МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

К. В. Польгун

Диференціальне числення функції однієї змінної (компетентнісний підхід)

Навчальний посібник

Кривий Ріг

2019

УДК 517(075.8)
П 54

Польгун К. В. Диференціальне числення функції однієї змінної (компетентнісний підхід) : навч. посіб. Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2019. 112 с.

Рецензенти:

Вакалюк Т. А. доктор педагогічних наук, доцент, професор кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка»;

Бобилєв Д. Є. кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету;

Армаш Т. С. кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету.

Затверджено Вченою радою Криворізького державного педагогічного університету (протокол № 5 від 21 листопада 2019 року).

Подано короткі теоретичні відомості з розділу математичного аналізу «Диференціальне числення функції однієї змінної». Наведено приклади розв'язування типових практичних завдань. Розроблено завдання для проведення практичних занять, а також завдання для індивідуальної роботи студентів.

Посібник призначено для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр спеціальності 014.09 «Середня освіта (Інформатика)», викладачів.

ЗМІСТ

ВСТУП

«Диференціальне числення функції однієї змінної» є розділом математичного аналізу. Вивчення дисципліни «Математичний аналіз» здобувачами ступеня вищої освіти бакалавр за спеціальністю 014.09 «Середня освіта (Інформатика)» передбачено на першому та другому курсах (у 2-3 семестрах).

Метою викладання навчальної дисципліни є оволодіння студентами основами, методикою та особливостями застосування сучасного апарату математичного аналізу в професійній і практичній діяльності.

Завдання викладання дисципліни «Математичний аналіз» полягають у формуванні в студентів цілісної системи знань щодо сучасної теорії функцій дійсної змінної, зокрема, диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної, теорії рядів, елементів функціонального аналізу; навчанні студентів ефективно застосовувати апарат сучасного математичного аналізу до розв'язування прикладних науково-технічних задач.

Під час формування математичної компетентності студентів слід пам'ятати, що вивчення студентами вказаної спеціальності математичних дисциплін має, перш за все, прикладний характер. Водночас варто забезпечити дотримання принципу фундаментальності навчання, збереження логічності та системності викладення матеріалу.

Посібник містить:

– короткі теоретичні відомості щодо границі числової послідовності, границі функції неперервного аргументу, неперервності функції, похідної та її застосування;
– завдання для самоконтролю (після кожного пункту);
– завдання для практичних занять;
– завдання для індивідуальної роботи студентів (36 завдань по 15 варіантів).

Частина теоретичного матеріалу (задля полегшення його сприйняття) подана у вигляді таблиць, які містять визначення понять, формули, зауваження, рисунки, приклади розв'язування типових задач. Така форма подання передбачає узагальнення й систематизацію знань студентів, встановлення змістових зв'язків між окремими блоками тощо.

Засвоєнню навчальних відомостей сприяє колірне оформлення текстового матеріалу. Означення виокремлено блакитним кольором з позначкою «Df» (від лат. «definitio») збоку, теореми взято в червоні рамки, приклади – подано на сірому тлі. Таке колірне розмежування дає можливість студентам швидко орієнтуватися в тексті, відділяти основні факти від додаткових, краще усвідомити сутність того чи того твердження.

Пропонований навчальний посібник має електронний аналог, поданий в електронному навчальному курсі (ЕНК) «Математичний аналіз» (https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=268) в Системі управління електронними навчальними курсами Криворізького державного педагогічного університету. ЕНК має зручну навігацію, що дає можливість легко переходити від однієї частини посібника до іншої.

Паперовий варіант посібника містить короткі теоретичні відомості і не передбачає доведення теорем. Водночас у межах відповідного електронного аналогу кожна теорема має гіперпосилання на її доведення. З доведенням студент може ознайомитися самостійно або його можна розглянути під час аудиторного заняття з використанням проектора (смарт-дошки) й мережі Інтернет. Наявність тексту доведення на екрані сприяє економії часу на занятті, дає можливість уникнути конспектування, водночас – зосередити увагу на найбільш складних моментах, детально описати лише окремі пункти. Елемент «Завіса», передбачений програмним забезпеченням смарт-дошки, дає змогу показувати студентам доведення теореми поступово, встановлюючи логічні зв’язки між його кроками.

Значну частину завдань для індивідуальної роботи студентів у межах ЕНК подано у вигляді завдань з автоматизованою перевіркою. Іншими словами, студент, виконавши завдання, одразу бачить свій результат, що забезпечує миттєвий зворотній зв’язок між викладачем і студентом. Означені завдання можна використовувати як з контролюючою, так і з навчальною метою.

Отже, робота з пропонованим навчальним посібником, а також його електронним аналогом сприятиме розвитку математичної компетентності студентів, зокрема засвоєнню теоретичних знань та формуванню готовності до їх практичного застосування.

ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Диференціальне числення (л. - 18 год., пр. – 18 год.)

1.1. Границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі числові послідовності
1.2. Основні теореми теорії границь числової послідовності. Існування границі монотонної числової послідовності. Невизначені вирази
1.3. Границя функції в точці. Властивості функцій, що мають границю в точці. Границя функції на нескінченності. Невласні границі. Правостороння й лівостороння границі функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції
1.4. Основні теореми про границі (для функцій неперервного аргументу). Порівняння нескінченно малих величин. Перша та друга важливі границі. Неперервність функції в точці. Класифікація точок розриву
1.5. Похідна. Механічний та геометричний зміст похідної. Зв'язок між неперервністю функції та її диференційовністю. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції
1.6. Похідна суми, добутку, частки. Похідна від складеної функції. Похідна від степенево-показникової функції. Диференціал функції. Похідна від функції, заданої параметрично. Похідна від функції, заданої неявно
1.7. Теореми про середнє значення диференціального числення. Застосування похідних до розкриття невизначеностей (правило Лопіталя). Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора
1.8. Зростання й спадання функції. Екстремальні точки. Найбільше й найменше значення функції. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину
1.9. Асимптоти кривих. Дослідження функції та побудова її графіка

Модуль 2. Інтегральне числення (л. - 18 год., пр. – 18 год.)

2.1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів
2.2. Метод підстановки. Інтегрування частинами
2.3. Інтегрування раціональних та деяких простіших ірраціональних функцій
2.4. Інтеграл від біномного диференціала. Підстановки Ейлера. Інтегрування тригонометричних функцій

2.5. Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла

2.6. Тереми про середнє значення визначеного інтеграла. Похідна визначеного інтеграла за верхньою змінною межею. Формула Ньютона-Лейбніца

2.7. Методи обчислення визначеного інтеграла

Модуль 3. Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтегралу до розв'язування задач (л. - 8 год., пр. – 12 год.)

3.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами

3.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

3.3. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площ плоских областей

3.4. Довжина дуги кривої. Диференціал дуги кривої

3.5. Об'єм тіла обертання. Площа поверхні обертання

Модуль 4. Числові та функціональні ряди (л. - 10 год., пр. – 24 год.)

4.1. Додатні числові ряди. Ознаки збіжності

4.2. Знакозмінні числові ряди

4.3. Функціональні послідовності і ряди

4.4. Степеневі ряди. Ряд Тейлора

4.5. Тригонометричні ряди Фур'є

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Поняття числової послідовності. Границя числової послідовності

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел $\mathbb{N}$. Таку функцію називають послідовністю.

Df

Числова послідовність – це функція натурального аргументу.

Записують:

$$y_n = f(n)$$

або

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots,$$

або

$$\{y_n\},$$

при цьому $n \in \mathbb{N}$.

Числа $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ називають **членами послідовності**, відповідно першим, другим і т. д.; y_n – називають n-м, або загальним, членом послідовності.

Числова послідовність вважається заданою, якщо вказано закон або правило, за яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність одне дійсне число y_n.

Приклад

1. За відомим загальним членом запишемо п'ять перших членів послідовності:

а) $y_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$;

$$y_1 = \frac{1^2 - 1}{1} = 0;$$

$$y_2 = \frac{2^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2};$$

$$y_3 = \frac{3^2 - 1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};$$

$$y_4 = \frac{4^2 - 1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4};$$

$$y_5 = \frac{5^2 - 1}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}.$$

б) $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$: $-1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{5}, \dots$

в) $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $1;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$

2. За кількома заданими членами послідовності знайдемо її загальний член:

а) $1; 3; 9; 27, \ldots$

$$y_n = 3^{n-1}.$$

б) $0; 1; 0; 1, \ldots$

$$y_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

в) $\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{17}; \ldots$

$$y_n = \frac{1}{2^n + 1}.$$

Монотонні послідовності

Назва поняття	Означення поняття	Приклад
Зростаюча послідовність	Послідовність $\{y_n\}$ називають **зростаючою**, якщо кожний її наступний член більший за попередній, тобто $y_{n+1} > y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.	$\{n^2\}$: $1, 4, 9, 16, \ldots$
Неспадна послідовність	Послідовність $\{y_n\}$ називають **неспадною**, якщо кожний її наступний член не менший за попередній, тобто $y_{n+1} \geq y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.	$\{E(\sqrt{n})\}$: $1, 1, 1, 2, 2, \ldots$, де E – функція антьє
Спадна послідовність	Послідовність $\{y_n\}$ називають **спадною**, якщо кожний її наступний член менший за попередній, тобто $y_{n+1} < y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.	$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$
Незростаюча послідовність	Послідовність $\{y_n\}$ називають **незростаючою**, якщо кожний її наступний член не більший за попередній, тобто $y_{n+1} \leq y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.	$\left\{\dfrac{1}{E(\sqrt{n})}\right\}$: $1, 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \ldots$

Арифметичні операції над числовими послідовностями

Назва операції	Символічний запис дій над послідовностями
Додавання	$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$
Віднімання	$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$
Множення	$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$
Ділення	$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \{y_n\} \neq \{0\}$

Df Числову послідовність $\{y_n\}$ називають **обмеженою**, якщо існує дійсне число $M > 0$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|y_n| < M$. В іншому разі послідовність називається **необмеженою**.

