів а)–в) є квадратом суми двох виразів?
а) a^2+b^2; б) $(a+b)^2$; в) $(ab)^2$.

2) Серед виразів а)–е) вказати три, що є квадратами суми одночленів:
а) $(2a+c)^2$; б) a^2+b^2; в) $(a^2+ab)^2$;
г) $(3a+4b)^2$; д) a^2+4m^2; е) $(a^4+c^4)^4$.

Назвати вираз, якому дорівнює (3–5) ...

3) $(a+b)^2$ за означенням степеня з натуральним показником:
а) $(a+b)(a-b)$; б) $(a+b)(a+b)$; в) $(a+b)+(a+b)$.

4) добуток $(a+b)(a+b)$ за правилом множення многочлена на многочлен:
а) $a^2+ab+ab$; б) a^2+b^2; в) $a^2+ab+ab+b^2$.

5) чотиричлен $a^2+ab+ab+b^2$ після зведення подібних:
а) a^2+b^2; б) $a^2+2ab+b^2$; в) $a^2+a^2b^2+b^2$.

6) *Доповнити запис.*
Квадрат суми двох виразів дорівнює ...
а) сумі квадратів двох виразів;
б) різниці квадратів двох виразів;
в) квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

7) Серед виразів а)–е) вказати три, які тотожно дорівнюють виразу $(a+b)^2$.
а) a^2+b^2; б) a^2+b^2+2ab; в) a^2+b^2-2ab;
г) a^2-b^2; д) b^2+a^2+2ab; е) $2ab+a^2+b^2$.

8) *Доповнити запис.*
$(a+c)^2=$ ________________.

2. *Вказати правильну відповідь (1–5):*
1) $(a+m)^2=\ldots$;
а) a^2+m^2; б) a^2+m^2+2am; в) a^2+m^2-2am.

2) $(a+2)^2 = \dots$:
а) a^2+4; б) $a^2+4+2\cdot a\cdot 2$; в) $a^2+4-2\cdot a\cdot 2$.
3) $(b^2+1)^2 = \dots$:
а) b^4+1; б) $b^4-2\cdot b^2\cdot 1+1$; в) b^4+2b^2+1.
4) $(3b+c)^2 = \dots$:
а) $9b^2+6bc$; б) $9b^2+c^2$; в) $9b^2+6bc+c^2$.
5) $(5x+3y)^2 = \dots$:
а) $25x^2+9y^2$; б) $25x^2+9y^2-2\cdot 5x\cdot 3y$; в) $25x^2+9y^2+30xy$.

Доповнити запис (6–9):

6) $(a+7)^2 = a^2+49+$ __________________.
7) $(b^2+3)^2 = b^4+9+$ __________________.
8) $(4x+y)^2 = 16x^2+y^2+$ __________________.
9) квадрат суми двох виразів дорівнює сумі квадратів цих виразів плюс __________________.

3. *Спираючись на формулу квадрата суми двох виразів, подати у вигляді многочлена стандартного вигляду:*

1) $(x+3)^2$. 2) $(7+m)^2$. 3) $(2m+1)^2$. 4) $(5x+2y)^2$.

③

№149.

1) **Який з виразів а)–в) є квадратом різниці виразів a і m?**
а) a^2-m^2; б) $(a+m)^2$; в) $(a-m)^2$.

Назвати вираз, якому дорівнює (2–4) ...

2) $(a-b)^2$ за означенням степеня:
а) $(a-b)(a+b)$; б) $(a-b)+(a-b)$; в) $(a-b)(a-b)$.
3) добуток $(a-b)(a-b)$ за правилом множення многочленів:
а) a^2-b^2; б) $a^2-ab-ab-b^2$; в) $a^2-ab-ab+b^2$.
4) чотиричлен $a^2-ab-ab+b^2$ після зведення подібних членів:
а) $a^2-a^2b^2+b^2$; б) $a^2-2ab-b^2$; в) $a^2+2ab-b^2$.
5) *Доповнити запис.*
Квадрат різниці двох виразів дорівнює ...
а) сумі квадратів двох виразів;
б) різниці квадратів двох виразів;
в) квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.
6) Серед виразів а)–е) вказати три вирази, тотожно рівні виразу $(a-b)^2$:
а) a^2-b^2; б) a^2+b^2-2ab; в) a^2+b^2+2ab;
г) $a^2-2ab+b^2$; д) b^2+a^2-2ab; е) a^2-b^2+2ab.

2. *Використовуючи формулу квадрата різниці двох виразів, вказати вираз тотожно рівний квадрату двочлена (1–4):*

1) $(b-m)^2 = \ldots$:
а) $b^2 - m^2$; б) $b^2 + m^2 - 2bm$; в) $b^2 + m^2$.
2) $(a-3)^2 = \ldots$:
а) $a^2 - 6a + 9$; б) $a^2 - 9$; в) $a^2 + 6a + 9$.
3) $(b^2-4)^2 = \ldots$:
а) $b^4 + 16$; б) $b^4 + 16 + 2b^2 \cdot 4$; в) $b^4 + 16 - 2b^2 \cdot 4$.
4) $(4x-y)^2 = \ldots$:
а) $4x^2 + y^2 + 2 \cdot 4x \cdot y$; б) $4x^2 + y^2 - 2 \cdot 4x \cdot y$; в) $4x^2 + y^2$.

Доповнити запис (5–8):

5) $(a-8)^2 = a^2 + 64$ ______________.
6) $(b^2-3)^2 = b^4 + 9$ ______________.
7) $(5x-y)^2 = 25x^2 + y^2$ ______________.
8) квадрат суми двох виразів дорівнює сумі квадратів цих виразів ______________.

3. *Використовуючи формулу квадрата різниці двох виразів, подати у вигляді многочлена стандартного вигляду:*

1) $(m-3)^2$. 2) $(3-c)^2$.
3) $(2d-1)^2$. 4) $(x-2y)^2$.
5) $(3x-2y)^2$. 6) $(3a-10b)^2$.

№150.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний квадрату двочлена

1) $(a^m+1)^2 = \ldots$:
а) $(a^m)^2 + 1$; б) $(a^m)^2 + 2a^m + 1$; в) $(a^m)^2 + a^m + 1$.
2) $(a^m+b^n)^2 = \ldots$:
а) $(a^m)^2 + (b^n)^2$; б) $(a^m)^2 + (b^n)^2 + a^m b^n$; в) $(a^m)^2 + (b^n)^2 + 2a^m b^n$
3) $(c^n+1)^2 = \ldots$:
а) $c^{2n} + 1$; б) $c^{2n} + c^n + 1$; в) $c^{2n} + 2c^n + 1$.
4) $(a^m-3)^2 = \ldots$:
а) $a^{2m} - 9$; б) $a^{2m} + 9$; в) $a^{2m} - 6a^m + 9$.
5) $(a^k-c^p)^2 = \ldots$:
а) $a^{2k} + c^{2p} - a^k c^p$; б) $a^{2k} + c^{2p} + 2a^k c^p$; в) $a^{2k} + c^{2p} - 2a^k c^p$.

Тренувальні вправи

№151.

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. 1) $(c+8)^2$; 2) $(x+9)^2$; 3) $(10+x)^2$; 4) $(11+m)^2$.
2. 1) $(m-10)^2$; 2) $(11-k)^2$; 3) $(c-20)^2$; 4) $(0,1-b)^2$.

3. 1) $(x^2+9)^2$; 2) $(a^2-9)^2$; 3) $(a^3+9)^2$; 4) $(a^3-9)^2$.
4. 1) $(7x+y)^2$; 2) $(7x-y)^2$; 3) $(y-9x)^2$; 4) $(5a+4b)^2$.

Завдання для самоперевірки

№152. Варіант 1

1. *Серед виразів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний даному:*
   1) $(b+m)^2 = \ldots$:
      а) b^2+bm+m^2; б) $b^2+2bm+m^2$; в) $b^2-2bm+m^2$.
   2) $(c-b)^2 = \ldots$:
      а) c^2-b^2; б) c^2-b^2+2bc; в) $c^2-2bc+b^2$.
   3) $(a+k)^2 = \ldots$:
      а) a^2+k^2; б) $a^2-2ak+k^2$; в) $a^2+2ak+k^2$.
2. *Серед многочленів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний даному:*
   1) $(a+13)^2 = \ldots$:
      а) a^2+169; б) $a^2+26a+169$; в) $a^2-26a+169$.
   2) $(5x-3)^2 = \ldots$:
      а) $25x^2+9$; б) $25x^2-9+30x$; в) $25x^2+9-30x$.
   3) $(a^4+1)^2 = \ldots$:
      а) a^8+a^4+1; б) a^8+2a^4+1; в) a^8-2a^4+1.
3. *Виконати дії:*
   1) $(m-8)^2$. 2) $(7x+1)^2$. 3) $(x^3-2)^2$.

№153. Варіант 2

1. *Серед виразів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний даному:*
   1) $(c+k)^2 = \ldots$:
      а) $c^2+4ck+k^2$; б) c^2+k^2; в) $c^2+2ck+k^2$.
   2) $(a-d)^2 = \ldots$:
      а) a^2-d^2; б) $a^2-2ad+d^2$; в) $a^2+2ad-d^2$.
   3) $(m-n)^2 = \ldots$:
      а) m^2-n^2; б) $m^2-2mn+n^2$; в) $m^2-2mn-n^2$.
2. *Серед многочленів а)–в) вказати вираз, тотожно рівний даному:*
   1) $(a+12)^2 = \ldots$:
      а) a^2+144; б) $a^2+24a+144$; в) $a^2-24a+144$.
   2) $(3x-2)^2 = \ldots$:
      а) $9x^2+4$; б) $9x^2+4+12x$; в) $9x^2+4-12x$.
   3) $(a^5+1)^2 = \ldots$:
      а) $a^{10}+2a^5$; б) $a^{10}+a^5+1$; в) $a^{10}+2a^5+1$.
3. *Виконати дії:*
   1) $(c-9)^2$. 2) $(6y+1)^2$. 3) $(x^6+1)^2$.

Завдання на відтворення

№154.

Середній рівень

1. Чому дорівнює добуток різниці і суми двох виразів? Записати відповідну формулу для виразів x та y.
2. Чому дорівнює квадрат суми двох виразів? Записати відповідну формулу для виразів a і c.
3. Чому дорівнює квадрат різниці двох виразів? Записати відповідну формулу для виразів x та y.

Достатній рівень

1. Довести формулу різниці квадратів двох виразів x та y.
2. Довести формулу квадрата суми двох виразів a і c.
3. Довести формулу квадрата різниці двох виразів x та y.

Завдання на застосування

№155. Варіант 1

Середній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. а) $(a-7)(a+7)$; б) $(m+3)^2$; в) $(a-9)^2$.
2. $(3a-2)(3a+2)$.
3. $(5a-4)^2+40a$.

Достатній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(4a^2+7n)(4a^2-7n)$; б) $(2m^3+3n^2)^2$.
2. а) $(1+a^2)(1+a)(1-a)$; б) $(-5a-1)^2$.
3. Користуючись формулами скороченого множення, обчислити:
   а) $1004 \cdot 996$; б) 97^2.

Високий рівень

1. Перетворити у многочлен стандартного вигляду:
   а) $(5b^2a+7)(5b^2a-7)-(-5b^2a-2)^2$;
   б) $(3x^m-11y^n)(3x^m+11y^n)-9x^{2m}$.

2. Користуючись формулами квадрата різниці і квадрата суми, довести тотожність: $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.
3. Довести, що коли до добутку двох послідовних цілих чисел додати більше з них, то вийде квадрат більшого числа.

№156. Варіант 2

Середній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. а) $(c-9)(c+9)$; б) $(x+4)^2$; в) $(5-m)^2$.
2. $(7a-4)^2$.
3. $(4x-3)(4x+3)-16x^2$.

Достатній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(3a^2-5)(3a^2+5)$; б) $(3a^2-b^3)^2$.
2. а) $(a^2+4)(a-2)(a+2)$; б) $(-7a-1)^2$.
3. Користуючись формулами скороченого множення, обчислити:
   а) $202 \cdot 198$; б) 997^2.

Високий рівень

1. Перетворити у многочлен стандартного вигляду:
   а) $(4a^2c+3)(4a^2c-3)-(-4a^2c-5)^2$;
   б) $(2x^m-3y^n)(2x^m+3y^n)-4x^{2m}$.
2. Користуючись формулою квадрата суми двох виразів, довести тотожність: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
3. Довести, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел — число непарне.

№157. Варіант 3

Середній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. а) $(a+4)(a-4)$; б) $(n+5)^2$; в) $(7-c)^2$.
2. $(9a-5)(9a+5)$.
3. $(6x+1)(6x-1)-36x^2$.

Достатній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(7a^5-3c)(7a^5-3c)$; б) $(12a^2+b^3)^2$.
2. а) $(a^2+2)(a^2-2)(a^4+4)$; б) $(-8a-3)^2$.

3. Довести, що:
   а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

Високий рівень

1. 1) Перетворити у многочлен стандартного вигляду вираз $(7a^3b-3)(7a^3b+3)-(-7a^3b-2)^2$.
   2) Користуючись формулою квадрата суми двох виразів, довест що $(a+b)^3=a^3+3ab^2+3ab^2+b^3$.
2. Подати вираз $\left(\frac{1}{2}x^2-4y+\frac{2}{3}y^2\right)^2$ у вигляді многочлена.
3. Користуючись формулою різниці квадратів, спростити вира $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

№158. Варіант 4

Середній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1. а) $(a+8)(a-8)$; б) $(m+6)^2$; в) $(3-b)^2$.
2. $(5a-2)(5a+2)$.
3. $(1-9a)^2+18a^2$.

Достатній рівень

Перетворити у многочлен стандартного вигляду (1–2):

1. а) $(9a^3+4b)(9a^3-4b)$; б) $(m^3+2n^2)^2$.
2. а) $(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$; б) $(-2a-3)^2$.
3. Довести тотожність:
   а) $(-a-c)^2=(a+c)^2$; б) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

Високий рівень

1. 1) Перетворити у многочлен стандартного вигляду вира $(3ab^2+5)(3ab^2-5)-(-3ab^2-2)^2$.
   2) Користуючись формулою квадрата різниці двох виразів, довест що $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
2. Подати вираз $\left(\frac{1}{2}x^2-4y-\frac{2}{3}y^2\right)^2$ у вигляді многочлена.
3. Користуючись формулою різниці квадратів, спростити вира $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$.

№159. Варіант 1

Середній рівень

1. Виконати дії:
   а) $x(x+y)-x^2$; б) $1+(a-1)(a+1)$.
2. Спростити вираз $(m+1)(m+2)-3m$ і знайти його значення, якщо $m=4$.
3. Розв'язати рівняння $(x-4)^2-x^2=8$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. $(9a+2)^2+(2a+5)(2a-5)-85a^2$.
2. $(4a^2+25)(2a+5)(2a-5)+600-17a^2$.
3. Розв'язати рівняння $(x+4)(x-4)-(x-3)^2=35$.

Високий рівень

1. Довести, що значення виразу $(a-2)(a+2)-(a-11)(a+2)$ при всіх цілих значеннях a ділиться на 9.
2. Розв'язати рівняння $(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)-x^{16}=x+5$.
3. Подати добуток $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$ у вигляді многочлена, використавши формули скороченого множення.

№160. Варіант 2

Середній рівень

1. Виконати дії:
   а) $5(a^2-3)+2a^2$; б) $4+(a-2)(a-2)$.
2. Спростити вираз $(3a+1)^2-3a$ і знайти його значення, якщо $a=4$.
3. Розв'язати рівняння $(x-5)^2-x^2=-5$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. $(3a-2)^2+(5a+3)(5a-3)-34a^2$.
2. $(9a^2+4)(3a+2)(3a-2)-80a^2+16$.
3. Розв'язати рівняння $(x-6)(x+6)-(x-7)^2=55$.

1. Довести, що значення виразу $(a-2)(a+2)-(a-8)(a-7)$ при всі цілих значеннях a ділиться на 15.
2. Спростити вираз $(m-1)(m-3)(m^2+1)(m^2+9)(m+3)(m+1)+82m^4$.
3. Подати добуток $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$ у вигляді многочлена, використавши формули скороченого множення.

№161. Варіант 3

Середній рівень

1. Виконати дії:
   а) $c(c+4)-c$;   б) $-9+(3-a)(3+a)$.
2. Спростити вираз $(m-8)^2+16m$ і знайти його значення, якщо $m=-6$.
3. Розв'язати рівняння $(2x+3)^2-4x^2=33$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. $(5a-4)^2+(2a+7)(2a-7)-29a^2$.
2. $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)-20a^2+1$.
3. Розв'язати рівняння $(x-2)(x+2)-(x-7)^2=3$.

Високий рівень

1. Знайти значення змінної x, при якому квадрат двочлена $3x+1$ у 9 разів більший від добутку двочленів $x+1$ та $x+2$.
2. Спростити вираз $(a+1)(a+2)(a^2+1)(a^2+4)(a-2)(a-1)+17a^4$.
3. Подати добуток $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ у вигляді многочлена, використавши формули скороченого множення.

№162. Варіант 4

Середній рівень

1. Виконати дії:
   а) $7(a^2+4)-2a^2$;   б) $(m-5)(m+5)-5$.
2. Спростити вираз $(3a-2)^2+12a$ і знайти його значення, якщо $a=5$.
3. Розв'язати рівняння $(x+6)^2-x^2=-12$.

Достатній рівень

Подати вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду (1–2):

1. $(2a-7)^2+(3a-2)(3a+2)-13a^2$.
2. $(a^2+9)(a-3)(a+3)+a^2-9$.
3. Розв'язати рівняння $(x-9)(x+9)-(x-4)^2=-17$.

Високий рівень

1. Знайти значення змінної x, при якому квадрат двочлена $2x - 1$ у 4 рази більший від добутку двочленів $(x - 1)$ і $(x + 2)$.
2. Спростити вираз $(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + a^{16} + b^{16}$.
3. Подати добуток $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$ у вигляді многочлена, використавши формули скороченого множення.

ТЕМА 8. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ ТА СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

- Спосіб винесення спільного множника за дужки
- Спосіб групування

Виклад теорії

1. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки

Розкладанням многочлена на множники називають подання його у вигляді добутку многочленів.

Приклади.

1. $5a + 5b + 5 = 5(a + b + 1)$.
2. $a^5 - a^2 = a^2(a^3 - 1)$.
3. $5(x + y) - z(x + y) = (5 - z)(x + y)$.
4. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Основою розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки є розподільні закони множення відносно додавання і віднімання:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c),$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

Правила розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

1

Якщо члени многочлена мають спільний множник, то його записують перед дужками, а в дужках — усі члени многочлена, поділені на цей множник.

Приклади.

1. $ab + ad = a(b + d)$.
2. $ma^2 + mb = m(a^2 + b)$.
3. $abc + abm + ab = ab(c + m + 1)$.

2

Якщо числові коефіцієнти членів многочлена мають спільний дільник, то за дужки виносять число, яке є найбільшим спільним дільником, а коефіцієнти усіх членів ділять на нього.

Приклади.

1. $15a + 45b = 15(a + 3b)$.
2. $3 + 6a + 15c = 3(1 + 2a + 5c)$.
3. $12a - 18b = 6(2a - 3b)$.

3

Якщо всі члени многочлена мають степені однієї змінної, то за дужки виносять степінь змінної з найменшим показником, а кожен член многочлена ділять на цей степінь.

Приклади.

1. $x^5 + x^3 = x^3(x^{5-3} + 1) = x^3(x^2 + 1)$.
2. $a^{12} + 5a^4 = a^4(a^8 + 5)$ (бо $a^{12} : a^4 = a^8$).
3. $x^{10} + 5x^8 + 3x^2 = x^2(x^8 + 5x^6 + 3)$.

2. Розкладання многочленів на множники способом групування

4

Спосіб групування використовують тоді, коли групи членів многочлена мають спільні множники:

- **виносять за дужки спільний множник кожної групи членів;**
- **виносять за дужки спільний множник утворених добутків.**

Приклади.

1. $7a - 7b + ma - mb = 7(a - b) + m(a - b) = (a - b)(7 + m)$.
2. $a^3 - 2a^2 + 4a - 8 = a^2(a - 2) + 4(a - 2) = (a - 2)(a^2 + 4)$.
3. $a^3 + 14 + 2a^2 + 7a = a^3 + 7a + 2a^2 + 14 = a(a^2 + 7) + 2(a^2 + 7) = (a^2 + 7)(a + 2)$.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки

1

№163.

1. *Назвати спільний множник членів многочлена (1–3):*

1) $ab + 5a$; **2)** $am - bm$; **3)** $a^2b + 5b + bc$.

4) Як називають подання многочлена у вигляді добутку двох чи більше многочленів?

2. *Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники двочлена чи тричлена способом винесення за дужки спільного множника:*

1) $ab + 5a = ...$:

а) $a(b + 5)$; б) $a(b + 5a)$; в) $a(ab + 5)$;

2) $ab + b = ...$:

а) $b(a + b)$; б) $b(ab + b)$; в) $b(a + 1)$;

3) $mx - m = ...$:

а) $m(x - m)$; б) $m(x + 1)$; в) $m(x - 1)$;

4) $2a + 5ab = ...$:

а) $a(2 + 5b)$; б) $a(2 + 5ab)$; в) $a(2a + 5b)$;

5) $-2a - 5ab = ...$:

а) $-a(-2 - 5b)$; б) $-a(2 + 5b)$; в) $-a(2a + 5ab)$.

3. *Розкласти многочлен на множники способом винесення за дужки спільного множника:*

1) $ax - ay$; 2) $mn + n$;

3) $bc - cd$; 4) $ac - c$;

5) $3a + 7ab$; 6) $-4a - 5ab$.

(2)

№164.

1. *Назвати найбільший спільний дільник коефіцієнтів членів многочлена (1–4):*

1) $3a + 3m$:

а) 1; б) 3; в) 9;

2) $5a + 15b$:

а) 5; б) 15; в) 1;

3) $14a + 21b$:

а) 14; б) 21; в) 7;

4) $16a + 12c$:

а) 12; б) 4; в) 3.

5) **Якщо всі коефіцієнти членів многочлена мають спільний дільник, то за дужки виносять їхній...**

а) найменший спільний дільник;

б) найбільший спільний дільник;

в) найменше спільне кратне.

1) $5x + 5y = \ldots$:
а) $5(x + 5y)$; б) $5(x + y)$; в) $5(5x + y)$;
2) $6m + 9y = \ldots$:
а) $3(2m + 9y)$; б) $3(6m + 3y)$; в) $3(2m + 3y)$;
3) $15a + 10c = \ldots$:
а) $5(3a + 2c)$; б) $5(3a + 10c)$; в) $5(3a + c)$.

Розкласти многочлен на множники:

1) $7x + 7y$; 2) $8c - 8a$; 3) $5a + 15b$; 4) $21a - 7c$;
5) $4a - 8$; 6) $5 - 15b$; 7) $3 + 3x$; 8) $12a + 8c$;
9) $12a - 8$; 10) $15x + 9y$; 11) $14a - 21b$; 12) $14 + 21b$.

3

165.

Назвати член многочлена, який містить змінну а з найменшим показником:

1) $a + a^2 + a^3$:
а) a; б) a^3;
2) $a^4b - a^{12}c$:
а) a^4b; б) $-a^{12}c$;
3) $a^3b + a^2c$;
4) $a^4b + a^3b^2 + a^2b^3$.

Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники многочлена винесенням за дужки степеня з найменшим показником:

1) $b^2 + b = \ldots$:
а) $b(b + 1)$; б) $b^2(2b + 1)$; в) $b^2(b + 1)$;
2) $x^3 - x^4 = \ldots$:
а) $x^3(x - 1)$; б) $x^3(1 - x)$; в) $3x(x - 1)$;
3) $x^8 - 3x^2 = \ldots$:
а) $x^2(x^4 - 3)$; б) $x^2(x^6 - 3)$; в) $3x^2(x^6 - 1)$;
4) $18a^2b + a^{10} = \ldots$:
а) $a^2(18b + a^5)$; б) $a^2(18b + a^8)$; в) $a^2(18b + a^{10})$.

Розкласти многочлен на множники винесенням за дужки степеня з найменшим показником:

1) $a + a^2$; 2) $a - a^2$;
3) $x^3 + x^2$; 4) $x^{10} - 3x^2$;
5) $x^5 + x^2$; 6) $a^2 + ab$;
7) $x^4 - x^2$.

1. *У наведених виразах вказати спільний множник:*

1) $a(x+y)+b(x+y)$:

а) $a(x+y)$; б) $x+y$; в) $b(x+y)$;

2) $a(x-y)+b(x-y)$;

3) $x(a+5)-y(a+5)$.

2. *Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники виразу:*

1) $a(x+y)+b(x+y)=...$:

а) $(x+y)(a+b)$; б) $ab(x+y)$; в) $(x+y)^2(a+b)$;

2) $x(a+3)-y(a+3)=...$:

а) $(a+3)^2(x-y)$; б) $(a+3)(x-y)$; в) $-(a+3)(x-y)$;

3) $a(x+y)-(x+y)=...$:

а) $(x-y)\cdot a$; б) $(x+y)(a-1)$; в) $(x+y)(a+1)$;

4) $(a+2b)+c(a+2b)=...$:

а) $(a+2b)(1+c)$; б) $(a+2b)c$; в) $(a+2b)^2(a+c)$;

5) $x(a-3)-y(a-3)=...$:

а) $(a-3)(x+y)$; б) $(a-3)(x-y)$; в) $-(a-3)xy$;

6) $x(a-3)+y(3-a)=...$:

а) $(a-3)(x+y)$; б) $(3-a)(x+y)$; в) $(a-3)(x-y)$;

7) $x(a-3)-y(3-a)=...$:

а) $(a-3)(x-y)$; б) $(a-3)(x+y)$; в) $(3-a)(x-y)$.

3. *Розкласти на множники вираз:*

1) $a(x+4)+b(x+4)$; 2) $a(x-7)+b(x-7)$;

3) $m(a-c)-k(a-c)$; 4) $a(x-5)+10(x-5)$;

5) $a(x-2)-5(x-2)$; 6) $a(x-9)+b(9-x)$;

7) $m(x-4)-p(4-x)$; 8) $m(a-2b)-(2b-a)$.

№167*.

Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники двочлена (1–8):

1) $a^{m+1}+a^m=...$:

а) $a^m\cdot a$; б) $a^{m+1}\cdot a$; в) $a^m\cdot(a+1)$;

2) $a^{n+2}+a^n=...$:

а) $a^n\cdot a^2$; б) $a^n\cdot(a^2+1)$; в) $a^2\cdot(a^n+1)$;

3) $a^m+a^{m+4}=...$:

а) $a^{m+4}\cdot(1+a^4)$; б) $a^m\cdot a^4$; в) $a^m\cdot(1+a^4)$;

4) $a^n-a^{n+5}=...$:

а) $a^n\cdot(1-a^5)$; б) $a^n\cdot(1+a^5)$; в) $a^n\cdot(1-a^{n+5})$;

5) $a^{m+n}-a^m=...$:

а) $a^m\cdot(a^n+1)$; б) $a^m\cdot(a^n-1)$; в) $a^m\cdot(a-1)$;

6) $a^n + a^{3n} = ...;$

а) $a^n \cdot (1 + a^{2n})$; б) $a^n \cdot (1 + a^2)$; в) $a^n \cdot (1 - a^{2n})$;

7) $a^n - a^{5n} = ...;$

а) $a^n \cdot (1 - a^{3n})$; б) $a^n \cdot (1 - a^{2n})$; в) $a^n \cdot (1 - a^{4n})$;

8) $b^m + b^{4m} = ...;$

а) $b^m \cdot (1 + b^4)$; б) $b^m \cdot (1 + b^{3m})$; в) $b^m \cdot (1 + b^{4m})$.

