МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРІЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ДВНЗ «КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНУВЕРСИТЕТ»

О.А. Коновал

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОБГРУНТУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОРЕНТЦА

Кривий Ріг-2014

УДК 530.121 (075.8)
ББК 22.313 (Я73)
К64

Рецензенти:

Величко С.П. – доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та методики її викладання КДПУ імені Володимира Винниченка;

Міненко П.О. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інформатики та прикладної математики КПІ ДВНЗ «КНУ»;

Шарко В.Д. - доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та методики її викладання Херсонського педагогічного університету.

Коновал О.А.

К64

Науково-методичний аналіз методів обґрунтування перетворень Лорентца : навчальний посібник для самостійної роботи студентів / Олександр Андрійович Коновал. - Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. – 137 с.

Зроблено огляд існуючих у науково-методичній літературі методів обґрунтування перетворень Лорентца. Порівняльний аналіз цих методів визначив їх переваги та недоліки. Ураховуючи результати порівняльного аналізу методів, запропоновано при вивченні спеціальної теорії відносності у вищому навчальному закладі й у загальноосвітній школі використовувати той чи інший метод обґрунтування перетворень Лорентца.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів, учителів фізики, аспірантів, викладачів вищих навчальних закладів, учнів загальноосвітніх шкіл з поглибленим вивченням фізики.

Рекомендовано на засіданні кафедри фізики та методики її навчання
(*Протокол № 7 від 20 лютого 2014р.*)

Рекомендовано радою фізико-математичного
факультету ДВНЗ «КНУ» КПІ
(*Протокол № 6 від 27 лютого 2014р.*)

УДК 530.121 (075.8)
ББК 22.313 (Я73)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Назва «Теорія відносності» виникла з найменування основного принципу (постулату), покладеного А. Пуанкаре й А. Ейнштейном в основу всіх теоретичних побудов нової теорії простору і часу.

Змістом теорії відносності є **фізична теорія простору і часу, що враховує існуючий між ними взаємозв'язок геометричного характеру.**

Назва ж «принцип відносності» або «постулат відносності» виникла як **заперечення** уявлення про абсолютну нерухому систему відліку, пов'язану з нерухомим ефіром, що упроваджувався для пояснення оптичних і електродинамічних явищ.

Важливо, що до початку двадцятого століття у фізиків, які будували теорію оптичних і електромагнітних явищ по аналогії з теорією пружності, склалося помилкове уявлення про необхідність існування абсолютної нерухомої системи відліку, пов'язаної з електромагнітним ефіром. Зародилося, таким чином, уявлення про абсолютний рух щодо системи, пов'язаної з ефіром, уявлення, що суперечить раннім переконанням класичної механіки (принцип відносності Галілея).

Досліди Майкельсона й інших фізиків спростували цю теорію «нерухомого ефіру» і дали підставу для формулювання протилежного твердження, яке і одержало назву «принципу відносності». Таким чином ця назва пропонується й обґрунтовується в перших роботах А. Пуанкаре і А. Ейнштейна.

Зокрема, А. Ейнштейн пише: «..невдалі спроби виявити рух Землі щодо «світлоносного середовища» ведуть до припущення, що не тільки в механіці, але і в електродинаміці ніякі властивості явищ не відповідають поняттю абсолютного спокою, і навіть більш того, - до припущення, що для всіх координатних систем, для яких справедливі рівняння механіки, мають місце ті ж самі електродинамічні і оптичні закони, як це вже доведено для величин першого порядку. Ми маємо намір це положення (зміст якого надалі називатиметься «принципом відносності») перетворити на передумову...» [1, с. 7].

Слушно звернути увагу і на думку А. Пуанкаре: «Ця неможливість показати дослідним шляхом абсолютний рух Землі є закон природи; ми приходимо до того, щоб прийняти цей закон, який ми назвемо **постулатом відносності**, і приймемо його без обмовок» [2, с. 118].

Але відомий радянський теоретик Л. І. Мандельштам у своїх лекціях з теорії відносності роз'яснював: «Назва «принцип відносності» - одне з найневдаліших. Стверджується незалежність явищ від неприскореного руху замкнутої системи. Те, що це називається «принципом відносності», вводить, як побачимо потім, в оману багатьох вчених» [4, с. 160].

На невдалу назву вказував і один з творців теорії відносності, що подав її суть й зміст в чотиривимірній геометричній формі, - Герман Міньковський.

1908 року він стверджував: «..термін «постулат відносності» для вимоги інваріантності по відношенню до групи G_c, здається мені дуже блідим. Оскільки сенс постулату зводиться до того, що в явищах нам дається тільки чотиривимірний у просторі та часі світ, і що проекції цього світу на простір і на час можуть бути узяті дещо довільно, то мені б хотілося цьому твердженню дати назву «**постулат абсолютного світу»** (або, коротко, світовий постулат)» [3, с. 173]. Таким чином, ми бачимо, що назви «принцип відносності» й «теорія відносності» не відображають дійсного змісту теорії, що має назву «спеціальна теорія відносності».

Спеціальна теорія відносності (СТВ) має суттєве значення для формування особистості.

СТВ є фундаментальною (загально фізичною) релятивістською концепцію простору-часу, яка разом з законами та принципами квантової теорії лежить в основі сучасної фізичної картини світу. Релятивістські ідеї пронизують всі розділи фізики, а, зокрема, власне електродинаміка є релятивістською теорією. Значущість філософсько-світоглядного потенціалу СТВ, її освітня та виховна функція визначають її загальнолюдську цінність як невід'ємного елементу культури не тільки фізика за фахом, але й сучасної освіченої людини.

Формування наукового світогляду та фізичного стилю мислення учнів і студентів, уявлень про простір-час та його властивості, які адекватні фізичній реальності неможливе без вивчення основних положень СТВ. В той же час важко з достатньою повнотою та глибиною пояснити суть СТВ не спираючись на перетворення Лорентца (ПЛ) **(Lorentz)**.

Оскільки перетворення Лорентца є математичним апаратом СТВ, а в діючих посібниках з теоретичної фізики в розділах СТВ цьому питанню не завжди приділено достатньо уваги. Так, зокрема, в посібнику [23], написаному на належному науково-методичному рівні, на жаль, обґрунтування ПЛ здійснено досить поверхово, незважаючи на важливість цього питання.

Метою пропонованого посібника окреслено: науково-методичний аналіз методів обґрунтування ПЛ та методичні рекомендації щодо самостійного опрацювання цих методів.

Відповідно до мети структуровано зміст розділів посібника. Спочатку пропонується теоретичний матеріал для самостійного ознайомлення з методами обґрунтування ПЛ, короткі методичні рекомендації, приклади розв’язування задач, які ілюструють принципові аспекти та формули що використовуються при обґрунтуванні ПЛ.

Для поглиблення, систематизації та самоконтролю навчальних досягнень пропонуються «Завдання для самоконтролю», а також «Контольні запитання».

У «Додатках» запропонована низка задач, які пояснюють деякі наслідки ПЛ та повинні слугувати поглибленому осмисленню ПЛ та їх наслідків.

Звертаємо увагу наших майбутніх читачів насамперед на той факт, що при вивченні СТВ розглядаються, як правило, дві системи відліку, K і K'. Система відліку (СВ) K вважається нерухомою, а СВ K' рухається відносно СВ K.

Загальноприйнятим вважається, що вісь OX СВ K, й вісь $O'X'$ СВ K' співпадають, а СВ K' рухається відносно СВ K із швидкістю $\vec{V}$ вздовж вісі

OX (рис. 1). Причому в початковий момент часу $t = t' = 0$ початки координат СВ K $x = y = z = 0$ й СВ K' $x' = y' = z' = 0$ співпадають.

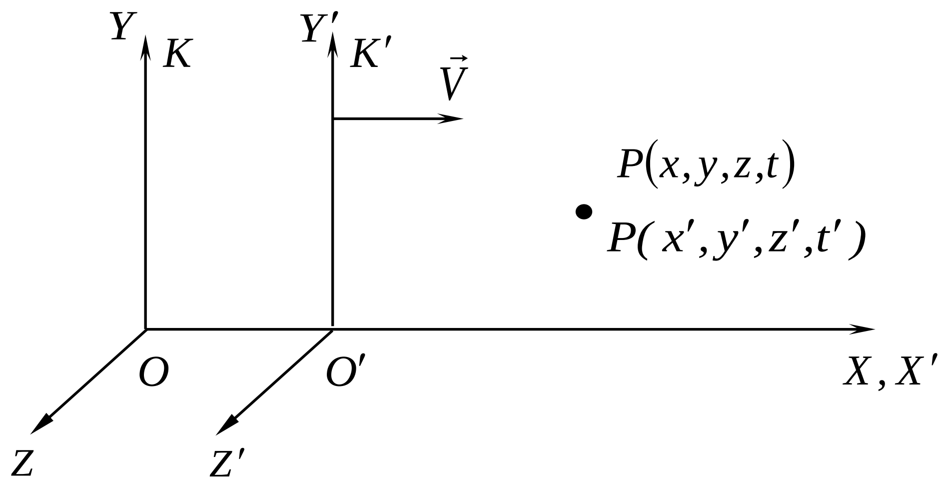

Рис. 1. Рух СВ K' відносно «нерухомої» СВ K

В основу спеціальної теорії відносності покладено два постулати Ейнштейна.

І. Принцип відносності, який стверджує, що всі інерціальні системи відліку рівноправні для опису довільного фізичного явища.

Наведемо ще декілька еквівалентних формулювань принципу відносності (ПВ):

- Рівномірний та прямолінійний рух системи відліку не впливає на перебіг довільного фізичного явища. «Цей принцип є окремий прояв того, що всі фізичні процесі відбуваються у просторі-часі з метрикою $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$» [22, с. 27].
- У всіх інерціальних системах відліку одне і теж фізичне явище відбувається однаково за умови, що зовнішні та початкові умови однакові.
- Диференційні рівняння, що описують будь-який фізичний процес в СВ K та СВ K', мають однакову форму.
- Основні рівняння фізики повинні бути коваріантними відносно певних перетворень координат простору і часу, ПЛ.

ІІ. Постулат сталості швидкості світла (ПСШС):

- швидкість світла в вакуумі однакова в усіх системах відліку і не залежить від швидкості руху системи відліку та джерела світла.

У навчальному посібнику прийняти такі скорочення:

ПЛ- перетворення Лорентца.

ПСШС – принцип сталості швидкості світла.

СТВ – спеціальна теорія відносності.

СВ – система відліку.

РОЗДІЛ 1
МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОРЕНТЦА В НАУКОВО-МЕТОДИЧНІЙ ЛІТЕРАТУРІ

Огляд науково-методичної літератури свідчить про використання у навчальному процесі фізичних та фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів (ВНЗ) наступних, в залежності від рівня складності та узагальнення, способів (методів) обґрунтування ПЛ:

1. Метод, що ґрунтується на інваріантності інтервалу між будь-якими подіями при переході від однієї системи відліку (СВ) до іншої[5; 13; 19].

2. Традиційний метод, що ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна [6; 7; 8; 14].

3. Метод k - коефіцієнту (радіолокаційний метод) [8; 9].

4. Метод, що ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня [10];

5. Метод, що ґрунтується на елементарному обґрунтуванні таких формул $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-B^2}}$, $l = l_0\sqrt{1-B^2}$, та формули різночасовості (величини розсинхронізації годинників) $\Delta t = \dfrac{\Delta x' \cdot B}{c\sqrt{1-B^2}}$ і детальному поясненню змісту їх [11], де $B = \dfrac{V}{c}$, V - швидкість руху СВ K' відносно СВ K, c - швидкість світла в вакуумі.

6. Так званий «безпосередній» метод (метод Угарова В.О.) [8; 12].

7. Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу між двома подіями з точки зору двох і інерціальних СВ [20].

8. Метод, що запропонований в посібнику Терлецького Я.П [15].

9. Метод, що запропонований в посібнику Логунова А.О. [21; 22].

10. Кінематичний метод обґрунтування перетворень Лорентца.

Розглянемо більш детально ці методи обґрунтування перетворень Лорентца.

1.1. Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату інтервалу між двома довільними подіями

Основним поняттям геометричної інтерпретації СТВ є поняття події, яка характеризується 4 числами x, y, z, t – місцем настання та часом настання події. Зокрема, Г. Міньковський стверджував, що «Предметом нашого сприйняття завжди є тільки місце та час взяті разом. Ніхто ще не спостерігав будь-якого місця інакше, ніж в деякий момент часу і будь-який час інакше, ніж в деякому місці» [3, с. 168].

Оскільки подія у довільній точці P (рис. 1) характеризується координатами x, y, z, t, то вся сукупність координат фізичних подій в довільній системі відліку утворює 4 - вимірний багатовид.

Як відомо, із постулатів спеціальної теорії відносності випливає, що квадрат «віддалі» між двома нескінченно близькими подіями визначається квадратом інтервалу між цими двома подіями [5, с. 23; 13, с. 129; 19, с. 131]:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (1)$$

Таким чином, можна стверджувати, що постулати СТВ дозволяють визначити квадрат віддалі між двома нескінченно близькими подіями dS^2.

Значення ds^2 не залежить від вибору СВ і тому квадрат інтервалу можна використати для введення метрики в 4-вимірному багатовиді. І таким чином перетворити 4-вимірний багатовид е простір-час Міньковського. Точками цього 4-вимірного простору-часу є сукупність всіх подій в тій чи іншій СВ.

Тобто 3-вимірний простір і одновимірний час об’єднуються в єдиний псевдоевклідовий простір-час Міньковського. В основі об’єднання простору і часу лежить вираз для ds^2. Інваріантність квадрату інтервалу приводить до нових поглядів і уявлень на природу просторово-часових відношень. Хоча і зараз видно із формули (1), що як просторова віддаль, так і часова «віддаль» між подіями змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої (носять відносний характер), а квадрат интервалу ds^2 залишається незмінним.

Оскільки квадрат інтервалу є інваріантною величиною [1; 9; 16], то треба знайти такі перетворення просторових та часових координат події, які б забезпечували цю інваріантність.

Виявляється, що рух системи відліку K' відносно СВ K в 4-вимірному просторі Міньковського можна подати як поворот системи координат в цьому 4-вимірному просторі [5; 6; 28].

Дійсно, згідно з [6; 8; 28], рис. 2 ілюструє положення систем відліку K' й СВ K на діаграмі Міньковського.

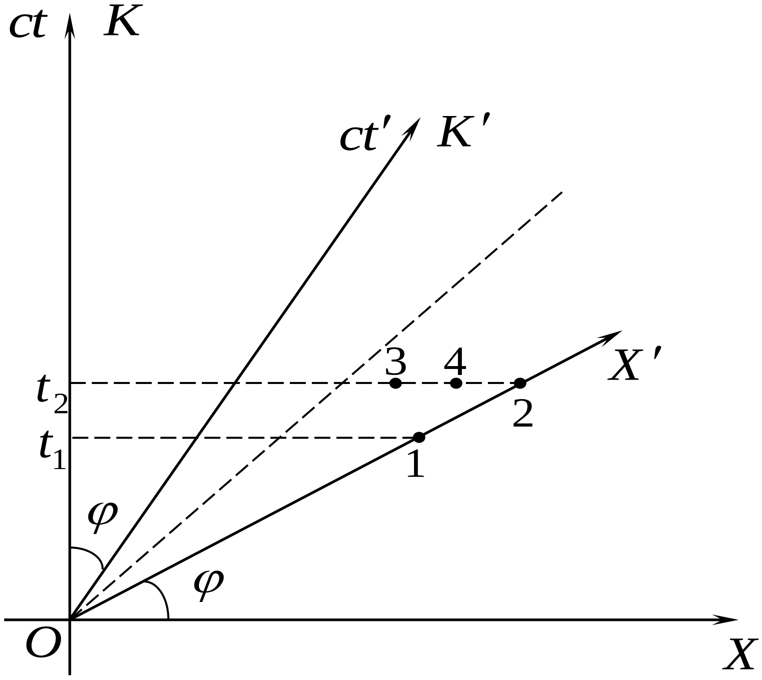

Рис. 2. Зображення на діаграмі Міньковського просторових та часових осей СВ K та СВ K'

Тобто, рух СВ K' відносно СВ K зі швидкістю $\vec{V}$ вздовж вісі OX на діаграмі Міньковського подається як поворот просторових та часових осей СВ K' на кут φ відносно осей СВ K.

Зокрема, з використанням діаграми Міньковського особливо чітко очевидна відносність одночасовості. Дійсно, нехай в точках 1 і 2 СВ K' відбулися дві події, які з точки зору СВ K' відбулися одночасово, $t_1' = t_2' = 0$.

Але з точки зору СВ K ці події відбулися неодночасово: $t_1 \neq t_2$, що очевидно з діаграми, зображеної на рис 2.

Таким чином, такий поворот осей СВ K' на кут φ відносно осей СВ K не повинен змінювати квадратичну формулу (1).

В 4-вимірному часо-просторі координати події будемо визначати:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict. \qquad (2)$$

Тому по аналогії з поворотом декартової системи координат в 3-вимірному просторі можна записати поворот в площині ict, X (див. Рис. 3):

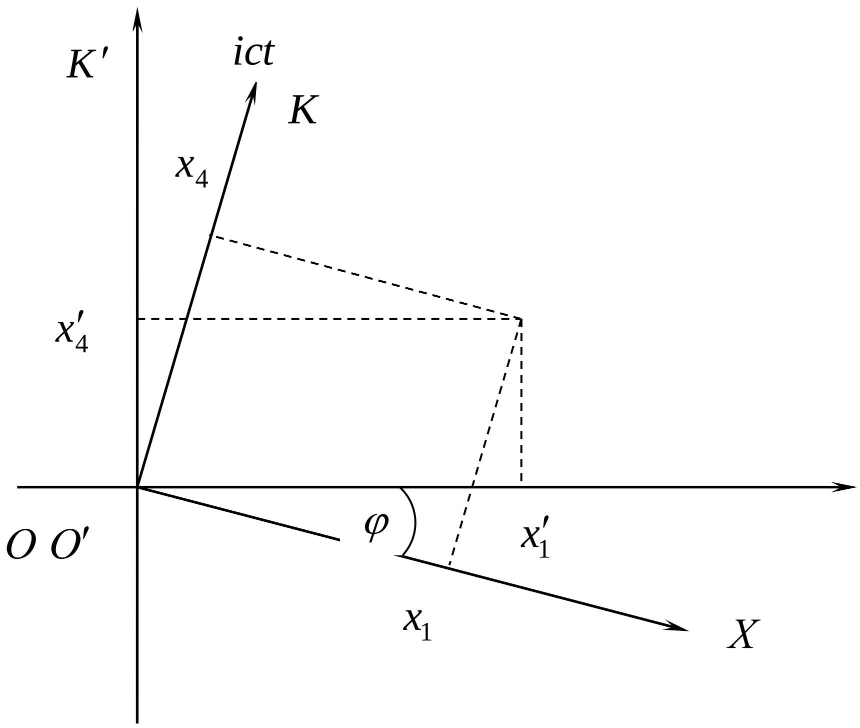

Рис. 3. Поворот в площині ict, X СВ K' на кут φ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' \cdot \cos\varphi - x_4' \cdot \sin\varphi \\ x_4 &= x_4' \cdot \cos\varphi + x_1' \cdot \sin\varphi \end{aligned}. \qquad (3)$$

Розглянемо точку $x_1' = 0$.

Очевидно, що це початок координат СВ K', тому із (3) одержуємо:

$$x_1 = -x_4' \cdot \sin\varphi$$
$$x_4 = x_4' \cdot \cos\varphi \quad ,$$

$$\frac{x_1}{x_4} = -tg\varphi . \qquad (4)$$

Перепишимо (4) враховуючи, що $x_1 = Vt$ - це координата початку координат СВ K' з точки зору СВ K в момент часу t:

$$tg\varphi = -\frac{x \cdot i}{i \cdot c \cdot t \cdot i} = i \cdot \frac{V}{c} = i \cdot B,$$

де $B = \frac{V}{c}$.

Тоді косинус та синус кута повороту виражаються через $B = \frac{V}{c}$:

$$cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \Gamma, sin\,\varphi = \frac{i \cdot B}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad (5)$$

де $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$.

Таким чином, перетворення (3), які залишають інтервал інваріантним при поворотах системи координат в просторі Міньковського, є:

$$x_1 = \frac{x_1' - i \cdot c \cdot t' \cdot i \cdot B}{\sqrt{1 - B^2}}$$
$$x_4 = i \cdot c \cdot t = \frac{i \cdot c \cdot t' + x_1' \cdot i \cdot B}{\sqrt{1 - B^2}} \; .$$

Або після спрощення маємо:

$$x_1 = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad t = \frac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} \qquad (6)$$

Таким чином, ми знайшли зв’язок між координатами багатовидів у двох системах відліку. Це перетворення Лорентца.

Перетворення Лорентца можна записати і так:

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k, \qquad (7)$$

де α'_{ik} - це матриця перетворень Лорентца, яка вводиться і визначається таким чином.

Запишемо перетворення Лорентца (6) в такому вигляді:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + i \cdot B \cdot x_4}{\sqrt{1-B^2}} = \Gamma \cdot \mathrm{x}_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + i \cdot B \cdot \Gamma \mathrm{x}_4 \\ x'_2 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i \cdot B \cdot x_1}{\sqrt{1-B^2}} = -i \cdot B \cdot \Gamma \cdot \mathrm{x}_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \Gamma \cdot \mathrm{x}_4 \end{aligned} . \qquad (8)$$

Тоді матриця перетворень Лорентца α'_{ik} дорівнює:

$$\alpha'_{ik} = \begin{matrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{matrix} . \qquad (9)$$

Обернені перетворення Лорентца мають вигляд:

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k, \qquad (10)$$

де

$$\alpha_{ik} = \begin{matrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{matrix} \qquad (11)$$

матриця обернених перетворень Лорентца.

Оскільки пропонований метод, який ґрунтується на використанні поняття «поворот системи відліку K' відносно СВ K» в площині ict, X, то необхідно чітко зрозуміти, що відносний рух двох систем відліку K' і K зі швидкістю V на діаграмі Міньковського подається як поворот координатних осей (Рис. 2) (детальніше див., наприклад [6; 8; 28]).

1.2. Традиційний метод, що ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна

В основі цього методу обґрунтування ПЛ лежать 4 положення [6, с. 280; 7, с. 80; 8, с. 53; 14, с. 220]:

а) однорідність простору і часу. Це означає, що вид перетворень не повинен залежати від вибору початку відліку просторових координат або часу;

б) ізотропія простору, тобто рівноправність усіх напрямів в просторі;

в) принцип відносності, тобто повна рівноправність усіх систем відліку;

г) постулат сталості швидкості світла.

Оскільки координати події x, y, z, t та x', y', z', t' описують одну і ту ж подію, яка існує в реальності незалежно від наявності чи відсутності систем відліку K і K', очевидно повинні бути наступні однозначні математичні залежності:

$$\begin{array}{c} x' = \varphi_1(x, y, z, t), \quad y' = \varphi_2(x, y, z, t), \\ z' = \varphi_3(x, y, z, t), \ t' = \psi(x, y, z, t) \end{array}. \qquad (12)$$

Дійсно, знайдемо нескінченно малу зміну dx' [6, с. 80]:

$$dx' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt. \qquad (13)$$

Але внаслідок однорідності простору і часу співвідношення (13) повинні бути однаковими для всіх подій. Тобто величини $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ не повинні залежати від просторових координат і часу, а отже ці величини є постійними.

Іншими словами, функція $x' = \varphi_1(x, y, z, t)$ має вигляд:

$$x' = \varphi_1(x, y, z, t) = A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + A_5.$$

Тобто, функція $x' = \varphi_1(x, y, z, t)$ є лінійною функцією своїх аргументів x, y, z, t.

Аналогічно можна впевнитися, що і інші шукані нами функції (функції перетворення просторових і часової координат довільної події при переході від СВ K' до СВ K) $y' = \varphi_2(x, y, z, t)$, $z' = \varphi_3(x, y, z, t)$, $t' = \psi(x, y, z, t)$ є лінійними функціями x, y, z, t.

Далі, оскільки в початковий момент часу ($t = t' = 0$) початки координат СВ K $x = y = z = 0$ й СВ K' $x' = y' = z' = 0$ співпадають, то перетворення (12) для y' i z' повинні мати вигляд:

$$\begin{aligned} y' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t \\ z' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t \end{aligned} . \qquad (14)$$

Згідно зі стандартним розташуванням систем відліку K і K' (рис.1), вісь Y' паралельна вісі Y, вісь Z' паралельна вісі Z.

І оскільки вісі OX i $O'X'$ співпадають, то, із умови $y = 0$, одержуємо $y' = 0$, а із $z = 0$ - рівність $z' = 0$, і тоді із (14) маємо:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 x + a_3 z + a_4 t \\ 0 &= b_1 x + b_2 y + b_4 t \end{aligned} \qquad (14а)$$

при будь яких значеннях x, y, z, t.

Але останнє можливе тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

Більше того, враховуючи, що із-за рівноправності осей OZ та OY відносно напряму руху СВ K', коефіцієнти в перетвореннях (14) повинні бути однаковими: $a_2 = b_3 = a$.

Узагальнюючи попереднє можна сказати, що із однорідності простору і часу випливає, що шукані ПЛ для y' та z' повинні мати вигляд:

$$y' = ay, \quad z' = az. \qquad (15)$$

Коефіцієнти a в формулах (15) показують у скільки разів довжина деякого стержня (що орієнтований вздовж осі OY або вісі OZ, відповідно) у СВ K' більше, ніж у СВ K.

Якщо ж (15) переписати у вигляді

$$y = \frac{1}{a} y', \quad z = \frac{1}{a} z', \tag{15a}$$

то величина $\frac{1}{a}$ показує у скільки разів довжина деякого стержня (що орієнтований вздовж осі $O'Y'$ або вісі $O'Z'$, відповідно) у СВ K більше, ніж у СВ K'.

Згідно ж із принципом відносності, наші системи відліку K і K' (рис.1) абсолютно рівноправні, і тому при переході від однієї СВ до іншої довжина стержня, що розташований перпендикулярно напряму відносного руху систем відліку, повинна змінюватися точно таким же чином (у таку ж кількість разів), як при зворотному переході.

Тому у формулах (15) та (15а) ми повинні мати $\frac{1}{a} = a$.

Тобто $a = \pm 1$. І оскільки додатні напрями осей OY, $O'Y'$ та осей OZ, $O'Z'$ збігаються, то слід вибрати для коефіцієнта a значення $a = +1$.

Таким чином, для поперечних просторових координат довільної події маємо:

$$y' = y, \quad z' = z. \tag{15б}$$

Оскільки координата y' та z' перетворюються окремо від x та t, то змінні x та t будуть зв'язані лінійними перетвореннями тільки самі з собою. Тобто, $x' = f(x,t)$ і навпаки $x = f'(x',t')$. Вигляд функцій $f(x,t)$ та $f'(x',t')$ знаходять виходячи із таких міркувань.

Для цього розглянемо рис. 4.

Точка $x' = 0$ в СВ K має координату $x = Vt$. Тоді очевидно, що для довільної іншої точки СВ K' маємо:

$$x' = \Gamma'(x - Vt). \tag{16}$$

З іншого боку, точка $x = 0$ (точка O, початок координат СВ K) з точки зору СВ K' має координату $x' = -Vt'$ (див. рис. 4).

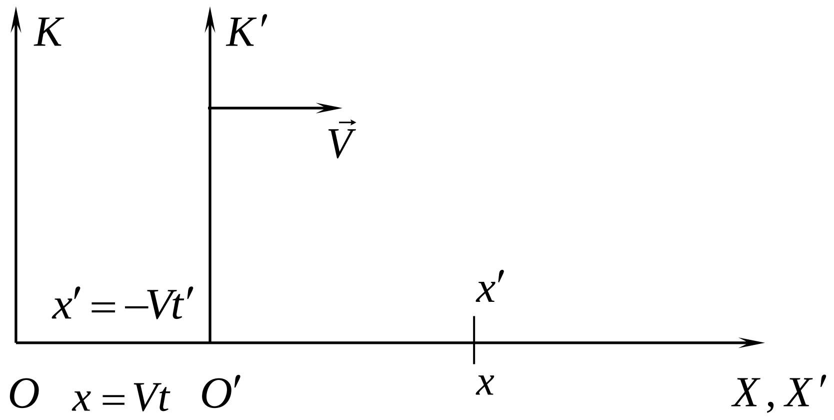

Рис. 4. Положення початку координат кожної із систем відліку відносно іншої

Тому для будь-якої іншої точки СВ K можна записати:

$$x = \Gamma(x' + Vt'). \qquad (17)$$

Таким чином, із однорідності простору і часу одержуємо, що шукані перетворення для x' та x мають бути лінійними, і зокрема, мати вигляд:

$$x' = \Gamma'(x - Vt), \quad x = \Gamma(x' + Vt'). \qquad (18)$$

Виходячи із принципу відносності, коефіцієнти Γ та Γ' повинні бути однакові:

$$\Gamma = \Gamma'.$$

Дійсно, нехай в СВ K' вздовж осі $O'X'$ знаходиться стержень одиничної довжини. Тобто координати кінців його такі:

$$x_1' = 0,\ x_2' = 1,\ x_2' - x_1' = 1.$$

Тоді в СВ K в один і той же момент часу ($t_1 = t_2$) координати кінців стержня та довжина цього стержня будуть:

$$x_1' = \Gamma'(x_1 - Vt_1),$$

$$x_2' = \Gamma'(x_2 - Vt_2),$$

$$\frac{x_2' - x_1'}{\Gamma'} = x_2 - x_1.$$

Оскільки $x'_2 - x'_1 = 1$, то одержуємо:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\Gamma'}.$$

Це з точки зору системи відліку K.

Нехай тепер в СВ K знаходиться такий же одиничний стержень. Тобто, $x_2 - x_1 = 1$. Тоді з точки зору СВ K' довжина його буде (при виконанні умови $t'_1 = t'_2$):

$$\frac{(x_2 - x_1)}{\Gamma} = x'_2 - x'_1.$$

Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца:

$$x_1 = \Gamma(x'_1 + Vt'_1),\ \ x_2 = \Gamma(x'_2 + Vt'_2),$$

тому $x'_2 - x'_1 = \dfrac{1}{\Gamma}$.