Приклад

1. Нехай $y_n = \frac{n}{2n+1}$. Тоді $|y_n| = \frac{n}{2n+1} < 1$. Отже, задана послідовність є обмеженою.
2. Нехай $y_n = n^2$. Тоді $|y_n| = n^2$. Яке б не було число M, завжди знайдеться таке натуральне число n_0, що $|y_{n_0}| > M$. Отже, задана послідовність є необмеженою.

Зауваження. Обмежена послідовність не обов’язково є монотонною, і навпаки, не будь-яка монотонна послідовність є обмеженою.

Приклад

1. $\{(-1)^n\}$ – послідовність обмежена, але не монотонна.
2. $\{n\}$ – послідовність монотонна, але необмежена.
3. $\{(-1)^n n\}$ – послідовність необмежена, немонотонна.
4. $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ – послідовність обмежена, монотонна.

Границя числової послідовності

Розглянемо послідовність $\{y_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots$. При цьому кожен наступний член послідовності на числовій прямій буде ближчим до числа 1.

Іншими словами, значення виразу $|y_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо:

$$|y_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Задамо довільне додатне число ε. Покажемо, що знайдеться такий номер N, що для всіх y_n, в яких $n > N$, виконується нерівність

$$|y_n - 1| < \varepsilon \quad \text{або} \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Розв'язавши нерівність, маємо:

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

За число N можна взяти число $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, якщо воно ціле, або $E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ – цілу частину від числа $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Число N залежить від ε, тому кажуть, що N є функцією від ε, і позначають $N = N(\varepsilon)$. Очевидно, чим менше ε, тим більшим має бути N. Наведемо в таблиці кілька прикладів залежності N від ε.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
N	9	99	999	9999	99999

Отже, зі збільшенням номера n члени послідовності $\{y_n\}$ прямують до числа 1. Тоді говорять, що число 1 є границею послідовності $\{y_n\}$.

Df

Перше означення границі числової послідовності

Число a називають **границею послідовності** $\{y_n\}$, якщо для довільного додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon\,.$$

Записують:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Геометрична інтерпретація означення границі послідовності

З нерівності $|y_n - a| < \varepsilon$ маємо:

$$-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon,$$
$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Отже, якщо число a є границею числової послідовності $\{y_n\}$, то для довільного додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що всі члени послідовності з номерами $n > N$ потрапляють в інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, або в окіл точки a радіуса ε (ε-окіл точки a) (рис. 1). Поза довільним ε-околом точки a може бути розміщене тільки скінченне число членів послідовності.

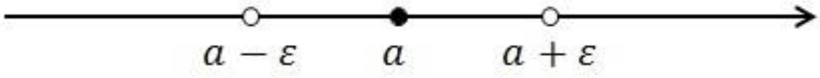


Рис. 1

Справедливе й обернене твердження: якщо, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, члени послідовності $\{y_n\}$ знаходяться в довільному ε-околі точки a, то число a є границею цієї послідовності.

Приклад

Довести, що границею послідовності $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ є число 1.

Розв'язання

Задамо довільне додатне число ε. Розглянемо нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

За N приймемо $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ – цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Отже, для довільного додатного числа ε існує число N, залежне від ε $\left(N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$, таке, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$. За означенням,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Деякі властивості збіжних числових послідовностей

Df Числову послідовність називають **збіжною**, якщо вона має границю, **розбіжною** – якщо вона не має границі.

Теорема 1.1. Якщо послідовність має границю, то лише одну.

Теорема 1.2. Якщо послідовність має границю, то ця послідовність обмежена.

Зауваження. Обернене твердження не завжди правильне.

Завдання для самоконтролю

1. Що називають числовою послідовністю?
2. Як знайти довільний член послідовності за загальним членом?
3. Яку послідовність називають зростаючою; неспадною; спадною; не зростаючою?
4. Які дії можна виконувати над числовими послідовностями?
5. Яку послідовність називають обмеженою; необмеженою?
6. Дайте означення границі числової послідовності та його геометричну інтерпретацію.
7. Яку послідовність називають збіжною; розбіжною? Наведіть приклади.
8. Сформулюйте властивості збіжних числових послідовностей.

2. Нескінченно малі та нескінченно великі числові послідовності

Df Числову послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно малою**, якщо $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, а саму функцію y_n – **нескінченно малою функцією (величиною)**.

Іншими словами, числову послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно малою**, якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n| < \varepsilon\,.$$

Приклад

Нескінченно малі послідовності:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\ \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

Нескінченно малі функції позначають $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \dots$.

Зауваження. Слід усвідомити відмінність між поняттями «нескінченно мала величина» й «досить мале число». Нескінченно малою є величина змінна, а мале число – константа.

Властивості нескінченно малих числових послідовностей

1. Сума скінченного числа нескінченно малих числових послідовностей є послідовністю нескінченно малою.

2. Добуток нескінченно малої числової послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою числовою послідовністю.
3. Добуток скінченного числа нескінченно малих числових послідовностей є послідовністю нескінченно малою.

Теорема 2.1 (про зв'язок нескінченно малої послідовності з границею послідовності). Для того, щоб послідовність $\{y_n\}$ мала границею число a, необхідно і достатньо, щоб різниця $y_n - a$ була нескінченно малою величиною.

Df

Друге означення границі числової послідовності

Число a називають **границею числової послідовності** $\{y_n\}$, якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою числовою послідовністю.

Df

Числову послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, а саму функцію y_n – **нескінченно великою функцією (величиною)**.

Іншими словами, числову послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо для будь-якого додатного числа p існує натуральне число $N = N(p)$ таке, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n| > p\,.$$

Приклад

Нескінченно великі послідовності:

$$\{n^2\},\ \ \{(-1)^n n\}.$$

Df

Послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно великою додатною величиною**, якщо члени цієї нескінченно великої послідовності, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, є додатними:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

Приклад

Послідовність $\{a^n\}\,(a > 1, n \in \mathbb{N})$ – нескінченно велика додатна величина, оскільки всі її члени додатні, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Df Послідовність $\{y_n\}$ називають **нескінченно великою від'ємною величиною**, якщо члени цієї нескінченно великої послідовності, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, є від'ємними:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

Приклад

Послідовність $\{10000 - n\}$ – нескінченно велика від'ємна величина, оскільки, починаючи з $n = 10001$ і для всіх $n > 10001$, набуває від'ємних значень, $\lim_{n\to\infty}(10000 - n) = -\infty$.

Властивості нескінченно великих послідовностей

1. Сума нескінченно великих числових послідовностей, якщо члени цих послідовностей мають той самий знак, є нескінченно великою послідовністю.
2. Добуток нескінченно великих числових послідовностей є нескінченно великою послідовністю.

Теорема 2.2 (про зв'язок нескінченно малої й нескінченно великої послідовностей). Якщо $\{y_n\}$ – нескінченно велика числова послідовність, то послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – нескінченно мала. І навпаки, якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала числова послідовність, то послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – нескінченно велика.

Символічно записують

$$\mathbf{\frac{1}{0} = \infty, \frac{\mathit{c}}{0} = \infty, \frac{\mathit{c}}{\infty} = 0.}$$

Завдання для самоконтролю

1. Яку послідовність називають нескінченно малою? Наведіть приклад.
2. Сформулюйте властивості нескінченно малих послідовностей.
3. Сформулюйте теорему про зв'язок нескінченно малої послідовності з границею послідовності.
4. Сформулюйте друге означення границі числової послідовності.
5. Яку послідовність називають нескінченно великою? Наведіть приклад.
6. Дайте означення нескінченно великої додатної (від'ємної) величини.
7. Сформулюйте властивості нескінченно великих послідовностей.

8. Який зв'язок існує між нескінченно малою й нескінченно великою послідовностями?