Розкласти на множники двочлен (9–16):

9) $b^{m+1} - b^m$; 10) $b^{m+2} + b^m$; 11) $x^m + x^{m+1}$; 12) $x^m - x^{m+10}$;

13) $x^{m+10} - x^m$; 14) $x^{5n} - x^n$; 15) $x^{5n} + x^{3n}$; 16) $x^{m+3} - x^m$.

Тренувальні вправи

168.

Розкласти многочлен на множники:

1) $mx + my$; 2) $ma - mb$; 3) $ab + a$; 4) $b - bc$.

1) $9a - 9b$; 2) $8a + 8$; 3) $7 + 7b$; 4) $6 - 6c$.

1) $2a + 10b$; 2) $12a - 3b$; 3) $4 + 20a$; 4) $7 - 35b$.

1) $4a + 6c$; 2) $6x - 9y$; 3) $15c + 25$; 4) $21 - 35y$.

1) $c^2 + c$; 2) $a^2 - a^3$; 3) $a^8 + a^3$; 4) $a^6 - a^2$.

1) $a(x + 5) + b(x + 5)$; 2) $m(x - 9) + 4(x - 9)$;

3) $b(a + 3) + (a + 3)$; 4) $c(a + 5) - (a + 5)$.

1) $a(x - 5) + b(5 - x)$; 2) $(m - 9) + 4(9 - m)$;

3) $a(m - 8) - 5(8 - m)$; 4) $b(a - 1) - (1 - a)$.

Завдання для самоперевірки

169. Варіант 1

Назвати:

1) спільний буквений множник членів многочлена $ab + cb + bd$;
2) найбільший спільний дільник коефіцієнтів членів двочлена $10a + 15b$:

а) 10; б) 15; в) 5;

3) степінь змінної a, який виносять за дужки при розкладанні на множники многочлена $a^4 + 5a^2 + 7a^3$:

а) a^4; б) a^3; в) a^2.

Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники многочлена:

1) $mc - md$:

а) $m(c - md)$; б) $m(c + d)$; в) $m(c - d)$;

2) $5 + 25b$:

а) $5(1 + 25b)$; б) $5(1 + 5b)$; в) $5(5 + 5b)$;

3) $a^{10} - a^2$:

а) $a^2(a^8 - 1)$; б) $a^2(a^5 - 1)$; в) $a^{10}(1 - a^2)$.

3. *Розкласти на множники двочлен:*

1) $ax + ay$; 2) $12a - 12$; 3) $c^4 + c^3$.

№170. Варіант 2

1. *Назвати (1–3):*

   1) **спільний буквений множник членів многочлена** $am + cm + bm$;

   2) **найбільший спільний дільник коефіцієнтів членів двочлена** $14a - 21c$:
   а) 14; **б)** 7; **в)** 21;

   3) **степінь змінної** a**, який виносять за дужки при розкладанні на множники многочлена** $a^6 - 4a^5 + 17a^3$:
   а) a^6; **б)** a^5; **в)** a^3.

2. *Серед виразів а)–в) вказати розклад на множники многочлена:*

   1) $ac - ad$:
   а) $a(ac - d)$; **б)** $a(c - ad)$; **в)** $a(c - d)$;

   2) $6 + 36m$:
   а) $6(1 + 36m)$; **б)** $6(1 + 6m)$; **в)** $36(1 + 6m)$;

   3) $b^8 + b^2$:
   а) $b^2(b^6 + 1)$; **б)** $b^2(b^4 + 1)$; **в)** $b^8(1 + b^2)$.

3. *Розкласти на множники двочлен:*

   1) $mc - md$; 2) $14b + 14$; 3) $c^5 - c^4$.

2. Розкладання многочленів на множники способом групування

(4)

№171.

1. *Назвати спільний множник першого і другого членів многочлена та третього і четвертого членів (1–3):*

   1) $ax + ay + bx + by$; 2) $a^2 + ab + ac + bc$;

   3) $2ab - 2b + 3a - 6$.

   4) У многочлені $ac + bd - bc - ad$ вказати члени, у яких спільний множник: a; d.

   Назвати члени, які можна об'єднати в групи для винесення спільного множника за дужки (5–7):

   5) $9x + ay + 9y + ax$; 6) $ax - 2y + ay - 2x$;

   7) $xy + 2y - 2x - 4$.

   Серед виразів а)–в) вказати вираз, якому тотожно дорівнює вираз (8–9):

   8) $5a + 5b + ma + mb = ...$:
   а) $5(a + b + ma + mb)$; **б)** $5(a + b) + m(a + b)$; **в)** $5(a + 5b) + m(a + ab)$;

9) $7a - 7b + ka - kb = \ldots$:

а) $7(a - b) + k(a - b)$; б) $7(a - b + ka - kb)$; в) $7(a - 7b) + k(a - kb)$.

Назвати вираз, який є розкладом на множники виразу (10–12):

10) $2(x + y) - a(x + y) = \ldots$:

а) $(x + y)(2 + a)$; б) $(x + y)(2 - a)$; в) $2xy(-a)$;

11) $5a - 5b + ma - mb = 5(a - b) + m(a - b) = \ldots$:

а) $(a - b)5m$; б) $(a - b)(5 + m)$; в) $(a - b)(5 - m)$;

12) $7a - 7c + ka - kc = \ldots$:

а) $(a - c)(7 + k)$; б) $7(a - c) + k$; в) $(a - c)(7 - k)$.

Розкласти на множники (13–16):

13) $a(m + n) + bm + bn$;
14) $x(a + b) + ay + by$;
15) $a(x - y) + bx - by$;
16) $a + b + ac + bc$.

Тренувальні вправи

№172.

Розкласти на множники вираз:

1) $10(x + y) - a(x + y)$;
2) $m(x + y) - 2(x + y)$;
3) $m(x + y) - (x + y)$;
4) $a(x + y) - (y + x)$.

1) $10x + 10y + mx + my$;
2) $7a + 7b + ma + mb$;
3) $4x + 4y - cx - cy$;
4) $5x - 5y + px - py$.

1) $5x^2 + 5y^2 + mx^2 + my^2$;
2) $6x^3 + 6y^3 + px^3 + py^3$;
3) $7a^2 - 7b^2 + ma^2 - mb^2$;
4) $3x^2 - 4y^2 + 3mx^2 - 4my^2$.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на застосування

№173. Варіант 1

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $5a + 5b$; б) $3(x + y) - a(x + y)$.
2. а) $a^5 + a^3$; б) $10x + 10y - m(x + y)$.
3. а) $20a^4 + 15a^3$; б) $ax + ay + 14x + 14y$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:

   а) $15ab^2 - 5ab$; б) $ax - ay - 4x + 4y$.

   2) Розв'язати рівняння $x^4 - x^3 = 0$.

2. Розкласти на множники: [illegible] $- 16a + 16b$.
3. Розв'язати рівняння: $x(x - 4) = 2x - 8$.

Високий рівень

1. 1) Розкласти на множники: $9ac - a^2c - 9a + a^2 - 9c + ac$.
   2) Довести, що $4^{13} - 4^{12} + 4^{11}$ ділиться на 13.
2. Розкласти на множники вираз $a^{n+1} - 3a + a^n - 3$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x + 7 = 0$, розклавши тричлен на множники.

№174. Варіант 2

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $18a - 18c$; б) $5(x + y) - b(x + y)$.
2. а) $a^6 - a$; б) $x - y - a(x - y)$.
3. а) $14a^7 + 21a^4$; б) $4a - 4c + ma - mc$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $20ab^3 + 15ab$; б) $a^4 + 7a^3 - a - 7$.
   2) Обчислити раціональним способом: $629^2 + 629 \cdot 371$.
2. Розкласти на множники: $10a^2 - 5ab - 12a + 6b$.
3. Розв'язати рівняння: $x(x + 5) = 6x + 30$.

Високий рівень

1. 1) Розкласти на множники: $12a^2b - 8a^2x - 9bx^3 + 6x^4$.
   2) Довести, що $2^{33} + 2^{31} - 2^{29}$ ділиться на 19.
2. Розкласти на множники вираз $a^{n+3} - 4a^3 - a^{n+2} + 4a^2$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, розклавши тричлен на множники.

№175. Варіант 3

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $11x + 11y$; б) $y(a + b) - 7(a + b)$.
2. а) $a^9 - a^2$; б) $4a + 4c - m(a + c)$.
3. а) $8a^5 + 20a^2$; б) $ax - ay + 12x - 12y$.

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $32a^3b^4 - 4ab$; б) $a^3 - 5a^2 - a + 5$.
   2) Обчислити раціональним способом: $513^2 + 513 \cdot 487$.
2. Розкласти на множники: $2a^3 + 10a^2 - 3a - 15$.
3. Обчислити раціональним способом: $3{,}9 \cdot 2{,}7 - 1{,}3 \cdot 3{,}8 - 6{,}2 \cdot 1{,}3 + 3{,}9 \cdot 7{,}3$.

Високий рівень

1. 1) Розкласти на множники: $ax^2 - bx^2 + ax - cx^2 - bx - cx$.
   2) Довести, що $11^9 - 11^8 - 11^7$ ділиться на 109.
2. Розкласти на множники вираз $a^{n+3} - 4a - a^{n+2} + 4$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 + 10x + 9 = 0$, розклавши тричлен на множники.

е176. Варіант 4

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $4a - 4b$; б) $a(m - n) + 7(m - n)$.
2. а) $a^7 + a^4$; б) $4x + 4y - b(x + y)$.
3. а) $24a^5 + 16a^4$; б) $7a - 7b + ka - kb$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $5a^4b^3 - 15a^2b^2$; б) $a^7 - 2a^6 - a + 2$.
   2) Розв'язати рівняння: $5(3 - 4x) - x(4x - 3) = 0$.
2. Розкласти на множники: $b^6 - 4b^4 - 2b^2 + 8$.
3. Обчислити раціональним способом: $125 \cdot 19 + 18 \cdot 129 + 19 \cdot 275 + 18 \cdot 271$.

Високий рівень

1. 1) Розкласти на множники: $12a^2b^2 - 6abc + 3ac^2 - 6a^2bc - c + 2b$.
   2) Довести, що $3^{14} - 3^{12} + 3^{11}$ ділиться на 75.
2. Розкласти на множники вираз $a^{n+1} - 9a^2 + a^n - 9a$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 - 7x + 6 = 0$, розклавши тричлен на множники.

№177. Варіант 1

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $9a - 9c$; б) $8(a + c) - x(a + c)$; в) $5x - 15y$.
2. а) $a^2 - a^8$; б) $9x + 9y - m(x + y)$.
3. 1) а) $20a^6 + 15a^2$; б) $11a + 11b - ma - mb$.
   2) Розв'язати рівняння $x^2 + 4x = 0$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $34a^5b^3 - 51a^3b^2$; б) $bx - by - 19y + 19x$.
2. $a^4 + 2a^3 - 5a - 10$.
3. Розв'язати рівняння: $x^2 - 4x = 5(x - 4)$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники вираз:
   1) $abc + a^2b^2 + 3a^4b^5 + 3a^3b^4c - ab - c$.
   2) Довести, що $11^9 - 2 \cdot 11^8 - 9 \cdot 11^7$ ділиться на 45.

Розкласти на множники вираз (2–3):

2. $c^{n+4} + 5 - c^{n+3} - 5c$.
3. $(a + 1)^2 + 6(a + 1) + 5$.

№178. Варіант 2

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $17a - 17b$; б) $9(a - b) - y(a - b)$; в) $4x + 12y$.
2. а) $a^2 + a^{10}$; б) $11a + 11c - k(a + c)$.
3. 1) а) $12b^3 - 18b^9$; б) $17a - 17c + ka - kc$.
   2) Розв'язати рівняння $x^2 - 7x = 0$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $32a^3b + 24a^2b^4$; б) $mx - my - 9y + 9x$.
2. $x^3 - 3x^4 + 4 - 12x$.
3. Розв'язати рівняння: $x^2 + 9x = 3(x + 9)$.

1. 1) Розкласти на множники вираз $5ax^2 - 30ax - bx + 6b - x + 6$.
   2) Довести, що $3^{15} - 2 \cdot 3^{13} + 3^{12}$ ділиться на 11.

Розкласти на множники вираз (2–3):

2. $a^{n+2} + a^{n+1} + a^n - 5a^3 - 5a^2 - 5a$.
3. $(a + 1)^2 + 12(a + 1) + 11$.

№179. Варіант 3

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $21x + 21y$; б) $9(a + m) - x(a + m)$; в) $9a + 27c$.
2. а) $a^4 - a^{12}$; б) $12a - 12b + x(a - b)$.
3. 1) а) $21b^5 - 14b^{15}$; б) $19a - 19c + ma - mc$.
   2) Розв'язати рівняння: $x^2 + 13x = 0$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $22x^3y^7 - 33x^2y^5$; б) $21x - 21y + ay - ax$.
2. $x^5 + 7x^4 - 2x - 14$.
3. Знайти значення x, при яких значення виразів $x^2 + x$ і $5(x + 1)$ рівні.

Високий рівень

1. 1) Розкласти на множники вираз $ab^2 + a^2y - ax + ay + b^2 - x$.
   2) Довести, що $2^{34} + 2^{32} - 2^{30}$ ділиться на 19.

Розкласти на множники вираз (2–3):

2. $a^{n+4} + a^{n+3} + a^{n+2} - 4a^2 - 4a - 4$.
3. $(a - 2)^2 + 12(a - 2) + 11$.

№180. Варіант 4

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $15m - 15n$; б) $2(a - k) + m(a - k)$; в) $11a - 33c$.
2. а) $a^3 + a^{12}$; б) $y(a - b) + 17a - 17b$.
3. 1) а) $16c^4 - 24c^{12}$; б) $xa + ya - 13x - 13y$.
   2) Розв'язати рівняння: $x^2 - 16x = 0$.

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $15a^4b^3 + 20ab$; б) $ax - ay - 17x + 17y$.
2. $x^6 - 2x^5 + 5x - 10$.
3. **Знайти значення x, при яких значення виразів $x(x + 5)$ і $3x + 15$ рівні.**

Високий рівень

1. **1) Розкласти на множники вираз $a^2c - a^2b - ac + ab + b + c$.**
   2) Довести, що $4^{15} - 4^{14} + 4^{13}$ ділиться на 13.

Розкласти на множники вираз (2–3):

2. $c^{n+5} + c^{n+4} + c^{n+3} - 5c^2 - 5c - 5$.
3. $(a^2 + 1)^2 - 3(a^2 + 1) + 2$.

ТЕМА 9. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

- Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів
- Розкладання на множники повного квадрата двочлена

Виклад теорії

1. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

①

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і їх суми:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Приклади.

1. $a^2 - 5^2 = (a - 5)(a + 5)$.
2. $a^2 - 49 = (a - 7)(a + 7)$.
3. $4a^2 - 25c^2 = (2a)^2 - (5c)^2 = (2a - 5c)(2a + 5c)$.
4. $(a + b)^2 - (c + d)^2 = ((a + b) - (c + d))((a + b) + (c + d)) =$
$= (a + b - c - d)(a + b + c + d)$.

2. Розкладання на множники повного квадрата двочлена

②

Сума квадратів двох виразів плюс подвоєний добуток цих виразів дорівнює квадрату суми цих виразів:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

або

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

Приклади.

1. $m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$.
2. $b^2 + 64 + 16b = b^2 + 8^2 + 2 \cdot b \cdot 8 = (b + 8)^2$.
3. $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 3^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 = (2x + 3)^2$.

③

Сума квадратів двох виразів мінус подвоєний добуток цих виразів дорівнює квадрату різниці цих виразів:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

або

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Приклади.

1. $a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$.
2. $n^2 - 4n + 4 = n^2 - 2 \cdot n \cdot 2 + 2^2 = (n - 2)^2$.
3. $25c^2 + 1 - 10c = (5c)^2 + 1^2 - 2 \cdot 5c \cdot 1 = (5c - 1)^2$.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

I. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

①

№181.

1. 1) Як називають вирази $a^2 - c^2$; $a^2 - 7^2$; $(a + b)^2 - c^2$; $(m + n)^2 - (p + k)^2$?
   а) Сумою квадратів виразів;
   б) квадратом різниці виразів;
   в) різницею квадратів виразів.

   2) ***Серед виразів а)–е) вказати три, які є різницею квадратів двох виразів:***
   а) $a^2 + b^2$; **б)** $a^2 - m^2$; **в)** $(m + n)^2 - (c + d)^2$;
   г) $(x - y)^2$; **д)** $a^2 - ab$; **е)** $(a^4)^2 - 5^2$.

   Записати різницю квадратів виразів:

   3) a і c; 4) a і $b + c$; 5) $a + b$ і $c + d$.

2. *Подати двочлен у вигляді різниці квадратів:*

   1) $a^2 - 9$:
   а) $(a - 3)^2$; **б)** $a^2 - 3^2$; **в)** $a - 3^2$.

   2) $25a^2 - 36$:
   а) $25a^2 - 6^2$; **б)** $(5a)^2 - 6^2$; **в)** $25a^2 - 36^2$.

   3) $a^{10} - a^6$:
   а) $(a^8)^2 - (a^4)^2$; **б)** $(a^5)^2 - (a^3)^2$; **в)** $(a^2)^5 - (a^2)^3$.

Записати у вигляді різниці квадратів двочлен:

1) $16a^2 - b^2$; 2) $9a^2 - 49^2$;

3) $a^8 - b^2$; 4) $a^{10} - c^4$;

5) $a^6b^{10} - c^4$.

182.

1) Чому дорівнює добуток $(a - b)(a + b)$?
   а) $a^2 + b^2$; б) $a^2 - b^2$; в) $a^2 - b^2 + 2ab$.
2) Чому дорівнює $a^2 - b^2$?
   а) $(a - b)(a - b)$; б) $(a + b)(a + b)$; в) $(a - b)(a + b)$.
3) Чому дорівнює $a^2 - m^2$?
   а) $(a - m)(a - m)$; б) $(a - m)(a + m)$; в) $(a + m)(a + m)$.
4) Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
   а) Добутку різниці цих виразів і їх суми;
   б) квадрату різниці цих виразів;
   в) квадрату суми цих виразів.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, який є розкладом на множники двочлена:

1) $a^2 - k^2 = \ldots$:
   а) $(a - k)^2$; б) $(a - k)(a + k)$; в) $(a + k)^2$.
2) $a^2 - 14^2 = \ldots$:
   а) $(a^2 - 14)(a^2 + 14)$; б) $(a + 14)^2$; в) $(a - 14)(a + 14)$.
3) $a^2 - 25 = \ldots$:
   а) $(a - 25)(a + 25)$; б) $(a - 5)^2$; в) $(a - 5)(a + 5)$.
4) $4a^2 - 36 = \ldots$:
   а) $(4a - 6)(4a + 6)$; б) $(2a - 6)(2a + 6)$; в) $(2a - 6)^2$.
5) $9a^2 - 16c^2 = \ldots$:
   а) $(3a - 4c)(3a + 4c)$; б) $(3a - 4c)^2$; в) $(9a - 16c)(9a + 16c)$.
6) $(a + c)^2 - d^2 = \ldots$:
   а) $(a - c - d)^2$; б) $(a + c - d)(a + c + d)$; в) $(a + c)\cdot d$.
7) $a^2 - (b + c)^2 = \ldots$:
   а) $(a - b - c)(a + b + c)$; б) $(a + b + c)^2$; в) $(a - (b + c))^2$.
8) $a^{16} - b^2 = \ldots$:
   а) $(a^8 - b)(a^8 + b)$; б) $(a^8 - b)^2$; в) $(a^8 - b)^2$.

Розкласти на множники вирази:

1) $a^2 - 25$. 2) $100 - c^2$. 3) $m^2 - \frac{9}{25}$. 4) $x^2 - \frac{4}{49}$.

5) $4a^2 - 25$. 6) $4a^2 - 9c^2$. 7) $(a + b)^2 - m^2$. 8) $a^{20} - b^2$.

№183.

Серед добутків чисел а)–в) вказати добуток, якому дорівнює різниця квадратів чисел:

1) $225^2 - 25^2 = \ldots$:
   а) 200^2; б) $200 \cdot 250$; в) 250^2.
2) $10{,}6^2 - 0{,}6^2 = \ldots$:
   а) $10 \cdot 11{,}2$; б) 10^2; в) $11{,}2^2$.

Серед рівнянь а)–в) вказати пару рівнянь, яким рівносильне рівняння:

3) $x^2 - 49 = 0$:
   а) $x - 49 = 0$ і $x + 49 = 0$; б) $x - 7 = 0$ і $x + 7 = 0$;
   в) $x - 98 = 0$ і $x + 98 = 0$.
4) $x^2 - 100 = 0$:
   а) $x - 100 = 0$ і $x + 100 = 0$; б) $x - 200 = 0$ і $x + 200 = 0$;
   в) $x - 10 = 0$ і $x + 10 = 0$.

Записати два рівняння, яким рівносильне рівняння:

5) $x^2 - 64 = 0$. 6) $x^2 - 121 = 0$.

№184.

Вказати правильний розклад на множники двочлена:

1) $a^{2n} - b^{2n} = (a^n)^2 - (b^n)^2 = \ldots$:
   а) $(a^n - b^n)(a^n - b^n)$; б) $(a^n - b^n)(a^n + b^n)$; в) $(a^n + b^n)(a^n + b^n)$.
2) $a^{2n} - 16 = \ldots$:
   а) $(a^n - 4)(a^n + 4)$; б) $(a^n - 16)(a^n + 16)$; в) $(a^n - 2)(a^n + 2)$.
3) $a^{4n} - 1 = \ldots$:
   а) $(a^n - 1)(a^n + 1)$; б) $(a^{3n} - 1)(a^{3n} + 1)$; в) $(a^{2n} - 1)(a^{2n} + 1)$.
4) $c^{8n} - 25 = \ldots$:
   а) $(c^{4n} - 25)(c^{4n} + 25)$; б) $(c^{2n} - 5)(c^{2n} + 5)$; в) $(c^{4n} - 5)(c^{4n} + 5)$.
5) $a^{2m} - b^{2n} = \ldots$:
   а) $(a^m - b^n)(a^{2m} + b^n)$; б) $(a^m - b^n)(a^m + b^n)$; в) $(a^m + b^n)(a^m + b^n)$.

Розкласти на множники:

6) $c^{2k} - b^{2k}$. 7) $a^{2n} - 49$.
8) $c^{4n} - 9$. 9) $x^{16n} - 1$.
10) $a^{2m} - c^{2k}$.

Тренувальні вправи

№185.

Розкласти на множники:

1. 1) $a^2 - x^2$; 2) $b^2 - 4^2$; 3) $m^2 - p^2$; 4) $n^2 - d^2$.
2. 1) $x^2 - 36$; 2) $n^2 - 100$; 3) $y^2 - 100$; 4) $z^2 - 144$.
3. 1) $9a^2 - 36$; 2) $16n^2 - 100$; 3) $25y^2 - 64$; 4) $9z^2 - 144$.

1) $9a^2-36b^2$; 2) $16n^2-100b^2$; 3) $25y^2-64z^2$; 4) $9z^2-144k^2$.
1) a^6-b^2; 2) n^6-k^2; 3) y^6-z^2; 4) $z^{10}-k^2$.

Завдання для самоперевірки

№186. Варіант 1

1) Серед виразів а)–в) вказати той, який є різницею виразів m і n:
а) $m-n$; б) $(m-n)^2$; в) m^2-n^2.
2) Чому дорівнює a^2-c^2?
а) $a-c$; б) $(a-c)(a+c)$; в) ac.
3) Вказати вираз, який дорівнює $49n^2-36$.
а) $(7n)^2-6$; б) $(7n)^2-6^2$; в) $7n^2-6^2$.

Вказати правильну відповідь (1–3):

1) $z^2-25=\ldots$:
а) $(z-25)(z+25)$; б) $(z-5)(z-5)$; в) $(z-5)(z+5)$.
2) $4z^2-1=\ldots$:
а) $(2z-1)(2z-1)$; б) $(2z-1)(2z+1)$; в) $(4z-1)(4z+1)$.
3) $25y^2-16z^2=\ldots$:
а) $(25y-16z)(25y+16z)$; б) $(5y-4z)(5y+4z)$; в) $(5y-2z)(5y+2z)$.

Розкласти на множники:

1) n^2-9. 2) $1-25y^2$. 3) $36z^2-49y^2$.

№187. Варіант 2

1) Серед виразів а)–в) вказати той, який є різницею виразів p і x:
а) $p-x$; б) $(p-x)^2$; в) p^2-x^2.
2) Чому дорівнює x^2-z^2?
а) $x-z$; б) $(x-z)(x+z)$; в) xz.
3) Вказати вираз, який дорівнює $25p^2-9$.
а) $(5p)^2-3$; б) $5p^2-3^2$; в) $(5p)^2-3^2$.

Вказати правильну відповідь:

1) $y^2-100=\ldots$:
а) $(y-100)(y+100)$; б) $(y-10)(y+10)$; в) $(y-10)(y-10)$.
2) $9n^2-1=\ldots$:
а) $(9n-1)(9n+1)$; б) $(3n-1)(1-3n)$; в) $(3n-1)(3n+1)$.
3) $49p^2-25q^2=\ldots$:
а) $(49p-25q)(49p+25q)$; б) $(7p-5q)(7p-5q)$; в) $(7p-5q)(7p+5q)$.

Розкласти на множники:

1) p^2-64. 2) $4-9a^2$. 3) $64z^2-25y^2$.

2

№188.

1. 1) Яка спільна назва у тричленів $a^2+2ab+b^2$; a^2+b^2+2ab; $x^2+2xy+y^2$; x^2+y^2+2xy; a^2+2a+1; x^2+1+2x?

а) Неповні квадрати двочленів;

б) повні квадрати двочленів.

2) Серед виразів а)–е) вказати три вирази, тотожно рівні квадрату двочлена $x+y$:

а) x^2+y^2+2xy; б) x^2+y^2; в) x^2+y^2-2xy;
г) y^2+x^2+2xy; д) $x^2+2xy+y^2$; е) y^2+x^2.

Серед виразів а)–в) вказати той, якому дорівнює тричлен (3–4):

3) $a^2+2ab+b^2=\ldots$:

а) $(a+b)(a-b)$; б) $(a+b)^2$; в) $(a-b)^2$.

4) $a^2+b^2+2ab=\ldots$:

а) $(a+b)(a-b)$; б) $(a+b)^2$; в) $(a-b)^2$.

5) Чому дорівнює сума квадратів двох виразів плюс їхній подвоєний добуток?

