МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
В. о. завідувача кафедри
______________ Д. Є. Бобилєв
«___» ____________2019 р.

Реєстраційний № ________
«___» ____________2019 р.

ЗАДАЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота
студента фізико-математичного факультету
групи МІм–14
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»
Шпоньки Руслана Юрійовича
Керівник: д. п. н., проф. кафедри математики та методики її навчання
Лов’янова Ірина Василівна
Оцінка:
Національна шкала_______________________
Шкала ECTS____ Кількість балів__________

Голова ЕК _________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Мета навчання математики полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок та умінь, необхідних у повсякденному житті і майбутній професійній діяльності [55]. Досягнення цієї мети забезпечується виконанням завдань, вказаних у чинній програмі з математики. Одним із завдань є розвиток логічного мислення та інтуїції учнів, їх алгоритмічної, інформаційної та графічної культури. Крім того, випускник школи має навчитися логічно мислити, тобто аналізувати і порівнювати, прогнозувати результат, узагальнювати і систематизувати, проводити класифікацію математичних понять, висувати гіпотези та здійснювати їх перевірку тощо. Важливу роль у формуванні компонентів логічного мислення відіграють математичні задачі, оскільки у процесі розв’язування задач до арсеналу методів і прийомів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія. Крім того, вміння випускника школи розв’язувати задачі є показником високого рівня засвоєння ним теоретичного матеріалу шкільного курсу математики, а також готовності до майбутньої дослідницької діяльності і навчання у вищих навчальних закладах.

Над проблемою розвитку логічного мислення у підлітковому віці в різні роки працювали вітчизняні та зарубіжні вчені: В. В. Давидов [18], І. С. Кон [34], Г. С. Костюк [35], І. Я. Лернер [42, 43], Ж. Піаже [64], А. О. Реан [70]. У проаналізованій нами психолого-педагогічній літературі досить повно висвітлено питання психологічних основ задачного підходу. Так, психології розв’язування задач присвячено чимало праць Г. О. Балла [2], Ю. М. Колягіна [32, 33], Дж. Пойа [66], Л. М. Фрідмана [84, 85, 86].

Разом з тим, проблема впровадження задачного підходу до формування логічного мислення у процесі навчання математики залишається актуальною у зв’язку зі щорічним проведенням зовнішнього незалежного оцінювання та запровадженням обов’язкової ДПА з математики з 2021 року. Як свідчить аналіз результатів ЗНО, катастрофічно багато абітурієнтів традиційно не розв’язують задачі ЗНО високого рівня з відкритою формою відповіді – стереометричні задачі, задачі з параметром, тобто задачі курсу математики старшої школи. Так, у 2014 році 96,6% випускників, які складали ЗНО з математики, не отримали жодного балу за розв'язання стереометричної задачі, за розв'язання задачі з параметром – 99,85%. Зі стереометричною задачею у 2015 році не впоралися 93,94% випускників, у 2016 – 90,43%, у 2017 – 77,6%, у 2018 – 83,2%, тоді як задачу з параметром у 2015 році не змогли розв'язати 86,06% абітурієнтів, 94,25%, 89,3%, 87,8% у 2016 – 2018 роках відповідно [23]. Зважаючи на подальше реформування освіти і невтішні результати ЗНО останніх років, вчителям і учням необхідно бути готовим до посилення викладання математики в школі.

Викладене вище обґрунтовує актуальність теми магістерської роботи.

Мета дослідження – розробити елементи методики навчання учнів старшої школи розв'язуванню задач, спрямованої на формування у них компонентів логічного мислення.

Поставлена мета дослідження визначила його **завдання**:

1. Вивчити психолого-педагогічні основи формування логічного мислення в старшому підлітковому віці.

2. Дослідити можливості задачного підходу до навчання математики та формування логічного мислення старшокласників.

3. Визначити фактори задачного підходу при вивченні курсів алгебри та початків аналізу і стереометрії, які сприяють формуванню логічного мислення старшокласників.

4. Розробити методику навчання розв'язування математичних задач, спрямовану на формування логічного мислення учнів профільних класів.

5. Розкрити особливості використання ІКТ у формуванні логічного мислення учнів під час розв'язування математичних задач.

Об'єкт дослідження – процес навчання старшокласників розв'язуванню математичних задач.

Предмет дослідження – методика реалізації задачного підходу, спрямована на формування логічного мислення старшокласників.

Основні **методи дослідження**: аналіз філософської, психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження, аналіз шкільних програм, підручників і навчальних посібників, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду роботи вчителів математики.

Апробація дослідження. Результати дослідження відображені в статті «Формування логічного мислення учнів у процесі розв'язування задач на розрізання» у Віснику Міжнародного дослідного центру «Людина: мова, культура, пізнання» (том 42, 2018 рік), а також оприлюднені на IV Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» з публікацією тез доповіді «ІКТ у підготовці фахівців соціономічних професій», на Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО – 2019» з публікацією тез доповіді «Формування логічного мислення старшокласників у процесі розв'язування задач з параметрами». Матеріали за темою дослідження, розроблені під час активної педагогічної практики, включені у якості додатка в навчальний посібник «Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики» (авторів Т. Г. Крамаренко, В. В.Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк).

Практичне значення дослідження полягає в тому, що матеріал, представлений у роботі, може бути використаний студентами-практикантами і вчителями під час вивчення курсу математики старшої школи чи для організації позакласної роботи з математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 89 найменувань, та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Особливості логічного мислення старшокласників

Мислення – вища форма активного відображення об’єктивної реальності, що полягає в цілеспрямованому, опосередкованому і узагальненому пізнанні суб’єктом істотних зв’язків і відношень предметів та явищ, у творчому створенні нових ідей, в прогнозуванні подій і дій [53, с. 277]. Виникає і реалізується мислення в процесі постановки і розв’язування практичних і теоретичних проблем [89, с. 391], а отже значною мірою розширює пізнавальні можливості людини, сприяє розумінню законів природи і суспільства.

Так, біологічним субстратом мислення є високий рівень розвитку головного мозку, який історично сформувався у процесі становлення людини, людського суспільства, матеріальної і духовної культури. Мислення людини протікає в різних формах і структурах (поняттях, категоріях, теоріях), у яких закріплено і узагальнено пізнавальний та соціально-історичний досвід людства. Мислення перетворює чуттєвий досвід людини і дає можливість отримувати знання про такі властивості і відношення об’єктів, які недоступні безпосередньому емпіричному сприйняттю. Відтак у мисленнєвому процесі за допомогою мислительних операцій, мови, мовлення, наявних знань та уявлень відбувається процедура виділення суттєвих ознак і відношень, з яких формуються поняття [63, с. 4].

Перехід від чуттєвого до мисленого пізнання об’єктивної дійсності являє собою розвиток аналітико-синтетичної діяльності мозку [35, с. 195]. Людина виділяє при цьому одні властивості речей з-поміж інших, відокремлює істотне, головне від неістотного, другорядного. Вона об’єднує, групує, узагальнює виділені властивості і відношення об’єктів і завдяки цьому доходить до глибшого розуміння цих об’єктів. Такі мислительні операції з об’єктами дають змогу людині розкривати загальне в поодинокому і пізнавати сутність речей.

Таким чином, мислити – означає діяти з об’єктами розумово і практично з метою пізнання їх прихованих властивостей.

Є різні ступені розвитку мислення, починаючи з тих, що мають місце у тварин, і закінчуючи найрозвиненішим мисленням людини. Загальною рисою різних ступенів розвитку мислення є те, що воно являє собою опосередковане і узагальнене відображення предметів і явищ об'єктивної дійсності в їх зв'язках і відношеннях, проте кожному ступеню розвитку мислення притаманні різні форми, засоби та глибина цього відображення.

Мислення людини розвинулося і набуло нових особливостей у зв'язку з переходом наших предків до виготовлення і використання знарядь з метою добування необхідних засобів для існування [6, 35]. Праця потребувала поглибленого відображення властивостей і відношень речей. Людина вчилася думати, діючи практично, тому дії її ставали розумнішими, свідомішими і продуктивнішими. На початковому етапі розвитку мислення включалося у працю людини і не виступало специфічною і відносно самостійною діяльністю людини [24]. У міру того, як збагачувався досвід людини і зростали її потреби, формувалися і мислительні дії. Діючи практично з предметами, змінюючи їх форму, розкладуючи на частини і об'єднуючи їх, людина навчалася мислено діяти з ними, їх аналізувати, виділяти в них окремі частини і властивості, синтезувати та узагальнювати [41].

Процес вироблення розумових дій з допомогою слова можна проілюструвати фактами, що характеризують формування навичок лічби у культурно відсталих народностей. Етнографічні дослідження свідчать, що у найменш розвинених племен лічба, необхідна для обміну предметами, здійснювалася у такий спосіб: обмінювані предмети клали один напроти одного і таким наочно-дійовим способом визначалася кількісна однаковість двох груп предметів, а усвідомлення цієї однаковості фіксувалося в певному слові. На новому, вищому ступені розвитку лічби визначення кількості предметів здійснювалося за допомогою інших матеріальних об'єктів (камінців, пальців) та слів. У багатьох народностей основним засобом при цьому були пальці рук і ніг, а самі назви чисел походять у них від назв пальців рук і ніг.

В подальшому люди навчилися лічити наявні об'єкти без допомоги пальців та інших предметів, а тільки словами-числівниками, визначати кількість не тільки безпосередньо сприйнятих, а й уявлюваних об'єктів, відволікатися не тільки від властивостей предметів, кількість яких визначали, а й від самих предметів. Перехід людей до таких дій свідчить про те, що вони володіють вже здатністю абстрагуватися при розгляданні предметів від усіх інших їх властивостей, крім числа, а таке вміння є результатом довгого історичного розвитку. У зв'язку із збагаченням досвіду людей і розвитком у них розумових дій, здійснюваних за допомогою мови, поступово відбувся перехід наочно-дійового, образного мислення до мислення абстрактного.

Історичні етапи розвитку людського мислення деякою мірою проходить кожен з нас. Дійсно, для дітей віком 2–3 років характерним є наочно-дійове мислення [40, с. 35–36]. Таке мислення спрямоване на вирішення конкретних, актуальних для індивіда завдань за допомогою маніпуляцій і дій з реальними предметами. Цей вид мислення не пов'язаний з мовою, рідко спирається на образи чи уявлення про предмети і дозволяє визначати властивості об'єктів та відношень, що існують між ними, шляхом «проб і помилок», перебору «навпомацки». Наприклад, коли дитині пропонують визначити, шо спільного і в чому відмінність між яблуком і грушою, то їй значно легше визначитися, тримаючи ці фрукти в руках. Інший приклад – складання зображення з кубиків: дорослому достатньо проаналізувати фрагменти зображення, представлені на гранях кубика, аби уявити, яке зображення можна скласти з кубиків, тоді як дитині потрібно скласти кубики в одне ціле буквально.

В енциклопедії «Психологія людини від народження до смерті» [70, с. 188] знаходимо відомості про існування великої кількості теорій, які намагаються пояснити чи описати закономірності розвитку мислення людини. Зокрема, мова йде про теорію розвитку інтелекту, запропоновану Ж. Піаже. У своїй теорії відомий швейцарський психолог підійшов до проблеми мислення, зосередившись на взаємодії між здібностями дитини і її зв'язками з оточенням. Піаже бачив у дитині активного учасника цього процесу, а не пасивного «реципієнта» біологічного розвитку. Так, на думку вченого, дитину треба розглядати як дослідника, який здійснює експерименти над світом, щоб дізнатися, що з цього вийде (наприклад, «Що буде, якщо посунути тарілку за край стола?», «А що станеться, якщо кинути іграшку у воду»). В результаті таких міні-експериментів дитина вибудовує свою «теорію» (схему) розуміння фізичного і соціального світу. Зустрічаючись з новим об'єктами чи подіями, дитина намагається зрозуміти їх мовою вже існуючих схем; якщо стара схема виявляється неадекватною для розуміння нової ситуації, дитина модифікує цю схему і тим самим розширює свою теорію світу.

В розвитку розумових операцій Ж. Піаже виділяє чотири стадії [70, 64].

Перша стадія – стадія сенсомоторного інтелекту – охоплює період життя дитини від одного до двох років і характеризується розвитком здатності сприймати і пізнавати предмети реального світу, з яких складається оточення дитини. Причому, під пізнанням предметів розуміється осмислення їх ознак і властивостей.

Друга стадія розвитку мислення – стадія дооопераційного мислення – характерна для віку від двох до семи років. На цей період припадає розвиток мовлення, тому активізується процес інтеріоризації зовнішніх дій з предметами і у дитини формуються наочні уявлення.

У віці 7–12 років мислення дитини перебуває на стадії конкретних операцій з предметами, для якої характерним є прогрес в трьох важливих областях інтелектуального розвитку: консервації, класифікації, сериації і транзитивності. Термін «консервація» Ж. Піаже використовує для позначення здатності індивіда бачити незмінне на фоні видимих змін. Смисл консервації пояснюють результати експерименту, який проводив психолог: на столі перед дитиною стоять три посудини А, В, С: дві з них (А і В) однакові, а третя (С) – вища і вужча; в посудини А і В наливають рівну кількість води, а потім переливають воду з посудини В в посудину С. Вчений з'ясував, що на запитання «Чи більше води у вузькій посудині, аніж її було у низькій?» діти, старші семи років, відповідали «Ні, бо нічого не зроблено, щоб змінити кількість води», тоді як діти молодшого віку у більшості випадків відповідали «Так, бо вода піднялася до вищого рівня».

Піаже також з'ясував, що діти молодшого шкільного віку вже здатні проводити класифікацію – розбивати групу на класи за якою-небудь ознакою, а також розміщувати набір елементів у відповідності до зв'язків, які існують між ними (наприклад, дитині до семи років ще складно повністю впоратися із завданням впорядкувати палички за довжиною). На стадії конкретних операцій діти приходять до інтуїтивного розуміння важливих логічних принципів мислення: 1) якщо $A = B$, то $B = A$; 2) якщо $A = B$, $B = C$, то $A = C$.

Відповідно до теорії Ж. Піаже, на стадії формальних операцій розвитку мислення дитини (у підлітковому віці) виникає здатність логічно мислити про абстрактні висловлювання [64, с. 56], а вміння міркувати за допомогою вербально сформульованих гіпотез, а не мовою конкретних предметів і дій з ними є головною новою якістю мислення підлітка. В період старшого підліткового віку (14–15 років) настає поворотний, вирішальний момент, оскільки міркування за допомогою гіпотез і виведення наслідків, що витікають з гіпотез (незалежно від істинності посилок) – це і є процес формальних міркувань. Крім того, гіпотетичні міркування змінюють сутність дискусій: плідне і творче обговорення якого-небудь питання означає, що за допомогою гіпотез ми можемо прийняти точку зору противника (необов'язково поділяючи її) і вивести з неї логічні висновки. Це дає можливість оцінити значення гіпотези. Індивід, у якого виникає здатність до таких міркувань, починає цікавитися питаннями, які виходять за межі його наявного досвіду. Усвідомлення такої здатності підлітком, як вважає Ж. Піаже, нерідко супроводжується прагненням змінити світ, створити щось досконале і довершене.

Вітчизняні психологи піддають сумнівам правомірність теорії розвитку мислення Ж. Піаже. Так, наприклад, дослідження В. В. Давидова [18] свідчать, що оволодіння розумовими операціями неможливо відділити від процесу навчання. Так, при відповідному навчанні вже третьокласники спроможні розв'язувати абстрактні алгебраїчні задачі. До того ж існує широкий діапазон індивідуальних відмінностей: одні люди володіють гіпотетико-дедуктивним мисленням у 10–11 років, тоді як деякі не здатні до нього і в дорослому віці.

І. С. Кон також виступає з критикою теорії Ж. Піаже [34, с. 45] і зауважує, що не слід ототожнювати формально-логічне мислення з формальною логікою. На підтвердження своєї думки вчений спирається не результати експерименту, проведеного американським психологом Р. Уейсоном. Дослідник виготовив чотири картки: на одній стороні першої картки написав букву Е, на зворотній – цифру 3, на другій картці – відповідно К і 5, на третій – 4 і У, на четвертій – 7 і А. Картки розкладали перед учасниками експерименту лицьовою стороною Е – К – 4 – 7 і давали наступну інструкцію: «Кожна з цих карток має на одній стороні букву, на іншій – число. Скажіть, які картки треба перевернути, щоб перевірити, чи виконується правило: якщо на одній стороні картки написана голосна буква, то на іншій має стояти парне число. Перевертайте тільки ті картки, які порушують правило». Всі досліджувані, навіть професійні логіки, у більшості випадків називали картку з написом Е або дві картки – Е і 4. Однак правильна відповідь – Е і 7. Дійсно, будь-яке непарне число на зворотній стороні Е порушує правило. Картки К і 4 перевертати не потрібно, бо правило звучить так: «Якщо на одній стороні картки – голосна буква ...», а не «Якщо на одній стороні картки – парне число». Проте будь-яка голосна буква на зворотньому боці картки 7 також порушує правило.

Н. О. Подгорецька за результатами 5-річних досліджень логічного мислення дорослих [65, с. 136] ставить під сумнів тезу про те, що якісний розвиток інтелекту завершується на початку періоду юності людини і робить припущення, що за стадією формальних операцій наступає ще одна стадія, яка характеризується здатністю знаходити і ставити проблеми. Властивості цієї останньої фази розвитку інтелекту наступні: нестандартний підхід до вже відомих і розв’язаних проблем, вміння включати окремі проблеми більш загальні, родові. Вчена зауважує, шо навіть якщо всі підлітки з посередніми можливостями володіють гіпотетико-дедуктивним мисленням, то вони неоднаково використовують цю здатність до різних аспектів дійсності, тобто розвиток логічного мислення нерозривно пов'язаний з процесом навчання і виховання.

Є. М. Кабанова-Меллєр виділяє такі показники якісно нового рівня розвитку мислення старшокласників [29, С. 29–42]:

– самостійне перенесення узагальнених прийомів навчальної діяльності (вибір прийому розв'язування проблеми, комбінація прийомів);

– зміна мотиваційної сторони розумової діяльності та становлення стійких пізнавальних інтересів;

– зміна характеру розумової діяльності, вироблення її загального стилю.

В. В. Давидов виокремлює такі специфічні особливості мислення старшокласників [18, с. 139]:

– глибина – здатність виокремлювати істотні ознаки при вивченні зовсім нового матеріалу та при розв'язуванні задач;

– широта – здатність утримувати в пам'яті сукупність виокремлених істотних ознак;

– гнучкість – уміння долати бар'єр колишнього досвіду, відступати від звичних, стереотипних способів міркувань та шукати нові, оригінальні способи;

– усвідомленість – здатність передавати у графіках, моделях, схемах, словах мету та результат мислення;

– самостійність – уміння ставити перед собою цілі, висувати гіпотези;

– критичність – здатність об'єктивно оцінювати свої та чужі думки;

– активність – рішучість та енергійність у процесі розв'язування конкретних задач.

Виходячи з положень теорії розвивального навчання, Т. Г. Попова [67], М. А. Єкімова [20], Т. А. Присяжнюк [68], С. П. Семенець [74] наголошують на важливості розвитку логічного мислення, зокрема на уроках математики, причому оволодіння складовими логічного мислення має бути не побічним, а основним результатом навчання.

Дослідження ряду сучасних вчених, зокрема К. Ю. Ромашиної [72], Л. Коена [37], Л. А. Мойсеєнко [55], В. Ф. Спиридонова [79] стосуються особливостей формування та розвитку логічного мислення молоді в умовах тотальної інформатизації суспільства. Так, відомий нейрофізіолог Л. Коен констатує шкідливий вплив комп'ютерних ігор на дітей, однак на основі експериментальних даних приходить до висновку, що ігри пригодницького жанру покращують візуальне сприйняття і розвивають таку важливу характеристику мислення, як швидкість.

У К. Ю. Ромашиної [72, с. 67] знаходимо критерії і показники сформованості характеристик мислення старшокласників (див. табл. 1.1), що відповідає вимогам сучасного інформаційного простору:

Таблиця 1.1

Показники сформованості характеристик мислення

Характеристики мислення	*Показники сформованості*
Високий рівень узагальненості і опосередкованості	Підліток узагальнює поняття, судження, візуальні об'єкти; визначає явища за переліком ознак, виділяє смислові домінанти об'єкта
Побудова теоретичних моделей	Створює логічні конструкції, використовуючи текстову і візуальну інформацію
Оперування смисловими одиницями будь-якої форми, довжини і складності	Аналізує різні об'єкти та виділяє їх структурні компоненти, порівнює різні об'кти; виявляє загальні і особливі характеристики та ознаки різноформатних (візуальних, текстових, символьних) об'єктів; перетворює інформацію з однієї форми в іншу
Виявлення закономірностей і зв'язків між предметами і явищами	Систематизує об'єкти, явища, процеси; класифікує об'єкти, явища, процеси; встановлює зв'язки між явищами і компонентами явища, процесу (частина – ціле, причина – наслідок тощо)
Багатозадачність	Розв'язує декілька задач одночасно
Швидкість	Опрацьовує різну за формою представлення інформацію за короткий час; швидко виявляє суттєве та несуттєве
Гнучкість	Виявляє нові характеристики об'єктів за зміни умов; пропонує варіанти систематизації, класифікації різноформатних об'єктів; задає питання, що виходять за рамки змісту і умов запропонованої задачі
Рухливість	Швидко переходить від одного аспекту проблеми до іншого
Інтенсивність розумових операцій	Виконує значний об'єм розумових операцій за короткий проміжок часу
Оригінальність	Пропонує розв'язання задач, яке не зустрічається в інших
Мотивація, позитивний емоційний фон інтелектуальної діяльності	Визначає характер явищ і процесів, дає їм особисту оцінку; виявляє ініціативу розумової діяльності

Розглянемо детальніше розумові операції, якими поступово оволодіває підліток і ступінь розвитку яких є показником сформованості мислення дитини.

Традиційно психологи виділяють такі розумові операції: порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення, конкретизація. Ці операції тісно пов'язані між собою і складають цілісний комплекс операцій, які виконує кожна людина в процесі мислення [10, 17, 39, 40, 70, 87].

Порівняння відіграє важливу роль у вивченні фактів та їх узагальненні. Порівнюючи, людина встановлює схожі і відмінні ознаки та властивості певних об'єктів – безпосередньо сприйнятих предметів навколишньої дійсності, а також їх зображення, уявні об'єкти, абстактні поняття. Порівняння має мимовільний характер (прослідковується під час сприймання і впізнавання різних предметів і явищ), а в разі наявності спеціальної мети зіставити два чи декілька об'єктів, щоб встановити їх подібність, тотожність чи протилежність, набуває довільного характеру.

При порівнянні об'єктів людина вдається до практичних і сенсорних, перцептивних дій. Наприклад, щоб перевірити, чи однакові два предмети за розмірами, їх треба порівняти. Щоб порівняти дві великі за обсягом групи предметів, перелічують елементи кожної з них. Процес порівняння неможливий без мови: асоціації за схожістю і контрастом фіксуються у відповідних словах, стаючи основою суджень про риси об'єктів, що порівнюються [38].

У керівництві процесом порівняння в учнів важливу роль відіграють слова учителя, його вказівки і послідовні запитання, якими він скеровує сприйняття учнями об'єктів, самостійне виділення їх схожих та відмінних рис.

Аналіз у мисленні є подальшим продовженням того аналізу, що має місце в чуттєвому відображенні об'єктивної дійсності, і являє собою розчленування об'єктів свідомості, виділення в них окремих частин, елементів, ознак і властивостей. Як і порівняння, аналіз спочатку носить мимовільний характер. Він набуває довільного характеру, коли скеровується спеціальною словесною вказівкою інших людей на те, що саме треба виділити в певному об'єкті, на які йог властивості слід звернути увагу. Мета виділити різні сторони об'єкта, який аналізується, може ставитися і з ініціативи самої людини. У процесі навчальної роботи процес аналізу в учнів зазвичай активізується під впливом тих завдань, які перед ними ставить учитель. Однак всяке розуміння об’єкта вимагає не лише аналізу, а й синтезу – протилежної до аналізу операції.

Синтез означає об’єднання окремих частин, ознак і властивостей об’єктів, виділених у ході аналізу, в єдине ціле. Таким чином, аналіз і синтез тісно переплітаються і постійно чергуюються. Поєднання цих розумових операцій наявне в читанні і написанні кожного слова, в лічбі, в розумінні інформаційного повідомлення, в розв’язуванні арифметичної задачі, в засвоєнні законів фізичних та інших явищ тощо. Дійсно, аналіз завжди складає підготовчий етап розуміння, тоді як синтез його завершує.

Аналіз об’єктів переходить в *абстрагування* – мисленне відокремлення одних ознак і властивостей об’єкта від інших його рис і від самого об’єкта, якому вони властиві. У ході абстрагування людина відокремлює істотні ознаки від неістотних, загальні – від поодиноких, кількісні відношеня речей – від якісних їх особливостей, форму предметів – від розміру, кольору і т. д. Найчастіше абстрагування здійснюється подумки і виявляється у формулюванні словами різних ознак та властивостей об’єктів, означень понять тощо.

Узагальнення є продовженням і поглибленням синтезуючої діяльності мозку людини. Узагальнення зазвичай проявляється у формулюванні означень, висновків, правил, а також у складанні класифікацій.

Конкретизація – це перехід від загального до одиничного, яке відповідає цьому загальному. В навчальній діяльності конкретизувати – означає навести приклад, факт, який підтверджує загальне, теоретичне положення. Конкретизація має велике значення, оскільки пов’язує теоретичні знання з життям і практикою, допомагає правильно зрозуміти дійсність.

Таким чином, процес навчання, орієнтований на формування логічного мислення старшокласників, має передбачати формування і розвиток розумових операцій учнів.

1.2. Задачний підхід до навчання математики у старшій профільній школі

Слово «задача» має багато різних тлумачень, тому досить важко дати чітке означення цьому поняттю. Коротко описати його зміст Г. П. Бевз пропонує наступним чином: «Математична задача – це будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі» [5, с. 52]. Аналогічне трактування терміну «задача» знаходимо у З. І. Слєпкань [77, с. 123]. У математиці задачі відіграють важливу роль. Історія свідчить, що математика як наука виникла із задач і розвивається в основному для розв'язування задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси – це збірки задач. У них немає яких-небудь загальних правил, а є тільки розв'язання окремих задач на обчислення. Задачі стимулювали не лише виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Насамперед задачі, поставлені життям, примушували вчених розробляти нові алгоритми, виявляти нові закономірності, створювати нові методи дослідження. Наприклад, задачі на дослідження різних процесів і на знаходження площ криволінійних фігур свого часу стали поштовхом до виникнення диференціального та інтегральноо числення, а задачі про азартні ігри привели Б. Паскаля і П. Ферма до теорії ймовірностей. І донині математика розвивається через розв'язування задач.

У навчальному процесі математичні задачі також відіграють важливу роль. Так, розв'язуючи задачі, учні вчаться застосовувати набуті теоретичні знання для практичних потреб. Крім того, розв'язування задач безсумнівно сприяє розвитку мислення учнів, зокрема логічного.

Г. П. Бевз зазначає [4, с. 53], що процеси вивчення теоретичного матеріалу і розв'язування задач тісно переплітаються, адже на уроках математики навчальний процес іде здебільшого від задач до теорії і потім від теорії до задач. Перехід від задач до теорії характеризує проблемну ситуацію на етапі мотивації вивчення теорії, тоді як перехід від теорії до задач характеризує застосування теорії:

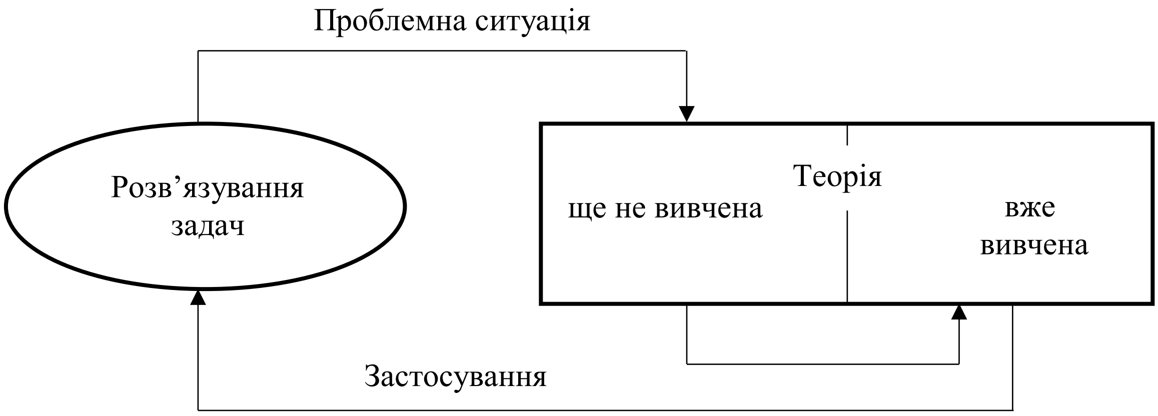


Рис. 1.1. Схема, що ілюструє зв'язок теорії з розв'язуванням задач

Л. Л. Гурова називає задачею «об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу деякого практично перетворення чи відповіді на теоретичне питання засобами пошуку умов, які дозволяють розкрити зв'язки і відношення між відомими і невідомим елементами проблемної ситуації» [17, с. 49].

Л. М. Фрідман називає задачею «всяку знакову модель проблемної ситуації» [85, с. 150]. Оскільки дослідження Л. М. Фрідмана присвячено математичним задачам, розглянемо детальніше його характеристику поняття задачі та її компонентів. Відзначимо, що вчений чітко розрізнає поняття задачі і проблемної ситуації:

1) проблемна ситуація існує реально, незалежно від мови, а задача завжди пов'язана з мовою, якою вона сформульована;

2) проблемна ситуація завжди ширша за змістом від задачі, оскільки задача – це модель ситуації, яка відображує лише деякі її сторони;

3) для кожної проблемної ситуації існує одна чи декілька задач.

За Л. М. Фрідманом задача містить в собі наступні складові: предметну область, яка складається з одного чи декількох фіксованих об'єктів (предметів); предикати, які зв'язують між собою об'єкти предметної області задачі [85, с. 156], а структура будь-якої задачі складається з трьох частин – умови (зазвичай сформульованій у висловлювальній формі), об'єкта задачі (який-небудь елемент предметної області, предикат або правило виводу) і мети (вимоги) задачі, яка полягає в знаходженні значення об'єкта задачі, яке перетворює умову в істинне висловлення).

Схожим чином поняття «задача» трактує А. А. Столяр [80, с. 146]. Предметну область задачі він розуміє як систему, що складається з однієї чи декількох множин (які в об'єднанні утворюють універсальну множину) з визначеними на них предикатами: $(A_1, A_2, ..., A_k; P_1, P_2, ..., P_n)$. Будь-яку ситуацію в предметній області можна описати за допомогою деякої формули, складеної з вихідних предикатів P і логічних операцій – $\varphi(P_1, P_2, ..., P_n)$.

Тоді задачею в широкому розумінні можна вважати вимогу знайти область істинності $\{x_1, x_2, ..., x_k \mid x_i \in A_i \ (1 \leq i \leq k), \varphi(P_1, P_2, ..., P_n)\}$.