3. Основні теореми про границі. Теорема про існування границі монотонної числової послідовності. Невизначені вирази

Теорема 3.1. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі. Тоді границя суми цих послідовностей дорівнює сумі їх границь:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 3.2. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі. Тоді границя добутку цих послідовностей дорівнює добутку їх границь:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Наслідок 1. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю. Тоді сталий множник можна виносити за знак цієї границі:

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty}(x_n), \qquad c - const.$$

Наслідок 2. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю. Тоді $\lim_{n\to\infty}(x_n^k) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k$, якщо k – натуральне число.

Теорема 3.3. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі, причому $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Тоді границя частки цих послідовностей дорівнює частці їх границь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Існування границі монотонної числової послідовності

Теорема 3.4. Якщо послідовність $\{y_n\}$ є монотонно спадною (незростаючою) й обмеженою знизу АБО монотонно зростаючою (неспадною) й обмеженою зверху, то ця послідовність збіжна.

Приклад

Довести, що послідовність $y_n = \frac{2n+1}{n+2}$ має границю.

Розв'язання

1. Покажемо, що послідовність обмежена зверху.

$$y_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} < 2.$$

Отже, послідовність обмежена зверху числом 2.

2. Покажемо, що послідовність монотонно зростає, іншими словами порівняємо члени послідовності y_n і y_{n+1}.

$y_n = 2 - \frac{3}{n+2};$

$y_{n+1} = 2 - \frac{3}{(n+1)+2} = 2 - \frac{3}{n+3};$

$y_n < y_{n+1}.$

Отже, послідовність монотонно зростає.

Висновок: за відповідною теоремою монотонно зростаюча й обмежена зверху послідовність є збіжною (має границю).

Невизначені вирази

Невизначеними виразами називають вирази, границі яких не можна знайти безпосереднім застосуванням теорем про границі.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Невизначений вираз	Символічний запис виду невизначеності
$x_n - y_n$	$(\infty - \infty)$
$\frac{x_n}{y_n}$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
$\alpha_n \cdot x_n$	$(0 \cdot \infty)$
$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$	$\left(\frac{0}{0}\right)$

Приклад

Розглянемо частку двох нескінченно великих величин – невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} n^4 = \infty,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^4} = 0.$$

У трьох випадках частка двох нескінченно великих величин набуває різних значень.

Приклади розкриття невизначеностей

1. Невизначеність виду $(\infty - \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \left[\begin{matrix}\text{помножимо й поділимо вираз на спряжений}\\ \text{до даного}\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

2. Невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

а) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+3)}{n^2+1} = [\text{поділимо і чисельник, і знаменник на } n^2] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 1}{1} = 2.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!+n!} = [\text{скористаємося означенням факторіала}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)}{n!\,(n+1)(n+2)+n!} =$$

$$= [\text{поділимо і чисельник, і знаменник на } n!] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)(n+2)+1} = [\text{виконаємо спрощення}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+3n+3} = [\text{поділимо і чисельник, і знаменник на } n]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{n+3+\frac{3}{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

3. Невизначеність виду $(\mathbf{0}\cdot\infty)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}(n+3)=[\text{виконаємо множення}]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+3}=$$

$$=[\text{поділимо і чисельник, і знаменник на } n]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. Невизначеність виду $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{3}{n-1}}=[\text{виконаємо ділення двох дробів}]=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n^2+3}=$$

$$=[\text{поділимо і чисельник, і знаменник на } n^2]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n^2}}=0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте основні теореми про границі.
2. Сформулюйте теорему про існування границі монотонної числової послідовності.
3. Назвіть види невизначеностей та способи їх розкриття.

4. Границя функції в точці. Властивості функцій, що мають границю в точці. Границя функції на нескінченності. Невласні границі. Правостороння й лівостороння границі функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $\langle a;b\rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0\in\langle a;b\rangle$. Надаватимемо аргументу x значень із проміжку, які близькі до x_0, але $x\neq x_0$.

Df Число A називають **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta=\delta(\varepsilon)$, що для всіх $x_0\in\langle a;b\rangle$, які задовольняють нерівність

$$0<|x-x_0|<\delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Записують:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Зауваження. Існування границі функції в точці x_0 характеризує значення функції поблизу точки x_0 і не вимагає існування функції і цій точці.

Геометрична інтерпретація означення границі функції в точці

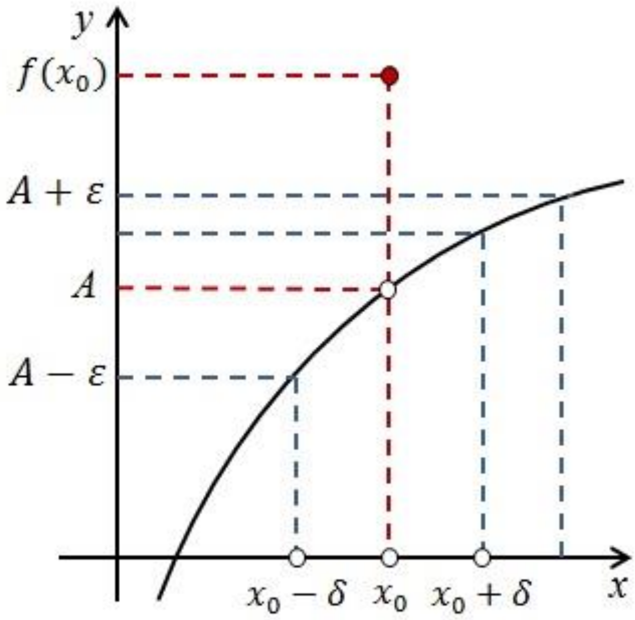


Рис. 2

Зобразимо графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $\langle a; b\rangle$. На вісі абсцис позначимо точку x_0, на вісі ординат – відповідно точку A. Причому $f(x_0) \neq A$ (рис. 2).

Нехай ε – деяке додатне число. На вісі ординат розглянемо інтервал $(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$. Інтервал, що відповідає інтервалу $(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$ на вісі абсцис, містить інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, якому належить точка x_0. При цьому для будь-якого $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \subset \langle a; b\rangle, x \neq x_0$, відповідні значення функції $f(x)$ належать інтервалу $(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$, тобто виконується нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, або $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Отже, задавши ε-окіл точки A (як завгодно малий), ми можемо підібрати такий δ-окіл точки x_0, що значення функції для всіх точок з цього околу (крім, можливо, самої точки x_0) потраплятимуть до ε-околу точки A.

Оскільки точка x_0 не належить інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, його називають проколотим δ-околом точки x_0.

Приклад

Довести, що границею функції $y = 2x + 3$ при $x \to 1$ є число 5.

Розв'язання

Задамо довільне додатне число ε. Розглянемо нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$|(2x + 3) - 5| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon,$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Приймемо $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з нерівності $0 < |x - 1| < \delta$ випливає нерівність $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$.

Отже, за означенням, $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

Деякі властивості функцій, що мають границю в точці

Теорема 4.1. Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має границю, то лише одну.

Теорема 4.2. Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має границю, то існує окіл точки x_0 такий, що для всіх значень x із цього околу, крім, можливо, $x = x_0$, множина значень $f(x)$ є обмеженою.

Границя функції на нескінченності

1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині всіх додатних дійсних чисел, і при цьому аргумент x необмежено зростає ($x \to +\infty$).

Df

Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число M, що з нерівності $x > M$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

Приклад

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині всіх від'ємних дійсних чисел, і при цьому аргумент x необмежено спадає ($x \to -\infty$).

Df

Число B називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке від'ємне число E, що з нерівності $x < E$

випливає нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$.
Записують:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=B.$$

Приклад

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

3. Нехай функція $y=f(x)$ визначена для всіх $|x|\to+\infty$.

Df

Число C називають **границею функції** $f(x)$ при $|x|\to+\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число M, що з нерівності $|x|>M$ випливає нерівність $|f(x)-C|<\varepsilon$.
Записують:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=C.$$

Приклад

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Невласні границі

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $\langle a;b\rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0\in\langle a;b\rangle$.

Df

Функція $y=f(x)$ при $x\to x_0$ має невласну границю $+\infty$, якщо для будь-якого додатного числа M існує таке додатне число δ, що з нерівності $|x-x_0|<\delta, x\neq x_0$ випливає нерівність $f(x)>M$.
Записують:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$$

Приклад

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Df

Функція $y=f(x)$ при $x\to x_0$ має невласну границю $-\infty$, якщо для будь-якого від'ємного числа E існує таке додатне число δ, що з нерівності $|x-x_0|<\delta, x\neq x_0$ випливає нерівність $f(x)<E$.

Записують:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Приклад

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ (x<0)}} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$

Правостороння й лівостороння границі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\langle a; b \rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a; b \rangle$.