а) Добутку суми і різниці виразів;

б) квадрату різниці цих виразів;

в) квадрату суми цих виразів.

2. *Серед виразів а)–в) вказати той, який є розкладом на множники тричлена:*

1) $b^2+2b+1=\ldots$:

а) $b+1$; б) $(b+2)^2$; в) $(b+1)^2$.

2) $x^2+1+2x=\ldots$:

а) $(x^2+1)^2$; б) $(x+1)^2$; в) $(x+2)^2$.

3) $a^2+36+12a=\ldots$:

а) a^2-36; б) $(a-6)^2$; в) $(a+6)^2$.

4) $a^2-12a+36=\ldots$:

а) $(a-6)^2$; б) a^2-36; в) $(a+6)^2$.

5) $4a^2+12a+9=\ldots$:

а) $(4a+3)^2$; б) $(2a+3)^2$; в) $(2a+9)^2$.

6) $4a^2+12ab+9b^2=\ldots$:

а) $(2a+3b)^2$; б) $(2a-3b)^2$; в) $(2b)^2+(3b)^2$.

3. *Подати у вигляді квадрата двочлена тричлен:*

1) p^2+2p+1. 2) n^2+6n+9.

3) $y^2+25+10y$. 4) $4z^2+9+12z$.

5) $25a^2+36+60a$.

③

189.

1) Яка спільна назва у тричленів $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 + b^2 - 2ab$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 + y^2 - 2xy$; $a^2 - 2a + 1$; $x^2 + 1 - 2x$?

   а) Неповні квадрати двочленів;

   б) повні квадрати двочленів.

2) Серед виразів а)–е) вказати три вирази, тотожно рівні квадрату двочлена $x - y$:

   а) $x^2 + y^2 - 2xy$; б) $x^2 - y^2$; в) $x^2 + y^2 + 2xy$;

   г) $y^2 + x^2 - 2xy$; д) $x^2 - 2xy + y^2$; е) $y^2 + x^2$.

Серед виразів а)–в) вказати вираз, якому дорівнює тричлен (3–4):

3) $a^2 - 2ac + c^2 = ...$:

   а) $(a + c)(a - c)$; б) $(a - c)^2$; в) $a^2 - c^2$.

4) $a^2 + c^2 + 2ac = ...$:

   а) $(a + c)(a - c)$; б) $(a + c)^2$; в) $(a - c)^2$.

5) Чому дорівнює сума квадратів двох виразів мінус їхній подвоєний добуток?

   а) Добутку суми і різниці виразів;

   б) квадрату різниці цих виразів;

   в) квадрату суми цих виразів.

Серед виразів а)–в) вказати той, який є розкладом на множники тричлена:

1) $b^2 - 2b + 1 = ...$:

   а) $b - 1$; б) $(b - 2)^2$; в) $(b - 1)^2$.

2) $y^2 + 1 - 2y = ...$:

   а) $(y^2 - 1)^2$; б) $(y - 1)^2$; в) $(y - 2)^2$.

3) $a^2 - 12a + 36 = ...$:

   а) $(a - 6)^2$; б) $a^2 - 36$; в) $(a + 6)^2$.

4) $x^2 + 25 - 10x = ...$:

   а) $(x - 5)^2$; б) $x^2 - 25$; в) $(a + 5)^2$.

5) $9x^2 - 6x + 1 = ...$:

   а) $(3x)^2 - 1$; б) $(3x + 1)^2$; в) $(3x - 1)^2$.

6) $25a^2 - 10a + 1 = ...$:

   а) $(25a - 1)^2$; б) $(5a - 1)^2$; в) $(5a + 1)^2$.

Подати у вигляді квадрата двочлена тричлен:

1) $p^2 - 2p + 1$. 2) $n^2 - 6n + 9$.

3) $y^2 + 25 - 10y$. 4) $4z^2 + 9 - 12z$.

5) $25a^2 + 36 - 60a$.

№190*.

Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне даному (1–4):

1) $x^2 + 16x + 64 = 0$:
   а) $(x+8)^2 = 0$; б) $(x-8)^2 = 0$; в) $x^2 + 8^2 = 0$.
2) $x^2 - 18x + 81 = 0$:
   а) $x^2 + 81 = 0$; б) $(x-9)^2 = 0$; в) $(x+9)^2 = 0$.
3) $x^2 + 25 + 10x = 0$:
   а) $(x-5)^2 = 0$; б) $x^2 + 25 = 0$; в) $(x+5)^2 = 0$.
4) $4x^2 + 9 + 12x = 0$:
   а) $(2x+6)^2 = 0$; б) $(2x+3)^2 = 0$; в) $(2x+9)^2 = 0$.

Вказати правильну відповідь (5–8):

5) $a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = \ldots$:
   а) $(a+c)^2 + b^2$; б) $(a+b)^2 + c^2$; в) $a^2 + (b+c)^2$.
6) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = \ldots$:
   а) $(a+c)^2 - b^2$; б) $(a+b)^2 - c^2$; в) $(a+b)^2 + c^2$.
7) $x^2 + 10x + 25 + b^2 = \ldots$:
   а) $(x+5)^2 + b^2$; б) $(x+25)^2 + b^2$; в) $(x+10)^2 + b^2$.
8) $x^2 + 49 + 14x - 4^2 = \ldots$:
   а) $(x+49)^2 - 4^2$; б) $(x+7)^2 - 4^2$; в) $(x+14)^2 - 4^2$.

Серед виразів а)–в) вказати той, який поданий у вигляді різниці квадра-тів (9–12):

9) $4a^2 + 4a + 1 - c^2 = \ldots$:
   а) $(2a+1)^2 - c^2$; б) $(2a+1)^2 + c^2$; в) $(4a+1)^2 - c^2$.
10) $x^2 + 2xy + y^2 - b^2 = \ldots$:
   а) $(x+y)^2 - b^2$; б) $(x+y)^2 + b^2$; в) $(x-y)^2 - b^2$.
11) $a^2 - 16a + 64 - 1 = \ldots$:
   а) $(a+8)^2 - 1^2$; б) $(a-8)^2 + 1$; в) $(a-8)^2 - 1^2$.
12) $m^2 - 20m + 100 - 4n^2 = \ldots$:
   а) $(m-10)^2 + (2n)^2$; б) $(m-10)^2 - (2n)^2$; в) $(m+10)^2 - (2n)^2$.

Подати у вигляді різниці квадратів виразів чотиричлен (13–16):

13) $m^2 + 2mn + n^2 - 1$. 14) $a^2 - 2ab + b^2 - 9$.
15) $x^2 - 2xy + y^2 - 100$. 16) $a^2 - 10a + 25 - b^2$.

Тренувальні вправи

№191.

Подати у вигляді квадрата суми чи різниці двох виразів:

1. 1) $z^2 - 2z + 1$; 2) $y^2 - 2y + 1$; 3) $n^2 - 6n + 9$; 4) $n^2 + 10n + 25$.
2. 1) $z^2 + 9 + 6z$; 2) $y^2 + 25 - 10y$; 3) $n^2 + 16 + 8n$; 4) $n^2 + 16 - 8n$.
3. 1) $4z^2 + 9 + 12z$; 2) $4z^2 - 12z + 9$; 3) $25y^2 + 1 - 10y$; 4) $25y^2 + 10y + 1$
4. 1) $9m^2 - 6m + 1$; 2) $9m^2 + 1 + 6m$; 3) $81a^2 + 1 + 18a$; 4) $81a^2 - 18a + 1$
5. 1) $a^4 + 2a^2 + 1$; 2) $a^{10} + 2a^5 + 1$; 3) $a^6 - 2a^3 + 1$; 4) $a^{20} - 2a^{10} + 1$.

Завдання для самоперевірки

192. Варіант 1

1) Серед виразів а)–в) вказати повний квадрат двочлена $a + c$.
 а) $a^2 + c^2$; б) $a^2 + 2ac + c^2$; в) $a^2 - 2ac + c^2$.

Вказати правильну відповідь:

2) $a^2 + 2am + m^2 = ...$:
 а) $a^2 + m^2$; б) $(a + m)^2$; в) $(a - m)^2$.
3) $a^2 - 2an + n^2 = ...$:
 а) $a^2 - n^2$; б) $(a + n)^2$; в) $(a - n)^2$.

Вказати правильну відповідь:

1) $z^2 + 2z + 1 = ...$:
 а) $z + 1$; б) $(z + 1)^2$; в) $z^2 + 1$.
2) $p^2 - 10p + 25 = ...$:
 а) $(p - 5)^2$; б) $(p + 5)^2$; в) $p^2 - 5^2$.
3) $9m^2 + 6m + 1 = ...$:
 а) $(6m + 1)^2$; б) $(9m + 1)^2$; в) $(3m + 1)^2$.

Подати у вигляді квадрата двочлена:

1) $m^2 + 16m + 64$. 2) $n^2 + 100 - 20n$.
3) $4p^2 + 20p + 25$.

193. Варіант 2

1) Серед виразів а)–в) вказати повний квадрат двочлена $a - c$.
 а) $a^2 - c^2$; б) $a^2 + 2ac + c^2$; в) $a^2 - 2ac + c^2$.

Вказати правильну відповідь (2–3):

2) $a^2 + 2ap + p^2 = ...$:
 а) $a^2 + p^2$; б) $(a + p)^2$; в) $(a - p)^2$.
3) $x^2 - 2xy + y^2 = ...$:
 а) $x^2 - y^2$; б) $(x + y)^2$; в) $(x - y)^2$.

Вказати правильну відповідь (1–3):

1) $m^2 - 2m + 1 = ...$:
 а) $(m - 1)^2$; б) $(m - 2)^2$; в) $(m + 1)^2$.
2) $z^2 + 12z + 36 = ...$:
 а) $(z + 12)^2$; б) $(z + 36)^2$; в) $(z + 6)^2$.
3) $25m^2 - 10m + 1 = ...$:
 а) $(5m - 1)^2$; б) $(25m - 1)^2$; в) $(10m - 1)^2$.

Подати у вигляді квадрата двочлена:

1) $m^2 - 14m + 49$. 2) $n^2 + 81 + 18n$.
3) $16p^2 + 80p + 100$.

Завдання на відтворення

№194.

Середній рівень

Записати формулу розкладання на множники виразу:

1) $a^2 - c^2$; 2) $a^2 + b^2 + 2ab$; 3) $a^2 + b^2 - 2ab$.

Достатній рівень

Довести формулу розкладання на множники:

1) різниці квадратів двох виразів;
2) тричлена $a^2 + b^2 + 2ab$;
3) тричлена $a^2 + b^2 - 2ab$.

Завдання на застосування

№195. Варіант 1

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $a^2 - 25$; б) $a^2 + 25 + 10a$; в) $a^2 + 25 - 10a$.
2. а) $4a^2 - 25b^2$; б) $a^2 - 12ab + 36b^2$.
3. а) $a^3 - 25a$; б) $4a^2 + 12ab + 9b^2$.
4. **Розв'язати рівняння:**
   а) $x^2 - 49 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) **Розкласти на множники:**
   а) $100b^2 - 81a^2$; б) $5a^4 + 10a^2 + 5$.
   2) Обчислити раціональним способом $7{,}6^2 - 6{,}4^2$.

Розкласти на множники:

2. $(a - 36)^2 - 1$.
3. а) $a^2 - 25b^2 + a + 5b$; б) $a^2 - 10ab + 25b^2 - 1$.

Високий рівень

1. **Розкласти на множники:**
   а) $(2a + 3)^2 - (a - 1)^2$; б) $16 - c^2 + a^2 - 8a$.
2. Розв'язати рівняння: $x^3 + 25x = 10x^2$.

3. Розкласти многочлен $x^2 + 6x + 8$ на множники виділенням повного квадрата двочлена і використанням формули різниці квадратів.

196. Варіант 2

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $a^2 - 49$; б) $a^2 + 49 + 14a$; в) $a^2 + 49 - 14a$.
2. а) $4a^2 - 49b^2$; б) $a^2 - 10ab + 25b^2$.
3. а) $a^3 - 49a$; б) $4a^2 + 20ab + 25b^2$.
4. Розв'язати рівняння:
   а) $x^2 - 36 = 0$; б) $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $16b^4 - 25c^2$; б) $72a^4 + 24a^2b^2 + 2b^4$.
   2) Обчислити раціональним способом $17{,}5^2 - 2{,}5^2$.

Розкласти на множники:

2. $(3a + 4b)^2 - 9c^2$.
3. а) $x^2 - 49y^2 + x - 7y$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - 4$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $(3a + 2b)^2 - (a + b)^2$; б) $36 + 20xy - 4x^2 - 25y^2$.
2. Розв'язати рівняння: $x^3 - 6x^2 = -9x$.
3. Розкласти многочлен $x^2 - 12x + 32$ на множники виділенням повного квадрата двочлена і використанням формули різниці квадратів.

197. Варіант 3

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $a^2 - 81$; б) $a^2 + 81 - 18a$; в) $a^2 + 81 + 18a$.
2. а) $25a^2 - 81b^2$; б) $a^2 + 16ab + 64b^2$.
3. а) $a^3 - 81a$; б) $9a^2 - 30ab + 25b^2$.
4. Розв'язати рівняння:
   а) $x^2 - 81 = 0$; б) $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $81b^4 - 64c^6$; б) $100x^4 - 20x^2y^2 + y^4$.

2) Обчислити раціональним способом $4{,}1^2 - 3{,}1^2$.

Розкласти на множники:

2. $4 - (a+4)^2$.
3. а) $a^2 - 49b^2 + a + 7b$; б) $x^2 - a^2 - 12a - 36$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$; б) $25a^2 - 4x^2 - 9y^2 + 12xy$.
2. Довести, що коли добуток двох натуральних чисел, одне з яких на 2 більше за інше, збільшити на 1, то одержимо число, яке є квадратом деякого натурального числа.
3. Розкласти на множники многочлен $x^2 - 10x + 24$.

№198. Варіант 4

Середній рівень

Розкласти на множники (1–3):

1. а) $m^2 - 64$; б) $m^2 + 64 - 16m$; в) $m^2 + 64 + 16m$.
2. а) $9m^2 - 64n^2$; б) $a^2 + 6ab + 9b^2$.
3. а) $m^3 - 64m$; б) $25a^2 + 30ab + 9b^2$.
4. Розв'язати рівняння:
   а) $x^2 - 64 = 0$; б) $x^2 - 16x + 64 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $16b^4 - 25c^2$; б) $3a^4 - 36a^2b^2 + 108b^4$.
   2) Обчислити раціональним способом $5{,}75^2 - 2{,}25^2$.

Розкласти на множники:

2. $36a^2 - (b+4)^2$.
3. а) $a^2 - 100b^2 - a + 10b$; б) $25x^2 - b^2 + 12b - 36$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $16(a-b)^2 - 25(a+b)^2$; б) $ac - bc - a^2 + 2ab - b^2$.
2. Довести, що коли добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то одержимо квадрат деякого натурального числа.
3. Розкласти на множники многочлен $x^2 - 8x + 15$.

ТЕМА 10. РІЗНИЦЯ ТА СУМА КУБІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

- **Формула різниці кубів**
- **Формула суми кубів**

Виклад теорії

1. Формула різниці кубів

1

Тричлени $a^2 + b^2 + ab$ і $a^2 + ab + b^2$ називають ***неповним квадратом двочлена $a + b$.***

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Приклади.

1. $a^3 - 5^3 = (a - 5)(a^2 + 5a + 25) = (a - 5)(a^2 + 5a + 25)$.
2. $b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b - 2)(b^2 + 2b + 4)$.
3. $125c^3 - 1 = (5c)^3 - 1^3 = (5c - 1)((5c)^2 + 5c \cdot 1 + 1^2) = (5c - 1)(25c^2 + 5c + 1)$.
4. $a^{15} - 27 = (a^5)^3 - 3^3 = (a^5 - 3)(a^{10} + 3a^5 + 9)$.

Доведення

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= a^3 + \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} - b^3 = a^3 - b^3.$$

2. Формула суми кубів

2

Тричлени $a^2 + b^2 - ab$ і $a^2 - ab + b^2$ називають ***неповним квадратом двочлена $a - b$.***

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Приклади.

1. $a^3 + 2^3 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$.
2. $c^3 + 27 = c^3 + 3^3 = (c + 3)(c^2 - 3c + 9)$.
3. $8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$.
4. $a^{21} + b^6 = (a^7)^3 + (b^2)^3 = (a^7 + b^2)(a^{14} - a^7b^2 + b^4)$.

Доведення

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)=$$
$$=a^3-\underline{a^2b}+\underline{ab^2}+\underline{a^2b}-\underline{ab^2}+b^3=a^3+b^3.$$

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Формула різниці кубів

①

№199.

1. 1) Яка спільна назва у виразів: a^3-c^3; a^3-10^3; $(4a)^3-b^3$; $(a^7)^3-(b^2)^3$; $(3a+2)^3-(2a+1)^3$?
   2) Яка спільна назва у виразів: a^2+b^2+ab; a^2+c^2+ac; x^2+xy+y^2; $a^2+25+5a$?
      а) Повний квадрат суми виразів a і b;
      б) неповний квадрат суми виразів a і b;
      в) неповний квадрат різниці виразів a і b.
   3) Який з наведених многочленів а)–в) є неповним квадратом двочлена $a+b$?
      а) a^2+b^2; б) a^2+b^2+2ab; в) a^2+b^2+ab.
   4) $a^3-c^3=\ldots$:
      а) $(a-c)(a^2-2ac+c^2)$; б) $(a-c)(a^2+ac+c^2)$;
      в) $(a-c)(a^2+2ac+c^2)$.
   5) Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку …
      а) суми цих виразів та неповного квадрата різниці;
      б) різниці цих виразів і їх суми;
      в) різниці цих виразів і неповного квадрата суми.
2. *Який з наведених виразів а)–в) є розкладом на множники виразу:*
   1) $a^3-2^3=\ldots$:
      а) $(a-2)(a+2)$; б) $(a-2)(a^2+4a+4)$; в) $(a-2)(a^2+2a+4)$.
   2) $a^3-125=a^3-5^3=\ldots$:
      а) $(a-5)(a+5)$; б) $(a-5)(a^2-5a+25)$; в) $(a-5)(a^2+5a+25)$.
   3) $x^9-27=(x^3)^3-3^3=\ldots$:
      а) $(x^3-3)(x^6+6x^3+9)$; б) $(x^3-3)(x^6+3x^3+9)$; в) $(x^3-3)(x^6-6x^3+9)$.
   4) $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=\ldots$:
      а) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$; б) $(x^3-2y)(x^6+2x^3y+4y^2)$; в) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

5) $(a+b)^3-c^3=\ldots$:

а) $(a+b-c)((a+b)^2+c(a+b)+c^2)$;

б) $(a+b-c)((a+b)^2+2c(a+b)+c^2)$;

в) $(a+b-c)((a+b)^2-c(a+b)+c^2)$.

Подати у вигляді різниці кубів вираз:

1) a^3-8. 2) $b^3-0{,}027$.

3) $64a^3-c^3$. 4) a^6-27.

5) $8a^3-b^9$.

Розкласти на множники, використавши формулу різниці кубів двох виразів:

6) x^3-4^3. 7) z^3-27.

8) a^3-125b^3. 9) $x^{15}-1$.

10) $(ab)^3-8$.

2. Формула суми кубів

2

200.

1) Яка спільна назва у виразів: a^3+c^3; a^3+5^3; $(2a)^3+5^3$; $(a^4)^3+10^3$; $(2a+1)^3+b^3$?

2) Яка спільна назва у виразів: a^2+b^2-ab; a^2+c^2-ac; x^2-xy+y^2; $a^2+25-5a$?

а) Повний квадрат різниці виразів a і b;

б) неповний квадрат суми виразів a і b;

в) неповний квадрат різниці виразів a і b.

3) $a^3+c^3=\ldots$:

а) $(a+c)(a^2-2ac+c^2)$; б) $(a+c)(a^2-ac+c^2)$;

в) $(a-c)(a^2+2ac+c^2)$.

4) Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів та ...

а) неповного квадрата їх суми;

б) неповного квадрата їх різниці;

в) повного квадрата їх різниці.

Який з наведених виразів а)–в) є розкладом на множники виразу:

1) $a^3+5^3=\ldots$:

а) $(a+5)(a-5)$; б) $(a+5)(a^2-10a+25)$; в) $(a+5)(a^2-5a+25)$.

2) $1+x^3=\ldots$:

а) $(1+x)(1+x+x^2)$; б) $(1+x)(1-2x+x^2)$; в) $(1+x)(1-x+x^2)$.

3) $a^{15}+c^3=\ldots$:

а) $(a^5+c)(a^{10}+a^5c+c^2)$; б) $(a^5+c)(a^{10}-2a^5c+c^2)$; в) $(a^5+c)(a^{10}-a^5c+c^2)$.

4) $x^9 + 8y^3 = (x^3)^3 + (2y)^3 = \ldots$:
а) $(x^3+2y)(x^6+2x^3y+4y^2)$; б) $(x^3+2y)(x^6-2x^3y+4y^2)$; в) $(x^3+2y)(x^6-4x^3y+4y^2)$.

5) $(a+b)^3 + c^3 = \ldots$:
а) $(a+b+c)((a+b)^2 + c(a+b) + c^2)$;
б) $(a+b+c)((a+b)^2 - 2c(a+b) + c^2)$;
в) $(a+b+c)((a+b)^2 - c(a+b) + c^2)$.

3. *Подати у вигляді суми кубів вираз:*
1) $a^3 + 27$. 2) $a^3 + 0{,}008$.
3) $8a^3 + b^3$. 4) $a^{12} + 1000$.
5) $27a^3 + b^{15}$.

Розкласти на множники, використавши формулу суми кубів двох виразів:
6) $x^3 + 4^3$. 7) $27 + m^3$.
8) $125x^3 + y^3$. 9) $m^{15} + 1$.
10) $(xy)^3 + 8$.

Тренувальні вправи

№201.

1. Подати вираз у вигляді суми кубів:
1) $a^3 + 8$; 2) $x^3 + 0{,}027$; 3) $a^3 + 64b^3$; 4) $a^6 + 27$.
2. Подати вираз у вигляді різниці кубів:
1) $27 - a^3$; 2) $0{,}008 - a^3$; 3) $c^3 - 8a^3$; 4) $1000 - a^{15}$.

Розкласти вираз на множники:

3. 1) $a^3 + 10^3$; 2) $b^3 + 1000$; 3) $8b^3 + 1$; 4) $b^{15} + 8$.
4. 1) $m^3 - 10^3$; 2) $1000 - m^3$; 3) $1 - 125c^3$; 4) $8 - y^{21}$.

Завдання для самоперевірки

№202. Варіант I

1. 1) Серед виразів а)–в) вказати неповний квадрат двочлена $x + y$.
а) $x^2 + y^2$; б) $x^2 + y^2 - xy$; в) $x^2 + y^2 + xy$.

Назвати розклад двочлена:

2) $x^3 - m^3 = \ldots$:
а) $(x-m)(x^2 + 2mx + m^2)$;
б) $(x+m)(x^2 - mx + m^2)$;
в) $(x-m)(x^2 + mx + m^2)$.

3) $m^3 + n^3 = \ldots$:
а) $(m+n)(m^2 + 2mn + n^2)$;
б) $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$;
в) $(m-n)(m^2 + mn + n^2)$.

Вказати правильну відповідь:

1) $z^3 - 1 = ...$:
   а) $(z-1)(z^2+1)$; б) $(z+1)(z^2+z+1)$; в) $(z-1)(z^2+z+1)$.
2) $125 + p^3 = ...$:
   а) $(5+p)(25+p^2)$; б) $(5+p)(25+p^2-5p)$; в) $(5+p)(25+p^2+5p)$.
3) $27c^3 - 1 = ...$:
   а) $(3c-1)(9c^2+6c+1)$; б) $(3c-1)(9c^2+1)$; в) $(3c-1)(9c^2+1-3c)$.

1) **Подати у вигляді суми кубів вираз $a^{21} + 1$.**

Розкласти на множники (2–3):

2) $y^3 - 64$. 3) $x^{15} + 1$.

203. **Варіант 2**

1) Серед виразів а)–в) вказати неповний квадрат двочлена $m - p$.
   а) $m^2 - p^2$; б) $m^2 - mp + p^2$; в) $m^2 + mp + y^2$.

Назвати розклад двочлена:

2) $c^3 - d^3 = ...$;
   а) $(c-d)(c^2+2cd+d^2)$;
   б) $(c+d)(c^2-cd+d^2)$;
   в) $(c-d)(c^2+cd+d^2)$.
3) $m^3 + p^3 = ...$:
   а) $(m+p)(m^2+2mp+p^2)$;
   б) $(m+p)(m^2-mp+p^2)$;
   в) $(m-p)(m^2+mp+p^2)$.

Вказати правильну відповідь:

1) $p^3 + 1 = ...$:
   а) $(p+1)(p^2+p+1)$; б) $(p+1)(p^2-p+1)$; в) $(p+1)(p+1)$.
2) $64 - y^3 = ...$:
   а) $(4-y)(16+y^2)$; б) $(4-y)(16+y^2+4y)$; в) $(4-y)(16+y^2+8y)$.
3) $1000a^3 + 1 = ...$:
   а) $(100a+1)(10000a^2-100a+1)$;
   б) $(10a+1)(100a^2-20a+1)$;
   в) $(10a+1)(100a^2+1-10a)$.

1) **Подати у вигляді різниці кубів вираз $a^{30} - 1$.**

Розкласти на множники:

2) $125 + p^3$. 3) $m^9 - 1$.

Завдання на відтворення

№204.

Середній рівень

Записати формулу розкладання на множники виразу:

1) $a^3 + c^3$. 2) $a^3 - c^3$.

Достатній рівень

Довести формулу розкладання на множники:

1) суми кубів двох виразів; 2) різниці кубів двох виразів.

Завдання на застосування

№205. Варіант 1

Середній рівень

Розкласти на множники:

1. а) $a^3 - 4^3$; б) $x^3 + 5^3$.
2. $8 + a^3$.
3. $125a^3 - 1$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27a^3 - 8b^3$; б) $a^4 + a$.
2. $-2a^3 - 54$.
3. Довести, що $224^3 + 276^3$ ділиться на 500.

Високий рівень

1. Розкласти на множники вираз $(a + 2)^3 + (a - 2)^3$.
2. Обчислити раціональним способом $\dfrac{61^3 - 39^3}{22} + 61 \cdot 39$.
3. Розкласти на множники многочлен $a^3 + 7a^2 - 7ab + 7b^2 + b^3$.

№206. Варіант 2

Середній рівень

Розкласти на множники:

1. а) $5^3 - a^3$; б) $x^3 + 10^3$.

3. $64a^3 + 1$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27a^3 - 0{,}008b^3$; б) $a^5 - 1000a^2$.
2. $-3a^3 - 81$.
3. Довести, що $723^2 + 277^3$ ділиться на 1000.

Високий рівень

1. Розкласти на множники вираз $(a - c)^3 + (a + c)^3$.
2. Обчислити раціональним способом $\frac{123^3 + 23^3}{146} - 123 \cdot 23$.
3. Розкласти на множники многочлен $a^3 + 10a^2 - 10ab + 10b^2 + b^3$.