Із рівноправності СВ K і СВ K' випливає, що:

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1.$$

Тобто $\dfrac{1}{\Gamma'} = \dfrac{1}{\Gamma}$, а отже і $\Gamma = \Gamma'$.

Далі, для знаходження коефіцієнта Γ використовують ПСШС.

У ту мить, коли початки координат систем відліку співпадають і $t = t' = 0$ із початку координат вздовж всі OX посилається світловий сигнал, який реєструється в деякій просторово-часовій точці (x, t) СВ K та (x', t') СВ K':

$$x = ct \quad x' = ct'.$$

Підставивши в (18) одержуємо:

$$ct' = \Gamma\left(ct - Vt\right), \qquad ct = \Gamma\left(ct' + Vt'\right) \tag{19}$$

Із системи двох рівнянь (19) для Γ знаходимо:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Із цих двох співвідношень (18), $x' = \Gamma(x - Vt)$ та $x = \Gamma(x' + Vt')$, можна також одержати:

$$t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x, \qquad (20)$$

де $\gamma = \Gamma$, $\delta = \frac{1-\Gamma^2}{\Gamma V}$.

І, нарешті, із (18) (20), ураховуючи значення коефіцієнтів $\gamma = \Gamma$ та $\delta = \frac{1-\Gamma^2}{\Gamma V}$ одержуємо перетворення Лорентца:

$$\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{aligned} \quad . \qquad (21)$$

Таким чином, при обґрунтування ПЛ цим методом послідовно і прозоро використовуються постулати СТВ (як принцип відносності так і принцип ПСШС). Окрім того, для обґрунтування $y' = y$, $z' = z$ плідно, наочно та результативно використовуються властивості симетрії простору: однорідність та ізотропія. У процесі роботи над навчальним матеріалом щодо обґрунтування ПЛ слід звернути особливу увагу на способи використання властивостей симетрії простору

1.3. Метод k - коефіцієнту (радіолокаційний метод)

У методиці навчання основам СТВ (зокрема, при обґрунтуванні перетворень Лорентца та кінематичних наслідків СТВ) часто використовується радіолокаційний метод [8; 9; 12]. Радіолокаційний спосіб доведення ПЛ ґрунтується теж на принципах СТВ, але особливо наголошується на ПСШС. При використанні цього методу знаходить особливо чітке відображення процедура синхронізації годинників та означення часу настання події [8, с. 109; 9, с. 81].

Суть цього методу полягає в наступному.

Нехай в СВ K в початку координат знаходиться пристрій, який посилає в напрямі до СВ K' світлові (радіолокаційні) імпульси через проміжки часу T.

У початковий момент часу, зазвичай, початки координат СВ K та СВ K' співпадають, і в цей момент часу посилається перший імпульс до СВ K'. Другий імпульс посилається в момент $t_1 = T$.

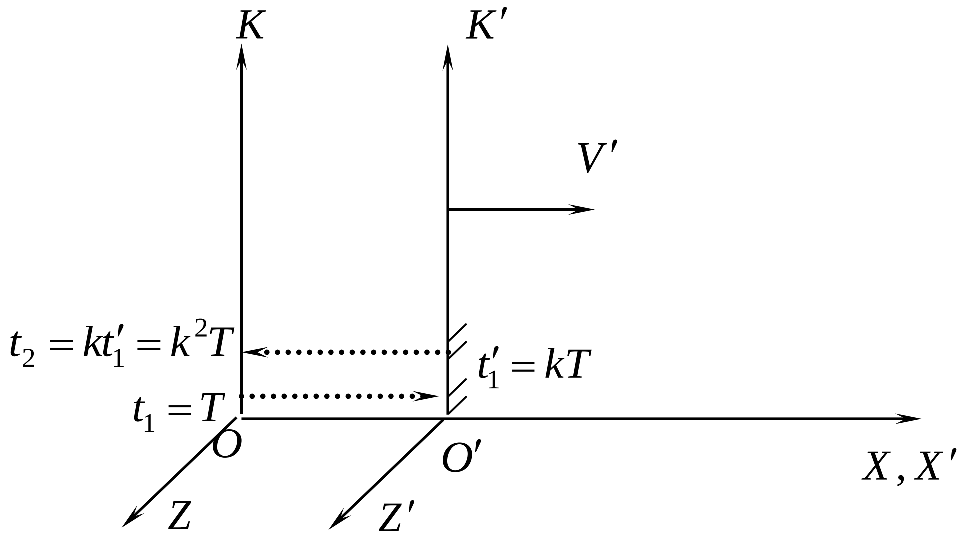

Рис. 5. Ілюстрація методу k - коефіцієнту

Тоді в СВ K' цей сигнал за годинником системи K' буде прийнятий в момент:

$$t'_1 = kT. \tag{22}$$

Тобто, всі наступні сигнали в СВ K' будуть прийматися через такий же проміжок часу: $t_1' = kT$.

Аналогічно (в силу рівноправності СВ K та СВ K'), якщо із системи K' в напрямі системи K буде посилатись сигнал через проміжок часу T' за годинником системи K', то за годинником системи K цей сигнал буде прийматись через проміжок часу kT' (Рис. 5).

Нехай в початку координат системи K' знаходиться дзеркало, тоді другий посланий сигнал відіб'ється від K' через проміжок часу kT за годинником K', але спостерігач в СВ K прийме його після віддзеркалення через проміжок часу:

$$t_2 = kt_1' = k \cdot kT = k^2 T \qquad (23)$$

Тобто, за годинником СВ K, 2-й віддзеркалений сигнал прийде в т. O в момент $t_2 = k^2 T$.

Таким чином, за годинником СВ K проміжок часу $k^2 T - T$ - це час розповсюдження радіолокаційного сигналу від СВ K до системи K' і назад. А проміжок часу $\frac{(k^2 T - T)}{2}$ - час розповсюдження сигналу тільки від СВ K до системи K'.

А в який момент за годинником СВ K відбулося відбивання світлового сигналу від дзеркала СВ K'?

Безпосередньо виміряти час настання цієї події ми не можемо. Цей момент ми повинні визначити, тобто, цьому моменту часу ми повинні дати означення згідно постулатів СТВ.

Час настання події (відбиття сигналу) за годинником СВ K, згідно з означенням (згідно з процедурою синхронізації), дорівнює:

$$T = \frac{(t_1 + t_2)}{2}.$$

Враховуючи (23) для моменту відбиття сигналу від СВ K' маємо:

$$\frac{k^2T+T}{2}=\frac{T(k^2+1)}{2}. \tag{24}$$

Тоді, очевидно, що СВ K' «з точки зору» СВ K пройшла за цей проміжок часу шлях:

$$\frac{T(k^2+1)V}{2}, \tag{24а}$$

а світловий промінь подолав відстань:

$$\frac{(k^2T-T)}{2}\cdot c=\frac{cT(k^2-1)}{2}. \tag{25}$$

Тому, спів ставляючи (24а) та (25), одержуємо рівність для визначення коефіцієнту k:

$$\frac{T(k^2+1)V}{2}=\frac{cT(k^2-1)}{2}.$$

Тоді коефіцієнт k та релятивістський множник Γ, відповідно, дорівнюють:

$$k=\sqrt{\frac{1+B}{1-B}},\ \Gamma=\frac{k^2+1}{2k}. \tag{26}$$

Тепер ми можемо одержати перетворення Лорентца користуючись методом k*-коефіцієнту***.** Нехай ми маємо деяку подію. Оскільки вона є довільною, то виберемо її такою, що відбувається в момент приходу світлового сигналу в т. P. В початковий момент часу $t=t'=0$, як завжди, початки координат СВ K та СВ K' співпадають (Рис. 1).

Нехай в момент t_1 за годинником СВ K послали сигнал в напрямі СВ K'. Спостерігач, який знаходиться в початку координат СВ K', отримає цей сигнал в момент:

$$t_1'=kt_1.$$

І одразу посилає його в точку $P(x',t')$, де знаходиться дзеркало, і після відбиття, цей сигнал знову повертається в початок СВ K' в момент t_2' (рис. 6).

В т. O спостерігач СВ K зареєструє повернення світлового сигналу за своїм годинником в момент часу

$$t_2 = kt_2',$$

де t_2- момент приходу відбитого від т. $P(x,t)$ сигналу в т. O за годинником СВ K.

Тоді, згідно з процедурою синхронізації, для моменту настання події (прибуття сигналу в т. $P(x,t)$), з точки зору СВ K, можна записати:

$$t = t_1 + \frac{x}{c}. \tag{27}$$

$$t = t_2 - \frac{x}{c}. \tag{28}$$

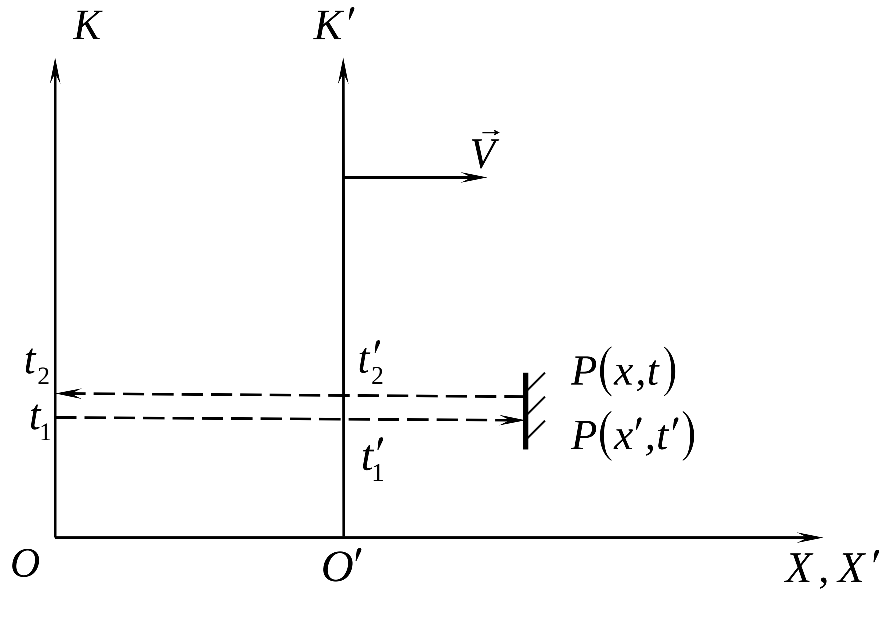

Рис. 6. Пояснення щодо знаходження перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнту

Аналогічно визначається момент настання події (прибуття сигналу в т. $P(x',t')$) з точки зору СВ K':

$$t' = t_1' + \frac{x'}{c}. \tag{29}$$

$$t' = t'_2 - \frac{x'}{c}. \qquad (30)$$

(Зазначимо, що використання формули $t = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$, яка може теж застосовуватися для синхронізації годинників СВ K, дає той самий результат). Звідси одержуємо такі співвідношення:

$$t_1 = t - \frac{x}{c},\ t_2 = t + \frac{x}{c},$$

$$t'_1 = t' - \frac{x'}{c},\ t'_2 = t' + \frac{x'}{c}.$$

Але, згідно з методом k - коефіцієнту, маємо:

$$t'_1 = kt_1,\ t_2 = kt'_2. \qquad (31)$$

Тому попередні співвідношення (31) набувають вигляду:

$$t' - \frac{x'}{c} = k(t - \frac{x}{c}). \qquad (32)$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{k}(t + \frac{x}{c}). \qquad (33)$$

Тепер ми можемо знайти зв'язок між координатами однієї і тієї ж події з точки зору СВ K і СВ K'.

Додамо, а потім віднімемо ліві і праві частини (32) і (33), і в результаті одержуємо:

$$t' = \frac{k^2 + 1}{2k} t - \frac{k^2 - 1}{2ck} x$$

$$x' = x\left(\frac{1 + k^2}{2k}\right) - t\left(\frac{k^2 - 1}{2k} \cdot c\right).$$

Але, оскільки $\frac{k^2 - 1}{2ck} = \Gamma \frac{V}{c^2}$, а $\frac{k^2 + 1}{2k} = \Gamma$, то

$$t'(x,t) = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - B^2}}. \qquad (34)$$

$$x'(x,t) = \Gamma(x - Vt). \qquad (35)$$

Тобто, ми знову одержали перетворення Лорентца для повздовжньої та часової координати довільної події (34) (35).

Як бачимо, при обґрунтуванні ПЛ цим методом активно використовується другий постулат СТВ (ПСШС), процедура синхронізації годинників та означення настання події: моменту відбивання світлового сигналу за годинником СВ K від дзеркала у СВ K'. Тому при самостійному аналізі методу k- коефіцієнту необхідно акцентувати увагу на означення часу настання події в довільній точці простору довільної системи відліку. Важливо також усвідомити та зрозуміти процедуру синхронізації годинників.

1.4. Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лоренцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня

Розглянемо доведення перетворень Лорентца способом, який ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та дещо формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня [10; 23].

Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K'. Нехай система K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$.

Нехай в момент часу t (в системі K) в точці з координатами x, y сталася подія A, наприклад, спалахнула лампочка. Треба визначити координати x' *і* y' і момент часу t' цієї події в системі відліку K'.

Відомо, що $y = y'$, (див. **п. 1.2**).

Координата x' точки A характеризує власну довжину відрізка $O'P$, нерухомого в системі K'.

Довжина цього відрізка в системі відліку K (де відлік довжини цього відрізку відбувається в момент t) дорівнює $x-Vt$ (Рис. 7).

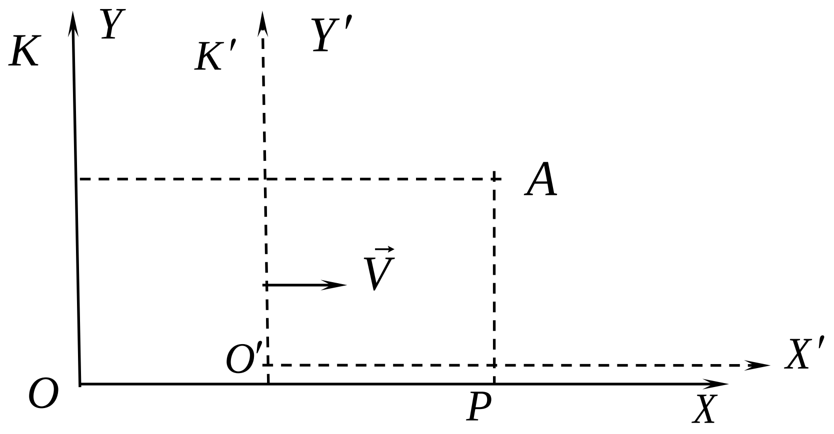

Рис. 7. Щодо обґрунтування перетворень Лорентца (згідно з [10])

Співвідношення між власною довжиною $O'P$, x', та довжиною цього відрізка в системі відліку K, $x-Vt$, визначається виразом (скорочення Лорентца):

$$x-Vt=x'\sqrt{1-B^2},$$

де $B=\dfrac{V}{c}$.

Звідси знайдемо x', координату точки A. Вона дорівнює:

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-B^2}}. \qquad (36)$$

З іншої сторони, координата x характеризує власну довжину відрізка OP, нерухомого в системі K.

Згідно з означенням довжини рухомого стержня, довжина цього відрізка в СВ K', де вимірювання проводиться в момент t', рівна $x'+Vt'$. Тоді, згідно з формулою скорочення Лорентца, маємо наступне співвідношення між цими довжинами:

$$x'+Vt'=x\sqrt{1-B^2}.$$

Звідси одержуємо значення координати x як функцію x' та t':

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - B^2}}. \qquad (37)$$

Отримані формули (36) і (37) дозволяють встановити зв'язок між моментами часу настання t і t' події A в обох системах відліку.

Для цього слід розв’язати систему двох рівнянь відносно «невідомих» величин t і t'. У результаті отримаємо:

$$t'(x,t) = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad t(x',t') = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - B^2}}. \qquad (38)$$

Тобто сукупність рівнянь (36) (37) (38) разом з (15б) визначають перетворення Лорентца.

Для чіткого усвідомлення та розуміння цього методу необхідно знати зміст явища лорентцевого скорочення. А саме, чому стержень (чи відрізок), який рухається вздовж своєї довжини, має довжину меншу власної довжини. Низка методів за допомогою яких обґрунтовується лорентцеве скорочення **без використання ПЛ** подано у Доданках А, В, Д, Е

1.5. Метод, що ґрунтується на використанні формул різночасовості та лорентцевого скорочення

Пропонований метод доведення перетворень Лорентца, що ґрунтується на використанні формул різночасовості (величини розсинхронізації годинників) і який запропоновано у посібнику Малініна О.М. [11, с. 78].

Формулу різночасовості, яка визначає проміжок часу у СВ K між двома подіями, що відбулися в різних точках простору, але одночасово у СВ K', просто отримати із перетворень Лорентца (див. Додаток А й ***Задачу 3*** в «Прикладах розв’язання задач»).

Але в способі, який запропоновано Малініним О.М. [11, с. 78] ця формула різночасовості використовується саме для обґрунтування ПЛ.

Тому формулу різночасовості можна одержати шляхом наступних міркувань, не посилаючись на перетворення Лорентца.

Згідно з [11] розглянемо таку задачу.

У СВ K' в точці D' знаходиться пристрій з певним механізмом, який спрацьовує тільки за умови, коли промені (кванти) світла від джерел світла A' та B' (див. рис. 8) одночасно випромінюються в СВ K' й одночасно приходять в т. D'. Чи спрацює цей механізм з точки зору СВ K? $A'B' = l_0$ - власна довжина відрізка $A'B'$.

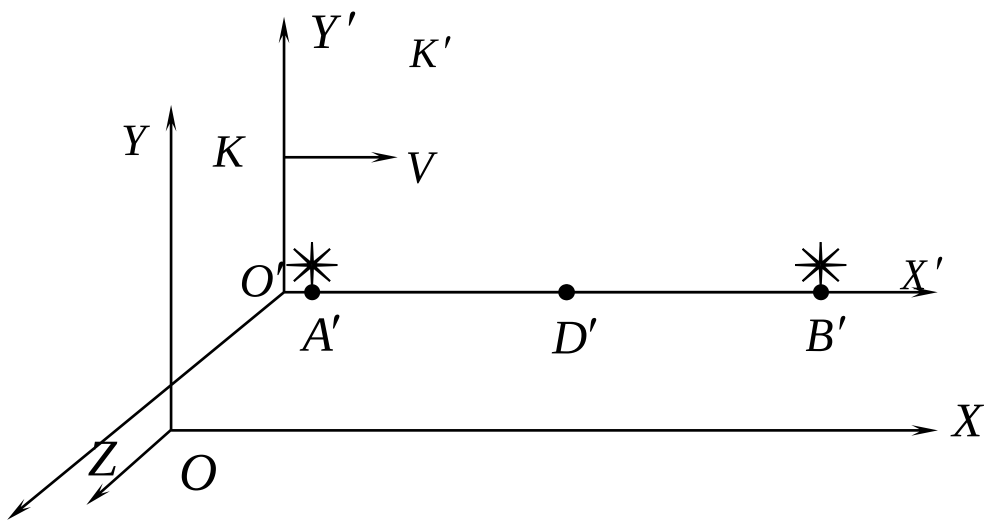

Рис. 8. До розрахунку формули різночасовості

Розв'язання: Внаслідок інваріантності події, дві одночасові події, які відбулися **в одній точці простору** будуть і в будь-якій іншій СВ одночасовими і такими, що відбуваються в одній точці. **Одночасовість** та ***одномісцевість*** двох подій є інваріантними.

Тому цей механізм спрацює і з точки зору СВ K. Але внаслідок сталості швидкості світла та внаслідок того, що т. D' у СВ K рухається назустріч світлу від джерела B' й віддаляється від джерела A', час поширення світлових сигналів від A' та B' до т. D' буде різним.

З точки зору СВ K час поширення світлових сигналів від A' й від B', відповідно, дорівнює:

$$t_1 = \frac{l}{2(c-V)},\ \ t_2 = \frac{l}{2(c+V)},$$

де $\frac{l}{2}$ - віддаль між т. D' та джерелами світла A' та B' у СВ K - $\left|A'D'\right|_K = \left|B'D'\right|_K = \frac{l}{2}$; l - довжина відрізка $A'B'$ у СВ K.

Оскільки обидва сигнали прийдуть до т. D' одночасно в СВ K, а $t_1 \neq t_2$, то випромінювання сигналу джерелом A' з точки зору СВ K повинно бути раніше, ніж випромінювання світлового сигналу джерелом B'.

А різниця цих проміжків часу дорівнює:

$$t_1 - t_2 = \frac{l}{2(c-V)} - \frac{l}{2(c+V)} = \frac{l \cdot V}{c^2\left(1-B^2\right)}. \tag{39}$$

Формула (39) – це формула різночасовості.

Але, оскільки, відрізок $A'B'$ рухається відносно СВ K зі швидкістю V, то його довжина в СВ K дорівнює $l = l_0\sqrt{1-B^2}$, де l_0 - віддаль між точками A' та B' у системі відліку K' (див. Додаток А, Додаток Д, Додаток Е та ***Задача 3***).

Тому формула різночасовості набуває вигляду:

$$t_1 - t_2 = \Delta t = \frac{l_0 \cdot V}{c^2\sqrt{1-B^2}}. \tag{40}$$

Нарешті переходимо до обґрунтування перетворень Лорентца.

Але, перш за все, дамо відповідь на наступне питання.

Нехай ми маємо у СВ K' дві події розділені проміжком часу $\Delta t'$ та просторовою віддаллю $\Delta x'$. Які значення Δt й Δx для цих подій у СВ K?

Якщо б ці події були в СВ K' одночасними, то, згідно з формулою (40)

$$\Delta t = \Delta t_1 = \frac{\Delta x' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

Але, якщо б вони відбулися у СВ K' в одній точці, то згідно із формулою, що визначає сповільнення ходу рухомого годинника (див. Додаток Ж):

$$\Delta t = \Delta t_2 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}} \qquad (40а)$$

Оскільки в загальному випадку важливі обидві ці випадки ситуації (і вони єдино можливі), то $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, тобто:

$$\Delta t = \frac{\Delta x' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} + \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{\Delta x' \frac{V}{c^2} + \Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}}. \qquad (41)$$

Для просторової відстані Δx запишемо $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Якби ці дві події відбулися у СВ K' одночасно, то ми мали б:

$$\Delta x = \Delta x_1 = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - B^2}}. \qquad (41а)$$

Якщо б ці дві події відбулися б у СВ K' в одній точці, то

$\Delta x = \Delta x_2 = V\Delta t = \dfrac{V\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}}$. У загальному випадку маємо:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - B^2}} + \frac{V\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{\Delta x' + V\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}} \qquad (42)$$

Якщо ж одна із цих подій відбулася в початку координат СВ K' у момент часу $t' = 0$ (тобто ця подія має координати $O'(0,0,0,0)$), а друга довільна подія у СВ K' має координати $A'(x', y', z', t')$, то у СВ K' просторова віддаль по осях координат і проміжок часу відповідно рівні:

$$\Delta x' = x',\ \Delta y' = y',\ \Delta z = z,\ \Delta t' = t'. \qquad (43)$$

Тоді з точки зору СВ K дані події мають координати: $O(0,0,0,0)$, $A(x,y,z,t)$, а просторові та часовий відрізки, відповідно дорівнюють

$$\Delta x = x,\ \Delta y = y,\ \Delta z = z,\ \Delta t = t. \tag{44}$$

Застосовуючи до (43) і (44) формули (41) і (42), отримаємо:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-B^2}}, \qquad y = y', \qquad t = \frac{x'\frac{V}{c^2} + t'}{\sqrt{1-B^2}}. \tag{45}$$

Якщо розв’язати формулу (40) відносно x', y', t', то

$$x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1-B^2}},\ y' = y,\ t' = \frac{-x\frac{V}{c^2} + t}{\sqrt{1-B^2}} \quad (B = \frac{V}{c}) \tag{46}$$

Формули (45) і (46) - це перетворення Лорентца.

Таким чином, особливістю методу запропонованого Малініним О.М. для доведення ПЛ є використання формул різночасовості, лорентцевого скорочення, сповільнення ходу рухомого годинника, які одержуються без використання перетворень Лорентца (див. Додатки А, Д, Е, Ж). Тому , на нашу думку, слід зосередити увагу на обґрунтуванні та поясненні указаних вище формул.

1.6. Метод безпосереднього виведення перетворень Лорентца (метод Угарова В.О.)

Уявимо собі весь простір, що заповнений рухомими годинниками різних систем відліку. Миттєвий спалах світла в даному місці простору, освітивши циферблати всіх годинників, що знаходяться в даній точці, дозволяє визначити час виникнення події (спалаху) в усіх тих системах відліку, годинники яких були в тій точці в момент спалаху. Розглянемо дві системи відліку K і K'. Коли початки координат систем K і K' співпадають, то годинники з K і K', що знаходяться в спільному початку відліку, ставлять на поділки $t = 0$ і $t' = 0$.

Такі годинники у подальшому будемо називати опорними годинниками СВ K й СВ K'.

При цьому в інших точках простору годинники в СВ K' й СВ K показують різний час.

Тому розглянемо більш детально, що ж саме показують годинники в цих двох системах відліку [8, с. 49; 12, с. 213].

Коли початки координат співпадають, то координатна сітка СВ K' з точки зору СВ K стиснена в $\frac{1}{\Gamma}$ разів (лорентцеве скорочення).

Тобто, в початковий момент часу координати точки x і x' пов'язані співвідношенням $x = \frac{x'}{\Gamma}$ (див. також (41а)).

До моменту часу t **вся координатна сітка системи відліку K' зміститься як ціле на відстань Vt, і тому в цей момент часу ми маємо**:

$$x = \frac{x'}{\Gamma} + Vt\,.$$

Звідси, якщо в момент t координата точки в системі K була рівна x, то в системі K' її координата x' буде рівною

$$x'(x,t) = \Gamma(x - Vt). \tag{47}$$

Доречно порівняти шляхи доведення (47) та (36).

Ми цікавимося показами годинника в СВ K', який знаходиться в точці з координатою x в момент часу t: $t'(x,t)$.

Ці покази знайдемо спираючись на процедуру синхронізації годинників.

А саме, в ту мить коли початки координат (точки O й O') систем відліку K і K' співпадають, вздовж спільної осі X, X' посилається світловий сигнал.

У момент часу t цей сигнал приходить в точку $x_2 = ct$ СВ K. Координати цієї події в СВ K суть (x_2, t).

В СВ K' ця подія має координати (x_2', t_2'), причому згідно з ПСШС $x_2' = ct_2'$.

Але співвідношення (47) вірне для будь-яких подій, і діючи за оригінальним підходом [8, с. 49] та підставляючи у ліву і праву частину значення x_2 і x_2' і скорочуючи на c, отримаємо:

$$t_2' = \Gamma t(1 - B). \tag{48}$$

Це і означає, що годинник із набору годинників СВ K', який опинився в точці x_2, показує час, який не співпадає з часом, що його показує в тій же точці годинник із СВ K (а він показує час t).

Знайдемо покази ще одного годинника в СВ K' в цей момент часу t.

У момент часу t початок координат т. O' буде в точці $x_1 = Vt$. Разом із т. O' в цю точку перемістяться і опорний годинник СВ K'.

Цей годинник під час переміщення відрахує проміжок власного часу $\Delta t' = t_1' - 0 = t_1'$. А за годинником СВ K проміжок часу між подіями, коли т. O' співпадала з т. O і коли т. O' опинилася в точці $x_1 = Vt$, дорівнює $\Delta t = t - 0 = t$.

Тоді очевидно, що

$$t_1' = \frac{t}{\Gamma}. \tag{49}$$

Таким чином, в результаті цих міркувань, ми дійшли такого висновку. У момент часу t (за годинниками СВ K, тобто одночасово в СВ K) годинники СВ K', які знаходяться у різних точках СВ K, показують різний час (див. рис. 10):

в точці $x_2 = ct$ СВ K годинник СВ K' показує час $t_2' = \Gamma t(1 - B)$,

в точці $x_1 = Vt$ СВ K годинник СВ K' показує час $t_1' = \dfrac{t}{\Gamma}$.

Це дуже важливий висновок. Незважаючи на те, що всі годинники СВ K' синхронізовані між собою в СВ K', розрахунки показали, що годинники СВ K' розсинхронізованні у СВ K.

При цьому величина розсинхронізації залежить від того, в якій точці СВ K порівнюються покази годинників.

Знайдемо різницю показів годинників з K' в точках x_2 і x_1:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Gamma B t(B-1).$$

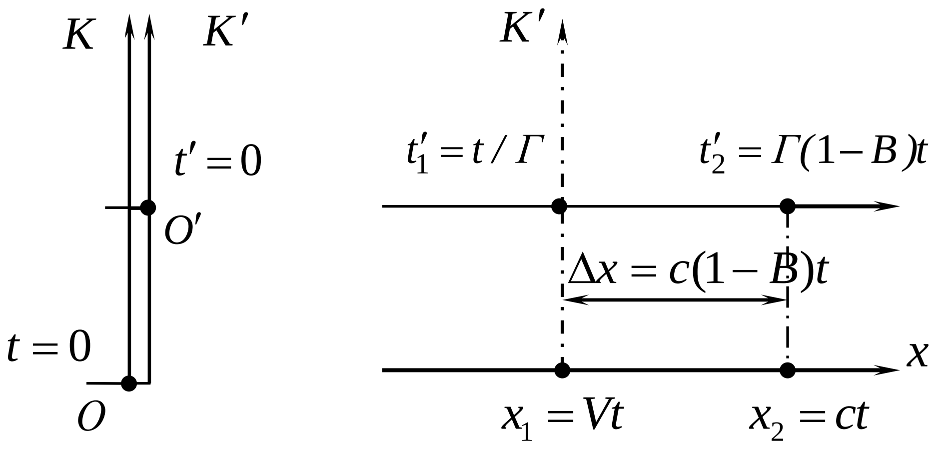

Рис. 10. Розсинхронізація годинників СВ K' з точки зору СВ K. Коли початки координат (точки O й O') систем відліку K і K' співпадають два годинника із СВ K' й СВ K, які опинилися в цій точці виставляють на покази $t = t' = 0$. В довільний момент часу t (за годинником із СВ K) можна знайти покази годинників із СВ K' в точках простору СВ K - $x_1 = Vt$ *і* $x_2 = ct$.