Df Число A називають **правосторонньою границею функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх $x_0 \in \langle a; b \rangle$, які задовольняють нерівність

$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записують:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x>x_0)}} f(x) = A = f(x_0 + 0),$$

або

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = f(x_0 + 0).$$

Df Число B називають **лівосторонньою границею функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх $x_0 \in \langle a; b \rangle$, які задовольняють нерівність

$$x_0 - \delta < x < x_0,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - B| < \varepsilon.$$

Записують:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x<x_0)}} f(x) = B = f(x_0 - 0),$$

або

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A = f(x_0 - 0).$$

Зауваження. Якщо функція визначена на проміжку $\langle a; b\rangle$, то в точці a можна розглядати тільки правосторонню границю, а якщо в точці b – лівосторонню.

Приклад

1. Знайти лівосторонню й правосторонню границі функції $y = \begin{cases} x+2 \text{ при } 0 \le x < 1, \\ 3x+1 \text{ при } 1 \le x \le 3, \end{cases}$ в точці $x = 1$.

   Розв'язання

   Лівостороння границя функції $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x + 2\,) = 3$, правостороння границя функції $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (3x + 1\ \ ) = 4$.

2. Знайти лівосторонню й правосторонню границі функції $y = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ в точці $x = \frac{1}{2}$.

   Розв'язання

   $y = \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = 2x + 1\ \ (x \ne \frac{1}{2})$.

   Лівостороння й правостороння границя функції в точці $x = \frac{1}{2}$ існують, причому:

   $$\lim_{x \to \frac{1}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}+0} f(x) = 2.$$

3. Знайти лівосторонню й правосторонню границі функції $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці $x = -1$.

   Розв'язання

   Лівостороння границя функції $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0$, правостороння границя функції $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$.

Для лівосторонньої й правосторонньої границь можливі такі випадки:

1) обидві границі існують, причому $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;
2) обидві границі існують, причому $f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0)$;
3) хоча б одна з границь у точці не існує.

Теорема 4.3. Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має границю, то вона має в цій точці лівосторонню й правосторонню границі, і вони дорівнюють границі функції в цій точці. І навпаки, якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має лівосторонню й правосторонню границі, і вони рівні між собою, то ця функція в точці x_0 має границю, яка дорівнює спільному значенню лівосторонньої й правосторонньої границь.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте означення границі функції в точці та його геометричну інтерпретацію.
2. Сформулюйте властивості функцій, що мають границю в точці.
3. Дайте означення границі функції при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.
4. Які границі називають невласними?
5. Дайте означення правосторонньої границі функції у точці; лівосторонньої границі функції у точці.
6. Сформулюйте необхідні й достатні умови існування границі функції в точці.

5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in (a; b)$.

Df

Перше означення границі функції в точці

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно малою в точці** x_0, якщо існує границя функції в цій точці, і ця границя дорівнює нулю.

Іншими словами, функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно малою в точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in (a; b), x \neq x_0$, які задовольняють нерівність

$$|x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Приклад

1. Функція $y = (x-1)^n$ в точці $x = 1$ нескінченно мала, оскільки $\lim\limits_{x \to 1}(x - 1)^n = 0$.

2. Функція $y = 3^{-\frac{1}{x}}$ в точці $x = 0$ нескінченно мала, оскільки $\lim\limits_{x \to 0} 3^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Зауваження. Значення нескінченно малої функції можуть бути за певних значень x як завгодно великими числами. Наприклад, функція $y = x^2$ є нескінченно малою в точці 0, але її значення за досить великих за модулем значень x є також як завгодно великими.

Df

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно малою на нескінченності**, $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність

$$|x| > M,$$

виконується нерівність

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Приклад

Функція $y = \frac{1}{x}$ є нескінченно малою на нескінченності, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Зауважимо, що графік нескінченно малої функції на нескінченності за досить великих значень x за модулем проходить дуже близько до вісі абсцис, іншими словами асимптотично наближається до вісі абсцис.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією в заданій точці.
2. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою функцією в заданій точці.
3. Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією в заданій точці.

Теорема 5.1 (про зв'язок нескінченно малої функції з границею функції в точці). Для того, щоб функція $y = f(x)$ у точці $x_0 \in \langle a; b\rangle$ мала границею число A, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x_0) - A$ була нескінченно малою функцією в цій точці.

Df

Друге означення границі функції в точці

Число A називають **границею функції** $y = f(x)$ **в точці** $x_0 \in (a; b)$, якщо різниця між функцією і числом A є нескінченно малою функцією в цій точці.

Df

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою в точці** x_0, якщо існує границя функції в цій точці, і ця границя дорівнює нескінченності.

Іншими словами, функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою в точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа M існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in (a; b), x \neq x_0$, які задовольняють нерівність

$$|x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x)| > M.$$

Приклад

1. Функція $y = \frac{1}{x-1}$ в точці $x = 1$ нескінченно велика, оскільки $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

2. Функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ в точці $x = 0$ нескінченно велика, оскільки $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$.

Df

Функцію $y = f(x)$ називають **нескінченно великою на нескінченності**, $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність

$$|x| > M,$$

виконується нерівність

$$|f(x)| > \varepsilon.$$

Приклад

Функція $y = x^3$ є нескінченно великою на нескінченності, оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$, причому $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. Водночас функція $y = x^2$ також є нескінченно великою на нескінченності, при цьому $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$.

Теорема 5.2 (про зв'язок нескінченно малої й нескінченно великої функцій у точці). Якщо $f(x)$ – нескінченно велика функція в точці x_0, то функція $\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}$ є нескінченно малою в цій точці. І навпаки, якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці x_0, то послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha(x)}\right\}$ є нескінченно великою в цій точці.

Символічно

$$\mathbf{\frac{1}{0} = \infty, \frac{c}{0} = \infty, \frac{c}{\infty} = 0.}$$

Завдання для самоконтролю

1. Яку функцію називають нескінченно малою в точці? Наведіть приклад.

2. Яку функцію називають нескінченно малою на нескінченності?

3. Якими властивостями володіють нескінченно малих функцій.

4. Сформулюйте теорему про зв'язок малої функції з границею функції в точці.

5. Сформулюйте друге означення границі функції в точці.

6. Яку функцію називають нескінченно великою в точці? Наведіть приклад.

7. Яку функцію називають нескінченно великою на нескінченності?

8. Який зв'язок існує між нескінченно малою й нескінченно великою функціями в точці?

6. Основні теореми про границі (для функцій неперервного аргументу). Порівняння нескінченно малих величин. Перша та друга важливі границі

Для функцій неперервного аргументу виконуються й теореми про числові послідовності, зокрема **основні теореми про границі**.

Теорема 6.1. Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь функцій, якщо вони існують у цій точці:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Теорема 6.2. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь функцій, якщо вони існують у цій точці:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Теорема 6.3. Границя частки дорівнює частці від ділення границі чисельника на границю знаменника, якщо існують границі чисельника і знаменника у цій точці, й границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)},\qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0.$$

Порівняння нескінченно малих величин

Df Нескінченно малу величину $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку**, ніж нескінченно мала величина $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. При цьому нескінченно мала величина $\beta(x)$ є **нескінченно малою величиною**

нижчого порядку, ніж нескінченно мала величина $\alpha(x)$.

Аналогічним є означення для $x \to \infty$.

Приклад

$\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ і $\beta(x) = \frac{1}{2x}$ – нескінченно малі величини при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Отже, $\alpha(x)$ є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж нескінченно мала величина $\beta(x)$.

Df Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, де c – відмінне від нуля число, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці x_0 називають **нескінченно малими однакового порядку**.

Аналогічним є означення для $x \to \infty$.

Приклад

$\alpha(x) = x^2 - 1$ і $\beta(x) = x - 1$ – нескінченно малі функції в точці $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2.$$

Отже, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини однакового порядку.

Df Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці x_0 називають **еквівалентними**. Записують:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Зокрема,

$\boldsymbol{\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)}$
$\boldsymbol{\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)}$
$\boldsymbol{\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)}$

$\mathbf{arctg}\, \boldsymbol{\alpha(x)} \sim \boldsymbol{\alpha(x)}$
$\mathbf{1 - \cos}\, \boldsymbol{\alpha(x)} \sim \dfrac{\boldsymbol{\alpha^2(x)}}{\mathbf{2}}$
$\boldsymbol{e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)}$
$\boldsymbol{\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}}$
$\mathbf{ln}\boldsymbol{(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)}$
$\boldsymbol{a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)}\, \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{(1+\alpha(x))^k - 1 \sim k\alpha(x)}$
$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{(1+\alpha(x))} \sim \dfrac{\boldsymbol{\alpha(x)}}{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}}$

Теорема 6.4. Якщо в точці x_0 величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі й $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, $\beta(x) \sim \beta'(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

Іншими словами, під час обчислення границь відношення нескінченно малих функцій можна замінити відношенням еквівалентних їм функцій.