207. Варіант 3

Середній рівень

Розкласти на множники:

1. а) $a^3 - 2^3$; б) $x^3 + 3^3$.
2. $125 + a^3$.
3. $8a^3 - 1$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $1000a^3 + 0{,}027b^3$; б) $a^7 - 8a^4$ (три множники).
2. $-a^9 - 8$.
3. Розв'язати рівняння $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 54$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники вираз $(2a + 1)^3 + (2a - 1)^3$.
2. Обчислити раціональним способом $\frac{97^3 + 62^3}{159} - 97 \cdot 62$.
3. Довести, що $a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$.

208. Варіант 4

Середній рівень

Розкласти на множники:

1. а) $10^3 - a^3$; б) $x^3 + 4^3$.

2. $64 - a^3$.
3. $1 + 27a^3$.

Достатній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $125a^3 - 8b^3$; б) $a^5 - a^3$ (три множники).
2. $-3 - 24a^3$.
3. Розв'язати рівняння $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 35$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники вираз $(a + 5)^3 - (a - 5)^3$.
2. Обчислити раціональним способом $\frac{142^3 - 58^3}{84} + 142 \cdot 58$.
3. Довести, що $a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$

Контроль навчальних досягнень учнів

№209. Варіант 1

Середній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $7(a + b) - x(a + b)$;
   б) $a^2 - 12a + 36$);
   в) $x^2 - 100$.
2. $a^3 - 10a^2 + a - 10$.
3. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3 - 64x = 0$; б) $x^2 + 16x + 64 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $a^4 + 2a^3 - 27a - 54$; б) $4x^5 - 40x^4 + 100x^3$.

   2) Обчислити значення виразу $\frac{4,9^3 - 0,1^3}{9,8^2 + 0,2^2 + 9,8 \cdot 0,4}$, використ

   формули скороченого множення.
2. Розкласти на множники $4a^2 + 9b^2 - 12ab - 49$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 - 36 = 6 - x$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $ab^2 + b^2y + ax + xy + b^2 + x$;
   б) $16 - a^2 + 2ab - b^2$;
   в) $x^4 + x + 3x^3 + 3x^2$ (чотири множники).
2. Розв'язати рівняння $4x^3 + 3 = 3x^2 + 4x$.
3. Розкласти тричлен $a^2 + 2ab - 15b^2$ на множники двома способами:
   а) заміною середнього члена сумою двох доданків;
   б) виділенням повного квадрата двочлена.

10. Варіант 2

Середній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $9(a - b) - m(a - b)$;
   б) $a^2 - 8a + 16$;
   в) $x^2 - 36$.
2. $b^3 - 4b^2 + b - 4$.
3. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3 - 36x = 0$; б) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $a^4 - 5a^3 - 8a + 40$; б) $5x^4 - 30x^3 + 45x^2$.

   2) Обчислити значення виразу $\dfrac{15,4^2 - 4,6^2}{1,4^2 + 0,6^2 + 2,8\cdot 0,6}$, використавши формули скороченого множення.
2. Розкласти на множники $a^2 - 16b^2 + 5a - 20b$.
3. Розв'язати рівняння $x^2 + 49 = 14x + 9$.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $a^2b + ab^2 + ac + ab + bc + c$;
   б) $25 - a^2 + 4ab - 4b^2$;
   в) $x^4 + 8x + 6x^3 + 12x^2$ (чотири множники).
2. Розв'язати рівняння $2x^3 + 16 = x^2 + 32x$.
3. Розкласти тричлен $a^2 + 2ab - 8b^2$ на множники двома способами:
   а) заміною середнього члена сумою двох доданків;
   б) виділенням повного квадрата двочлена.

№211. Варіант 3

Середній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $11(a-c)-x(a-c)$;
   б) a^2-6a+9;
   в) b^2-121.
2. $c-8+c^3-8c^2$.
3. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3-49x=0$; б) $x^2+6x+9=0$.

Достатній рівень

1. 1) Розкласти на множники:
   а) $a^4+2b^3-1000b-2000$; б) $9x^5-180x^4+900x^3$.
   2) Обчислити значення виразу $\dfrac{2{,}3^2-0{,}5^2}{2{,}3^2+0{,}7^2+4{,}6\cdot0{,}7}$, використав
   формули скороченого множення.
2. Розкласти на множники $a^2+16b^2-8ab-25$.
3. Знайти значення змінної x, при яких вирази x^2-16 і $-x-4$ набу
   ють однакових значень.

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
   а) $by^2+4by+cy^2+4cy+4c+4b$;
   б) $36x^2-4a^2+12ab-9b^2$;
   в) $x^4-8x-6x^3+12x^2$ (чотири множники).
2. Знайти значення змінної x, при яких вирази x^3-3x^2 і $x-3$ набуваю
   однакових значень.
3. Розкласти тричлен $a^2+6ab+8b^2$ на множники двома способами:
   а) заміною середнього члена сумою двох доданків;
   б) виділенням повного квадрата двочлена.

№212. Варіант 4

Середній рівень

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $m(c-d)-9(c-d)$;
   б) $a^2-24a+144$;
   в) $9-b^2$.
2. b^3+5b^2+b+5.

3. Розв'язати рівняння.
а) $x^3 - 81x = 0$; б) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

Достатній рівень

1. **1) Розкласти на множники:**
а) $a^4 + 3a^3 - 64a - 192$; б) $7x^6 - 42x^5 + 63x^4$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{15,3^2 - 2,7^2}{3,3^2 + 0,3^2 - 6,6 \cdot 0,3}$, **використавши формули скороченого множення.**

2. **Розкласти на множники $4a^2 - 9b^2 + 10a - 15b$.**

3. **Знайти значення змінної x, при яких вирази $x^2 + 25$ і $10x + 1$ набувають рівних значень.**

Високий рівень

1. Розкласти на множники:
а) $ax^2 + 2ax + bx^2 + 2bx + b + a$;
б) $36 - 4a^2 + 20ab - 25b^2$;
в) $x^4 - 27x + 3x^3 - 9x^2$ **(чотири множники).**

2. Знайти значення змінної x, при яких вирази $x^3 + 25$ і $x^2 - 25x$ набувають однакових значень.

3. Розкласти тричлен $a^2 - 2ab + 8b^2$ на множники двома способами:
а) заміною середнього члена сумою двох доданків;
б) виділенням повного квадрата двочлена.

ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

ТЕМА. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

- Поняття про рівняння з двома змінними
- Рівносильні перетворення цілих рівнянь із двома змінними
- Графік рівняння з двома змінними

Виклад теорії

1. Поняття про рівняння з двома змінними

①

Рівність із двома змінними, складену для знаходження усіх пар значень змінних, при яких вона перетворюється у правильну числову рівність, називають *рівнянням із двома змінними*.

Змінні у рівнянні можуть входити в обидві його частини або лише в одну.

Рівняння з двома змінними, у яких обидві частини є цілими виразами, називають *цілими рівняннями*.

Приклади.

1. $x^2 + y^2 = x^3 + 1$; $x^4 + 5xy + y^4 = xy$; $(x+y)(x-y) = x^2 + 1$ — рівняння з двома змінними, у які змінні входять в обидві частини.
2. $x^4 + x^2y - 3x = 0$; $x^2 + y^2 = 16$; $(x+y)(x-y) - x^2 = 1$ — рівняння з двома змінними, у яких ліва частина є многочленом, а права — числом.
3. $4a^2 + 5b^2 = ab$; $5a + 4b = 7$; $a^3 + b^3 = 7a + b$ — рівняння з двома змінними a і b.
4. $5x^2 + 4y^2 = x^2 + y$; $5x + 4y = 7$; $xy = x$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ — цілі рівняння з двома змінними.
5. Рівняння $\frac{1}{x} + y = xy$; $\frac{5}{x-2} + \frac{5}{y+4} = xy$; $\frac{1}{x+y} - 3 = \frac{4}{x}$ не є цілими (одна з частин або обидві містять ділення на вираз зі змінною).

②

Розв'язком рівняння з двома змінними називають впорядковану пару значень змінних, яка перетворює це рівняння у правильну числову рівність.

рюється у правильну числову рівність, то пара чисел x_0 та y_0 є розв'язком рівняння і його коротко записують так: $(x_0; y_0)$. У розв'язку рівняння з двома змінними x та y на першому місці записують значення x, а на другому — значення y.

Приклад.

Рівняння $2x + y = 8$, якщо $x = 4$ та $y = 0$, перетворюється у правильну числову рівність $2 \cdot 4 + 0 = 8$; $8 = 8$. Отже, ці значення утворюють розв'язок рівняння — $(4; 0)$. Якщо, наприклад, $x = 0$ та $y = 4$, то рівняння $2x + y = 8$ не перетворюється у правильну числову рівність: $2 \cdot 0 + 4 = 4$; $4 \neq 8$. Отже, пара $(0; 4)$ не є розв'язком даного рівняння.

Щоб встановити, чи є задана впорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$ розв'язком рівняння зі змінними x та y, потрібно:

- **підставити у рівняння замість x його значення x_0, а замість y — його значення y_0;**
- **встановити числове значення лівої та правої частин рівняння.**

Якщо значення лівої та правої частин рівні, то пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком рівняння; якщо їхні значення не рівні, то пара чисел $(x_0; y_0)$ не є розв'язком рівняння.

Розв'язати рівняння з двома змінними означає знайти всі його розв'язки або довести, що їх немає.

Існують рівняння з двома змінними, які:

- не мають розв'язків;
- мають один розв'язок;
- мають скінченне число розв'язків;
- мають безліч розв'язків, однак не будь-яка пара чисел є їхніми розв'язками;
- мають безліч розв'язків, причому будь-яка пара чисел є їхнім розв'язком.

Приклади.

1. Рівняння $x^2 + y^2 + 2 = 0$ не має розв'язків, оскільки при будь-яких значеннях x ліва частина рівняння є додатним числом, а права частина дорівнює нулю, тобто рівняння не може перетворитися у правильну числову рівність за жодного зі значень x та y.

2. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ має тільки один розв'язок — пару чисел $(0; 0)$, оскільки при будь-яких інших значеннях x ліва частина рівняння є додатним числом.

3. Рівняння $x - y = 0$ має безліч розв'язків, оскільки за будь-яких рівних між собою значень x та y воно перетворюється у правильну числову рівність. Наприклад, розв'язками рівняння є пари чисел $(2; 2)$, $(2{,}5; 2{,}5)$, $(-11; -11)$.

4. Рівняння $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ перетворюється у правильну числову рівність за будь-яких значень x та y. Тому його можна розглядати як тотожність.

③

Рівносильними рівняннями з двома змінними називають рівняння, які мають одні й ті ж розв'язки або не мають розв'язків.

Рівносильними перетвореннями рівняння з двома змінними називають заміну рівняння рівносильним йому рівнянням.

④

Основні правила рівносильних перетворень цілих рівнянь із двома змінними:

- **якщо виконати тотожні перетворення в одній чи обох частинах рівняння, то воно перетвориться у рівносильне йому рівняння (наприклад, розкрити дужки, звести подібні доданки тощо);**
- **якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то рівняння перетвориться у рівносильне йому рівняння.**

Приклад.

Якщо у рівнянні $7x + 2y = 12$ перенести доданок $7x$ у праву частину, змінивши його знак, то одержимо рівняння $2y = -7x + 12$, рівносильне даному.

⑤

Якщо обидві частини рівняння з двома змінними помножити або поділити на одне й те ж число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Приклади.

1. Якщо поділити на 2 обидві частини рівняння $2y = -7x + 12$, то одержимо рівняння $y = -3{,}5x + 6$, рівносильне даному.

2. Якщо помножити на 3 обидві частини рівняння $\frac{x}{3} + y = 5$, то одержимо рівняння $x + 3y = 15$, рівносильне даному.

Послідовне виконання рівносильних перетворень рівняння з двома змінними в багатьох випадках дозволяє виразити одну змінну через іншу (відокремити змінні), тобто розмістити їх у різних частинах рівняння.

Приклад.

Щоб виразити з рівняння $3x + 2y = 5$ змінну y через змінну x, потрібно послідовно застосувати правила рівносильних перетворень: перенесення доданка ($2y = -3x + 5$), ділення на число, відмінне від нуля $\left(y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)$.

6

Для наочного представлення розв'язків рівнянь із двома змінними їх зображують точками координатної площини.

Кожна пара чисел, яка є розв'язком рівняння зі змінними x та y, зображається на координатній площині точкою, абсцисою якої є значення x, а ординатою — значення y.

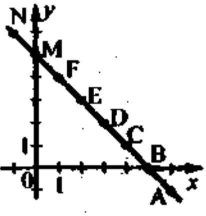

Рис. 1

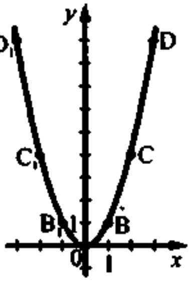

Рис. 2

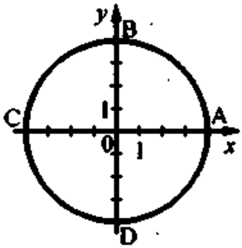

Рис. 3

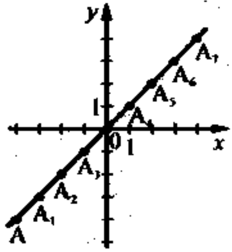

Рис. 4

Приклади.

1. На рисунку 1 зображено деякі розв'язки рівняння $x + y = 5$. Відповідно точка A зображає розв'язок $(6; -1)$ $(6 + (-1) = 5;\ 5 = 5)$, точка B — розв'язок $(5; 0)$, точка D — розв'язок $(3; 2)$, точка M — розв'язок $(0; 5)$. Очевидно, якби ми зобразили всі розв'язки рівняння $x + y = 5$, то вони утворили б пряму.

2. На рисунку 2 зображено сім розв'язків рівняння $x^2 - y = 0$: точка O зображає розв'язок $(0; 0)$ $(0^2 - 0 = 0;\ 0 = 0)$, точка B — розв'язок $(1; 1)$, точка C — розв'язок $(2; 4)$, точка C_1 — розв'язок $(-2; 4)$, точка D — розв'язок $(3; 9)$, точка D_1 — розв'язок $(-3; 9)$.

3. На рисунку 3 зображено точки $A(4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(-4; 0)$ і $D(0; -4)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 16$, у яких одне зі значень — x чи y — дорівнює 0.

4. На рисунку 4 зображено точками 9 розв'язків рівняння $x - y = 0$, розв'язками якого є пари рівних чисел: $A(-4; -4)$, $A_1(-3; -3)$, $A_2(-2; -2)$, $A_3(-1; -1)$, $O(0; 0)$, $A_4(1; 1)$, $A_5(2; 2)$, $A_6(3; 3)$, $A_7(4; 4)$.

Графіком рівняння з двома змінними називають множину точок площини, які зображають усі розв'язки рівняння.

Рівняння, які не мають розв'язків, не мають і графіка.

Графіком рівняння $0x + 0y = 0$, розв'язком якого є будь-яка пара чисел, є уся координатна площина.

Графіками рівнянь із двома змінними можуть бути як відомі з геометрії фігури (наприклад, пряма, коло), так і фігури, які вивчатимуться пізніше (наприклад, парабола, гіпербола).

Приклади.

1. Графіками рівнянь виду $ax + by = c$ із двома змінними, де x та y — з... a, b і c — числа, причому хоча б одне із чисел — a чи b — відмінне від ... є пряма. На рисунку 5 зображено графік рівняння $x - y = -4$.

2. Графіками рівнянь виду $x^2 + y^2 = a$, де $a > 0$, є кола. На рисунку 6 зобр... но графік рівняння $x^2 + y^2 = 16$.

3. Графіком рівняння $x^2 - y = 0$ є фігура, яка називається параболою (рис...

4. Графіком рівняння $xy = 4$ є фігура, яка називається гіперболою (рис. 8)...

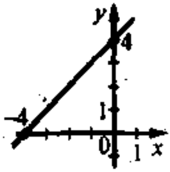

Рис. 5

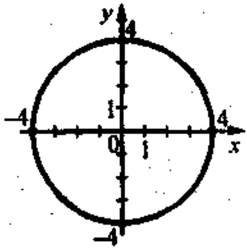

Рис. 6

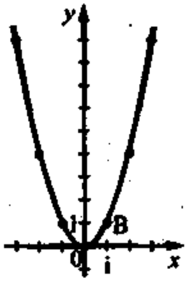

Рис. 7

Рис. 8

Якщо у розв'язку рівняння з двома змінними одне з чисел дорівнює 0, то розв'язок на графіку рівняння зображується точкою координатної осі.
Якщо значення змінної y дорівнює 0, то розв'язок зображується точкою ... (для точки з осі x виконується умова $y = 0$).
Якщо значення змінної x дорівнює 0, то розв'язок зображується точкою ... (для точки з осі y виконується умова $x = 0$).

Приклади.

1. Точками графіка рівняння $x - y = -4$ на осях є $(-4; 0)$ і $(0; 4)$ (рис. 5).
2. Рівняння $x^2 + y^2 = 16$ (рис. 6) має чотири розв'язки, в яких значення од... зі змінних дорівнює 0.
3. **Рівняння $xy = 1$ не має розв'язків, в яких одне зі значень змінної дорівню...**

За графіком рівняння можна встановлювати, чи є пара чисел розв'язком... няння та знаходити розв'язок за значенням однієї зі змінних.

прикладом.

На рисунку 9 зображено графік рівняння $2x + y = 4$.

За координатами точок, зображених на рисунку, можна зробити, наприклад, певні висновки про розв'язки рівняння.

1. Пара чисел (1; 3) не є розв'язком рівняння, оскільки точка A(1; 3) не належить графіку рівняння.

2. Пара чисел (1; 2) є розв'язком рівняння, оскільки точка B(1; 2) належить графіку рівняння.

3. Рівняння має два розв'язки, у яких одне зі значень змінної дорівнює 0: (2; 0) і (0; 4).

4. Значенню змінної $x = -1$ у розв'язку відповідає значення $y = 6$ (точка D(–1; 6)).

5. Значенню змінної $y = -2$ у розв'язку відповідає значення $x = 3$ (точка C(3; –2)).

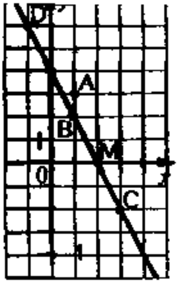

Рис. 9

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

І. Загальне поняття про рівняння з двома змінними

(1)

213.

1) Як називається рівність $3x - 4y^2 + xy = 7$?

2) Чим є ліва частина рівняння з двома змінними $x^2 - 3x + xy = 7$?

Вказати степінь многочлена, який міститься у лівій частині рівняння (3–6):

3) $x + y^2 + y = 5$:
   а) перший; б) другий; в) нульовий.

4) $4x + 3y = 12$.

5) $0x + 7y = 8$.

6) $0x + 0y = 12$.

1) Серед записів а)–е), у яких x, y, z — змінні, вказати три, які є рівняннями з двома змінними.

а) $3x + 5y = 4$; б) $3x + 5 = 4$; в) $3xy + z = x^2$;
г) $y^2 + yz = 9$; д) $x^2 + 4y = x + 1$; е) $yz + 4x^2 = 7$.

2) Серед рівнянь а)–е) вказати три, в яких ліва частина є много...

а) $x^2 + xy - 3 = 10$; б) $\frac{x+y}{x-y} + x = 3$; в) $(x^2 + xy)(x + 1) = 1$...

г) $5x - 3y = 7$; д) $(x - 3)(x + y + 1) = 14$; е) $xy = 100$.

3) **Серед рівнянь із двома змінними а)–е) вказати три рівняння, у як... ліва частина є многочленом другого степеня:**

а) $x^2 + xy - 7x = 9$; б) $x^2 + y = 16$; в) $5x + 7y = 9$;

г) $0x - 13y = 9$; д) $x^2y - 3x = 7$; е) $xy = 12$.

4) Серед рівнянь із двома змінними а)–е) вказати три рівняння, у як... ліва частина є многочленом першого степеня:

а) $4x + 5y = 3$; б) $4x + 0y = 9$; в) $0x + 0y = 10$;

г) $4x^2 + 3y = 9$; д) $0x + 7y = 12$; е) $0x + 7y^2 = 14$.

3. *Записати три рівняння з двома змінними (1–3):*

1) x та y. 2) x та z. 3) y та z.

Записати три рівняння з двома змінними x та y, у яких права частина... числом, а ліва — многочленом:

4) першого степеня; 5) другого степеня;

6) третього степеня.

②

№214.

1. 1) Як називається пара значень змінних x та y (5; 2), при яких рівнян... $x - y = 3$ перетворюється у правильну числову рівність $(5 - 2 = 3)$?

а) Коренем рівняння; б) розв'язком рівняння.

2) Деяке рівняння з двома змінними x та y за умови, що $x = -3$ й $y =$... перетворюється у правильну числову рівність. Як скорочено зап... сують розв'язок рівняння?

а) $(-3; 4)$; б) $(4; 3)$; в) $[-3; 4]$.

3) *Доповнити запис розпізнавання пари чисел як розв'язку рівнянн... двома змінними.*

Щоб встановити, чи є задана впорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$... розв'язком рівняння $x^2 - y^2 = 8$ із двома змінними x та y, потрібно... рівняння підставити замість x його значення ____, а замість y — ____ встановити числове значення лівої частини рівняння. Якщо значе... ня лівої і правої частин ________, то пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язк... рівняння, якщо їхні значення ________, то пара чисел $(x_0; y_0)$ не... розв'язком рівняння.

4) Що означає розв'язати рівняння із двома змінними?

а) Знайти хоча б один розв'язок;

б) знайти деякі розв'язки;

в) знайти всі розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. *Серед пар чисел а)–в) вказати пару, яка є розв'язком рівняння із двома змінними (1–3):*

1) $x + y = 5$:

а) (5; 1); б) (4; 2); в) (2; 3).

2) $x - y = 1$:

а) (3; 4); б) (1; 2); в) (6; 5).

3) $2x + y = 5$:

а) (1; 5); б) (0; 5); в) (3; 1).

4) Серед пар чисел а)–е) вказати три, які є розв'язками рівняння $x - y = 3$:

а) (10; 7); б) (10,1; 7,1); в) (10; 8);

г) (11; 8); д) (7; 10); е) (1; 4).

5) Серед рівнянь а)–е) вказати три рівняння, для яких пара чисел (3; 1) є розв'язком:

а) $x - y = 2$; б) $x^2 + y = 10$; в) $x - y = 4$;

г) $x^2 + y = 12$; д) $2x + y = 5$; е) $2x + y = 7$.

Вказати, скільки розв'язків має рівняння (6–9):

6) $0x + 0y = -5$, у якого ліва частина за будь-яких значень x та y дорівнює 0, а права дорівнює -5:

а) безліч; б) жодного; в) один.

7) $x^2 + y^2 = -1$, у якого ліва частина за будь-яких значень x та y є невід'ємним числом, а права — від'ємним числом:

а) безліч; б) жодного; в) один.

8) $x^2 + y^2 = 0$, у якого ліва частина дорівнює 0 за умови, що $x = 0$ та $y = 0$:

а) безліч; б) жодного; в) один.

9) $x - y = 0$:

а) безліч; б) жодного; в) один.

3. *Записати три розв'язки рівняння (1–3):*

1) $x - y = 3$. 2) $xy = 100$. 3) $x + y = 20$.

Навести три приклади рівнянь, які (4–6):

4) мають безліч розв'язків.

5) мають один розв'язок;

6) не мають розв'язку.

№215.

Серед рівнянь а)–г) вказати рівняння, розв'язком якого є...

1) будь-яка пара чисел x та y, сума яких дорівнює 4:
   а) $x - y = 4$; б) $y - x = 4$; в) $x + y = 4$; г) $xy = 4$.
2) будь-яка пара чисел, у якої перше число (x) більше від другого (y) на 4:
   а) $x + y = 4$; б) $y \cdot x = 4$; в) $x - y = 4$; г) $\frac{x}{y} = 4$.
3) будь-яка пара чисел, сума квадратів яких дорівнює 4:
   а) $(x + y)^2 = 4$; б) $x^2 - y^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 4$; г) $x^2 + y^2 + 2xy = 4$.
4) будь-яка пара рівних чисел:
   а) $x - y = 0$; б) $x + y = 0$; в) $\frac{x}{y} = 0$.
5) будь-яка пара протилежних чисел:
   а) $x - y = 0$; б) $x + y = 0$; в) $\frac{x}{y} = 1$.
6) будь-яка пара обернених чисел:
   а) $x + y = 0$; б) $xy = 0$; в) $xy = 1$.

№216.

Скласти рівняння з двома змінними, розв'язками якого є...

1) будь-яка пара чисел, сума яких дорівнює 4;
2) будь-яка пара чисел, у якої перше число більше від другого на 5;
3) будь-яка пара чисел, у якої друге число більше від першого на 5;
4) будь-яка пара чисел, добуток яких дорівнює 20;
5) будь-яка пара чисел, у якої відношення першого числа до другого дорівнює 2;
6) будь-яка пара чисел, у якої відношення другого числа до першого дорівнює 2.

Для кожного з рівнянь (1–6) записати три розв'язки.

2. Рівносильні перетворення цілих рівнянь із двома змінними

3

№217.

1. 1) Як називаються рівняння $x^2 + y^2 = 0$ і $x^4 + y^4 = 0$, розв'язком кожного з яких є пара чисел (0; 0), а інших розв'язків ці рівняння не мають?
   2) Як називають рівняння $0x + 0y = -5$ і $0x + 0y = 4$, які не мають розв'язків?

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають ________ або обидва не мають ____________.

Вказати, чому є рівносильними рівняння (1–2):

1) $0x + 0y = -10$ і $x^2 + y^2 = -10$:
   а) обидва мають однакові розв'язки;
   б) обидва не мають розв'язків.
2) $x^2 + y^2 = 0$ і $x^6 + y^6 = 0$:
   а) обидва мають однакові розв'язки;
   б) обидва не мають розв'язків.

Записати три рівняння, рівносильних рівнянню:

1) $0x + 0y = -5$.   2) $x^2 + y^2 = 0$.

(4)

218.

1) *Якими* є рівняння $x + 2y = 10$ і рівняння $x = 10 - 2y$, одержане з першого перенесенням доданка $2y$ з лівої частини у праву зі зміною його знака на протилежний?
2) *Доповнити запис.*

   Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому ____________________, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

   Серед рівнянь а)–г) вказати рівняння, рівносильні рівнянню $x + 2y = 10$, утворені з нього перенесення доданка x або $2y$:

   а) $2y = 10 - x$; б) $2y = 10 + x$; в) $x = 10 + 2y$; г) $x = 10 - 2y$.

   Записати рівняння, рівносильні рівнянню $2x + 5y = 10$, які утворюються при перенесенні доданка: $2x$; $5y$.

(5)

219.

1) Якими є рівняння $\frac{y}{3} = 2x - 5$ і рівняння $y = 6x - 15$, яке утворене з першого множенням його на 3.
2) Якими є рівняння $2x + 4y = 10$ і рівняння $x + 2y = 5$, утворене з першого діленням обох частин на 2.

Якщо обидві частини даного рівняння з двома змінними помножити або поділити на одне й те ж число, відмінне від ____, то одержимо рівняння рівносильне даному.