Ця різниця показів набігає на відстані $\Delta x = x_2 - x_1 = ct(1-B)$. Розсинхронізація на одиницю довжини буде:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x} = -\Gamma \frac{B}{c} \qquad (50)$$

З цього виразу видно, що величина розсинхронізації на одиницю відстані не залежить від вибору моменту часу t, а визначається виключно відстанню між годинниками в СВ K', **але яка відраховується (вимірюється) в системі відліку K.**

Тому можна записати для довільної пари точок:

$$t_2' - t_1' = -\Gamma \frac{B}{c}(x_2 - x_1). \qquad (51)$$

Нагадаємо, що набори синхронізованих годинників СВ K' й СВ K співставляються так, що в момент співпадання координатних систем K' й K у точці $x_1 = 0$ годинники СВ K' й СВ K виставляються на нуль. Тобто, годинники, які знаходяться в цій точці показують $t = t' = 0$ (опорні годинники).

Тоді для довільної точки x СВ K (вважаючи, що $x_2 = x$) із рівняння (51) одержуємо:

$$t'(x, t = 0) = -\Gamma \frac{B}{c} x. \qquad (52)$$

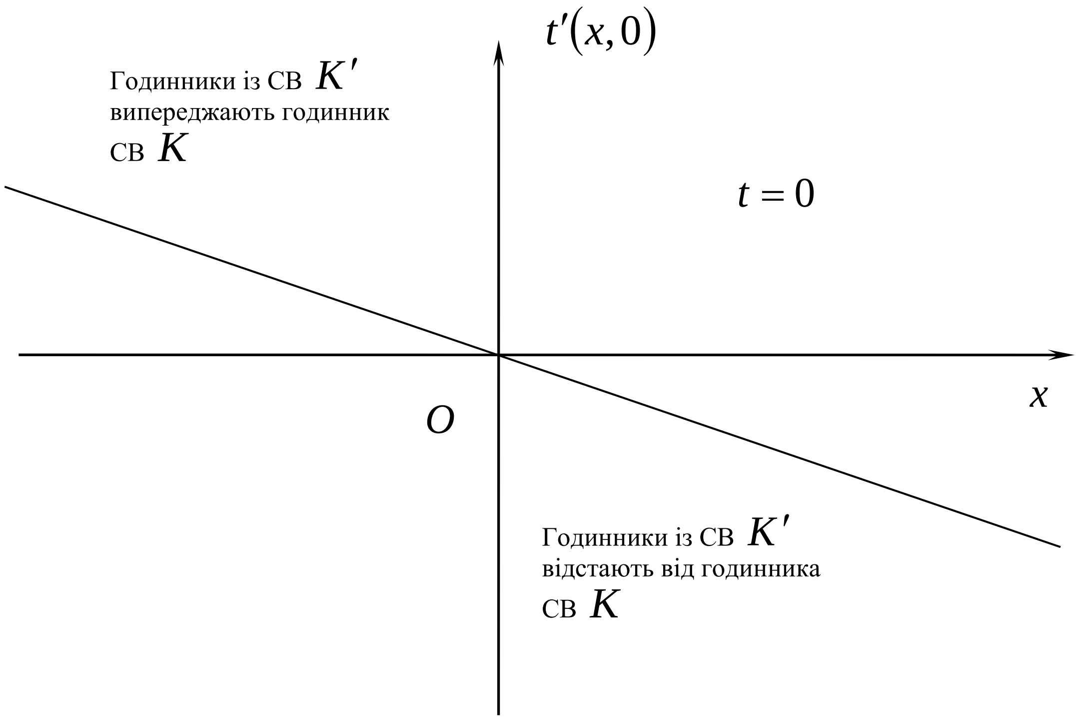

Рис. 11. Покази годинників СВ K' в в момент часу $t = 0$ (за годинником СВ K) в точках з координатами x

Із формули (52) з очевидністю видно, що ж показують в момент часу $t=0$ (за годинником СВ K) годинники СВ K', які знаходяться в точках з координатою x.

Покази годинників СВ K' графічно подані на рис. 11.

Зліва від початку відліку, годинники СВ K' все більше і більше випереджають годинники із СВ K, а праворуч – відстають від них (порівняйте з висновками Додатку Б)

І ось тепер ми зможемо визначити, що ж покажуть годинники із СВ K', які знаходяться в точці x в момент часу t. Скористаємося формулою (52), яка, зокрема ілюструє незалежність різниці показів двох годинників СВ K' від вибору момент часу t.

У точку x в момент часу t переміститься той годинник із СВ K', який в момент $t=0$ знаходився в точці $x-Vt$ і який, згідно з (52), відставав від опорного годинника на проміжок часу $\left(-\varGamma\dfrac{B}{c}(x-Vt)\right)$.

На цей проміжок часу годинник із СВ K', який в момент $t=0$ знаходився в точці $x-Vt$, буде відставати завжди.

Але в момент t опорний годинник показує час $t_1'=\dfrac{t}{\varGamma}$.

Тому годинник в точці x покаже час:

$$t'(x,t)=\frac{t}{\varGamma}-\varGamma\frac{B}{c}(x-Vt)=\varGamma\left(t-\frac{B}{c}x\right). \tag{53}$$

Формули (47), (53) є перетвореннями Лорентца.

У рамка цього методу можна обґрунтувати перетворення Лорентца і простіше. А саме, виходячи із міркувань, з допомогою яких ми одержали (47), вивести формулу подібну до (47), але при переході від СВ K' до СВ K:

$$x(x',t')=\varGamma(x'+Vt'). \tag{54}$$

Розв’язуючи систему алгебраїчних рівнянь (47), і (54) знаходимо:

$$t'(x,t) = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right), \tag{55}$$

$$t(x',t') = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right). \tag{56}$$

Формули (47), (53) - (56) і є перетвореннями Лорентца.

Цей метод цікавий тим, що детально аналізується зміст як перетворень Лорентца, так і проміжних співвідношень, необхідних для обґрунтування ПЛ. При цьому наголос робиться на процедурі синхронізації годинників ту довільній системі відліку та порівнянні показів годинників системи K та системи K', які виявилися внаслідок відносного руху СВ K та СВ K' в одній і тій же точці простору.

Крім пояснення цих особливостей у власне методі запропонованому В.О. Угаровим, важливим є розуміння результату порівняння показів годинників у СВ K та СВ K' (додаткові пояснення див. у Додатку Б).

Незважаючи на те, що процедура синхронізації годинників в будь-яких інерціальних системах відліку однакова, у всіх точках простору годинники СВ K' й СВ K, які опинилися в цій точці простору будуть показувати різний час.

Тобто годинники синхронізовані в одній системі відліку, розсинхронізованні з точки зору будь якої іншої системи відліку.

Іншими словами, якщо, наприклад, в СВ K' одночасово (за годинниками СВ K') зафіксувати покази всіх годинників СВ K, то виявляється, що годинники в СВ K у різних точках СВ K' показують різний час (див. також Додаток Б).

Нам видається, що ця особливість є надзвичайно важливою і визначальною при розгляді, поясненні й розумінні кінематики СТВ та перетворень Лорентца.

У процесі самостійної роботи бажано порівняти формулу (52), одержану без опертя на ПЛ з формулою (Б.1) Додатка Б, яка одержана з використанням перетворень Лорентца.

1.7. Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу з точки зору двох інерціальних систем відліку

Розглянемо дещо інше обґрунтування перетворень Лорентца [20]. Так званий спосіб, оснований на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу між двома подіями з точки зору двох інерціальних систем відліку.

Нехай x, y, z, t і x', y', z', t' - координати і час довільної події в інерціальних системах відліку K і K' , а V - швидкість їх відносного руху.

Для встановлення аналітичного зв'язку між величинами (x, y, z, t) і (x', y', z', t') розглянемо розповсюдження сферичної електромагнітної хвилі в обох системах відліку. Виберемо за початок відліку часу $t = 0$ той момент, в який початок координат системи K' співпадав з початком координат системи K.

Нехай в момент $t = 0$ з початку координат почала поширюватися сферична електромагнітна хвиля. В системі K рівняння хвильової поверхні має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad (58)$$

Оскільки, згідно з принципом відносності Ейнштейна, закон і швидкість розповсюдження хвилі повинні бути однаковими в усіх інерціальних системах відліку, то можна записати рівняння сферичної хвилі в системі K':

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad (59)$$

Формули перетворення координат і часу повинні не порушувати співвідношення (58) і (59), а також бути лінійними. Вимога лінійності пов'язана з однорідністю простору, в якому не існує будь-яких точок, виділених за властивостями (детальніше див. **п. 1.2**.).

У зв'язку з тим, що рух системи K' відбувається тільки вздовж вісі OX , перетворення координат y та z) повинно мати вигляд (див. **п. 1.2**):

$$y' = y; z' = z\,. \qquad (60)$$

Якщо в момент часу $t = 0$ початки систем координат K і K' співпадали, то координата площини $x' = 0$ в системі K записується у вигляді: $x = Vt$. Тому в загальному випадку (для довільної точки простору СВ K') можна записати:

$$x' = \alpha(V)(x - Vt)\,, \qquad (61)$$

де коефіцієнт $\alpha(V)$ залежить лише від швидкості відносного руху.

Представимо t' у вигляді лінійної однорідної функції x і t:

$$t' = \beta t + \gamma x. \qquad (62)$$

Подання залежності часу t' у вигляді лінійної однорідної функції тільки змінних x і t можна розглядати як наслідок однорідності простору і часу, причому без лінійних доданків пропорційних y *і* z. **Відсутність доданків пропорційних y *і* z у виразі (62) зумовлена тим, що при $x = 0$ *і* $t = 0$ ми мали би різні значення t' в різних точках площини $x' = 0$.**

Для визначення коефіцієнтів α, β, γ необхідно підставити (61) і (62) в (59). Отримаємо:

$$\alpha^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (\beta t + \gamma x)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Ця рівність має місце при будь-яких значеннях координат x, y, z, t, що може бути лише за умови рівності коефіцієнтів при x^2, t^2 і xt. Тобто, маємо:

$$a^2 - c^2\gamma^2 = 1,$$

$$a^2 V^2 - c^2\beta^2 = -c^2,$$

$$a^2 V + c^2 \beta\gamma = 0.$$

З цих трьох рівнянь знаходимо невідомі величини α, β, γ:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,,$$

$$\gamma = \frac{\alpha V}{c^2} = -\frac{V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Підставляючи значення α, β, γ в формули перетворення координат (61) і (62) і враховуючи (60), отримаємо перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};$$

$$y' = y; z' = z;$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Обернені ПЛ, очевидно, мають вигляд:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; y' = y; z' = z; t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Деяка модифікація методу, описаного в п. 1.7. Цей метод обґрунтування ПЛ є спрощеною модифікацією цього методу, оскільки до уваги береться тільки один вимір.

Для цього розглянемо рис. 4. Вихідні умови для систем відліку такі ж, як і для рис. 1.

Точка $x' = 0$ в СВ K має координату $x = Vt$. Тоді очевидно, що для довільної іншої точки СВ K' маємо:

$$x' = \alpha'(x - Vt). \tag{63}$$

З іншого боку, точка $x = 0$ (точка O, початок координат СВ K) з точки зору СВ K' має координату $x' = -Vt'$ (див. рис. 4.). Тому для будь-якої іншої точки СВ K можна записати:

$$x = \alpha(x' - Vt') . \tag{64}$$

Виходячи із принципу відносності коефіцієнти α та α' повинні бути однакові (див. **п. 1.2**.):

$$\alpha = \alpha' .$$

Із цих двох співвідношень, $x' = \alpha(x - Vt)$ та $x = \alpha(x' - Vt')$, можна одержати:

$$t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x , \tag{65}$$

де $\gamma = \alpha$, $\delta = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha V}$.

Тобто, виходячи із принципу відносності та другого постулату Ейнштейна, однорідності простору і часу ми дійшли висновку: між t і t' повинна бути лінійна залежність.

Зокрема, якби вона була нелінійна, наприклад, $t' \sim t^2$, то довільний рівномірний рух в одній системі буде прискореним в іншій системі відліку. Такий висновок суперечить самому поняттю інерціальної системи відліку.

Розглянемо відправлення світлового сигналу із початку координат СВ K і СВ K' в ту мить, коли вони співпадають. Тоді, через відповідні проміжки часу, світловий сигнал досягне точок з координатами, відповідно, на осі OX та $O'X'$:

$$x' = ct' \quad x = ct .$$

Підставивши останні вирази в систему рівнянь:

$$\begin{matrix} x' = \alpha'(x - Vt) \\ x = \alpha(x' + Vt') \end{matrix}, \tag{66}$$

отримуємо:

$$
\begin{aligned}
ct' &= \alpha(ct - Vt) = \alpha t(c - V) \\
ct &= \alpha(ct' + Vt') = \alpha t'(c + V)
\end{aligned}.
$$

З останньої системи рівнянь знаходимо

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}},$$

де $B = \dfrac{V}{c}$.

І нарешті, із (65) та (66) одержуємо перетворення Лорентца.

Очевидно, в основу цього методу обґрунтування ПЛ покладено інваріантність рівняння хвилевої поверхні сферичної електромагнітної хвилі в двох довільних системах відліку K і K'. З науково-методичної точки зору цей метод є найбільш простим та доступним у математичному відношенні, однак більш детального обґрунтування потребують формули (63), (64), (65).

1.8. Метод Терлецького Я.П.

У книзі Я.П. Терлецького «Парадокси теорії відносності» [15] запропоновано виведення перетворень Лорентца без постулату про сталість швидкості світла.

Для виведення перетворень Лорентца спиратимемося лише на «природні» припущення про властивості простору і часу, що містилися ще в класичній фізиці, і які спиралися на загальні уявлення, пов'язані з класичною механікою [15, с. 23]:

1. Ізотропність простору, тобто всі просторові напрями рівноправні.

2.Однорідність простору і часу, тобто незалежність властивостей простору і часу від вибору початкових точок відліку (початки координат і початки відліку часу).

3. Принцип відносності, тобто повна рівноправність всіх інерціальних систем відліку.

Різні системи відліку по-різному зображають один і той же простір і час як загальні форми існування матерії. Отже, формули перетворення, що виражають зв'язок між координатами і часом в одній – «нерухомій» системі (x, y, z, t) з координатами і часом в іншій – «рухомій» системі (x', y', z', t'), не можуть бути довільними. Встановимо ті обмеження, які накладають «природні» вимоги на вигляд функцій перетворення:

$$x' = f_1(x,y,z,t), y' = f_2(x,y,z,t),$$
$$z' = f_3(x,y,z,t), t' = f_4(x,y,z,t).$$

1. Внаслідок однорідності простору і часу перетворення повинні бути лінійними.

Дійсно, якби похідні функцій f_1, f_2, f_3, f_4 по $x, y, z, t,$ не були б константами, а залежали від $x, y, z, t,$ то і різниці $x_2' - x_1'; y_2' - y_1'; z_2' - z_1'; t_2' - t'$, що виражають проекції відстаней між точками 1 і 2 в «рухомій» системі, залежали б не тільки від відповідних проекцій в «нерухомій» системі, але і від значень самих координат $x, y, z, t,$ що суперечило б вимозі незалежності властивостей простору від вибору початкових точок відліку.

Якщо припустити, що проекції відстаней вигляду $\xi' = x_2' - x_1' = f_1(x_2,...) - f_1(x_1,...)$ залежать тільки від проекцій відстаней в нерухомій системі, тобто від $\xi = x_2 - x_1$, то $\frac{\partial \xi'}{\partial x_1} = 0$ при $\xi = const$, тобто:

$$\frac{\partial f_1(x_1 + \xi, \ldots)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1, \ldots)}{\partial x_1} = 0$$

Або $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = const$.

Аналогічно можна довести, що похідні f_1 по всіх інших координатах y_1, z_1, t_1 також рівні константам, а отже, і взагалі всі похідні f_1, f_2, f_3, f_4 по x, y, z, t є константи.

2. Виберемо «рухому» систему K' так, щоб в початковий момент $t = 0$ точка, що зображає її початок координат, тобто $x' = y' = z' = 0$ співпадала з точкою, що зображає початок координат «нерухомої» системи, тобто $x = y = z = 0$, а швидкість руху системи K' була б направлена тільки по OX (див. Рис. 1).

Якщо ми також врахуємо вимогу ізотропності та однорідності простору, то лінійні перетворення для системи відліку K', вибраної вказаним чином, запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} x' &= k(V)(x - Vt), \\ y' &= \lambda(V)y, \\ z' &= \lambda(V)z, \\ t' &= \mu(V)t + \alpha(V)x \end{aligned}, \qquad (67)$$

де $k(V), \lambda(V), \mu(V), \alpha(V)$ - деякі коефіцієнти, що залежать, взагалі кажучи, від швидкості руху СВ K' відносно СВ K; V - швидкості руху СВ K' відносно СВ K.

3. Ізотропія простору припускає також симетричність простору. В силу ж цієї симетрії ніщо не повинно змінитися у формулах перетворення, якщо змінити знаки V і x, тобто одночасно змінити напрям осі X і напрям руху системи K'.

Отже, властивість - симетричність простору приводить до наступного:

$$\begin{aligned} -x' &= k(-V)(-x + Vt) \\ y' &= \lambda(-V)y; \\ z' &= \lambda(-V)z \\ t' &= \mu(-V)t - \alpha(-V)x. \end{aligned} \qquad (68)$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми (67)

$$x' = k(V)(x - Vt),$$
$$y' = \lambda(V)z,$$
$$z' = \lambda(V)z,$$
$$t' = \mu(V)t + \alpha(V)x$$

Одержуємо наступні властивості для коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} &\kappa(-V) = \kappa(V), \\ &\alpha(-V) = -\alpha(V), \\ &\mu(-V) = \mu(V), \\ &\lambda(-V) = \lambda(V) \end{aligned} \quad . \tag{69}$$

Замість $\alpha(V)$ зручно ввести іншу функцію $\eta(V)$, так, щоб коефіцієнт α виражався через η і μ співвідношенням [15, с. 26]:

$$\alpha(V) = -\frac{V}{\eta(V)}\mu(V). \tag{70}$$

З урахуванням (69) одержуємо, що $\eta(V)$ - симетрична функція, тобто $\eta(V) = \eta(-V)$.

Використовуючи співвідношення (70), перетворення (68) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} &x' = \kappa(V)(x - Vt), \\ &y' = \lambda(V)y, \\ &z' = \lambda(V)z, \\ &t' = \mu(V)\left[t - \frac{V}{\eta(V)}x\right] \end{aligned} \tag{71}$$

причому всі вхідні в ці формули коефіцієнти $\kappa(V), \lambda(V), \mu(V), \eta(V)$ є симетричні функції V.

4. Згідно з принципом відносності обидві системи, «рухома» і «нерухома», абсолютно еквівалентні, і тому зворотні перетворення від системи K' до K

повинні бути тотожні прямим від K до K'. Зворотні перетворення повинні відрізнятися лише знаком швидкості V, оскільки система K' рухається відносно системи K вправо зі швидкістю $\vec{V}$, а система K рухається відносно системи K' (якщо останню вважати нерухомою), вліво зі швидкістю $-\vec{V}$.

Отже, зворотні перетворення повинні мати вигляд:

$$\begin{aligned} x &= \kappa(-V)[x' - (-V)t'], \\ y &= \lambda(-V)y', \\ z &= \lambda(-V)z', \\ t &= \mu(-V)\left[t' - \frac{(-V)}{\eta(-V)}x'\right] \end{aligned} . \qquad (72)$$

Порівнюючи ці перетворення з (71), одержуємо $\lambda(V)\lambda(-V) = 1$.

Але в зв'язку з симетрією $\lambda(V) = \lambda(-V)$ одержуємо, що $\lambda^2 = 1$, тобто $\lambda = \pm 1$.

Очевидно, має фізичний зміст лише знак (+), оскільки від'ємний знак ($\lambda = -1$) при $V = 0$ привів би по y та по z до перевернутої системи координат.

Отже $\lambda = 1$.

Зазначимо, оскільки коефіцієнти κ, μ, η - теж симетричні функції V, то перше і останнє рівняння з (71) і (72) можна записати у вигляді:

$$x' = \kappa(x - Vt), \qquad (73)$$

$$x = \kappa(x' + Vt'), \qquad (74)$$

$$t' = \mu\left(t - \frac{V}{\eta}x\right), \qquad (75)$$

$$t = \mu\left(t' + \frac{V}{\eta}x'\right).$$

Домножимо (73) на μ, а (75) на Vk і додаючи одержуємо:

$$\mu x' + V\kappa t' = \mu\kappa\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)x,$$

$$x = \frac{x'}{\kappa\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)} + \frac{Vt'}{\mu\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)}.$$

Порівнюючи цей вираз з (74), одержуємо:

$$\kappa = \frac{1}{\kappa\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)}, \kappa = \frac{1}{\mu\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)}.$$

Звідки маємо:

$$\mu = k, \quad k^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{\eta}\right)}.$$

Отже, знаходячи квадратний корінь та враховуючи, що знак (–) так само, як і для λ не має змісту, одержуємо:

$$\mu(V) = \kappa(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\eta}}}.$$

Отже, перетворення набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x' &= \kappa(V)(x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \kappa(V)\left(t - \frac{V}{\eta(V)}x\right) \end{aligned} \tag{76}$$

або, точніше:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\eta(V)}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \left[\frac{V}{\eta(V)}\right]x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\eta(V)}}}, \tag{77}$$

де $\eta(V)$ - поки невідома функція V.

5. Для визначення вигляду $\eta(V)$ звернемося знову до принципу відносності. Очевидно, що перетворення (76) повинні бути універсальними і застосовними при будь-яких переходах від однієї інерціальної системи відліку (ІСВ) до іншої довільної ІСВ. Таким чином, якщо ми двічі перейдемо від системи K до K' і від K' до K'', то одержані формули повинні також мати вид перетворень (76).

Скористаємося цією вимогою, а саме щоб ці перетворення утворювали групу.

Нехай V_1 - швидкість системи K' відносно K і V_2 - швидкість системи K'' відносно системи K'. Тоді згідно з (76)

$$x' = \kappa(V_1)(x - V_1 t), \quad x'' = \kappa(V_2)(x' - Vt'),$$

$$t' = \kappa(V_1)\left(t - \frac{V_1 x}{\eta(V_1)}\right), \quad t'' = \kappa(V_2)\left(t' - \frac{V_2 x'}{\eta(V_2)}\right).$$

Виражаючи x'' і t'' через x і t, одержуємо:

$$x'' = \kappa(V_2)\kappa(V_1)\left[x - V_1 t - V_2\left(t - \frac{V_1}{\eta(V_1)}x\right)\right],$$
$$t'' = \kappa(V_1)\kappa(V_2)\left[t - \frac{V_1}{\eta(V_1)}x - \frac{V_2}{\eta(V_2)}(x - Vt)\right]. \quad (78)$$

Але згідно зі сформульованою вище вимогою ці ж перетворення повинні записуватися у вигляді (76), тобто:

$$x'' = \kappa(V_3)(x - V_3 t)),$$
$$t'' = \kappa(V_3)\left(t - \frac{V_3}{\eta(V_3)}x\right). \quad (79)$$

Коефіцієнти, що стоять при x в першій з цих формул і при t в другій, однакові. Отже, в зв'язку з тотожністю формул (78) і формул (79), повинні бути однакові і коефіцієнти, що стоять при x в першій із формул (78) і при t у другій із формул (78), тобто:

$$\kappa(V_2)\kappa(V_1)\left[1+\frac{V_1V_2}{\eta(V_1)}\right]=\kappa(V_1)\kappa(V_2)\left[1+\frac{V_2V_1}{\eta(V_2)}\right].$$

Остання рівність може бути задоволена тільки при $\eta(V_2)=\eta(V_1)=const.$

6. Отже, в перетвореннях (77) η є константою, що має розмірність квадрата швидкості. Величина і навіть знак цієї константи не можуть бути визначені без залучення будь-яких нових допущень, що спираються на дослідні факти.

Якщо припустити що $\eta=\infty$, то перетворення (77) перетворюються на відомі перетворення Галілея $x'=x-Vt, y'=y, z'=z, t'=t.$

Ці перетворення, справедливі в механіці малих швидкостей ($V \ll c$), і не можуть бути прийняті як точні перетворення, які справедливі при будь-яких швидкостях руху тіл.

Таким чином, константа η повинна бути вибрана кінцевою.

З досліду відомо, що при великих швидкостях, порівняних зі швидкістю світла, рівняння руху механіки має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)=\vec{f}, m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (80)$$

де m_0- власна маса, що співпадає з масою частинки при малих швидкостях ($V \ll c$), c - константа, що має розмірність швидкості і чисельно рівна $3\cdot 10^8\, м/с$.

Константа c^2 має таку ж розмірність, яку має і η, що входить у формули перетворення координат і часу (77). Природно тому припустити:

$$\eta=c^2, \qquad (81)$$

оскільки в експериментально одержану залежність маси від швидкості не входить ніяка інша константа, що має квадрат швидкості. Приймаючи цю рівність, перетворення (77) записуються у вигляді:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \ y' = y, \ z' = z, \ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{82}$$

А. Пуанкаре назвав ці перетворення координат і часу перетвореннями Лорентца.

Зворотні перетворення Лорентца, очевидно, повинні бути записані у вигляді:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \ y = y', \ z = z', \ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Звичайно, йдучи шляхом окресленим ще в першій роботі Ейнштейна, замість формули залежності маси від швидкості використовують постулат про постійність швидкості світла у вакуумі. Згідно з цим постулатом при переході від системи K до системи K' повинно залишатися інваріантним рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, що описує фронт сферичної світлової хвилі, яка розповсюджується з початку координатної системи K. Рівняння $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$ після підстановки формул перетворення (77) не змінює свого вигляду, тобто це рівняння переходить в попереднє, лише в тому випадку, якщо $\eta = c^2$ (детальніше див. **п. 1.7.**).

У книзі Терлецького Я.П. [15, с. 23-31], як бачимо, пропонується інше доведення ПЛ, що не використовує постулат про постійність швидкості світла.

Таким чином, вдалося показати, що перетворення Лорентца можуть бути одержані незалежно від способу сигналізації, вибраного для синхронізації годинника, який фіксує час настання події. Фізики могли б взагалі нічого не знати про швидкість світла і про закони електродинаміки, проте могли б одержати перетворення Лорентца, аналізуючи факт залежності маси від швидкості і спираючись на механічний принцип відносності.

Слід зазначити в першу чергу, що цей метод використовує властивості простору і часу (однорідність простору і часу, ізотропія та симетричність простору) у найбільш загальному вигляді. Використовуючи групові властивості перетворень координат події при переході від однієї системи відліку до іншої та принцип відносності разом із «залежністю маси від швидкості» Терлецькому Я.П. вдалося одержати оригінальним шляхом ПЛ без посилання на ПСШС.

1.9. Метод Логунова А.О.

Розглянемо метод обґрунтування ПЛ, що запропонований у «Лекціях…» Логунова А.О. [22]

Механіка Ньютона встановила, що геометрія нашого світу евклідова, а час абсолютний. Але електродинаміка свідчить, що простір і час об’єднані в одну геометрію (чотиривимірну) і що ця геометрія – псевдоевклідова. А коли задана геометрія простору, то в цьому просторі можна вводити різні системи координат.

«Міньковський зрозумів, що суть теорії відносності, а саме спеціальної теорії відносності, в тому, що всі фізичні процеси відбуваються у просторі-часі, геометрія якого псевдоевклідова. Такого розуміння суті СТВ у Ейнштейна у той час ще не було» [22, с. 26]:

Система координат (ct, і $\vec{r}$ - три декартові координати), в якій має місце метрика

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \qquad (83)$$

називається галілеєвою системою координат [22, с. 34].

Візьмемо вираз для інтервалу в галілеєвій системі координат

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

і виконаємо перетворення Галілея:

$$x = X - Vt\,;\; t = T\,;\; y = Y\,;\; z = Z\,. \qquad (84)$$

Обернені перетворення мають вигляд:

$$X = x + Vt\,;\; T = t\,;\; Y = y\,;\; Z = z\,, \qquad (85)$$

де X, Y, Z, T - галілеєві координати.

Візьмемо диференціали від обох частин рівнянь (85) і підставимо dT, dX, dY, dZ у вираз для інтервалу (83), отримаємо:

$$ds^2 = c^2dt^2(1 - \frac{V^2}{c^2}) - 2Vdxdt - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (86)$$

У правій частині рівності (86) виник вираз $dxdt$. Щоб він зник, необхідно у (86) виділити повний квадрат. І в результаті отримаємо:

$$ds^2 = c^2\left[dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right]^2 - \frac{dx^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2. \qquad (87)$$

Таким чином, ми бачимо, що вираз (87) для інтервалу ds^2 складається з двох частин: додатної і від’ємної. Додатна частина в цьому інтервалі має часоподібний характер, а від’ємна частина – просторовоподібний.

Далі вводимо новий час:

$$T' = t\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{V}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (88)$$

і нові координати:

$$X' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (89)$$

$$Y' = y\,;\; Z' = z.$$

Тоді вираз для квадрату інтервалу (87) в цих змінних буде мати точно такий же вигляд як і (83), але диференціали координат і часу будуть штрихованими:

$$ds^2 = c^2 dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2.$$

Тобто два послідовних перетворення (84) і (88), (89) залишають метрику формінваріантною.

Підставляючи вирази (84) у (88) і (89), отримаємо перетворення Лорентца:

$$T' = \frac{T - \frac{VX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ;\ X' = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ;\ Y' = Y\ ;\ Z' = Z\ . \quad (90)$$

Обернені перетворення мають вигляд:

$$T = \frac{T' + \frac{VX'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ;\ X = \frac{X' + VT'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ;\ Y = Y'\ ;\ Z = Z'\ .$$

«Таким чином, ми ввели нове поняття часу (T') і нову координату (X'), так, що вираз для квадрату інтервалу має діагональний характер….Всі фізичні процеси можна описувати у будь-яких допустимих координатах (t, x, y, z) і цей опис буде таким же повноцінним як і в координатах (T, X, Y, Z). Однак при цьому величини (t, x, y, z) уже будуть координатними величинами, безпосередньо не зв'язаними з фізичними величинами» [22, с. 36].

