УДК 550.831

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

Р.В. Миненко[1], П.А. Миненко[1], Ю.П. Мечников[2]

[1]Криворожский национальный университет, просп. Гагарина, 54, Кривой Рог 50086, Украина, e-mail: maestozo.1_pavel @ mail.ru

[2]Криворожская геофизическая партия, ул. Геологическая, 2, Кривой Рог 50001, Украина

Предложен конкретный алгоритм реализации аналитического метода интерпретации одиночных локальных аномалий высокой интенсивности, по идее профессора А.А. Юнькова, на множестве точек, принадлежащих изолиниям эквипотенциальных поверхностей гравитационного потенциала вокруг трехосного эллипсоида. Для этого тела решения прямой задачи, выражаемого элементарными функциями, не существует. На основе интеграла Пуассона получены формулы для пересчета измеренного магнитного поля и поля силы тяжести в карты потенциалов на вышележащих плоскостях.

Ключевые слова: гравиметрия, магнитометрия, обратная задача, аналитический метод, трехосный эллипсоид, эквипотенциальная поверхность, критерий оптимизации, карта потенциала поля.

Введение. С самого начала развития гравиметрии и магнитометрии аналитические методы решения обратных задач (ОЗ) развивались только в теоретическом плане, в основном, для понимания смысла прямых и обратных задач при обучении студентов [1, 3]. Практическое применение этих методов наталкивалось на трудности, связанные с погрешностью измерения поля, отсутствием в природе аномальных тел правильной геометрической формы и строгим постоянством физического параметра внутри тел или хотя бы постоянством его линейного изменения в каком-то направлении [4, 10, 11]. Кроме того, отсутствие вычислительной техники вплоть до 1990-х годов вообще делало невозможным даже решение ОЗ для шара по реально измеренному полю, осложненному во всех точках множеством погрешностей различной интенсивности. Поэтому все методы решения ОЗ сводились к ручному методу подбора с помощью различных палеток [1, 3, 11], который также был трудоёмким и, более того, слабо обеспечен методической базой, для создания которой нужно было иметь множество высокоточных решений прямых и обратных задач на модельных примерах. Даже такое понятие, как подбор аномалии в пределах допустимой точности, было слишком неопределенным, приводило к значительным ошибкам в результатах интерпретации, а для больших глубин было лишено всякого смысла [4, 6, 8, 9, 12].

Любые аналитические методы давали весьма приближённые результаты решения ОЗ, а чаще были некорректные, поскольку глубина до нижней границы аномальных тел и их аномальная плотность связаны между собой практически точной обратно пропорциональной зависимостью, которая ещё больше усложнялась наличием постоянного или линейного фона. По аналогичным причинам слабо развивались и сеточные методы решения ОЗ, особенно для рудной геофизики [4, 8, 9]. Поскольку реальный прогресс в создании пригодного для геофизики программного обеспечения компьютерной техники произошел примерно между 2005 и 2010 гг., теоретические методы решения ОЗ по реально измеренному полю, разработанные на уровне фундаментальных достижений А.Н. Тихонова, М.А. Лаврентьева, В.Н. Страхова, Е.Г. Булаха, долгое время применялись для слишком ограниченных моделей, с малым количеством элементов с неизвестными параметрами [1, 3, 8]. Некоторые сдвиги, достигнутые другими учёными, были получены для узкого, специально выделенного класса единственности решения ОЗ в конкретных условиях [2, 7]. Казалось бы, что ситуация продвинется в связи с открытием принципа равенства площадей карты измеренного поля и проекции сеточной модели на неё [4, 5]. Однако в рудной геофизике наличие в геологическом разрезе отдельных аномальных тел с очень высокой или низкой аномальной плотностью (интенсивностью намагниченности) приводит к большим ошибкам в решении ОЗ по всему участку исследований, по всей сеточной модели, по всей карте интерпретируемого поля. И в то же время при слабой дифференциации гравитационного потенциала или при задании начальных условий по аномальной плотности или интенсивности намагниченности, близких к реальным, решение является корректным, точным и очень часто геологически или физически содержательным [6].