2. 1) Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $3y = 12x - 15$, яке утворене з нього діленням обох частин на 3:
   а) $y = 4x - 15$; б) $y = 4x - 5$; в) $y = 12x - 5$.
   2) **Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, рівносильне рівнянню $\frac{x}{3} = 4y + 7$, яке утворене з нього множенням обох частин на 3:**
   а) $x = 12y + 7$; б) $x = 4y + 21$; в) $x = 12y + 21$.

3. *Записати рівняння з коефіцієнтом 1 біля змінної x, рівносильне рівнянню (1–3):*
   1) $4x = 8y - 20$. 2) $3x = 2y + 6$. 3) $5x = -10y + 3$.
   Записати рівняння з коефіцієнтом 1 біля змінної y, рівносильне рівнянню (4–6):
   4) $\frac{y}{5} = 2x - 3$. 5) $\frac{y}{4} = -x + 3$. 6) $-\frac{y}{5} = 2x - 3$.

3. Графік рівняння з двома змінними

(6)

№220.

1. 1) **Чим можна зобразити розв'язок $(x_0; y_0)$ рівняння з двома змінними x та y?**
   а) Прямою; б) точкою координатної площини.
   2) Як називається множина точок координатної площини, які зображують усі **розв'язки** рівняння з двома змінними?
   3) Що є графіком рівняння з двома змінними $x^2 + y^2 = 0$, **яке має тільки один розв'язок (0; 0)?**
   4) Що є графіком рівняння з двома змінними $0x + 0y = 0$, розв'язком якого є будь-яка пара чисел?
   5) Графіком рівняння з двома змінними є пряма. Що є графіком рівняння, рівносильного даному?
   а) Деяка інша фігура; б) деяка інша пряма; в) та ж пряма.

2. 1) **Серед рівнянь із двома змінними а)–е) вказати три, що не мають графіків:**
   а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 = -10$; в) $x^4 + y^4 = 16$;
   г) $x^4 + y^4 = -1$; д) $0x + 0y = -1$; е) $x + y = -1$.

2) Серед рівнянь із двома змінними а)–е) вказати три, графіками яких є одна точка — початок координат:

а) $x^2 + y^2 = 0$;　б) $x^2 + y^2 = 16$;　в) $x^4 + y^4 = 0$;
г) $x^6 + y^6 = 0$;　д) $x^2 + y^2 = -16$;　е) $x^4 + y^4 = 16$.

3) Серед рівнянь а)–е) вказати рівняння графіком якого є уся координатна площина:

а) $0x + 0y = -10$;　б) $0x + 0y = -1$;　в) $0x + 0y = 6$;
г) $0x + 0y = 0$;　д) $0x + y = 0$;　е) $x + y = 0$.

4) Серед рівнянь а)–е) вказати три, графікам яких належить початок координат — точка O(0; 0):

а) $x^2 + y^2 = 0$;　б) $x - y = 0$;　в) $x - y = 1$;
г) $x + y = 0$;　д) $x + 3y = 7$;　е) $x^2 + y^2 = 1$.

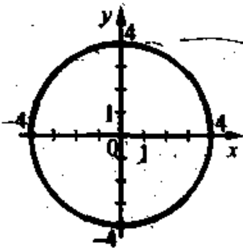

Рис. 10

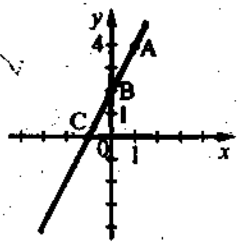

Рис. 11

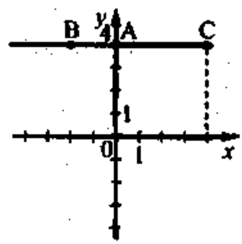

Рис. 12

1) На рисунку 10 зображено графік рівняння із двома змінними $x^2 + y^2 = 16$.

а) Скільки розв'язків має дане рівняння?

б) Яка фігура є графіком рівняння?

в) Записати за графіком рівняння чотири розв'язки, в кожному з яких одне з чисел дорівнює 0.

2) На рисунку 11 зображено графік рівняння $2x - y = -2$. Записати:

а) розв'язки рівняння, що зображуються точками A, B і C;

б) два розв'язки, в яких одне з чисел дорівнює 0.

3) На рисунку 12 зображено графік рівняння $0x + y = 4$.

а) Яка з координат (абсциса чи ордината) однакова у будь-яких двох точок, що зображають розв'язки рівняння?

б) Записати розв'язки рівняння, що зображують точки A, B і C.

Тренувальні вправи

№221.

1. *Встановити, чи є розв'язком рівняння:*
   1) $x - y = 4$ пари чисел (9; 5) і (3; 7);
   2) $x + 2y = 12$ пари чисел (0; 6) і (6; 0);
   3) $2x + 3y = 6$ пари чисел (0; 2) і (2; 0);
   4) $2x - 5y = 30$ пари чисел (15; 0) і (0; –6).
2. *Виразити змінну y через змінну x з рівняння:*
   1) $x + y = 12$; 2) $-x + y = 8$; 3) $4x + 2y = 5$; 4) $3x + 5y = 15$.
3. *Виразити змінну x через змінну y з рівняння:*
   1) $x - y = 11$; 2) $x + y = -4$; 3) $2x + 4y = 5$; 4) $3x - 2y = 6$.

ТЕМА 11. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

- Поняття про лінійне рівняння з двома змінними та його розв'язування
- Графік лінійного рівняння з двома змінними

Виклад теорії

1. Лінійне рівняння з двома змінними та його розв'язування

①

Лінійним **рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x та y — змінні, a, b і c — числа. a і b називають коефіцієнтами біля змінних, c — вільним членом.**

Зауваження. У літературі лінійними рівняннями часто називають і рівняння виду $ax + by + c = 0$.

Приклади.
1. $5x + 3y = 4$, $2x - 7y = 0$, $0x + 5y = 12$, $0x + 0y = 5$ — лінійні рівняння зі змінними x та y.
2. $5y + 3z = 8$, $6y - 2z = 0$, $0y - 3z = 7$ — лінійні рівняння зі змінними y та z.
3. $5a + 3b = 4$, $2a - 7b = 0$, $0a + 5b = 13$ — лінійні рівняння зі змінними a та b.

Для позначення змінних у лінійних рівняннях із двома змінними найчастіше використовують змінні x та y.

Лівою частиною лінійного рівняння $ax + by = c$ є многочлен $ax + by$ із двома змінними x та y, а права частина — число c. Якщо у многочлені $ax + by$ хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює 0, то він є многочленом першого степеня, відповідно рівняння $ax + by = c$ називають рівнянням першого степеня.

Рівняння з двома змінними виду $ax + by = c$ називають рівнянням першого степеня з двома змінними, якщо у ньому хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює 0.

Приклади.
1. $2x + 3y = 4$, $2x - 3y = 7$, $0{,}1x - 4y = 0$ — лінійні рівняння першого степеня, у яких обидва коефіцієнти біля змінних не дорівнюють 0.
2. $0x + 4y = 17$, $2x + 0y = 7$, $0{,}1x + 0y = 0$ — лінійні рівняння першого степеня, у яких один з коефіцієнтів біля змінних дорівнює 0.
3. $0x + 0y = 0$, $0x + 0y = 1$, $0x + 0y = -2$ — лінійні рівняння, які не є рівняннями першого степеня.

2

Розв'язком лінійного рівняння виду $0x + 0y = 0$ є будь-яка пара чисел.

Оскільки за будь-яких значень x та y многочлен $0x + 0y$ дорівнює 0, то ліні
не рівняння $0x + 0y = 0$ можна розглядати і як тотожність.

Лінійне рівняння виду $0x + 0y = c$, де c — число, відмінне від нул розв'язків не має, оскільки ліва частина дорівнює нулю, а права — ві мінна від нуля.

Приклад.
Рівняння $0x + 0y = 7$, $0x + 0y = -7$, $0x + 0y = 0{,}1$ не мають розв'язків.

3

Розв'язування рівнянь виду $ax + 0y = c$ зводиться до знаходжен розв'язку лінійного рівняння $ax = c$, оскільки $0y = 0$.

Приклади.
1. Розв'язками рівняння $x + 0y = 10$ є пари чисел, у яких $x = 10$, а y — довіл не число, тобто $(10; y_0)$, де y_0 — будь-яке дійсне число. Наприклад, пари ч сел $(10; 0)$, $(10; 1)$, $(10; -4{,}7)$, ... є розв'язками даного рівняння.
2. У рівнянні $2x + 0y = -18$ для будь-якого значення y значення x є розв' ком рівняння $2x = -18$, тобто $x = -9$. Записати всі розв'язки можна та $(-9; y_0)$, де y_0 — будь-яке дійсне число.

Розв'язком рівняння виду $ax + 0y = c$, де $a \neq 0$, є будь-яка пара чисел, якій значення змінної x дорівнює $\frac{c}{a}$, а значення y — будь-яке число.

4

Розв'язком рівняння виду $0x + by = c$, де $b \neq 0$, є будь-яка пара чисел, якій значенням x є будь-яке число, а значення y дорівнює $\frac{c}{b}$.

Приклад.
Розв'язком рівняння $0x + 2y = 20$ є будь-яка пара чисел, у якій x — будь-я число, а y є розв'язком рівняння $2y = 20$; $y = 10$, тобто $(x_0; 10)$, де x_0 — буд яке дійсне число. Наприклад, розв'язками рівняння є пари чисел (0; 1 $(1; 10)$, $(-7; 10)$, $(-1{,}44; 10)$.

5

Щоб знайти для деякого значення x_0 відповідне йому значення y_0 таке, щоб пара $(x_0; y_0)$ була розв'язком лінійного рівняння $ax + by = c$, потрібно:

- **підставити у дане рівняння замість x число x_0: $ax_0 + by = c$;**
- **розв'язати відповідне лінійне рівняння зі змінною y; корінь цього рівняння y_0 і буде шуканим значенням y.**

Приклад.

Дано лінійне рівняння $2x + 5y = 15$. Знайти розв'язок рівняння зі значенням $x = 10$.

Розв'язання

Якщо $x = 10$, то $2 \cdot 10 + 5y = 15$; $5y = 15 - 20$; $5y = -5$; $y = -1$. $(10; -1)$ — розв'язок рівняння.

Щоб знайти для деякого значення y_0 відповідне йому значення x_0 таке, щоб пара $(x_0; y_0)$ була розв'язком лінійного рівняння $ax + by = c$, потрібно:

- **підставити у дане рівняння замість y число y_0: $ax + by_0 = c$;**
- **розв'язати відповідне лінійне рівняння зі змінною x; корінь цього рівняння x_0 і буде шуканим значенням x.**

Приклад.

Дано лінійне рівняння $2x + 5y = 15$. Знайти розв'язок рівняння зі значенням $y = 4$.

Розв'язання

Якщо $y = 4$, то $2x + 5 \cdot 4 = 15$; $2x = 15 - 20$; $2x = -5$; $x = -2{,}5$. $(-2{,}5; 4)$ — розв'язок рівняння.

6

Щоб знайти для даного значення змінної x відповідне йому значення y таке, щоб пара $(x; y)$ була розв'язком лінійного рівняння $ax + by = c$, потрібно:

- **підставити в одержану формулу задане значення змінної x;**
- **виразити з рівняння змінну y, виконавши рівносильні перетворення;**
- **обчислити значення змінної y за формулою.**

Нехай у рівнянні $ax + by = c$ $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Якщо $x = x_0$, то $ax_0 + by = c$. Тоді за правилом рівносильних перетворень $by = -ax_0 + c$; $y = -\frac{ax_0}{b} + \frac{c}{b}$.

Приклади.

1. Виразити з рівняння $2x + y = 5$ змінну y через змінну x і знайти розв'язки рівняння, якщо $x = 0$; $x = 5$; $x = -3$; $x = a$.

Розв'язання

Якщо $2x + y = 5$, то $y = -2x + 5$ (правило перенесення доданків).

а) Якщо $x = 0$, то $y = -2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$. $(0; 5)$ — розв'язок рівняння.

б) Якщо $x = 5$, то $y = -2 \cdot 5 + 5 = -10 + 5 = -5$. $(5; -5)$ — розв'язок рівняння.

в) Якщо $x = -3$, то $y = -2 \cdot (-3) + 5 = 6 + 5 = 11$. $(-3; 11)$ — розв'язок рівняння.

г) Якщо $x = a$, то $y = -2a + 5$. $(a; -2a + 5)$ — розв'язок рівняння.

2. Виразити з рівняння $x + 2y = 4$ змінну y через змінну x і знайти розв'язки рівняння, якщо $x = 6$; $x = -20$; $x = b$.

Розв'язання

Якщо $x + 2y = 4$, то $2y = -x + 4$ (правило перенесення доданків); $y = -\frac{x}{2} + 2$ (правило ділення).

а) Якщо $x = 6$, то $y = -\frac{6}{2} + 2 = -3 + 2 = -1$. $(6; -1)$ — розв'язок рівняння.

б) Якщо $x = -20$, то $y = -\frac{-20}{2} + 2 = 10 + 2 = 12$. $(-20; 12)$ — розв'язок рівняння.

в) Якщо $x = b$, то $y = -\frac{b}{2} + 2$. $\left(b; -\frac{b}{2} + 2\right)$ — розв'язок рівняння.

7

Щоб знайти для даного значення змінної y відповідне йому значення змінної x таке, щоб пара $(x; y)$ була розв'язком лінійного рівняння $ax + by = c$, потрібно:

- **підставити в одержану формулу задане значення змінної y;**
- **виразити з рівняння змінну x через змінну y, виконавши рівносильні перетворення;**
- **обчислити значення змінної x за формулою.**

Нехай у рівнянні $ax + by = c$ $a \neq 0$ і $c \neq 0$. Якщо $y = y_0$, то $ax + by_0 = c$. Тоді за правилом рівносильних перетворень $ax = -by_0 + c$; $x = -\frac{by_0}{a} + \frac{c}{a}$.

Приклади.

1. Виразити з рівняння $x - y = 2$ змінну x через змінну y і знайти розв'язки рівняння, якщо $y = 7$; $y = -3$; $y = a$.

Розв'язання

Якщо $x - y = 2$, то $x = y + 2$ (правило перенесення доданків).

а) Якщо $y = 7$, то $x = 7 + 2 = 9$. $(9; 7)$ — розв'язок рівняння.

б) Якщо $y = -3$, то $x = -3 + 2 = -1$. $(-1; -3)$ — розв'язок рівняння.

в) Якщо $y = a$, то $x = a + 2$. $(a + 2; a)$ — розв'язок рівняння.

2. Виразити з рівняння $3x + 2y = 9$ змінну x через змінну y і знайти розв'язки рівняння, якщо $y = 6$; $y = -9$.

Розв'язання

Якщо $3x + 2y = 9$, то $3x = -2y + 9$ (правило перенесення доданків); $x = -\frac{2}{3}y + 3$ (правило ділення).

а) Якщо $y = 6$, то $x = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 3 = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$. $(-1; 6)$ — розв'язок рівняння.

б) Якщо $y = -9$, то $x = -\frac{2}{3} \cdot (-9) + 3 = -2 \cdot (-3) + 3 = 6 + 3 = 9$. $(9; -9)$ — розв'язок рівняння.

2. Графіки лінійних рівнянь із двома змінними

8

Графіком лінійного рівняння з двома змінними, в якому хоча б один (один або обидва) з коефіцієнтів при змінних відмінний від нуля, є пряма.

Коротко, графіком будь-якого лінійного рівняння першого степеня є пряма. Навпаки, кожна пряма координатної площини є графіком деякого лінійного рівняння з двома змінними.

Приклад.

Графіками лінійних рівнянь $5x + 0y = 7$; $0x + 4y = 3$; $4x + 5y = 2$; $4x + 3y = 0$ є прямі.

Графіком лінійного рівняння з двома змінними $0x + 0y = 0$, в якому всі коефіцієнти при змінних і вільний член дорівнюють нулю, є вся координатна площина.

Коротко, рівнянням координатної площини є рівняння $0x + 0y = 0$.

Лінійні рівняння, у яких обидва коефіцієнти дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля, тобто рівняння виду $0x + 0y = c$, де $c \neq 0$, не мають графіків.

Приклад.

Лінійні рівняння $0x + 0y = 4$; $0x + 0y = -1$; $0x + 0y = 0{,}1$ не мають графіків.

Обґрунтування

Розв'язком рівняння $0x + 0y = 0$ є будь-які пари чисел. Отже, будь-яка точка координатної площини є точкою графіка цього рівняння.
Рівняння виду $0x + 0y = c$, де $c \neq 0$, не мають розв'язків. Отже, на координатній площині немає точок, які були б точками цього графіка.

9

Графіком рівняння $x = m$ на координатній площині є пряма, яка перетинає вісь x у точці з абсцисою m і перпендикулярна до цієї осі (тобто паралельна до осі y).

Обґрунтування

Рівняння $x = m$ можна записати як $x + 0y = m$, розв'язком якого є усі пари чисел, у яких значення змінної x дорівнює m, а y — будь-яке число. Такі розв'язки зображають на координатній площині точками, у яких абсциса дорівнює m, а ордината — будь-яке число. Усі ці точки належать прямій, перпендикулярній до осі x і яка перетинає її у точці з абсцисою m.

Приклади.

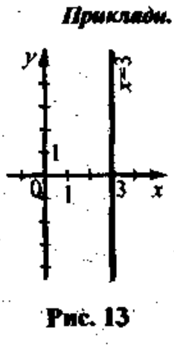

Рис. 13

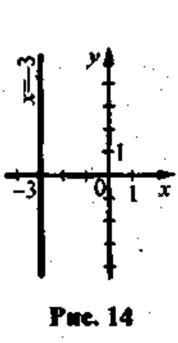

Рис. 14

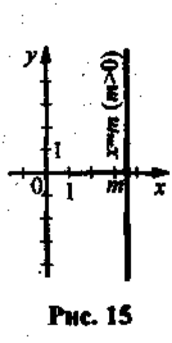

Рис. 15

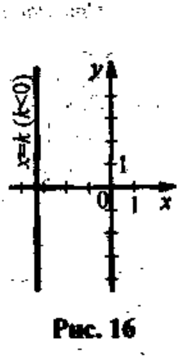

Рис. 16

Щоб побудувати пряму, яка є графіком рівняння першого степеня $ax + 0y = c$, потрібно:

- **подати рівняння у вигляді рівняння першого степеня з однією змінною: $ax = c$;**
- **знайти абсцису точки перетину графіка з віссю x: $x = \frac{c}{a}$;**
- **провести через точку $\frac{c}{a}$ осі x пряму, перпендикулярну до неї.**

Проведена пряма і є графіком рівняння $ax + 0y = c$.

Приклад.

Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

1) Записуємо дане рівняння як рівняння першого степеня з однією змінною: $2x = 8$.

2) Розв'язуємо його: $x = 4$.

3) Позначаємо на осі x точку з абсцисою 4 і проводимо через неї пряму, перпендикулярну до осі x (рис. 17).

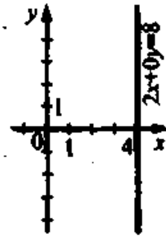

Рис. 17

10

Графіком рівняння $y = n$ на координатній площині є пряма, яка перетинає вісь y у точці з ординатою n і перпендикулярна до цієї осі (тобто паралельна до осі x).

Приклади.

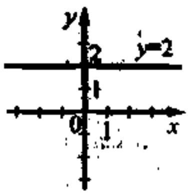

Рис. 18

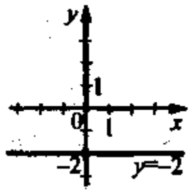

Рис. 19

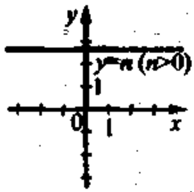

Рис. 20

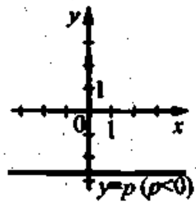

Рис. 21

Щоб побудувати пряму, яка є графіком рівняння першого степеня $0x + by = c$, потрібно:

- **подати рівняння у вигляді рівняння першого степеня з однією змінною: $by = c$;**
- **знайти ординату точки перетину графіка з віссю y: $y = \frac{c}{b}$;**
- **провести через точку $\frac{c}{b}$ осі y пряму, перпендикулярну до неї.**

Проведена пряма і є графіком рівняння $0x + by = c$.

Приклад.

Побудувати графік рівняння $0x + 2y = 6$.

1) Записуємо дане рівняння як рівняння першого степеня з однією змінною: $2y = 6$.

2) Розв'язуємо його: $y = 3$.

3) Позначаємо на осі y точку з ординатою 3 і проводимо через неї пряму, перпендикулярну до осі y (рис. 22).

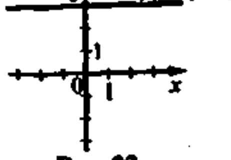

Рис. 22

(11)

Щоб побудувати пряму, яка є графіком рівняння першого степеня $ax + by = c$, потрібно:

- **знайти два його розв'язки;**
- **зобразити розв'язки точками координатної площини;**
- **провести через ці точки пряму.**

Проведена пряма і є графіком рівняння $ax + by = c$.

Приклади.

1. Побудувати графік рівняння $x + y = 4$.

1) Знаходимо два розв'язки. Нехай $x = 0$, тоді $0 + y = 4$; $y = 4$; розв'язок (0; 4); нехай $y = 0$, тоді $x + 0 = 4$; $x = 4$; розв'язок (4; 0).

2) Будуємо на координатній площині точки A(0; 4) і B(4; 0).

3) Проводимо пряму AB (рис. 23). Дана пряма є графіком рівняння $x + y = 4$.

2. Побудувати графік рівняння $3x + y = 4$.

1) Виразимо змінну y через змінну x: $y = -3x + 4$.

2) Знаходимо два розв'язки рівняння. Нехай $x = 0$, тоді $y = -3 \cdot 0 + 4 = 4$; $y = 4$; розв'язок (0; 4); нехай $x = 1$, тоді $y = -3 \cdot 1 + 4 = -3 + 4 = 1$; $y = 1$; розв'язок (1; 1).

2) Будуємо на координатній площині точки C(0; 4) і D(1; 1).

3) Проводимо пряму CD (рис. 24). Дана пряма є графіком рівняння $3x + y = 4$.

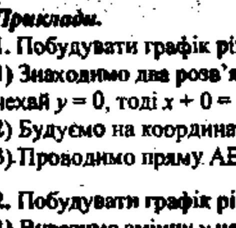

Рис. 23

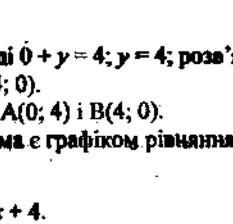

Рис. 24

Графіком лінійного рівняння $ax + by = 0$, де $a \neq 0$ і $b \neq 0$, або рівняння виду $y = kx$ є пряма, яка проходить через початок координат.

Обґрунтування

Координати $(0; 0)$ точки початку координат задовольняють рівняння $ax + by = 0$ і $y = kx$: $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$; $0 = 0$ — правильна числова рівність; $0 = k \cdot 0$; $0 = 0$ — правильна числова рівність.

Для побудови графіків рівнянь $ax + by = 0$ і $y = kx$ достатньо знайти координати однієї точки (іншою точкою є початок координат).

Приклад.
Графіки рівнянь $2x + 3y = 0$; $3x = y$; $y = 4x$; $y = -0{,}8x$ проходять через початок координат.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Лінійне рівняння з двома змінними та його розв'язування

(1)

№222.

1. **1)** **Як називають рівняння виду $ax + by = c$, де x та y — змінні, a, b і c — числа?**

2) **Серед рівнянь а)–в) вказати лінійне рівняння з двома змінними.**
а) $5x^2 + y = 4$; **б)** $4x + 3y = 7$; **в)** $xy = 9$.

Як називають у лінійному рівнянні (3–4):

3) **числа біля змінних;** **4)** **член, який не містить змінної?**

Серед рівнянь а)–в) вказати рівняння, у якому (5–7):

5) **один з коефіцієнтів дорівнює нулю:**
а) $-x + 5y = 0$; **б)** $x + 3y = 0$; **в)** $x + 0y = 4$.

6) **жоден з коефіцієнтів не дорівнює нулю:**
а) $0x + 3y = 2$; **б)** $2x + 5y = 4$; **в)** $0x + 0y = 5$.

7) **обидва коефіцієнти дорівнюють нулю:**
а) $3x + 4y = 12$; **б)** $0x + 7y = 1$; **в)** $0x + 0y = 3$.

8) **Як називають лінійне рівняння, у якому хоча б один з коефіцієнтів (один або обидва) не дорівнюють нулю?**

9) **Як називають лінійні рівняння $2x + 0y = 3$; $0x + 5y = 7$; $4x - 5y = 2$?**

2. *Серед рівнянь а)–е) вказати три, які є (1–2):*

1) лінійними рівняннями з двома змінними:

а) $x^2 - 3x = y$; б) $xy + 5x = 4$; в) $x - 3y = 2$;
г) $x + 0y = 9$; д) $x + 5y^2 = 7$; е) $0x + 0y = 5$.

2) лінійними рівняннями першого степеня з двома змінними:

а) $2x + 5y = 7$; б) $0x + 7y = 8$; в) $0x + 0y = 1$;
г) $0x + 0y = 0$; д) $7x + 0y = -5$; е) $0x + 0y = -2$.

3) Серед лінійних рівнянь вказати три, які не є рівняннями першого степеня з двома змінними:

а) $4x + 3y = 0$; б) $0x + 0y = 3$; в) $5x + 2y = 0$;
г) $0x + 0y = 0$; д) $0x + 0y = -3$; е) $0x - 4y = -7$.

3. *Записати три...*

1) лінійних рівняння з двома змінними;
2) рівняння з двома змінними, які не є лінійними;
3) лінійних рівняння, у яких хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля;
4) лінійних рівняння, у яких обидва коефіцієнти дорівнюють нулю.

2

№223.

1. 1) Чому дорівнює ліва частина лінійного рівняння $0x + 0y = c$ за будь-яких значень x та y?

2) При якому значенні c лінійне рівняння $0x + 0y = c$ не має розв'язків?

а) $c = 0$; б) $c \neq 0$.

Скільки розв'язків має лінійне рівняння (3–4):

3) $0x + 0y = 2$; 4) $0x + 0y = -3$?

5) Серед лінійних рівнянь а)–в) вказати те, розв'язком якого є будь-яка пара чисел.

а) $0x + 0y = 2$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 0y = 2$.

Скільки розв'язків має (6–10):

6) будь-яке лінійне рівняння першого степеня з двома змінними;
7) рівняння $2x + 3y = -4$;
8) рівняння $0x + 0y = -3$;
9) рівняння $0x + 4y = -3$;
10) рівняння $4x + 0y = 7$.

2. *Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати:*

1) три рівняння, які не мають коренів:

а) $0x + 0y = -2$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 5y = 4$;
г) $5x + 0y = 7$; д) $0x + 0y = 5$; е) $0x + 0y = 0{,}1$.

2) три рівняння, які мають безліч коренів.

а) $3x + 4y = 7$; б) $3x + 0y = 7$; в) $0x + 0y = 7$;

г) $0x + 0y = -1$; д) $0x + 5y = 12$; е) $0x + 0y = 0{,}7$.