Таким чином, перетворення Лорентца виражають загальні властивості простору і часу для будь-яких фізичних процесів. Ці перетворення, як це з'ясувалося в процесі доведення, складають безперервну групу, названу групою Лорентца. У цьому факті, в найбільш загальному вигляді відображаються властивості простору і часу, розкриті теорією відносності.

1.10. Кінематичний метод доведення перетворень Лорентца

Нехай координати деякої події у СВ K та у СВ K' дорівнюють, відповідно: (x,t), (x',t'). Оскільки ці координати має одна і та ж подія, то повинні існувати однозначні математичні залежності:

$$x' = \varphi(x,t),\ t' = \psi(x,t). \tag{90a}$$

Знайдемо вигляд цих функцій – формул перетворення координат будь-якої події при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Для цього розглянемо наступні три події (див. рис. 12).

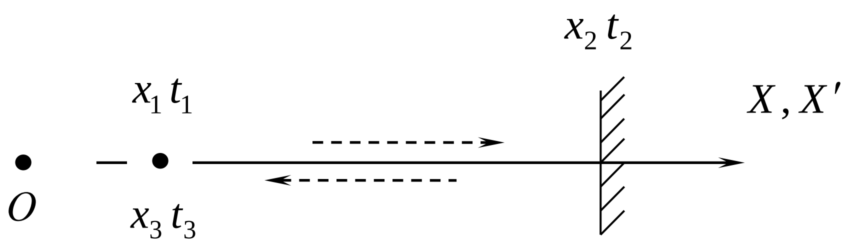

Рис. 12. До обґрунтування ПЛ кінематичним методом

1. У момент часу t_1 в точці з координатою x_1 на осі OX СВ K відбувся спалах світла.

2. У момент часу t_2 у точці з координатою x_2 цей світловий імпульс (сигнал, спалах) віддзеркалився і

3. У вихідну точку ($x_1 = x_3$) він прийшов у момент часу t_3 (див. рис. 12).

З точки зору СВ K' ці три події мають координати $x_1'\,t_1'$, $x_2'\,t_2'$ й $x_3'\,t_3'$ відповідно.

Причому $x_1' \neq x_3'$.

Маємо очевидні співвідношення у СВ K:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c\,,\quad \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = -c\,,\quad x_1 = x_3\,, \tag{91}$$

та у СВ K':

$$\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}=c\,,\quad \frac{x_3'-x_2'}{t_3'-t_2'}=-c\,,\quad \frac{x_3'-x_1'}{t_3'-t_1'}=-V\,. \qquad (92)$$

Точку $x_1=x_3$ на осі OX СВ K рухається зі швидкістю V у напрямку від’ємних значень осі $O'X'$ СВ K'.

Рівняння (92) можна подати у вигляді:

$$t_2'-t_1'=\frac{x_2'-x_1'}{c},\ t_3'-t_2'=-\frac{x_3'-x_2'}{c},\ t_3'-t_1'=-\frac{x_3'-x_1'}{V}.$$

Із третього співвідношення віднімаємо друге:

$$t_3'-t_2'=-\frac{x_3'-x_1'}{V}-\frac{x_2'-x_1'}{c},$$

та ураховуючи друге, одержуємо:

$$\frac{x_3'-x_2'}{c}=\frac{x_3'-x_1'}{V}+\frac{x_2'-x_1'}{c}.$$

Тобто маємо низку рівнянь:

$$V\left(x_3'-x_2'\right)-c\left(x_3'-x_1'\right)-V\left(x_2'-x_1'\right)=0,$$

$$\left(V-c\right)x_3'-2Vx_2'+\left(c+V\right)x_1'=0,$$

$$\left(c-V\right)x_3'+2Vx_2'-\left(c+V\right)x_1'=0.$$

Таким чином, наша шукана функція $x'=\varphi\left(x,t\right)$ задовольняє наступному рівнянню:

$$\left(c-V\right)\varphi\left(x_3,t_3\right)+2V\varphi\left(x_2,t_2\right)-\left(c+V\right)\varphi\left(x_1,t_1\right)=0.$$

У цьому рівнянні шість величин x_1,t_1,x_2,t_2,x_3,t_3 не незалежні (див (91)).

Урахуємо (91) і залишимо незалежними наступні три величини: x_1,t_1,x_2, оскільки величини t_2,x_3,t_3 можна виразити через x_1,t_1,x_2. Дійсно із (91) маємо:

$$t_2-t_1=\frac{x_2-x_1}{c},\ t_2=t_1+\frac{x_2-x_1}{c},\ t_3-t_2=-\frac{x_3-x_2}{c}.$$

Або

$$t_3=t_2-\frac{x_3-x_2}{c}=t_1+\frac{x_2-x_1}{c}-\frac{x_1-x_2}{c}=t_1+2\frac{x_2-x_1}{c},$$

де враховано вираз для t_2 та $x_1 = x_3$.

Таким чином, одержуємо функціональне рівняння для визначення функції $\varphi(x,t)$:

$$(c-V)\varphi\left(x_1, t_1 + 2\frac{x_2 - x_1}{c}\right) + 2V\varphi\left(x_2, t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}\right) - (c+V)\varphi(x_1, t_1) = 0,$$

яке повинно виконуватися для будь-яких значень величин x_1, t_1, x_2.

Знайдемо похідну останнього рівняння за x_2:

$$\begin{aligned}&(c-V)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x_1, t_1 + 2\frac{x_2 - x_1}{c}\right)\frac{2}{c} + 2V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(x_2, t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}\right) + \\ &+ 2V\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x_2, t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}\right)\frac{1}{c} = 0\end{aligned} \qquad (93)$$

У цьому диференціальному рівнянні візьмемо $x_1 = x_2 = x$ і $t_1 = t$. І тоді отримуємо:

$$\left(1 - \frac{V}{c}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + V\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{V}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) = 0.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0. \qquad (94)$$

Якщо ввести нові змінні $\xi = x - Vt$ і $\eta = x + Vt$, то рівняння (94) набуває вигляду:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0. \qquad (95)$$

Тобто загальний розв’язок (95) слід записати у вигляді:

$$\varphi = F(x - Vt), \qquad (96)$$

де F - невідома функція $\xi = x - Vt$.

Для знаходження цієї функції F підставимо розв’язок (96) у диференційне рівняння (93). У результаті отримаємо:

$$\left(1-\frac{V}{c}\right)(-V)F'\left(x_1-Vt_1-2\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right)+$$
$$+VF'\left(x_2-Vt_1-\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right)+\frac{V}{c}(-V)F'\left(x_2-Vt_1-\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right)=0.$$

Після алгебраїчних перетворювань маємо:

$$V\left(1-\frac{V}{c}\right)F'\left(x_1-Vt_1-2\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right)=V\left(1-\frac{V}{c}\right)F'\left(x_2-Vt_1-\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right),$$

$$F'\left(x_1-Vt_1-2\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right)=F'\left(x_2-Vt_1-\frac{V}{c}(x_2-x_1)\right). \quad (97)$$

Оскільки при довільних x_1, x_2, t_1 аргументи функцій правої і лівої частини (97) різні і можуть приймати довільні значення, то (97) буде справедливим тоді і тільки тоді, коли $F' = const$.

Таким чином, функція F має вигляд:

$$F=\alpha(x-Vt)+\beta,$$

де α і β деякі постійні.

Отже, наша шукана функція $\varphi(x,t)$ дорівнює:

$$\varphi(x,t)=\alpha(x-Vt)+\beta.$$

Аналогічно може бути показано, що функція ψ має вигляд:

$$t'=\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)+\delta.$$

А самі формули перетворення (90а) можна записати як:

$$x'=\alpha(x-Vt)+\beta,\ t'=\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)+\delta, \quad (98)$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ деякі постійні.

Застосовуючи формули (98) до події з координатами $(0,0)$ для β,δ одержуємо $\beta=\delta=0$.

Для знаходження постійних $\alpha,\ і\ \ \gamma$ у формулах перетворення

$x' = \alpha(x - Vt)\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c}x\right)$ скористаємося першими двома

співвідношеннями (92) та (91):

$$c = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{\alpha(x_2 - Vt_2) - \alpha(x_1 - Vt_1)}{\gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right)} = \frac{\alpha(x_2 - x_1) - \alpha V(t_2 - t_1)}{\gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma V}{c^2}(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{\alpha c(t_2 - t_1) - \alpha V(t_2 - t_1)}{\gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma V}{c}(t_2 - t_1)} = \frac{\alpha}{\gamma}c$$

$$-c = \frac{x_3' - x_2'}{t_3' - t_2'} = \frac{\alpha(x_3 - Vt_3) - \alpha(x_2 - Vt_2)}{\gamma\left(t_3 - \frac{V}{c^2}x_3\right) - \gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right)} = \frac{\alpha(x_3 - x_2) - \alpha V(t_3 - t_2)}{\gamma(t_3 - t_3) - \frac{\gamma V}{c^2}(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{-\alpha c(t_3 - t_2) - \alpha V(t_3 - t_2)}{\gamma(t_3 - t_2) + \frac{\gamma V}{c}(t_3 - t_2)} = -\frac{\alpha}{\gamma}c$$

Тобто, $\alpha = \gamma$.

$$x' = \alpha(x - Vt),\ t' = \alpha\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

Із цих двох формул перетворення одержуємо функції $x(x',t')$ та $t(x',t')$:

$$x = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}x' + \frac{V}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}t',$$

$$t = \frac{V}{c^2\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}x' + \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}t'.$$

Використовуючи далі міркування наведені на в **пункті 1.2** цього посібника, доходимо висновку, що $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

І, таким чином, нарешті, можна записати перетворення Лорентца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{99}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

РОЗДІЛ 2
ПОРІВНЯЛЬНА ХАРЕКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ ОБҐРУНТУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОРЕНТЦА

Розмаїття методів обґрунтування перетворень Лорентца ініціює проблему порівняння цих методів з опертям на критерії загальності, доступності та прозорості. Вибір методів обґрунтування перетворень Лорентца у процесі навчання залежить також і від уподобань того чи іншого викладача.

Слід сказати, що кожен із десяти більш менш конспективно описаних у РОЗДІЛІ 1 методів віддзеркалює певний (а інколи і важливий) аспект (сторону, чи положення) розуміння сутності як власне СТВ так і наслідків ПЛ.

На наше переконання, теоретичне обґрунтування фундаментальних положень фізики є дуже важливим у процесі фахової підготовки вчителя фізики. Обґрунтування ПЛ у цьому контексті не є виключенням.

Окрім того, на формування фізичного стилю мислення та наукового світогляду студентів-фізиків особливий вплив має теоретичне обґрунтування наступних принципових положень фізики (звичайно, цей перелік не є повним), зокрема:

- обґрунтування рівняння Максвелла шляхом узагальнення «фундаментальних експериментальних законів електродинаміки» та одержання сукупності наслідків цих рівнянь [29; 30; 31];

обґрунтування статистичного розподілу Гіббса й сукупності низки результатів статистичної термодинаміки, одержаних при застосуванні розподілу Гіббса;

обґрунтування і використання принципу найменшої дії у класичній та релятивістській механіці й електродинаміці [29];

обґрунтування нерелятивістського рівняння Шредінгера та використання його у різноманітних квантово-механічних задачах;

обґрунтування 4-вимірного формалізму у фізиці та одержання на цьому шляху низки важливих положень, як-то: релятивістське рівняння руху точкової маси, закон збереження енергії-імпульсу, поперечний ефект Допплера і т.д. [8; 28];

обґрунтування рівнянь Максвелла виходячи із принципу відносності й закону Кулона [29].

Перш за все умовно диференціюємо методи обґрунтування ПЛ на абстракті та фізичні.

До першої групи, з нашої точки зору, можна віднести такі методи:

- *Метод, що ґрунтується на поданні ПЛ як повороту* системи координат в площині ict, X у 4-вимірному просторі-часі.

Важливо зазначити, що недоліком цього методу якраз і є використання поняття «повороту» СВ K' у 4-вимірній системі координат (4-вимірному просторі-часі Міньковського), що виглядає як формальний і доволі абстрактний метод обґрунтування ПЛ.

- *Метод, запропонований у посібнику Терлецького Я.П.* «Парадоксы теории относительности» (див. [15]), у якому доведення перетворень Лорентца здійснене без постулату про сталість швидкості світла. При цьому були урахувані властивості симетрії простору і часу: однорідності простору і часу, ізотропія простору, симетрія простору відносно заміни вектора швидкості $\vec{V}$ руху СВ K' на $-\vec{V}$.

Принцип відносності разом з вимогою того, що шукані перетворення об'єдналися у групу, дозволили одержати співвідношення $\eta(V_2) = \eta(V_1) = const$ (див. **п. 1.8**).

Але у книзі Терлецького Я.П. [15, с 23-31], пропонується доведення ПЛ, що не використовує постулат про постійність швидкості світла. І це є позитивним моментом.

Проте слід розуміти, що вислів – «метод не використовує постулат про сталість швидкості світла» – досить умовний. Це з першого погляду здається, що в книзі Терлецького Я.П. [15, с 23-31] взагалі не використовується ПСШС.

Дійсно, у посібнику Терлецького Я.П. ПСШС ніяк не згадується до формул (77):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\eta(V)}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \left[\frac{V}{\eta(V)}\right]x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\eta(V)}}}.$$

Сама можливість обґрунтувати формули (77), які є майже перетвореннями Лорентца, виходячи із самих загальних властивостей простору і часу і показати, що η є константою з розмірністю квадрата швидкості, говорить про глибинний зв'язок ПЛ з властивостями простору і часу.

А от саме значення коефіцієнта η вдалося визначити, використовуючи так звану «залежність маси від швидкості» $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, тобто $\eta = c^2$.

На наш погляд, останній момент в обґрунтуванні ПЛ (знаходження значення коефіцієнта η) явно слабкий. Дійсно, поняття «залежність маси від швидкості» доволі суперечливе та неоднозначне. У сучасній фізиці та методиці її навчання таке поняття визначається як некоректне [8; 28].

І нарешті, посилання на так звану «залежність маси від швидкості» $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, неявно передбачає використання релятивістського рівняння руху точкової маси (80), яке не може бути строго обґрунтованим без використання обох постулатів СТВ [6; 8; 20; 28].

На наш погляд, метод Терлецького Я.П. цікавий, по-перше, застосуванням у загальному вигляді властивостей простору і часу (однорідність простору і часу, ізотропія та симетричність простору), групових властивостей ПЛ та принципу відносності в процесі обґрунтування формул (77) – ПЛ.

По-друге, цікава, з позицій методики фізики і з позицій фізики як науки, сама реалізація способу використання загальних положень фізики для одержання конкретного математичного результату (82) – перетворень Лорентца.

Наш досвід викладання як теоретичної так загальної фізики свідчить про те, що шляхи одержання фундаментальних положень фізики із вихідних принципів, які не мають конкретного математичного формулювання, сприймаються студентами з певними труднощами. А в **п.1.8**, аналізуючи метод Терлецького Я.П., ми маємо ефективну і результативну ілюстрацію такого шляху.

Таким чином, вдалося довести, за словами Терлецького Я.П, «…що перетворення Лорентца можуть бути одержані незалежно від способу сигналізації, вибраного для синхронізації годинника, який фіксує час настання події. Фізики могли б взагалі нічого не знати про швидкість світла і про закони електродинаміки, однак могли б одержати перетворення Лорентца, аналізуючи факт залежності маси від швидкості і виходячи з механічного принципу відносності. Таким чином, ПЛ відображають загальні властивості простору і часу для будь-яких фізичних процесів. Ці перетворення, як було показано у процесі доведення, складають неперервну групу, яка називається групою Лорентца. У цьому факті у найбільш загальному вигляді відображаються властивості простору і часу, які відкриті теорією відносності» [15, с. 31].

- *Метод, запропонований у книзі Логунова А.О. «Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы»* (див. [22]) виглядає доволі екзотичним. На нашу думку особливо дивною виглядає підстановка у вираз для квадрату інтервалу $ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$ перетворень Галілея (формули (86) і (87)) з тим, щоб потім виділенням повного квадрату одержати врешті решт ПЛ.

Не менш дивним є введення нового часу

$T' = t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{V}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ і нової координати $X' = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, які після підстановки перетворень Галілея $x = X - Vt$; $t = T$ у ці формули, набувають вигляду ПЛ.

Виникає логічне запитання: «Який фізичний зміст нового часу та нової координати»? Відповіді немає.

У «Лекціях… » справедливо віддається належна данина роботам Г. Міньковського. Тому академік Логунов А.О. в основу викладу теорії відносності бере 4-вимірний простір-час: «Теория относительности – это открытие единой псевдоевклидовой геометрии пространства и времени для электромагнитных явлений и ее распространение в качестве гипотезы на все формы материи» [22, с.7].

Але в цих «Лекціях… » цікавим є спосіб обґрунтування лорентцевого скорочення з використанням властивостей просторово-подібного інтервалу.

Із відомих нам посібників тільки у «Лекціях… » Логунова А.О. поданий такий спосіб обґрунтування формули $dl' = dl_0\sqrt{1-B^2}$ (див. Додаток Д).

І, таким чином показано, що лорентцеве скорочення є наслідком структури 4-вимірного простору-часу й процедури вимірювання рухомого відрізку.

- *Кінематичний метод доведення перетворень Лорентца*. Цей спосіб обґрунтування ПЛ носить має обтяжливий і математично ускладнений характер. Приведений він тут виходячи виключно із урахуванням мети даного посібника і для того, щоб підкреслити переваги інших методів. Ми вважаємо, що при систематичному вивчення СТВ цей метод обґрунтування ПЛ використовувати не бажано.

До другої групи методів обґрунтування ПЛ віднесемо наступні:

- *Традиційний метод, що ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна,* є, на нашу думку, найбільш чітким і послідовним у контексті застосування постулатів СТВ для знаходження коефіцієнтів, доведення лінійності ПЛ та доведення формул: $y' = y, \quad z' = z$.

Таким чином, при обґрунтування ПЛ цим методом послідовно і прозоро використовуються постулати СТВ (як принцип відносності так і принцип ПСШС). Окрім того, для обґрунтування $y' = y, \quad z' = z$ плідно, наочно та результативно використовуються властивості симетрії простору: однорідність та ізотропія. У процесі роботи над навчальним матеріалом щодо обґрунтування ПЛ слід звернути особливу увагу на способи використання властивостей симетрії простору.

Метод k- коефіцієнту (радіолокаційний метод). Звідки бачимо, що при обґрунтуванні ПЛ цим методом активно використовується другий постулат СТВ (ПСШС), процедура синхронізації годинників та означення настання події: моменту відбивання світлового сигналу за годинником СВ K від дзеркала у СВ K'. Тому при самостійному аналізі методу k- коефіцієнту необхідно акцентувати увагу на означення часу настання події в довільній точці простору довільної системи відліку. Важливо також усвідомити та зрозуміти процедуру синхронізації годинників. У той же час акад. Логунов А.О вважає, що процедура синхронізації годинників не має принципового значення: «Таким образом, произвол в синхронизации часов, отмеченный Рейхенбахом, показывает, что путь построения теории относительности, избранный Эйнштейном, является не однозначным. Это обстоятельство внесло путаницу в понимание сущности теории относительности, особенно в выделение в ней главного и второстепенного.….Однако мнение, что центральным пунктом специальной теории относительности является понятие одновременности, глубоко ошибочно. Понятие одновременности основано на процедуре синхронизации часов. Синхронизации же часов, как показал Рейхенбах, может быть достаточно произвольной Она является простым следствием того или иного выбора координатной системы. Более того, существуют такие координатные системы (например, ускоренные), в которых синхронизация часовне не может быть осуществлена, хотя описание физических процессов в такой системе возможно и в рамках специальной теории относительности» [22, с. 32-33].

- *Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня.*

Для чіткого усвідомлення та розуміння цього методу необхідно знати зміст явища лорентцевого скорочення. А саме, чому стержень (чи відрізок), який рухається вздовж своєї довжини, має довжину меншу власної довжини. Низка методів за допомогою яких обґрунтовується лорентцеве скорочення **без використання ПЛ** подано у Додатках А, В, Д, Е.

- *Метод, що ґрунтується на використанні формул різночасовості та лорентцевого скорочення*.

Особливістю методу запропонованого Малініним О.М. для доведення ПЛ, є використання формул різночасовості (40), лорентцевого скорочення, сповільнення ходу рухомого годинника (40а), які одержують без використання перетворень Лорентца (див. Додатки А, Д, Е, Ж). Тому , на нашу думку, слід зосередити увагу на обґрунтуванні та поясненні указаних вище формул ((40), (40а)). Надзвичайно важливим є обґрунтування формули різночасовості (40), яка визначає проміжок часу між двома подіями у деякій системі відліку при умові, що у власній системі відліку ці події відбулися одночасово. Бажано, при самостійному вивченні основ СТВ, спосіб доведення формули (40) порівняти з шляхами обґрунтування формули різночасовості (51), (Б.3).

- *Метод безпосереднього виведення перетворень Лорентца (метод Угарова В.О.).* Цей метод цікавий тим, що детально аналізується зміст як перетворень Лорентца, так і проміжних співвідношень, необхідних для обґрунтування ПЛ. При цьому наголос робиться на процедурі синхронізації годинників у довільній системі відліку та порівнянні показів годинників системи K та системи відліку K', які виявилися внаслідок відносного руху СВ K та СВ K' в одній і тій же точці простору.

Крім пояснення цих особливостей у методі запропонованому В.О. Угаровим, важливим є розуміння результату порівняння показів годинників у СВ K та СВ K' (додаткові пояснення див. у Додатку Б).

Незважаючи на те, що процедура синхронізації годинників в будь-яких інерціальних системах відліку однакова, у всіх точках простору годинники СВ K' й СВ K, які опинилися в цій точці простору будуть показувати різний час. Тобто годинники синхронізовані в одній системі відліку, розсинхронізовані з точки зору будь якої іншої системи відліку.

Іншими словами, якщо, наприклад, в СВ K' одночасово (за годинниками СВ K') зафіксувати покази всіх годинників СВ K, то виявляється, що годинники в СВ K у різних точках СВ K' показують різний час (див. також Додаток Б). Нам видається, що ця особливість є надзвичайно важливою і визначальною при розгляді, поясненні й розумінні кінематики СТВ та перетворень Лорентца.

У процесі самостійної роботи студентам рекомендується порівняти формулу (52), одержану без опертя на ПЛ, з формулою (Б.1) Додатка Б, яка одержана з використанням перетворень Лорентца. Доречно повторити шлях обґрунтування формули ПЛ для часу, оскільки цей шлях, на наш погляд, є суто фізичним порівняно з іншими методами доведення ПЛ. Дійсно, у ту мить, коли покази годинника СВ K виставлені на нуль, $t=0$, покази годинника СВ K', який знаходиться в точці з координатою x, визначаються формулою (52):

$$t'(x,t=0) = -\Gamma \frac{B}{c} x .$$

Очевидно, що в точку x в момент часу t переміститься той годинник із СВ K', який в момент $t=0$ знаходився в точці $x-Vt$ і який, згідно з (52), відставав від опорного годинника на проміжок часу $\left(-\Gamma\frac{B}{c}(x-Vt)\right)$. На цей проміжок часу годинник із СВ K', який в момент $t=0$ знаходився в точці $x-Vt$, буде відставати завжди. Але в момент t опорний годинник показує час $t_1'=\frac{t}{\Gamma}$.

Тому годинник СВ K' в точці x покаже час $t'(x,t)=\frac{t}{\Gamma}-\Gamma\frac{B}{c}(x-Vt)=\Gamma\left(t-\frac{B}{c}x\right)$.

- *Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу з точки зору двох інерціальних систем відліку*. Очевидно, в основу цього методу обґрунтування ПЛ покладено інваріантність рівняння хвилевої поверхні сферичної електромагнітної хвилі в двох довільних системах відліку K і K':

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0.$$

З науково-методичної точки зору цей метод є найбільш простим та доступним у математичному відношенні, однак більш детального обґрунтування потребують формули (63), (64), (65).

Отже, узагальнюючи результати порівняльного аналізу методів обґрунтування ПЛ, можна у процесі вивчення СТВ *рекомендувати* наступне:

Використовувати найбільш прості, в математичному та фізичному сенсі, методи обґрунтування ПЛ, якими можна послуговуватись при навчанні як загального курсу фізики у ВНЗ так і в загальноосвітніх школах з поглибленим вивчення фізики в умовах диференційованого навчання, зокрема:

- Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня. Використовується у посібниках [10; 23].

- Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу з точки зору двох інерціальних систем відліку. Використовується у посібниках [20; 34;].

Більш наочною, прозорою та вишуканою у фізичному сенсі є група наступних методів:

- Традиційний метод, що ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна Використовуються фундаментальні положення фізики ПВ, ПСШС, властивості симетрії простору і часу, але у студентів складається враження штучності цього способу. Використовується у посібниках [6; 7; 8; 14].

- Метод безпосереднього виведення перетворень Лорентца (метод Угарова В.О.). Використовується у посібниках [8; 9].

- Метод, що ґрунтується на використанні формул різночасовості та лорентцевого скорочення (метод Малиніна О.М.).

- Метод k- коефіцієнту (радіолокаційний метод). Використовується у посібниках [8; 9; 12].

І тому їх бажано використовувати під час вивчення СТВ студентами фізиками, і зокрема, майбутніми вчителями фізики:

В принципі можна запропонувати й інші методи обґрунтування ПЛ, які є певною комбінацією розглянутих вище, або такі, що використовують сукупність елементів (аспектів) методів нами проаналізованих.

Наприклад, виходячи із міркувань, за допомогою яких ми одержали (17), вивести формулу подібну до (17), але при переході від СВ K' до СВ K:

$$x'(x,t) = \Gamma(x - Vt),$$
$$x(x',t') = \Gamma(x' + Vt').$$

Розв’язуючи систему алгебраїчних рівнянь:

$$x'(x,t) = \Gamma(x - Vt),$$
$$x(x',t') = \Gamma(x' + Vt')$$

та використовуючи інваріантність рівняння хвилевої поверхні сферичної електромагнітної хвилі в двох довільних системах відліку K і K' (метод, описаний у п. 1.7), знаходимо:

$$t'(x,t) = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right),$$

$$t(x',t') = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right).$$

Завдання для самоконтролю. Приклади розв’язання задач

Пропонуємо наступну методику самостійної роботи при розв’язанні пропонованих для самоконтролю завдань.

1. Самостійно розв’язати задачі для самоконтролю.

2. Співставити логіку їх розв’язання з запропонованими прикладами вирішення задач.

3. При наявності помилок у самостійному розв’язанні, з’ясувати причини та усунути їх.

Задача 1. Пояснити метод k- коефіцієнту за допомогою діаграми Міньковського.

Розв’язання: Оскільки другий світловий імпульс від СВ K до СВ K' посилається в момент $t_1 = T$ (а перший імпульс посилається до СВ K' в ту мить, коли початки координат СВ K та СВ K' співпадають, й при цьому $t = t' = 0$.), то тоді в СВ K' цей сигнал *за годинником системи* K' буде прийнятий в момент:

$$t_1' = kT .$$

Тобто, kT – час прибуття світлового сигналу в СВ K' за годинником системи K' (Рис.13).

Іншими словами, якщо в початку координат системи K' знаходиться дзеркало, тоді другий посланий сигнал відіб’ється від K' через проміжок часу kT за годинником K', але спостерігач в СВ K прийме його після віддзеркалення через проміжок часу:

$$t_2 = kt_1' = k \cdot kT = k^2 T .$$

Тобто, за годинником СВ K, 2-й віддзеркалений сигнал прийде в т. O в момент $t_2 = k^2 T$.

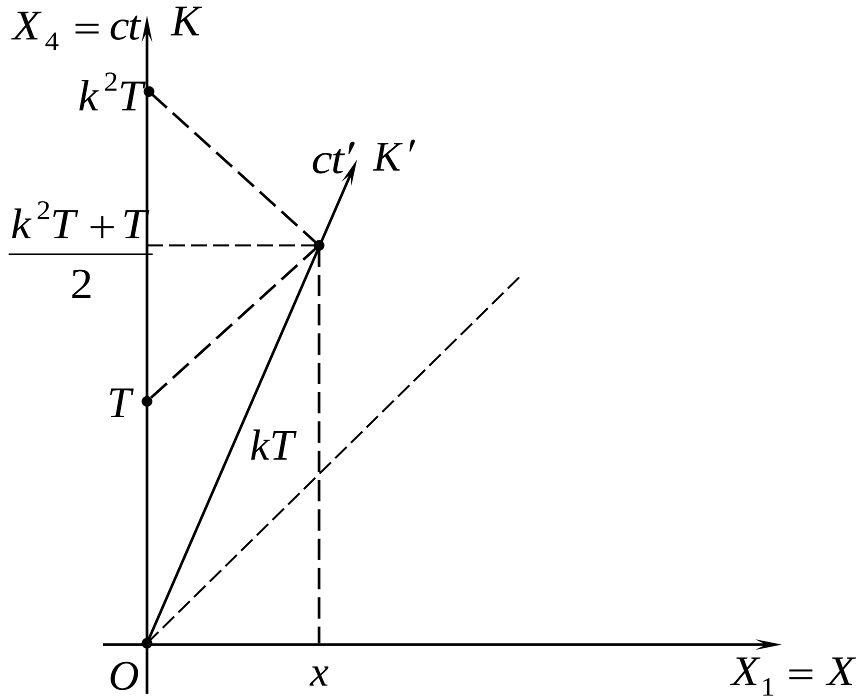

Рис. 13. Пояснення методу k - коефіцієнту на діаграмі Міньковського

І відповідно на осях СВ K й СВ K' відмічаємо ці відрізки (див. рис. 13).

Тоді, очевидно, $\frac{k^2 \cdot T + T}{2}$ - момент відбиття сигналу від СВ K' за годинником системи K. Або, що те ж саме, момент часу за годинником СВ K, коли світловий сигнал наздогнав СВ K'.

Задача 2. Проілюструвати на діаграмі Міньковського спосіб обґрунтування перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнту.

Розв'язання: Детальний опис способу обґрунтування перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнту поданий в пункті **1.3**.

Тому відповідна діаграма Міньковського має вигляд, зображений на рис. 14.