Для выполнения отмеченных требований нужно довольно точно определить физические и геометрические параметры одиночных высокоаномальных тел в геологическом разрезе, для чего и должны быть использованы современные методы аналитического решения ОЗ, учитывающие статистические особенности измеренного поля и контуров аномальных тел. Такие попытки предпринимались и раньше, но они ограничивались минимизацией квадратичного функционала с последующим решением системы громоздких нелинейных уравнений, для чего не хватало вычислительных средств [1, 3]. Методы решения уравнений путём разложения функций в усечённые ряды или использования решений прямых задач для тел простейшей геометрической формы (множество шаров, стержней) реального улучшения решений не давали или приводили к новым трудностям. В этих условиях необходимо иметь надежные методы интерпретации одиночных локальных аномалий высокой интенсивности, поскольку неправильное определение плотности и намагниченности крупных тел вносит большие ошибки в определение параметров отдельных аномальных тел и общей структуры всего участка исследований, выполняемых по сеточно-блоковой модели современными оптимизированными фильтрационными методами решения ОЗ [4, 6, 12].

Цель настоящей статьи – разработка современных методов аналитического решения ОЗ гравиметрии и магнитометрии при наличии больших погрешностей в измеренном поле и в заполнении интерпретационных моделей аномальными массами, а также реализация их линейными оптимизационными алгоритмами.

Изложение основного материала. Рассмотрим решение ОЗ гравиметрии для трёхосного эллипсоида с полуосями (a, b, c) и с постоянной плотностью внутри него. Решения прямой задачи для этого тела в элементарных функциях не существует. Однако из теории гравитационного потенциала известно, что его эквипотенциальные поверхности [10, 11]

$$V(x_j, y_j, z_j, a, b, c) = \text{const}$$

во внешнем пространстве с координатами (x_j, y_j, z_j) описываются уравнением софокусного с ним эллипсоида с параметром λ_k и началом координат на пересечении его осей:

$$Ax_j^2 + By_j^2 + Cz_j^2 = 1, \qquad (1)$$

где $A = 1/(a^2 + \lambda_k)$; $B = 1/(b^2 + \lambda_k)$; $C = 1/(c^2 + \lambda_k)$; $z_j = H_j + z_0 = H_j + h_0 + c$; H_j – высота пересчета поля; z_0 – глубина до центра эллипсоида; $h_0 = z_0 - c$ – глубина до вершины эллипсоида в точке (0, 0, c).

Это дает надежду на то, что по координатам точек, лежащих на пространственных изолиниях гравитационного потенциала, можно определить полуоси эллипсоида, а возможно, и глубину до его центра тяжести. Для этого нужно подставить в уравнение (1) координаты точек, снятых с одной изолинии потенциала, и решить полученную систему уравнений. Однако возникают трудности. Поскольку поле измерено в каждой точке с погрешностями, а форма эллипсоида заполнена аномальными массами не совсем точно и с разной плотностью или намагниченностью, равенство (1) для эквипотенциальной поверхности во многих точках не соблюдается. Поэтому составим критерий оптимизации (КО) суммированием (1) по всем точкам (x_j, y_j, z_j; $j = \overline{1,N}$), лежащим на одной изолинии:

$$F_1 = \sum_{j=1}^{N} (Ax_j^2 + By_j^2 + Cz_j^2 - 1)^2 = \min. \qquad (2)$$

По данному критерию можно определить только величины A, B и $C_1 = Cz_j^2 - 1$, но выделить из них полуоси и глубину до центра эллипсоида невозможно. Если известными интегральными методами [1] определить глубину до центра притяжения тела, то тогда можно вычислить по критерию (1) величины A, B и C, из которых также полуоси не выделяются.