Приклад

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 20x}{\sin^2 15x} = \begin{bmatrix} \sin 20x \sim 20x \\ \sin 15x \sim 15x \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{20x}{225x^2} = \infty.$$

Невизначені вирази

Обчислимо границю функції в точці:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = [\text{розкладемо тричлен на множники}] =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+5)} =$$

$$= [\text{скоротимо на вираз } (x-1), \text{оскільки за означенням } x \neq 1]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x+5} = \frac{5}{6}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}\text{звільнимося від ірраціональності ,}\\ \text{домноживши і чисельник, і знаменник}\\ \text{на вираз, спряжений до чисельника}\end{array}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Теорема 6.5 (перша важлива границя). Виконується рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Приклад

Обчислимо границю функції в точці.

А. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5.$

Б. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

В. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}=1\cdot 0$

$=0.$

Теорема 6.6 (друга важлива границя). Виконується рівність

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.}$$

Приклад

Обчислимо границю функції на нескінченності.

А. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/5}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x/5}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5}=e^{5}.$

Б. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2-2}{x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+2}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{-\frac{x+2}{2}}\right]^{-\frac{2}{x+2}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2x}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x}{x+2}}=e^{-2}=$$

$$=\frac{1}{e^{2}}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте основні теореми про границі (для функцій неперервного аргументу).
2. Яку величину називають нескінченно малою вищого (нижчого) порядку?
3. Які величини називають нескінченно малими однакового порядку?
4. Які величини називають еквівалентними?
5. Сформулюйте теорему про границю відношення нескінченно малих функцій.
6. Назвіть види невизначеностей та способи їх розкриття.
7. Сформулюйте теорему про першу важливу границю.
8. Сформулюйте теорему про другу важливу границю.

7. Неперервність функції в точці

Df

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в інтервалі $(a; b)$. Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці** $x_0 \in (a; b)$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Теорема 7.1. Для того щоб функція, $y = f(x)$ визначена в інтервалі $(a; b)$, була неперервною в точці $x_0 \in (a; b)$, необхідно і достатньо, щоб лівостороння й правостороння границі функції в точці x_0 існували, були рівні між собою й дорівнювали значенню функції в точці x_0:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Приклад

Дослідити функцію на неперервність в точці x_0:

а) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x < 2, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$

б) $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Розв'язання

а) Задана функція визначена в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, зокрема $f(2) = 3$.

Знайдемо правосторонню границю функції в точці $x_0 = 0$:

$$f(2 + 0) = \lim_{x \to 2+0} (2x - 1) = 3.$$

Знайдемо лівосторонню границю функції в точці $x_0 = 0$:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}(5-x)=3.$$

Правостороння й лівостороння границі в точці x_0 рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці. Отже, задана функція неперервна в точці x_0.

б) Задана функція визначена в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$, зокрема $f(0)=0$.
Знайдемо правосторонню границю функції в точці $x_0=0$:

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1.$$

Знайдемо лівосторонню границю функції в точці $x_0=0$:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1.$$

Правостороння й лівостороння границі в точці x_0 не рівні між собою. Отже, задана функція не є неперервною в точці x_0.

Df Функцію $y=f(x)$ називають **неперервною в інтервалі** $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Теореми про неперервні функції в точці

Теорема 7.2. Нехай маємо складену функцію $y=f(u), u=\varphi(x)$, де $x\in X, u\in U$. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці $x_0\in X$, а функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то й функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Теорема 7.3. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0, то в цій точці будуть неперервними функції $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$.

Теорема 7.4. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0 і $\varphi(x_0)\neq 0$, то в точці x_0 є неперервною таокж і функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Одностороння неперервність

Df Функцію $y=f(x)$ називають **неперервною в точці** $x_0\in\langle a;b\rangle$ **зліва**, якщо виконуються умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0;
2) в точці x_0 існує лівостороння границя функції;
3) лівостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці x_0:

$$f(x_0-0)=f(x_0).$$

Df

Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною в точці** $x_0 \in \langle a; b \rangle$ **справа**, якщо виконуються умови:

1) $f(x)$ визначена в точці x_0;
2) в точці x_0 існує правостороння границя функції;
3) правостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці x_0:
$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Теорема 7.5. Для того, щоб функція $y = f(x)$ була неперервна в певній точці, необхідно і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна і справа, і зліва.

Точки розриву функцій та їх класифікація

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\langle a; b \rangle$, крім, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in \langle a; b \rangle$.

Df

Якщо функція $y = f(x)$ у точці x_0 не є неперервною, то точку x_0 називають **точкою розриву функції** $f(x)$, а саму функцію – **розривною в точці** x_0.

Df

Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають **точкою розриву першого роду**, якщо в цій точці існують скінченні лівостороння й правостороння границі. Якщо вони рівні між собою, то точку x_0 називають **точкою усувного розриву**.

Df

Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають **точкою розриву другого роду**, якщо в цій точці не існує жодної з односторонніх границь.

Якщо розрив функції $f(x)$ у точці x_0 усувний, то її можна «довизначити» у цій точці, і «довизначена» функція $F(x)$ стане неперервною.
Для цього покладають
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{якщо } x = x_0. \end{cases}$$

Приклад

Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, встановити їх характер, за можливості довизначити функцію $f(x)$ у точці розриву так, щоб довизначена функція в цій точці була неперервною:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

б) $y = \dfrac{3}{x - 2}$.

Розв'язання

а) Функція $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ не є неперервною в точці $x_0 = 2$, оскільки в цій точці функція не існує.

Знайдемо лівосторонню й правосторонню границю функції в точці $x_0 = 2$.

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2 \ \ (x_0 \neq 2).$$

Тоді

$$\lim_{x \to 2-0}(x+2) = \lim_{x \to 2+0}(x+2) = 4.$$

Отже, точка $x_0 = 2$ є точкою розриву першого роду, зокрема точкою усувного розриву.

Довизначимо задану функцію в точці $x_0 = 2$, щоб вона була в цій точці неперервною.

$$\lim_{x \to 2}(x+2) = 4.$$

Тоді шуканою є функція

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 2, & \text{якщо } x = 2, \end{cases}$$

або $F(x) = x + 2$.

б) Функція $y = \frac{3}{x-2}$ не є неперервною в точці $x_0 = 2$, оскільки в цій точці функція не існує.

Знайдемо лівосторонню й правосторонню границю функції в точці $x_0 = 2$:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} \frac{3}{x-2} = -\infty,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} \frac{3}{x-2} = +\infty.$$

Отже, точка $x_0 = 2$ є точкою розриву другого роду.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте означення неперервної функції в точці.
2. Сформулюйте необхідні й достатні умови неперервності функції в точці.
3. Сформулюйте теореми про неперервні функції в точці.

4. Яку функцію називають неперервною в точці x_0 зліва?
5. Яку функцію називають неперервною в точці x_0 справа?
6. Дайте означення точки розриву функції.
7. Що називають точкою розриву першого роду?
8. Що називають точкою усувного розриву?
9. Що називають точкою розриву другого роду?
10. Як можна довизначити функцію в точці розриву?

8. Похідна. Механічний та геометричний зміст похідної

Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому інтервалі $(a;\ b)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (a; b)$ і надамо x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точки x_0 і $x_0 + \Delta x$ належали інтервалу $(a;\ b)$. Обчислимо в точці x_0 приріст функції Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Df

Якщо існує границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що Δx прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то ця границя називається **похідною від функції** $f(x)$ **в точці** $x = x_0$.
Записують:

$$f'(x_0).$$

Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній внутрішній точці x проміжку $\langle a; b \rangle$, то похідну позначатимемо y', або $f'(x)$.

Отже, якщо x_0 – фіксована точка проміжку $\langle a; b \rangle$, то похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, є числом. Якщо похідна існує в кожній точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$, то $f'(x)$ є функцією від x.

Приклад

Знайти похідну функції $y = x^2$ за означенням.

Розв'язання

1. Надамо аргументу x приросту Δx: $x + \Delta x$.
2. Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Запишемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4. Зайдемо границю відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Отже, $(x^2)' = 2x$.

Механічний зміст похідної

Величина швидкості V в даний момент часу t дорівнює похідній від пройденого шляху S по часу t, тобто $V = S'$, або, якщо $S = f(t)$, то $V = f'(t)$.

Геометричний зміст похідної

Нехай x і y – координати точки, взятої на кривій, яку задано рівнянням $y = f(x)$. Тоді похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту $\operatorname{tg} \alpha$ дотичної, проведеної до кривої в точці з координатами x_0, $y_0 = f(x_0)$.

Односторонні похідні

Нехай Δx наближається до нуля справа, тобто $\Delta x \to 0$, але $\Delta x > 0$.

Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають **правосторонньою похідною в точці** x_0 і позначають

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + 0).$$

Аналогічно, якщо Δx наближається до нуля зліва, тобто $\Delta x \to 0$, але $\Delta x < 0$, і якщо існує границя

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають **лівосторонньою похідною в точці** x_0 і позначають

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 - 0).$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, то під похідною в точці a розуміють правосторонню похідну, а в точці b – лівосторонню.

Якщо у внутрішній точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$ функція $f(x)$ має похідну, то в цій точці $f(x)$ має односторонні (лівосторонню й правосторонню) похідні, і вони дорівнюють похідній в цій точці. Однак обернене твердження не справджується.