В точці P відбулася деяка подія, координати якої (x,t) збігаються з просторовою та часовою координатами приходу світлового сигналу в т. P, який в початковий момент часу «випущений» із т. O;

Так, лінії на рис. 14 означають наступне:

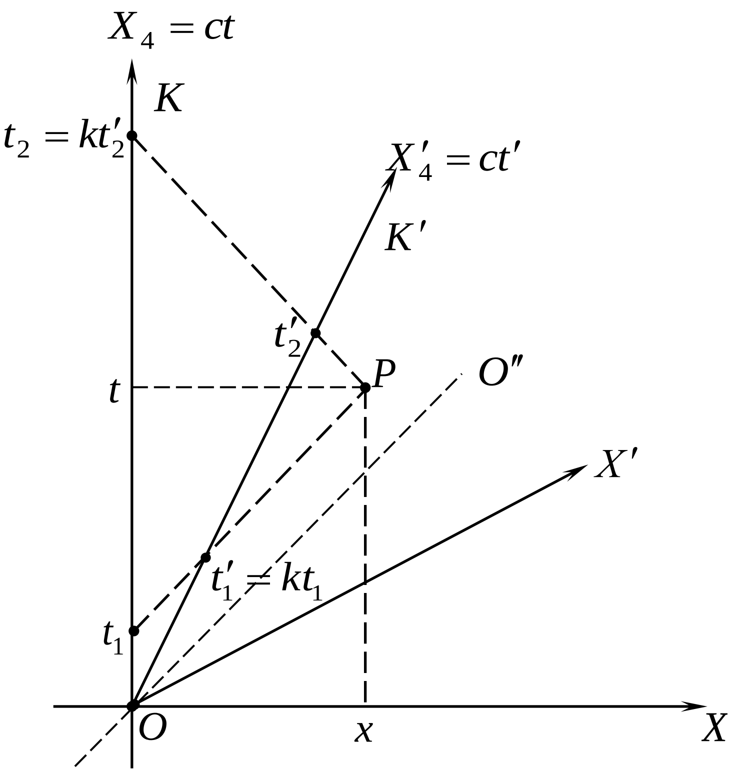

Рис. 14. Діаграма Міньковського щодо обґрунтування перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнту

OX_4 - світова лінія нерухомого в СВ K спостерігача;

OX_4' - світова лінія початку координат СВ K' (т. O');

t_1P - світова лінія світлового сигналу, що посланий із т. O, в момент часу t_1 за годинником СВ K, до точки P;

OO'' - світова лінія кванта світла, випроміненого із т. O в момент $t = 0$;

Pt_2 - світова лінія світлового сигналу, який відзеркалився в точці P і поширюється назад до початку координат СВ K (точка O);

t_1', t_2' - моменти часу, за годинником СВ K', отримання спостерігачем в початку координат СВ K' світлового сигналу при поширенні його до т. P і при поширенні сигналу від т. P (після віддзеркалення) до СВ K (точка O);

x, t - просторова та часова координати події в т. P.

Має сенс показати на діаграмі Міньковського і час настання події та просторову координату події з точки зору СВ K' (рис. 15).

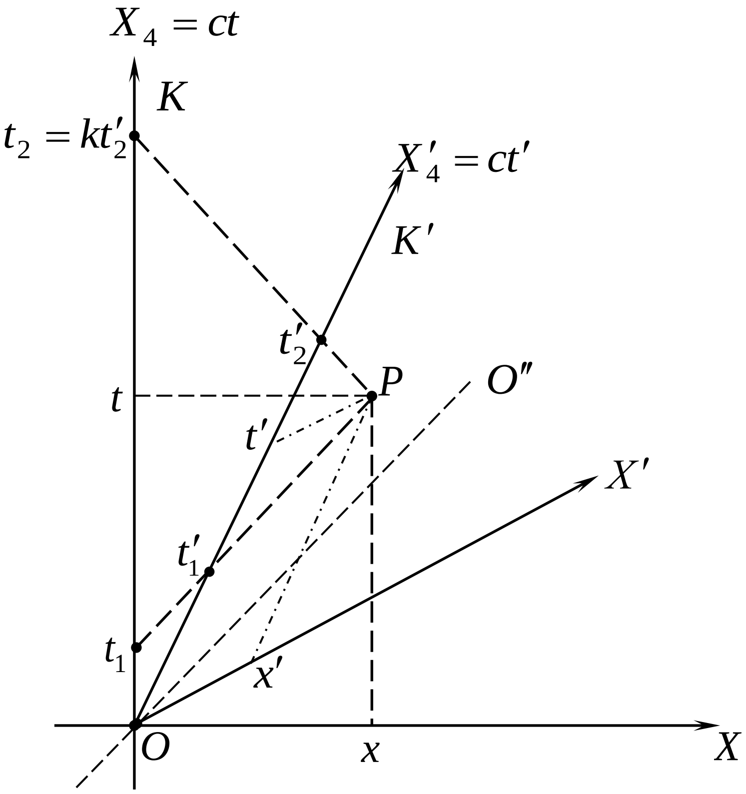

Рис. 15. Координати події в т. P в СВ K' (x', t') та в СВ K (x, t) на діаграмі Міньковського

Задача 3. Знайти довжину рухомого стержня по відомій швидкості руху стержня відносно СВ K [24, с. 146-147; 10].

Розв'язання: Нехай в СВ K знаходиться годинник в т. А (рис. 16). Мимо цього годинника пролітає з швидкістю V стержень. Очевидно, що довжина рухомого стержня дорівнює $l = V\Delta t$, де Δt – час прольоту стержня мимо т. А.

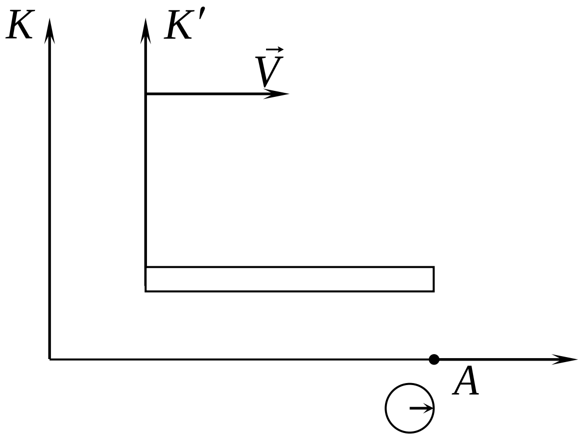

Рис. 16. В СВ K мимо годинника A пролітає зі швидкістю V стержень

Власна довжина стержня, очевидно, дорівнює:

$$l_0 = V\Delta t',$$

де $\Delta t'$ - час прольоту стержня мимо точки A за годинником СВ K'.

Але для спостерігача, зв'язаного з СВ K', час прольоту буде іншим, ніж час прольоту його мимо т. A за годинником СВ K, а саме:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-B^2}}. \qquad (100)$$

Формула (100) має саме **такий вигляд**, а не

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-B^2}}, \qquad (101)$$

тому, що годинник із СВ K, який показав Δt, рухається відносно СВ K' і його покази порівнюються з показами двох годинників СВ K' (додаткові пояснення див. Додаток Ж).

Для відношення довжин стержня в СВ K та СВ K' маємо:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{V\Delta t}{\Delta t' V} = \sqrt{1-B^2}.$$

Таким чином, ми одержали формулу лорентцевого скорочення:

$$l = l_0\sqrt{(1-B^2)}.$$

Відповідь: $l = l_0\sqrt{(1-B^2)}$.

Задача 4. Знайти довжину рухомого стержня по одночасному в СВ K' спалаху лампочок на кінцях нерухомого в СВ K' стержня [8, с. 71-72].

Розв'язання: Відносність довжин – прямий наслідок відносності одночасності.

Дійсно, нехай в СВ K' вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стержень. Власна довжина його, очевидно, дорівнює:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \Delta x'.$$

Нехай на кінцях стержня знаходиться лампочки і нехай вони одночасно спалахують в СВ K' ($\Delta t' = 0$), рис. 17.

Ці дві події будемо реєструвати в СВ K.

Знайдемо відстань між точками, в яких відбулися ці дві події з точки зору спостерігача СВ K. Використовуючи перетворення Лорентца, одержуємо:

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' + V\Delta t') = \Gamma\Delta x' = \frac{l_0}{\sqrt{1-B^2}} = l_0 \cdot \Gamma . \qquad (102)$$

Методично доцільним було б порівняння (102) з формулою (42), але яка одержана на основі іншого підходу.

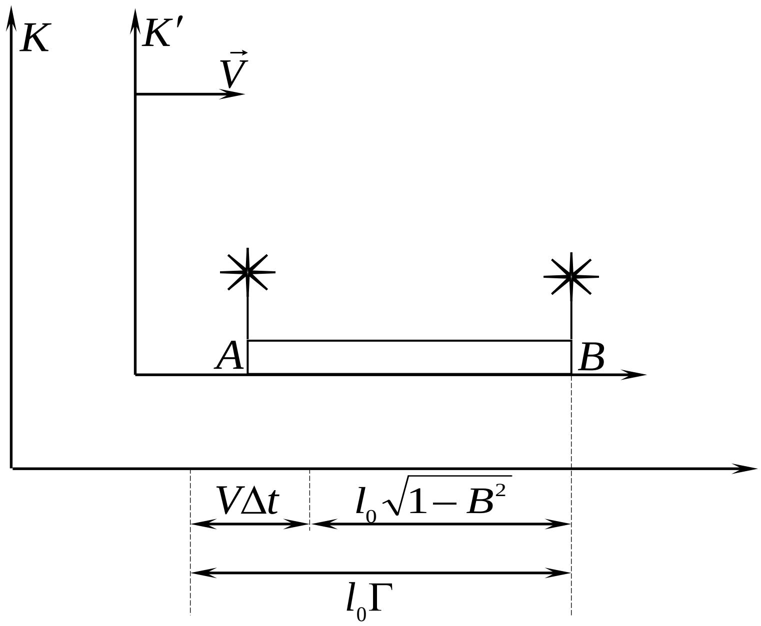

Рис. 17. В СВ K' вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стержень, а на кінцях стержня знаходяться лампочки і вони одночасно спалахують в СВ K' ($\Delta t' = 0$)

Оскільки $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} > 1$ при будь-якому значенні швидкості СВ K' (швидкості стержня V), то, як бачимо із (102), $\Delta x > l_0$.

Але в формулі (102) Δx – це не довжина стержня в СВ K. Щоб знайти довжину стержня в системі відліку K необхідно знайти **координати кінців**

стержня в СВ K в один і той же момент часу за годинниками СВ K. Тобто, одночасно зафіксувати координати т. A та т. B.

Але одночасні в СВ K' події відбуваються в системі в СВ K з відносним запізненням (див. також формулу різночасовості (40), одержану іншим незалежним методом):

$$\Delta t = \Gamma(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x') = \frac{\Gamma V}{c^2} \Delta x' . \qquad (103)$$

Тобто, $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, де t_1- момент спалаху лампочки в т. A, t_2- момент спалаху лампочки т. B. З точки зору спостерігача в СВ K спочатку спостерігається спалах лампочки в т. A, а потім, через проміжок часу Δt, (103), спалахує і лампочка, яка знаходиться в т. B.

І за цей проміжок часу лівий кінець (т. A) стержня в напрямі руху пройде відрізок (рис. 17):

$$V\Delta t = \Gamma \frac{V^2}{c^2} l_0 .$$

Таким чином, довжина рухомого стержня буде менша ніж Γl_0 на величину $V\Delta t$ (див. рис. 17). І шукана довжина стержня в СВ K дорівнює:

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1-B^2}} - \Gamma \frac{V^2}{c^2} l_0 = l_0 \sqrt{1-B^2} .$$

Відповідь: $l = l_0 \sqrt{(1-B^2)}$.

Задача 5. Дві нестабільні частинки рухаються в СВ K вздовж деякої прямої зі швидкістю $V = 0{,}99c$. Віддаль між ними в цій СВ дорівнює $l = 120$*м.* У деякий момент часу частинки розпалися одночасно в системі відліку, яка зв'язана з ними (СВ K'). Знайти проміжок часу між моментами розпаду обох частинок в лабораторній системі відліку.

Розв'язання: Згідно з перетвореннями Лорентца, оскільки частинки розпалися одночасно в СВ K', маємо:

$$t_2 - t_1 = \frac{(x_2' - x_1')\, V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

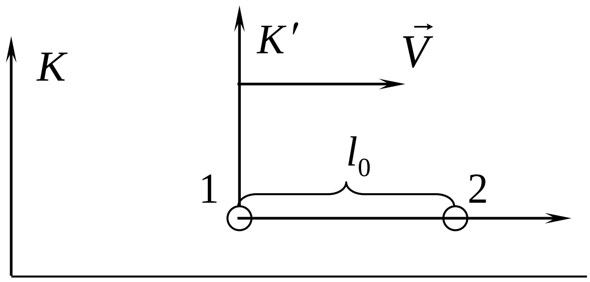

Рис. 18. Дві нестабільні частинки рухаються в СВ K вздовж деякої прямої зі швидкістю V

Але $x_2' - x_1' = l_0$ - це власна довжина стержня, яка зв'язана з його довжиною в СВ K співвідношенням (див. Рис. 18):

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

Тому проміжок часу між моментами розпаду обох частинок в лабораторній системі відліку дорівнює:

$$t_2 - t_1 = \frac{l\,\dfrac{V^2}{c^2}}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}.$$

$t_2 - t_1 > 0$, тому 2-а частинка (що рухалася першою згідно з рис. 18), розпалася раніше.

Доцільно порівняти знайдений проміжок часу з формулою різночасовості (40) та результатами задачі Додатка Б (Б.3).

Відповідь: $t_2 - t_1 = \dfrac{l\,\dfrac{V^2}{c^2}}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$

Задача 6. Стержень AB рухається вздовж осі OX системи відліку K зі швидкістю V (Рис. 19).

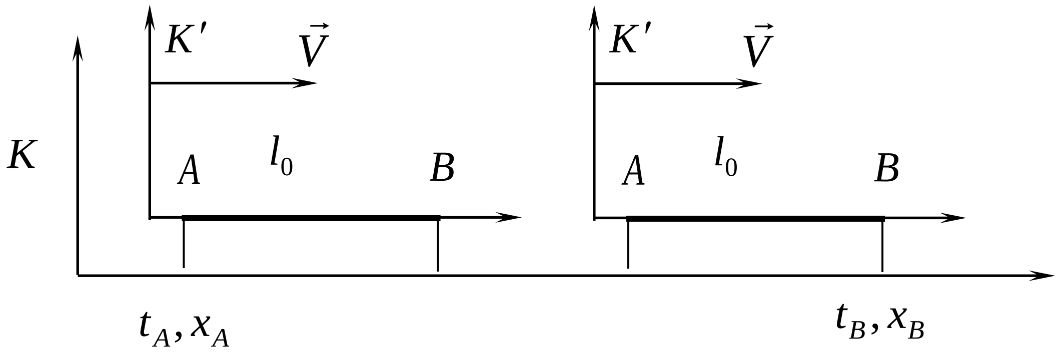

Рис. 19. Стержень AB рухається вздовж осі OX системи відліку K зі швидкістю V

Знайти:

А) власну довжину стержня, якщо в момент t_A координата точки A дорівнює x_A, а в момент t_B координата точки B рівна x_B;

Б) через який проміжок часу необхідно зафіксувати координати початку і кінця стержня в СВ K, щоб різниця координат виявилася рівною власній довжині стержня?

Розв'язання: а) Згідно з перетвореннями Лорентца

$$x'_{2,1} = \frac{x_{2,1} - Vt_{2,1}}{\sqrt{1-B^2}}$$

для власної довжини $x'_2 - x'_1 = l_0$ маємо:

$$x'_2 - x'_1 = \Gamma((x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1)),$$

або враховуючи умову задачі

$$(x_B - x_A) - V(t_B - t_A) = l_0\sqrt{1-B^2}.$$

Тоді власна довжина стержня дорівнює:

$$l_0 = \frac{(x_B - x_A) - V(t_B - t_A)}{\sqrt{1-B^2}}.$$

б) Якщо зафіксувати координати початку та кінця стержня одночасно в СВ K, то його довжина (різниця цих координат) дорівнюватиме

$l_0\sqrt{1-B^2} < l_0$. Тому, щоб різниця координат дорівнювала l_0, необхідно передній кінець стержня зафіксувати трошки пізніше. Настільки пізніше, щоб за час Δt він пройшов відстань $\Delta t \cdot V$, яка задовольняє умові:

$$l_0 = l_0\sqrt{1-B^2} + \Delta t \cdot V$$

Тобто, шуканий проміжок часу дорівнює:

$$t_B - t_A = \Delta t = \frac{l_0 - l_0\sqrt{1-B^2}}{V} = \frac{l_0}{V}\cdot\left(1-\sqrt{1-B^2}\right).$$

Відповідь: власна довжина стержня дорівнює: $l_0 = \dfrac{(x_B - x_A) - V(t_B - t_A)}{\sqrt{1-B^2}}$, а проміжок часу дорівнює: $t_B - t_A = \Delta t = \dfrac{l_0}{V}\cdot\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)$

Задача 7. Стержень $A'B'$ рухається з постійною швидкістю $\vec{V}$ відносно стержня AB (Рис. 20). Обидва стержні мають однокову власну довжину l_0, причому на кінцях кожного з них встановлені синхронізовані між собою годинники: A з B та A' з B'. Ту мить, коли годинники B' і A виявилися навпроти один одного будемо вважати за початок відліку часу в системах відліку, які зв'язані з кожним із стержнів. Визначити:

А) покази годинників B та B' в момент коли вони будуть навпроти один одного;

Б) покази годинників A і A' в ту мить, коли і вони виявляться навпроти один одного.

Розв'язання: Щоб годинник B' виявився навпроти годинника B йому, очевидно, необхідно переміститися на віддаль $l_0 = AB$. Час необхідний для цього за годинниками A з B (за годинником СВ K) дорівнює $\frac{l_0}{V}$. Тобто, годинник B у цю мить буде показувати час $t(B)=\frac{l_0}{V}$.

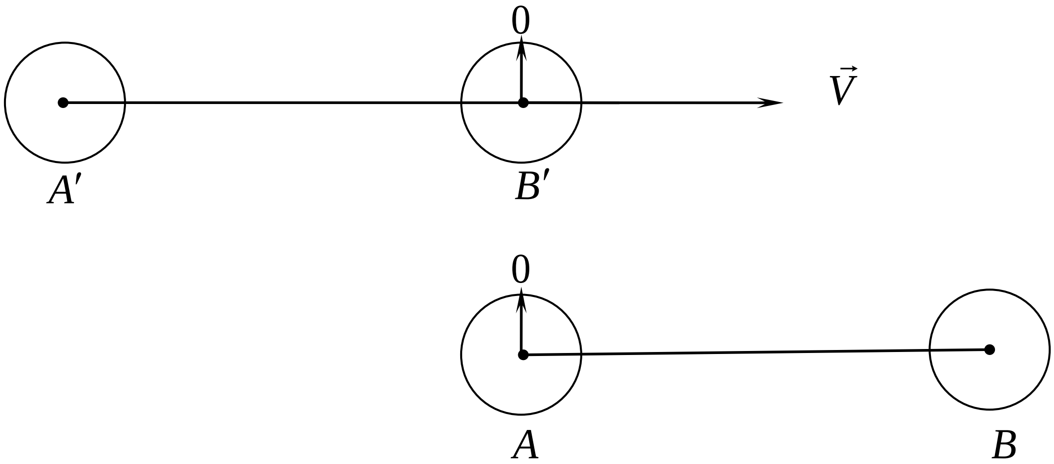

Рис. 20. Відносне положення стержня $A'B'$ та стержня AB в ту мить, коли годинники B' і A виявилися навпроти один одного

А годинник B' у момент співпадання B' і B у просторі, згідно з перетвореннями Лоренца (очевидно, що з годинниками A' *та* B' зв'язана СВ K'), буде показувати час:

$$t'(x,t)=\Gamma\left(t-\frac{B}{c}x\right)=t(B').$$

Звідси одержуємо:

$$t(B')=\Gamma\left(t-\frac{B}{c}x\right)=\Gamma\left(t(B)-\frac{B}{c}l_0\right)=\Gamma\left(\frac{l_0}{V}-\frac{B}{c}l_0\right)=\frac{l_0}{V}\sqrt{1-B^2}.$$

З точки зору СВ K' (годинники A' *та* B', стержень $A'B'$) стержень AB рухається зі швидкістю $\vec{V}$ у напрямі від'ємних значень осі $O'X'$. Тому з точки зору СВ K' (з точки зору годинника A') годинник A буде навпроти A'

через проміжок часу $\frac{l_0}{V}$. Тобто, годинник A' у момент співпадання у просторі A' та A буде показувати час $t(A') = \frac{l_0}{V}$.

А згідно з перетвореннями Лорентца годинник A буде у цей момент показувати час:

$$t(x', t') = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right) = t(A).$$

Отже, маємо:

$$t(A) = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right) = \Gamma\left(t(A') + \frac{B}{c}(-l_0)\right) == \Gamma\left(\frac{l_0}{V} - \frac{B}{c}l_0\right) = \frac{l_0}{V}\sqrt{1 - B^2}.$$

Відповідь: $t(B) = \frac{l_0}{V}$, $t(B') = \frac{l_0\sqrt{1-B^2}}{V}$, $t(A) = \frac{l_0\sqrt{1-B^2}}{V}$, $t(A') = \frac{l_0}{V}$.

Задача 8. Нехай в момент, коли початки координат O і O' співпадають, покази годинників обох СВ K і K' в цих точках дорівнюють нулеві (див. Рис. 1). Чому дорівнює швидкість $\dot{x}$ переміщення точки, в якій покази годинників в обох системах відліку весь час будуть однаковими?

Розв'язання: Згідно з перетвореннями Лорентца маємо:

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Оскільки, згідно з умовою задачі $t = t'$, то попередня формула набуває вигляду:

$$t = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

І звідси одержуємо:

$$t(\Gamma - 1) = \Gamma\frac{V}{c^2}x.$$

Тоді швидкість переміщення точки, в якій покази годинників в обох системах відліку весь час будуть однаковими, дорівнює:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = \frac{(\Gamma - 1)}{V\Gamma} c^2 .$$

Відповідь: швидкість переміщення точки, в якій покази годинників в обох системах відліку весь час будуть однаковими, дорівнює $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = \frac{(\Gamma - 1)}{V\Gamma} c^2$.

Задача 9. Система відліку K' рухається відносно СВ K зі швидкістю $\vec{V}$, що направлена довільно. Обґрунтувати перетворення Лорентца для цього випадку [25; 26].

Розв'язання: Складова радіус-вектора $\vec{r}$, яка паралельна швидкості відносного руху, дорівнює $\vec{r}\frac{\vec{V}}{V}$. А перпендикулярна складова дорівнює (див. рис. 21):

$$\vec{r} - \left(\vec{r}\frac{\vec{V}}{V}\right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} .$$

Очевидно, що $\vec{r}\frac{\vec{V}}{V}$ перетворюється як координата x у спеціальному перетворенні (99), а перпендикулярна складова не змінюється (як координати y і z). Тому отримуємо:

$$\vec{r}\frac{\vec{V}}{V} = \frac{\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V} + Vt'}{\sqrt{1 - B^2}},$$

$$\vec{r} - \left(\vec{r}\frac{\vec{V}}{V}\right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} = \vec{r}\,' - \left(\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} .$$

Із двох останніх рівнянь маємо:

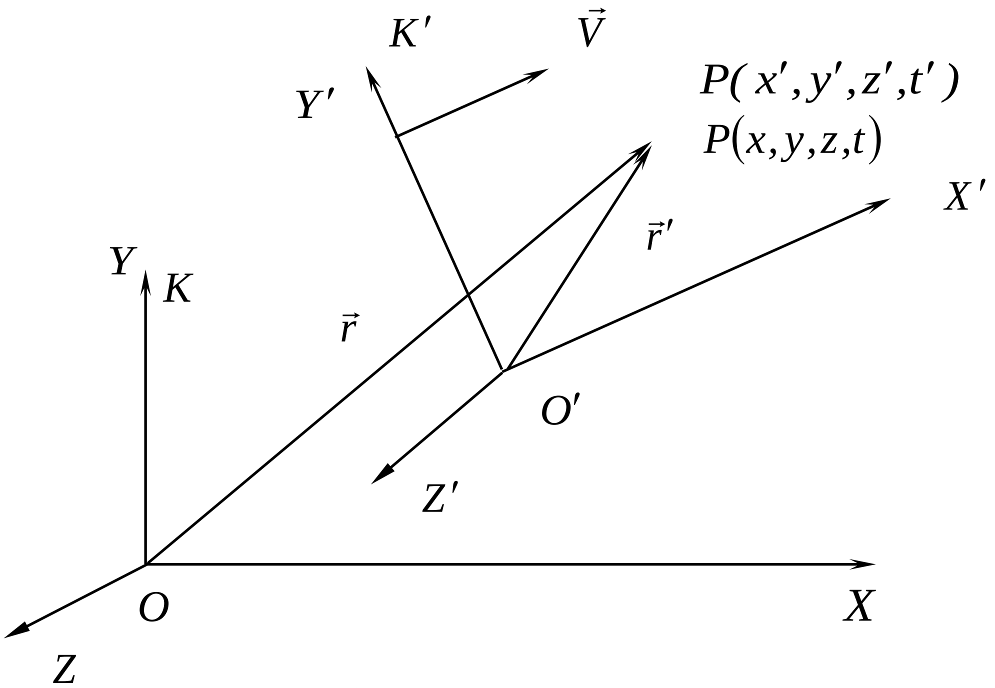

Рис. 21. Система відліку K' рухається відносно СВ K зі швидкістю $\vec{V}$, що направлена довільно

$$\vec{r} = \vec{r}\,' - \left(\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \left(\vec{r}\,\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} = \vec{r}\,' - \left(\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \frac{\vec{V}}{V}\cdot\frac{\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V} + Vt'}{\sqrt{1-B^2}} = .$$

$$= \vec{r}\,' - \left(\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \frac{\left(\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}t'}{\sqrt{1-B^2}}$$

Відповідь: Таким чином, одержуємо залежність радіус-вектора $\vec{r}$ від $\vec{r}\,'$ та $\vec{V}$ -швидкості руху СВ K' відносно СВ K:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' - \left(\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \frac{\left(\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}t'}{\sqrt{1-B^2}}, \qquad (104)$$

$$t = \frac{t' + \frac{\vec{r}\,'\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}. \qquad (105)$$

При переході від СВ K до СВ K' аналогічним шляхом одержуємо залежність радіус-вектора $\vec{r}\,'$ від $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \left(\vec{r}\,\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t}{\sqrt{1-B^2}},\ t' = \frac{t - \frac{\vec{r}\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Задача 10. Вивести релятивістську формулу додавання швидкостей для загального випадку довільної взаємної орієнтації векторів $\vec{V}$ та $\vec{\upsilon}\,'$, де $\vec{V}$ - швидкість руху СВ K' відносно СВ K, а $\vec{\upsilon}\,'$- швидкість руху частинки відносно СВ K' [25; 26].

Розв'язання: Знайдемо диференціал формул (105) і (105)із попередньої задачі:

$$d\vec{r} = d\vec{r}\,' - \left(d\vec{r}\,'\frac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\frac{\vec{V}}{V} + \frac{\left(d\vec{r}\,'\cdot\vec{V}\right)\frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}dt'}{\sqrt{1-B^2}},\ dt = \frac{dt' + \frac{d\vec{r}\,'\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Поділивши ліві і праві частини цих формул, одержуємо:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon} = \frac{\vec{V} + \vec{\upsilon}\,'\sqrt{1-B^2} + \frac{1}{V^2}\left(\vec{V}\vec{\upsilon}\,'\right)\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)}{1 + \frac{\vec{V}\vec{\upsilon}\,'}{c^2}}, \quad (106)$$

де $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - швидкість тіла відносно СВ K; $\vec{\upsilon}\,' = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt'}$- швидкість тіла відносно СВ K'; $\vec{V}$ - швидкість СВ K' відносно СВ K.

Припустимо, що відносна швидкість систем відліку $\vec{V}$ направлена вздовж вісі OX .

Тоді,

А) у випадку колінеарності векторів швидкостей $\vec{V}$ та $\vec{\upsilon}\,'$ маємо:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}\cdot\upsilon'_x};$$

Б) спроектувавши векторну формулу (106) на вісі OY та OZ, одержимо, що релятивістські формули додавання швидкостей для поперечних проекцій швидкостей матимуть вигляд:

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \cdot \sqrt{1-B^2}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\upsilon'_x}, \; \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \cdot \sqrt{1-B^2}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\upsilon'_x}.$$

Якщо розглядати релятивістське додавання швидкостей за умови, що швидкість $\vec{V}$ рухомої системи відліку K', відносно нерухомої K, значно менша швидкості світла у вакуумі (при цьому швидкість υ може бути будь-якою), то з точністю до доданків за порядком величин $\frac{V}{c}$ отримуємо вираз [5, с. 27]:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + V\left(1-\left(\frac{\upsilon'_x}{c}\right)^2\right), \; \upsilon_y = \upsilon'_y - \upsilon'_y\upsilon'_x\frac{V}{c^2}, \; \upsilon_z = \upsilon'_z - \upsilon'_z\upsilon'_x\frac{V}{c^2}$$

Останні три формули можна записати у векторній формі:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V} - \vec{\upsilon}'\frac{\left(\vec{\upsilon}'\vec{V}\right)}{c^2}.$$

Абсолютна ж величина швидкості дорівнює (після піднесення до квадрату формули (106)):

$$\upsilon = \frac{\sqrt{\left(\vec{\upsilon}'+\vec{V}\right)^2 - \left[\vec{\upsilon},\frac{\vec{V}}{c}\right]^2}}{1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}'}{c^2}}. \tag{107}$$

Відповідь: Релятивістська формула додавання швидкостей для загального випадку довільної взаємної орієнтації векторів $\vec{V}$ та $\vec{\upsilon}'$ є

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{V} + \vec{\upsilon}'\sqrt{1-B^2} + \frac{1}{V^2}\left(\vec{V}\vec{\upsilon}'\right)\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)}{1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}'}{c^2}}.$$

Релятивістські формули додавання швидкостей для проекцій швидкостей на вісі OX , OY та OZ відповідно, мають вигляд (за умови, що швидкість руху $\vec{V}$ СВ K' відносно СВ K направлена вздовж осі OX):

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x}, \ \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x}, \ \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x}. \qquad (108)$$

Задача 11. Знайти формули перетворення для декартових проекцій вектора прискорення частинки при переході від СВ K' до СВ K [25; 26].