В то же время если известна глубина h_0 до верхней кромки аномального тела, т. е. до вершины эллипсоида в точке (0, 0, c), а все точки (x_j, y_j, z_j) лежат на одной изолинии, но не в одной горизонтальной плоскости, можно определить параметр λ_k и все три полуоси эллипсоида. В связи с этим перепишем КО (2) при известном h_0 в другом виде:

$$F_2 = \\ = \sum_{j=1}^{N} (A_2 x_j^2 + B_2 y_j^2 + 2(H_j + h_0)c - \lambda_k + (H_j + h_0)^2)^2 = \\ = \min, \qquad (3)$$

где $A_2 = (c^2 + \lambda_k)/(a^2 + \lambda_k)$; $B_2 = (c^2 + \lambda_k)/(b^2 + \lambda_k)$.

Возьмем производные по A_2, B_2, λ_k и c, приравняем их к нулю и решим полученную систему 4 уравнений относительно A_2, B_2, λ_k и c, а затем из A_2 и B_2 вычислим полуоси a и b. Таким образом, глубина до нижней границы аномального тела $H = h_0 + 2c$ и его горизонтальные размеры $2a$ и $2b$ определяются не с помощью формул решения прямой задачи (которая для трехосного эллипсоида вообще не выражается элементарными функциями), а по координатам точек, лежащих на эквипотенциальных поверхностях. Интегральным методом [1] вычислим аномальную массу тела, из которой получим аномальную плотность, а также глубину до центра притяжения тела z_c и сравним ее с вычисленной по изолиниям глубиной $z_0 = h_0 + c$. По результатам этого сравнения можно откорректировать выбор постоянного фона аномалии и перейти к получению более точного решения ОЗ. Впервые идею использования изолиний гравитационного потенциала для решения ОЗ гравиметрии над трехосным эллипсоидом предложил на своих лекциях профессор Днепропетровского горного института А.А. Юньков в 1952 г. и рекомендовал его в течение многих последующих лет. Однако реализация этого метода не могла быть осуществлена вплоть до настоящего времени, поскольку нужны были другие подходы, отличающиеся от единственного, применявшегося в те годы метода подбора по критерию невязки поля. Значительно позже А.И. Кобрунов, а затем и А.П. Петровский впервые показали, что можно использовать различные, и даже совмещенные, критерии оптимизации решения ОЗ [2, 7]. Приведенные выше методы (2), (3) показывают, что оптимизировать решение ОЗ можно по критерию полноты заполнения объема эллипсоида аномальными массами. Долгие годы на метод А.А. Юнькова не обращали внимания еще и потому, что трансформации измеренных полей были направлены на вычисление высших производных измеренного поля, а потенциал, как более суммирующее массы поле, геофизики обходили стороной.

Перейдем ко второй части вопроса – методам вычисления потенциала на разных высотах. Запишем известный интеграл Пуассона для пересчета любого поля $U(x, y, z = 0)$ с одного высотного уровня на другой [1]

$$U(x_j, y_j, z=-h)\frac{h}{2\pi}\times \\ \times\iint U(x,y,z=0)\frac{dxdy}{((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+h^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Положим

$$U(x, y, z = 0) = V_z(x, y, z = 0)$$

и

$$U(x, y, z = -h) = V_z(x, y, z = -h).$$

Проинтегрировав (4) по h, получим слева гравитационный потенциал на высоте $z = -h$, а справа – интеграл от дроби при постоянном поле на нулевом уровне:

$$V(x_j, y_j, z=-h)\frac{1}{2\pi}\times \\ \times\iint V_z(x,y,z=0)\frac{dxdy}{((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+h^2)^{1/2}}. \tag{5}$$

Вычисление карты или вертикального разреза поля по формуле (5) трудностей не представляет. Сложнее обстоит дело с получением аналогичного выражения по магнитному полю $V_{zz}(x, y, z = 0)$. Здесь нужно левую и правую части уравнения (4) интегрировать по h дважды. После первого интегрирования получим интеграл для вычисления на высоте h карты магнитного потенциала:

$$V_z(x_j, y_j, z=-h)= \\ =\frac{1}{2\pi}\iint V_{zz}(x,y,z=0)\frac{dxdy}{((x-x_j)^2+(y-y_j)^2+h^2)^{1/2}}.$$