Таку схему розуміння задачі можна застосувати майже до всіх задач шкільного курсу математики, які зводяться до розв'язуваня рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей, окрім задач на доведення. Задачу на доведення А. А. Столяр пропонує розуміти як вимогу знайти хоча б одну послідовність речень $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ з певними властивостями.

За описаною схемою задачу «знайти найбільшу площу і катети прямокутного трикутника, якщо сума катетів дорівнює 10» вчений розглядає як вимогу знайти область істинності $\{T(s, x, y) \in R^3 \mid T(s, x, y) \wedge x+y=10 \Rightarrow max(s)\}$, де $T(s, x, y)$ – трьохмісний предикат, s – площа, x і y – катети прямокутного трикутника, а $max(s)$ – найбільше з чисел s, які знаходяться з x та y у відношенні T. Іншими словами, це означає знайти множину всіх трійок дійсних чисел (s, x, y), які перетворюють логічну функцію $T(s, x, y) \wedge x+y=10 \Rightarrow max(s)$ в істинне висловлення.

Г. О. Балл [2, с. 32] розглядає задачу як систему, обов'язковими компонентами якої є предмет задачі, що перебуває у вихідному стані (вихідний предмет задачі), і модель стану предмета, який треба визначити (вимога задачі). Під розв'зуванням задачі вчений розуміє вплив на предмет задачі з метою переведення його з вихідного стану в потрібний, а задачу, предмет якої переведений в потрібний стан, – як розв'язану задачу.

Ю. М. Колягін [31, с. 49] для розуміння поняття задачі вихідним вважає поняття «система» (система – множина елементів разом з сукупністю відношень між цими елементами чи їх властивостями). Автор вважає, що будь-яку задачу визначає складна система S–P, де S – суб'єкт, людина, а P – предмет, задачна система. Якщо суб'єкту S, яка вступає в контакт з системою P, відомі всі елементи цієї системи і відношення між ними, то таку систему Ю. М. Колягін називає стаціонарною; якщо ж хоча б один з елементів системи P – невідомий, то систему P можна вважати проблемною. Виходячи з цих положень, розв'язати задачу – означає перетворити задану проблемну ситуацію у відповідну їй стаціонарну або встановити, що таке перетворення в даних умовах є неможливим. Так, наприклад, якщо учень встановив, що рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має дійсних коренів, то вважається, що він розв'язав цю задачу (на рівні наявних у нього знань).

Дж. Пойа писав: «Розв'язування задач є спицифічною особливістю інтелекту, а інтелект – особливий дар людини, тому розв'язування задач можна розглядати як один з найхарактерніших виявів людської діяльності. Володіти математикою – означає вміти розв'язувати задачі, причому не тільки стандартні, а й ті, які вимагають оригінальності, винахідливості, незалежності мислення» [66, с. 13].

Розв'язування задач – важливий вид навчальної діяльності, у ході якої учні засвоюють теоретичний матеріал, розвивають свої творчі здібності і самостійність мислення.

У навчанні математики задачний підхід розглядався в працях Ю. М. Колягіна [32, 33], Л. М. Фрідмана [85], А. А. Столяра [80].

Задачний підхід отримав широке застосування у зв'язку з орієнтацією освітнього процесу на формування у школярів «уміння вчитися» – основи навчальної діяльності [1]. Саме тому задачний підхід став основою навчання математичній діяльності учнів класів фізико-математичних профілю. Д. О. Терешин у своєму дослідженні [82, с. 49] формулює вимоги, яким має відповідати задачний підхід:

1. Задачі повинні розвивати логічне мислення учнів у двох напрямах – побудова алгоритмів і складання евристичних схем, які скеровують пошук розв'язання задач у потрібний напрямок.

2. Задачі повинні розвивати гнучкість мислення, тобто вміння розв'язувати задачі декількома шляхами і способами, перетворювати ці задачі.

3. Задачі повинні виробляти здатність вибору і застосування математичних методів: індуктивного, рівносильних перетворень, дедуктивного та ін.

4. Зміст задач має відповідати принципам повноти, систематичності і послідовності.

5. Необхідна наявність ключових задач – задач, у яких розглядаються факти та способи діяльності, що використовуються для розв'язування інших задач і які мають принципове значення для засвоєння математичного змісту.

6. Система задач має забезпечувати розвиток усіх компонентів математичної діяльності: емпіричного, логічного та теоретичного.

І. В. Лов'янова, розуміючи задачний підхід до навчання як «навчальну діяльність, в основу якої покладено задачну структуру – систему навчальних задач, які, з одного боку, спрямовані своїми вимогами на зовнішній об'єкт, а з іншого – містять у собі неявно виражені вимоги до суб'єкта, що їх розв'язує» [46, с. 69], вважає, що задачний підхід передбачає введення до змісту навчальної інформації таких завдань, які активізують мисленнєві процеси учнів і закріплюють вміння оперувати теоретичними знаннями в практичній діяльності.

Особливості задачного підходу також обумовлюються метою його залучення до процесу навчання. Так у дослідженні І. В. Лов'янової [45] підкреслюється, що задачний підхід уможливлює засвоєння змісту навчання математики учнями профільної школи через уведення до апарату організації засвоєння змісту навчання професійно спрямованих задач.

Професійно спрямовані задачі дослідниця визначає як математичні, міжпредметні, практичні і прикладні задачі, які є носієм навчальної інформації, а процес їх розв'язування орієнтований на організацію навчальної математичної діяльності учнів на рівні, який відповідає обраному навчальному профілю, і на формування інтересу до професійної сфери «математика» та професійно важливих якостей особистості учнів.

Функціями професійно спрямованої задачі є [81]:

– розвиток пізнавальних інтересів учнів до професійної сфери «математика» в межах обраного навчального профілю;

– відкриття нових понять, фактів і способів діяльності;

– розвиток інтелектуальної сфери особистості учнів;

– організація рівнів навчальної математичної діяльності від репродуктивного до творчого;

– підготовка до самостійного розв'язання проблем.

За характером об'єктів професійно спрямовані задачі поділяються на:

– *математичні* – задачі, умова й вимога яких стосується математичних об'єктів і які розв'язуються усіма засобами математики;

– *практичні* – задачі, у яких хоча б один об'єкт є реальним або які відображують побутові чи виробничі ситуації з реальними числовими даними, проте головною у змісті задачі є її математична сутність; розв'язуються прикладні задачі за допомогою використання математичних понять, фактів, способів діяльності, зокрема, потребують умінь раціонально обчислювати, розв'язувати рівняння і нерівності, користуватися інформаційними технологіями;

– *прикладні* – задачі, які виникають за межами математики, і які розв'язуються виключно методом математичного моделювання, якому властиві такі етапи: 1) побудова моделі (переклад з природної мови тієї галузі, де вона виникла на мову математики); 2) дослідження моделі (розв'язування отриманої математичної задачі); 3) аналіз отриманих результатів (переклад розв'язку задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла);

– *міжпредметні* – практичні або прикладні задачі, зміст яких відповідає цілям певної математичної теми й пов'язаний з темами програми інших навчальних дисциплін старшої школи (фізики, хімії, біології, економіки, тощо).

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив нам з'ясувати психологічний аспект розв'язування математичних задач.

Відомо, що будь-яка задача має щонайменше два компоненти: що дано і що треба знайти або довести. Оскільки навчання перш за все полягає в активізації розумової діяльності людини, правомірним є питання відношення двокомпонентної структури задачі до мислення. А. Ф. Есаулов [88, с. 28] відзначав, що психологічна сторона задачі виявляється в ролі організатора тих зовнішніх умов (вихідних даних задачі), які необхідним чином забезпечують розумову активність, тому поставити, сформулювати і перейти до розв'язування задачі – означає створити для учня проблемну ситуацію. Дійсно, якщо вихідні умови будуть представлені не у вигляді характерного для задачі комплексу відомого (умов) та невідомого (вимог), то задача втратить свою розвивальну функцію. Зрозуміти задачу – значить усвідомити її приховану на перший погляд проблемність, тобто таку розстановку окремих її елементів, яка породжує процес мислення і особистісну ціленаправленість. Характеризуючи процес розв'язування задач, американський математик Дж. Пойа писав: «Задача, яку Ви розв'язуєте, може бути скромною, але якщо вона робить виклик Вашій допитливості і змушує Вас бути винахідливим, і якщо Ви розв'язуєте задачу самостійно, то Ви зможете відчути напруження розуму і насолодитися радістю перемоги» [66].

Особливої уваги заслуговує управління розумовою діяльністю учнів під час розв'язування задач. Дослідження психологів і шкільна практика свідчать, що педагогічне управління розумовою діяльністю під час навчання методам і способам розв'язування задач ефективніше реалізується в умовах алгоритмізації навчання і широкого впровадження моделювання в освітній процес [3, 7, 9, 77]. Так, З. І. Слєпкань вбачає поєднання алгоритмічного підходу з проблемним найбільш ефетивним для розуміння і засвоєння учнями програмового матеріалу, розвитку в дітей інтуїції і творчої діяльності у процесі розв'язування стандартних і нестандартних задач. У старших класах алгоритми допомагають засвоювати на високому рівні зміст деяких тем курсу алгбри та геометрії: знаходження похідних функцій, дослідження функцій на монотонність та екстремуми, визначення найбільших і найменших значень функцій, побудова перерізів многогранників методом слідів та методом внутрішнього проектування, координатний та векторний способи розв'язування геометричних задач.

Шкільний курс математики передбачає знайомство зі способами розв’язування задач, які не можна задати у вигляді алгоритма. До таких способів відносять: метод складання рівнянь при розв’язуванні текстових задач, метод метод геометричних місць і геометричних перетворень, окремі методи розв’язування задач на побудову [77, с. 134]. На думку методистів і психологів, дієвим засобом управління і самоуправління розумовою діяльністю учнів у процесі розв’язування задач, що потребують цих способів є знайомство з евристичними схемами пошуку розв’язання задачі. Так, Л. М. Фрідман у своєму посібнику «Учіться вчити математику» звертається до школярів зі словами: «Вам треба навчитися розв’язувати задачі. Для цього перш за все необхідно детально їх вивчати, аналізувати, кожного разу встановлювати умову і вимогу задачі, з’ясовувати, які об’єкти та їх характеристики входять до задачі, що означає вимога задачі. На такий ретельний і глибокий аналіз не варто шкодувати ні часу, ні сил, і тільки на основі цього аналізу буде ефективним ваш пошук розв’язання задачі. При цьому варто пам’ятати, що розв’язування задачі зводиться до пошуку таких загальних положень математики, використовуючи які можна задовольнити вимогу задачі. Знаходження способу розв’язання задачі вимагає уяви, здогадки, фантазії, тому постійно розвивайте в собі ці якості» [85, с. 57].

Безсумнівно, задачі спонукають учня логічно мислити і формують у нього навички виконання розумових операцій. У зв’язку з тяжінням мислення старшокласників до абстрактного, теоретичного і логічного мислення, вважаємо за необхідне дослідити типологію задач курсу математики старшої школи та виділити ті з них, розв’язування яких формує компоненти мислення підлітків якнайбільше.

1.3. Задачі ШКМ, спрямовані на формування логічного мислення

Формування логічного мислення учнів у процесі розв’язування задач обумовлюється кількома факторами, серед яких:

– вибір певного виду математичних задач;

– добір методу розв’язування математичних задач;

– пропозиція до розв’язування системи задач. Розкриємо суть кожного фактору.

Існує чимало класифікацій математичних задач.

А. А. Столяр виділяє три види навчальних ситуацій, пов’язаних з розв’язуванням задач, які вимагають різних стратегій навчання [80, с. 158]: I – розв’язування стандартних задач, загальний метод розв’язання яких ще не відомий учням, II – розв’язування стандартних задач, загальний метод розв’язання яких уже відомий учням, III – розв’язування нестандартних задач.

У ситуації I мова йде про попереднє розв’язування однотипних задач, і стратегія навчання має бути орієнтована на відкриття учнями під керівництвом вчителя загального методу (алгоритму) розв’язування будь-якої задачі даного класу однотипних задач.

У ситуації II мова йде про використання вже відомих загальних правил і формул, і тут вимагається лише вміти конкретизувати , застосовувати загальний спосіб до окремої задачі. Попередньо слід віднести цю задачу до класу задач, які розв’язуються за допомогою відомого методу. Таким чином, навчальна стратегія в даному випадку має бути направлена на навчання розпізнаванню належності окремих задач до якого-небудь класу задач, які розв’язуються відомими методами.

III ситуація з дидактичної точки зору найскладніша, оскільки стратегія навчання розв’язуванню нестандартних задач орієнтується на пошуки їх розв’язання.

За Г. О. Баллом [2, с. 53] задачі бувають принципово розв’язні і принципово нерозв’язні. Задача називається принципово розв’язною, якщо відповідно до закономірностей тієї області дійсності, до якої відноситься задача, її розв’язання неможливе, тобто неможлива вимога задачі, або вона можлива, але недосяжна з вихідних умов задачі. Г. О. Балл особливу роль відводить словесному формулюванню задач. Так, псевдозадачне формулювання не описує жодної задачі, а значить питання розв’язності такої задачі недоречне.

Наприклад:

1) У трикутнику *ABC* $\angle A=62°$, $\angle B=75°$, $\angle C=53°$. Знайти зовнішні кути трикутника.

Коментар до задачі. Задачу не можна розв'язати через її псевдозадачне формулювання. Дійсно, в евклідовій геометрії не існує трикутника, сума кутів якого не дорівнює *180°*.

2) Знайти сторону прямокутника, якщо його площа дорівнює 453 $м^2$.

Коментар до задачі. Формулюванню цієї задачі відповідає нескінченна множина розв'язків, якщо мається на увазі довільний прямокутник із заданою площею, або ця задача належить до принципово нерозв'язних (якщо мається на увазі конкретний прямокутник, то визначити довжину сторони, знаючи тільки площу прямокутника, неможливо).

О. О. Гриб'юк [15] наводить класифікацію математичних задач за рівнем складності, за математичним змістом, за дидактичним цілями, за типом мислення.

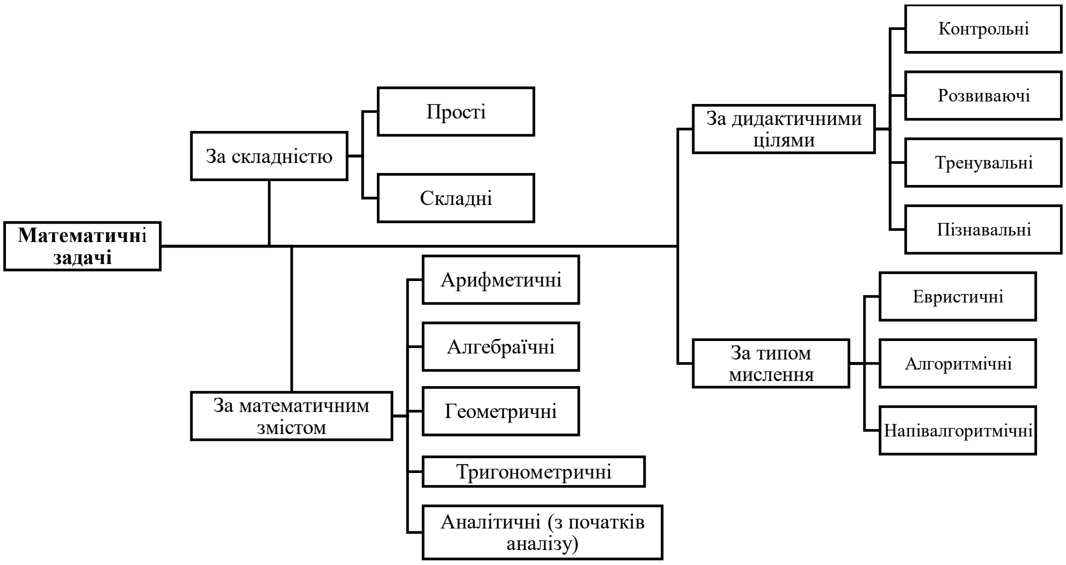


Рис. 1.2. Класифікація математичних задач

Відповідно до змісту вимоги задачі, Г. П. Бевз [5] і З. І. Слєпкань [78] розрізняють 4 види задач: на обчислення; на побудову; на доведення; на дослідження.

У *задачі на обчислення* вимагається знайти число (або декілька чисел) за певними числами і залежностями між ними, які дано в умові задачі. Задачі на обчислення, особливо в арифметиці і алгебрі, поділяють на текстові («задачі у вузькому розумінні слова») і приклади. Під прикладами в методиці навчання математики розуміють такі задачі, умови яких записані за допомогою чисел, поданих цифрами або буквами, і знаків дій, що показують, які дії і в якій послідовності треба виконати над даними числами; до прикладів зокрема відносять рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей.

Говорячи про *задачу на побудову*, найчастіше мають на увазі геометричні задачі, в яких поставлено вимогу побудувати яку-небудь геометричну фігуру, що задовольняє умову задачі.

Задача, в якій вимагається довести сформульоване в ній твердження, називається *задачею на доведення*. Умова задачі на доведення нічим не відрізняється від теореми, окрім значення в окремій темі курсу. Так, найважливіші твердження, які дають можливість розв'язувати задачі і які мають широке практичне застосування, формулюються в теоремах. Інші, менш важливі твердження, які не обов'язково вивчати напам'ять, але які корисно знати, формулюють в задачах на доведення.

Задачі, в яких треба що-небудь дослідити, називають *задачами на дослідження*.

Залежно від кількості розв'язків задачі на обчислення поділяють на визначені і невизначені. Задачу, яка має один розв'язок називають *визначеною*. Якщо ж задача має два або більше розв'язків, то таку задачу називають *невизначеною* [69, с. 95].

На основі аналізу чинних підручників [25, 49, 57] для класів з профільним рівнем вивчення математики наведемо приклади задач на доведення з алгебри, розв'язування яких спонукатиме учнів вести логічні міркування, проводити дослідження, аргументувати власну думку.

Задача 1.1. Доведіть, що вираз $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ділиться на $(a-b)(b-c)(c-a)$.

Задача 1.2. Доведіть, що вираз $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ділиться на $x+\ y+\ z$.

Задача 1.3. Методом математичної індукції доведіть, що:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 \ldots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$;

в) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

г) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \vdots 7$;

д) $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \vdots 17$.

Задача 1.4. Доведіть, що $\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{\ldots + \sqrt[3]{24}}}} < 3$.

Задача 1.5. Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}.$$

Задача 1.6. Доведіть, що при $|x| \le 1$ виконуються рівності:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Серед задач, наявних у чинних підручниках з геометрії [27, 28, 51, 52, 59, 60] для старшої школи, також знаходимо велику кількість задач на доведення. Наприклад:

Задача 1.7. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину; площина, що перетинає дану площину.

Задача 1.8. Доведіть, що в просторі існують прямі, які не лежать в одній площині.

Задача 1.9. Дано n прямих. Доведіть, що в просторі є точки, які не лежать на жодній з цих прямих.

Задача 1.10. Доведіть, що в просторі існує принаймні три попарно мимобіжні прямі.

Задача 1.11. Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.

Задача 1.12. Доведіть, що проекцією куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі, є правильний шестикутник. Знайдіть площу цього шестикутника, якщо ребро куба дорівнює *a*.

Задача 1.13. Доведіть, що квадрат площі трикутника дорівнює сумі квадратів площ його проекцій на три взаємно перпендикулярні площини.

Задача 1.14. Доведіть, що центр паралелограма, утворено внаслідок перерізу тетраедра площиною, паралельною двом його ребрам, лежить на відрізку, що сполучає середини цих ребер.

Задача 1.15. Доведіть, що бісектори всіх двогранних кутів будь-якого тетраедра проходять через одну точку.

Задача 1.16. Доведіть, що для плоских кутів будь-якого тригранного кута має місце нерівність $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\gamma \cdot \cos\alpha + 1 > 0$.

Задача 1.17. Доведіть, що сума квадратів діагоналей будь-якого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

Задача 1.18. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами кути α, β, γ. Доведіть, що $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

Задача 1.19. Доведіть, що коли у трикутній піраміді всі грані мають рівні площі, то всі вони рівні.

Задача 1.20. Висота трикутної піраміди проходить через точку перетину висот основи. Доведіть, що суми квадратів мимобіжних ребер піраміди рівні між собою.

Задача 1.21. Доведіть, що в правильному октаедрі протилежні ребра паралельні.

Задача 1.22. Доведіть, що площа поверхні конуса більша від площі поверхні вписаної в нього кулі.

Задача 1.23. Доведіть, що об’єми кулі та многогранника, описаного навколо неї, відносяться як площі їхніх поверхонь.

Неабияке значення для реалізації задачного підходу має добір методу розв’язування задач. Методисти виокремлюють загальні та спеціальні методи розв’язування математичних задач [71]. До загальних відносять метод розбиття задачі на підзадачі, метод перетворення задачі, метод кодування об’єктів задачі, метод введення додаткових елементів, метод комбінації загальних і специфічно-конкретних методів і прийомів розв’язування задач.

Метод розбиття задачі на підзадачі полягає в тому, що складну задачу розбивають на декілька простіших, за можливістю, стандартних задач, у процесі послідовного розв’язування яких знаходять відповідь і до даної задачі. Цей метод має три різновиди.

1. Розбиття задачі на частини. Класичним прикладам є розв’язування текстових (сюжетних) задач шляхом послідовного виконання арифметичних дій. Але цей метод використовують і під час розв’язування багатьох інших задач.

2. Розбиття вимоги задачі на частини. Часто вимога задачі (її запитання) буває такою складною, що відразу знайти відповідь дуже важко. Тоді, якщо це можливо, доцільно розбити її на кілька простіших вимог (запитань).

3. Розбиття об’єкта задачі на частини. Коли об’єкт задачі складний, то іноді корисно розбити його на частини і розв’язати задачу для кожної частини окремо (особливо в задачах на доведення).

Метод перетворення задачі полягає в тому, що за допомогою деякого прийому перетворюються дану задачу в більш просту, знайому еквівалентну задачу. Його широко використовують як в алгебрі, так і в геометрії. Найбільш відомими є перетворення виразів, рівнянь, нерівностей, їх систем, прийоми геометричних перетворень фігур.

У разі використання *методу кодування об’єків задачі* задачу теж замінюють еквівалентною їй. Але на відміну від методу перетворення задачі, де заміна відбувалася в межах однієї і тієї самої мови задачі (алгебраїчна задача замінялася на алгебраїчну, геометрична – на геометричну), цей метод передбачає перехід від однієї мови до іншої за допомогою кодування об’єктів задачі. Так, наприклад, текстова задача замінюється рівнянням або системою рівнянь, геометрична задача – введенням системи координат або алгебраїчною задачею.

Введення (побудова) нових елементів використовується, щаб надати задачі визначеності, якщо в ній явно або неявно задані невизначені невідомі, а також тоді, коли зв’язок (відношення, залежності) між даними і шуканим безпосередньо з умови задачі не прослідковується (не може бути встановлений відразу). Наприклад, у деяких задачах на знаходження відношень об’ємів, площ фігур доцільно ввести допоміжний параметр, а під час розв’язування геометричних задач виконати допоміжну побудову.

Метод комбінації загальних і специфічно-конкретних прийомів і способів розв’язування задач використовують для розв’язування нестандартних задач. Його загальну схему (як і всіх інших методів) відображає схема розв’язування задач за Дж. Пойа (див. табл. 1.2) [66].

Таблиця 1.2

Загальна схема розв’язування задач

Етап розв’язування задачі	**Зміст розумових дій**
1. Аналіз умови задачі	Проаналізуйте і зрозумійте запропоновану задачу. Для цього дайте подумки відповіді на такі запитання: – Про що говориться в задачі? Що дано? Що треба знайти чи довести? – Чи можна задовольнити умову? – Чи достатньо умов для визначення невідомого? Чи їх недостатньо? Чи надлишок? – Чи не заперечують умови одна одну? – Чи не можна сформулювати задачу інакше?
2. Побудова рисунку	У разі потреби зробіть креслення чи намалюйте схему до задачі, яку треба розв’язати. Введіть необхідні позначення.
3. Розбиття задачі на підзадачі	Якщо необхідно, розділіть умову задачі на частини. Спробуйте записати їх скорочено і встановити між ними зв’язок.
4. Складання плану розв’язування	Знайдіть зв’язок між даними і невідомим. Якщо не вдається одразу встановити такий зв’язок, можливо, корисно буде розглянути допоміжні задачі. Поміркуйте: – Чи не зустрічали ви цб задачу раніше? Можливо, в дещо іншій формі? –Чи не відома вам яка-небудь споріднена задача? Чи не знаєте теореми, яка виявилася б корисною? Розгляньте невідоме і спробуйте пригадати знайому задачу з таким самим або подібним невідомим. З’ясуйте: – Чи не можна скористатися спорідненою з даною і вже розв’язаною задачею? – Чи не можна застосувати її результат або метод розв’язування? – Чи не слід ввести якийсь проміжний елемент, щоб можна було скористатися раніше розв’язаною задачею? – Чи не можна скласти більш доступну подібну задачу? Більш загальну? Простішу? Аналогічну задачу? – Чи не можна розв’язати частину задачі? Збережіть лише частину умови, відкинувши решту: – Наскільки визначеним виявиться тоді невідоме? Як воно може змінюватися?

Продовж. табл. 1.2.

	– Чи не можна встановити що-небудь корисне внаслідок таких перетворень? – Чи не можна придумати інші дані, з яких можна було б визначити невідоме? – Чи не можна змінити невідоме або дані, або, якщо необхідно, і те, й інше так, щоб невідоме і нові дані виявилися ближчими один до одного? – Чи всі дані задачі використали? Чи всі умови? Чи взяли до уваги всі суттєві поняття, що містяться в задачі?
5. Реалізація плану розв’язування задачі	Здійснюючи план розв’язування задачі, контролюйте кожен свій крок. Для цього повсякчас запитуйте себе, чи зрозуміло вам, шо здійснений крок правильний? Чи зможете довести його правильність?
6. Погляд назад	Вивчіть знайдений розв’язок і оцініть критично розв’язання. Дайте відповіді на запитання? – Чи достовірний результат одержано? Чому? – Чи не можна перевірити результат? – Чи не можна перевірити хід розв’язування? – Чи немає простішого способу розв’язування задачі? – Чи не можна одержати той самий результат інакше? – Чи не можна в якійсь іншій задачі використати одержаний результат або метод розв’язування?

Крім загальних методів варто знайомити учнів зі спеціальними методами розв’язування задач: геометричних перетворень, координатним та векторним методами, методом математичної індукції, методом доведення від супротивного, методом преребору, принципом впорядкування, принципом Діріхле, принципом інваріанта тощо.

Метод геометричних перетворень реалізується за такою схемою:

1. Здійснити аналіз умови задачі.

2. Вибрати перетворення, яке зручно використати для доведення (на основі аналізу умови). Щоб вибрати тип перетворення, слід орієнтуватися на властивості фігур або їх частин, про які йдеться в умові задачі. Так, наприклад:

– осьову симетрію зручно застосовувати тоді, коли в умові фігурує бісектриса, або потрібно довести деякі співвідношення у фігурах, що мають вісь симетрії;

– поворот використовують під час доведення співвідношень у рівносторонньому трикутнику і квадраті, перпендикулярності прямих і відрізків, в теоремах і задачах із заданим кутом;

– паралельне перенесення – для доведення співвідношень у паралелограмі і трапеції;

– гомотетію – якщо наявні всі паралельні відрізки різної довжини, кола різних радіусів, відношення відрізків.

3. Знайти відповідні точки і образи фігур, які визначаються обраним перетворенням.

4. Використати властивості перетворень для доведення необхідних співвідношень.

Для використання *координатного методу* слід:

1. Виділити умову і вимоги задачі.

2. Вибрати систему координат (початок координат і напрям координатних осей). Як правило, за координатні осі беруть прямі, про які йдеться в задачі, або осі симетрії (якщо такі є) фігур, що розглядаються в задачі, тобто система координат має природно визначатися умовою задачі.

3. Перекласти умову і вимоги задачі на мову координат відносно обраної системи координат.

4. Перетворити одержані рівняння і співвідношення відповідно до вимог задачі.

5. Одержаний результат перекласти на мову геометрії і зробити висновок про справедливість вимог задачі.

Векторний метод полягає у виконані таких кроків:

1. Виділення у формулюванні задачі умови і вимог. Побудова рисунку.

2. Формулювання умови і вимог мовою векторів, позначення векторів на рисунку.

3. Складання допоміжних векторних рівностей відповідно до умови і вимог задачі.

4. Перетворення складених рівностей згідно з вимогами задачі.

5. Переклад одержаної рівності на мову геометрії, формулювання висновків про співвідношення фігур або їх властивостей, що доводять істинність

вимоги задачі.

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, який формулюють так: якщо деяке твердження $\mathrm{T}(n)$ правильне для $n = 1$ і з припущення, що воно істинне для довільного натурального числа k, випливає його правильність і для $k + 1$, то твердження $\mathrm{T}(n)$ правильне для будь-якого натурального числа n. Справедливість принципу математичної індукції випливає з такої аксіоми індукції: кожна множина натуральних чисел, до якої входить 1 і до якої разом з кожним її числом n входить і наступне число $n + 1$, збігається з множиною всіх натуральних чисел.

Доведення методом математичної індукції виконують так:

1. За допомогою ряду експериментів з конкретними натуральними числами або іншими об'єктами намагаються сформулювати істинне твердження; серед цих окремих випадків є і випадок, коли $n = 1$.

2. Припускають, що твердження $\mathrm{T}(n)$ істинне, якщо $n = k$, і доводять істинність твердження $\mathrm{T}(n)$ для $n = k + 1$ (крок індукції).

Після цього, на основі принципу математичної індукції, роблять висновок, що твердження $\mathrm{T}(n)$ правильне для будь-якого натурального числа n.

Для доведення твердження Т *методом доведення від супротивного* припускають, що воно хибне, тобто припускають істинність твердження, супротивного тому, що треба довести ($\overline{\mathrm{T}}$ – істинне). Шляхом логічних міркувань приходять до твердження М такого, що з істинності $\overline{\mathrm{T}}$ логічно випливає істинність як висловлення М, так і його заперечення – $\overline{\mathrm{M}}$; або М суперечить раніше доведеним твердженням чи встановленим фактам. Одержана суперечність і доводить істинність твердження Т. Метод доведення від супротивного ґрунтується на законі виключеного третього: з двох тверджень М або $\overline{\mathrm{M}}$ одне і тільки одне обов'язково істинне ($\mathrm{M} \vee \overline{\mathrm{M}} \equiv \mathbb{1}$); якщо $\overline{\mathrm{T}}$ приводить до суперечності, то воно не може бути істинним, оскільки хибність не випливає з істинності; отже, $\overline{\mathrm{T}}$ є хибним, а тоді Т – істинне.

Суть *методу перебору* полягає в дослідженні всіх можливих випадків співвідношень між математичними об'єктами, визначеними задачею, виділенні тих із них, що задовольняють умову задачі, й обґрунтуванні того, що інших розв'язків бути не може. Для розв'язування задачі методом перебору слід вибрати певну систему перебору, яка б давала впевненість у тому, що розглянуто всі можливі випадки. Найчастіше методом перебору послуговуються у процесі розв'язування задач з параметром.