Розв'язання: Нехай у СВ K' прискорення частинки відоме $\vec{a}'\left(a'_x, a'_y, a'_z\right)$,

де a'_x, a'_y, a' декартові проекції вектора прискорення частинки. Тоді використовуючи формули додавання швидкостей за Ейнштейном

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x}, \ \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x}, \ \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \upsilon'_x},$$

де $\vec{V}$ -швидкості руху СВ K' відносно СВ K; $\upsilon'_x, \upsilon'_y, \upsilon'_z$- компоненти швидкості частинки у СВ K'; $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$- компоненти швидкості цієї частинки у СВ K та диференціюючи перший вираз із попередніх трьох, для a_x маємо:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\left(1 + \frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)\frac{d\upsilon'_x}{dt'} - \frac{d\upsilon'_x}{dt'}\left(\upsilon'_x + V\right)\frac{V}{c^2} \cdot \frac{dt'}{dt}}{\left(1 + \frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)^2}.$$

Або після алгебраїчних спрощень:

$$a_x = \frac{\left(1 - B^2\right) \cdot a'_x}{\left(1 + \frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)^2} \frac{dt'}{dt}.$$

Оскільки похідна $\frac{dt'}{dt}$, з урахуванням ПЛ для часової координати (105) дорівнює:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-B^2}}{\left(1+\frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)},$$

то із попереднього виразу отримуємо:

$$a_x = \frac{\left(1-B^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)^3} a'_x.$$

Відповідь: Таким чином, формула перетворення для іксової проекції прискорення при переході від СВ K' до СВ K має вигляд:

$$a_x = \frac{\left(1-B^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{\upsilon'_x \cdot V}{c^2}\right)^3} a'_x. \qquad (109)$$

Задача 12. Ракета рухається прямолінійно з прискоренням $a' = const$ відносно супутньої СВ. Через який час (за Земним годинником) швидкість ракети буде $\upsilon = 0{,}8c$. Скільки часу пройде при цьому за власним годинником ракети?

Розв'язання: У супутньої СВ $\upsilon'_x = 0$, тому прискорення ракети відносно Землі, згідно з (109), дорівнює:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = a'\left(1-\beta^2\right)^{3/2}, \text{ або } \frac{d\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} = \frac{a' \cdot dt}{c}, \qquad (110)$$

де $\beta = \frac{\upsilon}{c}$, υ-миттєве значення швидкості ракети.

Після інтегрування (110) знаходимо:

$$\frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}=\frac{a'\cdot t}{c}, \text{ або } \upsilon=\frac{a't}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}. \qquad (111)$$

Згідно з умовою задачі $\upsilon = 0{,}8c$, тому

$$0{,}8c=\frac{a't}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}.$$

Звідси знаходимо час розгону ракети за Земним годинником:

$$t=\frac{4c}{3a'}.$$

При цьому власний час (час за годинником ракети), згідно з формулою (Ж.5) Додатка Ж, дорівнює:

$$\Delta\tau=\int_0^t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}}=\frac{c}{a'}\ln\left\{\frac{a'}{c}t+\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}\right\}=\frac{c}{a'}Arsh\left(\frac{a't}{c}\right);$$

$$\Delta\tau=\frac{c}{a'}\ln\left\{\frac{a'}{c}t+\sqrt{1+\left(\frac{a't}{c}\right)^2}\right\}=\frac{c}{a'}\ln\left\{\frac{a'4c}{c\cdot 3a'}+\sqrt{1+\left(\frac{a'\frac{4c}{3a'}}{c}\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{c}{a'}\ln 3$$

Відповідь: Таким чином, за Земним годинником час розгону ракети дорівнює: $t=\frac{4c}{3a'}$, а за годинником ракети - $\Delta\tau=\frac{c}{a'}\ln 3$.

Задача 13. Знайти формулу перетворення прискорення частинки при переході від СВ K' до СВ K [25].

Розв'язання: Знайдемо спочатку диференціал виразу (106):

$$d\vec{\upsilon} = \left\{ d\vec{\upsilon}'\sqrt{1-B^2} + \frac{1}{V^2}\left(\vec{V}\cdot d\vec{\upsilon}'\right)\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)\right\}\left(1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}'}{c^2}\right)^{-1} -$$

$$-\frac{\vec{V}}{c^2}d\vec{\upsilon}'\left\{\vec{V}+\vec{\upsilon}'\sqrt{1-B^2}+\frac{1}{V^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{\upsilon}'\right)\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)\right\}\left(1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}'}{c^2}\right)^{-2}.$$

Поділимо ліві і праві частини цього виразу на $dt = \dfrac{dt' + \dfrac{d\vec{r}'\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}} = dt'\dfrac{1+\dfrac{\vec{\upsilon}'\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}$ і одержуємо:

$$\vec{a} = \frac{1-B^2}{\left(1+\frac{\vec{\upsilon}'\vec{V}}{c^2}\right)^2}\vec{a}' + \frac{1-B^2}{\left(1+\frac{\vec{\upsilon}'\vec{V}}{c^2}\right)^3}\frac{\left(\vec{a}'\cdot\vec{V}\right)}{c^2}\left\{\vec{\upsilon}'+\frac{c^2}{V^2}\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)\right\},$$ де

$\vec{a}' = \dfrac{d\vec{\upsilon}'}{dt'}$ - прискорення частинки відносно СВ K'.

*Відповідь:*Таким чином, при переході від СВ K' до СВ K тривимірне прискорення частинки перетворюється згідно з формулою:

$$\vec{a} = \frac{1-B^2}{\left(1+\frac{\vec{\upsilon}'\vec{V}}{c^2}\right)^2}\vec{a}' + \frac{1-B^2}{\left(1+\frac{\vec{\upsilon}'\vec{V}}{c^2}\right)^3}\frac{\left(\vec{a}'\cdot\vec{V}\right)}{c^2}\left\{\vec{\upsilon}'+\frac{c^2}{V^2}\vec{V}\left(1-\sqrt{1-B^2}\right)\right\}. \qquad (112)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Пояснити властивості симетрії простору і часу.

2. Як Ви розумієте постулати СТВ?

3. Що називається квадратом інтервалу між двома нескінченно близькими подіями?

4. Що являють собою точки 4-вимірного багатовиду СТВ?

5. У чому полягає сутність і зміст спеціальної теорії відносності?

6. Показати, що квадрат інтервалу між двома нескінченно близькими подіями є інваріантом.

7. Показати, що рух однієї системи відліку відносно іншої в 4-вимірному просторі Міньковського можна подати як поворот системи координат у цьому 4-вимірному просторі.

8. Використовуючи відповідь на запитання № 7 та інваріантність квадрату інтервалу, обґрунтувати перетворення Лорентца.

9. Знайти орієнтацію часової та просторової осей системи відліку K' відносно осей СВ K на діаграмі Міньковського.

10. Пояснити на діаграмі Міньковського відносність одночасності довільних двох подій.

11. За допомогою рис. 3. пояснити систему рівнянь (3).

12. Показати, виходячи із принципу відносності, що коефіцієнти Γ *і* Γ', які входять у вирази (18) однакові: $\Gamma = \Gamma'$.

13. Використовуючи систему рівнянь (18) одержати вираз $t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x$ та $t = \gamma \cdot t' - \delta \cdot x$, де $\gamma = \Gamma$, $\delta = \dfrac{1-\Gamma^2}{\Gamma V}$, $\Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

14. Обґрунтувати вирази (15) використовуючи властивості симетрії простору і часу.

15. Описати метод k - коефіцієнту та знайти значення коефіцієнта k.

16. Обґрунтувати перетворення Лорентца методом k - коефіцієнту.

17. Використовуючи метод Угарова В.О. (**п. 1.6**) знайти величину розсинхронізації годинників СВ K з точки зору СВ K'. *Відповідь:* $t = \dfrac{x'V/c^2}{\sqrt{1-B^2}}$.

18. Користуючись методом Угарова В.О. (**п. 1.6)** знайти координату точки x у СВ K, якщо в момент t' координата точки в системі K' була рівна x'.

Відповідь: $x(x',t') = \Gamma(x' + Vt')$.

19. Обґрунтувати, використовуючи групові властивості перетворень (77), співвідношення $\eta(V_2) = \eta(V_1) = const$.

20. Показати, використовуючи властивості симетрії простору і часу, що коефіцієнти $\kappa(V), \lambda(V), \mu(V), \eta(V)$ є симетричні функції V.

21. Показати, використовуючи властивості симетрії простору і часу, та ураховуючи особливості методу Терлецького Я.П. (див. **п. 1.8**), що між коефіцієнтами $\lambda, \mu, \kappa, \eta$, що входять у перетворення Лорентца, існує такий зв'язок: $\lambda(V)\lambda(-V) = 1,\ \ \mu = k,\ \ k^2 = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{V^2}{\eta}\right)}$.

22. Відрізок, власна довжина якого l_0, знаходиться у спокої в СВ K'. Користуючись методом Логунова А.О. (див. Додаток Д), знайти його довжину в СВ K.

23. Користуючись способом розв'язання ***Задачі 9*** знайти радіус-вектор $\vec{r}\,'$ по відомому радіус-вектору $\vec{r}$ та напряму швидкості $\vec{V}$ руху СВ K' відносно СВ K.

Відповідь: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \left(\vec{r}\,\dfrac{\vec{V}}{V}\right)\cdot\dfrac{\vec{V}}{V} + \dfrac{\left(\vec{r}\cdot\vec{V}\right)\dfrac{\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t}{\sqrt{1-B^2}}$.

24. Користуючись способом розв'язання ***Задачі 11*** одержати формули перетворення для ігрекової та зетої проекцій вектора прискорення при переході від СВ K' до СВ K.

$$\text{\textit{Відповідь:}}\ a_y = \frac{\left(1-B^2\right)\cdot\left[\left(1+\frac{\upsilon'_x\cdot V}{c^2}\right)a'_y - \frac{V\upsilon'_y}{c^2}a'_x\right]}{\left(1+\frac{\upsilon'_x\cdot V}{c^2}\right)^3},$$

$$a_z = \frac{\left(1-B^2\right)\cdot\left[\left(1+\frac{\upsilon'_x\cdot V}{c^2}\right)a'_z - \frac{V\upsilon'_z}{c^2}a'_x\right]}{\left(1+\frac{\upsilon'_x\cdot V}{c^2}\right)^3}.$$

25. Використовуючи (112) одержати, як наслідок, формули перетворення для ігрекової та зетої проекцій вектора прискорення при переході від СВ K' до СВ K (див. Завдання 24) та формулу (109).

26. Обґрунтувати формули розсинхронізації (формули різночасовості) годинників (40), (51), (52), (Б.1), (Б.2), (Б.3).

27. Пояснити зміст формул розсинхронізації (формул різночасовості) годинників (40), (51), (52), (Б.1), (Б.2), (Б.3).

ПІСЛЯМОВА

Шановні колеги! Ось ми і завершили самостійний науково-методичний аналіз методів обґрунтування перетворень Лорентца. Перетворення Лорентца – одне із фундаментальних положень спеціальної теорії відносності.

Отже, огляд науково-методичної літератури дозволив виділити десять методів обґрунтування ПЛ:

$$x(x',t',V)=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ y=y',\ z=z',\ t(x',t',V)=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (113)$$

Зворотні перетворення Лорентца (при переході від СВ K до СВ K'), очевидно, повинні бути записані у вигляді:

$$x'(x,t,V)=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'(x,t,V)=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (114)$$

Фізична сутність ПЛ полягає у наступному. Так, момент часу $t'(x,t,V)$, який визначається перетвореннями Лорентца - це те, що показує годинник із СВ K', який знаходиться в цю мить (момент t) в точці x СВ K. Таким чином, годинник із набору годинників СВ K', який буде в точці x, показує момент t', що не співпадає з часом, що показує годинник із СВ K.

А $t(x',t',V)$ - момент часу, що його показує годинник СВ K, який знаходиться у момент часу t' (за годинником СВ K') в точці x' СВ K'. Аналогічно доходимо висновку, що годинник із набору годинників СВ K, який буде в точці x', показує момент t, який не співпадає з часом, що показує годинник із СВ K'.

Далі, формула для $x(x',t',V)$ у ПЛ (113) визначає координату деякої події у СВ K, при умові, що у СВ K' координата та час настання цієї події дорівнюють відповідно x' і t'.

Аналогічно, із (114), якщо x - це координата деякої точки (події) в СВ K і годинник в цій системі відліку показує момент часу t, то координата цієї події з точки зору СВ K' буде $x'(x,t,V)$.

Саме тому значна увага фізиків-науковців концентрувалася на дослідженні методів обґрунтування ПЛ. У своїй роботі розмаїття цих методів ми умовно систематизували в дві групи.

Перша група скала так звані «абстрактні методи»:

- Метод, оснований на поданні ПЛ як повороту системи координат в площині ict, X у 4-вимірному просторі-часі.
- Метод Терлецького Я.П.
- Метод Логунова А.О.
- Кінематичний метод доведення перетворень Лорентца.

До другої групи методів обґрунтування ПЛ, що мають більш яскравий фізичний зміст, нами віднесені:

- Традиційний метод, що ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна.
- Метод k - коефіцієнту (радіолокаційний метод).
- Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лоренцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня.
- Метод, що ґрунтується на використанні формул різночасовості та лорентцевого скорочення.
- Метод безпосереднього виведення перетворень Лорентца (метод Угарова В.О.).
- Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу з точки зору двох інерціальних систем відліку.

Кожен із методів обґрунтування ПЛ, описаних у даному посібнику, має свої переваги і недоліки. Але кожен із доповнює і збагачує наше розуміння як перетворень Лорентца так і основних положень спеціальної теорії відносності.

На наше переконання важливим є усвідомлення того факту, що годинники, які синхронізовані в одній системі відліку є роз синхронізованими з точки зору іншої СВ. Ця особливість у показах годинників СВ K' і СВ K, які у межах своєї системи відліку синхронізовані однотипно (однаково), але є розсинхронізованими з точки зору іншої системи відліку, ілюструється рисунком 11 та відповідними поясненнями методу Угарова В.О., а також результатами Додатку Б. Стосовно останнього результати, методу Угарова В.О та результати Додатку Б доповнюють один одного.

Тобто із ПЛ ми одержуємо важливий висновок. Незважаючи на те, що всі годинники, наприклад, СВ K' синхронізовані між собою в СВ K', вони є розсинхронізованними у СВ K (рис. Б.1, та рис. 11).

Практика викладання у вищій школі засвідчує, що при вивченні СТВ, як правило звертається увага тільки на досить прості наслідки ПЛ, зокрема, на відносність одночасності, що суперечить дидактичним принципам фундаменталізації та науковості.

Тому, ми ще раз наголошуємо на важливості формули розсинхронізації (формули різночасовості) годинників (40), (51), (52), (Б.1), (Б.2), (Б.3).

Зокрема, із формули (52)

$$t'(x, t=0) = -\Gamma \frac{B}{c} x$$

з очевидністю видно, що ж показують в момент часу $t = 0$ (за годинником СВ K) годинники СВ K', які знаходяться в точках з координатою x. При цьому величина розсинхронізації залежить від того, в якій точці СВ K порівнюються покази годинників.

Аналогічно, час, який показують годинники СВ K (у момент $t' = 0$ за годинником СВ K'), що знаходяться в точках з координатою x' визначається (див. (Б.2)):

$$t(x',t'=0)=\Gamma\frac{B}{c}x'.$$

Ці наслідки ПЛ є дуже важливими для розуміння як перетворень Лорентца так і для спростування парадоксів СТВ.

Автор навчального посібника сподівається, що матеріали пропоновані у ньому для самостійного опрацювання читачами, сприятимуть більш глибокому розумінню перетворень Лорентца, спеціальної теорії відносності загалом, та спростуванню її парадоксів, зокрема.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. 1. – М. : Наука, 1965. – 700 с

2. Пуанкаре А. О динамике электрона / А. Пуанкаре // Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности ; под ред. Тяпкина А.А. – М. : Атомиздат, 1973. – С. 118.

3. Минковский Г. Пространство и время / Г. Минковский // Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности ; под ред. Тяпкина А.А. – М. : Атомиздат, 1973. – С. 167-180.

4. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л.И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 437 с.

5. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.

6. Беккер Р. Электронная теория / Р. Беккер. – Л. : ОНТИ, 1936. – 416 с.

7. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности : учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А.Н. Матвеев. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

8. Угаров В.А. Специальная теория относительности / В.А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

9. Воробьев И.И. Теория относительности в задачах / И.И. Воробьев. – М. : Наука, 1989. – 174 с.

10. Иродов И.Е. Механика. Основные законы / И.Е. Иродов. – [6-е изд.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.

11. Малинин А.Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А.Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.

12. Пеннер Д.И. Электродинамика и теория относительности / Д.И. Пеннер, В.А. Угаров. – М. : Просвещение, 1980. – 271 с.

13. Савельев И.В. Основы теоретической физики : в 2 т. / И.В. Савельєв. – Т. 1 : Механика и электродинамика. – М. : Наука, 1975. – 416 с.

14. Терлецкий Я.П. Электродинамика : учеб. пособие [для студ. физ. спец. ун-тов] / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. – М. : Высшая шк., 1990. – 352 с.

15. Терлецкий Я.П. Парадоксы теории относительности / Я.П. Терлецкий. – М. : Наука, 1966. – 120 с.

16. Пановский В. Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филипс. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 432 с.

17. Медведев Б.В. Начала теоретической физики / Б.В. Медведев. – М. : Наука, 1977. – 496 с.

18. Бредов М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 400 с.

19. Тоннела Мари-Антуанет. Основы электромагнетизма и теории относительности / Мари-Антуанет Тоннела. – М. : Изд-во иностр. литер., 1962. – 483 с.

20. Левич В.Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В.Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.

21. Логунов А.А. Лекции по теории относительности: Современный анализ проблемы / А.А. Логунов. - М. : Изд-во Московского университета, 1983. – 148с.

22. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации : [Современный анализ проблемы] / А.А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.

23. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : : [навч. посіб для студ. вищ. навч. закл.] / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодій. – Суми : Видавництво «МакДен», 2011. – 335 с. : іл.

24. Дущенко В.П. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка / В.П. Дущенко, І.М. Кучерук – К. : Вища шк., 1987. – 431 с.

25. Векштейн Е.Г. Сборник задач по электродинамике / Е.Г. Векштейн. – М. : Высшая шк., 1966. – 287 с.

26. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике : пособие для студ. физмат факульт. пед. ин-тов / Н.И. Жирнов.– [изд. 3-е, исправленное]. – М. : Просвещение, 1970. – 350 с. : ил.

27. Глазунов А.Т. Методика преподавания физики в средней школе : Электродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика : [пособ. для учителя] / А.Т. Глазунов, И.И. Нурминский, А.А. Пинский. – М. : Просвещение, 1989. – 272 с.

28. Коновал О.А. Основи спеціальної теорії відносності : [навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл.] / О.А. Коновал ; Криворізький педагогічний інститут. – Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. – 258 с. : іл.

29. Коновал О. А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності : [монографія] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с. : іл.

30. Коновал О.А. Електродинаміка і теорія відносності : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів / О.А. Коновал ; Криворізький державний педагогічний університет. - Кривий Ріг : КДПУ, 2011. - 133 с. : іл.

31. Коновал О. А. Основи електродинаміки : [навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл.] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.

32. Штепа М. І. Теорія відносності : [навч. посібник] / М. І. Штепа. – К. : ІЗМН, 1996. – 84 с.

33. Копчук В. Основи релятивізму в школі / В. Копчук // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – №3. – С. 28 –32.

34. Шутов Б.М. Перетворення Лорентца в спеціальній теорії відносності / Б.М. Шутов // Фізика. – 2003. – №7. – С. 11 –12.

35. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. средней школы / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев . – М. : Просвещение, 1977. – 319 с. : ил.

36. Konoval O.A. Analysis of the coverage of kinematic effect of the special theory of relativity in the textbooks for secondary educational establishments / O.A. Konoval, M.A. Slyusarenko // Scientific words Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University. Series pedagogical / [Editorial Board Members: P/S/ Atamanchuk (Chairman, Scientific Editor) and other]. - Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, 2013. – Issue 19: Innovative Technology Management Quality Training of Teachers Physical and Technological Profil. – P. 88-91.

37. Засєкіна Т.М. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл.рівень / Т.М. Засєкіна, Д.О. Засєкін – Харків : Сиция, 2012. – 352 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Обґрунтування формули лорентцевого скорочення

Формулу, що визначає лорентцеве скорочення $l = l_0\sqrt{(1-B^2)}$, можна без використання перетворень Лорентца отримати такими методами:

- аналізуючи поширення променів в «світловому годиннику» (див. Додаток А);
- знаючи швидкість руху стержня відносно СВ K (див. ***Задачу 3***);
- користуючись методом k - коефіцієнту (див. Додаток Е);
- використовуючи властивості просторово-подібного інтервалу [22, с. 43] (див. Додаток Д);
- на основі підходу, який запропонував Малинін О.М. [11, с. 76-77] (див. Додаток В);

Задача. Знайти довжину рухомого стержня на основі аналізу поширення променів в «світловому годиннику» [35, с. 200-201; 8, с. 45-47; 37].

Розв'язання: Обґрунтуємо формулу лорентцевого скорочення, $l = l_0\sqrt{(1-B^2)}$, за допомогою «світлового годинника», що розташований горизонтально (див. Рис. А.1).

Світловій імпульс, випущений з одного кінця стержня (A), відіб'ється від дзеркала на іншому кінці стержня (B) и повернеться назад через інтервал часу τ, який вимірюється за годинником СВ K'.

Власна довжина стержня, l_0 зв'язана з часом τ очевидним співвідношенням:

$$c\tau = 2l_0 \tag{A.1}$$

Проміжок часу між цими ж подіями, але виміряними годинниками СВ K, позначимо через t. Інтервали часу τ і t зв'язані один з одним формулою (А.2):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-B^2}}, \tag{A.2}$$

де $B = \frac{V}{c}$.

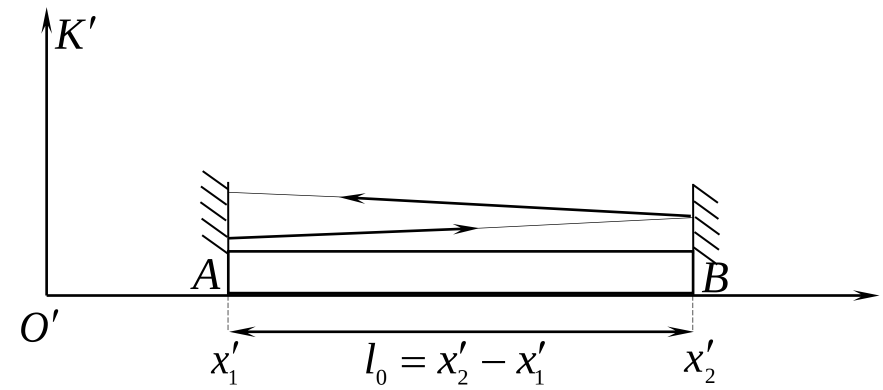

Рис. А.1. Власна одиниця часу «світлового годинника» дорівнює $\tau = {2l_0}/{c}$

Якщо t_1- час руху світлового сигналу від A до B з точки зору СВ K, і t_2 - час руху сигналу в протилежному напрямку, то повний час дорівнює:

$$t = t_1 + t_2. \tag{A.38}$$

На рис. А.2. показані положення стержня відносно СВ K в різні моменти часу:

в момент спалаху світла (положення AB стержня);

через час t_1 (положення A_1B_1);

і через час $t_1 + t_2$ (положення стержня A_2B_2).

За час t_1 стержень змістився відносно СВ K на відстань Vt_1. Шлях, який проходить світловий імпульс при його русі від A до B, з точки зору спостерігача, зв'язаного з СВ K, дорівнює $l + Vt_1$ (де l - довжина рухомого стержня). Тому можна записати наступне рівняння

$$l + Vt_1 = ct_1.$$

Звідси:

$$t_1 = \frac{l}{c - V}.$$

При русі світлового імпульсу назад від B до A пройдений ним шлях в СВ K дорівнює $l - Vt_2$, оскільки за час t_2 точка A зміститься на відстань Vt_2 назустріч світловому імпульсу. Тому:

$$l - Vt_2 = ct_2.$$

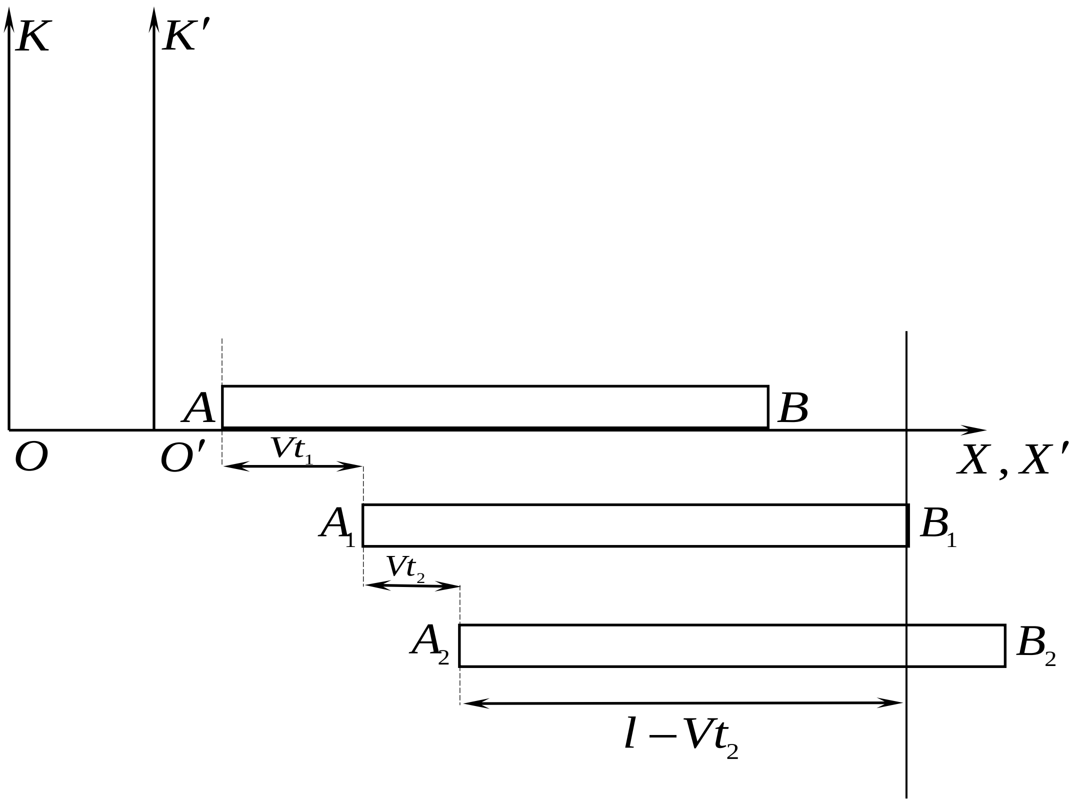

Рис. А.2. Положення стержня відносно СВ K в різні моменти часу

Звідси одержуємо:

$$t_2 = \frac{l}{c + V}.$$

Повний час руху світлового імпульсу від A до B, а потім від B до A за годинником СВ K дорівнює:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2cl}{c^2 - V^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (А.4)$$

Доречно порівняти (А.4) з формулою різночасовості (39).

Згідно ж з формулами (А.1) та (А.2):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2l_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (А.5)$$

Прирівнюючи (А.4) і (А.5), ми отримуємо відношення:

$$\frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

або:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (А.6)$$

Додаток Б

Порівняння показів годинників СВ K' та СВ K

Є дві групи синхронізованих годинників K' і K, які рухаються одна відносно іншої зі швидкістю $\vec{V}$ вздовж осі OX. За початок відліку часу беремо момент, коли годинник A' буде знаходитися навпроти годинника A, (Рис. Б.1). Необхідно зобразити положення стрілок всіх годинників у цю мить «з точки зору» СВ K' та СВ K.

Розв'язання: Із відносності одночасовості випливає, що годинники K'-системи, що розміщені вздовж осі $O'X'$ та синхронізовані між собою в цій системі відліку (СВ K'), в СВ K будуть показувати різний час (див. також **п. 1.5** та **п. 1.6**). Тобто, в деякій точці на осі OX годинник СВ K показує час $t=0$, а годинник СВ K', який в цю мить знаходиться в цій же точці x показує, згідно з перетвореннями Лорентца, час (див. також обґрунтування формули (52) **п. 1.6**):

$$t' = \frac{-xV/c^2}{\sqrt{1-B^2}}. \tag{Б.1}$$

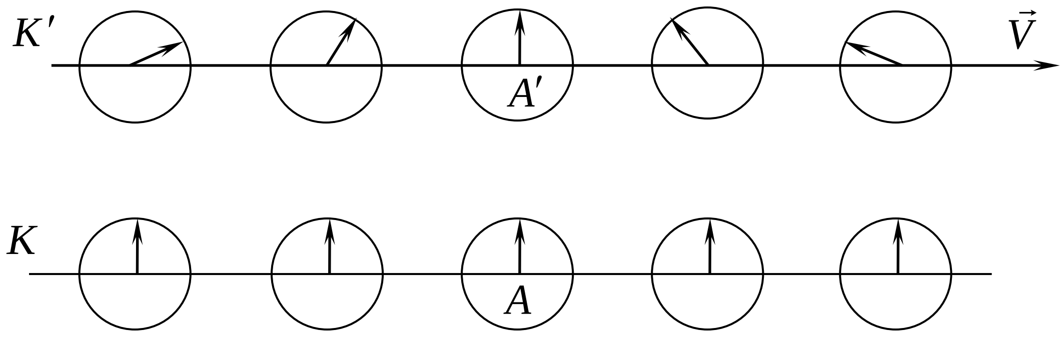

Рис. Б.1. Положення стрілок годинників СВ K' з точки зору СВ K в ту мить, коли годинники СВ K показують $t=0$

Таким чином, в момент $t=0$ стрілки годинників СВ K', з точки зору СВ K, будуть показувати час, який залежить від значення координати x (див. рис. Б.1).