Однако после второго интегрирования получим расходящийся интеграл. Поэтому интеграл нужно брать в конечных пределах от $-H$ до $-h$:

$$V(x_j, y_j, z=-h)-V(x_j, y_j, z=-H)= \\ =\frac{1}{2\pi}\iint V_{zz}(x,y,z=0)\times \\ \times\ln\left(\frac{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+H^2)^{1/2}+H}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+h^2)^{1/2}+h}\right)dxdy.$$

Методика реализации метода. По формуле (5) вычисляют гравитационный потенциал на разных высотных уровнях, затем в любой вертикальной плоскости нужно построить карты изолиний потенциала. После этого довольно точно в системе MatLab с одной изолинии можно снять координаты любого количества точек и, оптимизировав критерий (3), вычислить полуоси эллипсоида и глубину до его центра притяжения, если известна глубина до верхней кромки аномального тела. Интегральным методом можно вычислить аномальную массу тела, а по уже известным полуосям и его аномальную плотность.

Обсуждение результатов. Преимущество данного метода состоит в том, что на определение размеров полуосей влияние постоянного фона почти не сказывается, а определяемая глубина до нижней границы призмы или стержня существенно зависит от уровня измеренного поля. Что же касается формы тела, то в природе не бывает ни полностью заполненных аномальными массами вертикальных призм, ни вертикально вытянутых эллипсоидов. Для тех и других тел, в разных их частях, наблюдается как недозаполнение формы, так и выступы лишних масс за границы тела. Оптимизационным алгоритмом при решении ОЗ устанавливаются наиболее удовлетворяющие критерию оптимизации размеры тела и средние физические параметры, если они непостоянны по объему тела.

Заключение. Исследованы вопросы применения аналитических методов решения ОЗ и их недостатки. Определена необходимость их применения в рудной геофизике как вспомогательных для решения ОЗ на больших моделях сеточными оптимизированными методами. В качестве перспективных выделены методы с использованием координат разновысотных точек, расположенных на замкнутых изолиниях эквипотенциальных поверхностей, рассчитанного по полю гравитационного потенциала и соответствующей функции, вычисленной по магнитному полю. В перспективе необходимо изучить особенности метода для выбора наилучшей методики интерпретации аномалий, обеспечивающей устойчивое решение и сходимость с реальными возмущающими телами по размерам и физическим свойствам.

1. *Гравиразведка.* Справочник геофизика / ред. Е.А. Мудрецова. – М.: Недра, 1968. – 512 с.
2. *Кобрунов А.И.* Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред: учебное пособие / А.И. Кобрунов. – К.: МВССО УССР УМЖ ВО, 1989. – 100 с.
3. *Логачев А.А.* Магниторазведка: учебник, изд. 5-е, доп. и перераб. / А.А. Логачев. – Л.: ЛО "Недра", 1979. – 351 с.
4. *Миненко П.А.* Исследование кристаллического фундамента линейно-нелинейными методами магнитометрии и гравиметрии // Геоінформатика. – № 4. – 2006. – С. 41–45.
5. *Миненко П.А.* Упрощенные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии фильтрационными методами / П.А. Миненко, Р.В. Миненко // Геоінформатика. – 2012. – № 2(42). – С. 27–29.
6. *Міненко Р.В.* Обернені лінійні задачі гравіметрії та магнітометрії з уточнюючими ітераційними поправками вищого порядку / Р.В. Міненко, П.О. Міненко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2014. – Вип. 1 (64). – С. 78-82.
7. *Петровский А.П.* Математические модели и информационные технологии интегральной интерпретации комплекса геолого-геофизических данных: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22. – К., 2006. – 364 с.
8. *Старостенко В.И.* Сейсмогравитационный метод: принципы, алгоритмы, результаты / В.И. Старостенко, В.Г. Козленко, А.С. Костюкевич // Вісник АН УРСР. – 1986. – № 12. – С. 28–42.
9. *Страхов В.Н.* Об устойчивых методах решения линейных задач геофизики. II. Основные алгоритмы / В.Н. Страхов // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1990. – № 8. – С. 37–64.
10. *Юньков А.А.* Прямая и обратная задача потенциала притяжения эллиптического параболоида, наклоненного на угол к плоскости горизонта / А.А. Юньков, Н.Л. Афанасьев, Н.А. Федорова // Известия ДГИ. – 1952. – Т. 22. – С. 28–35.
11. *Юньков А.А.* Интерпретация магнитных и гравитационных аномалий над куполообразными структурами. – М.: Госгеолтехиздат, 1962. – 30 с.
12. *Юньков А.А.* Изучение глубинного строения Криворожской структуры по геофизическим данным / А.А. Юньков, В.Б. Наугольников, М.В. Копнин. – М.: Недра, 1973. – 136 с.