3) рівняння, розв'язком якого є пари будь-яких чисел:

а) $3x + 4y = 9$; б) $4x + 0y = 7$; в) $0x + 0y = 7$;

г) $0x + 0y = -3$; д) $0x + 7y = 12$; е) $0x + 0y = 0$.

Записати три лінійних рівняння, які (1–2):

1) мають безліч розв'язків; 2) не мають розв'язків.

3

224.

1) Скільки розв'язків має будь-яке лінійне рівняння першого степеня, у якого один з коефіцієнтів дорівнює нулю?

Яких значень може набувати у розв'язку рівняння $x + 0y = 10$ (2–3):

2) змінна x:

а) будь-яких; б) тільки 10;

3) змінна y:

а) будь-яких; б) тільки 10.

Чому дорівнює значення x у будь-якому розв'язку рівняння:

4) $x + 0y = 5$:

а) 0; б) 5;

5) $2x + 0y = 10$:

а) 5; б) 2;

6) $3x + 0y = -21$:

а) 3; б) -7.

Як записати множину всіх розв'язків рівняння (1–3)?

1) $x + 0y = 3$:

а) $(3; y)$, де y — будь-яке число;

б) $(x; 3)$, де x — будь-яке число;

2) $2x + 0y = 12$:

а) $(12; y)$, де y — будь-яке число;

б) $(6; y)$, де y — будь-яке число;

в) $(x; 6)$, де x — будь-яке число;

3) $3x + 0y = -15$:

а) $(-15; y)$, де y — будь-яке число;

б) $(x; -5)$, де x — будь-яке число;

в) $(-5; y)$, де y — будь-яке число.

Серед пар чисел а)–е) вказати три, які є розв'язками рівняння:

4) $x + 0y = 8$:

а) (8; 2); б) (1; 8); в) (8; –3);
г) (–4; 8); д) (8; 0); е) (0; 4);

5) $2x + 0y = 18$:

а) (2; 9); б) (9; 2); в) (9; 0,1);
г) (–3; 9); д) (18; 2); е) (9; –3);

6) $3x + 0y = -15$:

а) (–5; 0); б) (0; –5); в) (–5; 2);
г) (0; –5); д) (–5; 1); е) (5; 0,2).

3. *Записати три розв'язки рівняння:*

1) $x + 0y = -6$; 2) $5x + 0y = 30$; 3) $2x + 0y = -24$.

Записати множину всіх розв'язків рівняння:

1) $x + 0y = 2$; 2) $4x + 0y = 24$; 3) $-3x + 0y = 21$.

4

№225.

1. *Яких значень може набувати у розв'язку рівняння $0x + y = 12$ (1–2):*

1) змінна y?

а) Будь-яких; б) тільки 12;

2) змінна x?

а) Будь-яких; б) тільки 12.

Чому дорівнює значення y в усіх розв'язках рівняння:

3) $0x + 5y = 15$:

а) 3; б) 15; в) 0;

4) $0x - 2y = 20$:

а) 20; б) –10; в) –40;

5) $0x + 7y = 21$:

а) 3; б) 21; в) 147.

2. *Як записати множину всіх розв'язків рівняння (1–3)?*

1) $0x + y = 10$:

а) $(x; 10)$, де x — будь-яке число;
б) $(10; y)$, де y — будь-яке число;

2) $0x + 2y = 24$:

а) $(x; 12)$, де x — будь-яке число;
б) $(x; 24)$, де x — будь-яке число;
в) $(12; y)$, де y — будь-яке число;

3) $0x + 3y = -18$:

а) $(-6; y)$, де y — будь-яке число;

б) $(x; -6)$, де x — будь-яке число;

в) $(x; -18)$, де x — будь-яке число.

Серед пар чисел а)–е) вказати три, які є розв'язками рівняння (4–6):

4) $0x + y = 24$:

а) $(24; 1)$; б) $(-1; 24)$; в) $(0; 24)$;
г) $(3; 0)$; д) $(24; -5)$; е) $(5; 24)$;

5) $0x + 3y = 21$:

а) $(7; 2)$; б) $(0; 21)$; в) $(0; 7)$;
г) $(-7; 2)$; д) $(4; 7)$; е) $(-3; 7)$;

6) $0x - 5y = 30$:

а) $(0; -6)$; б) $(0; 6)$; в) $(1; -6)$;
г) $(-6; 2)$; д) $(30; 2)$; е) $(-3; -6)$.

3. *Записати три розв'язки рівняння:*

1) $0x + y = 28$; 2) $0x + 3y = -30$; 3) $0x - 4y = -40$.

Записати множину всіх розв'язків рівняння:

1) $0x + y = 21$; 2) $0x + 5y = 35$; 3) $0x - 4y = 80$.

5

№226.

1. 1) Як називається пара чисел $(2; 3)$, якщо за умови, що $x = 2$ та $y = 3$ лінійне рівняння $5x + 4y = 22$ перетворюється у правильну числову рівність: $5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 22$; $22 = 22$?

2) *Доповнити запис.*

Щоб знайти значення y, яке відповідає значенню $x = 3$ у розв'язку лінійного рівняння $2x + y = 8$, потрібно підставити у рівняння замість ______ число ______ .

2. *Назвати рівняння з однією змінною, яке утвориться з даного, якщо підставити значення однієї зі змінних (1–3):*

1) $5x + 2y = 24$; $x = 3$:

а) $53 + 2y = 24$; б) $15 + 2y = 24$; в) $5x + 6 = 24$;

2) $2x - 3y = 11$; $x = 0$:

а) $-3y = 11$; б) $3y = 11$; в) $2x = 11$;

3) $5x + 7y = 31$; $y = -2$:

а) $5x - 14 = 31$; б) $5x + 14 = 31$; в) $-10 + 7y = 31$.

3. *Знайти у розв'язку рівняння (1–4):*

1) $x + y = 15$ значення x, якщо $y = 0$; $y = 15$; $y = 10$;

2) $x + y = 8$ значення y, якщо $x = 0$; $x = 1$; $x = -2$;

3) $x + 4y = 20$ значення y, якщо $x = 0$; $x = 8$; $x = -4$;
4) $2x + y = 12$ значення x, якщо $y = 0$; $y = 8$; $y = -6$.

5

27.
З рівняння $-2x + y = 1$ змінну y виражено через змінну x: $y = 2x +$
Знайти значення, які набуває змінна y, якщо (1–3):

1) $x = 0$:
а) 21; б) 1; в) -1;
2) $x = 3$:
а) 7; б) 6; в) 24;
3) $x = -3$:
а) -5; б) -7; в) -22.

Виразити змінну y через змінну x із рівняння:

1) $-3x + y = 2$:
а) $y = 3x + 2$; б) $y = -3x + 2$; в) $y = 3x - 2$;
2) $3x + y = 5$:
а) $y = -3x - 5$; б) $y = 3x + 5$; в) $y = -3x + 5$;
3) $-x + 2y = 3$:
а) $y = -\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$; б) $y = \frac{x}{2}+\frac{3}{2}$; в) $y = \frac{x}{2}+3$.

1) Дано рівняння $y=\frac{3}{4}x+1$. Знайти значення y, якщо $x = 4$; $x =$
$x = -4$.

Виразити змінну y через змінну x із рівняння:

2) $x - y = 5$; 3) $-2x + y = 3$;
4) $3x + y = 7$; 5) $3x + 2y = 5$;
6) $9x + 3y = 4$; 7) $3x - 2y = 11$.

5

28.
З рівняння $x - 3y = 1$ змінну x виражено через змінну y: $x = 3y + 1$. Зн
ти значення, які набуває змінна x, якщо...

1) $y = 0$:
а) 3; б) 1; в) 31;
2) $y = 3$:
а) 9; б) 10; в) 34;

3) $y = -3$:

а) -3; б) -8; в) -10.

2. *Виразити змінну x через змінну y з рівняння:*

1) $x - 2y = 5$:

а) $x = -2y + 5$; б) $x = 2y + 5$; в) $x = 2y - 5$;

2) $x + 3y = 4$:

а) $x = -3y - 4$; б) $x = -3y + 4$; в) $x = 3y + 4$;

3) $2x - 3y = 1$:

а) $x = -\frac{3y}{2} + \frac{1}{2}$; б) $x = \frac{3y}{2} + 1$; в) $x = \frac{3y}{2} + \frac{1}{2}$.

3. 1) Дано рівняння $x = \frac{2}{3}y + 1$. Знайти розв'язки рівняння, якщо $y = 3$;

$y = 6$;

$y = -9$.

Виразити змінну x через змінну y з рівняння:

2) $x - 3y = 7$; 3) $x + 4y = 5$;

4) $2x - 5y = 1$; 5) $3x + 5y = 2$;

6) $10x + 2y = 1$; 7) $2x - 3y = 13$.

Тренувальні вправи

№229.

1. *Знайти значення змінної x в усіх розв'язках рівняння:*

1) $x + 0y = 14$; 2) $x + 0y = -14$; 3) $3x + 0y = 21$; 4) $15x + 0y = 3$.

2. *Знайти значення змінної y в усіх розв'язках рівняння:*

1) $0x + y = 3$; 2) $0x + 2y = -10$; 3) $0x + 3y = -21$; 4) $0x - 5y = 2$.

3. *Виразити змінну x з рівняння:*

1) $x - 4y = 5$; 2) $x + 5y = 7$; 3) $2x + 10y = 4$; 4) $3x - 12y = 5$.

4. *Виразити змінну y з рівняння:*

1) $5x + y = 3$; 2) $-3x + y = 11$; 3) $4x + 2y = -5$; 4) $3x + 2y = 3$.

5. 1) $x = \frac{2}{5}y + 4$. Знайти значення x, якщо: $y = 5$; $y = 15$; $y = -10$.

2) $x = \frac{3}{4}y - 5$. Знайти значення x, якщо: $y = -4$; $y = -16$; $y = 32$.

3) $y = -\frac{2}{7}x + 1$. Знайти значення y, якщо: $x = -14$; $x = 14$; $x = 21$.

4) $y = \frac{3}{11}x + 2$. Знайти значення y, якщо: $x = -33$; $x = 44$; $x = 11$.

№230. Варіант 1

1. 1) Як називається рівняння $5x - 4y = 7$?

Вказати, скільки розв'язків має рівняння:

2) $4x + 3y = -5$:

а) один; б) жодного; в) безліч.

3) $0x + 0y = 2$:

а) один; б) жодного; в) безліч.

2. *Серед пар чисел а)–е) вказати три, які є розв'язками рівняння (1–2):*

1) $x + 0y = -14$:

а) $(-14; 2)$; б) $(0; -14)$; в) $(-14; -3)$;
г) $(-14; 0{,}7)$; д) $(1; 0)$; е) $(0; 5)$.

2) $0x + 2y = 10$:

а) $(5; 1)$; б) $(0; 5)$; в) $(1; 5)$;
г) $(5; 0)$; д) $(10; 1)$; е) $(4; 5)$.

3) У якому із записів а)–в) правильно виражено змінну x через змінну y рівняння $x - 7y = 9$:

а) $x = -7y + 9$; б) $x = 7y + 9$; в) $x = -7y - 9$.

3. 1) Записати три розв'язки рівняння $x + 0y = 7$.

2) Виразити змінну x з рівняння $x - 3y = 5$.

3) Виразити змінну y з рівняння $-4x + y = 7$.

№231. Варіант 2

1. 1) Як називається рівняння $2x - 3y = 4$?

Вказати, скільки розв'язків має рівняння:

2) $0x + 0y = -3$:

а) один; б) жодного; в) безліч.

3) $4x - 5y = 7$:

а) один; б) жодного; в) безліч.

2. *Серед пар чисел а)–е) вказати три, які є розв'язками рівняння (1–2):*

1) $x + 0y = 12$:

а) $(12; 1)$; б) $(0; 12)$; в) $(12; 3)$;
г) $(0; -12)$; д) $(12; -0{,}8)$; е) $(-12; 5)$.

2) $0x + 3y = 15$:

а) $(5; 1)$; б) $(1; 5)$; в) $(0{,}2; 5)$;
г) $(15; 1)$; д) $(1; 15)$; е) $(-3; 5)$.

3) У якому із записів а)–в) правильно виражено змінну y через змінну x рівняння $5x + y = -2$:

а) $y = -5x + 2$; б) $y = -5x - 2$; в) $y = 5x - 2$?

3. 1) Записати три розв'язки рівняння $0x + 5y = 20$.

3) Виразити змінну y із рівняння $-3x + y = 15$.

2. Графіки лінійних рівнянь із двома змінними

8

232.

1) Що є графіком лінійного рівняння з двома змінними, у якого хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля?
2) Що є графіком рівняння $0x + 0y = 0$?
3) Чи існують графіки лінійних рівнянь, у яких коефіцієнти дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля?

Вказати, чи існує графік даного лінійного рівняння (4–9); якщо існує, то назвати фігуру, яка є графіком:

4) $2x + 3y = 7$; 5) $0x - 4y = 2$;
6) $0x + 0y = -2$; 7) $5x + 0y = 3$;
8) $0x + 0y = 0$; 9) $x - 2y = 4$.

Серед лінійних рівнянь а)–е) вказати:

1) рівняння, графіком якого є вся координатна площина:
а) $0x + 0y = -1$; б) $0x + 0y = 0,1$; в) $2x - 3y = 4$;
г) $5x + 0y = 0$; д) $0x + 0y = 0$; е) $0x + 3y = 0$;
2) три рівняння, які не мають графіків:
а) $0x + 0y = 5$; б) $0x + 4y = 5$; в) $3x + 4y = 5$;
г) $0x + 0y = -1$; д) $0x + 0y = 0$; е) $0x + 0y = -0,1$;
3) три рівняння, графіком яких є пряма:
а) $2x - 3y = 4$; б) $0x + 0y = 4$; в) $5x + 0y = 7$;
г) $0x + 0y = -1$; д) $0x + 0y = 0$; е) $0x - y = 3$.

Записати:

1) три лінійних рівняння, які не мають графіків;
2) три лінійних рівняння, графіком яких є пряма;
3) лінійне рівняння, графіку якого належить будь-яка точка координатної площини.

9

233.

Доповнити запис.

1) Графік рівняння $x = m$ перетинає вісь x у точці з абсцисою _______ і перпендикулярний до осі _______.

2) Графік рівняння $ax + 0y = c$, якщо $a \neq 0$, перетинає вісь x у
абсцисою ______ і перпендикулярний до осі ______.

Вказати вісь, до якої перпендикулярні графіки рівнянь:

3) $x = 10$; 4) $x = -4$;

5) $x = 0{,}6$; 6) $2x + 0y = 12$;

7) $4x = -12$; 8) $3x + 0y = -7$.

Назвати абсцису точки перетину з віссю x графіка рівняння:

9) $x = 10$; 10) $x = -8$.

2. *Вказати рівняння прямої, зображеної на (1–2) ...*

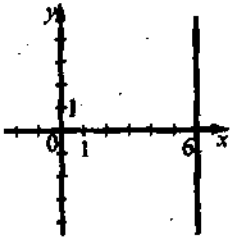

Рис. 25

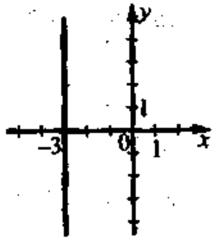

Рис. 26

1) рисунку 25:
   а) $y = 6$ або $0x + y = 6$;
   б) $x = 6$ або $x + 0y = 6$;
   в) $y = 6x$;
2) рисунку 26:
   а) $y = -3x$;
   б) $y = -3$ або $0x + y = -3$;
   в) $x = -3$ або $x + 0y = -3$.

Вказати абсцису точки перетину з віссю x графіка рівняння:

3) $x + 0y = 4$:
   а) 0; б) 4; в) –4; г) 1;
4) $2x + 0y = 10$:
   а) 10; б) 5; в) $\frac{1}{2}$; г) 2;
5) $-3x + 0y = 18$:
   а) –3; б) –6; в) $-\frac{1}{6}$; г) 18;
6) $7x + 0y = -28$:
   а) –28; б) 7; в) –4; г) $-\frac{1}{4}$.

1) $x + 0y = -7$;
2) $3x + 0y = 12$;
3) $-4x + 0y = 20$;
4) $12x + 0y = 4$.

Побудувати графіки рівнянь:

5) $x = 2$;
6) $x = -7$;
7) $2x + 0y = 12$;
8) $3x + 0y = -12$.

(10)

234.

Доповнити запис (1–2).

1) Графік рівняння $y = n$ перетинає вісь y в точці з ординатою _______ і перпендикулярний до осі _______.
2) Графік рівняння $0x + by = c$, якщо $b \neq 0$, перетинає вісь y в точці з ординатою _______ і перпендикулярний до осі _______.

Назвати вісь, до якої перпендикулярний графік рівняння:

3) $y = 10$;
4) $y = -4$;
5) $y = 0{,}6$;
6) $0x + 2y = 12$;
7) $4y = -12$;
8) $0x + 3y = 7$.

Вказати ординату точки перетину з віссю у графіка рівняння:

9) $y = 10$;
10) $y = -8$.

Вказати рівняння прямої, зображеної на...

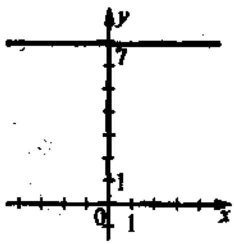

Рис. 27

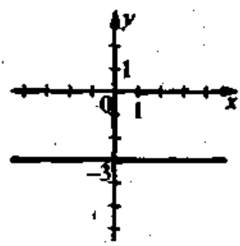

Рис. 28

1) **рисунку 27:**
   а) $x = 7$ або $x + 0y = 7$;
   б) $y = 7$ або $0x + y = 7$;
   в) $y = 7x$;
2) рисунку 28:
   а) $x = -3$ або $x + 0y = -3$;
   б) $y = -3$ або $0x + y = -3$;
   в) $y = -3x$.

Вказати ординату точки перетину з віссю y графіка рів...

3) $0x + y = 4$:

а) 0; б) 4; в) –4; г) 1;

4) $0x + 2y = 10$:

а) 10; б) 5; в) $\frac{1}{2}$; г) 2;

5) $0x - 3y = 18$:

а) –3; б) –6; в) $-\frac{1}{6}$; г) 18;

6) $0x + 7y = -28$:

а) –28; б) 7; в) –4; г) $-\frac{1}{4}$.

3. *Знайти ординату точки перетину з віссю y графіка рівняння:*

1) $0x + y = -7$; 2) $0x + 3y = 12$;

3) $0x - 4y = 20$; 4) $0x + 12y = 4$.

Побудувати графік рівняння:

5) $y = 2$; 6) $y = -7$;

7) $0x + 2y = 12$; 8) $0x + 2y = -12$.

(11)

№235.

1. *Доповнити запис.*

1) Щоб побудувати графік рівняння $ax + by = c$, у якому $a \neq 0$ і $b \neq 0$, потрібно знайти два розв'язки рівняння, зобразити відповідні їм точки на координатній площині та провести через них ____________.

2) Графіки усіх рівнянь виду $ax + by = 0$ або $y = kx$ проходять через ____________.

Вказати, як розміщений відносно початку координат (проходить чи не проходить через нього) графік рівняння:

3) $5x + 3y = 0$; 4) $2x - 3y = 8$; 5) $y = 2x$; 6) $y = -3x$.

Вказати абсцису перетину з віссю x графіка, зображеного на...

7) рисунку 29; 8) рисунку 30;

9) рисунку 31; 10) рисунку 32.

Вказати ординату перетину з віссю y графіка, зображеного на...

11) рисунку 29; 12) рисунку 30;

13) рисунку 31; 14) рисунку 32.

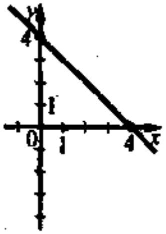

Рис. 29

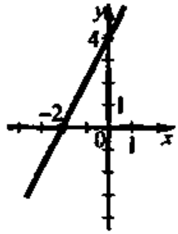

Рис. 30

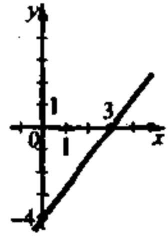

Рис. 31

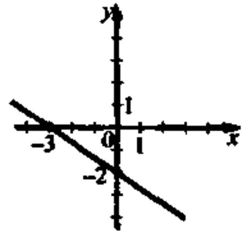

Рис. 32

2. **1) Серед рівнянь першого степеня з двома змінними а)–е) вказати три, графіки яких проходять через початок координат:**

а) $4x - y = 1$; б) $x + 2y = 0$; в) $x + 2y = 4$;
г) $x - 3y = 7$; д) $2x + y = 0$; е) $5x - 4 = 0$.

Вказати ординату точки прямої $y = 3x$, якщо...

2) $x = 1$; 3) $x = -2$; 4) $x = 2$; 5) $x = 3$.

Вказати ординату точки прямої $x + y = 7$, якщо...

6) $x = 0$; 7) $x = 1$; 8) $x = 3$; 9) $x = 2$.

3. *Дано рівняння прямої, яка проходить через початок координат. Знайти координату ще однієї точки цієї прямої та побудувати її графік:*

1) $y = 2x$; 2) $y = 5x$; 3) $y = -2x$; 4) $y = -4x$.

Знайти координати двох точок графіка рівняння і побудувати графік рівняння:

5) $x + y = 2$; 6) $x + y = 4$; 7) $x - y = 4$; 8) $x + 2y = 6$.

Тренувальні вправи

№236.

Побудувати графік рівняння:

1. 1) $y = 2x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = 4x$; 4) $y = -\frac{1}{2}x$.

2. 1) $x + y = 1$; 2) $x - y = 6$; 3) $x - 2y = 6$; 4) $2x - y = 4$.

3. 1) $x = 4$; 2) $x = -5$; 3) $2x = 5$; 4) $-3x = 18$.

4. 1) $y = 3$; 2) $y = -4$; 3) $2y = 7$; 4) $-4y = 20$.

Завдання для самоперевірки

№237. Варіант 1

1. **Вказати, що є графіком рівняння:**

1) $x = 10$; 2) $y = 4x$; 3) $y = -7$.

Пряма, яка ...

а) проходить через початок координат;

б) перетинає вісь x і перпендикулярна до неї;

в) перетинає вісь y і перпендикулярна до неї.

2. *Серед рівнянь а)–е) вказати три, графіки яких перпендикулярні:*

1) до осі x:

а) $x = 0,8$;	б) $y = 4x$;	в) $y = 2$;
г) $x + 0y = 7$;	д) $y = -3$;	е) $x = -3$;

2) до осі y:

а) $y = 6$;	б) $x = 5$;	в) $y = 0,7$;
г) $y = 4x$;	д) $x = 3$;	е) $0x + y = 12$.

3) Серед точок а)–е) вказати три, які належать графіку рівняння $x + y = 7$:

а) (0; 7);	б) (0; 0);	в) (3; 4);
г) (1; 6);	д) (6; 2);	е) (7 ; 1).

3. *Побудувати графік рівняння:*

1) $y = 4$;   2) $x + 0y = -6$.

3) Дано рівняння $y = 3x$. Знайти значення y, якщо $x = 0$ та $x = 2$ і побудувати графік рівняння.

№238. Варіант 2

1. Вказати, що є графіком рівняння:

1) $x = 7$;   2) $y = -4$;   3) $y = 2x$.

Пряма, яка ...

а) проходить через початок координат;

б) перетинає вісь x і перпендикулярна до неї;

в) перетинає вісь y і перпендикулярна до неї.

2. *Серед рівнянь а)–е) вказати три, графіки яких перпендикулярні:*

1) до осі x:

а) $x = 3$;	б) $x + 0y = 10$;	в) $y = 4$;
г) $0x + y = 7$;	д) $2x + 0y = -3$;	е) $2x + 3y = 7$;

2) до осі y:

а) $y = 10$;	б) $0x + y = 4$;	в) $x = 5$;
г) $x + y = 5$;	д) $0x - 2y = 10$;	е) $x - y = 1$.

3) Серед точок а)–е) вказати три, які належать графіку рівняння $x + y = 5$:

а) (3; 2);	б) (6; 1);	в) (6; –1);
г) (4; 3);	д) (4; 2);	е) (0 ; 5).

3. *Побудувати графік рівняння:*

1) $x = 3$;   2) $0x + y = -3$.

дувати графік рівняння.

Відтворення і застосування теорії

Завдання на відтворення

№239.

Середній рівень

1. Сформулювати означення розв'язку рівняння з двома змінними.
2. Дати означення рівносильних рівнянь. Записати рівняння рівносильне рівнянню:

   1) $x + 2y = 5$; 2) $0x + 0y = 5$.
3. Дати означення лінійного рівняння з двома змінними. Навести приклад лінійного рівняння першого степеня з двома змінними.
4. Що є графіком лінійного рівняння першого степеня з двома змінними?

Достатній рівень

1. 1) Пояснити, чому лінійні рівняння виду $0x + 0y = c$, де c — відмінне від нуля, не мають розв'язків.

   2) Пояснити, чому графіком лінійного рівняння $0x + 0y = 0$ є вся координатна площина.
2. 1) Сформулювати правило розпізнавання пари чисел $(x_0; y_0)$ як розв'язків лінійного рівняння $ax + by = c$.

   2) Сформулювати правило знаходження за значенням числа x_0 у розв'язку рівняння відповідного йому значення y. Назвати два послідовні перетворення, що виконують для вираження з лінійного рівняння $ax + by = c$:

   а) змінної x через змінну y: $x = -\dfrac{b}{a}y + \dfrac{c}{a}$, якщо $a \neq 0$;

   б) змінної y через змінну x: $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$, якщо $b \neq 0$.

Високий рівень

1. Записати рівняння двох прямих, які є графіком рівняння $(x - a)(y + b) = 0$.
2. Частиною якої прямої є графік рівняння $|x| + y = 4$, якщо:

   1) $x \geq 0$; 2) $x \leq 0$?

№240. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Встановити, які з пар чисел (1; 5); (3; 4); (7; –1) є розв'язками рівняння $x + y = 6$.
   2) Побудувати графік лінійного рівняння $x + y = 5$.
2. Виразити з рівняння $2x + y = 6$ змінну y через змінну x і знайти три розв'язки рівняння.
3. Побудувати графік рівняння $3x + y = 4$.

Достатній рівень

1. 1) Виразити з рівняння $3x - 4y = 2$ змінну x через змінну y і знайти три розв'язки рівняння.
   2) Побудувати графік рівняння $2x + 3y = 10$.
2. Встановити, при якому значенні a пара чисел (3; –2) є розв'язком рівняння $3x - ay - 4 = 0$.
3. Побудувати графік рівняння $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

Високий рівень

1. 1) Побудувати графік рівняння $\frac{x+y}{5}-\frac{x-1}{10}=\frac{y}{4}$.
   2) Знайти розв'язки лінійного рівняння $3x + 2y = 12$, у яких значення x та y — протилежні числа.
2. Побудувати графік рівняння $(x - y)(x + 2y) = 0$.
3. Побудувати графік рівняння $|x| - y = 5$.

№241. Варіант 2

Середній рівень

1. 1) Встановити, які з пар чисел (2; 3); (1; 3); (6; –2) є розв'язками рівняння $x + y = 4$.
   2) Побудувати графік лінійного рівняння $x - y = 2$.
2. Виразити з рівняння $2x + y = 5$ змінну y через змінну x і знайти три розв'язки рівняння.
3. Побудувати графік рівняння $2x + y = 1$.