Навпаки з точки зору СВ K', згідно з перетвореннями Лорентца:

$$t = \frac{x' V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}, \tag{Б.2}$$

годинники СВ K в ту мить коли $t' = 0$ показують час, що зображений на рис. Б.2.

А відповідні проміжки часу, які показують годинники, що знаходяться в різних точках, будуть дорівнювати (із перетворень Лорентца):

$$t_2' - t_1' = \frac{-(x_2 - x_1)V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}, \; t_2 - t_1 = \frac{(x_2' - x_1')V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}. \tag{Б.3}$$

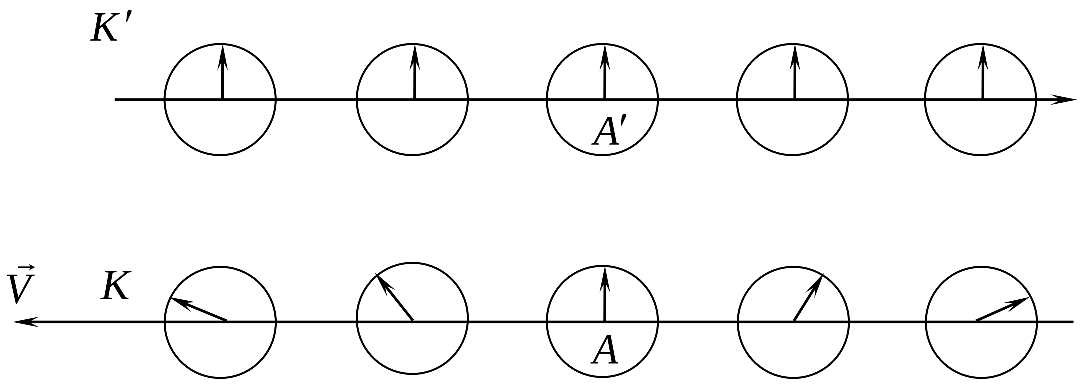

Рис. Б.2. Положення стрілок годинників СВ K з точки зору СВ K' в ту мить, коли годинники СВ K' показують $t' = 0$

Додаток В

Обґрунтування лорентцевого скорочення методом Малиніна О.М. [11]

Відрізок, власна довжин якого $l_0 = x'_2 - x'_1 = (a'b')_{K'}$, рухається вздовж своєї довжини зі швидкістю V відносно СВ K. Знайти довжину його у СВ K (рис. В.1).

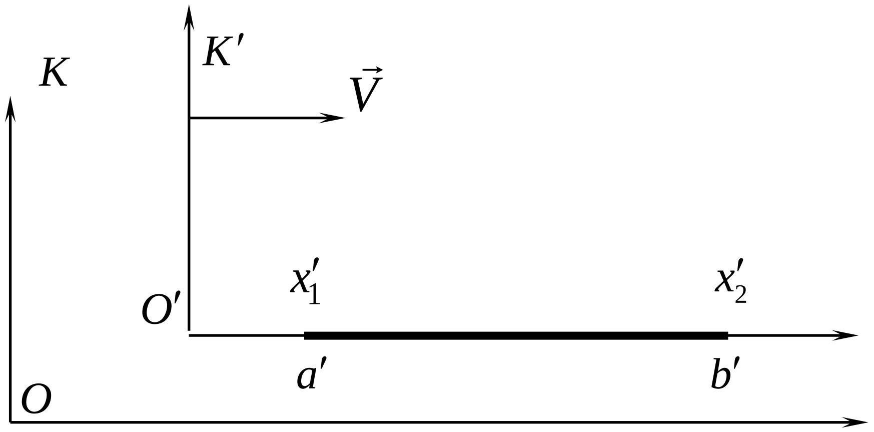

Рис. В.1. Відрізок довжиною $l_0 = x'_2 - x'_1$ нерухомий у СВ K'.

Згідно з означення повздовжніх розмірів рухомого тіла, в інерціальній системі відліку K в деякий момент часу фіксуємо одночасно положення обох кінців відрізка і отримуємо величину $(ab)_K = (a'b')_K = l$ - довжину рухомого відрізка $a'b'$ у СВ K (за визначенням Ейнштейна) (рис. В.2).

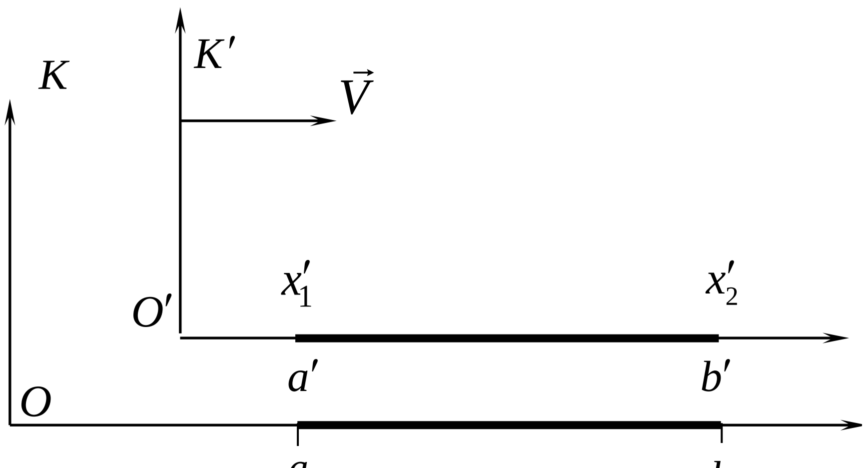

Рис. В.2. $(ab)_K = (a'b')_K = l$ - довжина рухомого відрізка $a'b'$ у СВ K

Перейдемо у СВ K', відносно якої рухомим буде відрізок $l = ab$ (рис. В.2), і розглянемо у СВ K' події, ті що одночасно відбулися в СВ K. З точки зору СВ K' подія (b, b') відбудеться раніше події (a, a'), причому (див. **п. 1.5**, формулу різночасовості (39 і (40)):

$$\Delta t' = -\frac{(x_2 - x_1)_{K'} \cdot \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = -\frac{(l)_{K'} \cdot \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = -\frac{(ab)_{K'} \cdot \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \qquad (В.1)$$

де $(ab)_{K'}$ довжина відрізка ab в інерціальній системі відліку K'.

Ще раз нагадаємо зміст позначень

$l_0 = x_2' - x_1' = (a'b')_{K'}$ - власна довжина відрізка у СВ K';

$l = ab = (a'b')_K$ - довжина рухомого відрізка $a'b'$ у СВ K;

$(ab)_{K'}$ довжина відрізка ab в з точки зору інерціальної системі відліку K';

$(ab)_K$ - довжина відрізка ab у СВ K. Власне це означає: $(ab)_K = (a'b')_K$.

Іншими словами, співпадання лівих кінців відрізків $a'b'$ та ab відбудеться через проміжок часу $\Delta t'$. Тоді за цей проміжок часу $\Delta t'$ відрізок ab з точки зору СВ K' пройде віддаль $V\Delta t'$ (див. Рис. В.3).

$$(a'b')_{K'} - (ab)_{K'} = V\Delta t' \qquad (В.2)$$

Ми ще не знаємо довжини рухомого відрізку $(a'b')_K$ з точки зору СВ K.

Але припустимо, що довжини рухомого відрізку і того, що знаходиться в стані спокою пов'язані через коефіцієнт α:

$$(a'b')_K = \alpha (a'b')_{K'}, \quad (a'b')_K < (a'b')_{K'}.$$

Тобто

$$l = \alpha \cdot l_0 \qquad (В.3)$$

Аналогічно, згідно з принципом відносності маємо:

$$(ab)_{K'} = \alpha (ab)_K, \quad (ab)_{K'} < (ab)_K$$

або

$$(ab)_{K'} = \alpha \cdot l .$$

Тобто для величини $(ab)_{K'}$ маємо:

$$(ab)_{K'} = \alpha \cdot l = \alpha^2 l_0 . \qquad \text{(B.4)}$$

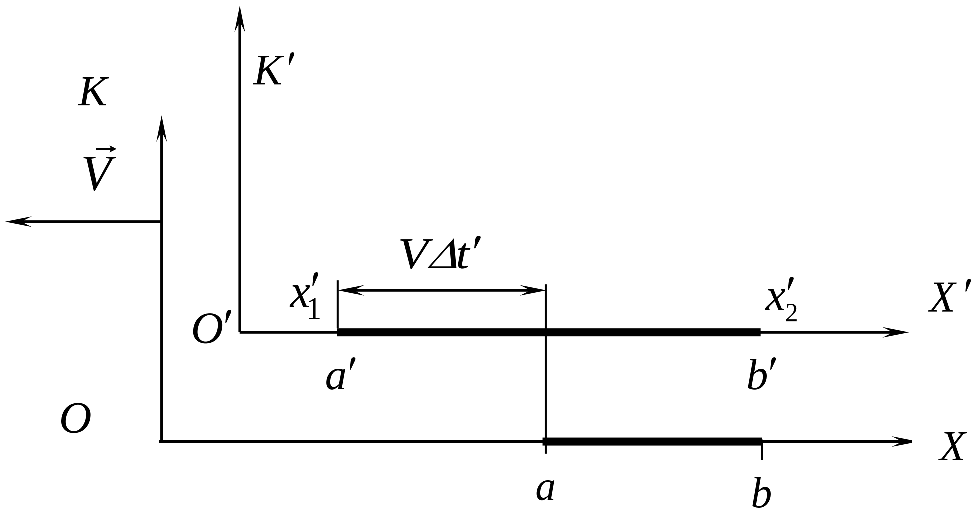

Рис. В.3. Співпадання лівих кінців відрізків $a'b'$ та ab відбудеться через проміжок часу $\Delta t'$. Тоді за цей проміжок часу $\Delta t'$ відрізок ab з точки зору СВ K' пройде віддаль $V\Delta t'$ [11, С. 76-77]

З виразів (В.2) з урахуванням (В.1), (В.3) й (В.4) одержуємо алгебраїчне рівняння для знаходження коефіцієнта α:

$$l_0 - (ab)_{K'} = V\Delta t' ,$$

$$l_0 - \alpha^2 l_0 = V \frac{(ab)_{K'} \cdot \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\alpha^2 l_0 \cdot \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Звідси знаходимо:

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Таким чином, довжина рухомого відрізка (власна довжина якого l_0) з точки зору СВ K дорівнює:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ .$$

Як бачимо метод, що запропоновано у посібнику Малиніна О.М. [11, с. 76-77], можна розглядати як певну варіацію методу знаходження лорентцевого скорочення за одночасовим спалахом лампочок на кінцях нерухомого у СВ K' стержня (див. ***Задачу 4***).

Додаток Д

Лорентцеве скорочення за Логуновим А.О. [22, с. 43]

Нехай дві події відбулися на осі $O'X'$ деякої системи відліку. У випадку просторово-подібного інтервалу завжди можна знайти СВ у якій ці дві події відбулися одночасово - $dT'=0$. Тоді квадрат інтервалу зводиться тільки просторової віддалі між цими подіями:

$$ds^2 = -dX'^2 < 0. \tag{Д.1}$$

У будь-якій іншій системі відліку (наприклад, у СВ K) для ds^2 маємо:

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 < 0. \tag{Д.2}$$

Введемо позначення для довжин відрізків, що з'єднують точки в яких відбулися ці дві події:

$$dl_0^2 = dX^2,\; dl'^2 = dX'^2.$$

Тобто, ми вважаємо, що віддаль між точками у СВ K' - це так би мовити довжина відрізка, який рухається відносно СВ K'. Бо згідно з умовою задачі, $dT'=0$, кінці відрізка фіксуються одночасово у СВ K'.

Прирівнюючи (Д.1) і (Д.2) одержуємо:

$$c^2 dT^2 - dX^2 = -dX'^2,$$

$$c^2 dT^2 + dl'^2 = dl_0^2.$$

(Д.3)

Навіть із виразу (Д.3) видно, що довжина відрізка у СВ K', dl', (який рухається відносно у СВ K') менша, ніж довжина цього ж відрізка, але нерухомого у СВ K.

У СВ K' ми одночасово ($dT'=0$) реєструємо координати кінців відрізка $dl' = dX'$. А проміжок часу між цими подіями з точки зору СВ K визначається формулою різночасовості (40) (див. також формулу (103) ***Задачі 4***), або з опертям на перетворення Лорентца:

$$dT = \frac{dT' + \dfrac{V \cdot dX'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{V \cdot dX'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{V \cdot dl'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},$$

оскільки $dT' = 0$.

Підставимо цей вираз для dT у формулу (Д.3) і одержуємо:

$$c^2 \left(\frac{\dfrac{V \cdot dl'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + dl'^2 = dl_0^2,$$

$$dl'^2 \left(1 + \frac{B^2}{1 - B^2} \right) = dl_0^2.$$

І нарешті:

$$dl' = dl_0 \sqrt{1 - B^2}.$$

Таким чином, лорентцеве скорочення є наслідком структури 4-вимірного простору-часу й процедури вимірювання рухомого відрізку.

Додаток Е

Обґрунтування лорентцевого скорочення методом k - коефіцієнту

Знайдемо довжину рухомого стержня, користуючись *методом* k– *коефіцієнту* [8, с. 107]. Нехай вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стержень, власна довжина якого $l_0 = x_2' - x_1'$. На кінцях стержня закріплені напівпрозорі дзеркала (Рис. Е.1).

Як завжди, в початковий момент $t = t' = 0$ початки координат СВ K і K' співпадають.

На рис. Е.1 t_1 – момент посилки світлового сигналу до дальнього (переднього) кінця стержня;

t_4– момент часу, коли цей сигнал повернувся до СВ K після відбиття від переднього кінця стержня;

t_2 і t_3 – відповідно моменти посилки світлового сигналу до ближнього (заднього) кінця і прийому цього сигналу в точці O після відбиття.

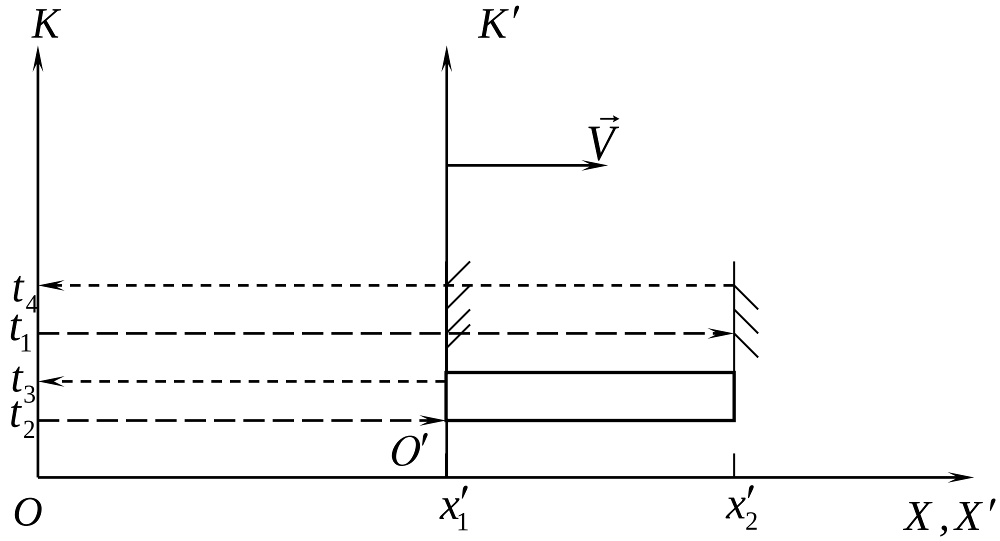

Рис. Е.1. До обґрунтування формули лорентцевого скорочення $l = l_0\sqrt{(1-B^2)}$ за допомогою методу k– коефіцієнту

Довжина стержня в СВ K – це різниця координат початку і кінця стержня $x_2 - x_1$, зафіксованих одночасно в СВ K. Згідно з означенням (процедура синхронізації), сигнали одночасно відіб'ються від переднього та заднього кінців стержня за умови:

$$\frac{t_2 + t_3}{2} = \frac{t_1 + t_4}{2}. \qquad (E.1)$$

Тоді координати переднього та заднього кінців стержня відповідно дорівнюють:

$$x_2 = \frac{t_4 - t_1}{2} \cdot c, \quad x_1 = \frac{t_3 - t_2}{2} \cdot c.$$

Звідси одержуємо довжину стержня в СВ K:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{c}{2}(t_4 - t_1 - t_3 + t_2). \qquad (E.2)$$

Але в т. x_1' спостерігач в СВ K' приймає перший (випущений в момент t_1 в СВ K) сигнал по своєму годиннику в момент kt_1. В т. x_1' спостерігач в СВ K' приймає цей вже відбитий від т. x_2' сигнал в момент $\frac{t_4}{k}$ (оскільки, сигнал, який в СВ K приймається в момент t_4, повинен бути випущений з т. x_1' за годинником СВ K' в момент $\frac{t_4}{k}$ (дійсно, згідно з методом k– коефіцієнту: $t_4 = k\frac{t_4}{k}$).

Ці пояснення дають змогу записати власну довжину лінійки через моменти приходу першого прямого і відбитого сигналу в т. x_1'.

Справді, $(\frac{t_4}{k} - kt_1)$ – час поширення світлового сигналу від т. x_1' до т. x_2' і назад по годиннику СВ K'. Тому власна довжина стержня:

$$\frac{(\frac{t_4}{k} - kt_1)c}{2} = l_0 . \qquad \text{(Е.3)}$$

З іншого боку, якщо 2-й сигнал був випущений в момент t_2, то, відбившись від т. x_1', в СВ K він прийде в момент $t_3 = k^2 t_2 = k \cdot kt_2$.

Таким чином, довжина стержня в СВ K, з урахуванням (Е.1) та (Е.2) дорівнює:

$$l = \frac{c}{2}(t_4 - t_1 - t_3 + t_2) = c(t_2 - t_1), \qquad \text{(Е.4)}$$

а власна довжина його, з урахуванням (Е.3) та (Е.1) може бути подана у вигляді:

$$l_0 = \frac{c}{2}(\frac{t_4}{k} - kt_1) = \frac{c}{2}(\frac{t_2 + t_3 - t_1}{k} - kt_1) = \frac{c}{2k}(k^2 + 1)(t_2 - t_1). \qquad \text{(Е.5)}$$

І нарешті, зіставляючи (Е.4) та (Е.5), одержуємо:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - B^2}, \quad l = l_0 \sqrt{(1 - B^2)}.$$

Проілюструємо тепер цей метод обґрунтування лорентцевого скорочення на діаграмі Міньковського.

Згідно з попереднім та рис. Е.1:

t_1 – момент посилки світлового сигналу до дальнього (переднього) кінця стержня;

t_4– момент часу, коли цей сигнал повернувся до СВ K (спостерігач A) після відбиття від переднього кінця стержня;

t_2 і t_3 – відповідно моменти посилки світлового сигналу до ближнього (заднього) кінця і прийому цього сигналу в точці O після відбиття.

Тоді на діаграмі Міньковського (рис. Е2) маємо наступні прямі лінії:

OA - світова лінія спостерігача нерухомого в СВ K;

OA' - світова лінія ближчого до A кінця лінійки;

BA'' - світова лінія дальнього від A кінця лінійки;

OO'' - світова лінія кванта світла, випроміненого із т. O в момент $t = 0$;

t_1, kt_1 - світова лінія світлового сигналу, який випущений в момент t_1 за годинником СВ K у напрямі дальнього від A кінця лінійки;

t_2, kt_2 - світова лінія світлового сигналу, який випромінений в момент t_2 за годинником СВ K у напрямі ближчого до A кінця лінійки;

$\frac{t_4}{k}, t_4$ - світова лінія світлового сигналу, що віддзеркалився від переднього кінця стержня і повернувся до СВ K;

kt_2, t_3 - світова лінія світлового сигналу, що віддзеркалився від ближнього (заднього) кінця стержня і повернувся до СВ K.

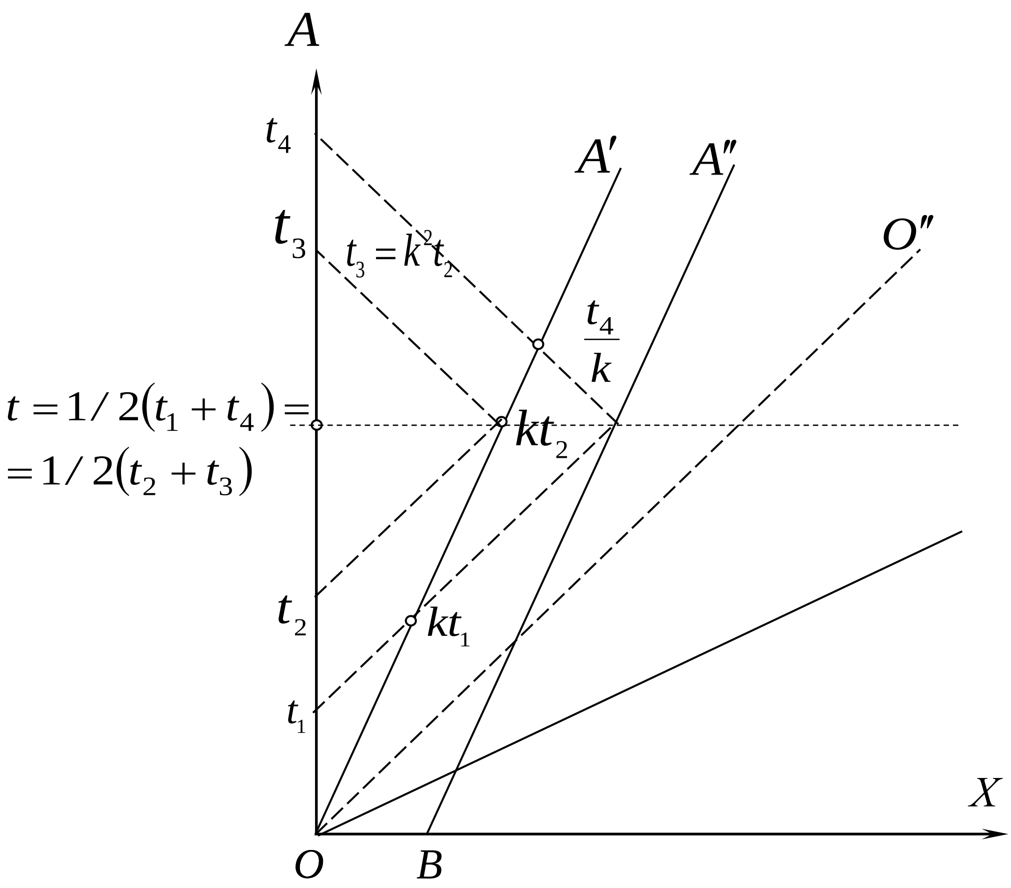

Рис. Е.2. Діаграма Міньковського щодо обґрунтування лорентцевого скорочення за допомогою методу k - коефіцієнту [8, с. 107]

Оскільки, як вище зазначалося, довжина стержня в СВ K – це різниця координат початку і кінця стержня, $x_2 - x_1$, зафіксованих одночасно в СВ K. Згідно з означенням (процедура синхронізації), сигнали одночасно відіб'ються від переднього та заднього кінців стержня за умови:

$$\frac{t_2 + t_3}{2} = \frac{t_1 + t_4}{2}.$$

Саме ця умова зафіксована на діаграмі Міньковського рис. Е.2.

Додаток Ж

Пояснення щодо змісту формули сповільнення ходу рухомого годинника (101) та (40а)

У пропонованому посібнику використовувалася формула, що виражає сповільнення ходу рухомого годинника (101), (40а). Зупинимося на обґрунтуванні та фізичному змісті її.

Популярним, і таким, що відповідає більш високим науковим вимогам і є більш загальним, є метод, оснований на інваріантності квадрату інтервалу між двома подіями

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \qquad \text{(Ж.1)}$$

Якщо інтервал часоподібний $ds^2 > 0$, то завжди можна знайти систему відліку, в якій дві довільні нескінченно близькі події відбуваються в одній просторовій точці ($dx' = dy' = dz' = 0$).

Тоді квадрат просторово-часового інтервалу зводиться до нескінченно малого проміжку часу в СВ K':

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2,$$

$$c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt'^2,$$

де $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Одержуємо

$$c^2dt'^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{dr^2}{c^2dt^2}\right) = c^2dt^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right),$$

де $\dfrac{dr^2}{dt^2} = \upsilon^2$ - швидкість руху частинки (швидкість переміщення фізичного процесу відносно СВ K).

Зміна часу у лабораторній системі відліку dt зв’язана зі зміною часу в системі відліку K', де процес локалізований, dt' таким чином:

$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,. \tag{Ж.2}$$

Для кінцевих проміжків часу маємо

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{Ж.3}$$

Якщо умовно вважати, що з рухомим процесом (фізичним об’єктом, частинкою) зв’язаний годинник, то складається враження, що рухомий годинник з точки зору «нерухомого годинника» (спостерігача) «іде» повільніше, ніж нерухомий.

Співвідношення (Ж.3) слід розуміти так:

Тривалість фізичного процесу в системі відліку, де він нерухомий, завжди менша, ніж тривалість його з точки зору будь-якої іншої інерціальної системи відліку.

Можна також говорити, що фізичний процес в СВ, відносно якої він переміщується, протікає повільніше, ніж з точки зору системи відліку, в якій він знаходиться в спокої.

Різним виявляється лише відлік проміжків часу.

Зв’язок проміжку часу між двома подіями, що відбулися в деякій СВ в одній і тій самій точці простору (а, отже, цей проміжок часу $\Delta t'$ ***фіксується одним годинником) з проміжком часу між тими самими подіями, але який вимірюється двома годинниками іншої СВ, відносно якої ці дві події відбуваються в двох різних точках простору, визначається формулою (Ж.3).***

Насправді мова іде не про темп ходу часу у різних системах відліку, а про опис у різних системах відліку будь якого фізичного процесу, який локалізований у системі відліку K' $\left(x_1' = x_2'\right)$**.**

У тій системі відліку, де частинка (або процес) знаходиться в спокої, і має місце просторова локалізація. У будь-якій іншій системі відліку народження і розпад нестабільної частинки відбуватиметься в різних точках простору. А наявність просторової частини квадрату інтервалу

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

приводить (оскільки він є інваріантним) до зростання часу життя частинки в будь-якій СВ, порівняно із СВ, де частинка (процес) знаходиться в спокої.

Нескінченно малий інтервал часу власного часу позначається $d\tau$. Тому згідно з формулою(Ж.2), якщо відносно СВ K з швидкістю $\vec{\upsilon}(t)$ рухається деякий фізичний процес, то інтервал власного часу $d\tau$ пов'язаний з лабораторним часом dt:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2(t)}{c^2}}. \qquad (Ж.4)$$

Щоб знайти кінцевий інтервал власного часу, треба проінтегрувати (Ж.4):

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2(t)}{c^2}}\cdot dt. \qquad (Ж.5)$$

Обґрунтування цієї формули можливе, якщо ввести нескінченну кількість «миттєво супутніх систем відліку».

Власний час можна визначити, знаючи величини інтервалу між цими подіями:

$$d\tau = \frac{ds}{c}. \qquad (Ж.6)$$

Можна стверджувати, що квадрат інтервалу у 4-вимірному просторі-часі Міньковського не слід розглядати як дещо абстрактне й відірване від експеримента. Якщо інтервал (Ж.1) часоподібний, то можна знайти таку систему відліку, де величину його можна виміряти за допомогою годинника (див. формулу (Ж.6)).

Якщо ж інтервал (Ж.1) просторовоподібний, то знайшовши відповідну систему відліку його вимірюють за допомогою лінійки (Додаток Д).

2. Обґрунтування формули (101) та (40а) за допомогою метода $k-$ коефіцієнта.

Співвідношення між проміжками часу між двома подіями з точки зору СВ K та СВ K', (Ж.3), можна одержати також, користуючись методом k-коефіцієнту.

Дійсно, спостерігач в СВ K' (по своєму годиннику) приймає два послідовних (посланих один за одним) сигнали через проміжок часу (див. формулу (20) **п. 1.3**).

$$\Delta t' = kT. \tag{Ж.7}$$

А з точки зору спостерігача СВ K спостерігач в СВ K' приймає другий сигнал через проміжок часу (див. формулу (24) **п. 1.3**):

$$\Delta t = \frac{T + k^2 T}{2}. \tag{Ж.8}$$

Іншими словами, для СВ K цей проміжок дорівнює: $\Delta t = \dfrac{T\left(1 + k^2\right)}{2}$.

Тому проміжки часу Δt та $\Delta t'$ зв'язані співвідношенням:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1 + k^2}{2k} = \Gamma.$$

Тобто, ми ще раз знайшли зв'язок проміжку часу між двома подіями, що відбулися в деякій СВ в одній і тій же точці простору (а значить цей $\Delta t'$ фіксується одним годинником) з проміжком часу між тими самими подіями, який вимірюється двома годинниками іншої СВ, відносно якої ці дві події відбуваються в двох різних просторових точках:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{(1 - B^2)}. \tag{Ж.9}$$

3. Але найбільш просте обґрунтування формули (101) та (40а) можливе за допомогою світлового годинника [24, с. 145; 8, с. 44; 23; 28; 36; 37].

З цією метою здійснимо аналіз ходу світлового променя в «світловому годиннику» в СВ K та СВ K'.

На кінцях стержня довжиною l закріплені два паралельні дзеркала. Між дзеркалами рухається вверх і вниз світловий промінь (фотон), Рис. Ж.1.

Кожне віддзеркалення світла від нижнього дзеркала за допомогою спеціального пристрою викликає наступне «клацання» годинника.