Принцип впорядкування лежить в основі досить загального прийому, який часто використовують в процесі математичних міркувань. Коротко його можна описати так: розмістіть елементи досліджуваної множини в якому-небудь порядку: зростання, спадання, або в інший спосіб. Впорядкувати можна числа за величиною, відрізки за довжиною, кути за величиною, пронумерувати дані точки прямої тощо. Ідея впорядкування полегшує і розв'язування задачі методом перебору.

Принцип Діріхле полягає в наступному: якщо $n + 1$ предмет розкладено в n ящиків, то хоча б в одному ящику міститься не менше двох предметів. Справді, якби в кожному ящику було не більше, ніж один предмет, то всього їх було б не більше, ніж n, що суперечить умові.

Якщо відрізки (фігури) $F_1, F_2, \ldots, F_n$ довжинами (площами) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ містяться у відрізку (фігурі) довжиною (площею) a і $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > ma$, то знайдеться принаймні $m + 1$ відрізків (фігур), що мають спільну точку.

У процесі розв'язування багатьох задач виникає пореба в цілеспрямованому перетворенні даних. При цьому, за *принципом інваріанта*, доцільно орієнтуватися на такі властивості (елементи) математичних об'єктів, які внаслідок деяких перетворень залишаються незмінними (інваріантними), що значно полегшує розв'язування задачі.

Незалежно від того, яким математичним методом розв'язується задача, аналіз, що пов'язує умову та вимоги задачі може проводитися у двох формах: низхідній та висхідній [16, с. 86].

Ознайомлення учнів з *низхідним аналізом* краще починати з його загальної схеми (див. табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Схема низхідного аналізу

Загальна схема	*Додаткові вказівки*
Нехай треба довести деяке твердження A. Припускаємо, що це твердження істинне, і намагаємося одержати з нього з нього істинний наслідок. При цьому можливі декілька випадків: 1. Одержано хибний наслідок. Отже, припущення про істинність твердження A хибне. Розв'язання задачі завершено. 2. Одержано істинний наслідок. У цьому випадку треба обов'язково перевірити оборотність міркувань: а) Якщо всі міркування оборотні, то A – істинне твердження. б) Якщо серед міркувань є необоротні, то доведеться застосовувати інші способи пошуку розв'язання задачі. 3. Якщо не вдається одержати істинний наслідок, то також доведеться використовувати інші методи.	1. Зменшувати число параметрів. 2. Спрощувати вирази. 3. Використовувати всі дані задачі. Можна, змінивши умову, сформулювати і довести відповідне істинне твердження, тобто розв'язати іншу задачу. Така перевірка необхідна, оскільки з хибного твердження також можна одержати істинний наслідок. Наприклад, $a = -a$ $(a \neq 0)$ – хибне твердження, з якого в результаті піднесення обох частин рівності до квадрата одержуємо істинний наслідок: $a^2 = (-a)^2$. Приклади необоротних міркувань: $(\alpha = \beta) \Rightarrow (\sin\alpha = \sin\beta)$; $(\sqrt{x} = a) \Rightarrow (x = a^2)$

Задача 1.24. Довести, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює сумі квадрата бічної сторони і добутку основ.

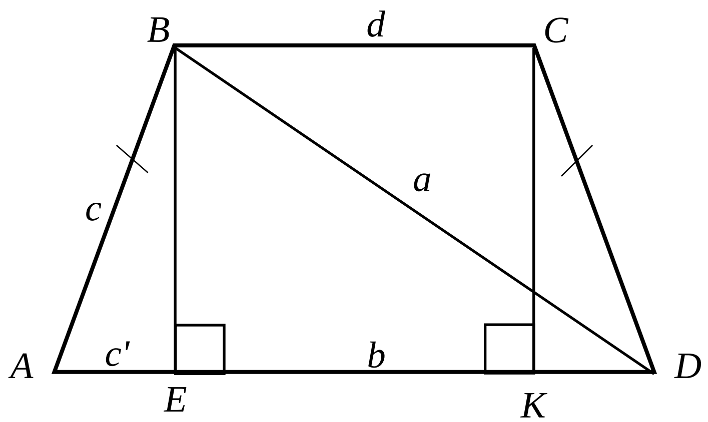


Рис. 1.3. До задачі 1.24

Низхідний аналіз. Увівши буквені позначення сторін і діагоналі рівнобічної трапеції (див. рис. 1.3), припускаємо, що виконується рівність $a^2 = c^2 + bd$ (1.1).

Намагаємося отримати з цієї рівності істинний наслідок, зменшуючи кількість параметрів. Оскільки

$$\left(a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A, \cos A = \frac{c'}{c}\right) \Rightarrow (a^2 = c^2 + b^2 - 2bc'),$$

то з рівності (1.1) одержуємо:

$$c^2 + b^2 - 2bc' = c^2 + bd \text{ (1.2)},$$

$$b^2 - 2bc' = bd \text{ (1.3)},$$

$$b(b - 2c') = bd \text{ (1.4)},$$

$$b - 2c' = bd \text{ (1.5)},$$

$$b = d + 2c' \text{ (1.6)}.$$

Відомо, що в рівнобічній трапеції рівність (1.6) виконується, тому маємо можливість проводити міркування в зворотньому порядку.

Розв'язання. Оскільки трапеція рівнобічна, то $b = d + 2c'$. Тоді $b - 2c' = = d$. Помноживши обидві частини останньої рівності на b матимемо: $b^2 - -2bc' = bd$. Якщо до обох частин цієї рівності додати c^2, то одержимо $c^2 + b^2 - -2bc' = c^2 + bd$. Оскільки в ΔAEB $c' = c \cdot \cos A$, то $c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A = c^2 + +bd$. За теоремою косинусів з ΔBAD $c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A = a^2$, тому $a^2 = c^2 + +bd$, що і треба було довести.

Аналогічні міркування будемо проводити, розв'язуючи відповідну стереометричну задачу:

Задача 1.25. Дано пряму призму, в основі якої лежить рівнобедрена трапеція з основами a і b та бічною стороною c. Знайдіть площу діагонального перерізу призми, якщо її висота дорівнює h.

Задача 1.26. Доведіть таке твердження: якщо $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$, $tg\,\beta = \frac{1}{3}$, то $\alpha + \beta = = 45°$.

Низхідний аналіз. Припустимо, що $\alpha + \beta = 45°$. Спробуємо отримати з цієї рівності істинний наслідок. Дійсно, якщо $\alpha + \beta = 45°$, то $tg(\alpha + \beta) = tg\,45°$, тобто $tg(\alpha + \beta) = 1$. Відомо, що $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$, тому $\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = 1$. Підставивши в останню рівність замість $tg\,\alpha$ і $tg\,\beta$ їх значення, одержимо правильну рівність: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$. Перевіряючи можливість проведення зворотніх міркувань, учні часто помиляються і стверджують, що якщо $tg(\alpha + \beta) = tg\,45°$, то $\alpha+\beta=45°$. Однак насправді з рівності $tg(\alpha+\beta)=tg\,45°$ слідує рівність $\alpha+\beta=45°+180°\cdot n$, тому довести задану рівність ми не можемо.

Низхідним аналізом варто користуватися у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей, зокрема ірраціональних, а також під час доведення різноманітних тотожностей. Наприклад, розв'язуючи рівняння виду $\sqrt{f(x)}=g(x)$, учні часто переходять до розв'язування рівняння $f(x)=\left(g(x)\right)^2$ і не виконують перевірку отриманих коренів, забуваючи, що з рівності $f(x)=\left(g(x)\right)^2$ не слідує рівність $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Не виконувати перевірку можна лише в разі рівносильних перетворень, зокрема рівняння $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=\left(g(x)\right)^2 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$.

Загальна схема *висхідного аналізу* наступна. Нехай треба довести твердження *A*. Підбираємо таке твердження *B*, з якого слідує *A*. Потім підбираємо таке твердження *C*, з якого слідує *B*, і т. д. доти, поки не знайдемо спосіб розв'язування задачі. Зазвичай висхідний аналіз використовують разом із синтезом. Такий метод міркувань називають *аналітико-синтетичним*. *Аналітико-синтетичний метод* передбачає виведення всіх можливих наслідків з умови задачі, а далі – формулювання таких тверджень, які приводять до розв'язання задачі. Насправді з даних задачі можна отримати багато наслідків, які не мають ніякого відношення до її розв'язання, проте частіше всього ми підсвідомо зупиняємося на тих із них, які можна пов'язати з шуканим, невідомим. З висхідним аналізом учні знайомляться у процесі розв'язування текстових задач. Наприклад:

Задача 1.27. Два велосипедисти виїхали назустріч один одному із пунктів *A* і *B*, відстань між якими 135 км. Швидкість першого велосипедиста 25 км/год, а другого – 20 км/год. Одночасно з першим із пункту *A* вилетіла ластівка. Коли ластівка долетіла до другого велосипедиста, вона повернула назад до зустрічі з першим. Так вона літала від одного велосипедиста до другого до їх зустрічі. Чи можна знайти шлях, який пролетіла ластівка, якщо її швидкість 80 км/год?

Проілюструємо висхідний аналіз цієї задачі у вигляді таблиці (див. табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Висхідний аналіз задачі

<table>
<tr><td rowspan="4">Щоб дізнатися</td><td>який шлях пролетіла ластівка</td><td rowspan="4">Треба знати</td><td>швидкість ластівки (відома) і час її польоту;</td></tr>
<tr><td>час польоту ластівки</td><td>час руху велосипедистів до їх зустрічі (невідомий)</td></tr>
<tr><td>час руху велосипедистів до їх зустрічі</td><td>відстань між пунктами A і B (відома) і швидкість зближення (невідома)</td></tr>
<tr><td>швидкість зближення велосипедистів</td><td>швидкості кожного велосипедиста (відомі)</td></tr>
</table>

Отже, знаючи швидкості велосипедистів і початкову відстань між ними, можна дізнатися час руху велосипедистів до їх зустрічі, а потім, знаючи швидкість ластівки, – шлях, який вона пролетіла.

При розв’язуванні задач окремих типів корисно пропонувати учням евристичні правила, які допомагають застосовувати аналітико-синтетичний метод. Наприклад, для використання векторного методу варто сформулювати такі правила:

1) Щоб довести паралельність відрізків, достатньо довести колінеарність відповідних векторів.

2) Щоб довести рівність чи нерівність двох векторів, достатньо виразити їх через одні і ті ж вектори.

3) Щоб довести, що точки A, B і C лежать на одній прямій, достатньо довести колінеарність векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$.

Варто зауважити, що більшість задач шкільного курсу математики розв’язуються у ході аналітико-синтетичних міркувань, які неможливі без розумових операцій аналізу, синтезу, порівняння та узагальнення. Зроблені Г. С. Костюком [36] дослідження і сформульовані висновки дають підставу стверджувати, що задачі відіграють важливу роль у розвитку мислення учнів, проте ефективність формування певних якостей особистості залежить від того, в якій мірі зміст задачі й характер складання системи задач відповідають сутності феномена, який формується. Тому, розглядаючи задачний підхід як один із засобів формування умінь логічно оперувати навчальним матеріалом, ми дотримуємося точки зору тих дослідників [22, 35, 73], які розглядають навчальну задачу як специфічну форму організації змісту навчального матеріалу, яка дозволяє учням оволодівати знаннями й уміннями, а також розвивати свої особисті якості.

Окрім того, ефективність процесу формування логічного мислення підвищуватиметься, якщо задачі, які розглядаються, будуть пред’являтися учням у вигляді системи. У методиці навчання складання системи задач є важливим, проте не завжди легким завданням, яке постійно привертає увагу дослідників.

Так, дидактична система задач, на думку І. К. Журавльова [21], повинна відповідати таким вимогам:

- охоплювати основні типи доступних учням аспектів даної науки та суміжних;
- охоплювати важливі в освітньому значенні та доступні методи науки, втілені в загальні способи розв’язання;
- враховувати задачі різної складності і різного рівня пізнавальної діяльності, оптимальні для різних груп дітей;
- враховувати дидактичні вимоги до структури задач, їх змісту, повторювальності.

В.Ф.Паламарчук [62] стверджує, що психологічною основою для розробки різної типології пізнавальних задач по суті справи є класифікація прийомів розумової діяльності. Запропонована автором класифікація містить ряд інваріантних прийомів розумової діяльності, таких як:

1) аналіз і виділення головного;

2) порівняння;

3) узагальнення і систематизація;

4) визначення і пояснення понять;

5) конкретизація;

6) доведення і спростування;

7) прийоми, необхідні в проблемному навчанні.

Це відбиває психологічні закономірності мислення в навчанні, сучасні тенденції до посилення розвивальних функцій у процесі навчання.

Виходячи з поставлених перед нами завдань у дослідженні і на основі вищезазначеного аналізу, сформулюємо загальнодидактичні вимоги до системи задач, складені у відповідності до вимог, які висуваються до системи евристичних задач під час навчання математиці [75].

1. Добір системи задач має відповідати змісту курсу природничих дисциплін, а самі задачі – їх функціям у процесі навчання.

2. Кожна задача має ідейну і технічну складність, тому важливим у системі задач є чергування пріоритетів ідейної і технічної складності.

3. На прикладі однієї-двох задач системи доцільно розглядати різні способи і методи розв'язання, а потім порівнювати отримані результати з різних точок зору (стандартність і оригінальність, використані прийоми мисленнєвої діяльності, практична цінність), що може стати в пригоді при розв'язанні інших задач системи і засвоєнні прийомів мисленнєвої діяльності.

4. Система задач має поступово ускладнюватися від більш легких і знайомих до менш легких і знайомих задач.

5. Осмислення умінь, використаних при розв'язанні задач одного типу, полегшує розв'язання задач інших типів.

6. Добір задач системи треба здійснювати диференційовано для різних типологічних груп учнів.

7. Задачі системи мають сприяти міжпредметному узагальненню набутих знань і перенесенню умінь.

8. До системи задач необхідно включати різні за структурую і змістом задачі.

9. Деякі задачі системи варто пропонувати у вигляді гіпотез, а в системі необхідно передбачати їхній розвиток.

10. Треба передбачати можливість розв'язування деяких задач системи

різними методами або способами, при цьому обов’язковим є аналіз кожного способу розв’язання задачі й вибір найраціональнішого.

11. Система задач має сприяти формуванню логічного мислення учнів.

Висновки до розділу 1

У першому розділі розглянуто історичні етапи розвитку людського мислення; проведено порівняльний аналіз різних психологічних теорій, що пояснюють феномен мислення; виділено особливості мислення старшокласників та критерії сформованості різних характеристик мислення; розглянуто зміст розумових операцій, завершення формування яких припадає на старший шкільний вік.

На основі аналізу науково-методичної літератури встановлено зміст поняття «задача» з позицій психології та методики навчання математики; розглянуто психологічний аспект розв’язування задач; з’ясовано суть задачного підходу та вимоги до його впровадження. Визначено фактори, якими обумовлюється використання задачного підходу до формування логічного мислення старшокласників, до яких належать вибір певного виду задач, добір математичного методу розв’язування задач і представлення учням системи задач.

Узагальнено різні підходи до класифікації математичних задач, виділено типи задач, розв’язування яких сприяє розвитку логічного мислення старшокласників. З’ясовано суть низхідного та висхідного аналізу задач, а також аналітико-синтетичного методу міркувань.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РЕАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ ДО ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ

2.1 Методика навчання розв’язуванню задач алгебри і початків аналізу

Як зазначалося раніше, формування логічного мислення у процесі розв’язування математичних задач визначається видом задач, методом розв’язування задач та представленням задач у системі.

Безсумнівно, розв’язування кожної математичної задачі сприяє розвитку мислення учнів, зокрема логічного. Проте в курсі алгебри та початків аналізу особливе місце у цьому відношенні займають задачі з параметрами. Вміння розв’язувати ці задачі цілком справедливо вважають показником рівня математичної компетентності учнів. Цінність задач з параметрами ми пояснюємо тим, що ці задачі дозволяють систематизувати та поглибити знання з певної теми шкільного курсу алгебри чи декількох тем, узагальнити вміння розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи. Крім того, розв’язування задач з параметрами має на меті не тільки перевірку ґрунтовних математичних знань, а й сформованості в учнів навичок дослідницької діяльності. Задачі з параметром розв’язуються зазвичай методом перебору, оскільки в них вимагається дати відповідь для всіх можливих значень параметра. Звісно, без залучення розумових операцій аналізу, синтезу, порівняння, конкретизації та узагальнення розв’язати задачу з параметром неможливо. У зв’язку з цим процес розв’язування задач з параметром носить розвивальний і творчий характер.

Відомо, що загальної схеми розв’язування задач з параметрами не існує. Загалом для їх розв’язання послуговуються аналітичним та графічним методами. У нашому дослідженні розглянемо детальніше аналітичний метод розв’язування задач з параметрами.

В. О. Швець та А. В. Прус [69] пропонують таке означення завдання з параметрами: «Рівняння (нерівність, система рівнянь, система нерівностей тощо) з параметром – це таке рівняння (нерівність, система рівнянь чи нерівностей), до запису якого крім змінної та числових коефіцієнтів входять буквені коефіцієнти, які є величинами, значення яких не вказані конкретно, але вони вважаються відомим та заданими на деякій числовій множині». Автори розрізняють декілька видів задач з параметрами. Зокрема, бувають *стандартні* (типові) та *нестандартні* завдання з параметрами. Так, тип завдання визначається функцією, під знаком якої міститься змінна у рівнянні, нерівності або системі рівнянь (нерівностей). За вимогою задачі розрізняють завдання двох видів: 1) *розв'язати* рівняння (нерівність, систему, задачу) *для кожного значення параметра*; 2) *знайти значення параметра*, при яких *виконується певна умова*.

Проаналізувавши чинну програму з математики [56] та підручники для старших профільних класів [25, 26, 49, 50, 57, 58], приходимо до висновку, що в курсі алгебри та початків аналізу профільного рівня розглядаються такі види задач з параметрами:

– ірраціональні рівняння та нерівності;

– показникові рівняння та нерівності;

– логарифмічні рівняння та нерівності;

– тригонометричні рівняння та нерівності.

Окреслимо коротко специфіку розв'язування задач перелічених видів з метою формування логічного мислення старшокласників з врахуванням математичних методів та вимог до складання систем задач.

Ірраціональним рівнянням називається рівняння, яке містить змінну під знаком кореня. Відповідно, рівняння зі змінною x та параметром a будемо називати *ірраціональним*, якщо змінна міститься під знаком кореня. Наприклад, $\sqrt{x-2a}=1$, $\sqrt{x-3}=x-a$, $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=2x$, $\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{x-1}=a$.

Як відомо, основні способи аналітичного розв'язування ірраціональних рівнянь такі: 1) піднесення обох частин рівнянь до одного і того ж степеня; 2) введення нових змінних. На початку розв'язування ірраціонального рівняння корисно знаходити область визначення рівняння, оскільки може виявитися, що воно не визначене на множині дійсних чисел.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь можуть з'являтися сторонні корені. Тому треба пам'ятати, що при піднесенні обох частин рівності до непарного степеня одержуємо рівносильне рівняння, а при піднесенні до парного степеня – рівняння-наслідок. Якщо, розв'язуючи ірраціональні рівняння, використовується рівняння-наслідки, то перевірка знайдених коренів є обов'язковою. Перевірку зазвичай виконують підстановкою у початкове рівняння. Проте іноді перевірку виконувати не дуже зручно (наприклад, якщо знайдені корені – ірраціональні або громіздкі за виглядом), тому краще використовувати рівносильні перетворення рівнянь. Зазначимо, що для ірраціональних рівнянь з параметрами рівносильні переходи теж значно спрощують процес розв'язування. Рівносильні переходи для окремих видів ірраціональних рівнянь наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Рівносильні перетворення деяких ірраціональних рівнянь

№	*Вид рівняння*	*Рівносильний перехід*
1.	$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
2.	$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n} \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
3.	$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x), n \in \mathbb{N}$	$(x) = (g(x))^{2n+1}$
4.	$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} = 0, n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
5.	$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0, n \in \mathbb{N}$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(g) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Задача 2.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$ з параметром a.

Розв'язання:

Дано ірраціональне рівняння, яке містить один квадратний корінь в лівій частині і параметр (число a) – у правій. Якщо $a + 1 < 0$, тобто $a \in (-\infty; -1)$, то рівняння не має розв'язків: $x \in \emptyset$. Якщо ж $a + 1 \geq 0$, то обидві частини рівняння можна піднести до квадрата: $4x - x^2 = (a + 1)^2$. Отримали квадратне рівняння $x^2 - 4x + (a + 1)^2 = 0$ відносно x. Розв'яжемо його.

1. $D = 16 - 4(a + 1)^2 = 4(-a^2 - 2a + 3)$.

2. Нехай $D > 0$, тобто $4(-a^2 - 2a + 3) > 0$, звідки $a^2 + 2a - 3 < 0$, $a \in (-3; 1)$. Врахуємо, що $a \geq -1$. Отже, якщо $a \in [-1; 1)$, то

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-a^2-2a+3}}{2} = 2 \pm \sqrt{-a^2 - 2a + 3}.$$

3. Нехай $D = 0$, тобто $4(-a^2 - 2a + 3) = 0$, звідки $a^2 + 2a - 3 = 0$, $\left[\begin{array}{l} a = -3 \\ a = 1 \end{array}\right.$. Врахуємо, що $a \geq -1$. Отже, якщо $a = 1$, то $x_1 = x_2 = 2$.

4. Нехай $D < 0$, тобто $4(-a^2 - 2a + 3) < 0$, звідки $a^2 + 2a - 3 > 0$, $\left[\begin{array}{l} a < -3 \\ a > 1 \end{array}\right.$. Врахуємо, що $a \geq -1$. Отже, якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \emptyset$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in [-1; 1)$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-a^2 - 2a + 3}$; якщо $a = 1$, то $x = 2$.

Методичний коментар. Для більшої стрункості записів пропонуємо оформлювати розв'язання задач з параметром у вигляді таблиці, аби розглянути всі можливі значення параметра і записати повну відповідь. Для прикладу покажемо інший варіант оформлення задачі 2.1 (див. табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Оформлення розв'язання рівняння з параметром у вигляді таблиці

<table>
<tr><td colspan="4">Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$ з параметром a</td></tr>
<tr><td>Етап розв'язання</td><td colspan="3">Реалізація</td></tr>
<tr><td>Визначення можливих значень параметра a</td><td colspan="3">$a \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Розв'язування рівняння в залежності від значення параметра a</td><td>$a \in (-\infty; -1)$</td><td colspan="2">$x \in \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a \in [1; +\infty)$</td><td colspan="2">$\sqrt{4x - x^2} = a + 1$,
$4x - x^2 = (a + 1)^2$,
$x^2 - 4x + (a + 1)^2 = 0$;
$D = 16 - 4(a + 1)^2 = 4(-a^2 - 2a + 3)$</td></tr>
<tr><td>$D > 0$</td><td>$4(-a^2 - 2a + 3) > 0$, звідки $a^2 + 2a - 3 < 0$, $a \in (-3; 1)$. Врахуємо, що $a \in [1; +\infty)$. Отже, якщо $a \in [-1; 1)$, то
$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-a^2-2a+3}}{2} = 2 \pm \sqrt{-a^2 - 2a + 3}$.</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2.2

		$D=0$	$4(-a^2-2a+3)=0$, звідки $a^2+2a-3=0$, $\left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=1 \end{array}\right.$. Врахуємо, що $a \in [1;+\infty)$. Отже, якщо $a=1$, то $x_1=x_2=2$.
		$D<0$	$4(-a^2-2a+3)<0$, звідки $a^2+2a-3>0$, $\left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a>1 \end{array}\right.$. Врахуємо, що $a \in [1;+\infty)$. Отже, якщо $a \in (1;+\infty)$, то $x \in \emptyset$.
Запис загальної відповіді	Якщо $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in [-1;1)$, то $x_{1,2}=2 \pm \sqrt{-a^2-2a+3}$; якщо $a=1$, то $x=2$.		

Задача 2.2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-a}=2x-1$ з параметром a.

Розв'язання рівняння оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-a}=2x-1$ з параметром a		
Етап розв'язання	*Реалізація*	
Визначення можливих значень параметра *a*	$a \in \mathbb{R}$	
Перехід до системи, рівносильної даному рівнянню	$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases}$	
Розв'язування рівняння $x-a=(2x-1)^2$	$x-a=(2x-1)^2$, $x-a=4x^2-4x+1$, $4x^2-5x+1+a=0$; $D=25-4\cdot 4\cdot(1+a)=9-16a$	
	$D>0$	$9-16a>0$, тобто $a<\frac{9}{16}$; $x_1=\frac{5-\sqrt{9-16a}}{8}$, $x_1=\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$
	$D=0$	$9-16a=0$, тобто $a=\frac{9}{16}$; $x_1=x_2=\dfrac{5}{8}$
	$D<0$	$9-16a<0$, тобто $a>\frac{9}{16}$; $x \in \emptyset$

Продовж. табл. 2.3

Розв'язування нерівності $x \geq \frac{1}{2}$ відносно параметра a для кожного знайденого значення x	$a < \frac{9}{16}$	$x_1 = \frac{5-\sqrt{9-16a}}{8} \geq \frac{1}{2}$, $5 - \sqrt{9-16a} \geq 4$, $\sqrt{9-16a} \leq 1$, $\begin{cases} 9-16a \leq 1, \\ 9-16a > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 16a \geq 8 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$ Отже, $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$.
		$x_2 = \frac{5+\sqrt{9-16a}}{8} \geq \frac{1}{2}$, $5 + \sqrt{9-16a} \geq 4$, $\sqrt{9-16a} \geq -1$, $a < \frac{9}{16}$. Отже, $a \in \left[-\infty; \frac{9}{16}\right)$.
	$a = \frac{9}{16}$	$x_1 = x_2 = \frac{5}{8} \geq \frac{1}{2}$ – нерівність виконується
Запис загальної відповіді	Якщо $a \in \left[-\infty; \frac{1}{2}\right)$, то $x = \frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$; якщо $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$, то $x = \frac{5\pm\sqrt{9-16a}}{8}$; якщо $a = \frac{9}{16}$, то $x = \frac{5}{8}$; якщо $a \in \left(\frac{9}{16}; +\infty\right)$, то $x \in \emptyset$.	

Відповідь: якщо $a \in \left[-\infty; \frac{1}{2}\right)$, то $x = \frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$; якщо $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right)$, то $x = \frac{5\pm\sqrt{9-16a}}{8}$; якщо $a = \frac{9}{16}$, то $x = \frac{5}{8}$; якщо $a \in \left(\frac{9}{16}; +\infty\right)$, то $x \in \emptyset$.

Ірраціональними нерівностями називаються нерівності, у яких змінна міститься під знаком кореня. Відповідно, нерівності зі змінною x та параметром a називатимемо *ірраціональними*, якщо змінна міститься під знаком кореня.

Наприклад, $\sqrt{x-1} > x + 3a$, $\sqrt{a-4}x \leq 3 + x$, $\sqrt{5x+2a} < 2a - \sqrt{x}$.

Основним способом аналітичного розв'язування ірраціональних нерівностей з параметрами є зведення початкової нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей або сукупності таких систем. Рівносильні переходи для окремих видів ірраціональних нерівностей наведено у табл. 2.4. Важливо, щоб учні свідомо використовували рівносильні перетворення, тому доцільним є їх обгрунтування у ході виконання низхідного аналізу.

Таблиця 2.4

Рівносильні перетворення деяких ірраціональних нерівностей

№	*Вид рівняння*	*Рівносильний перехід*
1.	$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$
2.	$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$	$f(x) < g(x)$
3.	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$
4.	$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
5.	$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$	$f(x) < (g(x))^{2n+1}$
6.	$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \geq 0$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(g) \end{cases} \end{array}\right.$
7.	$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \leq 0$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(g) \end{cases} \end{array}\right.$
8.	$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} \geq 0$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
9.	$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} \leq 0$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
10.	$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
11.	$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

Ірраціональні нерівності з параметром, які містять корені парного степеня зазвичай розв’язують за такою схемою:

1. Знаходять область визначення для змінної та параметра.

2. Накладають відповідні умови для того, щоб обидві частини нерівності, яку підносять до парного степеня, набували невід'ємних значень.

3. Підносять нерівність до парного степеня.

4. Розв'язують одержану нерівність.

5. Вибирають лише ті розв'язки, які задовольняють накладені умови і область визначення.

Задача 2.3. Розв'язати нерівність $x - a > \sqrt{x + a}$ з параметром a.

Розв'язання нерівності оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 2.5).

Таблиця 2.5

<table>
<tr><td colspan="3">Розв'язати нерівність $x - a > \sqrt{x + a}$ з параметром a</td></tr>
<tr><td>Етап розв'язання</td><td colspan="2">Реалізація</td></tr>
<tr><td>Визначення можливих значень параметра a</td><td colspan="2">$a \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Перехід до системи, рівносильної даній нерівності</td><td colspan="2">$\begin{cases} x - a > 0 \\ x + a \geq 0 \\ x + a < (x - a)^2 \end{cases}$
$\begin{cases} x > a \\ x \geq -a \\ x + a < x^2 - 2ax + a^2 \end{cases}$
$\begin{cases} x > a \\ x \geq -a \\ x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a > 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Розв'язування квадратної нерівності $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - a > 0$</td><td colspan="2">$D = (2a + 1)^2 - 4 \cdot (a^2 - a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 4a =$
$= 8a + 1$</td></tr>
<tr><td>$D > 0$</td><td>$D = 8a + 1 > 0,\ a > -\frac{1}{8}$;
$x_1 = \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2},\ x_2 = \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$;
$x \in \left(-\infty;\ \frac{2a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2};\ +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$D = 0$</td><td>$D = 8a + 1 = 0,\ a = -\frac{1}{8}$;
$x_{1,2} = \frac{2a + 1}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{8} + 1}{2} = \frac{3}{8}$
$x \in \left(-\infty;\ \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$D < 0$</td><td>$D = 8a + 1 < 0,\ a < -\frac{1}{8}$
$x \in \mathbb{R}$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2.5

Розв'язування системи $\begin{cases} x > a \\ x \geq -a \\ x^2 - (2a+1)x + a^2 - a \end{cases}$	$a < -\dfrac{1}{8}$	$\begin{cases} x > a \\ x \geq -a; \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ отже, $x \geq -a$.
	$a = -\dfrac{1}{8}$	$\begin{cases} x > a \\ x \geq -a \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right) \end{cases};$ $\begin{cases} x > -\frac{1}{8} \\ x \geq \frac{1}{8} \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right) \end{cases};$ отже, $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right)$
	$a > -\dfrac{1}{8}$	$\begin{cases} x > a \\ x \geq -a \\ x \in \left(-\infty; \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}\right) \cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right) \end{cases}$ (*) Визначимо взаємне розташування точок, які позначають числа a, $-a$, $\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}$, $\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$ на числовій осі
Розв'язування системи (*)	$a \in \left(-\dfrac{1}{8}; 0\right)$	Очевидно, що $a < -a$, $\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2} < \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$ Визначимо, при яких значеннях параметра виконується нерівність $-a < \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}$: $2a + 1 - \sqrt{8a+1} > -2a;$ $\sqrt{8a+1} < 4a + 1;$ $\begin{cases} 4a + 1 > 0 \\ 8a + 1 \geq 0 \\ 8a + 1 < 16a^2 + 8a + 1 \end{cases};$ $\begin{cases} a > -\frac{1}{4} \\ a \geq -\frac{1}{8} \\ 16a^2 > 0 \end{cases};$ $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Проте розглядається випадок, коли $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$, тому $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$ і для таких значень параметра $a < -a < \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2} < \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$. Тоді з системи (*) маємо: $x \in \left[-a; \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$

Продовж. табл. 2.5

	$a \in (0; +\infty)$	Очевидно, що $a > -a$, $\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2} < \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$, $-a < \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}$, $\frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2} < a < \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$. Тоді з системи (*) маємо: $x \in \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$
	$a = 0$	Якщо $a = 0$, то система (*) набуває вигляду $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 0 \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty) \end{cases}$. Тоді $x \in (1;\ +\infty)$
Запис загальної відповіді	Якщо $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$, то $x \geq -a$; якщо $a = -\frac{1}{8}$, то $x \in \left[\frac{1}{8};\ \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right)$; якщо $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$, то $x \in \left[-a;\ \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$; якщо $a \in [0; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$	

Відповідь: якщо $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$, то $x \geq -a$; якщо $a = -\frac{1}{8}$, то $x \in \left[\frac{1}{8};\ \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8};\ +\infty\right)$; якщо $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$, то $x \in \left[-a;\ \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$; якщо $a \in [0; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2};\ +\infty\right)$.