Маємо, що $k = f'(x_0)$. Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Ця пряма проходить через точку з координатами $(x_0; f(x_0))$, отже:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Звідси

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Тоді

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Зробивши відповідні перетворення, отримаємо **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Завдання для самоконтролю

1. Дайте означення похідної від функції.
2. Розкрийте механічний зміст похідної.
3. Розкрийте геометричний зміст похідної.
4. Дайте означення правосторонньої та лівосторонньої похідних у точці.
5. Який зв'язок між односторонніми похідними й похідною функції в точці?
6. Що можна сказати про кут, який утворює дотична з віссю *Ox*, якщо $f'(x_0) > 0, f'(x_0) < 0, f'(x_0) = 0$?

9. Зв'язок між неперервністю функції та її диференційовністю. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції.

Df

Перше означення диференційованості функції

Функція $f(x)$ в точці x_0 називається **диференційовною**, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в кожній точці деякого інтервалу $(a; b)$, то вона називається **диференційованою на цьому інтервалі**.

Теорема 9.1. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 є диференційовною, то вона в цій точці неперервна.

Водночас неперервність функції в точці є тільки необхідною умовою диференційованості функції в даній точці (рис. 3).

Рис. 3

Похідна від сталої функції

$\boldsymbol{y = C = const}$	$\boldsymbol{y' = 0}$
Приклади	
1. $y = 3$.	1. $y' = 0$.
2. $y = \ln 5$.	2. $y' = 0$.
3. $y = \arccos(0,1)$.	3. $y' = 0$.

Похідна від степеневої функції

$\boldsymbol{y = x^{\alpha}}$	$\boldsymbol{y' = \alpha x^{\alpha-1}}$
Приклади	
1. $y = x$.	1. $y' = 1$.
2. $y = x^3$.	2. $y' = 3x^2$.
3. $y = x^{50}$.	3. $y' = x^{49}$.
4. $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.	4. $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.
5. $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.	5. $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Похідна від показникової функції

$\boldsymbol{y = a^x, a > 0, a \neq 1}$	$\boldsymbol{y' = a^x \ln a}$
Приклади	
1. $y = e^x$.	1. $y' = e^x$.
2. $y = 2^x$.	2. $y' = 2^x \ln 2$.
3. $y = 9^x$.	3. $y' = 9^x \ln 9$.

Похідні від тригонометричних функцій

$\boldsymbol{y = \sin x}$	$\boldsymbol{y' = \cos x}$

$\boldsymbol{y = \cos x}$	$\boldsymbol{y' = -\sin x}$
$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}x}$	$\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$
$\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}x}$	$\boldsymbol{y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$

Похідна від оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій, тобто: областю визначення функції $\varphi(y)$ є множина значень функції $f(x)$, а множина значень $\varphi(y)$ є областю визначення $f(x)$.

Теорема 9.2. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в цьому інтервалі, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, і $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Тобто, **похідні взаємно обернених функцій – обернені за величиною**.

$\boldsymbol{y = \mathrm{arcsin}x, x \in (-1;\ 1)}$	$\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
$\boldsymbol{y = \arccos x, x \in (-1;\ 1)}$	$\boldsymbol{y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
$\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}x, x \in (-\infty;\ +\infty)}$	$\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$
$\boldsymbol{y = \mathrm{arcctg}x, \in (-\infty;\ +\infty)}$	$\boldsymbol{y' = -\dfrac{1}{1+x^2}}$

Похідна від логарифмічної функції

$\boldsymbol{y = \log_a x,\ \ x > 0}$	$\boldsymbol{y' = \dfrac{\log_a e}{x}}$
$\boldsymbol{y = \ln x}$	$\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x}}$

Таблиця похідних від елементарних функцій

1	$(C)' = 0,\ \ C = const$	9	$(\sin x)' = \cos x$
2	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	10	$(\cos x)' = -\sin x$

3	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5	$(a^x)' = a^x \ln a,$ $a > 0, a \neq 1$	13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $x \in (-1;\ 1)$
6	$(e^x)' = e^x$	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $x \in (-1;\ 1)$
7	$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x},$ $a > 0, a \neq 1$	15	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$
8	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	16	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2},$ $x \in (-\infty;\ +\infty)$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте перше означення диференційовності функції.
2. Сформулюйте теорему про зв'язок
3. Чому дорівнює похідна від константи?
4. Чому дорівнює похідна від степеневої функції?
5. Чому дорівнює похідна від показникової функції?
6. Чому дорівнюють похідні від тригонометричних функцій?
7. Чому дорівнює похідна від оберненої функції?
8. Чому дорівнює похідна від логарифмічної функції?

10. Похідна суми, добутку, частки. Похідна від складеної функції. Похідна від степенево-показникової функції

Похідна від суми

Теорема 10.1. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні, то функція $y(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ також у цій точці має похідну $y'(x)$, що дорівнює $y'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)$.

$\boldsymbol{y(x) = f_1(x) \pm f_2(x)}$	$\boldsymbol{y' = f_1'(x) \pm f_2'(x)}$

Приклади	
1. $y = \sin x + \cos x + 1$.	1. $y' = (\sin x + \cos x + 1)' = (\sin x)' + (\cos x)' + (1)' = \cos x - \sin x$.
2. $y = \ln x - e^x + \sqrt[3]{x}$.	2. $y' = \left(\ln x - e^x + \sqrt[3]{x}\right)' = (\ln x)' - (e^x)' + \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{x} - e^x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Узагальнення. Похідна від суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій, якщо похідні даних функцій існують:

$$\boldsymbol{\left(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\right)' = f_1{}'(x) + f_2{}'(x) + \dots + f_n{}'(x).}$$

Похідна від добутку

Теорема 10.2. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні, то функція $y(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ також у цій точці має похідну $y'(x)$, що дорівнює $y'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2{}'(x)f_1(x)$.

$\boldsymbol{y(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)}$	$\boldsymbol{y'(x) = f'_1(x)f_2(x) + f_2{}'(x)f_1(x)}$
Приклади	
1. $y = 3^x \cos x$.	1. $y' = (3^x)' \cos x + (\cos x)' 3^x = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos x - \sin x \cdot 3^x$.
2. $y = (2x + 1)\mathrm{arctg}x$.	2. $y' = (2x + 1)'\mathrm{arctg}x + (\mathrm{arctg}x)'(2x + 1) = 2\mathrm{arctg}x + \frac{2x+1}{1+x^2}$.

Похідна від частки

Теорема 10.3. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні і $f_2(x) \neq 0$, то функція $y(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також точці x має похідну $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2{}'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}.$$

$\boldsymbol{y(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)},\ f_2(x) \neq 0}$	$\boldsymbol{y'(x) = \dfrac{f'_1(x)f_2(x) - f_2{}'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}}$
Приклади	
1. $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^4 + 4}$.	1. $y' = \dfrac{(x^2 + 2)'(x^4 + 4) - (x^2 + 2)}{(x^4 + 4)^2} = \dfrac{2x(x^4 + 4) - 4x^3(x^2 + 2)}{(x^4 + 4)^2} = \dfrac{2x(-x^4 - 4x^2 + 4)}{(x^4 + 4)^2}$.

2. $y = \frac{2x}{\cos x}$.	2. $y' = \frac{(2x)'\cos x - (\cos x)'2x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{2\cos x + \sin x \cdot 2x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{2(\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x}$.
$\boldsymbol{y(x) = \frac{C}{f(x)},\ \ C = const}$	$\boldsymbol{y'(x) = -\frac{Cf'(x)}{[f(x)]^2}}$
Приклад	
1. $y = \frac{2}{x^2}$.	1. $y' = -\frac{2 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$.

Похідна від складеної функції

Теорема 10.4. Нехай маємо складну функцію $y = f(u), u = \varphi(x)$, і нехай: 1) зовнішня функція $f(u)$ в точці $u_0 = \varphi(x_0)$ має похідну (по u) $y'_u = f'_u(u_0)$; 2) внутрішня функція $u = \varphi(x)$ в точці x_0 має похідну (по x) $y'_x = \varphi'_x(x_0)$. Тоді складена функція $y = f(\varphi(x))$ в точці x_0 також має похідну (по x), яка дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції $f(u)$ і похідної від внутрішньої функції $\varphi(x)$, тобто $f'_x\big(\varphi(x_0)\big) = f'_u(u) \cdot \varphi'(x_0)$.

$\boldsymbol{y(x) = f(u),\qquad u = \varphi(x)}$	$\boldsymbol{y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x}$
Приклади	
1. $y = \sin x^2$.	1. $y = \sin u, u = x^2$. $y' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x ==$ $2x\cos(x^2)$.
2. $y = \sin^2 x$.	2. $y = u^2, u = \sin x$. $y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x =$ $= \sin 2x$.

Похідна від степенево-показникової функції

Нехай маємо функцію $y = u^v,\ u > 0$, де u і v – функції від x, які мають похідні в даній точці x.