Поступила в редакцию 15.08.2015 г.

СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ГРАВІМЕТРІЇ ТА МАГНІТОМЕТРІЇ

Р.В. Міненко[1], П.О. Міненко[1], Ю.П. Мечніков[2]

[1]Криворізький національний університет, просп. Гагаріна, 54, Кривий Ріг 50086, Україна, e-mail: maestozo.1_pavel@mail.ru

[2]Криворізька геофізична партія, вул. Геологічна, 2, Кривий Ріг 50001, Україна

Запропоновано конкретний алгоритм реалізації аналітичного методу інтерпретації одиноких локальних аномалій високої інтенсивності, за ідеєю професора А.А. Юнькова, на множині точок, що належать до ізоліній еквіпотенціальних поверхонь гравітаційного потенціалу навколо тривісного еліпсоїда. Для цього тіла розв'язку прямої задачі, що виражається елементарними функціями, не існує. За допомогою інтеграла Пуассона отримано формули для перерахунку вимірюваного магнітного поля і поля сили тяжіння в карти потенціалів на площинах у верхньому півпросторі.

Ключові слова: гравіметрія, магнітометрія, обернена задача, аналітичний метод, тривісний еліпсоїд, еквіпотенціальна поверхня, критерій оптимізації, карта потенціалу поля.

THE MODERN ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY

R.V. Minenko[1], P.A. Minenko[1], Yu.P. Mechnikov[2]

[1]Krivoy Rog National University, 54 Gagarina Ave., Krivoy Rog 50086,Ukraine, e-mail: maestozo.1_pavel@mail.ru

[2]Krivoy Rog Geophysical Department, 2 Geological Str., Krivoy Rog 50001, Ukraine

The **purpose** of these article is to develop modern analytical methods to solve inverse problems of gravimetry and magnetometry and to implement them using linear optimization algorithms in the presence of large measurement errors and incorrect filling of the model by abnormal masses.

Design/metodolody/approach. Practical application of analytical methods in solving inverse problems has encountered difficulties since the very beginning of the development of gravimetry and magnetometry. They are connected with the field measurement error and the absence of naturally occurring anomalous bodies of regular geometric shape, as well as the lack of constancy of the physical parameters in abnormal bodies. Moreover, the lack of computer equipment up to the 90s of the last century made it practically impossible to solve the inverse problem, even for bodies of a simple form. In actual measurements of a field aggravated at all points by errors of varying intensity, the obtained solutions were often incorrect. Since depth to the lower boundary of the anomalous body and its abnormal density (magnetization) are always interrelated based on almost exact inverse proportion, why choose the right solution was not possible. The problem is further complicated by the presence of a constant or linear anomaly background. For the same reasons, the grid method, to solve inverse problems was poorly developed, particularly for ore geophysics. The presence in the geological section of the bodies with very high or low density or magnetization leads to large errors in solving the inverse problem with the help of mesh models over the entire map of the measured field.