Рівняння зі змінною x та параметром a називають показниковим, якщо змінна входить до показника степеня. Наприклад: $3^{(a+1)x} = 3^{a^2+3a-7}$, $a \cdot 5^{2x} + (a-1) \cdot 5^x - 3a + 8 = 0$.

Нерівність зі змінною та параметром називають показниковою, якщо зміна входить до показника степеня. Наприклад, $4^{ax-1} < 4^{x+3}$, $3^{2x} - b \cdot 3^x - 2b \leq 0$.

Способи розв’язування показникових рівнянь і нерівностей з параметрами аналогічні до способів розв’язування показникових рівнянь і нерівностей без параметрів: 1) спосіб зведення обох частин рівняння до степеня з однаковою основою; 2) спосіб винесення спільного множника за дужки; 3) введення нової змінної; 4) спосіб логарифмування; 5) графічний спосіб та інші. Для використання вказаних способів важливо знати означення та властивості степеня з довільним дійсним показником, графік та властивості показникової функції. Зокрема, при розв'язуванні багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему:

Теорема 2.1. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Розглянемо розв'язування показникових нерівностей з параметром на прикладі наступної задачі.

Задача 2.4. Розв'яжіть нерівність $a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + + 8 > 0$ з параметром a.

Розв'язання нерівності оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 2.6).

Таблиця 2.6

<table>
<tr><td colspan="3">Розв'яжіть нерівність з параметром a: $a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$</td></tr>
<tr><td>Етап розв'язання</td><td colspan="2">Реалізація</td></tr>
<tr><td>Визначення можливих значень параметра a</td><td colspan="2">$a \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Визначення ОДЗ змінної x</td><td colspan="2">$x \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Зведення степенів, в показнику яких – змінна, до однієї основи</td><td colspan="2">$a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0,$
$a^2 \cdot (2^2)^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0,$
$a^2 \cdot 2^{2x+2} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0,$
$a^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2x} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0,$
$4a^2 \cdot (2^x)^2 - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$</td></tr>
<tr><td>Введення нової змінної</td><td colspan="2">$2^x = t > 0;$
$4a^2 \cdot t^2 - 33a \cdot t + 8 > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Розв'язування квадратної нерівності
$4a^2 \cdot t^2 - 33a \cdot t + 8 > 0$</td><td>$a = 0$</td><td>Нерівність набуває вигляду
$0 \cdot t^2 - 0 \cdot t + 8 > 0,$
$8 > 0$ – істинна нерівність для всіх $t > 0$, звідки $x \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$a \neq 0$</td><td>$D = (-33a)^2 - 4 \cdot 4a^2 \cdot 8 = 1089a^2 - 128a^2 =$
$= 961a^2$
$t_{1,2} = \frac{33a \pm |31a|}{8a^2};$
$t_1 = \frac{33a - 31a}{8a^2} = \frac{1}{4a}, \quad t_1 = \frac{33a + 33a}{8a^2} = \frac{8}{a};$
$4a^2 \cdot \left(t - \dfrac{1}{4a}\right) \cdot \left(t - \dfrac{8}{a}\right) > 0$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2.6

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td>$\frac{1}{4a} < \frac{8}{a}$</td><td>$\frac{1}{4a} < \frac{8}{a}$; $\frac{1-32}{4a} < 0$; $-\frac{31}{4a} < 0$; звідки
$a \in (0;\ +\infty)$
$t \in \left(-\infty;\ \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\frac{8}{a};\ +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4a} > \frac{8}{a}$</td><td>$\frac{1}{4a} > \frac{8}{a}$; $\frac{1-32}{4a} > 0$; $-\frac{31}{4a} > 0$; звідки
$a \in (-\infty;\ 0)$
$t \in \left(-\infty;\ \frac{8}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{4a};\ +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Врахуємо, що $\mathrm{t} > 0$. Маємо:
якщо $a \in (0;\ +\infty)$, то $t \in \left(0;\ \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\frac{8}{a};\ +\infty\right)$;
якщо $a \in (-\infty;\ 0)$, то $t \in (0;\ +\infty)$</td></tr>
<tr><td>Повернення до заміни</td><td colspan="3">Якщо $a \in (0;\ +\infty)$, то $\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{4a} \\ t > \frac{8}{a} \end{array}\right.$, тобто $\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x < \frac{1}{4a} \\ 2^x > \frac{8}{a} \end{array}\right.$,
$\left[\begin{array}{l} \log_2 2^x < \log_2 \frac{1}{4a} \\ \log_2 2^x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x \cdot \log_2 2 < \log_2 \frac{1}{4a} \\ x \cdot \log_2 2 > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x < \log_2 \frac{1}{4a} \\ x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.$
якщо $a \in (-\infty;\ 0)$, то $\mathrm{t} > 0$, тобто $x \in \mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Запис загальної відповіді</td><td colspan="3">Якщо $a \in (0;\ +\infty)$, то $x \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\log_2 \frac{8}{a};\ +\infty\right)$;
якщо $a \in (-\infty;\ 0]$, то $x \in \mathbb{R}$.</td></tr>
</table>

Відповідь: якщо $a \in (0;\ +\infty)$, то $x \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\log_2 \frac{8}{a};\ +\infty\right)$; якщо $a \in (-\infty;\ 0]$, то $x \in \mathbb{R}$.

Рівняння (нерівність) зі змінною x та параметром a називають *логарифмічним* (*логарифмічною*), якщо змінна входить під знак логарифма або до його основи. Наприклад, $\log_2(ax^2 - 2ax + 3)$, $\log_3(a^2x + 1) \geq \log_3(2ax)$.

Під час аналітичного розв'язування логарифмічних рівнянь з параметром використовуються означення логарифма, властивості логарифмів та операція потенціювання. Загального способу розв'язування логарифмічних рівнянь (нерівностей) з параметром, як і логарифмічних рівнянь (нерівностей) без параметра, не існує. Проте при розв'язуванні завдань такого виду варто пам'ятати наступні теореми:

Теорема 2.2. Нехай $a > 0,\ a \neq 0$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Теорема 2.3. Якщо $a > 0$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Розглянемо розв'язування логарифмічного рівняння на прикладі такого завдання.

Задача 2.5. Розв'яжіть рівняння $\log_m(x-3) + \log_{x-3} m = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$ з параметром m.

Розв'язання рівняння оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 2.7).

Таблиця 2.7

$\log_m(x-3) + \log_{x-3} m = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$, m – параметр	
Етап розв'язання	*Реалізація*
Визначення можливих значень параметра *m* та змінної *x*	$\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \\ x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x \in (3;4) \cup (4;+\infty) \end{cases}$
Перехід до рівняння, рівносильного даному	$\log_m(x-3) + \log_{x-3} m = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$, $\log_m(x-3) + \frac{1}{\log_m(x-3)} = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$, $\frac{\log^2{}_m(x-3)+1}{\log_m(x-3)} = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$, $\log^2{}_m(x-3) + 1 = \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)} \cdot \log_m(x-3)$, $\log^2{}_m(x-3) - \frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)} \cdot \log_m(x-3) + 1 = 0$

Продовж. табл. 2.7

Введення нової змінної	Нехай $\log_m(x-3)=t$. Тоді маємо: $t^2-\frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}\cdot t+1=0$.
Розв'язування квадратного рівняння $t^2-\dfrac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}\cdot t+1=0$	$D=\left(\frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}\right)^2-4=\frac{4m^4+8m^2+4-4\cdot(m^2-1)^2}{(m-1)^2(m+1)^2}=$ $=\frac{4m^4+8m^2+4-4m^4+8m^2-4}{(m-1)^2(m+1)^2}=\frac{16m^2}{(m-1)^2(m+1)^2}$ Оскільки $m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, то $D>0$. Тоді $t_{1,2}=\frac{\frac{2(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}\pm\frac{4\lvert m\rvert}{\lvert m-1\rvert\cdot\lvert m+1\rvert}}{2}$, $t_{1,2}=\frac{m^2\pm2m+1}{(m-1)(m+1)}=\frac{(m\pm1)^2}{(m-1)(m+1)}$, $t_1=\frac{m+1}{m-1}$, $t_2=\frac{m-1}{m+1}$
Повернення до заміни	$\left[\begin{array}{l}\log_m(x-3)=\dfrac{m+1}{m-1}\\ \log_m(x-3)=\dfrac{m-1}{m+1}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+m^{\frac{m+1}{m-1}}\\ x=3+m^{\frac{m-1}{m+1}}\end{array}\right.$
Запис загальної відповіді	Якщо $m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, то $x=3+m^{\frac{m+1}{m-1}}$ або $x=3+m^{\frac{m-1}{m+1}}$; при інших значеннях параметра m рівняння не має змісту

Відповідь: якщо $m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, то $x=3+m^{\frac{m+1}{m-1}}$ або $x=3+m^{\frac{m-1}{m+1}}$.

Рівняння (нерівність) зі змінною та параметром називають *тригонометричним* (*тригонометричною*), якщо змінна входить під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin(4-2x)=m$, $tg(2x+a)=b$, $b\cdot\sin^2 x+2\cos x\cdot\sin x+(b-3)\cdot\cos^2 x<0$.

Для розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами необхідно знати означення та властивості тригонометричних функцій довільного аргумента, тригонометричні формули, а також вміти розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності.

Розв'язування тригонометричного рівняння розглянемо на прикладі.

Задача 2.6. Розв'яжіть рівняння з параметром m: $\sin(x^2+2x)=2m$.

Почати розв'язування цієї задачі варто зі з'ясування можливих значень параметра (див. табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Розв'яжіть рівняння з параметром m: $\sin(x^2+2x)=2m$	
Етап розв'язання	*Реалізація*
Визначення можливих значень параметра m та змінної x	При $m \in [-0{,}5; 0{,}5]$ рівняння має розв'язки, при $m \in (-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$ рівняння не має розв'язків, зважаючи на множину значень функції $y=\sin x$
Розв'язування рівняння $\sin(x^2+2x)=2m$ як найпростішого тригонометричного	$x^2+2x=(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $x^2+2x-((-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k)=0,\ k \in \mathbb{Z}$
Розв'язування квадратного рівняння $x^2+2x-\left((-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k\right)=0$, $k \in \mathbb{Z}$	$D=4+4\cdot(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k=$ $=4\cdot(1+(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$ $D>0$, якщо $k=1,2,3,\ldots$. $x=\dfrac{-2\pm 2\cdot\sqrt{1+(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k}}{2}=$ $x=-1\pm\sqrt{1+(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k}$, $k=1,2,3,\ldots$
Запис загальної відповіді	Якщо $m \in [-0{,}5; 0{,}5]$, то $x=-1\pm\sqrt{1+(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k}$, $k=1,2,3,\ldots$; при інших значеннях m рівняння не має змісту

Відповідь: якщо $m \in [-0{,}5; 0{,}5]$, то $x=-1\pm\sqrt{1+(-1)^k \cdot \arcsin(2m)+\pi k}$, $k=1,2,3,\ldots$.

Крім стандартних (типових) завдань з параметрами існують також нестандартні, які неможливо віднести до конкретного виду задач з параметрами. Їх розв'язування потребує умінь поєднувати та комбінувати знання різних розділів математики, застосовувати вміння розв'язувати певні види рівнянь, нерівностей, систем. Досить часто нестандартні задачі з параметрами пропонують в якості відкритого завдання ЗНО з математики. Так, наприклад, завдання № 33 ЗНО з математики у 2018 році було сформульовано так:

Задача 2.7. Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \le 0$ залежно від значень параметра a.

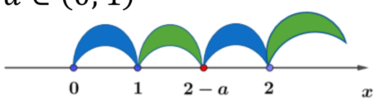
Розв'язання:

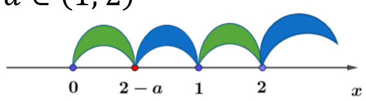
За умовою маємо нерівність, в лівій частині якої дріб, а в правій – 0.

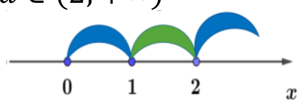
Чисельник дробу містить логарифм з параметром, а знаменник – квадратний тричлен відносно змінної (теж з параметром). Будемо розв’язувати нерівність методом інтервалів.

Наведемо поетапну організацію процесу розв’язування нерівності в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

<table>
<tr><th>Етап розв’язання</th><th>Реалізація</th></tr>
<tr><td>Визначення можливих значень параметра a</td><td>$a > 0$, $a \neq 1$ – зважаючи на властивості логарифмічної функції</td></tr>
<tr><td>Визначення ОДЗ змінної x</td><td>1) $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \neq 0 \end{cases}$
2) $D = a^2$; $x_1 = 2$, $x_2 = 2 - a$
3) (а) $x \in (0; 2-a) \cup (2-a; 2) \cup (2; +\infty)$ при $a < 2$
(б) $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$ при $a \geq 2$</td></tr>
<tr><td>Визначення нулів функції
$f = (x^2 + (a-4)x + 4 - 2a) \cdot \log_a x$</td><td>$\log_a x = 0, x = 1$</td></tr>
<tr><td>Розв'язування нерівності $f(x) \leq 0$ методом інтервалів</td><td>Оскільки функція f набуває значення 0 в точці $x = 1$, то принципово важливим є розгляд підвипадків випадку (а):
$1 < 2 - a < 2$ або $a \in (0; 1)$, $0 < 2 - a < 1$
або $a \in (1; 2)$</td></tr>
<tr><td>$a \in (0; 1)$


$x \in [1; 2-a) \cup (2; +\infty)$</td><td>
<table>
<tr><th>$a \in (0;1)$</th><th>$x \in (0;1)$</th><th>$x \in [1; 2-a)$</th><th>$x \in (2-a; 2)$</th><th>$x \in (2; +\infty)$</th></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$x - 2$</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x - (2-a)$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>$a \in (1; 2)$


$x \in [0; 2-a) \cup [1; 2)$</td><td>
<table>
<tr><th>$a \in (1;2)$</th><th>$x \in (0; 2-a)$</th><th>$x \in (2-a; 1)$</th><th>$x \in [1; 2)$</th><th>$x \in (2; +\infty)$</th></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x - 2$</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x - (2-a)$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>$a \in (2; +\infty)$


$x \in [1; 2)$</td><td>
<table>
<tr><th>$a \in (2; +\infty)$</th><th>$x \in (0;1)$</th><th>$x \in [1;2)$</th><th>$x \in (2; +\infty)$</th></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x - 2$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x - (2-a)$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Отже, оформлення розв’язання задач з параметрами у вигляді таблиць дозволяє уникнути помилок під час перебору всіх можливих значень параметра. Таке представлення результатів міркувань сприятиме виробленню в учнів навичок порівнювати, узагальнювати, робити висновки.

Систему задач з параметрами різних типів запропоновано в Додатку А.

2.2 Методика навчання розв’язуванню геометричних задач

Задачі на обчислення і на доведення в курсі стереометрії посідають таке саме місце, як і аналогічні вправи в курсі планіметрії: без розв’язування достатньої кількості таких задач учні не засвоять на належному рівні програмовий матеріал. Проте між вимогами до розв’язування задач з геометрії у основній та старшій школі є істотна відмінність. По-перше, в старших класах значно збільшується кількість комбінованих задач, тобто таких, в яких поєднуються елементи всіх типів задач (на обчислення, на доведення, на побудову, на дослідження). Отже, в цілому задачі ускладнюються. По-друге, зростають вимоги до логічної обґрунтованості ходу розв’язування. По-третє, у процесі розв’язування задач зростає використання алгебри, зокрема тригонометричних співвідношень і формул. Нарешті, зростають вимоги до побудови рисунків до задач. Усе це свідчить про те, що неможливо розв’язувати стереометричні задачі, спираючись лише на раніше здобутий досвід. Завдання вчителя – познайомити учнів з прийомами розв’язування стереометричних задач, а учнів – привчитися глибше аналізувати умову задач і обгрунтовувати кроки їх розв’язання.

Важливість логічних міркувань у процесі вивчення стереометрії фіксується також і в навчальній програмі з математики для старшої школи [56]. Так, під час вивчення теми «Вступ до стереометрії» учні 10 класу розв’язують вправи, що передбачають використання аксіом стереометрії та наслідків з них, доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах. Вивчаючи теми «Паралельність прямих і площин у просторі» і «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», старшокласники продовжують вдосконалювати уміння логічно мислити, зокрема, коли обґрунтовують методи слідів і проекцій для побудови перерізів многогранників січною площиною, аналізують і пояснюють взаємне розміщення прямих і площин у просторі, розв’язують задачі на використання ознак паралельності і перпендикулярності прямих і площин і просторі, теореми про три перпендикуляри. Зміст теми «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі» дає широкі можливості для використання координатного і векторного методів розв'язування задач (як навчально-практичних, так і професійно-спрямованих, прикладних). Таким чином, наприкінці 10 класу учні вже знайомі з основними поняттями і фактами стереометрії, у зв'язку з чим в 11 класі програмою передбачається ґрунтовне вивчення многогранників і тіл обертання. У ході розв'язування тренувальних задач випускники шкіл вчаться класифікувати многогранники і тіла обертання, розрізняти елементи просторових тіл (призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі), визначати видимі і невидимі їх елементи, зображувати на рисунках многогранники і тіла обертання, використовуючи властивості паралельного проектування, пояснювати та записувати відповідно до умови задачі скорочений запис введення позначень за рисунком, обґрунтовувати доцільність використання формул та теорем.

Д. О. Терешин [82] формулює необхідні передумови успішної реалізації задачного підходу під час вивчення геометрії: 1) уміння правильно і швидко виконувати рисунок до задачі; 2) оперування різними методами розв'язування задач; 3) деякий запас опорних задач, який дозволяє здійснити перехід від теоретичного матеріалу до задачного. Зважаючи на формування в учнів просторових уявлень, вчений також схиляється до думки, що розвитку логічного мислення учнів сприяє комплекс задачного та наочно-конструктивного підходів до навчання геометрії у старшій школі, і виділяє такі форми реалізації останнього:

– безпосереднє конструювання моделей многогранників з підручних засобів;

– конструювання моделей у поєднанні з побудовою рисунків;

– використання моделей многогранників як опорних конструкцій для пояснення теоретичного матеріалу;

– використання моделей для розв'язування задач на побудову;

– розробка основних методів розв'язування задач з опорою на різні види наочностей.

Безсумнівно, в курсі стереометрії особливу роль відіграє рисунок. Якщо в планіметрії завжди є можливість виконати точні побудови, то в стереометрії рисунок на площині не може бути точною копією оригіналу – просторової фігури. Проте необхідно намагатися виконувати рисунок так, щоб з нього можна було отримати достатньо інформації для розуміння зв’язків між елементами многогранника (тіла обертання) і розв’язання стереометричної задачі, тому першочергове завдання вчителя – навчити учнів виконувати рисунки до задач. Шкільна практика свідчить, що особливо складними для побудови рисунків і власне самого розв’язування виявляються задачі на комбінації многогранників і тіл обертання, у зв’язку з чим пропонуємо до використання добірку наочностей з даної теми (Додаток Б) і вважаємо доречним з’ясування правил побудови зображень комбінацій просторових тіл у ході розв’язування задач (Додаток В).

Зауважимо, що процес побудови рисунка є важливим, але не основним етапом розв’язування стереометричних задач, а лише допоміжним, і формує здебільшого графічну культуру та просторове мислення учнів. Розвиток логічного ж мислення стає можливим внаслідок аналізу задачі і рисунка до неї, спрямованого на виявлення суттєвих властивостей просторової фігури, якої стосуються умова та вимоги цієї задачі, встановлення зв’язків між відомим і шуканими елементами, включення їх до складу допоміжних плоских фігур (найчастіше трикутників і чотирикутників) з метою вираження шуканих елементів через дані.

Розглянемо на прикладах методику роботи вчителя з умовою стереометричної задачі, спрямованої на вироблення в учнів умінь та навичок знаходити спосіб її розв’язування аналітико-синтетичним методом. Міркування пропонуємо фіксувати в опорних таблицях або схемах.

Задача 2.8. В основі прямої призми лежить рівнобедрений гострокутний трикутник з кутом β при вершині. Відстань від центра кола, описаного навколо цього трикутника, до його основи дорівнює a. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону основи, утворює з площиною основи кут α. Визначити об’єм призми.

Таблиця 2.10

Первинний аналіз умови задачі та виведення можливих наслідків з неї

Твердження	*Математичний зміст*
В основі прямої призми лежить гострокутний трикутник.	$ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма, ΔABC – основа призми, A_1B_1 – бічне ребро призми, $A_1B_1 \perp (ABC)$.
Основа призми – рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині.	$AB = BC$, $\angle ABC = \beta$; за теоремою про суму кутів трикутника можна визначити $\angle BAC$ і $\angle BCA$.
Відстань від центра кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, до його основи дорівнює a.	Центр O кола, описаного навколо ΔABC, знаходиться в точці перетину висоти BH ($BH \perp AC$) і серединного перпендикуляра KO ($KO \perp BC$, К – середина BC). $OH = a$.
Діагональ бічної грані призми утворює з площиною основи кут α.	Кут нахилу діагоналі AB_1 до площини (ABC) основи призми – це кут між діагоналлю AB_1 і її проекцією AB на площині (ABC): $\angle B_1AB = \alpha$.

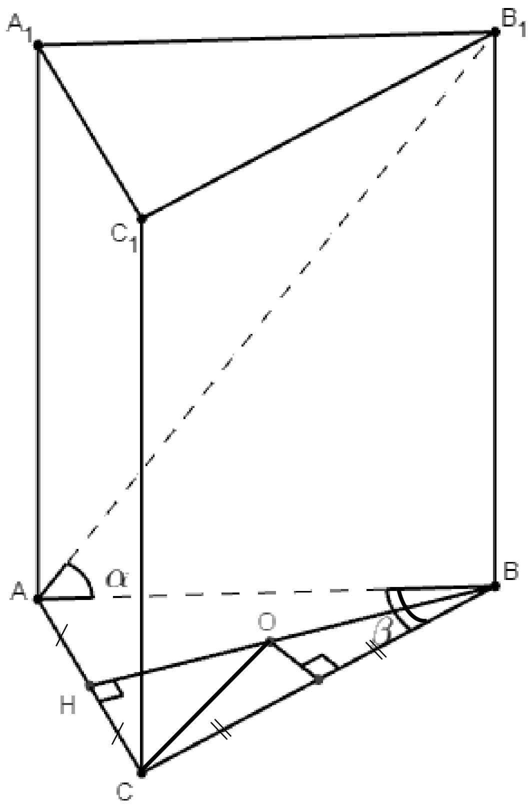


Рис. 2.1. До задачі 2.8

У табл. 2.11 наведено схему аналітико-синтетичних міркувань, у ході яких встановлюється зв'язок між відомими та невідомими елементами задачі і визначається один зі способів її розв'язування: рухаючись таблицею зліва направо і вниз, а потім у зворотньому напрямку, з'ясовуємо, як одержати відповідь до задачі 2.8.

Таблиця 2.11

Схема аналітико-синтетичних міркувань, що приводять до розв'язання задачі

Для того, щоб знайти:	*Треба знати:*
Об'єм V призми $ABCA_1B_1C_1$	BB_1 (невідомо) S_{ABC} (невідомо)
BB_1	AB (невідомо) $\angle B_1AB$ (відомо)
S_{ABC}	AB (невідомо) $\angle ABC$ (відомо)
AB	AC (невідомо) $\angle ACB$ (невідомо)
$\angle ACB$	$\angle ABC$ (відомо)
AC	HC (невідомо)
HC	OH (відомо) $\angle OCH$ (невідомо)
$\angle OCH$	$\angle BCO$ (невідомо) $\angle ACB$ (визначено)
$\angle BCO$	$\angle OBC$ (невідомо)
$\angle OBC$	$\angle ABC$ (відомо)

Тоді розв'язання задачі 2.8 можна оформити наступним чином.

1) У ΔABC ($AB = BC$) за теоремою про суму кутів трикутника $\boldsymbol{\angle ACB} = \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle ABC) = \frac{1}{2}\cdot(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$.

2) Оскільки ВН – бісектриса $\angle ABC$, то $\boldsymbol{\angle OBC} = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\beta}{2}$.

3) У ΔCOB ($CO = OB$) $\boldsymbol{\angle BCO} = \angle OBC = \frac{\beta}{2}$.

4) $\boldsymbol{\angle OCH} = \angle ACB - \angle BCO = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° - \beta$.

5) З ΔOHC ($\angle OHC = 90°$) $\boldsymbol{HC} = \frac{OH}{tg\ \angle OCH} = \frac{a}{tg\ (90° - \beta)} = \frac{a}{ctg\ \beta} = a tg\ \beta$.

6) Оскільки BH – медіана ΔABC, то $\boldsymbol{AC} = 2HC = 2a\ tg\ \beta$.

7) З ΔABC за теоремою синусів $\boldsymbol{AB} = \frac{AC \sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{2a\ tg\ \beta \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta} = \frac{a\ tg\ \beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

8) $\boldsymbol{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot AB^2 \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a\ tg\ \beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 \cdot \sin\beta = a^2 tg\ \beta\ ctg\ \frac{\beta}{2}$.

9) З ΔABB_1 ($(\angle ABB_1 = 90°)$ $\boldsymbol{BB_1} = AB \cdot tg\ \alpha = \frac{a\ tg\ \alpha\ tg\ \beta}{sin\frac{\beta}{2}}$.

10) $\boldsymbol{V} = S_{ABC} \cdot BB_1 = a^2 tg\ \beta\ ctg\ \frac{\beta}{2} \cdot \frac{a\ tg\ \alpha\ tg\ \beta}{sin\frac{\beta}{2}} = \frac{a^3 tg\ \alpha\ tg^3\ \beta\ cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$ (куб. од.).

Відповідь: $\frac{a^3 tg\ \alpha\ tg^3\ \beta\ cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$ куб. од.

Задача 2.9. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює α. Відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра дорівнює p. Визначити об’єм піраміди.

Схеми аналізу умови задачі 2.9 і пошуків способу її розв’язування наводимо в табл. 2.12 і 2.13.

Таблиця 2.12

Первинний аналіз умови задачі та виведення можливих наслідків з неї

Твердження	*Математичний зміст*
Дана правильна чотирикутна піраміда.	*MABCD* – чотирикутна піраміда, квадрат *ABCD* – основа піраміди, AC ∩ BD = O, MO – висота піраміди, бічні грані піраміди – рівні рівнобедрені трикутники
Двогранний кут при бічному ребрі дорівнює α.	*BP* ⊥ *MC*, *DP* ⊥ *MC*, *BP* = *DP*, ∠*BPD* = α, *(BPD)* ⊥ *MC*, тому OP ⊥ *MC*.
Відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра дорівнює *p*.	*OP* = *p*.

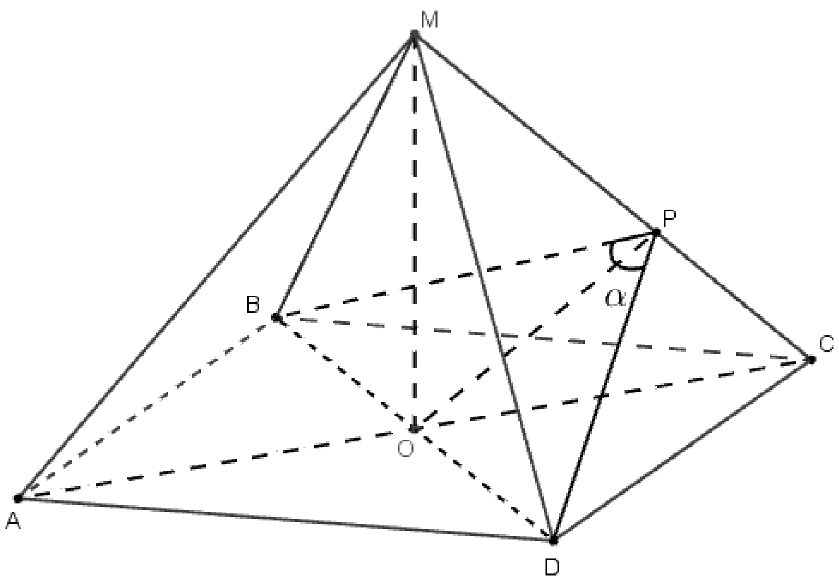


Рис. 2.2. До задачі 2.9

Таблиця 2.13

Схема аналітико-синтетичних міркувань, що приводять до розв'язання задачі

Для того, щоб знайти:	*Треба знати:*
Об'єм V піраміди $MABCD$	MO (невідомо) S_{ABCD} (невідомо)
S_{ABCD}	CD (невідомо)
CD	OC (невідомо)
MO	OC (невідомо) $tg\angle MCO$ (невідомо)
$tg\angle MCO$	$tg\angle PCO$ (невідомо)
$tg\angle PCO$	$sin\,\angle PCO$ (невідомо) $cos\,\angle PCO$ (невідомо)
$sin\,\angle PCO$	OP (відомо) OC (невідомо)
$cos\,\angle PCO$	$sin\,\angle PCO$
OC	OD (невідомо)
OD	OP (відомо) $\angle OPD$ (невідомо)
$\angle OPD$	$\angle BPD$ (відомо)

Тоді розв'язання задачі 2.9 можна оформити наступним чином.

1) Оскільки OP – бісектриса ΔBPD ($BP = DP$), то $\boldsymbol{\angle OPD} = \frac{1}{2}\angle BPD = \frac{\alpha}{2}$.

2) З ΔPOD ($\angle POD = 90°$) $\boldsymbol{OD} = OP \cdot tg\angle OPD = ptg\,\frac{\alpha}{2}$.

3) $\boldsymbol{OC} = OD = ptg\,\frac{\alpha}{2}$.

4) У ΔPOD ($\angle POD = 90°$) $\boldsymbol{sin\angle PCO} = \frac{OP}{OC} = \frac{p}{ptg\frac{\alpha}{2}} = ctg\,\frac{\alpha}{2}$.

5) $\boldsymbol{cos\,\angle PCO} = \sqrt{1 - sin^2\,\angle PCO} = \sqrt{1 - ctg^2\,\frac{\alpha}{2}}$.