Прологарифмуємо обидві частини даної рівності:

$$\ln y = v \ln u.$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності по x:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}.$$

Виразимо y':

$y' = y\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right).$ Підставимо u^v замість y: $y' = u^v\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right).$ Розкриємо дужки: $y' = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'.$	
$\boldsymbol{y(x) = (u(x))^{v(x)}}$	$\boldsymbol{y'_x = u^v v'_x \ln u + vu^{v-1}u'_x}$
Приклади	
1. $y = x^{x^2}$.	1. $\ln y = x^2\ln x,$ $\frac{y'}{y} = 2x\ln x + x,$ $y' = y(2x\ln x + x),$ $y' = x^{x^2}(2x\ln x + x),$ $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1).$
2. $y = (\mathrm{tg}x)^{\sin x}$	2. $\ln y = \sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}x),$ $\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \sin x\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x},$ $\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{1}{\cos x},$ $y' = y\left(\cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{1}{\cos x}\right),$ $y' = (\mathrm{tg}x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}x) + \frac{1}{\cos x}\right).$

Завдання для самоконтролю

1. Як знайти похідну від суми функцій? Наведіть приклад.
2. Як знайти похідну від добутку функцій? Наведіть приклад.
3. Як знайти похідну від частки функцй? Наведіть приклад.
4. Як знайти похідну від складеної функції? Наведіть приклад.
5. Як знайти похідну від степенево-показникової функції? Наведіть приклад.

11. Диференціал функції.

Нехай на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ дано функцію $y = F(x)$, яка в точці x_0 є диференційована, тобто існує в точці x_0 похідна $F'(x)$. Згідно з означенням похідної, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x_0).$$

Тоді існує окіл точки $\Delta x = 0$, який належить проміжку $\langle a; b \rangle$ і такий, що для всіх значень Δx з цього околу, крім $\Delta x = 0$, справджується рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Помноживши обидві частини останньої рівності на Δx ($\Delta x \neq 0$), дістаємо таку формулу для приросту диференційованої функції:

$$\Delta y = F'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Df

Друге означення диференційованості функції

Функція $y = f(x)$ називається **диференційовною в точці** x_0, якщо її приріст в цій точці можна зобразити в такому вигляді:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $A = A(x_0)$ – число, а $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля, коли приріст Δx прямує до нуля.

Якщо функція диференційована в точці за першим означенням, то вона диференційована і за другим.

Отже, якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 диференційовна, то її приріст Δy у цій точці можна записати так:

$$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}(\Delta \boldsymbol{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{x}.$$

Df

Добуток $f'(x_0)\Delta x$ називають **диференціалом функції в точці** x_0.

Записують:

$$dy$$

або

$$df(x_0).$$

Знаходження диференціала від функції називається **диференціюванням** функції. Оскільки диференціал відрізняється від похідної тільки множником Δx, то й знаходження похідної від функції також називають диференціюванням функції.

Диференціалом аргументу називають його приріст, тобто вважають, що $\Delta x = dx$.

Тоді формулу для диференціала функції можна записати так:

$$dy = f'(x_0)dx \qquad \text{або} \qquad dy = y'dx.$$

Отже,

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Таблиця диференціалів від елементарних функцій

№ з/п	Функція	Диференціал
1	$y = C = const$	$dy = 0$
2	$y = x^\alpha$	$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$
3	$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{1}{x^2} dx$
4	$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
5	$y = a^x, a > 0, a \neq 1$	$dy = a^x \ln a \, dx$
6	$y = e^x$	$dy = e^x dx$
7	$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$	$dy = \frac{\log_a e}{x} \, dx$
8	$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$
9	$y = \sin x$	$dy = \cos x \, dx$
10	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \, dx$
11	$y = \mathrm{tg} x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
12	$y = \mathrm{ctg} x$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
13	$y = \arcsin x, x \in (-1;\ 1)$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
14	$y = \arccos x, x \in (-1;\ 1)$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
15	$y = \mathrm{arctg} x, x \in (-\infty;\ +\infty)$	$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$

Якщо u і v диференційовані функції, то для диференціалів, як і для похідних, можна вивести такі формули (правила диференціювання):

1. $d(C \cdot u) = Cdu,\ (C = const)$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(u \cdot v) = vdu + udv$.
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.
5. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x)$, де $f(u)$ і $\varphi(x)$ є диференційовні функції відповідно в точках u і x, то $dy = f'(u)du$. Іншими словами, виконується **теорема про інваріантність форми диференціала:** форма диференціала не залежить від того, чи аргумент є незалежною змінною, чи функцією від іншого аргументу.

Геометричний зміст диференціала

Нехай графіком диференційовної функції $f(x)$ є крива L (рис. 4). Візьмемо на кривій L точки $M_0(x_0;\ y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$. Через точку M_0 проведемо дотичну до кривої L. Тоді з трикутника M_0KN знайдемо довжину відрізка KN:

$$KN = \text{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x,$$

або

$$KN = dy.$$

Отже, геометричний зміст диференціала такий: диференціал функції дорівнює приросту ординати точки M_0, коли остання, рухаючись вздовж дотичної, займає положення точки K.

Механічний зміст диференціала

Припустимо, що матеріальна точка рухається за відомим законом $S = f(t)$, де $f(t)$ – диференційована функція при деякому значенні часу $t = t_0$. Тоді функція $f(t)$ має диференціал $ds = f'(t_0)\Delta t$, однак $f'(t_0)$ дорівнює швидкості $V = f'(t_0)$, тому $ds = V\Delta t$.

Отже, механічний зміст диференціала функції такий: диференціал функції виражає шлях, який точка пройшла б за час Δt, рухаючись прямолінійно і рівномірно зі сталою швидкістю $V = f'(t_0)$.

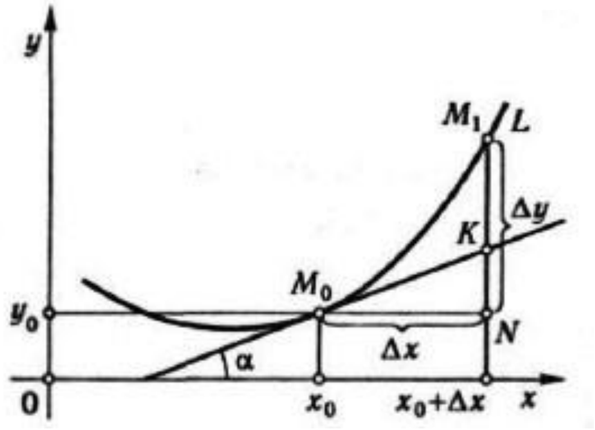


Рис. 4

Використання диференціала при наближених обчисленнях

Відомо, що

$$\Delta y \approx dy.$$

Тоді

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

$$\boldsymbol{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}.$$

Остання наближена рівність є формулою для наближених обчислень.

Приклад

Знайти наближене значення а) $\sqrt{1{,}08}$; б) $\sin 30°\, 1'$.

Розв'язання

а) Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Нехай $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}08$, тоді $\sqrt{1{,}08}$ можна записати так: $\sqrt{1{,}08} = \sqrt{1+0{,}08} = \sqrt{x_0+\Delta x}$.

$f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$.

Тоді $\sqrt{1{,}08} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}08 = 1{,}04$.

б) Знайти наближене значення.

Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Переведемо градусну міру кута в радіанну: $30° \sim \frac{\pi}{6}$, $1' \sim \frac{\pi}{180\cdot 60}$.

Нехай $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180\cdot 60}$.

$f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $f'(x) = \cos x$, $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin 30°\, 1' \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180\cdot 60}$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте друге означення диференційовності функції.

2. Дайте означення диференціала функції в точці.
3. Назвати диференціали від елементарних функцій.
4. Сформулювати правила диференціювання функції.
5. Сформулювати геометричний зміст диференціала функції.
6. Сформулювати механічний зміст диференціала функції.
7. Записати формулу, яку використовують для наближених обчислень.

12. Похідна від функції, заданої параметрично. Похідна від функції, заданої неявно.

Df Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ від тієї самої допоміжної змінної $t \in [\alpha; \beta]$ називається **параметричним заданням функції**. Допоміжна змінна t при цьому називається **параметром**.

	Декартова система координат	Параметричне задання
Рівняння кола	$x^2 + y^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t; \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$
Рівняння еліпса	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$
Рівняння циклоїди		$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} 0 \le t \le 2\pi$

Виведемо формулу для похідної від функції, заданої параметрично. Припустимо, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовані в кожній точці t інтервалу $t \in (\alpha; \beta)$ і для цих значень t функція $\varphi(t)$ така, що похідна від неї не дорівнює нулю $\varphi'(t) \neq 0$. Тоді для кожної функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ існують диференціали

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

або

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад

1. Знайти похідну від функції, заданої параметрично: $x = te^{t^2}$, $y = \ln t + t^{t^3}$ у точці $t = 1$.