1. 1) Виразити з рівняння $5x + 4y = 11$ змінну x через змінну y і знайти три розв'язки рівняння.
   2) Побудувати графік рівняння $3x - 2y = 4$.
2. При якому значенні c графік рівняння $2x + cy = 11$ проходить через точку $(2; -1)$?
3. Побудувати графік рівняння $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

Високий рівень

1. 1) Побудувати графік рівняння $\frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = \frac{3}{10}$.

   2) Знайти розв'язки $(x_0; y_0)$ лінійного рівняння $5x - 2y = 7$, для яких виконується умова $\frac{y_0}{x_0} = 3$.
2. Побудувати графік рівняння $(x + 2)(x - 3y) = 0$.
3. Побудувати графік рівняння $|x| - x = y$.

№242. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Встановити, які з пар чисел (7; 2); (2; 7); (1; –4) є розв'язками рівняння $x - y = 5$.
   2) Побудувати графік лінійного рівняння $x + y = 3$.
2. Виразити з рівняння $-4x + y = 7$ змінну y через змінну x і знайти три розв'язки рівняння.
3. Побудувати графік рівняння $2x - y = 1$.

Достатній рівень

1. 1) Виразити з рівняння $2x + 3y = 5$ змінну x через змінну y і знайти три розв'язки рівняння.
   2) Побудувати графік рівняння $5x + 4y = 12$.
2. Встановити, при якому значенні c пара чисел $(8; -1)$ є розв'язком рівняння $2x + 3y + c = 0$.
3. Побудувати графік рівняння $\frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1$.

1. 1) Побудувати графік рівняння $\frac{x+y}{5}-\frac{x-y}{4}=\frac{x-1}{10}$.

2) Знайти розв'язки $(x_0; y_0)$ лінійного рівняння $2x + 5y = 18$, для яких виконується умова $\frac{y_0}{x_0}=2$.

2. Побудувати графік рівняння $(y-3)(x+4y)=0$.
3. Побудувати графік рівняння $|x| + x = y$.

№243. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Встановити, які з пар чисел (11; 1); (1; 11); (9; –1) є розв'язками рівняння $x - y = 10$.
   2) Побудувати графік лінійного рівняння $x + y = 4$.
2. Виразити з рівняння $-5x + y = 2$ змінну y через змінну x і знайти три розв'язки рівняння.
3. Побудувати графік рівняння $3x - y = 1$.

Достатній рівень

1. 1) Виразити з рівняння $3x + 10y = 9$ змінну x через змінну y і знайти три розв'язки рівняння.
   2) Побудувати графік рівняння $2x + 3y = -4$.
2. Знайти значення a в рівнянні $ax + 5y = 1$, якщо відомо, що його графік проходить через точку (3; –4).
3. Побудувати графік рівняння $\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=1$.

Високий рівень

1. 1) Побудувати графік рівняння $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2y}{4}=\frac{2(x-y)}{5}$.

   2) Знайти розв'язки $(x_0; y_0)$ лінійного рівняння $4x - 3y = 12$, у яких значення x_0 та y_0 рівні.
2. Побудувати графік рівняння $(y-1)(x-2y)=0$.
3. Побудувати графік рівняння $|x| + y = 4$.

ТЕМА 12. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

- Поняття про систему рівнянь із двома змінними
- **Графічний спосіб розв'язання системи двох лінійних рівнянь із двома змінними**

Алгебраїчні способи розв'язування систем лінійних рівнянь

- **Спосіб підстановки**
- Спосіб додавання

Виклад теорії

І. Розв'язок системи рівняння. Графічний спосіб розв'язування

①

Якщо метою розв'язування двох рівнянь є знаходження їхніх спільних розв'язків, то кажуть, що *рівняння утворюють систему*. У таких випадках рівняння записують за допомогою фігурних дужок: «{».

Приклад.

$\begin{cases} x+y=20, \\ x-2y=5 \end{cases}$ — запис системи рівнянь.

Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи у правильну числову рівність.

Приклад.

Пара чисел (2; 3) є розв'язком системи $\begin{cases} x+y=5, \\ 4x+3=11, \end{cases}$ оскільки, якщо $x=2$; $y=3$, то кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність: $2+3=5$; $5=5$; $4\cdot 2+3=11$; $11=11$.

Щоб встановити, чи є задана пара чисел $(x_0; y_0)$ розв'язком системи рівнянь із двома змінними, потрібно:

- **у кожному рівнянні замість x підставити його значення x_0, а замість y — його значення y_0.**

Якщо кожна з утворених числових рівностей правильна, то пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи. Якщо хоча б одна з рівностей є неправильною, то пара чисел $(x_0; y_0)$ не є розв'язком системи.

в'язків немає.

2

Щоб розв'язати графічно систему лінійних рівнянь, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю, *потрібно:*
- побудувати прямі, які є графіками кожного з рівнянь;
- якщо прямі перетинаються, то система має один розв'язок — координати точки перетину (x_0; y_0);
- якщо прямі не перетинаються, то система рівнянь *не має* розв'язків;
- якщо прямі збігаються, то рівняння рівносильні; система має безліч розв'язків; кожен розв'язок одного з рівнянь є розв'язком системи.

2. Розв'язування системи лінійних рівнянь способом підстановки

Основою алгебраїчних способів розв'язування системи лінійних рівнянь є виконання рівносильних перетворень рівнянь, які дозволяють перейти до рівняння з однією змінною.

3

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом підстановки, потрібно:
- виразити з одного рівняння одну змінну через іншу (наприклад, x через y);
- підставити у друге рівняння замість однієї змінної її вираз через іншу змінну (замість змінної x її вираз через змінну y);
- розв'язати утворене рівняння, яке містить тільки одну змінну (рівняння зі змінною y);
- знайти значення іншої змінної за її виразом з першого рівняння.

Спосіб підстановки зручно застосовувати тоді, коли один із коефіцієнтів дорівнює 1 і виражати змінну з цим коефіцієнтом через іншу змінну.

Приклад.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ способом підстановки.

Розв'язування

1. Виразимо з першого рівняння системи змінну x через змінну y: $x = y + 3$.

2. Підставимо y друге рівняння ...
$y + 3$ і розв'яжемо утворене рівняння: $2(y+3)+3y=11$; $2y+6+3y=11$; $5y=11-6$; $5y=5$; $y=1$.
3. За формулою $x=y+3$ знаходимо значення x: $x=1+3$; $x=4$.
4. $(4; 1)$ — розв'язок системи рівнянь.

3. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання

4

Щоб розв'язати способом додавання систему лінійних рівнянь з протилежними коефіцієнтами біля однієї зі змінних, потрібно:
- **почленно додати ліві і праві частини рівнянь системи;**
- **розв'язати утворене рівняння з однією змінною;**
- **знайти відповідне значення іншої змінної.**

Приклад.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-6y=17, \\ 5x+6y=13 \end{cases}$ способом додавання.

Розв'язування

1. Почленно додаємо рівняння системи: $6x=30$.
2. Розв'яжемо рівняння: $6x=30$; $x=5$.
3. Знаходимо значення y з першого рівняння системи: $5-6y=17$; $-6y=17-5$; $-6y=12$; $y=-2$.
4. $(5; -2)$ — розв'язок системи рівнянь.

Щоб розв'язати способом підстановки будь-яку систему лінійних рівнянь, потрібно:
- **підібрати до кожного рівняння (чи одного з них) множники так, щоб після множення рівнянь на них коефіцієнти біля однієї зі змінних стали протилежними числами;**
- **помножити почленно на множники рівняння системи;**
- **додати почленно ліві та праві частини рівнянь системи;**
- **розв'язати утворене рівняння з однією змінною;**
- **знайти відповідне значення іншої змінної.**

Приклад.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 40x+3y=10, \\ 20x-7y=5 \end{cases}$ способом додавання.

Розв'язування

1. Домножимо друге рівняння системи на -2: $-40x+14y=-10$.

2. Почленно додаємо рівняння утвореної системи $\begin{cases} 40x+3y=10, \\ -40x+14y=-10 \end{cases}$

$3y+14y=10+(-10)$.

3. Розв'яжемо рівняння: $17y=0$; $y=0$.

4. Знаходимо значення x із першого рівняння системи: $40x=10$; $x=\frac{1}{4}$.

5. $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ — розв'язок системи рівнянь.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

1. Розв'язок системи рівнянь. Графічний спосіб розв'язування системи двох лінійних рівнянь

(1)

№244.

1. 1) Який із записів а)–в) є системою двох лінійних рівнянь із двома змінними?

а) $\begin{cases} x+3y=7, \\ xy=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-5y=2, \\ 3x+2y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-4y^2=9, \\ x+y=3. \end{cases}$

2) Як називається пара чисел (5; 2), при якій перетворюється у правильну числову рівність кожне з рівнянь системи $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3? \end{cases}$

3) *Доповнити запис.*

Щоб встановити, чи є задана пара чисел $(x_0; y_0)$ розв'язком системи рівнянь із двома змінними, потрібно у кожному рівнянні замість x підставити ___, а замість y підставити ____.

Якщо кожна з утворених числових рівностей правильна, то пара чисел $(x_0; y_0)$ ________, якщо хоча б одна з числових рівностей неправильна, то пара чисел $(x_0; y_0)$ ______________.

4) Що означає розв'язати систему рівнянь?

а) Знайти хоча б один розв'язок;

б) знайти деякі розв'язки;

в) знайти всі розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Вказати систему числових рівностей, яка утвориться після підстановки пари чисел (1; 3) у систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

а) $\begin{cases} 3+2\cdot 1=3, \\ 3\cdot 1-3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1+2\cdot 3=3, \\ 3\cdot 1-3=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3+2\cdot 1=3, \\ 3\cdot 3-1=0. \end{cases}$

3. *Встановити, чи є розв'язком системи рівнянь:*

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ пара чисел (3; 5).

2) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x+y=20 \end{cases}$ пара чисел (6; 2).

3) $\begin{cases} 5x+2y=18, \\ x-3y=7 \end{cases}$ пара чисел (4; –1).

4) $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ пара чисел (–2; 3).

2

№245.

1. *Скільки розв'язків має система лінійних рівнянь, якщо прямі — графіки рівнянь (1–3)...*

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збігаються?

2. *За графіком системи рівнянь вказати її розв'язки (1–4):*

1) $\begin{cases} y=2x+1, \\ x+y=7 \end{cases}$ (рис. 33).

2) $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x, \\ x-y=-4 \end{cases}$ (рис. 34).

3) $\begin{cases} y=x+1, \\ 2x+y=4 \end{cases}$ (рис. 35).

4) $\begin{cases} x-3y=6, \\ x+y=2 \end{cases}$ (рис. 36).

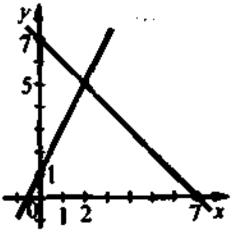

Рис. 33

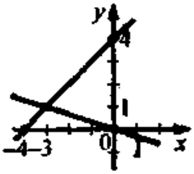

Рис. 34

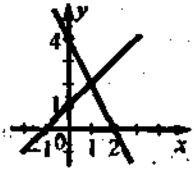

Рис. 35

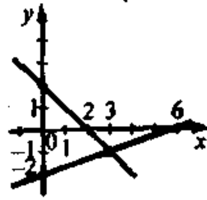

Рис. 36

3. Розв'язати графічно систему $\begin{cases} y = x - 1, \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ за планом:

а) знайти координати двох точок прямої, що є графіком рівнянн $y = x - 1$; обчислити за формулою $y = x - 1$ значення y_1 і y_2, що від повідають $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$;

б) точки A $(1; y_1)$ і B $(4; y_2)$, де y_1 і y_2 — знайдені числа, позначити н координатній площині і провести через них пряму;

в) знайти координати двох точок прямої, що є графіком рівнянн $x + 3y = 9$. Наприклад, обчислити координати точок C і D, в яки відповідно $x = 0$ й $y = 0$;

г) точки $C(0; y_2)$ і $D(x_2; 0)$, де y_2 і x_2 — знайдені числа, позначити н координатній площині і провести пряму CD;

д) знайти точку перетину прямих і записати відповідну пару чисе що є розв'язком системи.

Тренувальні вправи

№246.

Розв'язати графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ y = -x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0x + y = 4, \\ y = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 0y = -3, \\ x = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x - 3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

③

№247.

1. *Дано систему рівнянь* $\begin{cases} x+4y=9, \\ 2x+y=4. \end{cases}$ *Назвати формулу, в якій...*

    1) **виражено x через y з першого рівняння системи:**
    а) $x = 4y + 9$; **б)** $x = -4y + 9$.
    2) **виражено y через x із другого рівняння системи:**
    а) $y = -2x + 4$; **б)** $y = 2x + 4$.

2. 1) **Дано систему** $\begin{cases} y=x+3, \\ 4x+y=15. \end{cases}$ **Яке утвориться рівняння, якщо підставити у друге рівняння замість y відповідний вираз $x + 3$?**
    а) $4(x + 3) + y = 15$; **б)** $4x + x + 3 = 5$.

    2) **Дано систему** $\begin{cases} -2x+y=5, \\ 3x+y=15. \end{cases}$ **Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну y через x і одержаний вираз підставити у друге рівняння замість y?**
    а) $3x + 5 - 2x = 15$; **б)** $3x + 5 + 2x = 15$.

    3) **Дано систему** $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+3y=14. \end{cases}$ **Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну x через y і одержаний вираз підставити у друге рівняння замість x?**
    а) $2(-y + 2) + 3y = 14$;
    б) $2(y + 2) + 3y = 14$;
    в) $2 + (y + 2) + 3y = 14$.

3. 1) **Розв'язати систему рівнянь** $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ **способом підстановки за планом:**
    а) виразити з першого рівняння змінну y через x;
    б) підставити у друге рівняння замість y одержаний вираз;
    в) розв'язати одержане рівняння з однією змінною x;
    г) для знайденого значення x обчислити відповідне йому значення змінної y за допомогою формули, що виражає y через x; записати розв'язок системи.

2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x+3y=16 \end{cases}$ способом підстановки

планом:

1) виразити з першого рівняння змінну x через y;

2) підставити у друге рівняння замість x одержаний вираз;

3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною y;

4) для знайденого значення y обчислити відповідне йому значення за допомогою формули, що виражає x через y; записати розв'язок системи.

Тренувальні вправи

№248.

1. *Розв'язати систему рівнянь способом підстановки (1–4):*

1) $\begin{cases} y=x+2, \\ 3x+y=14. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=y-3, \\ x+4y=22. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=4, \\ x+3y=16. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x+y=9. \end{cases}$

Завдання для самоперевірки

№249. Варіант 1

1. *Дано систему рівнянь* $\begin{cases} x-2y=5, \\ 3x+y=22. \end{cases}$ *Вказати:*

1) формулу, за якою виражається змінна x через змінну y з першого рівняння:

а) $x=2y+5$; б) $x=-2y+5$; в) $x=2y-5$.

2) формулу, за якою виражається змінна y через змінну x із другого рівняння:

а) $y=-3x-22$; б) $y=-3x+22$; в) $y=3x+22$.

2. Дано систему рівнянь $\begin{cases} y=2x+1, \\ x+3y=17. \end{cases}$ Вказати рівняння, яке утвориться з другого рівняння, якщо замість y підставити його вираз через x з першого рівняння:

а) $x+6x+1=17$; б) $x+6x+3=17$; в) $x+5x+3=17$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+3y=15 \end{cases}$ способом підстановки.

№250. Варіант 2

1. *Дано систему рівнянь* $\begin{cases} x+3y=4, \\ -2x+y=-1. \end{cases}$ *Вказати:*

   1) **формулу, за якою виражається змінна x через змінну y із першого рівняння:**

      а) $x=-3y-4$; **б)** $x=-3y+4$; **в)** $x=3y+4$.

   2) **формулу, за якою виражається змінна y через змінну x з другого рівняння:**

      а) $y=2x-1$; **б)** $y=2x+1$; **в)** $y=-2x-1$.

2. **Дано систему рівнянь** $\begin{cases} y=3x+1, \\ x+2y=16. \end{cases}$ **Вказати рівняння, яке утвориться із другого рівняння, якщо замість y підставити його вираз через x з першого рівняння:**

   а) $x+6x+1=16$; **б)** $x+6x+2=16$; **в)** $x+6x+2=17$.

3. **Розв'язати систему рівнянь** $\begin{cases} x-y=2, \\ 4x+3y=27 \end{cases}$ **способом підстановки.**

3. Розв'язування систем рівнянь способом додавання

4

№251.

1. **Серед систем рівнянь а)–в) вказати систему, в якої коефіцієнти біля однієї зі змінних є протилежними числами:**

   а) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x+y=3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-y=0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x+y=16. \end{cases}$

2. 1) Дано систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=4, \\ -x+5y=10. \end{cases}$ Яке утвориться рівняння, якщо почленно додати ліві й праві частини рівнянь?

      а) $7y=4$; **б)** $7y=14$; **в)** $7y=10$.

   2) **Дано систему рівнянь** $\begin{cases} 12x+5y=2, \\ 4x-5y=6. \end{cases}$ **Яке утвориться рівняння, якщо почленно додати ліві і праві частини рівняння?**

      а) $16x=8$; **б)** $16x=4$; **в)** $8x=8$.

3) **Дано систему рівнянь** $\begin{cases}12x-11y=26,\\4x-5y=6.\end{cases}$ **Щоб коефіцієнти при змінні**

x були протилежними, друге рівняння помножимо на –3. Записат рівняння, яке утвориться з другого рівняння.

а) $-12x-5y=6$; **б)** $-12x+15y=-18$; **в)** $-12x-15y=18$.

3. 1) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x-6y=17,\\5x+6y=13\end{cases}$ способом додавання з

планом:

1) додати почленно ліві й праві частини рівнянь;

2) розв'язати утворене рівняння з однією змінною x;

3) підставити одержане значення змінної x у перше рівняння і ро **в'язати рівняння відносно змінної** y. **Знайдені значення змінних** x **та** y **записати як розв'язок системи.**

2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x+3y=8,\\3x-y=2\end{cases}$ способом додавання з

планом:

1) помножити почленно друге рівняння системи на 3;

2) виконати почленне додавання першого рівняння системи й оде **жаного;**

3) розв'язати утворене рівняння зі змінною x;

4) підставити одержане значення змінної x **в перше чи друге рівня** ня системи і розв'язати одержане рівняння зі змінною y. Знайде **значення змінних** x **та** y **записати як розв'язок системи.**

Тренувальні вправи

№252.

1. ***Розв'язати способом додавання систему рівнянь (1–4):***

1) $\begin{cases}x+y=7,\\x-y=11.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+5y=16,\\x-5y=-4.\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+7y=17,\\x+2y=5.\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x+y=11,\\2x+4y=14.\end{cases}$

Завдання для самоперевірки

№253. Варіант 1

1. Назвати рівняння, яке утвориться при почленному додаванні рівнянь системи $\begin{cases} x + y = 12, \\ 2x - y = 3: \end{cases}$

   а) $3x = 9$; б) $3x = 15$; в) $2x = 15$.

2. *Дано систему рівнянь* $\begin{cases} 6x + 5y = 16, \\ 2x + 3y = -8. \end{cases}$

   1) **Назвати множник, на який потрібно помножити друге рівняння системи, щоб коефіцієнти біля змінної x стали протилежними числами:**

      а) 3; б) –3; в) 6.

   2) Назвати рівняння, яке утвориться з другого рівняння системи при множенні його частин на –3:

      а) $-6x + 3y = 24$; б) $-6x - 9y = -8$; в) $-6x - 9y = 24$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 10, \\ 3x - y = 18 \end{cases}$ способом додавання.

№254. Варіант 1

1. Назвати рівняння, яке утвориться при почленному додаванні рівнянь системи $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 13: \end{cases}$

   а) $3x = 20$; б) $2x = 20$; в) $4x = 20$.

2. *Дано систему рівнянь* $\begin{cases} 2x + 5y = 9, \\ 8x + 3y = 19. \end{cases}$

   1) **Назвати множник, на який потрібно помножити перше рівняння системи, щоб коефіцієнти біля змінної x стали протилежними числами:**

      а) 4; б) –4; в) –8.

   2) Назвати рівняння, яке утвориться з першого рівняння системи при множенні його частин на –4:

      а) $-8x + 5y = 9$; б) $-8x - 20y = 9$; в) $-8x - 20y = -36$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 14, \\ 3x - y = 22 \end{cases}$ способом додавання.

Завдання на відтворення

№255.

Середній рівень

1. Дати означення розв'язку системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x-y=5 \end{cases}$ пара чисел (3; 1)?
2. Що означає розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними?

Достатній рівень

Викласти правила розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними (1–2):

1) способом підстановки; 2) способом додавання.

Завдання на застосування

№256. Варіант 1

Середній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} y=4, \\ x+y=4. \end{cases}$

   2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=7 \end{cases}$ способом додавання.
2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-2y=5, \\ x+y=4 \end{cases}$ способом підстановки.
3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5x+2y=9, \\ 7x-6y=-5 \end{cases}$ способом додавання.

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-2y=-4. \end{cases}$

2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x-3y=-8,\\5x+2y=-1\end{cases}$ алгебраїчно (способом підстановки або додавання).

Розв'язати алгебраїчним способом систему рівнянь (2–3):

2. $\begin{cases}7y+2(x-3y)=5x-1,\\9x+3(x-2y)=2y-16.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{2-3y}{8}=3,\\\dfrac{3x-1}{10}-\dfrac{4y+1}{5}=-3.\end{cases}$

Високий рівень

Розв'язати систему рівнянь:

1. 1) $\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8),\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1).\end{cases}$

   2) $\begin{cases}3x-2y=9,\\4x+3y=5,\\7x+2y=-1.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4},\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

3. $\begin{cases}y-x=1,\\x-z=3,\\y+z=6.\end{cases}$

№257. Варіант 2

Середній рівень

1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases}y=x,\\x+y=6.\end{cases}$

2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x+y=9,\\x-y=1\end{cases}$ способом додавання.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-2y=7, \\ x+2y=-1 \end{cases}$ способом підстановки.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 5x+6y=-7 \end{cases}$ способом додавання.

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=-5, \\ 4x-y=-7. \end{cases}$

2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=18, \\ 4x-5y=-22 \end{cases}$ алгебраїчно (способом підстановки або додавання).

Розв'язати алгебраїчним способом систему рівнянь (2–3):

2. $\begin{cases} 3(x-6)-2(y+1)=6, \\ (2-y)+2(x-1)=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x-6}{2}-\dfrac{y+1}{3}=1, \\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{y-2}{4}=2. \end{cases}$

Високий рівень

Розв'язати систему рівнянь:

1. 1) $\begin{cases} (x-1)(y+2)=(x+15)(y-6), \\ (x-3)(y-1)=x(y-4). \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x+2y=-1, \\ 4x+3y=5, \\ 3x-2y=9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{51}{8}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=13, \\ x-z=-4, \\ y+z=17. \end{cases}$

258. Варіант 3

Середній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 9. \end{cases}$

   2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 4 \end{cases}$ способом додавання.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 4y = 7, \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ способом підстановки.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5x + 2y = 25, \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ способом додавання.

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x + 2y = -6. \end{cases}$

   2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 5x + 6y = 9 \end{cases}$ алгебраїчно (способом підстановки або додавання).

Розв'язати алгебраїчним способом систему рівнянь (2–3):

2. $\begin{cases} 5(3x - 2) + 4(2y - 1) = 40, \\ 5(3x + 2) - 4(3y + 1) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-2}{3} = 2, \\ \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+1}{3} = 4. \end{cases}$

Високий рівень

Розв'язати систему рівнянь:

1. 1) $\begin{cases} (x-2)(y+5) = (x-1)(y+2), \\ (x+7)(y-4) = (x+4)(y-3). \end{cases}$

   2) $\begin{cases} 5x + 3y = 19, \\ 2x - y = 1, \\ 3x + 7y = 27. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=30, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=31 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=-2, \\ x+z=17, \\ z-y=3. \end{cases}$

№259. Варіант 4

Середній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4, \\ y=3x. \end{cases}$

   2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1 \end{cases}$ способом додавання.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=2, \\ x+3y=14 \end{cases}$ способом підстановки.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7x-3y=15, \\ 5x+6y=27 \end{cases}$ способом додавання.

Достатній рівень

1. 1) Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x+3y=6. \end{cases}$

   2) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=25, \\ 4x+3y=15 \end{cases}$ алгебраїчно (способом підстановки або додавання).

Розв'язати алгебраїчним способом систему рівнянь (2–3):

2. $\begin{cases} 2(x-1)+5(4-y)=30, \\ 3(3-y)-(5+x)=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{2-3y}{4}=2, \\ \dfrac{3x+1}{5}+\dfrac{3y+2}{4}=0. \end{cases}$

Розв'язати систему рівнянь:

1. **1)** $\begin{cases}(x+5)(y-2)=(x+2)(y-1),\\(x-4)(y+7)=(x-3)(y+4).\end{cases}$

2) $\begin{cases}4x+3y=3,\\5x-2y=17,\\2x+y=7.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6},\\\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-y=-3,\\y+z=13,\\x+z=10.\end{cases}$

ТЕМА 13. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Виклад теорії

За допомогою систем двох рівнянь, які зводяться до лінійних, розв'язують задачі на знаходження двох невідомих чисел чи двох невідомих чисельних значень заданих величин.

Основні кроки розв'язування задач за допомогою системи рівнянь:

- **позначити через x та y два невідомих шуканих числа або числові значення величини;**
- **виразити через x та y допоміжні невідомі;**
- **скласти на основі умови задачі чи залежностей між величинами вирази зі змінними x та y, числові значення яких є відомими;**
- **скласти два рівняння;**
- **розв'язати систему рівнянь, використовуючи правила рівносильних перетворень цілих рівнянь.**

Приклади.

Задача 1. Сума двох чисел дорівнює 68, а їх різниця — 12. Знайти ці числа.

Розв'язання

1) Позначаємо невідомі шукані числа через x та y: нехай x — перше (більше) число, а y — друге число.

2) Складаємо вирази зі змінними x та y, значення яких відомі: $x + y$ — сума чисел, $x - y$ — різниця чисел.

3) Складаємо за умовою задачі рівняння і об'єднуємо їх у систему:

$$\begin{cases} x + y = 68, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

4) Розв'язати систему зручно способом додавання.

Задача 2. За 4 год їзди автомобілем і 7 год потягом туристи подолали 640 км. Яка швидкість потяга, якщо вона на 5 км/год більша від швидкості автомобіля?

Розв'язання

1) Нехай x км/год — швидкість потяга, y км/год — швидкість автомобіля.

2) Тоді $(x - y)$ км/год — різниця швидкості потяга та автомобіля.

3) $7x$ км — відстань, яку проїхали туристи потягом; $4y$ км — відстань, яку проїхали туристи автомобілем; $(7x + 4y)$ км — загальна відстань, яку проїхали туристи потягом і автомобілем разом (значення задане в умові задачі).