6) $\boldsymbol{tg\angle PCO} = \frac{sin\angle PCO}{cos\,\angle PCO} = \frac{ctg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}} = \boldsymbol{tg\angle MCO}$.

7) З ΔMOC ($\angle MOC = 90°$) $\boldsymbol{MO} = OC \cdot tg\angle MCO = \frac{ptg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}}$.

8) $\boldsymbol{CD} = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}ptg\,\frac{\alpha}{2}$, $\boldsymbol{S_{ABCD}} = CD^2 = 2p^2tg^2\,\frac{\alpha}{2}$.

9) $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 2p^2tg^2\,\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{p}{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2p^3tg^2\frac{\alpha}{2}}{3 \cdot \sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}}$ (куб. од.).

Відповідь: $\frac{2p^3 tg^2\frac{\alpha}{2}}{3\cdot\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}}$ куб. од.

Зауважимо, що іноді досить складно виконати висхідний аналіз умови стереометричної задачі у вигляді таблиці «Щоб знайти ..., треба знати ...». Така ситуація виникає, коли з відомих елементів неможливо послідовно визначити невідомі елементи (як, наприклад, у задачах 2.8 і 2.9), бо шукані елементи визначаються з деяких співвідношень.

Задача 2.10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Визначити площу перерізу, якщо відстань від центра верхньої основи циліндра до хорди, що знаходиться в нижній основі, дорівнює d.

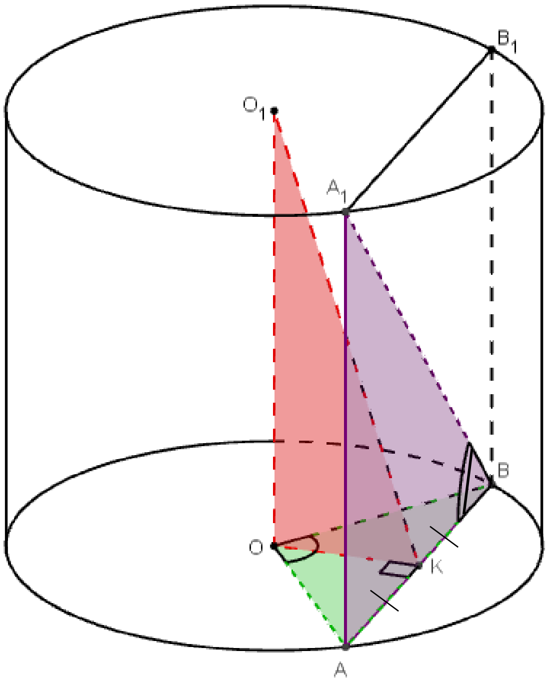


Рис. 2.3. До задачі 2.10

Аналіз умови задачі представлений в табл. 2.14.

Таблиця 2.14

Первинний аналіз умови задачі та виведення можливих наслідків з неї

Твердження	*Математичний зміст*
Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу α.	OO_1 – вісь циліндра, AB – хорда, ABB_1A_1 – прямокутник, $AA_1 \parallel OO_1$

Продовж. табл. 2.14

Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β.	AB – проекція A_1B на площині нижньої основи циліндра, $\angle ABA_1 = \beta$.
Відстань від центра верхньої основи циліндра до хорди, що знаходиться в нижній основі, дорівнює d.	K – середина AB, OK – бісектриса, медіана, висота рівнобедреного ΔAOB, OK – проекція O_1K на площині нижньої основи циліндра, $O_1K = d$.

Для складніших стереометричних задач, які розв’язуються за допомогою введення змінної, пропонуємо виконувати аналітико-синтетичні міркування, складаючи разом з учнями схеми (див. рис. 2.4), що виражають співвідношення між відомими і невідомими елементами.

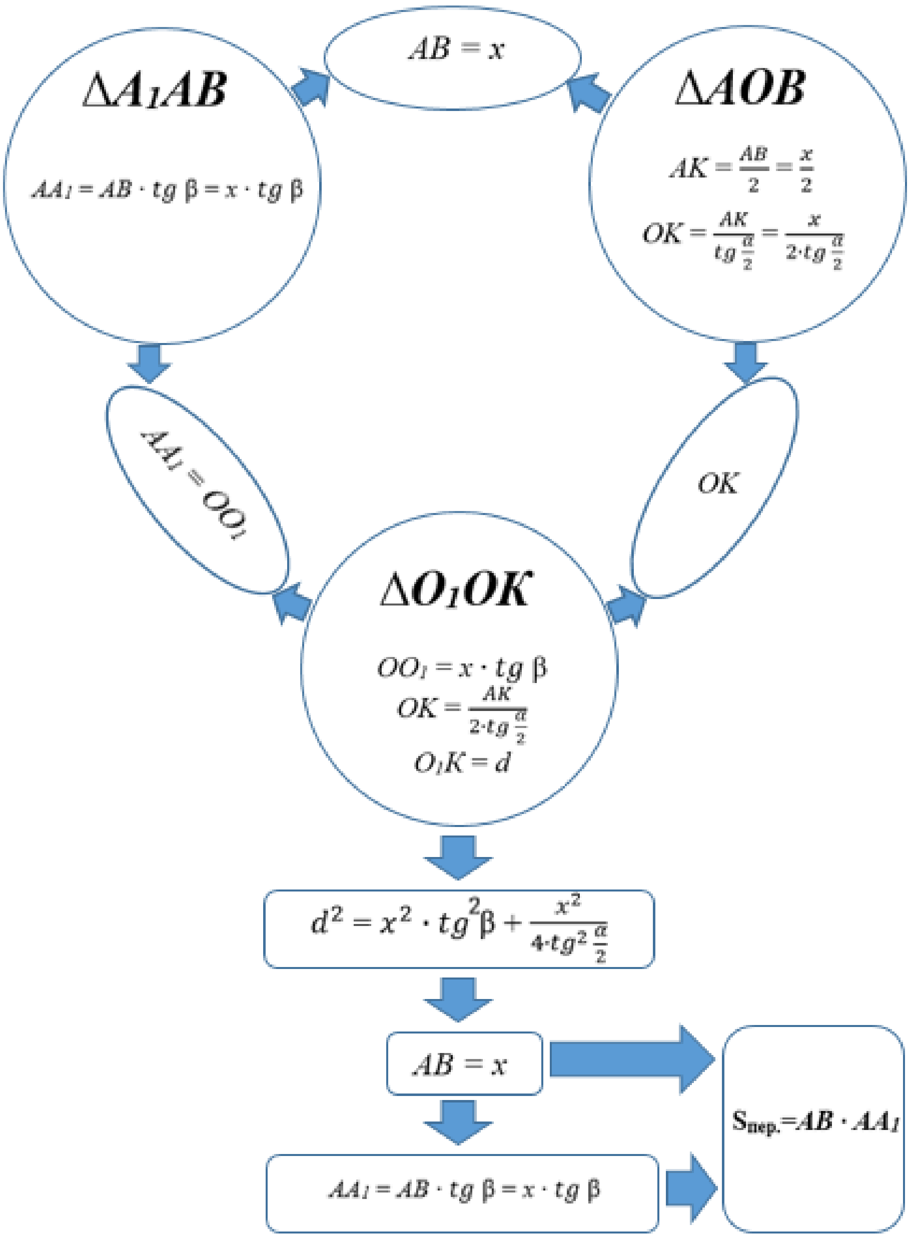


Рис. 2.4. Схема, яка ілюструє зв’язки між елементами задачі 2.10

Тоді розв'язання задачі 2.10 можна оформити наступним чином.

Нехай $AB = x$.

1) Розглянемо ΔA_1AB ($\angle A_1AB = 90°$): $\boldsymbol{AA_1} = AB \cdot tg\angle A_1AB = x \cdot tg\,\beta$.

2) AA_1 – твірна циліндра, OO_1 – його вісь, тому $\boldsymbol{OO_1} = AA_1 = x \cdot tg\,\beta$.

3) Розглянемо ΔAOB ($OA = OB$): оскільки OK – бісектриса, медіана і висота, то $AK = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$, $\angle AOK = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\alpha}{2}$; $\boldsymbol{OK} = \frac{AK}{tg\,\angle AOK} = \frac{x}{2tg\,\frac{\alpha}{2}}$.

4) Розглянемо ΔO_1OK ($\angle O_1OK = 90°$): за теоремою Піфагора $O_1K^2 = = OO_1{}^2 + OK^2$, тобто $d^2 = x^2 \cdot tg^2\,\beta + \frac{x^2}{4tg^2\,\frac{\alpha}{2}}$, звідки $x = \frac{2dtg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}} = \boldsymbol{AB}$.

5) $\boldsymbol{AA_1} = x \cdot tg\,\beta = \frac{2dtg\frac{\alpha}{2}tg\,\beta}{\sqrt{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}}$.

6) $\boldsymbol{S}$***пер.*** $= AB \cdot AA_1 = \frac{2dtg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}} \cdot \frac{2dtg\frac{\alpha}{2}tg\,\beta}{\sqrt{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}} = \frac{4d^2tg^2\frac{\alpha}{2}tg\,\beta}{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}$ (куб. од.).

Відповідь: $\frac{4d^2tg^2\frac{\alpha}{2}tg\,\beta}{4tg^2\frac{\alpha}{2}tg^2\beta+1}$ куб. од.

Вважаємо, що таким чином організована робота з умовою стереометричної задачі сприятиме свідомому розумінню учнями способу її розв'язування.

Систему стереометричних задач, спрямованих на відпрацювання навичок проводити аналітико-синтетичні міркування, наведено в Додатку Г.

2.3 Формування логічного мислення учнів у процесі розв'язування задач з використанням ІКТ

З метою формування в учнів звички ретельно аналізувати умову задачі і проводити аналітико-синтетичні міркування, що приводять до розв'язання задачі, вважаємо доречним в межах вивчення теми «Піраміда» розв'язати з учнями декілька задач, які потребують розгляду двох випадків.

Зазвичай у шкільному курсі математики розв'язують задачі на піраміду з гострими двогранними кутами при основі, а про піраміди з тупим двогранним кутом при основі йдеться в задачах підвищеної складності. Крім того, іноді в стереометричній задачі стоїть вимога знайти кут між площиною бічної грані піраміди і площиною її основи. Якщо ця бічна грань утворює з основою піраміди тупий кут, то є ймовірність дати неправильну відповідь до задачі. Дійсно, у цьому разі слід розрізняти поняття «кут між площинами» і «двогранний кут». Так, наприклад, якщо двогранний кут при ребрі основи піраміди дорівнює 120°, то говорять, що площина бічної грані піраміди утворює з площиною основи кут 60° (зважаючи на те, що кутом між площинами домовились називати градусну міру гострого двогранного кута, утвореного перетином цих площин).

Як відомо, грамотно побудований рисунок – запорука правильного розв'язання стереометричної задачі, і особливо це стосується задач на піраміду, адже врахування на рисунку всіх властивостей, якими володіє многокутник-основа, а також інших елементів піраміди (вершини, бічних ребер і бічних граней) дозволяє точно визначити положення висоти піраміди. Тому у ході аналізу умови задачі першочергово треба з'ясувати, як краще побудувати рисунок, щоб з ним було зручно працювати.

Для ефективної роботи на уроці вчитель може завчасно приготувати моделі до задач. Причому, це можуть бути як паперові моделі або каркасні моделі, так і електронні динамічні. Зважаючи на високий рівень наочності і зручність у використанні, останні набувають поширення в сучасному освітньому просторі.

Пропонуємо зразок план-конспекту уроку геометрії в 11 класі з теми «Піраміда. Розв'язування задач» з використанням засобів ІКТ і різних видів моделей.

Тема уроку. **Піраміда. Розв'язування задач**

Мета уроку:

– *навчальна*: засвоїти різницю понять «кут між площинами» та «двогранний кут»; вивчити поняття «зовнівписане коло трикутника», набути вмінь та навичок розв'язувати задачі на піраміду, один з двогранних кутів якої тупий;

– *виховна*: виховувати графічну культуру учнів, формувати вміння аргументувати власну думку;

– *розвивальна*: розвивати логічне мислення, просторову уяву, зорову та слухову пам’ять.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання: мультимедійна дошка, комп’ютер.

Програмне забезпечення: СКМ GeoGebra.

ХІД УРОКУ

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ

Перевірка готовності учнів до уроку. Підготовка динамічних електронних наочностей, виконаних в системі комп’ютерної математики GeoGebra. Налаштування комп’ютерної техніки.

II. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

1. Чи варто розрізняти міру двогранного кута з кутом між площинами? *Так, за аналогією до понять «кут між прямими» та «кут між променями». Дійсно, двогранний кут – фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує; кут на площині – фігура, яка складається із точки – вершини кута і двох півпрямих, що виходять з цієї точки. Кут між прямими визначається мірою гострого кута, що утворений перетином цих прямих, тоді як кут між площинами має міру гострого двогранного кута, що утворений перетином цих прямих.*

2. В яких межах може змінюватися кут між площинами? А міра двогранного кута? *Кут між площинами може змінюватися в межах від 0 до 90°, міра двогранного кута – від 0 до 360°.*

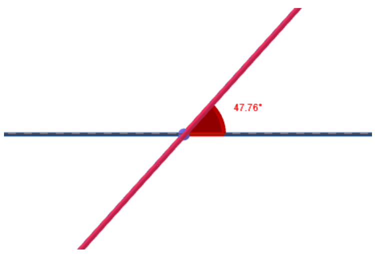


Рис. 2.5. Кут між прямими

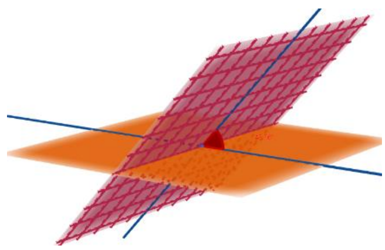


Рис. 2.6. Кут між площинами

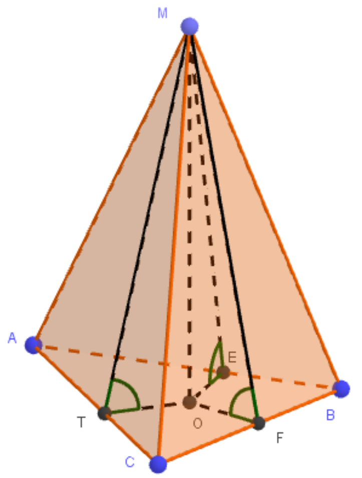


Рис. 2.7. Вершина піраміди рівновіддалена від ребер її основи

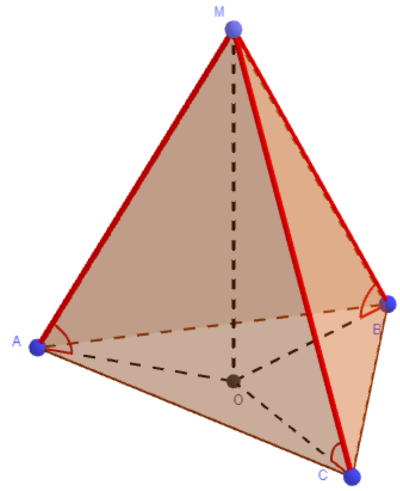


Рис. 2.8. Вершина піраміди рівновіддалена від вершин її основи

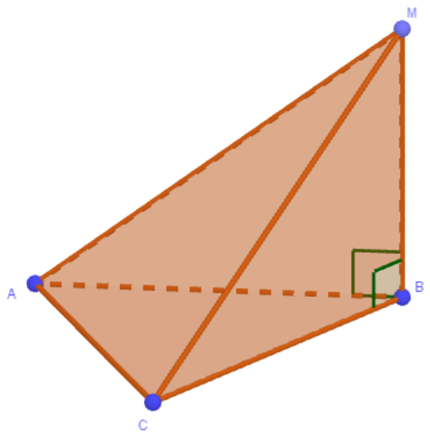


Рис. 2.9. Одне з бічних ребер піраміди піраміди перпендикулярне до площини площини

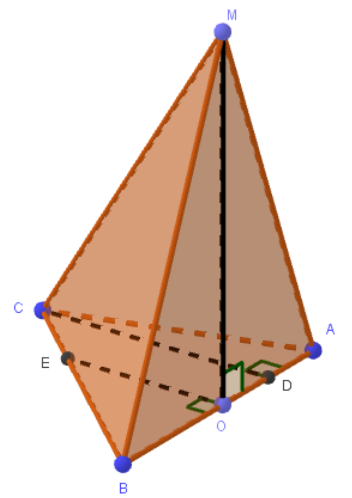


Рис. 2.10. Одна з бічних граней основи перпендикулярна до основи

3. Продовжіть думку:

– якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то *основа висоти цієї піраміди є центром описаного навколо її основи кола;*

– якщо всі ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, то *основа висоти цієї піраміди є центром описаного навколо її основи кола;*

– якщо всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні, то *основа висоти піраміди є центром вписаного в її основу кола;*

– якщо висота піраміди є її бічним ребром, то *дві грані піраміди, які містять це ребро, перпендикулярні до площини основи;*

– якщо одна з граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, то *висота цієї грані є висотою піраміди, тобто основа піраміди належить ребру основи піраміди.*

III. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ, ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ ТА МЕТИ УРОКУ

На попередніх уроках роз'язано чимало задач на різні види пірамід, однак всі ці задачі стосувалися многогранників, у яких всі двогранні кути гострі або один двогранний кут прямий.

Сьогодні на уроці розглянемо такі піраміди, у яких один двогранний кут тупий, і з'ясуємо, як будувати зображення цих пірамід. Розв'язуючи задачі, познайомимося також із новим поняттям – «зовнівписане коло трикутника», а також визначимо, як це коло пов'язане з трикутними пірамідами, площини бічних граней яких утворюють з площиною основи рівні кути.

Отже, тема уроку – «Піраміда. Розв'язування задач».

IV. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРЕНУВАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Задача 1. В основі піраміди лежить трапеція *ABCD*, у якої *AB* = *CD* = 2 см, *BC* = 4 см, *AD* = 6 см. Грані *SAB* і *SCD* перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі *AD* дорівнює 30°. Знайдіть висоту піраміди і двогранний кут при ребрі *BC*.

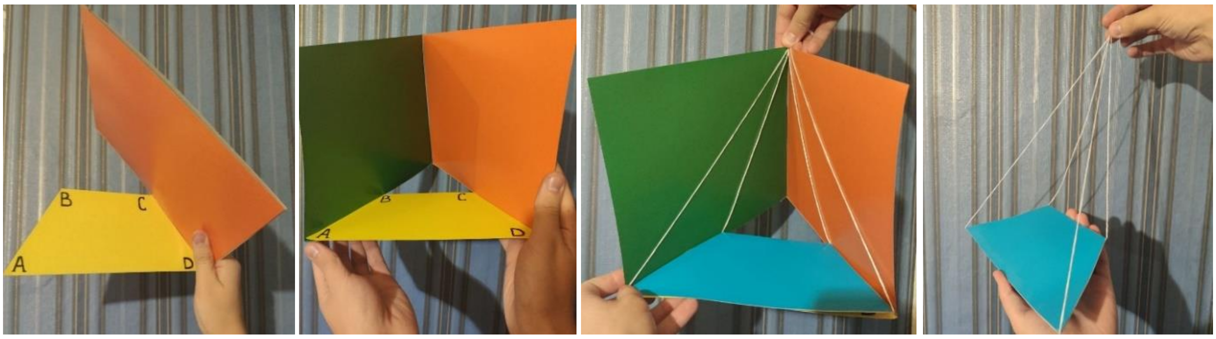
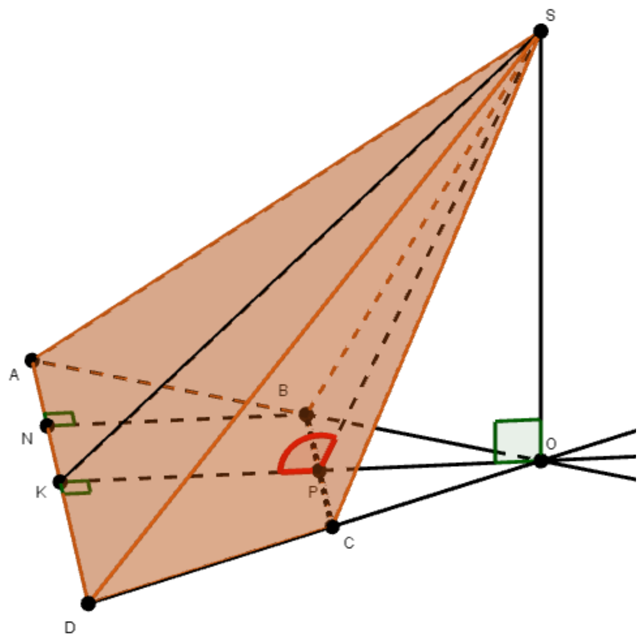


Рис. 2.11. Демонстрація паперової моделі до задачі 1

*Методичний коментар до задачі 1***.** Оскільки в піраміді дві несуміжні грані *SAB* і *SCD* перпендикулярні до площини основи, відрізки *AB* і *CD* – бічні сторони трапеції (не перетинаються), то ці грані не мають спільних ребер і мають лише одну спільну точку – вершину *S* піраміди. Тоді *S* належить прямій перетину площин *(SAB)* і *(SCD)*. Ці міркування приводять до побудови грамотного рисунка до задачі. Дійсно, використовуючи паперову та ниткову моделі, учитель у ході евристичної бесіди допомагає учням визначити положення вершини піраміди (див. рис. 2.11).



Дано:

SABCD – піраміда,

ABCD – трапеція, основа піраміди,

AB = *CD* = 2 см,

BC = 4 см, *AD* = 6 см,

(SAB) ⊥ *(ABC)*, *(SCD)* ⊥ *(ABC)*,

∠(*(SAB)*, *(ABC)*) = 30°.

Знайти висоту піраміди і двогранний кут при ребрі BC.

Рис. 2.12. До задачі 1

Розв'язання:

Нехай *SO* – висота піраміди, *SO* – пряма перетину площин *(SAB)* і *(SCD)*, *O* – точка перетину прямих *AB* і *CD*. Побудуємо *OK* ⊥ *AD*. Оскільки *SO* ⊥ *(ABC)*, *SK* – похила, *OK* – її проекція, то за теоремою про три перпендикуляри *SK* ⊥ *AD*. Тоді $\angle SKO$ = 30° – лінійний кут двогранного кута при ребрі *AD*.

Нехай *OK* ∩ *BC* = *P*, ∠*S*PК – лінійний кут двогранного кута при ребрі *BC*.

BN ⊥ *AD*; *AN* = $\frac{AD-BC}{2}$ = 1 см.

У прямокутному Δ*ANB* cos $\angle BAN = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$ см. Звідси $\angle BAN$ = 60°. Тоді $\angle AOD$ = 180° – ($\angle BAN + \angle CDA$) = 180° – $2\angle BAN$ = 60°. Отже, Δ*AOD* – рівносторонній. За теоремою Піфагора *BN* = $\sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{3}$ см.

Оскільки ΔAOD – рівносторонній, то $OK = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ см.

Розглянемо ΔSOK ($\angle BAN = 90°$): $\frac{SO}{OK} = \text{tg}\,\angle SKO$; $SO = OK \cdot \text{tg}\,\angle SKO = 3$ см.

Розглянемо ΔSOP ($\angle SOP = 90°$): $OP = OK - KP = OK - BN = 2\sqrt{3}$ см; $\text{tg}\,\angle SPO = \frac{SO}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle SPO = \text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\angle SPK = \pi - \angle SPO = \pi - \text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: 3 см; $\pi - \text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Додаткове запитання до задачі 1. Якби треба було знайти кут між площиною грані SBC і площиною основи піраміди, то яку б мали відповідь до задачі? *($\angle SPO = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{2}$)*

Задача 2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині та радіусом R описаного кола. Площина кожної бічної грані піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Методичний коментар до задачі 2. Слід зауважити, що твердження «двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні» і «площини бічних граней утворюють з площиною основи піраміди рівні кути» не є рівнозначними. Дійсно, коли площини бічних граней утворюють з площиною основи піраміди рівні кути, то можливі два випадки: або всі двогранні кути при ребрах основи рівні (гострі), або один з двогранних кутів при основі піраміди тупий. Оскільки перший випадок для учнів уже відомий, з’ясуємо, в яку точку площини основи проектується вершина піраміди в другому випадку.

V. ПОВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Означення. Зовнівписаним колом трикутника називають коло, яке дотикається до однієї із сторін трикутника та продовжень двох інших його сторін.

Теорема. Якщо в трикутній піраміді площини бічних граней *утворюють з площиною основи рівні кути*, то основа висоти піраміди є або *центром вписаного* *в основу піраміди кола*, або *центром зовнівписаного кола трикутника-основи піраміди*.

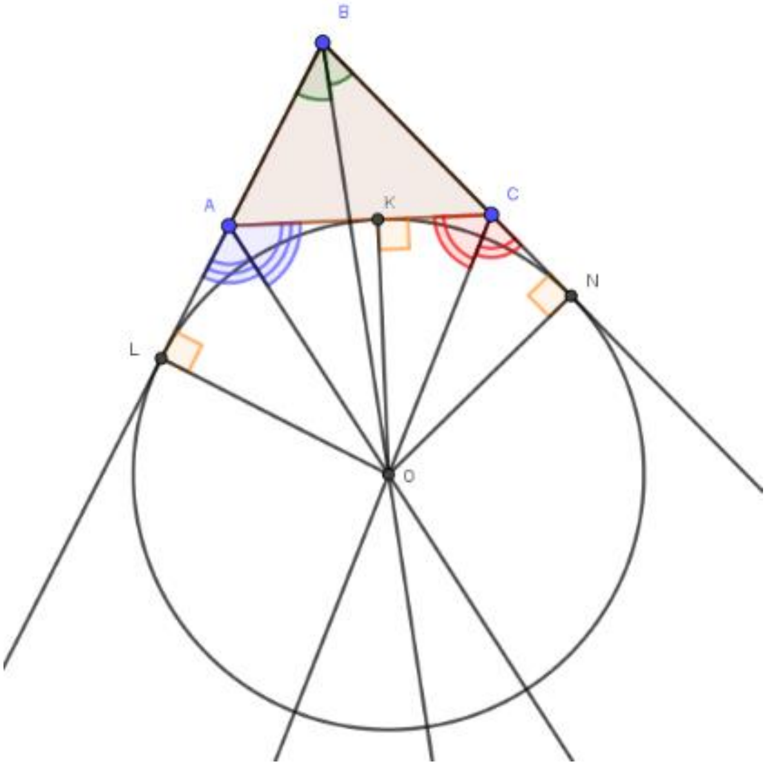


Рис. 2.13. Зовнівписане коло ΔABC, яке дотикається до сторони AB

Обґрунтуємо істинність другої частини висновку теореми, будуючи рисунок до задачі 2.

V. ЗАСТОСУВАННЯ НАБУТИХ ЗНАНЬ ДО РОЗВ'ЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розв'яжемо задачу 2, домовившись розглядати зовнівписане коло, яке дотикається до сторони BC рівнобедреного ΔABC ($AB = AC$).

Методичний коментар до задачі. З метою глибокого аналізу умови задачі і твердження, яке треба довести, а також подальшого узагальнення пропонуємо скористатися можливостями системи динамічної математики GeoGebra. Зручно організувати роботу з двома полотнами програми – 2D та 3D. Так, на площині виконаємо побудову трикутника, що лежить в основі піраміди, визначимо положення центра зовнівписаного кола цього трикутника. У цей час на іншому полотні автоматично будується відповідний просторовий рисунок, на якому можна добудувати піраміду і провести дослідження. Таким чином організована робота із задачею дозволяє виконати розумову операцію порівняння.

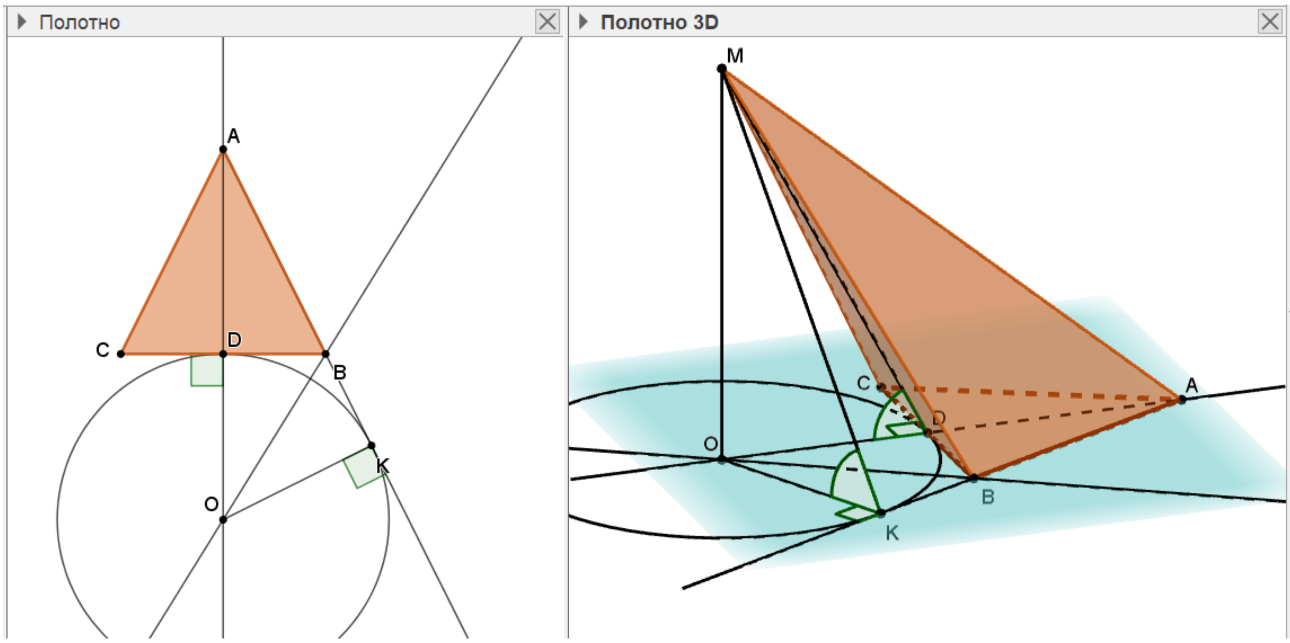


Рис. 2.14. Динамічна модель до задачі, виконана на мультимедійній дошці в GeoGebra під час уроку

Дано:

$MABC$ – піраміда,

ΔABC – основа піраміди,

$AB = BC$, $\angle BAC = \beta$,

R – радіус описаного навколо ΔABC кола,

$\angle((ABC),\ (MAB)) = \angle((ABC),\ (MBC)) =$

$= \angle((ABC),\ (MAC)) = \alpha$.

Знайти $S_{бічн}$.

Розв’язання:

Нехай основа висоти піраміди знаходиться зовні ΔABC, МО – висота піраміди $MABC$, О – центр зовнівписаного кола ΔABC.

Нехай $AD \perp BC$; оскільки у ΔABC $AB = AC$, то $\angle CAD = \angle DAB$, $CD = DB$. Точка O належить прямій AD, $OK \perp AB$, тобто $OK = OD$.

Оскільки $MO \perp (ABC)$, MK і MD – похилі, OK і OD – їх проекції, $OK \perp AB$, $OD \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри маємо, що $MK \perp AB$ і $MD \perp BC$. Тоді $\angle MKO = \angle MDO = \alpha$ – як кути між бічними гранями і площиною основи.