Findings. To determine the actual structure based on solutions of inverse problems modern methods for an optimized grid, it is necessary to create reliable methods, in particular, analytical methods to interpret individual local anomalies with high intensity. We offer a concrete realization of the analytical method algorithm for a set of points belonging to the contour lines of the equipotential surfaces of the triaxial ellipsoid gravitational potential. The inverse problem is solved without the algorithm of the direct problem as it is not described by elementary functions. On the basis of the Poisson integral, we obtain the formulas for converting the measured magnetic field and gravitational field to the maps of potentials on the overlying levels. We can now calculate the gravitational potential at different height levels. Then, in any vertical plane it is necessary to construct a map of potentials contours; and after that to take , on each loop, coordinates of any set of points (no less than 10). Further, for each set of points, using an optimization criterion, three parameters can be calculated, which have a triaxial ellipsoid. If we know the depth of the upper boundary of the body we can calculate the half-axes length. Application problems of analytical methods for the solution of inverse problems have been studied. Their shortcomings and relevance to ore geophysics have been defined.

Practical value/implications. Methods are used as an auxiliary tool to solve inverse problems for large models optimized the mesh methods. We regard as promising the method using the coordinates of points at different elevations of one isoline. These points are located on a closed contour of the equipotential surface of the gravitational potential, or in a closed contour of the equipotential surface of the similar function calculated for a magnetic field. Further investigation is recommended to study the characteristics of the analytical method to determine the best ways to interpret anomalies. This method provides a stable solving of the inverse problem and a good agreement of results on the size and physical properties of real geological bodies.

Keywords: gravimetry, magnetometry, inverse problem, an analytical method, triaxial ellipsoid, equipotential surface, optimization criterion, gravitational potential.

References:

1. Gravirazvedka. Spravochnik geofizika. Ed. by E.A. Mudrecova. Moscow, Nedra, 1968, 512 p. (in Russian).
2. Kobrunov A.I. Teorija interpretacii dannyh gravimetrii dlja slozhnopostroennyh sred: uchebnoe posobie. Kiev, MVSSO Ukr.SSR UMZh VO, 1989, 100 p. (in Russian).
3. Logachev A.A. Magnitorazvedka. Leningrad, Nedra, 1979, 351 p. (in Russian).
4. Minenko P.A. Issledovanie kristallicheskogo fundamenta linejno-nelinejnymi metodami magnitometrii i gravimetrii. *Geoinformatika*, no. 4, 2006, pp. 41-45 (in Russian).
5. Minenko P.A., Minenko R.V. Simplified algorithms of the inverse solution by gravity filtrational methods. *Geoinformatika*, 2012, no. 2, pp. 27-29 (in Russian).
6. Minenko R.V., Minenko P.O. Inverse problems with iterative high-order corrections in gravity measurements and magnetometry. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Heolohiia*, 2014, iss. 1, pp. 78-82 (in Ukrainian).
7. Petrovskij A.P. Matematicheskie modeli i informacionnye tehnologii integral'noj interpretacii kompleksa geologo-geofizicheskih dannyh: dis. ... doktora fiz.-mat. nauk: 04.00.22. Kiev, 2006, 364 p. (in Russian).
8. Starostenko V.I., Kozlenko V.G., Kostjukevich A.S. Sejsmogravitacionnyj metod: principy, algoritmy, rezul'taty. *Visnik AN URSR*, 1986, no. 12, pp. 28-42 (in Russian).
9. Strahov V.N. Ob ustojchivyh metodah reshenija linejnyh zadach geofiziki. II. Osnovnye algoritmy. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid Earth*, 1990, no. 8, pp. 37-64 (in Russian).
10. Jun'kov A.A., Afanas'ev N.L., Fedorova N.A. Prjamaja i obratnaja zadacha potenciala pritjazhenija jellipticheskogo paraboloida, naklonennogo na ugol k ploskosti gorizonta. *Izvestija DGI*, 1952, vol. 22, pp. 28-35 (in Russian).
11. Jun'kov A.A. Interpretacija magnitnyh i gravitacionnyh anomalij nad kupoloobraznymi strukturami. Moscow, Gosgeoltehizdat, 1962, 30 p. (in Russian).
12. Jun'kov A.A., Naugol'nikov V.B., Kopnin M.V. Izuchenie glubinnogo stroenija Krivorozhskoj struktury po geofizicheskim dannym. Moscow, Nedra, 1973, 136 p. (in Russian).

Received 15/08/2015