Спостерігач, нерухомий відносно годинника, виявить, що інтервал часу між «клацанням» дорівнює:

$$\tau = \frac{2l}{c}.$$

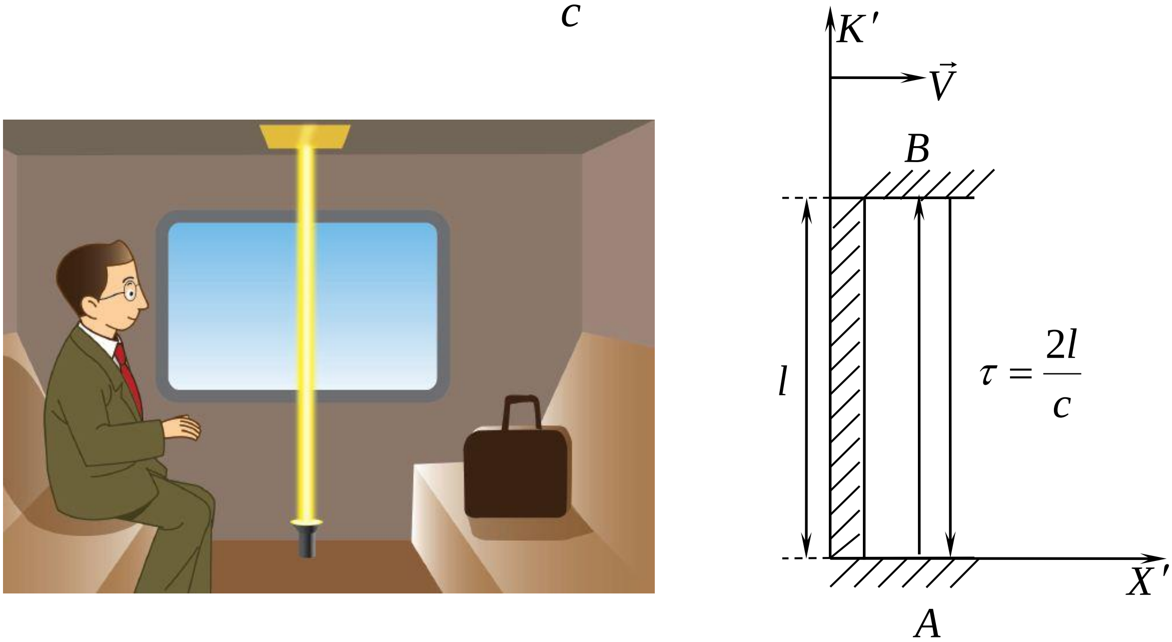

Рис. Ж.1. Світловий годинник AB нерухомий в СВ K'

Спостерігач, нерухомий відносно годинника, виявить, що інтервал часу між «клацанням» дорівнює:

$$\tau = \frac{2l}{c}.$$

Та з точки зору спостерігача, відносно якого годинник рухається зі швидкістю V, інтервал часу виявиться іншим. Будемо вважати, що стержень (світловий годинник AB) перпендикулярний до вектору швидкості $\vec{V}$. Тоді світло в рухомому годиннику з точки зору СВ K розповсюджується вздовж ломаної лінії AB_1A_2, (Рис. Ж.2.) і проходить між «клацанням» годинника за час t шлях:

$$2\sqrt{(AA_1)^2+(A_1B_1)^2}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{Vt}{2}\right)^2+l^2}\,.$$

Відповідно, проміжок часу між випромінюванням сигналу в т. A та прийомом його в т. A_2 з точки зору СВ K, дорівнює:

$$t=\frac{2\sqrt{l^2+\left(\frac{Vt}{2}\right)^2}}{c}\,.$$

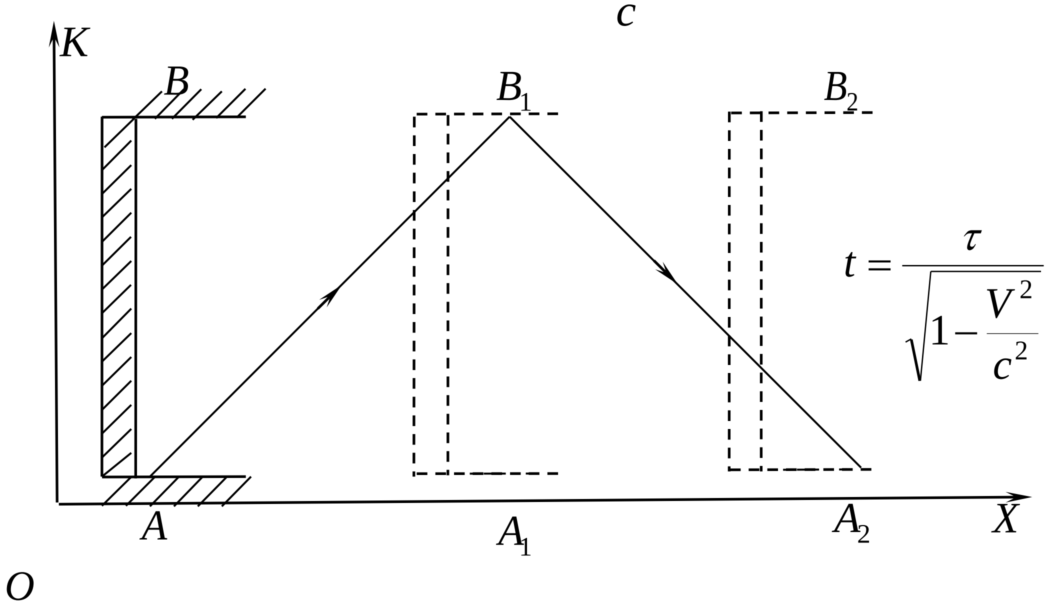

Рис. Ж.2. Світловий промінь в «світловому годиннику» в СВ

K розповсюджується вздовж ломаної лінії AB_1A_2

Розв'язуючи це рівняння відносно t і враховуючи, що $\frac{2l}{c}=\tau$, приходимо до формули, яка співпадає з (101) й (40а):

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Тобто, якщо проміжок часу між «клацанням» годинника у власній СВ τ, то з точки будь-якої іншої системи відліку, відносно якої годинник рухається з швидкістю V, проміжок часу між цими ж «клацанням» буде більшим, $t>\tau$.

Власний час показує той годинник, який нерухомий відносно певної системи відліку (або деякого процесу). При цьому маємо на увазі довільну систему відліку.

Виходячи з цього, можна дійти висновку, що відносно нерухомого спостерігача (система відліку K) інтервал між подіями, які відбувається в рухомій системі відліку K', триває довше. Або, іншими словами, рухомий годинник йде повільніше ніж нерухомий.

Додаток И

Приклади на використання формули різночасовості

Приклад И.1. Стержень, що орієнтований паралельно вісі OX СВ K, рухається зі швидкістю υ вздовж вісі OY (див. Рис. И.1). Знайти кут θ' між стержнем та віссю $O'X'$ СВ K'. Осі OX та $O'X'$ СВ K та систем K' співпадають, а СВ K' рухається зі швидкістю $\vec{V}$ вздовж вісі OX.

Розв'язання: Утворення кута між стержнем та віссю $O'X'$ СВ K' зумовлене відносністю одночасності.

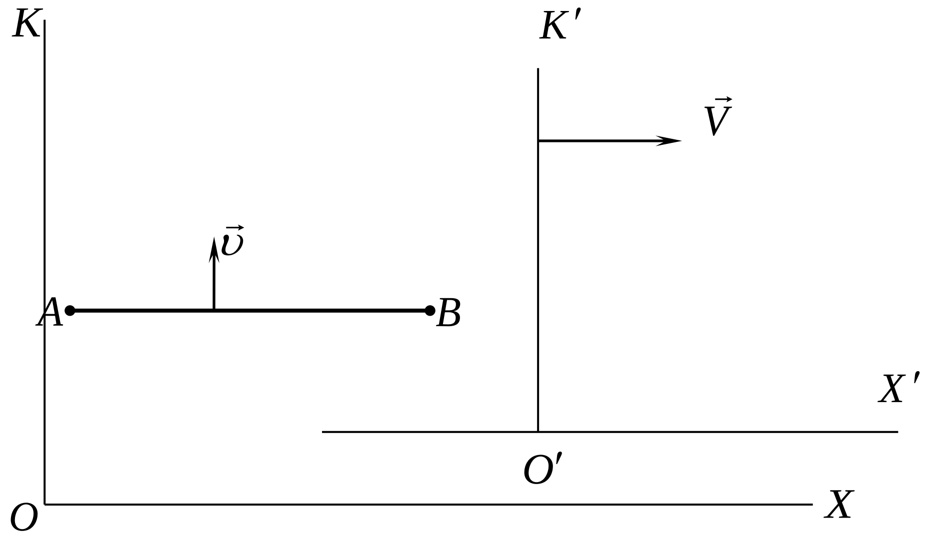

Рис. И.1. Стержень, орієнтований паралельно вісі OX СВ K, рухається зі швидкістю υ вздовж вісі OY

Дійсно, якщо в деякий момент часу кінці стержня співпадають з віссю OX в СВ K, то в системі K' ці дві події будуть не одночасними. Проміжок часу між цими подіями в СВ K' дорівнює, згідно з перетвореннями Лорентца (див. також (Б.1), або (Б.2), формула різночасовості):

$$\Delta t' = -\frac{\Delta x \cdot V / c^2}{\sqrt{1-B^2}}, \tag{И.1}$$

де Δx – власна довжина стержня.

Тобто з точки зору СВ K' спочатку (раніше) наступає подія в точці B, а потім в точці A (див. також Рис. И.2). Тобто, під час руху стержня AB горизонтальну лінію спочатку перетинає точка B стержня, а потім - точка A.

При цьому за цей час, $\Delta t'$, правий кінець стержня (точка B) пройде шлях $\Delta y' = \upsilon'_y \cdot \Delta t'$, де $\upsilon'_y = \upsilon\sqrt{1-B^2}$.

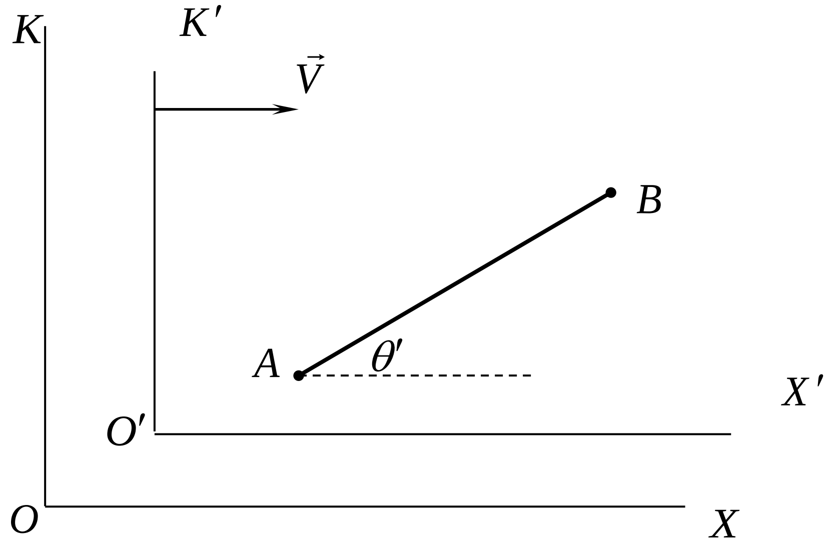

Рис. И.2. З точки зору СВ K' стержень буде повернутий проти ходу годинникової стрілки на кут θ'

Таким чином, в СВ K' стержень буде повернутий проти ходу годинникової стрілки на кут θ' (Рис. И.2), який визначається:

$$tg\theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\upsilon\sqrt{1-B^2} \cdot \Delta x \dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-B^2} \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1-B^2}} = \frac{B \cdot \upsilon}{c\sqrt{1-B^2}}, \qquad \text{(И.2)}$$

де $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-B^2}$.

Відповідь: $tg\theta' = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'} = \dfrac{B \cdot \upsilon}{c\sqrt{1-B^2}}$.

Приклад И.2. Стержень, що орієнтований паралельно вісі $O'X'$ СВ K', рухається зі швидкістю υ' вздовж вісі $O'Y'$ (див. Рис. И.3). Знайти кут θ між стержнем та віссю OX СВ K. Осі OX та $O'X'$ СВ K та систем K' співпадають, а СВ K' рухається зі швидкістю $\vec{V}$ вздовж вісі OX.

Розв'язання: Утворення кута між стержнем та віссю OX СВ K зумовлене відносністю одночасності. Якщо ж даний стержень рухається в СВ K' вздовж осі $O'Y'$ зі швидкістю $\vec{\upsilon}'$ (Рис. И.3), то з точки зору СВ K він буде повернутий на кут θ за годинниковою стрілкою (див. Рис И.4).

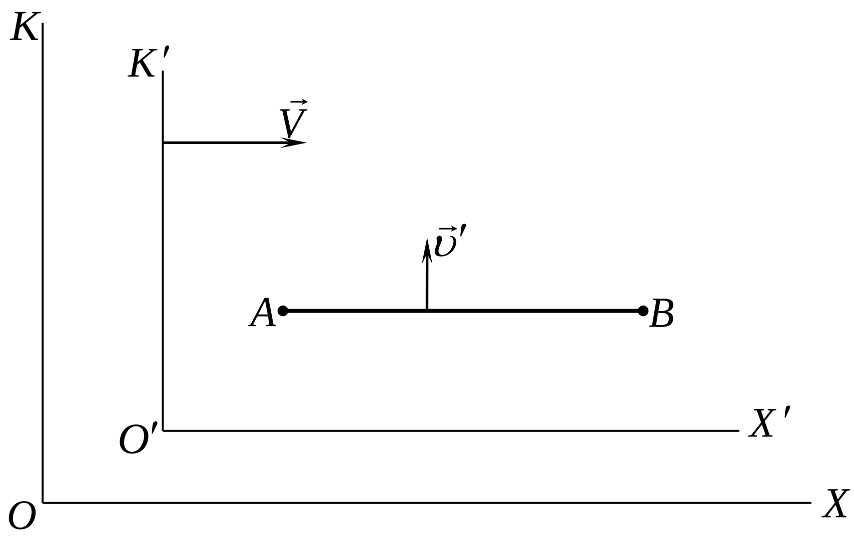

Рис. И.3. Стержень, орієнтований паралельно вісі $O'X'$ СВ K', рухається зі швидкістю υ' вздовж вісі $O'Y'$

Дійсно, дві одночасні події в СВ K' з точки зору СВ K відбуваються через проміжок часу (див. формулу різночасовості (40), або (Б.3)):

$$\Delta t = \frac{(x'_2 - x'_1)\cdot V / c^2}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{(x'_B - x'_A)\cdot V / c^2}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{\Delta x' \cdot V / c^2}{\sqrt{1-B^2}} \qquad \text{(И.3)}$$

де $\Delta x'$ – власна довжина стержня СВ K'.

Причому подія в точці A відбувається раніше ніж подія в точці B з точки зору СВ K. Тобто за цей проміжок час точка A в СВ K пройде віддаль

$$\Delta y = \upsilon_y \cdot \Delta t,$$

де $\upsilon_y = \upsilon'\sqrt{1-B^2}$.

Таким чином, з точки зору СВ K стержень буде повернутий за годинникової стрілкою на кут θ:

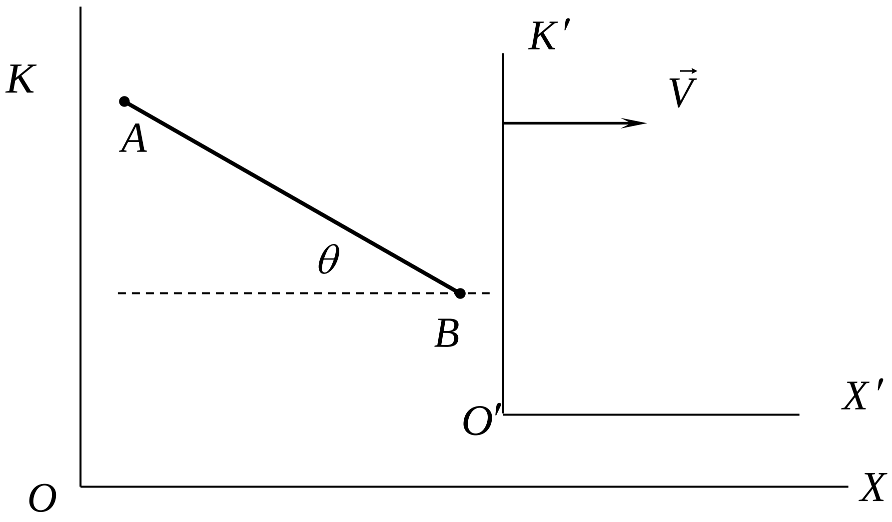

Рис. И.4. З точки зору СВ K стержень буде повернутий за годинникової стрілкою на кут θ

$$tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\upsilon'\sqrt{1-B^2} \cdot \Delta x' \dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-B^2} \cdot \Delta x' \cdot \sqrt{1-B^2}} = \frac{B \cdot \upsilon'}{c\sqrt{1-B^2}},$$

де $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-B^2}$.

Приклад И.3. У системі відліку K знаходиться труба AB довжиною l_0. Крізь неї пролітає стержень $A'B'$, власна довжина якого дорівнює $2l_0$. Швидкість стержня така, що його довжина в системі відліку K дорівнює довжині трубки $l = l_0$. І в деякий момент часу стержень, пролітаючи крізь трубу, повністю в ній поміститься. Але з точки зору стержня лорентцеве скорочення має трубка, тому зрозуміло, що стержень довжини $2l_0$ не поміститься в трубці довжини $\frac{l_0}{2}$. Здається, ніби ми маємо неспростовне протиріччя. Цей приклад відомий під назвою «Парадокс труби і стержня».

Розв'язання: Але насправді протиріччя немає. Оскільки швидкість стержня така, що його довжина в системі відліку K дорівнює довжині трубки $l = l_0$, тобто $l_0 = 2l_0\sqrt{1-B^2}$, де $B = \frac{V}{c}$. То при швидкості $V = c\frac{\sqrt{3}}{2}$, з точки зору трубки, кінці стержня, який пролітає, сумістяться з кінцями трубки одночасно у СВ K (Рис. И.5).

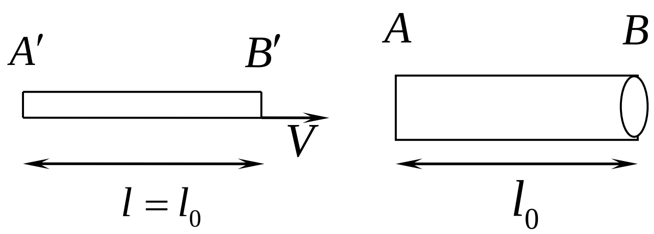

Рис. И.5. З точки зору труби кінці стержня $A'B'$, який пролітає, сумістяться з кінцями трубки одночасно у СВ K

Але з точки зору стержня лорентцеве скорочення має трубка, тому зрозуміло, що стержень довжини $2l_0$ не поміститься в трубці довжини $\frac{l_0}{2}$ (Рис. И.6). Як же спростувати дане протиріччя?

З точки зору стержня (СВ K'), співпадання кінців (A з A' , B з B') виникнуть не одночасно: спочатку співпадуть кінці B і B' (Рис. И.6), а потім, через деякий проміжок часу, кінці A і A' .

Дійсно, якщо в деякий момент часу кінці стержня A' i B' співпадають з кінцями труби A i B, відповідно, одночасово в СВ K, то в системі K' ці дві події будуть не одночасними. Проміжок часу між цими подіями в СВ K' дорівнює, згідно з перетвореннями Лорентца (див. також (Б.1), або (Б.2), формула різночасовості):

$$\Delta t' = -\frac{\Delta x \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad \text{(И.4)}$$

де $\Delta x = l_0$ – власна довжина труби.

Тобто з точки зору СВ K' спочатку (раніше) наступає подія: співпадання кінців B' i B, а потім наступає подія: співпадання кінців A' i A, (див. також ***Приклад И.2***).

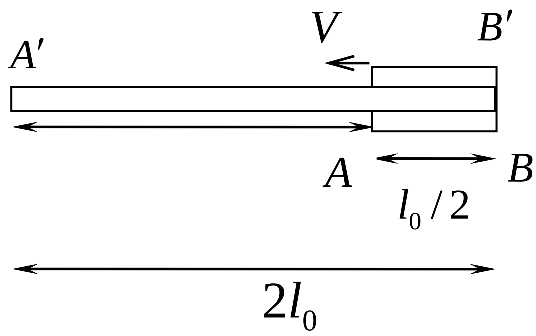

Рис. И.6. З точки зору стержня співпадання кінців B' i B, а потім і співпадання кінців A' i A відбувається через проміжок часу $\Delta t'$

Тобто через проміжок часу $\Delta t'$ співпадуть кінці A' i A. Із Рис. И.6 видно, що за цей проміжок часу кінець A труби пролетить зі швидкістю $V = c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ віддаль $A'A$:

$$A'A = \frac{l_0 \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}} \cdot V = 2l_0 - l_0\sqrt{1 - B^2} .$$

Або, після підстановки $V = c\frac{\sqrt{3}}{2}$, маємо:

$$\frac{l_0 \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}} \cdot V = 2l_0 - l_0\sqrt{1 - B^2} , \qquad (И.5)$$

$$\frac{l_0 \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2l_0 - l_0\sqrt{1 - \frac{3}{4}} ,$$

$$\frac{3}{2} l_0 = 2l_0 - \frac{l_0}{2} .$$

Тобто і з точки зору СВ K' стержень «поміщається» у трубі.

Приклад И.4. Розглянемо *парадокс жердини й сараю*. Умова така: нехай є сарай з двома наскрізними дверима. Візьмемо жердину, яка трохи довша, ніж сарай. Довжина сараю $\Delta x < l_0$, l_0 - власна довжина жердини Якщо відкрити обидві двері і просунути в них жердину, то вона в сарай не поміститься і буде стирчати з дверей по обидві сторони. Скористаємося явищем лорентцевого скороченням довжин - розженемо жердину до такої швидкості, щоб вона скоротилася, нехай у 2 рази, і тоді, пролітаючи крізь сарай, вона вся цілком там поміститься! Захлопнувши одночасно в СВ сараю двері, поки жердина знаходиться всередині і тут же швидко їх відкривши, щоб не зламати цю нашу цікаву систему, ми повинні спостерігати проходження жердини крізь сарай з закритими дверима.

З іншого боку, система відліку, пов'язана з жердиною, рівноправна з системою, яка пов'язана із сараєм. Тобто в ній будуть спостерігатися ті ж ефекти скорочення поздовжніх розмірів, але тільки вже сараю! І ми бачимо наступне протиріччя: у системі відліку, пов'язаній з жердиною, сарай стане коротшим, а трохи довша жердина в сарай тим більше не поміститься. Значить, зачинивши двері сараю, ми обов'язково зламаємо жердину!

Цей парадокс – один з типових випадків, коли, вчепившись в один з ефектів СТВ, людина робить далекосяжні висновки, нехтуючи іншими, часом більш важливішими ефектами. Скорочення довжин дійсно відбудеться так, як описано в парадоксі: для сараю, жердина виявиться укороченою і поміститься в ньому цілком, а для жердини укороченим виявиться сарай, який не зможе помістити в себе весь жердину.

То де ж правда (що істино)?

Розв’язання: А правда – у відносності одночасності. Скорочення довжин – це другорядний ефект, відносність ж одночасності – набагато важливіший. Ще раз згадаємо вже сказане тут: події, одночасні в одній системі відліку, будуть неодночасними в іншій системі відліку, якщо системи рухаються одна щодо іншої. Якщо придивитися до експерименту, у нас в ньому є чітко виражені події, одночасні в ІСВ сараю – це момент, коли ми закриваємо передню і задню двері сараю. Ми робимо це в ІСВ сараю *одночасно*.

Тобто маємо явище проходження жердини крізь сарай без пошкоджень або перешкод. Тоді в СВ зв’язаній з жердиною повинно відбутись теж саме: жердина повинна пройти крізь сарай, але в цьому випадку рухається сарай і він зазнає скорочення. Але у СТВ не повинно бути парадоксів і висновки, які дають формули СТВ повинні бути дійсними і СВ K', яка пов’язана з жердиною. Тому міркування наступні. В СВ K двері в сараю зачинаються і відчиняються одночасно, але в СВ K' ці події не одночасні,між цими подіями буде певний проміжок часу:

$$t_2' - t_1' = \Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = -\Gamma\frac{V}{c^2}\Delta x, \qquad \text{(И.6)}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, $t_2' = \Gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right)$ і $t_1' = \Gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right)$, t_2' момент часу, коли двері сараю закриваються і відкриваються в СВ K' в точці x_2', а t_1' коли двері сараю закриваються і відкриваються в СВ K' в точці x_1'.

Неважко здогадатися, що в ІСВ жердини закриття передніх і задніх дверей сараю відбудуться в різні моменти часу, а саме: коли передній кінець жердини увійде в сарай і наблизиться до задніх дверей, вони закриються і тут же відкриються, а коли задній кінець жердини зрівняється з передніми дверима, захлопнуться і відкриються, в свою чергу, і вони. Таким чином, жердина не зламається ні в ІСВ сараю, ні в ІСВ жердини.

Наведемо більш чіткі міркування за допомогою формули різночасовості (И.1), або (И.4).

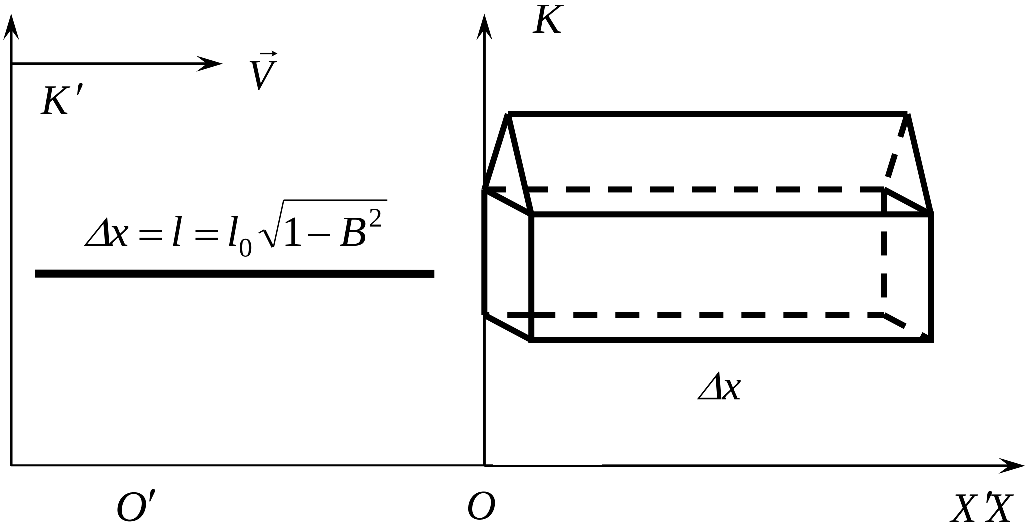

Рис. И.7. До парадоксу жердини і сараю.

Отже, в момент часу t_1' в точці x_1' (коли задній кінець жердини вже буде в точці x_1) закриваються і відкриваються двері, а в момент часу t_2' в точці x_2' (коли передній кінець жердини опиниться в точці x_2) теж відбудеться подія закривання й відкривання дверей, але між двома закриваннями і відкриваннями дверей пройде проміжок часу $\Delta t'$ (див. Рис. И.8).

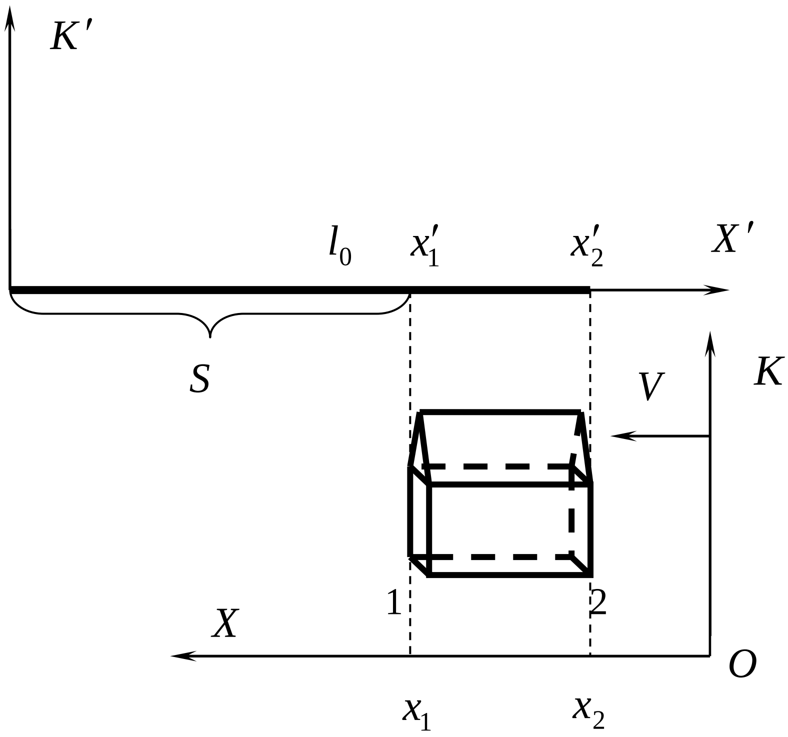

Рис. И.8. До парадоксу жердини й сараю (випадок коли рухається сарай відносно нерухомої жердини).

За цей проміжок часу точка x_1 сараю пройде віддаль $S = V\Delta t'$ й зрівняється із заднім кінцем жердини.

Тобто маємо рівність:

$$l_0 - \Delta x\sqrt{1-B^2} = S = V\Delta t', \qquad \text{(И.7)}$$

де доданок $\Delta x\sqrt{1-B^2}$, що виражає довжину сараю в СВ пов'язаній з жердиною.

Тоді (И.7) можна переписати так (порівняєте з формулою (И.5)):

$$l_0 - \Delta x\sqrt{1-B^2} = \Gamma\frac{V^2}{c^2}\Delta x \qquad \text{(И.8)}$$

Виділивши l_0 з цього рівняння, маємо:

$$l_0 = \frac{B^2}{\sqrt{1-B^2}}\Delta x + \Delta x\sqrt{1-B^2} = \Delta x\left(\frac{B^2}{\sqrt{1-B^2}} + \sqrt{1-B^2}\right) =$$

$$= \Delta x\left(\frac{B^2 + \left(1-B^2\right)}{\sqrt{1-B^2}}\right) = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Ми одержали умову прольоту жердини крізь сарай. Отже, жердина пролетить повз сарай і в своїй СВ.

Таким чином, можна зазначити, що ніякого парадоксу не виникає, навіть при формальному математичному доведенні, що ще раз доводить, що математичний апарат СТВ не має протиріч або не містить помилок.