Розглянемо ΔABC: за наслідком з теореми синусів $\frac{\text{BC}}{\sin\angle BAC}\frac{\text{BC}}{\sin\beta}=2R$.

Тоді $BC = 2R\sin\beta$, $DB = \frac{1}{2}BC = R\sin\beta$; за наслідком з теореми синусів $\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AB}{\sin(90°-\frac{\beta}{2})} = \frac{AB}{\cos\frac{\beta}{2}} = 2R$, AB = AC = $2R\cos\frac{\beta}{2}$.

Розглянемо ΔODB ($\angle ODB = 90°$):

$\angle DBO = \frac{1}{2}\angle CBK = \frac{1}{2}(180° - \angle CBA) = \frac{\pi+\beta}{4}$;

$\frac{OD}{BD} = tg\angle DBO$, тому OD = BD · tg$\angle DBO = R\sin\beta\ tg\frac{\pi+\beta}{4}$.

Розглянемо ΔMOD ($\angle MOD = 90°$):

$\frac{OD}{MD} = \cos\angle MDO$, $MD = \frac{OD}{\cos\angle MDO} = \frac{R\sin\beta\ tg\frac{\pi+\beta}{4}}{\cos\alpha} = MK$.

Знайдемо площу бічної поверхні піраміди: $S_{\text{бічн}} = S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2}\cdot MD\cdot P_{\Delta ABC} = \frac{R^2\sin\beta\ tg\frac{\pi+\beta}{4}\left(\sin\beta+2\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\alpha}$ (кв. од.)

Відповідь: $\frac{R^2\sin\beta\ tg\frac{\pi+\beta}{4}\left(\sin\beta+2\cos\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\alpha}$ кв. од.

Додаткові запитання до задачі 2:

1. Чи одержали б таку ж відповідь, якби розв'язували задачу для випадку, коли всі двогранні кути при основі піраміди рівні? *(Ні, одержали б іншу відповідь, враховуючи розміщення висоти піраміди)*

2. Чи одержали б таку ж відповідь, якби будували зовнівписане коло, що дотикається до бічної сторони ΔABC? *(Ні, одержали б іншу відповідь, враховуючи довжину OD)*

VI. РЕФЛЕКСІЯ, ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Продовжіть думку:

- ❖ Сьогодні на уроці я пригадав ...
- ❖ Сьогодні на уроці я дізнався ...
- ❖ З уроку мені запам'яталося ...
- ❖ На уроці мені сподобалося (не сподобалося) ...

VII. ПОВІДОМЛЕННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Вивчити теоретичний матеріал уроку.

2. Поміркувати, чи існує чотирикутна піраміда, в якої площини бічних граней утворюють з площиною основи рівні кути, а один з двогранних кутів при основі – тупий.

3. Розв’язати задачу 2 для випадку, коли всі двогранні кути при основі піраміди *MABC* гострі (тобто точка *O* є центром вписаного в ΔABC кола).

Доречно запропонувати учням відсканувати QR-код з посиланням на GeoGebraBook «Наочності до уроку», що містить також домашнє завдання.

Рис. 2.15. QR-код для повідомлення домашнього завдання уроку

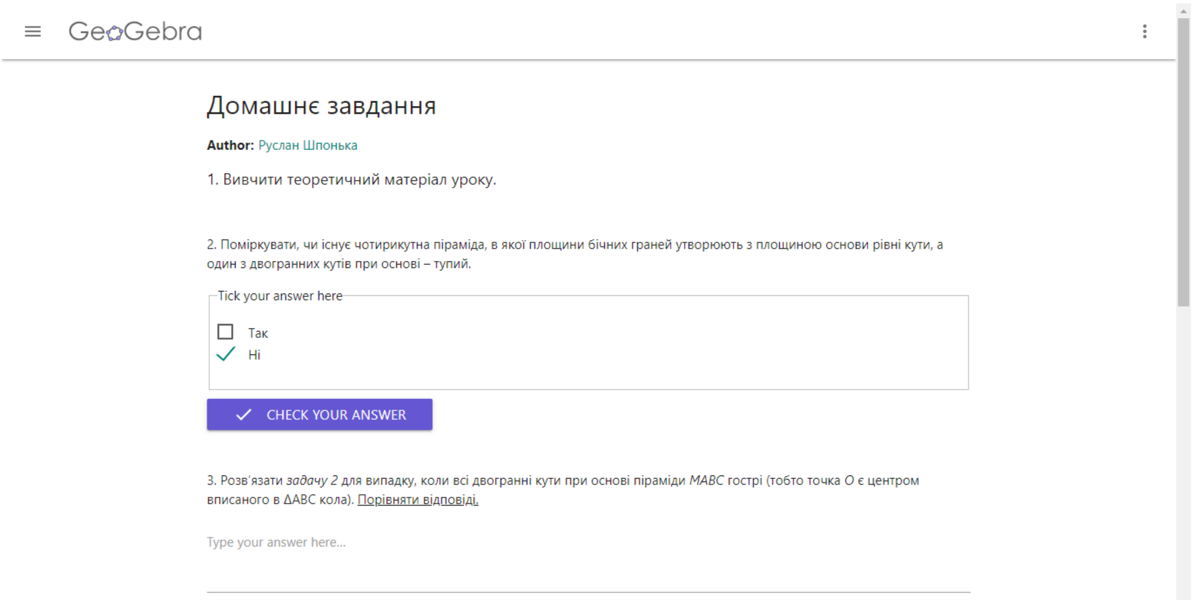


Рис. 2.16. Фрагмент ресурсу для роботи вдома, розробленого за допомогою сервісу GeoGebra.org

Перейшовши за посиланням, з яким пов’язаний QR-код, учні матимуть змогу попрацювати з онлайн-версією наочностей, знайдуть текст домашнього завдання, дадуть відповіді на поставлені питання у відповідних полях для введення, зможуть самостійно виконати побудови і провести дослідження.

Наведемо самоаналіз уроку, проведеного за описаною розробкою під час виробничої практики у школі.

Загальна оцінка проведеного уроку. Урок проведений на належному науковому і методичному рівні. При плануванні і проведенні уроку дотримано загальнодидактичних вимог. Тип та структура уроку відповідають його цілям та завданням, а також головному задуму уроку – розмежувати поняття «кут між площинами» і «двогранний кут». Проведений урок – один з уроків теми «Піраміда».

Обрані шляхи досягнення мети і комплекс прийомів сприяли реалізації поставлених завдань, зокрема засвоїти поняття «зовнівписане коло трикутника», навчитися розв’язувати задачі на піраміду, один з двогранних кутів якої – тупий. Планування та проведення уроку в цілому відповідає логіці навчального процесу. Структурні компоненти уроку визначені із врахуванням психологічних закономірностей засвоєння знань.

Розподіл часу на уроці не відповідав запланованому, оскільки розв’язування першої задачі зайняло більше часу, аніж припускалося. Через це розв’язання другої задачі не встигли оформити письмово, а лише виконали рисунок і обговорили план її розв’язування. Найголовніші етапи уроку були проведені в необхідному обсязі. Помірний темп уроку сприяв ефективному засвоєнню нового матеріалу.

На етапі мотивації навчальної діяльності повідомлено тему та мету уроку, зауваживши, що на попередніх уроках розв’язано чимало задач на різні види пірамід, в яких всі двогранні кути гострі, або деякі з них – прямі, і запропонувавши розглянути піраміди, в яких один двогранний кут – тупий, а також навчитися будувати зображення таких пірамід.

Значну увагу приділено етапу актуалізації опорних знань. У ході фронтального усного опитування пригадували означення кута, кута між прямими, кута між площинами, двогранного кута, а також формулювання теорем про піраміду, бічні ребра якої рівні, про піраміду, двогранні кути при основі якої рівні, піраміду, в якої бічне ребро перпендикулярне до площини основи, піраміду, в якої одна бічна грань перпендикулярна до площини основи.

Актуалізація знань дала можливість полегшити сприйняття нового матеріалу і додатково вмотивувала учнів до активної роботи на уроці.

На наступному етапі уроку розв’язано першу задачу. Навмисно визначено структуру уроку, за якої повідомлення нового матеріалу розпочалося перед розв’язуванням другої задачі, оскільки перша задача хоч і відповідає підвищеному рівню складності, проте вимагає застосування вже наявних в учнів знань. З метою економії часу пояснення поняття «зовнівписане коло трикутника» проведено у ході розв’язування другої задачі. Закріплення знань відбувалося у процесі обговорення плану розв’язання задачі. Наприкінці уроку учні підвели підсумки, узагальнили та систематизували інформацію про те, що нового дізналися на уроці; також учні поділилися враженнями від уроку, сказали, що найбільше сподобалося на уроці пояснення вчителя з використанням паперової та динамічних електронних моделей.

Раціональність, доцільність, ефективність методів, прийомів, дидактичного матеріалу та форм організації діяльності учнів. Використані методи та прийоми були ефективними, бо сприяли сприйняттю та засвоєнню знань. Так, електронна динамічна модель кута між прямими, з якої одержано модель кута між площинами, допомогла проілюструвати аналогічність цих понять. Підводячи учнів до усвідомлення плану розв'язування першої задачі, використано паперову модель, виготовлену власноруч. Робота з наочним матеріалом допомогла грамотно побудувати рисунок на дошці та в зошитах. Пояснення нового матеріалу з опорою на наочність, представлену на мультимедійній дошці, полегшило розуміння змісту теореми про піраміду, в якої площини бічних граней утворюють з площиною основи рівні кути (акцентував увагу учнів на другому випадку, коли один з двогранних кутів піраміди є тупим). Окрім методу демонстрацій та методу вправ, реалізувати мету уроку допомогли інші методи навчання, використані на уроці – евристична бесіда, пояснення вчителя.

Основні засоби навчання, їх доцільність та ефективність. Основним засобом на уроці були різні види наочностей: рухома паперова модель, динамічні електронні моделі, представлені на мультимедійній дошці. Крім того, учням було роздано друкований дидактичний матеріал – міні-конспект теоретичного матеріалу та тексти задач, що дозволило уникнути задиктовування нових означень та теорем.

Виховний та розвивальний аспект уроку. Проведений урок сприяв формуванню графічної культури учнів, розвитку їх просторової уяви, логічного та критичного мислення.

Учитель на уроці. Успішному проведенню уроку сприяла попередня ґрунтовна підготовка до нього. На уроці реалізовано різні види діяльності – робота біля звичайної дошки, пояснення матеріалу, робота з мультимедійною дошкою, бесіда з учнями. Враховано диференційований підхід до учнів. Так, розуміючи, в яких учнів можуть виникнути питання стосовно використаних формул, учитель звертався до цих дітей з питаннями уточнюючого характеру. Зовнішній вигляд вчителя охайний.

Робота учнів на уроці. Зважаючи на невелику кількість задач, запропонованих до розв’язування на уроці, біля дошки працювала лише одна учениця. Можливо, треба було б розділити план розв'язування задачі на декілька частин і запросити до дошки більшу кількість учнів. Діти упродовж уроку були активними, виявляли інтерес до пояснення вчителя, на уроці панувала доброзичлива атмосфера, дисципліна – на високому рівні.

Загальний висновок, оцінка. Мети уроку досягнуто повністю, оцінка проведеного уроку – «відмінно».

Зауважимо, що використання GeoGebra розвиває не лише просторову уяву учнів, а й формує компоненти логічного мислення, оскільки для побудови динамічного рисунку необхідно з’ясувати, які інструменти треба використовувати і в якій послідовності. Активна робота з рисунком забезпечує свідоме розуміння зв’язків між об’єктами, про які йдеться в задачі. Можливість повертати рисунок та змінювати положення точок сприяють якісному проведенню досліджень та узагальнень.

Покажемо переваги використання системи динамічної математики під час розв’язування задач алгебри на прикладі деяких задач заочного туру обласного етапу юних математиків ім. М. Й. Ядренка у 2019 році.

Задача 2.11. Одного разу вітка гіперболи $y = \frac{1}{x}$, де $x > 0$, вирішила захопити всю координатну площину, причому не власноруч, а за допомогою прямих. А саме, гіпербола обирає деякі дві точки на своєму графіку та проводить через них пряму, після чого всі точки, що опинилися на цій прямій, стають «захопленими». Знайдіть ГМТ, які не можуть бути захоплені гіперболою.

Розв’язання:

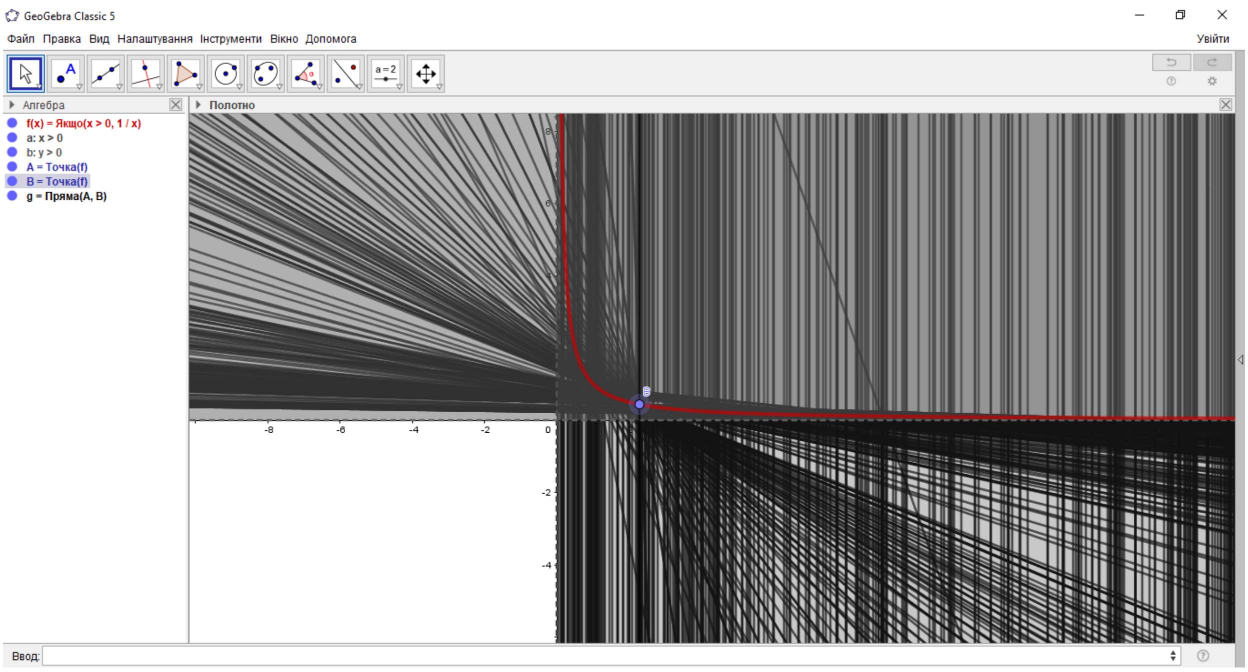


Рис. 2.17. До задачі 2.11

Аби проілюструвати «гіперболічне захоплення», побудуємо на координатній площині вітку гіперболи, позначимо на ній довільним чином дві точки A і B та проведемо через них пряму AB. Якщо для побудованої прямої обрати опцію «Залишати слід», то змінюючи розташування точок A і B на кривій, зможемо побудувати безліч прямих, які «допомагають» гіперболі (див. рис. 2.17).

Аналізуючи рисунок, робимо припущення, що гіперболі вдасться захопити всі точки координатної площини, окрім точок третьої координатної чверті.

Аналітичне виведення загального рівняння побудованих прямих досить алгоритмічне і цілком зрозуміле учням.

Так, складемо рівняння прямої AB, якщо $A(x_1;x_2)$ і $B(y_1;y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Після тотожних перетворень одержимо рівняння прямої AB у такому вигляді: $y=-\frac{1}{x_1x_2}\cdot x+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$. Позначимо $k=-\frac{1}{x_1x_2}$, $b=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. Оскільки $x_1>0$ і $x_2>0$, то $k<0$, а $b>0$. Тоді координатну площину «захоплять» прямі виду $y=kx+b$, причому $k<0$, а $b>0$. Множина таких прямих складається з пучка прямих $y=kx$, де $k<0$ (II та IV чверті), і ще нескінченної кількості пучків, утворених перенесенням цього пучка на b одиниць вгору (I, II, IV чверті). Отже, незахопленими залишаться точки $(x;y)$, для яких обидві координати від'ємні.

Задача 2.12. Для певного r розглянемо геометричне місце точок $(a;b)$, за яких наступна система має рівно один розв'язок:

$$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r.\end{cases}$$

1) Побудуйте це ГМТ для $r=4$.

2) Дослідіть, як змінюється це ГМТ в залежності від r.

Розв'язання:

Після короткого аналізу умови задачі з'ясовуємо, що спочатку треба побудувати графік рівняння $|x|+|y|=1$.

В результаті одержимо зображення квадрата з вершинами в точках (0; 1), (–1; 0), (0; –1), (1; 0) (див. рис. 2.18).

Друге рівняння системи визначає коло з центром в точці $(a;b)$ радіуса $\sqrt{r}$. Тоді шукане ГМТ – це множина центрів кіл радіуса $\sqrt{r}$, які мають одну спільну точку з квадратом. Шукане ГМТ для $r=4$ – це множина точок, віддалених від сторін квадрата і від кожної з його вершин на відстань $\sqrt{r}=2$ (див. рис. 2.19).

Цікавими для розгляду є випадки, коли $r=0$, $0<r<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\leq r<4$, $r>4$ (див. рис. 2.20 – 2.23).

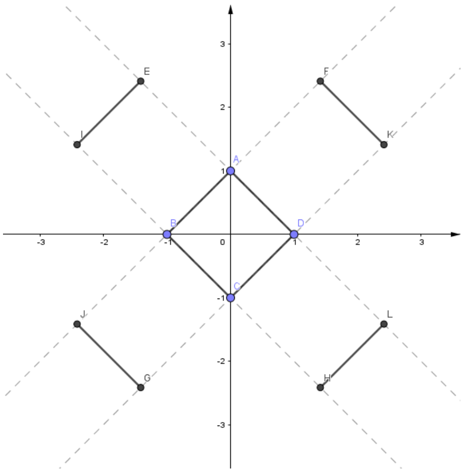


Рис. 2.18. ГМТ, віддалених від сторін квадрата на відстань 2

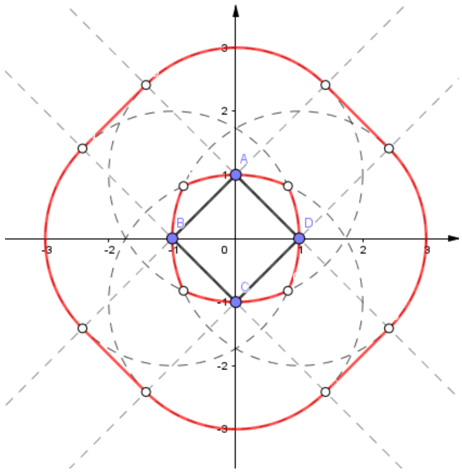


Рис. 2.19. Шукане ГМТ для $r = 4$

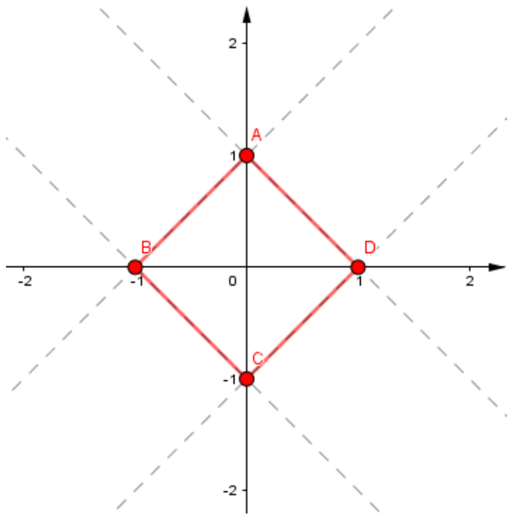


Рис. 2.20. Шукане ГМТ для $r = 0$

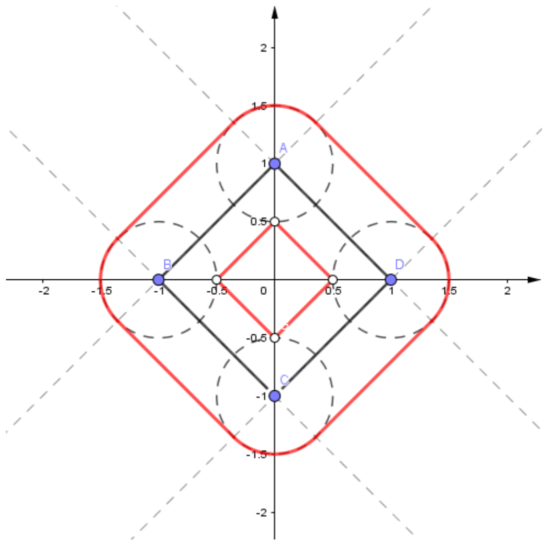


Рис. 2.21. Шукане ГМТ для $0 < r < \frac{1}{2}$

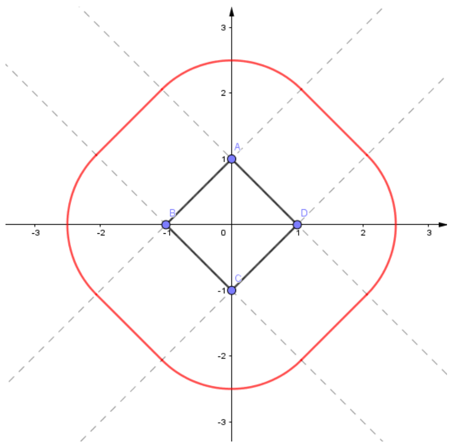


Рис. 2.22. Шукане ГМТ для $\frac{1}{2} \leq r < 4$

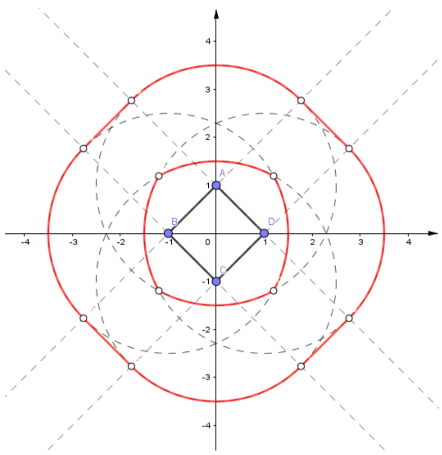


Рис. 2.23. Шукане ГМТ для $r > 4$

Розглянувши всі можливі випадки для шуканого ГМТ і побудувавши рисунок для кожного з них, варто запропонувати учням створити самостійно загальну динамічну конструкцію з повзунком для позначення параметра r.

Урізноманітнити форми роботи на уроках математики можна проведенням інтерактивних вправ, розроблених за допомогою онлайн-сервісів Kahoot.com і LearningApps.org (Додаток Б, Додаток Д).

Висновки до розділу 2

У другому розділі викладено результати дослідження методичних основ формування логічного мислення старшокласників у процесі розв'язування задач.

Зважаючи на діагностичну і прогностичну цінність, обґрунтовано розвивальний вплив задач з параметрами на вироблення в учнів навичок мислити логічно і доказово. Запропоновано приклади розв'язування завдань з параметрами різних типів: ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь і нерівностей, а також нестандартних задач з параметрами у формі таблиць з покроковою реалізацією розв'язання. Наведено систему різнорівневих вправ для самостійного опрацювання. Проаналізовано зміст курсу стереометрії з позицій формування логічного мислення, а також графічної культури і просторових уявлень учнів, нерозривно з ним пов'язаних. Розглянуто елементи методики роботи з умовою стереометричної задачі, спрямованої на свідоме розуміння учнями етапів її розв'язування.

У зв'язку з необхідністю пошуку нових підходів до навчання математики, розкрито особливості впровадження деяких ІКТ з метою розв'язання старшокласниками навчальних проблем.

ВИСНОВКИ

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив вивчити особливості формування логічного мислення в старшому підлітковому віці. Встановлено, що головною новою якістю мислення старшокласників є здатність логічно мислити про абстрактні висловлювання і вміння міркувати за допомогою вербально сформульованих гіпотез. Логічно мислити – означає мислити точно, послідовно, доказово і точно. Основу логічного мислення складають розумові операції аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення і конкретизації.

У другому завданні дослідження з’ясовано можливості задачного підходу до навчання математики та формування логічного мислення старшокласників: у процесі розв’язування математичних задач учні засвоюють теоретичний матеріал, розвивають свої творчі здібності, самостійність і логіку мислення.

У ході виконання третього завдання визначено фактори задачного підходу при вивченні курсів алгебри та початків аналізу і стереометрії. Так, успішній реалізації задачного підходу до формування логічного мислення старшокласників сприяють декілька факторів, серед яких: вибір виду задач, вибір методу розв’язування задач та представлення задач у системі. На основі аналізу методичної літератури визначено різні види математичних задач та методів їх розв’язування.

Розробка методики навчання розв’язування математичних задач, спрямованої на формування логічного мислення учнів профільних класів стала розв’язанням четвертого завдання дослідження. Зважаючи на важливість використання різних методів і прийомів розв’язування задач з метою формування логічного мислення учнів, зокрема методу перетворення умови задачі, методу розбиття задачі на підзадачі, методу кодування об’єктів задачі і комплексу загальновідомих математичних методів, запропоновано зразки розв’язань задач з параметрами, оформлених у вигляді зведених таблиць, а також схем аналізу умови стереометричної задачі і аналітико-синтетичних міркувань, які приводять до знаходження способу її розв’язування.

У межах п'ятого завдання розкрито особливості використання засобів інформаційно-комунікативних технологій у процесі розв'язування алгебраїчних і стереометричних задач підвищеної складності з метою розвитку навичок логічного мислення старшокласників і запропоновано зразки наочностей, розроблених з використанням системи динамічної математики GeoGebra, онлайн-сервісів Kahoot.com і LearningApps.org.

Таким чином, поставлена мета досягнута, завдання дослідження виконано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьев В. В. Методические основы формирования творческой активности студентов в процессе решения математических задач : дисс. д. п. н. : 13.00.02 / В. В. Афанасьев. – Санкт-Петербург, 1997. – 61 с.

2. Балл Г. А. Теория учебных задач : Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – Москва : Педагогика, 1990. – 184 с.

3. Барболіна О. С. Розвиток критичного мислення учнів шляхом розв’язання математичних задач / О. С. Барболіна // Таврійський вісник освіти. – 2016. – №4 (56). – С. 190–196.

4. Бевз Г. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владімірова. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 272 с.

5. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник / Г. П. Бевз. – Київ : Вища школа, 1989. – 367 с. : іл.

6. Бондаренко Л. И. У истоков логического мышления / Л. И. Бондаренко. – Москва : Знание, 1985. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Философия»; № 7).

7. Вакалюк Т. А. Активізація логічного мислення старшокласників при розв'язуванні задач на цикл з параметром / Т. А. Вакалюк // Наукові записки. – 2011. – №3. – С. 59–65. – (Педагогіка).

8. Вакалюк Т. А. Особливості мислення старшокласників / Т. А. Вакалюк // Актуальні проблеми педагогіки та психології. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (м. Львів, 7-8 жовтня 2011 р.). – Львів, 2011. – С. 10–12.

9. Вакалюк Т. А. Підготовка майбутніх учителів інформатики до розвитку логічного мислення старшокласників: теоретико-методологічний аспект : Монографія / Т. А. Вакалюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2013. – 236 с.

10. Власенко К. В. Навчання стереометрії засобами актуалізації евристичних ситуацій : навч.-метод. посібник / К. В. Власенко, О. І. Скафа. – Донецьк : Норма-ПРЕСС, 2004. – 124 с.

11. Воинова И. В. Обучение логическим приёмам мышления учащихся основной школы в процессе изучения курса алгебры : дис. канд. п. н. : 13.00.02 / И. В. Воинова. – Саранск, 2006. – 175 с.

12. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи : Пособие для учителя / Я. Е. Гольдберг. – Киев : Радянська школа, 1990. – 118 с.

13. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Киев : РИА «Текст», 1992. – 290 с.

14. Готман Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. – Москва : МЦНМО, 2006. – 160 с.

15. Гриб'юк О. О. Розв'язування евристичних задач в контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra / О. О. Гриб'юк, В. Л. Юнчик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. – Київ : Планер, 2015. – №43. – С. 206–218.

16. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики : кн. для учителя / Я. И. Груденов. – Москва : Просвещение, 1990. – 224 с.

17. Гурова Л. Л. Психология мышления / Л. Л. Гурова. – Москва : ПЕР СЭ, 2005. – 136 с.

18. Давыдов В. В. Виды обобщения в психологии / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогическое общество России, 2000. – 480 с.

19. Екзаменаційні завдання з математики для шкіл, ліцеїв та гімназій з поглибленим вивченням математики. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1996. – 72 с.

20. Екимова М. А. Проблема оценки уровня развития логического мышления / М. А. Екимова // Вестник Омского университета. – Омск, Изд-во

ОГУ, 2002. – №1. – С. 120–123.

21. Журавлев И. К. Система познавательных задач по предмету / И. К. Журавлев // Советская педагогика, 1981. – № 9. – С. 49–55.

22. Загвязинский В. И. О движущих силах учебного процесса / В. И. Загвязинский // Советская психология. – 1973. – № 6. – С. 37–42.

23. Зовнішнє незалежне оцінювання. Статистика та аналітика [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dneprtest.dp.ua/cms/index.php?option=com_content&view=article&id=570&Itemid=154.

24. Ивин А. А. Искусство правильно мыслить / А. А. Ивин. – Москва : Просвещение, 1990. – 240 с.

25. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448 с.

26. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2019. – 416 с.

27. Істер О. С. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 368 с.

28. Істер О. С. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2019. – 288 с.

29. Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. – Москва: Знания, 1981. – 96 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология»; № 6).

30. Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – Москва : МЦНМО, 2007. – 296 с.

31. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Часть 1 / Ю. М. Колягин.– Москва : Просвещение, 1977. – 111 с.

32. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Часть 2 / Ю. М. Колягин.– Москва : Просвещение, 1977. – 144 с.

33. Колягин Ю. М. Учись решать задачи : Пособие для учащихся VII–VIII кл. / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян. – Москва : Просвещение, 1980. – 96 с.

34. Кон И. С. Психология старшеклассника : Пособие для учителей / Кон И. С. – Москва : Просвещение, 1980. – 192 с.

35. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Під ред. Л. Н. Проколієнко. – Київ : Радянська школа, 1989. – 608 с.

36. Костюк Г.С. О задачном подходе к исследованию учебной деятельности / Г. С. Костюк, Г. А. Балл, Машбиц Е. И. // Психология человеческого учения и решение проблем : 2-я Пражская конференция: Резюме. Прага. – 1973. – С. 70.

37. Коэн Л. Почему девочки не хуже мальчиков разбираются в математике и еще 40 историй о человеческом мозге / Л. Коэн. – Москва : РИПОЛ классик, 2016. – 266 с.

38. Кравцев С. В. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / Кравцев С. В., Ю. Л. Макаров, М. И. Максимов, М. И. Нараленков, В. Г. Чирский. – Москва : Экзамен, 2001 – 544 с.

39. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва: Институт практической психологии, 1998. – 416 с. – (Психологи отечества).