4) Складаємо за умовою задачі рівняння і об'єднуємо їх у систему:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 640, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

5) Розв'язати систему зручно способом додавання, помноживши друге рівняння на 4.

Початкове вивчення теорії

Навчальні завдання

0.

1) Сума двох чисел дорівнює 10. Яке з рівнянь відповідає умові, якщо числа позначені через x та y?

а) $x - y = 10$; б) $y - x = 10$; в) $x + y = 10$; г) $xy = 10$.

2) Перше число більше на 20 від другого. Назвати рівняння, яке відповідає умові, якщо перше число позначене через x, а друге — через y:

а) $x + y = 20$; б) $y - x = 20$; в) $\frac{x}{y} = 20$; г) $x - y = 20$.

3) Різниця двох чисел дорівнює 7. Яке з рівнянь відповідає умові, якщо більше число позначене через x, а менше — через y?

а) $y - x = 7$; б) $x + y = 7$; в) $x - y = 7$; г) $\frac{x}{y} = 7$.

4) У першому зерносховищі на 15 т зерна менше, ніж у другому. Назвати рівняння, що відповідає умові, якщо у першому зерносховищі x т зерна, а в другому — y т зерна.

а) $x - y = 15$; б) $y - x = 15$; в) $\frac{x}{y} = 15$; г) $\frac{y}{x} = 20$.

5) Два автомобілі різної вантажності перевезли за перший день 82 т зерна, причому перший здійснив 5 рейсів, а другий — 7. Вантажність першого автомобіля позначена через x т, а другого — через y т. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $5x - 7y = 82$; б) $7x + 5y = 82$; в) $5x + 7y = 82$; г) $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 82$.

6) Кран з холодною водою відкрили на 10 хв, а кран з теплою — на 7 хв. Через деякий час у ванні стало 95 л води. Об'єм води, що витікає за хвилину з крана з холодною водою, позначений через x л, а

об'єм води, що витікає за хвилину з крана з теплою водою — через y л. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\frac{x}{10}+\frac{y}{7}=95$; б) $10x-7y=95$; в) $10x+7y=95$; г) $7x+10y=95$.

7) $\frac{1}{3}$ першого числа і $\frac{1}{5}$ другого числа дорівнюють 100. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо перше число позначене через x, а друге — через y?

а) $3x+5y=100$; б) $5x+3y=100$; в) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=100$; г) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=100$.

8) З одного пункту одночасно виїхали у протилежних напрямах автомобіль і велосипедист. Через 3 год відстань між ними становила 330 км. Яке з рівнянь відповідає умові задачі, якщо їхні швидкості позначені відповідно через x км/год і y км/год?

а) $3x-3y=330$; б) $3x+3y=330$; в) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=330$; г) $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=330$.

9) З пункту А в одному напрямі одночасно виїхали автобус зі швидкістю x км/год і велосипедист зі швидкістю y км/год (швидкість автобуса більша від швидкості велосипедиста). Через 2 год відстань між ними становила 40 км. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=40$; б) $2x+2y=40$; в) $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=40$; г) $2x-2y=40$.

10) Власна швидкість теплохода становить x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. За 4 год за течією і 3 год проти течії теплохід пройшов 220 км. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $4x+3y=220$; б) $4(x-y)+3(x+y)=220$;
в) $4(x+y)+3(x-y)=220$; г) $4(x-y)+3(x+y)=220$.

2. 1) Перше число на 20 більше від другого, а їх сума дорівнює 100. Яка із систем рівнянь відповідає умові задачі, якщо перше число позначене через x, а друге через y?

1) $\begin{cases} x-y=100, \\ x+y=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=20, \\ x+y=100; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x}{y}=20, \\ x+y=100. \end{cases}$

2) Сума двох чисел дорівнює 72, а їх різниця — 34. Яка із систем відповідає умові задачі, якщо більше число позначене через x, а менше — через y?

1) $\begin{cases} x+y=72, \\ y-x=34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=72, \\ x-y=34; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=72, \\ x-y=34. \end{cases}$

пройшли на 2 км більше, ніж за другий. Вказати систему рівнянь, яка відповідає умові задачі, якщо відстань, що пройшли туристи за перший день, позначене через x км, а за другий — через y км.

а) $\begin{cases} x-y=40, \\ x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=40, \\ \dfrac{x}{y}=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=40, \\ x-y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=40, \\ y-x=2. \end{cases}$

4) Майстер і його учень разом виготовили 48 деталей, причому учень виготовив на 12 деталей менше, ніж майстер. Кількість деталей, які виготовив майстер, позначене через x, а кількість деталей, які виготовив учень, — через y. Яка із систем відповідає умові задачі?

а) $\begin{cases} x+y=48, \\ y-x=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=48; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=48, \\ x-y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=48, \\ \dfrac{x}{y}=12. \end{cases}$

5) Два автомобілі різної вантажності вивезли за перший день 41 т зерна, причому перший автомобіль виконав 4 рейси, а другий — 3 рейси. Другого дня вивезли 67 т зерна, причому перший виконав 5 рейсів, а другий — 6 рейсів. Скільки тонн зерна перевозив кожний автомобіль за один рейс? Яка із систем рівнянь відповідає умові задачі, якщо вантажність першого автомобіля позначена через x т, а другого — через y т?

а) $\begin{cases} 3x+4y=41, \\ 5x+6y=67; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+3y=41, \\ 5x+6y=67; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+4+y+3=41, \\ x+5+y+6=67; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{y}{3}=41, \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=67. \end{cases}$

3. *Скласти систему рівнянь за умовою задачі.*

1) Знайти два числа, сума яких дорівнює 48, а їх різниця — 22 (менше число позначити через x).

2) Сума двох чисел дорівнює 50, а перше з них на 4 більше від другого. Знайти ці числа.

3) За два дні велосипедист проїхав 120 км, причому за перший день він проїхав на 10 км більше, ніж за другий. Яку відстань проїхав велосипедист за кожний день?

4) За два дні засіяли 120 га поля, причому за другий день засіяли на 18 га менше, ніж за перший. Яку площу поля засівали кожного дня?

день 38 т овочів, причому перший зробив 6 рейсів, а другий — 4 рейси. Другого дня вони вивезли разом 67 т овочів, причому перший зробив 9 рейсів, а другий — 8 рейсів. Скільки тонн овочів перевозив кожний автомобіль за один рейс?

Тренувальні вправи

№261.

Скласти систему рівнянь за умовою задачі.

1. 1) Сума двох чисел дорівнює 24, а їх різниця дорівнює 8. Знайти ці числа.

2) Одне з чисел на 26 більше від іншого, а їх сума дорівнює 68. Знайти ці числа.

3) Перше число на 8 менше від другого, а їх сума дорівнює 32. Знайти ці числа (позначити через x друге число).

4) Перше з чисел на 20 менше від другого, а їх сума дорівнює 100. Знайти ці числа.

2. 1) За два дні бригада виготовила 120 виробів, причому за перший день вона виготовила на 18 виробів більше, ніж за другий. Скільки виробів виготовляла бригада кожного дня?

2) На двох полицях розмістили 110 книг, причому на першій полиці книг було на 28 більше, ніж на другій. Скільки книг було на кожній полиці?

3) У гаражі було 56 легкових та вантажних автомобілів, причому легкових було на 12 менше, ніж вантажних. Скільки вантажних автомобілів було в гаражі?

4) У математичній і фізичній олімпіадах брало участь 48 учнів, причому у математичній на 12 учнів більше, ніж у фізичній. Скільки учнів брало участь у фізичній олімпіаді?

3. 1) Два автомати виготовляють деталі. Кількість деталей, виготовлених першим автоматом за 4 год, а другим — за 3 год, становить 410 штук, а кількість деталей, виготовлених першим автоматом за 5 год і другим за 7 год, становить 740 штук. Скільки деталей виготовляв за годину кожний автомат?

2) Велосипедист до зупинки їхав 2 год, а після зупинки — 3 год. Усього він проїхав 81 км. Швидкість його руху до зупинки була на 3 км/год більша, ніж швидкість руху після зупинки. З якою швидкістю рухався велосипедист до зупинки і після зупинки?

3) Якщо відкрити кран з теплою водою на 7 хв, а кран з холодною водою на 3 хв, то у ванні буде 54 л води. Якщо ж відкрити кран з теплою водою на 8 хв, а кран з холодною на 6 хв, то у ванні буде 72 л

крана?

4) Теплохід проходить за 5 год за течією річки і 3 год проти течії 290 км. Цей же теплохід за 6 год проти течії річки проходить на 20 км більше, ніж за 4 год за течією. Знайти швидкість теплохода проти течії річки і його швидкість за течією.

Завдання для самоперевірки

262. Варіант 1

Вкажіть, яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі.

1) Сума чисел x та y дорівнює 130:

а) $xy = 130$; б) $x - y = 130$; в) $\frac{x}{y} = 130$; г) $x + y = 130$.

2) Різниця чисел x та y дорівнює 17:

а) $x + y = 17$; б) $x - y = 17$; в) $\frac{x}{y} = 17$; г) $xy = 17$.

3) За перший день туристи пройшли x км, а за другий — y км, причому за перший день вони пройшли на 8 км більше, ніж за другий:

а) $x + y = 8$; б) $y - x = 8$; в) $\frac{x}{y} = 8$; г) $x - y = 8$.

Вкажіть, яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі.

1) Перше з чисел на 12 більше, ніж друге, а їх сума дорівнює 40. Якщо більше число позначити через x, а менше — через y, то...

а) $\begin{cases} x - y = 40, \\ x + y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 12, \\ x + y = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 12, \\ x + y = 40; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - x = 12, \\ x + y = 40. \end{cases}$

2) У класі 40 учнів, причому дівчат на 6 більше, ніж хлопців. Якщо позначити через x кількість дівчат, а кількість хлопців — через y, то...

а) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x = 6, \\ x + y = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 40, \\ x + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 40, \\ \frac{x}{y} = 6. \end{cases}$

він проїхав 170 км. Швидкість його руху до зупинки була на 10 км/год більша, ніж після зупинки. Якщо швидкість руху до зупинки позначена через x км/год, а після зупинки — через y км/год, то...

а) $\begin{cases} 4x+3y=170, \\ x-y=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+3y=170, \\ y-x=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+4y=170, \\ x-y=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+4y=170, \\ y-x=10. \end{cases}$

3. *Скласти систему рівнянь за умовою задачі.*
   1) Перше з чисел на 30 більше, ніж друге, а їх сума дорівнює 120 (позначити через x перше число).
   2) За два дні туристи пройшли 68 км, причому за перший день вони пройшли на 10 км більше, ніж за другий (позначити через x км відстань, яку пройшли туристи за перший день).
   3) Теплохід за 4 год за течією річки і 3 год проти течії пройшов 320 км, причому швидкість теплохода за течією на 4 км більша, ніж його швидкість проти течії (позначити через x км/год швидкість теплохода за течією річки).

№263. Варіант 2

1. *Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?*
   1) Число x на 12 більше від числа y:

      а) $x-y=12$; б) $y-x=12$; в) $\dfrac{x}{y}=12$; г) $xy=12$.
   2) Сума двох чисел x та y дорівнює 75:

      а) $x-y=75$; б) $y-x=75$; в) $x+y=75$; г) $xy=75$.
   3) За перший день туристи пройшли x км, а за другий — y км, причому за два дні вони пройшли 30 км:

      а) $x-y=30$; б) $x+y=30$; в) $xy=30$; г) $y-x=30$.
2. *Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі (1–3)?*
   1) Перше з чисел на 32 більше, ніж друге, а їх сума дорівнює 70. Якщо більше число позначити через x, а менше — через y, то...

      а) $\begin{cases} x-y=32, \\ x+y=70; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-x=32, \\ x+y=70; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=32, \\ x+y=70; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=70, \\ x+y=32. \end{cases}$

12 га поля менше, ніж за перший. Якщо позначити через x площу, яку зорали за перший день, а через y — площу, яку зорали за другий день, то...

а) $\begin{cases} x+y=120, \\ y-x=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=120, \\ \dfrac{x}{y}=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=120, \\ x-y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=120, \\ \dfrac{y}{x}=12. \end{cases}$

3) За хвилину з крана з теплою водою виливається на 2 л води більше, ніж з крана з холодною водою. Якщо відкрити кран з теплою водою на 12 хв, а кран з холодною водою на 10 хв, то у ванні буде 78 л води. Якщо об'єм води, який виливається з крана з теплою водою, позначений через x л, а з холодною — через y л, то...

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=12, \\ 12x+10y=78; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-x=12, \\ 12x+10y=78; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=2, \\ 10x+12y=78; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=2, \\ 12x+10y=78. \end{cases}$

Скласти систему рівнянь за умовою задачі.

1) Різниця двох чисел дорівнює 14, а їх сума 32 (позначити через x більше число).
2) У двох бригадах 120 робітників, причому в першій бригаді на 12 більше, ніж у другій (позначити через x кількість робітників у першій бригаді).
3) Вантажність першого автомобіля на 2 т більша, ніж вантажність другого. За 34 рейси перший автомобіль і за 7 рейсів другий автомобіль перевезли 63 т вантажу (позначити через x т вантажність першого автомобіля).

Відтворення і застосування теорії

Завдання на застосування

264. Варіант 1

Розв'язати задачі складанням систем рівнянь.

Середній рівень

1. Перше з чисел на 29 більше, ніж друге. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 53.

ше, ніж за другий. Яку площу поля орали кожного дня?

3. Якщо відкрити кран з холодною водою на 10 хв, а кран з теплою водою на 5 хв, то у ванні буде 85 л води. Якщо ж відкрити кран з теплою водою на 12 хв, а з холодною на 15 хв, то у ванні буде 231 л води. Скільки літрів води виливається за одну хвилину з кожного крана?

Достатній рівень

1. Знайти числа, сума яких дорівнює 45, а $\frac{1}{3}$ першого числа і $\frac{2}{3}$ другого разом дорівнюють 21.
2. У двох хлопчиків разом 360 марок. Якщо перший з них віддасть другому 80 марок, то в нього залишиться марок удвічі менше, ніж стане в другого. Скільки марок було в кожного хлопчика спочатку?
3. З одного пункту одночасно в протилежних напрямках виїхали велосипедист і мотоцикліст. Через 3 год відстань між ними дорівнювала 174 км. Якби вони їхали в одному напрямі, то через 2 год відстань між ними була б 14 км. Знайти швидкість велосипедиста і мотоцикліста.

Високий рівень

1. За 5 год за течією і 3 год проти течії теплохід пройшов 244 км, а за 2 год за течією і 30 хв проти течії він проходить 78 км. Знайти власну швидкість теплохода і швидкість течії.
2. У двох посудинах місткістю 30 л і 20 л є певна кількість води. Якщо більшу посудину заповнити водою з меншої посудини, то в меншій посудині залишиться $\frac{1}{4}$ початкової кількості води. Якщо ж долити посудину заповнити з більшої, то в більшій залишиться половина початкової кількості. Скільки літрів води було в кожній з посудин?
3. З пункту А до пункту В, відстань між якими 30 км, вийшов турист. Через 1,5 год з пункту А до пункту В виїхав велосипедист, який обігнав туриста через 0,5 год. Після прибуття в пункт В і 15 хв відпочинку велосипедист вирушає назад і зустрічає туриста через 1 год 24 хв після першої зустрічі. Знайти швидкість туриста і велосипедиста.

№265. Варіант 2

Середній рівень

1. Сума двох чисел дорівнює 50, а їх різниця дорівнює 14. Знайти ці числа.

тажних на 24 більше, ніж легкових. Скільки вантажних і скільки легкових автомобілів було в гаражі?

3. Два автомобілі різної вантажності вивезли за перший день 41 т зерна, причому перший автомобіль зробив 4 рейси, а другий — 3 рейси. Другого дня автомобілі вивезли 67 т зерна, причому перший зробив 5 рейсів, а другий — 6 рейсів. Скільки тонн зерна перевозив кожний автомобіль за один рейс?

Достатній рівень

1. Сума двох чисел дорівнює 80, а 10% одного числа і 20% другого разом дорівнюють 13. Знайти ці числа.
2. На двох полицях — 126 книг. Якщо з нижньої полиці перекласти на верхню 12 книг, то на ній залишиться книг удвічі менше, ніж на верхній. Скільки книг було на кожній полиці?
3. З пунктів А і В, відстань між якими 630 км, вирушили одночасно назустріч один одному два потяги, причому швидкість першого на 10 км/год більша від швидкості другого. Через 4 год потяги, ще не зустрівшись, перебували на відстані 30 км один від одного. Знайти швидкості кожного потяга.

Високий рівень

1. За 3 год за течією і 4 год проти течії теплохід пройшов 186 км. Знайти власну швидкість теплохода і швидкість течії, якщо за 2 год за течією і 3 год проти течії теплохід проходить 132 км.
2. У першій посудині 25 л води, а в другій — 45 л. Якщо заповнити першу посудину водою з другої посудини, то друга посудина буде наповнена тільки на одну третину. Якщо другу посудину заповнити водою з першої посудини, то перша буде наповнена тільки на одну п'яту. Визначити місткість кожної посудини.
3. З пункту А до пункту В виїхав велосипедист. Через дві години з пункту А виїхав мотоцикліст, який обігнав велосипедиста через дві години. Після прибуття в пункт В мотоцикліст, не зупиняючись, повернув назад і зустрів велосипедиста через 20 хв після першої зустрічі. Знайти швидкість велосипедиста, знаючи, що відстань від пункту А до пункту В дорівнює 150 км.

Середній рівень

1. Сума двох чисел дорівнює 48, а їх різниця дорівнює 12. Знайти ці числа.
2. За два дні робітник виготовив 48 деталей, причому за перший день на 2 деталі більше, ніж за другий. Скільки деталей виготовляв робітник кожного дня?
3. Два автомати виготовляють деталі. Кількість деталей, виготовлених першим автоматом за 3 год і другим за 2 год становить 230 штук, а кількість деталей, виготовлених першим за 6 год і другим за 5 год, становить 500 штук. Скільки деталей виготовляє кожен автомат за одну годину?

Достатній рівень

1. Різниця двох додатних чисел дорівнює 9. Знайти ці числа, якщо $\frac{1}{3}$ більшого числа і $\frac{2}{3}$ меншого числа разом складають 21.
2. У двох пачках разом було 120 зошитів. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій пачці стало в 4 рази менше, ніж у першій. Скільки зошитів було в кожній пачці спочатку?
3. З пунктів А і В, відстань між якими 240 км, вирушили одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо вони їхатимуть в одному напрямі, то автомобіль, який виїхав з пункту В, наздожене автомобіль, що виїхав з пункту А, через 12 год. Знайти швидкість кожного автомобіля.

Високий рівень

1. За 2 год за течією і 1 год 30 хв проти течії теплохід пройшов 195 км, а за 3 год за течією і 4 год проти течії він пройшов 380 км. Знайти власну швидкість теплохода і швидкість течії.
2. У першій посудині було 15 л води, а в другій — 20 л. Якщо заповнити першу посудину водою з другої посудини, то друга посудина залишиться наповнена на третину. Якщо другу посудину заповнити водою з першої посудини, то перша залишиться наповнена на п'яту частину. Визначити місткість кожної посудини.
3. З пункту А до пункту В, відстань між якими 120 км, виїхав велосипедист. Через 2 год з пункту А до пункту В виїхав мотоцикліст,

30-хвилинного відпочинку мотоцикліст вирушив назад і зустрів велосипедиста через 1 год 50 хв після першої зустрічі. Знайти швидкість велосипедиста і швидкість мотоцикліста.

№267. Варіант 4

Середній рівень

1. Одне з чисел на 19 менше, ніж друге. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 71.
2. За два дні туристи пройшли 40 км, причому за перший день вони пройшли на 2 км більше, ніж за другий. Скільки кілометрів пройшли туристи за перший день і скільки за другий день?
3. Якщо відкрити кран з теплою водою на 10 хв, а кран з холодною — на 5 хв, то у ванні буде 85 л води. Якщо ж відкрити кран з теплою водою на 12 хв, а з холодною — на 15 хв, то у ванні буде 231 л води. Скільки літрів води виливається за одну хвилину з кожного крану?

Достатній рівень

1. Різниця двох чисел дорівнює 10. Знайти ці числа, якщо 10% більшого числа і 30% меншого числа разом дорівнюють 25.
2. У двох бригадах 120 робітників. Після того, як з першої бригади перевели в другу 8 чоловік, в ній стало робітників удвічі більше, ніж у другій. Скільки робітників було в кожній бригаді спочатку?
3. З двох пунктів A і B, відстань між якими 120 км, виїхали одночасно мотоцикліст і велосипедист. Якщо вони рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони рухатимуться в одному напрямі, то мотоцикліст наздожене велосипедиста через 6 год. Яка швидкість кожного з них?

Високий рівень

1. За 5 год за течією і 2 год проти течії теплохід проходить 188 км, а за 3 год за течією і 4 год проти течії — 180 км. Знайти швидкість теплохода у стоячій воді та швидкість течії річки.
2. У двох посудинах місткістю 40 л і 20 л є певна кількість води. Якщо більшу посудину заповнити з меншої посудини, то в меншій посудині залишиться $\frac{1}{3}$ початкової кількості води. Якщо ж заповнити меншу посудину з більшої, то в більшій залишиться $\frac{2}{3}$ початкової кількості. Скільки літрів води було в кожній посудині?

3. З пункту А до пункту В вийшов турист. Через [illegible] у тому ж напрямі виїхав велосипедист, який обігнав туриста через 0,5 год. Після прибуття в пункт В велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрів туриста через 1 год 15 хв після першої зустрічі. Знайти швидкість туриста, знаючи, що відстань від пункту А до пункту В дорівнює 24 км.

Контроль навчальних досягнень учнів

Контрольна робота

№268. Варіант 1

Середній рівень

1. Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ y=4x. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} x-y=5, \\ x+4y=10. \end{cases}$

3. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Майстер за 3 год, а учень за 4 год разом виготовили 85 деталей. Майстер виготовив за годину на 5 деталей більше, ніж учень. Скільки деталей виготовляв за годину кожний з них?

Достатній рівень

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Різниця 60% одного числа і 30% другого дорівнює 11, а різниця 50% другого числа і 40% першого дорівнює 13. Знайти ці числа.

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} 4x-5y=3, \\ 7x-8y=6. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь способом додавання
$\begin{cases} 2(y+3)+13=3(x+1), \\ 5(y+2)+18=6(x-1). \end{cases}$

Високий рівень

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Із двох міст, відстань між якими 420 км, виїхали назустріч один одному два автомобілі. *Якщо автомобілі вирушать* одночасно, то вони

4 год 12 хв раніше, ніж другий, то зустріч відбудеться через 2 год після виїзду другого автомобіля. Знайти швидкість кожного автомобіля.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3. \end{cases}$

3. Побудувати графік рівняння $|x|-y=4$.

№269. Варіант 2

Середній рівень

1. Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3, \\ y=2x. \end{cases}$

2. **Розв'язати систему рівнянь способом підстановки** $\begin{cases} x-y=7, \\ x+5y=19. \end{cases}$

3. ***Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.***

   До магазину завезли 6 ящиків слив і 9 ящиків яблук загальною масою 132 кг. Маса слив в кожному ящику однакова і на 2 кг більша від маси яблук у кожному ящику. Скільки кілограмів слив міститься в одному ящику і скільки кілограмів яблук?

Достатній рівень

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*

   Різниця 70% першого числа і 50% другого числа дорівнює 7, а різниця 30% першого числа і 10% другого дорівнює 11. Знайти ці числа.

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} -2x+3y=19, \\ 3x+4y=14. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь способом додавання

   $$\begin{cases} 4(y-3)-3(y-6)=11, \\ 2(x+5)-3(3-y)=8. \end{cases}$$

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Із двох міст, відстань між якими 380 км, виїхали назустріч один одному два поїзди. Якщо поїзди вирушать одночасно, то вони зустрінуться через 4 год. Якщо перший поїзд вирушить на 1 год 54 хв раніше, ніж другий, то зустріч відбудеться через 3 год після відправлення другого поїзда. Знайти швидкість кожного поїзда.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 9. \end{cases}$

3. Побудувати графік рівняння $|x| + y = 4$.

№270. Варіант 3

Середній рівень

1. Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} y = -3x, \\ x + y = 2. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} x + y = 6, \\ x + 4y = 18. \end{cases}$

3. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
За 3 год їзди поїздом і 2 год — автомобілем туристи проїхали 320 км. Знайти швидкість поїзда і швидкість автомобіля, якщо швидкість автомобіля на 10 км/год більша від швидкості поїзда.

Достатній рівень

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Половина першого числа на 25 більша від $\frac{1}{4}$ другого числа, а $\frac{1}{4}$ першого числа дорівнює $\frac{1}{3}$ другого числа. Знайти ці числа.

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} 5x - 4y = -14, \\ 2x - 5y = -9. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь способом додавання
$\begin{cases} 7(y+2) + 9 = 2(1-x), \\ 5(4+y) + 13 = 3(6-x). \end{cases}$

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*

На одному складі вугілля на 800 т більше, ніж на другому. Після того як з першого забрали 60% вугілля, а з другого 50%, на першому залишилося на 200 т більше, ніж на другому. Скільки вугілля було на кожному складі?

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6, \\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=2. \end{cases}$

3. Побудувати графік рівняння $x+|y|=2$.

№271. Варіант 4

Середній рівень

1. Розв'язати графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ y=-2x. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} x+y=5, \\ x+7y=23. \end{cases}$

3. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*

За 5 год їзди автомобілем і 6 год їзди поїздом туристи проїхали 850 км. Яка швидкість поїзда, якщо вона на 5 км/год менша від швидкості автомобіля?

Достатній рівень

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*

$\frac{1}{5}$ частина першого числа на 3 менша від $\frac{1}{3}$ другого числа, а $\frac{1}{3}$ першого числа на 11 більша від $\frac{1}{5}$ другого числа. Знайти ці числа.

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки $\begin{cases} 3x+4y=-6, \\ 2x-5y=19. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь способом додавання

$$\begin{cases} 7(y+2)+14=2(x-3), \\ 5(y-1)-9=6(x+2). \end{cases}$$

1. *Розв'язати задачу складанням системи рівнянь.*
Дві бригади робітників повинні були за планом виготовити прот гом місяця 680 деталей. Перша бригада перевиконала завдання 20%, а друга — на 15%, тому обидві бригади виготовили понад пл 118 деталей. Скільки деталей повинна була виконати за планом к жна бригада протягом місяця?

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 9. \end{cases}$

3. Побудувати графік рівняння $x - |y| = 2$.

Капіносов Анатолій Миколайович

АЛГЕБРА

7 клас

Систематичний курс

Редактор *Сергій Мартинюк*
Літературний редактор *Людмила Олійник*
Обкладинка *Світлани Бедної*

Підписано до друку 27.08.2004. Формат 60×84/16. Папір газетний. Гарнітура Times.
Друк офсетний. 16,25 ум. др. арк., 13,56 обл.-вид. арк. Тираж 2 000.
Замовлення № 04-160.
Редакція газети «Підручники і посібники». Свідоцтво ТР №189 від 10. 01. 96.
46010, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел. 8-(0352)-43-15-15, 43-10-21, 43-10-31.
Електронна пошта PP@PP.UTEL.NET.UA