40. Кустов А. В. Мислення: психологічні, психопатологічні та психотерапевтичні аспекти: навч. посіб. / А. В. Кустов. – Суми : СумДУ, 2010. – 324 с.

41. Лейтес Н. С. Возрастные предпосылки умственных способностей / Н. С. Лейтес [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.persev.ru/book/ns-leytes-vozrastnye-predposylki-umstvennyh-sposobnostey.

42. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – Москва : Педагогика, 1981. – 186 с.

43. Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности / И. Я. Лернер. – Москва : Знание, 1980. – 96 с.

44. Лов’янова І. В. Роль задач у формуванні логічного мислення на уроках математики / І. В. Лов’янова, Г. О. Приходько // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Збірник наукових праць. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Вип. IV. – Т. 1 : Теорія та методика навчання математики. – С. 352–356.

45. Лов’янова І. В. Теоретико-методичні засади навчання математики у профільній школі : дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук : 13.00.02 / І. В. Лов’янова. – Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. – Черкаси, 2015. – 678 с.

46. Лов'янова І. В. Формування інтелектуальних умінь старшокласників у процесі вивчення предметів природничого циклу : дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.09 / І. В. Лов’янова – Кривий Ріг, 2006. – 208 с.

47. Лов’янова І. В. О формировании профессиональной направленности личности старшеклассников в процессе обучения математике в профильной школе // Математическое образование: современное состояние и перспективы (к 95-летию со дня рождения профессора А. А. Столяра) : материалы Международной научной конференции, 19—20 февраля 2014 г., МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев. — Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. – С. 89–91.

48. Лов’янова І. В. Організація навчання математики у старшій школі / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов’янова, З. О. Сердюк ; за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – С. 10–61 (Розділ 1).

49. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2018. – 400 с.

50. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Харків : Гімназія, 2019. – 352 с.

51. Мерзляк А. Г. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2018. – 240 с.

52. Мерзляк А. Г. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Харків : Гімназія, 2019. – 204 с.

53. Мещеряков Б. Г. Большой психологический словарь / Б. Г. Мещеряков, В. П. Зинченко. – Санкт-Петербург : ПРАЙМ-ЕВРОЗНАК, 2003. – 632 с.

54. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин. – Москва : Издательство «Экзамен», 2009. – 286 с.

55. Мойсеєнко Л. А. Психологія творчого математичного мислення / Л. А. Мойсеєнко. – Івано-Франківськ : Факел, 2003. – 481 с.

56. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів (профільний рівень) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11%20klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx.

57. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 272 с.

58. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 240 с.

59. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с.

60. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 208 с.

61. Оакли Б. Думай как математик : Как решать любые задачи быстрее и эффективнее / Б. Оакли ; пер. с англ. – Москва : Альпина Паблишер, 2015. – 284 с.

62. Паламарчук В. Ф. Дидактические основы формирования мышления учащихся в процессе обучения : дис. … докт. пед. наук: 13.00.01. – Киев, 1984. – 327 с.

63. Пасічник І. Д. Мислення як предмет психології / І. Д. Пасічник // Наукові записки [Національного університету «Острозька академія»]. – 2013. – Вип. 25. – С. 3–9.

64. Пиаже Ж. Эволюция интеллекта в подростковом и юношеском возрасте / Ж. Пиаже // Психологическая наука и образование. – 1997. – №4. – С. 56–64.

65. Подгорецкая Н. А. Изучение приемов логического мышления у взрослых / Н. А. Подгорецкая. – Москва : Издательство Московского университета, 1980. – 150 с.

66. Пойа Дж. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Дж. Пойа. – Перевод с англ. В. Бермана. – Москва : Наука, 1976. – 449 с.

67. Попова Т. Г. О важности развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников / Т. Г. Попова // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – Санкт-Петербург, 2008. – №2. – С. 428–432.

68. Присяжнюк Т. А. Тісний зв'язок математики та інформатики: на яких уроках та в якому віці потрібно починати розвиток логічного мислення? / Т. А. Присяжнюк // Актуальні проблеми математики та методики її викладання: збірник наукових праць. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – С. 50–56.

69. Прус А. В. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник / А. В. Прус, В. О. Швець. – Житомир : Вид-во «Рута», 2016. – 468 с.

70. Реан А. А. Психология человека от рождения до смерти / А. А. Реан. – Санкт-Петербург: ПРАЙМ-ЕВРОЗНАК, 2002. – 656 с. – (Психологическая энциклопедия).

71. Розв'язування задач // Математика. – 2001. – №23–24. – С. 20–27.

72. Ромашина Е.Ю. Развитие мышления подростков в условиях современного информационного пространства: пилотное исследование / Е. Ю. Ромашина, И. И. Тетерин // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2015. – № 3. – С. 63–64.

73. Рычик М. В. От наглядных образцов к научным понятиям / М. В. Рычик. – Киев : Рад. школа, 1987. – 80 с.

74. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів / С. П. Семенець // Математика в рідній школі. – 2016. – №4 – С. 14–18.

75. Скафа О. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О. Скафа // Рідна школа. – 2003. – № 7. – С. 43–46.

76. Сластенин В. А. Педагогика : Учебное пособие / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; под ред. В. А. Сластенина. – Москва : Академия, 2014. – 608 с.

77. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике / З. И. Слепкань. – Киев : Радянська школа, 1983. – 192 с.

78. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

79. Спиридонов В. Ф. Психология мышления : Решение задач и проблем : Учебное пособие / В. Ф. Спиридонов. – Москва : Генезис, 2006. – 319 с. – (Учебник XXI века).

80. Столяр А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

81. Тарасенкова Н. А. Задачний підхід до професійно спрямованого навчання математики у профільній школі / Н. А. Тарасенкова, І. В. Лов'янова //

Вісник Черкаського університету : [№ 26 (359) : серія «Педагогічні науки»]. – Черкаси : вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького, 2015. – С. 3–11.

82. Терешин Д. А. Методическая система обучения геометрии в классах физико-математического профиля на основе задачного подхода : дисс. канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. А. Терешин. – Москва, 2014. – 190 с.

83. Философский энциклопедический словарь. – Москва : Советская энциклопедия, 1983. – 840 с.

84. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – Москва : Просвещение, 1989. – 192 с.

85. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике : Кн. для учащихся / Л. М Фридман. – Москва : Просещение, 1985. – 112 с.

86. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе : Учителю математики о педагогической психологии / Л. М. Фридман. – Москва : Просвещение, 1983. – 160 с.

87. Шаповаленко И. В. Возрастная психология (Психология развития и возрастная психология) / И. В. Шаповаленко. – Москва : Гардарики, 2005. – 349 с.

88. Эсаулов А. Ф. Психология решения задач / А. Ф. Эсаулов. – Москва : Высшая школа, 1972. – 216 с.

89. Ящик О. Б. Формування системно-логічного мислення старшокласників як міждисциплінарна проблема / О. Б. Ящик // Наукові записки ТНПУ ім. В. Гнатюка. – Тернопіль : ТНПУ, 2011. – № 5. – С. 137-145. – (Педагогіка).

ДОДАТКИ

Додаток А

Система задач з параметрами, спрямована на формування логічного мислення старшокласників

Розв'яжіть ірраціональні рівняння з параметром a	*Розв'яжіть ірраціональні нерівності з параметром a*
1. $\sqrt{x-a}=a$ 2. $2x+ax+\sqrt{x}=0$ 3. $x=\sqrt{x^2+2(a+1)x+4a}+a$ 4. $\frac{a-1}{\sqrt{x+1}}=1$ 5. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}=a}$ 6. $\sqrt{1+x+\sqrt{x}}+\sqrt{1+x-\sqrt{x}}=a$ 7. $\frac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{a+x}}$ 8. $\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$ 9. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=a$ 10. $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=2$	1. $(a+4)\sqrt{5-x}>a+3$ 2. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\geq a$ 3. $x+\sqrt{a-x}>0$ 4. $\sqrt{2x+a}\geq x$ 5. $x-\sqrt{4-x^2}<2ax$ 6. $\sqrt{2x^2+2x+1-a}\geq x+1$ 7. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}<a$ 8. $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}<\frac{a^4+1}{a^2}$ 9. $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\leq\sqrt{2}$ 10. $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{2a}<\sqrt[3]{x-a}$
Розв'яжіть тригонометричні рівняння з параметром a	*Розв'яжіть тригонометричні нерівності з параметром a*
1. $cos(3x+5)=a$ 2. $sin\|2x-2\|=a$ 3. $tg^2\,x=a(1-cos\,x)$ 4. $(a-4)\,sin^2\,x+sin\,x\cdot cos\,x+(a+1)\times$ $\times\,cos^2\,x=0$ 5. $(a-2)\,cos^2\,x+cos\,x\cdot sin\,x-(3-a)\times$ $\times\,sin^2\,x=0$ 6. $sin\,5x-cos\,5x=\sqrt{2}\,(a+4)$ 7. $cos^2(x+a)+cos^2(x-a)=sin\,2x$ 8. $sin\,x+cos(a+x)+cos(a-x)=2$	1. $sin\,x>2a$ 2. $sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq a$ 3. $2ctg(ax-3)\leq a$ 4. $arcsin(2x+1)<a$ 5. $sin\,x+a\,cos\,x<a$ 6. $a(2\,cos^2\,x-1)-6a\,sin\,x\cdot cos\,x+4-a>0$ 7. $sin^4\,x+cos^4\,x>a^2$ 8. $cos\,x+\frac{a(a+1)}{cos\,x-1}<\frac{2(a\,cos\,x+1)}{cos\,x-1}$

9. $-\sqrt{3}\sin 7x + \cos 7x = 5a - 3$ *10.* $\cos x \cdot ctg\, x - \sin x = a \cdot \cos 2x$	*9.* $a(\sin x - \cos x)^2 > \cos 2x$ *10.* $(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) =$ $= (18 - 12a + 2a^2) \cdot (1 + \sin x) - (a + 3)$
Розв'яжіть показникові і логарифмічні рівняння з параметром a	*Розв'яжіть показникові і логарифмічні нерівності з параметром* a
1. $25^x + a^2(a - 1) \cdot 5^x - a^5 = 0$ *2.* $\sqrt[x^2-1]{a^9} \cdot \sqrt[x+1]{\frac{1}{a^3}} = \sqrt[x-1]{a^2}$ *3.* $a^{2x}(a^{2x} + 1) = a(a^{3x} + a^x)$ *4.* $a^{2x-4} + 3a^{x-2} + 4\sqrt{a^{2x-4} + 3a^{x-2} - 6} = 18$ *5.* $\sqrt{a^{5x+2} + \sqrt{1 - a^{10x+4}}} +$ $+\sqrt{a^{5x+2} - \sqrt{1 - a^{10x+4}}} = 2$ *6.* $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$ *7.* $\big((a-2)x^2 + (2a-3)x + a - 1\big) \cdot \log_2 x = 0$ *8.* $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} \sqrt{a}$ *9.* $\sqrt{\log_2 ax + 1} = 1 - a$ *10.* $\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2 + a) = 4$	*1.* $2^x > a$ *2.* $a^{2x^2-x} < a^2$ *3.* $\frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}} - \frac{a^x}{a^x-1} < 0$ *4.* $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ *5.* $\sqrt{2 - a^{x-3}} < a^{x-3}$ *6.* $\log_{\frac{1}{2}} x > a$ *7.* $\log_a(1 - 16x^2) \geq 4$ *8.* $lg(a + x) + 3\,lg(a - x) > lg(a^2 - x^2) + 2$ *9.* $\frac{1+\log^2{}_a x}{1+\log_a x} > 1$ *10.* $\log_{\frac{1}{a}}\big(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\big) \cdot \log_5\big(x^2 + ax + 6\big) +$ $+ \log_a 3 \geq 0$

Додаток складено на основі [13, 30, 69].

Додаток Б

Збірка наочностей до теми «Комбінації круглих тіл і многогранників»

Рис. Б. 1. Титульний слайд навчальної презентації і QR-код з посиланням на GeoGebraBook «Комбінації круглих тіл і многогранників»

Рис. Б.2. Домашня самостійна робота «Комбінації тіл» в межах інтерактивної вправи, розробленої за допомогою сервісу LearningApps.org

Рис. Б. 3. QR-код з посиланням

на інтерактивну вправу

Слайди презентації

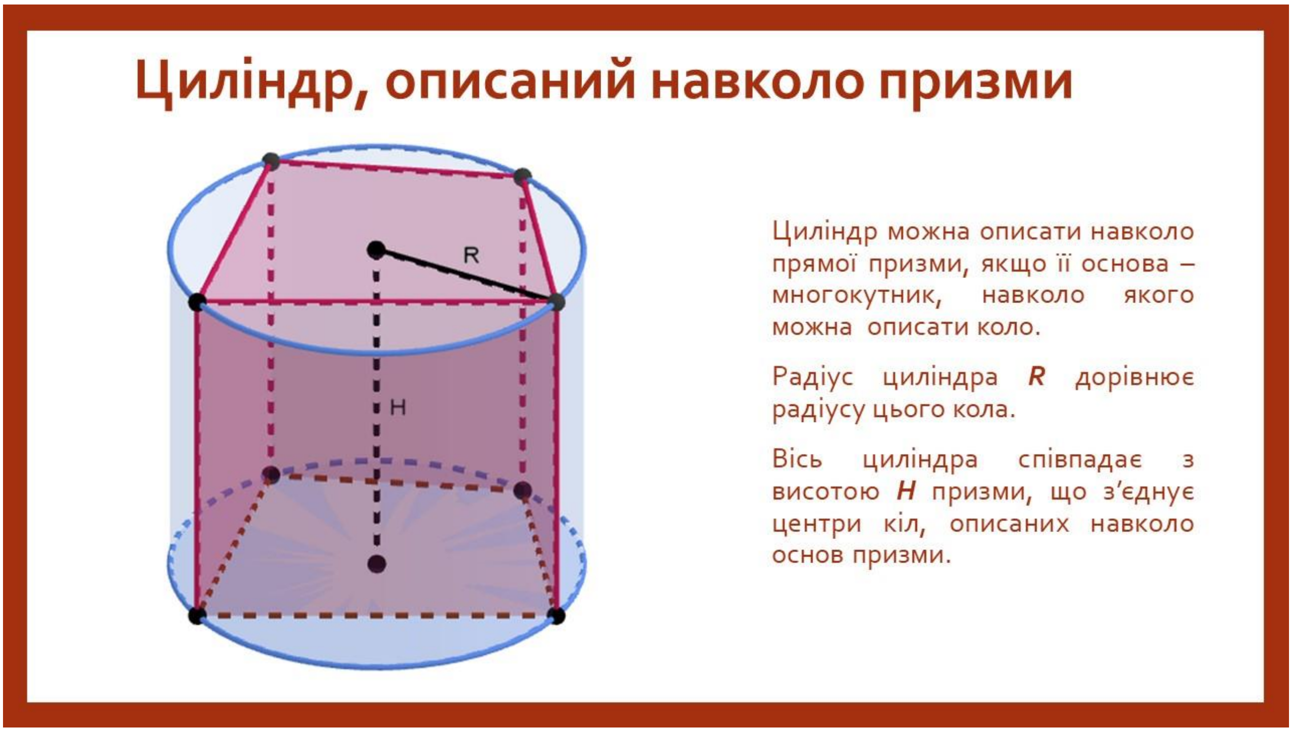


Рис. Б. 4

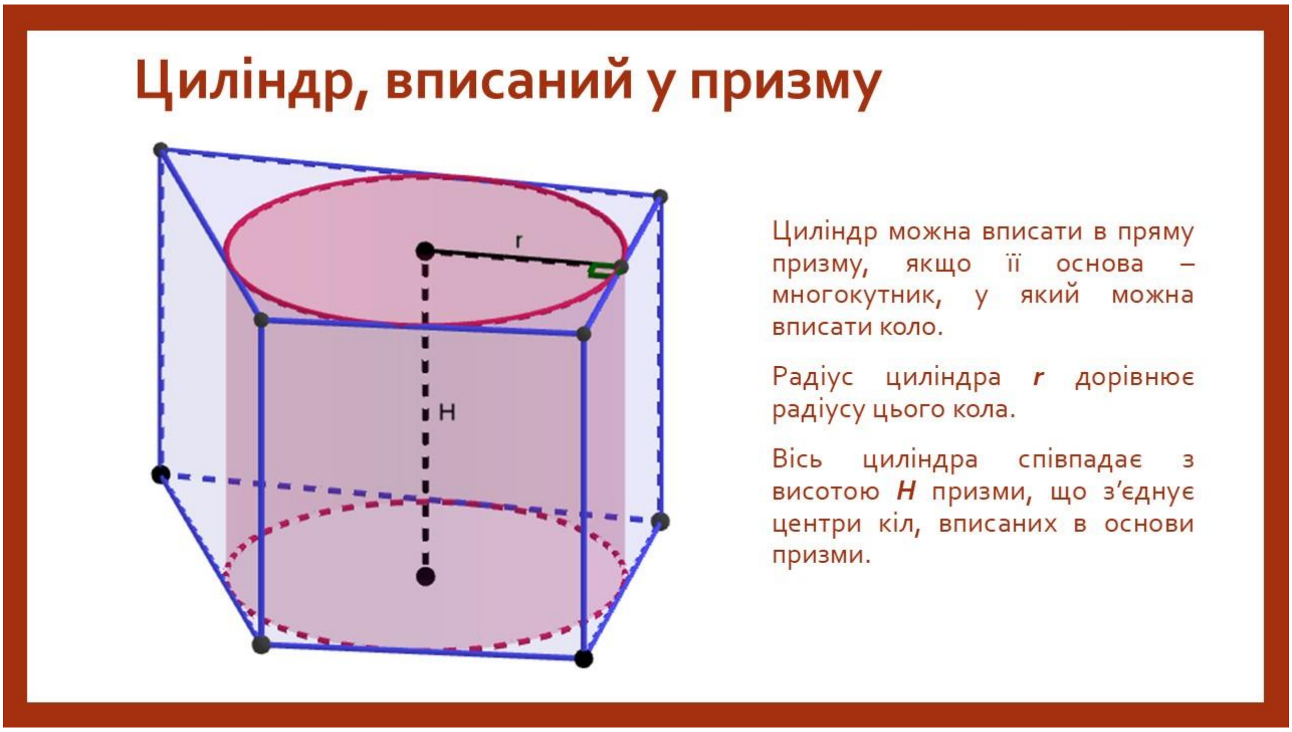


Рис. Б. 5


Конус, описаний навколо піраміди
Конус можна описати навколо піраміди, якщо її основа – многокутник, навколо якого можна описати коло, а вершина піраміди проектується в центр цього кола.
Радіус конуса *R* дорівнює радіусу цього кола; висоти конуса і піраміди співпадають.
H
R

Рис. Б. 6

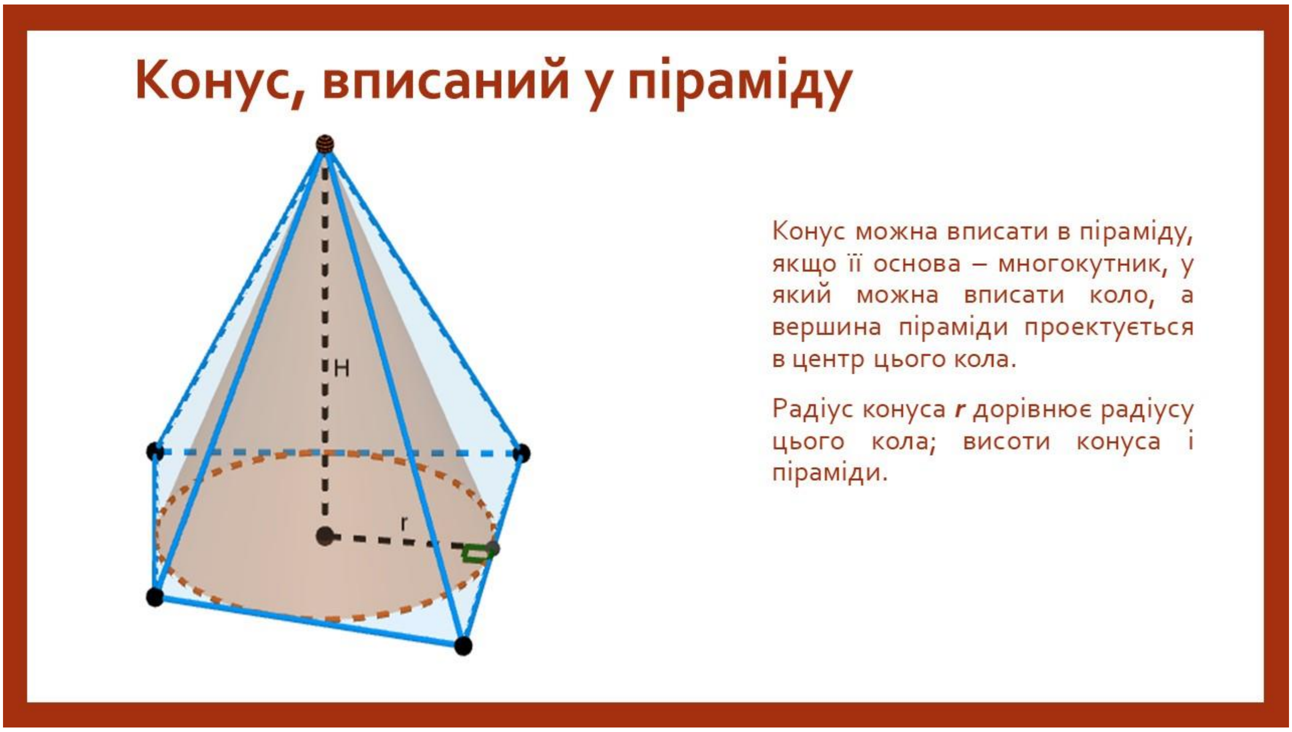

Конус, вписаний у піраміду
Конус можна вписати в піраміду, якщо її основа – многокутник, у який можна вписати коло, а вершина піраміди проектується в центр цього кола.
Радіус конуса *r* дорівнює радіусу цього кола; висоти конуса і піраміди.
H
r

Рис. Б.7

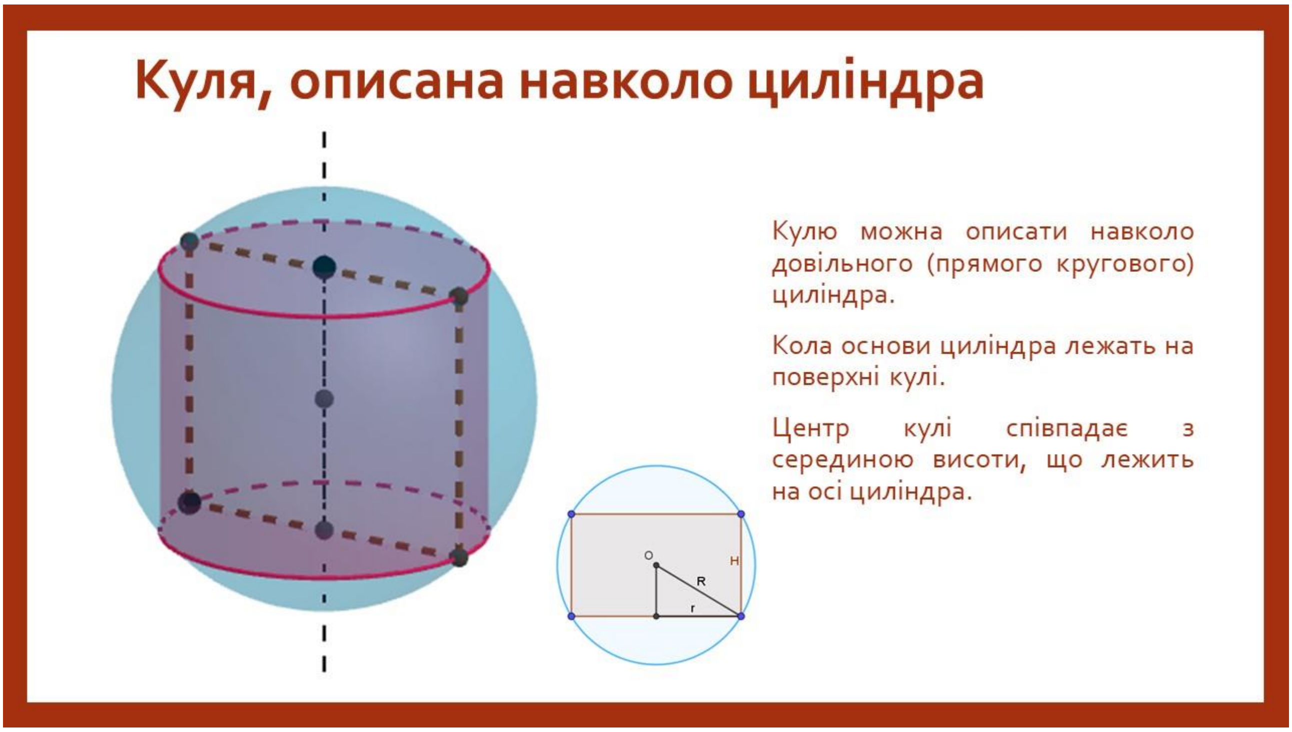

Куля, описана навколо циліндра
Кулю можна описати навколо довільного (прямого кругового) циліндра.
Кола основи циліндра лежать на поверхні кулі.
Центр кулі співпадає з серединою висоти, що лежить на осі циліндра.
O
R
r
H

Рис. Б. 8

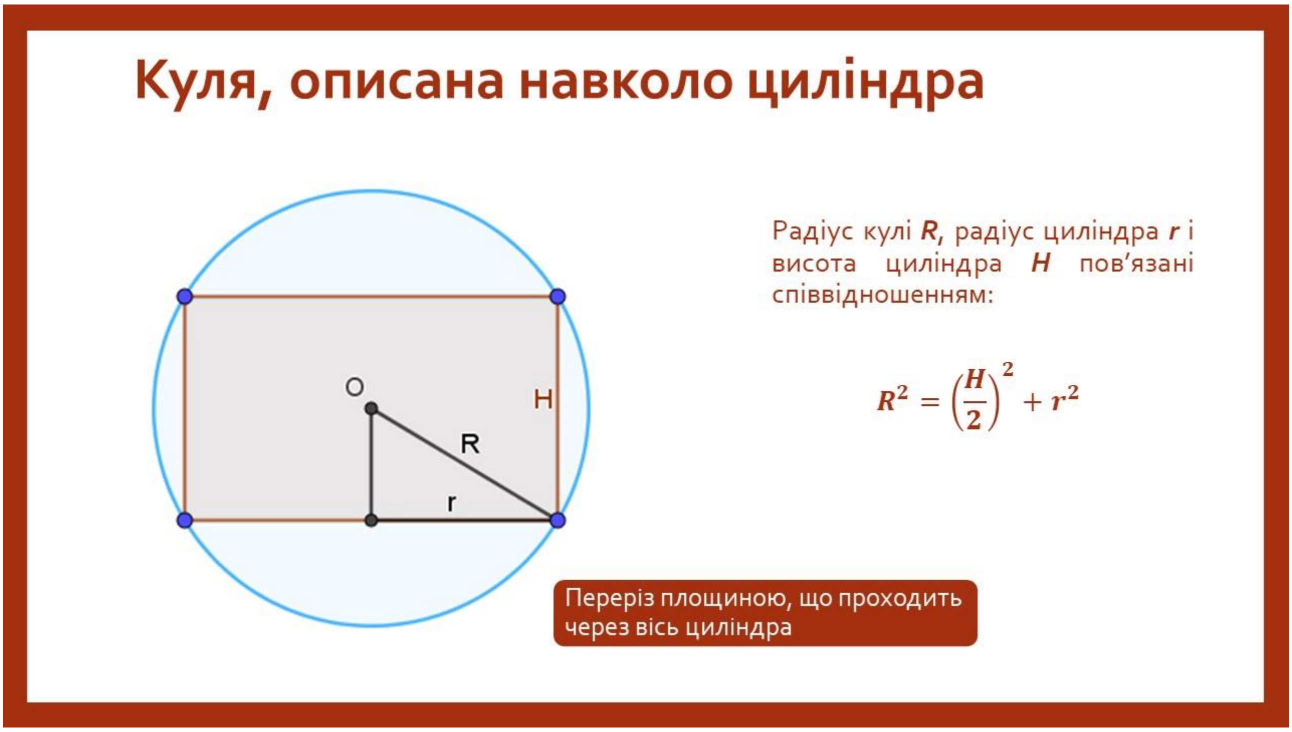

Куля, описана навколо циліндра
Радіус кулі R, радіус циліндра r і висота циліндра H пов'язані співвідношенням:
$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$
O
H
R
r
Переріз площиною, що проходить через вісь циліндра

Рис. Б. 9

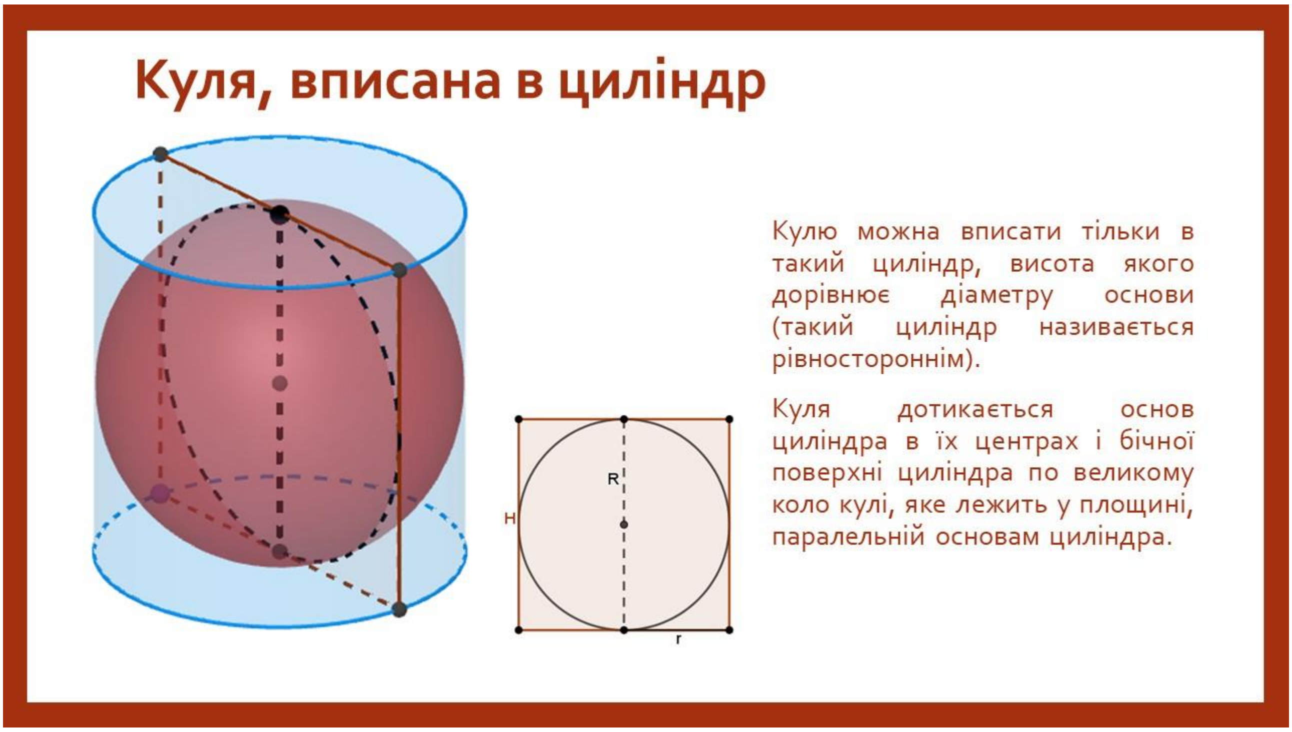


Рис. Б. 10

Рис. Б. 11

Рис. Б. 12

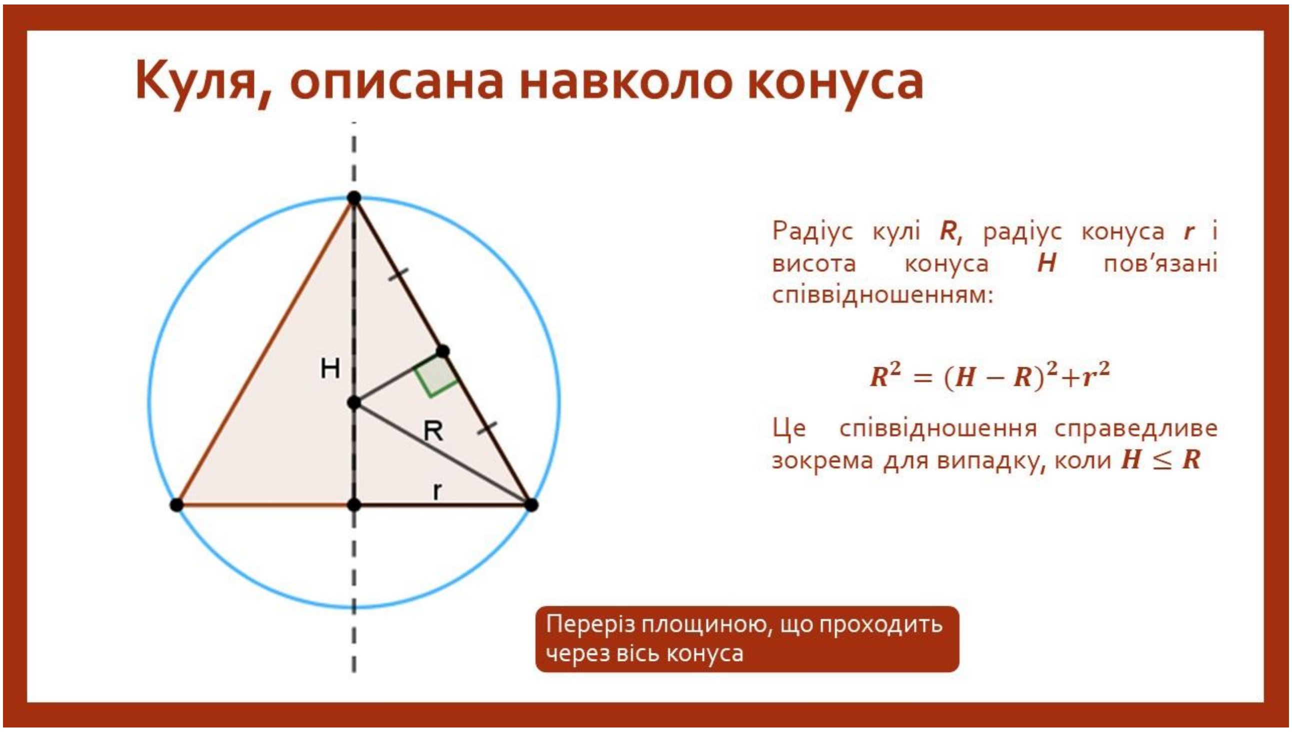


Рис. Б. 13

Рис. Б. 14

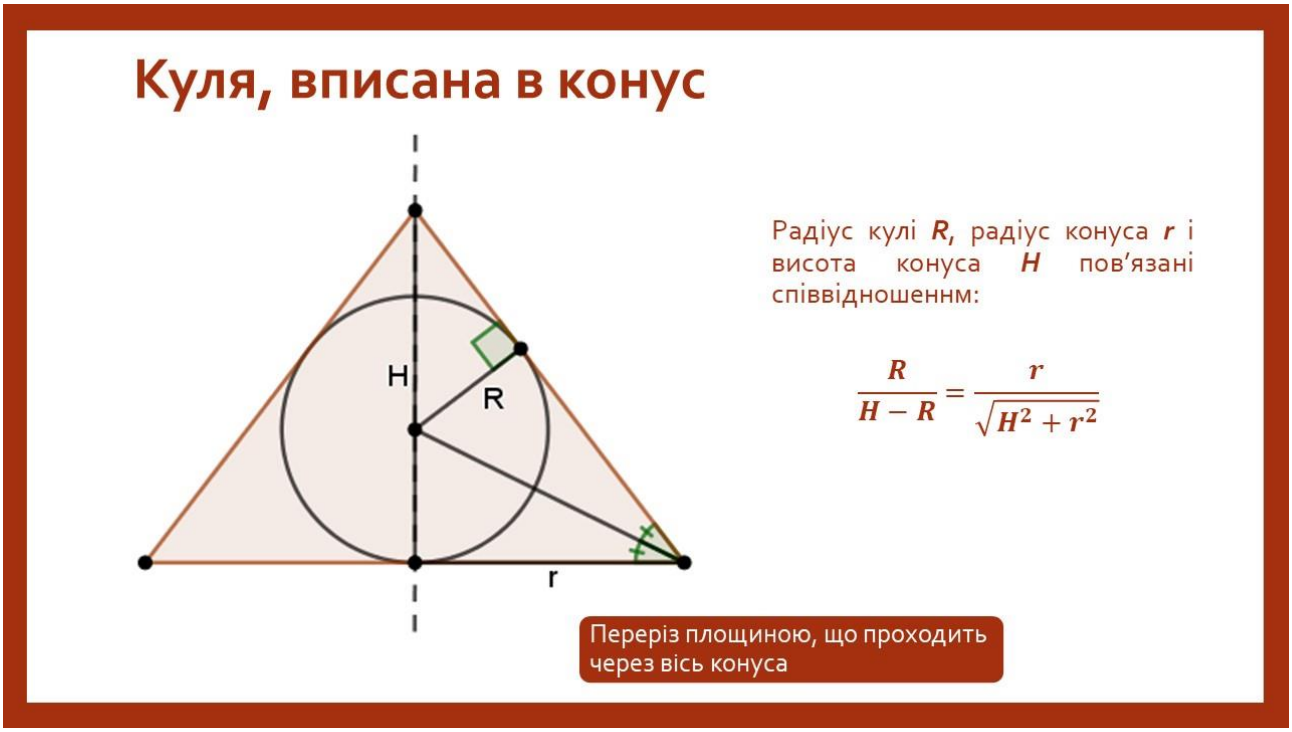


Рис. Б. 15

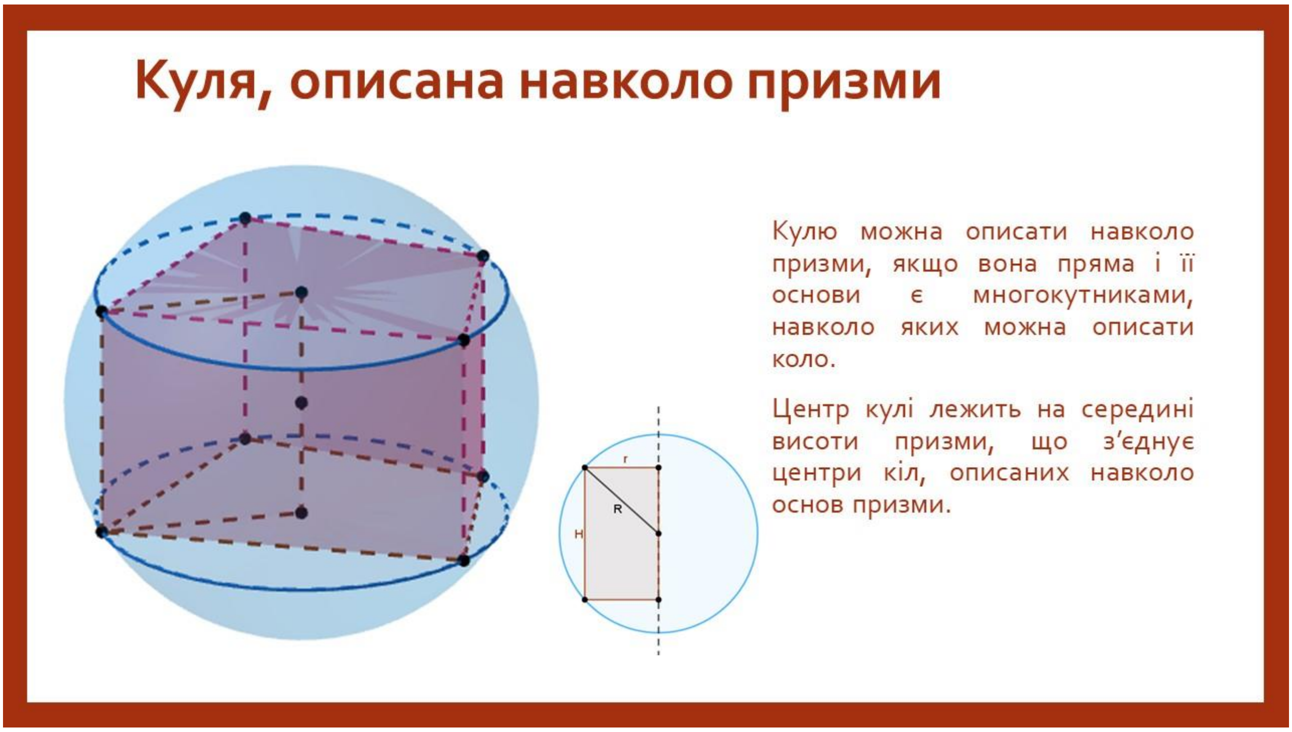


Рис. Б. 16

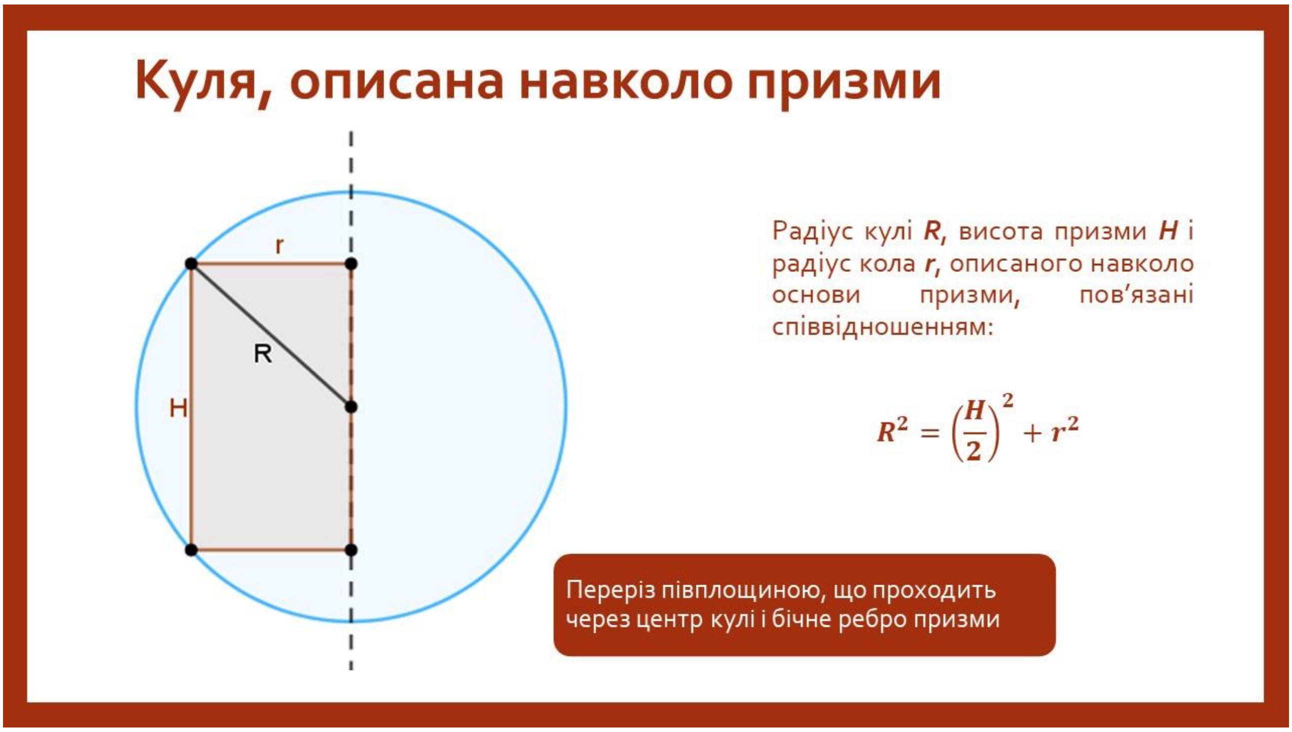


Рис. Б. 17

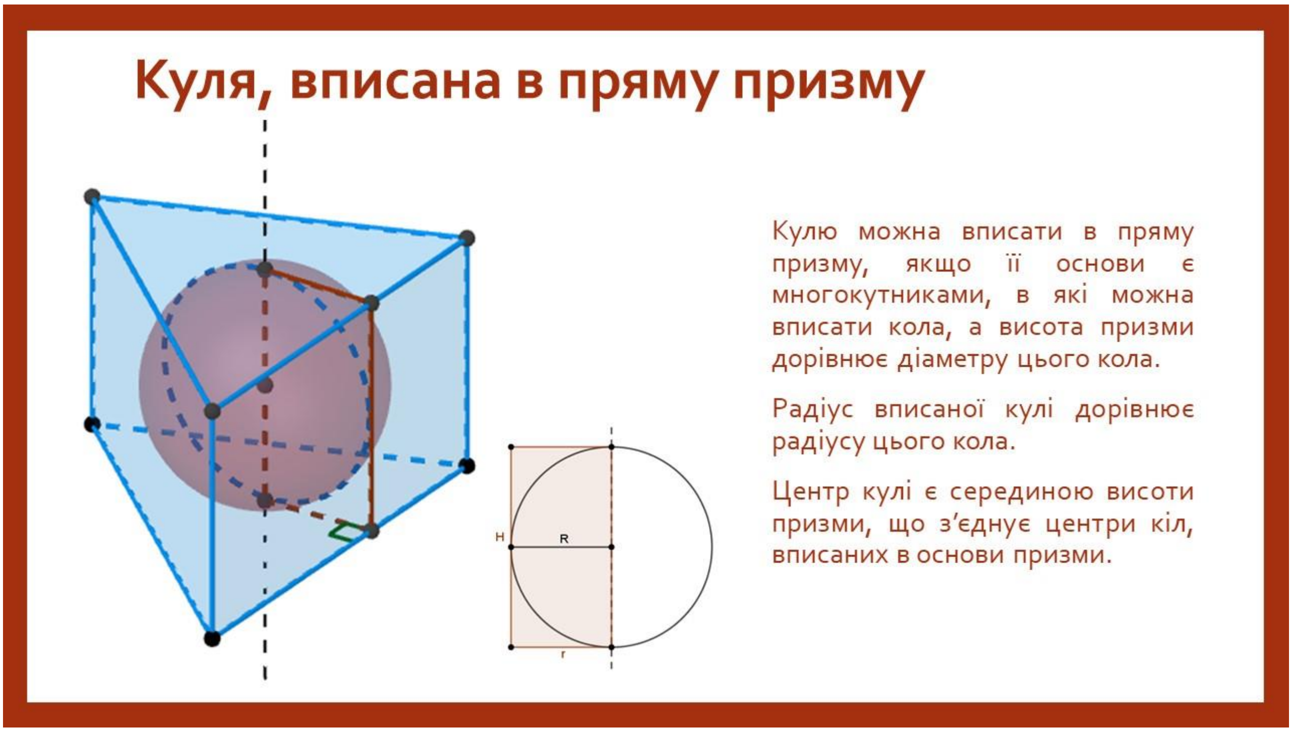


Рис. Б. 18

Рис. Б. 19

Рис. Б. 20

Рис. Б. 21

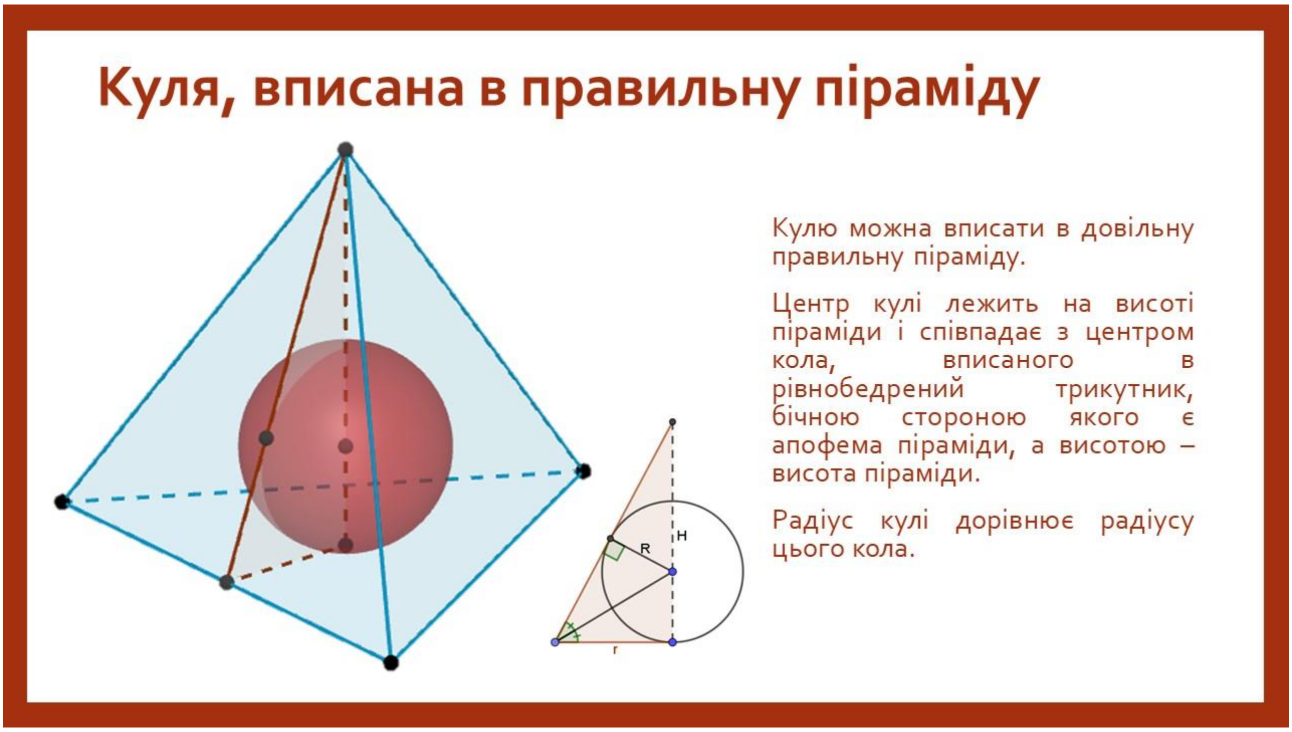

Куля, вписана в правильну піраміду
Кулю можна вписати в довільну правильну піраміду.
Центр кулі лежить на висоті піраміди і співпадає з центром кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, бічною стороною якого є апофема піраміди, а висотою – висота піраміди.
Радіус кулі дорівнює радіусу цього кола.
R
H
r

Рис. Б. 22

Додаток В

Правила побудови рисунків до задач з теми «Комбінації тіл»

Зображення просторових фігур є найважливішим для розвитку просторової уяви і просторового мислення. Розв’язання стереометричної задачі починається з виконання рисунка, оскільки без нього складно або зовсім неможливо засвоїти умову задачі, проаналізувати та розв’язати її.

Будь-яку складну задачу можна розчленити на ряд елементарних. При цьому виявляється, що складна побудова складається із обмеженої кількості елементарних побудов. Вміння зображувати на рисунку елементарні побудови дає можливість розв’язувати складніші задачі. Тому важливо вміти будувати окремі елементи просторових фігур в різних проекціях та обґрунтовувати ці побудови.

Найчастіше при виконанні зображень комбінацій тіл побудову починають з зображення круглого тіла. Всі лінії проводять тонкою лінією. По завершенні побудови рисунка видимі лінії тіл обводять жирною кольоровою лінією, а невидимі пунктирною жирною лінією.

Правильна піраміда, вписана в конус

- ✓ Побудувати зображення конуса.
- ✓ Вписати в основу конуса основу правильної піраміди - правильний многокутник.
- ✓ Сполучити вершину конуса з вершинами основи піраміди.

Конус, вписаний в правильну піраміду

- ✓ Побудувати зображення конуса.
- ✓ Навколо основи конуса описати основу піраміди – правильний многокутник.
- ✓ Сполучити вершину конуса з вершинами основи піраміди.

Правильна призма, вписана в циліндр

- ✓ Побудувати зображення циліндра.
- ✓ В верхню основу циліндра вписати основу призми – правильний многокутник.

- ✓ Через вершини побудованого многокутника провести твірні циліндра.
- ✓ Послідовно сполучити кінці твірних.

<u>Циліндр, вписаний в правильну призму</u>

- ✓ Побудувати зображення циліндра.
- ✓ Навколо верхньої основи циліндра описати основу призми – правильний многокутник.
- ✓ Навколо нижньої основи описати многокутник, сторони якого відповідно паралельні сторонам верхньої основи призми.
- ✓ Побудувати бічні ребра призми, сполучивши відповідні вершини її основ.

<u>Конус, вписаний в кулю</u>

- ✓ Побудувати зображення кулі.
- ✓ За допомогою люмографа побудувати малий круг кулі, для більшої наочності краще паралельно горизонтальному великому кругу.
- ✓ З полюса кулі провести дотичні до еліпса, який є зображенням малого кругу кулі.

<u>Піраміда, вписана в кулю</u>

- ✓ Побудувати зображення кулі.
- ✓ За допомогою люмографа побудувати малий круг кулі, для більшої наочності краще паралельно горизонтальному великому кругу. Цим самим визначити площину основи вписаної піраміди.
- ✓ Вписати в побудований еліпс зображення основи піраміди – деякий опуклий многокутник.
- ✓ З'єднати полюс кулі з вершинами основи піраміди.

<u>Циліндр, вписаний в кулю</u>

- ✓ Побудувати зображення кулі.
- ✓ За допомогою люмографа побудувати два рівні малі круги кулі, для більшої наочності краще паралельно горизонтальному великому кругу.
- ✓ Побудувати твірні циліндра.

Призма, вписана в кулю

- ✓ Побудувати зображення кулі.
- ✓ За допомогою люмографа побудувати два рівні малі круги кулі, для більшої наочності краще паралельно горизонтальному великому кругу.
- ✓ В побудовані еліпси вписати зображення основ призми.
- ✓ Побудувати бічні ребра призми, сполучивши відповідні вершини її основ.

Куля, вписана в циліндр

- ✓ Побудувати зображення рівностороннього циліндра (висота циліндра дорівнює діаметру його основи).
- ✓ Побудувати осьовий переріз циліндра площиною, паралельною до площини зошита.
- ✓ Вписати в осьовий переріз (квадрат) коло за відомим алгоритмом.
- ✓ Доповнити зображення кулі, побудувавши її великий круг (еліпс, рівний еліпсам, що є зображеннями основ циліндра).

Куля, вписана в конус

- ✓ Побудувати зображення конуса.
- ✓ Побудувати осьовий переріз конуса площиною, паралельною до площини зошита.
- ✓ Вписати в осьовий переріз (рівнобедрений трикутник) коло за відомим алгоритмом.
- ✓ Доповнити зображення кулі, побудувавши її великий круг (еліпс, подібний до еліпса, що є зображенням основи конуса).

Куля, вписана в пряму призму

- ✓ Побудувати зображення призми.
- ✓ Визначити положення центрів кіл, вписаних в многокутники, що є зображеннями основ призми, і сполучити їх відрізком. Цей відрізок – висота призми, яка дорівнює її бічному ребру.
- ✓ Побудувати на побудованій висоті як на діаметрі коло.
- ✓ Доповнити зображення кулі, побудувавши її великий круг.

<u>Куля, вписана в правильну піраміду</u>

- ✓ Побудувати зображення піраміди та її висоти (h).
- ✓ Побудувати лінійний кут двогранного кута при основі піраміди, а також орієнтовне зображення бісектриси цього кута (l).
- ✓ Визначити точку O перетину h та l. Побудувати коло з центром в точці O радіуса, рівного відстані від O до основи висоти піраміди.
- ✓ Доповнити зображення кулі, побудувавши її великий круг.

Додаток складено на основі [12].

Додаток Г

Система стереометричних задач, спрямована на формування логічного мислення старшокласників

1. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з бічною гранню кут β, а діагональ її бічної грані дорівнює d. Визначити площу повної поверхні призми.

2. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і висотою h, проведеною до цієї основи. Площина, що проходить через вершину кута α верхньої основи призми і протилежну бічну сторону нижньої основи, утворює з основою призми кут β. Визначити площу бічної поверхні призми.

3. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція, менша діагональ якої є бісектрисою тупого кута величини β. Менша діагональ призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Визначити об’єм призми.

4. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β. Визначити об’єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічної грані дорівнює q.

5. В основі піраміди лежить трикутник зі стороною c і прилеглими кутами α і β. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Точка висоти піраміди, що знаходиться на відстані m від площини основи, рівновіддалена від кінців бічного ребра. Визначити об’єм піраміди.

6. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Довжина бісектриси трикутника, проведеної з вершини даного кута, дорівнює b. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Визначити об’єм піраміди.

7. В основі піраміди лежить правильний трикутник з радіусом вписаного кола r. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Деяка точка висоти піраміди рівновіддалена від її вершини і сторони основи, що належить третій бічній грані. З даної точки до середини цієї сторони проведено відрізок, який утворює з площиною основи кут α. Визначити об’єм піраміди.

8. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Відстань від центра кола, вписаного в трикутник, до протилежної основі вершини дорівнює b. Бічна грань піраміди, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом β. Визначити об'єм піраміди.

9. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β. Довжина хорди дорівнює a. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом α. Визначити площу повної поверхні циліндра.

10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β. З центра іншої основи цю хорду видно під кутом α. Визначити об'єм циліндра.

11. Через вершину конуса під кутом β до площини основи проведено січну площину, що перетинає основу конуса по хорді, яку з центра основи видно під кутом α. Точка висоти конуса, що знаходиться на відстані b від площини основи конуса, рівновідалена від його вершини і згаданої хорди. Визначити площу утвореного перерізу.

12. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено січну площину, що перетинає основу по хорді, яку з вершини конуса видно під кутом β. Точка висоти конуса, що знаходиться на відстані b від площини основи, рівновідалена від кінців твірної. Визначити площу утвореного перерізу.

Додаток складено на основі [19].

Додаток Д

Про сервіс Kahoot.com

Альтернативою фронтальному опитуванню може бути проведення інтерактивного тесту-вікторини, розробленого за допомогою безкоштовного онлайн-сервісу Kahoot.com.

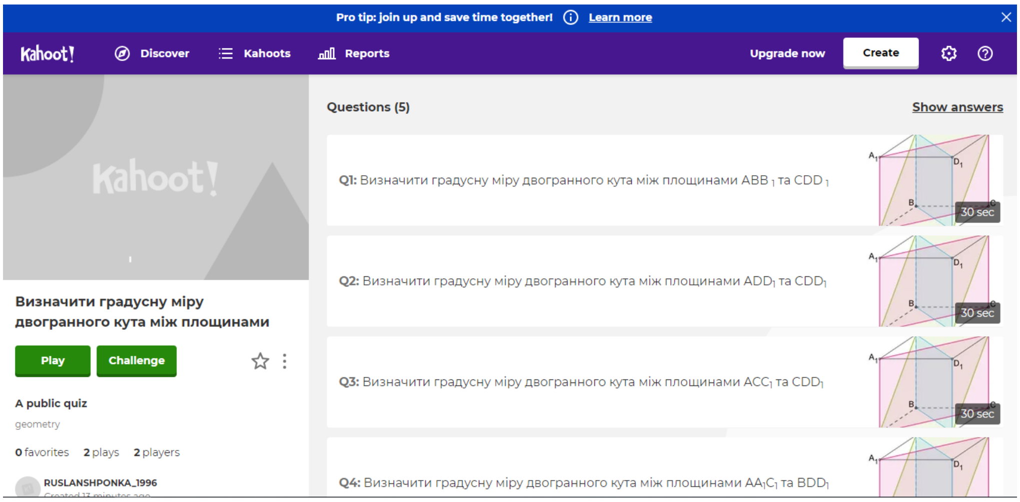


Рис. Д.1. Інтерфейс Kahoot

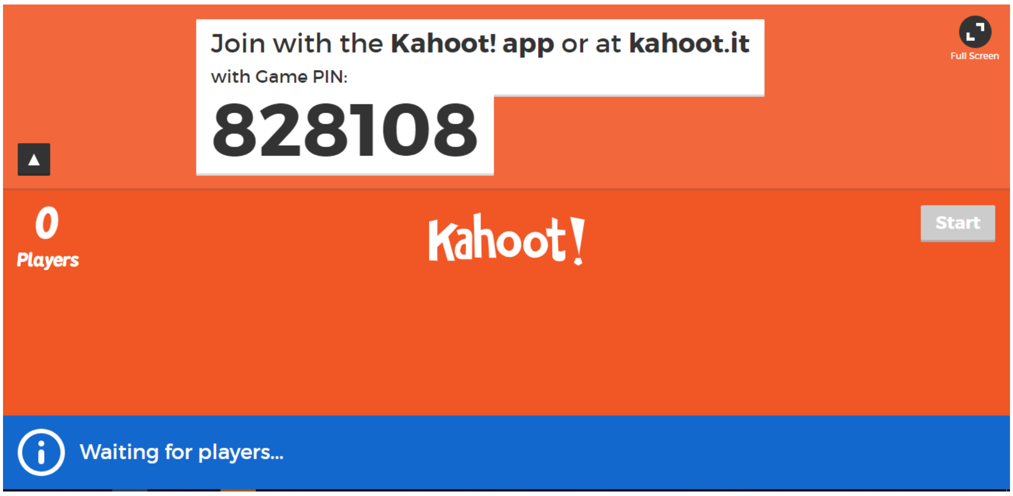


Рис. Д.2. Очікування нових учасників гри

Для участі у вікторині учні на мобільних пристроях переходять за посиланням https://kahoot.it/ на сторінку з полем для введення пін-коду гри, який повідомляє вчитель. Наприкінці вікторини автоматично визначаються переможці – учасники гри, що дали найбільше правильних відповідей.

Умова завдань демонструється на дошці чи екрані комп'ютера вчителя, а телефони учні використовують в якості «пультів для голосування».

Рис. Д. 3. Зразок запитання вікторини

Зміст питань гри може бути самим різноманітним. Наприклад, завдання за готовими рисунками, усні вправи, вправи на відтворення етапів доведення теорем і т. д. Гру можна проводити в межах класу, групи класу чи в парах.

Рис. Д.4. QR-код для перегляду тесту «Двогранний кут»