Розв'язання

Знайдемо y'_t і x'_t:

$$y'_t = \frac{1}{t} + t^3 t^{t^2-1} + t^{t^3} \ln t \cdot 3t^2, \qquad y'_t(1) = 2;$$

$$x'_t = e^{t^2} + te^{t^2} \cdot 2t, \qquad x'_t(1) = 3e \neq 0.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2}{3e}.$$

2. Скласти рівняння дотичної прямої до циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t\,, \\ y = 1 - \cos t\,, \end{cases}$$

в точці, яка відповідає значенню параметра $t = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

Рівняння дотичної в декартовій системі координат має вигляд

$$y = y_0 + y'_x(x - x_0),$$

де x_0, y_0 – координати точки кривої, через яку проходить дотична. Користуючись параметричними рівняннями циклоїди, знаходимо

$$x_0 = \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$y_0 = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Знайдемо похідні y'_t, x'_t при $t = \frac{\pi}{2}$:

$$y'_t = (1 - \cos t)' = \sin t\,, \qquad y'_t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$x'_t = (t - \sin t)' = 1 - \cos t, \qquad x'_t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отже, рівняння дотичної:

$$y = 1 + 1\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) = 1 + x - \frac{\pi}{2} + 1 = x + 2 - \frac{\pi}{2},$$

$$y = x + 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Похідна від функції, заданої неявно

Нехай функцію задано неявно $F(x, y(x)) = 0$. Щоб знайти похідну такої функції, необхідно знайти похідні від обох частин рівності по x, вважаючи $y(x)$ складеною функцією (від x), і з одержаного рівняння виразити $y'(x)$.

Приклад

Знайти y' від функції $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

Розв'язання

$$(x^2 + y^2 - 2y + 3x)' = 1',$$
$$2x + 2y \cdot y' - 2y' + 3 = 0,$$
$$y'(2y - 2) = -3 - 2x,$$
$$y' = -\frac{2x + 3}{2(y - 1)}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте спосіб параметричного задання функції. Наведіть приклад.
2. Як знайти похідну від функції, заданої параметрично?
3. Охарактеризуйте спосіб неявного задання функції. Наведіть приклад.
4. Як знайти похідну від функції, заданої неявно?

13. Теореми про середнє значення диференціального числення.

Теорема Ролля (13.1)

Нехай функція $f(x)$:
1) визначена і неперервна на відрізку $[a;\ b]$;
2) диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$;
3) на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$.
Тоді всередині інтервалу $(a;\ b)$ знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля

Якщо виконуються умови теореми Ролля, то $f'(c) = 0$ $(c \in (a; b))$, тобто на графіку функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна вісі Ox. При цьому таких точок на кривій може бути більше, ніж одна (рис. 5).

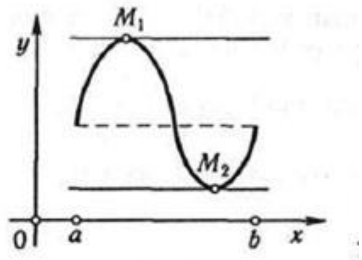


Рис. 5

Теорема Лагранжа (13.2)

Нехай функція $f(x)$:

1) визначена й неперервна на відрізку $[a;\ b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$.

Тоді всередині інтервалу $(a;\ b)$ знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій справджується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа

Якщо виконуються умови теореми Лагранжа, то на дузі AB знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до кривої паралельна хорді AB (рис. 6).

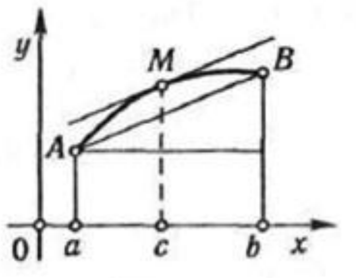


Рис. 6

Наслідок 1

Якщо функція $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$ диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ і $f'(x) = 0$ при будь-якому $x \in (a; b)$, то $f(x)$ на даному проміжку є сталою. І навпаки.

Отже, маємо **критерій сталості диференційовної функції на заданому проміжку**: для того, щоб диференційована на заданому проміжку функція $f(x)$ була сталою, необхідно й достатньо, щоб $f'(x)$ на цьому проміжку дорівнювала нулю.

Наслідок 2

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$ неперервні, диференційовні в інтервалі $(a;\ b)$ і при будь-якому $x \in (a; b)$ $f'(x) = \varphi'(x)$, то різниця $f(x) - \varphi(x)$ є величина стала.

Теорема Коші (13.3)

Нехай:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені й неперервні на відрізку $[a;\ b]$;

2) $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні в інтервалі $(a;\ b)$;

3) похідна $\varphi'(x)$ всередині інтервалу $(a;\ b)$ не дорівнює нулю.

Тоді всередині інтервалу $(a;\ b)$ знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що виконується рівність:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Ролля та розкрийте її геометричний зміст.
2. Сформулюйте теорему Лагранжа та розкрийте її геометричний зміст.
3. Сформулюйте наслідки з теореми Лагранжа.
4. Сформулюйте теорему Коші.

14. Застосування похідних до розкриття невизначеностей (правило Лопіталя)

Правило Лопіталя (13.4).

Розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Нехай для функцій $f(x)$ і $g(x)$ виконуються умови:

1) функції визначені на півінтервалі $(a;\ b]$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

2) функції диференційовані в інтервалі $(a;\ b)$, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$;

3) існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тоді існує границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, яка дорівнює також числу k:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Іншими словами, границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних цих функцій.

Зауваження

1. Якщо знайдені похідні також рівні нулю, то потрібно знайти похідні другого порядку, тобто застосувати правило Лопіталя двічі. Загалом, означене правило

можна застосовувати доти, доки не отримаємо відношення $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, яке при $x\to a$ має певну границю.

2. З того, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує, не випливає, що й $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ не існує.

3. Правило Лопіталя можна застосовувати і тоді, коли $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклади

Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+2}{x^4+x^3-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+2}{x^4+x^3-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-4x+2)'}{(x^4+x^3-2)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4}{4x^3+3x^2}=-\dfrac{1}{7}.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{2}=$

$$=\infty.$$

Розкриття невизначеності виду $(\mathbf{0}\cdot\infty)$

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тоді добуток $f(x)g(x)$ можна подати у вигляді частки:

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

У правій частині отримали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яка розкривається за правилом Лопіталя.

Приклад

Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Розкриття невизначеності виду $(\infty-\infty)$

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

Тоді різницю $f(x)-g(x)$ можна записати так:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)}}.$$

У правій частині отримали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яка розкривається за правилом Лопіталя.

Приклад

Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

Розкриття невизначеностей виду $(\mathbf{0^0})$, $(\infty^{\mathbf{0}})$, $(\mathbf{1}^\infty)$

Нехай маємо степінь $(f(x))^{g(x)}$ і:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

або

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\qquad\lim_{x\to a}g(x)=0$$

або

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Припустимо, що $f(x) > 0$, тоді

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

У показнику при $x \to a$ маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$, яка зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Приклади

Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin x} = [0^0] = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x \ln x)}$;

$$\lim_{x\to 0}(\sin x \ln x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} == \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x\cdot\cos x)'} == -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x + x\sin x}$$

$$= \frac{0}{1} = 0.$$

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{\sin 2x} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\sin 2x \ln(\mathrm{tg}x)} = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin 2x \ln(\mathrm{tg}x))}$;

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin 2x \ln(\mathrm{tg}x)) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{\sin 2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(\ln(\mathrm{tg}x))'}{\left(\frac{1}{\sin 2x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{-2\mathrm{tg}x\cdot\cos^2 x\cdot\cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2 2x}{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2 2x}{\sin 2x\cdot\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

$e^0 = 1.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)\right)}$;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)\right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos 2x))'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-2\sin 2x)}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = -2\cdot 1\cdot 1 =$$
$$= -2.$$

$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
2. Охарактеризуйте спосіб розкриття невизначеності виду $(0\cdot\infty)$.
3. Охарактеризуйте спосіб розкриття невизначеності виду $(\infty-\infty)$.
4. Охарактеризуйте спосіб розкриття невизначеностей виду (0^0), (∞^0), (1^∞).

15. Похідні та диференціали вищих порядків.

Похідна другого порядку

Визначення
Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(a;b)$ і всередині цього інтервалу вона має похідну $f'(x)$. **Похідною другого порядку**, або **другою похідною**, **від функції $f(x)$ в точці** x_0 називається похідна, якщо вона існує, від похідної першого порядку: $$y'' = (y')'$$
Позначення
y'', або $f''(x_0)$, або $\frac{d^2y}{dx^2}$, або $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$
Правило знаходження
Щоб знайти похідну другого порядку від функції, потрібно цю функцію продиференціювати два рази.
Механічний зміст
Величина прискорення a в даний момент часу t дорівнює другій похідній від пройденого шляху S по часу t, тобто $a = S''$, або, якщо $S = f(t)$, то $a = f''(t)$.
Приклад
Знайти y'' від функції $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

Розв'язання $y' = 3x^2 - 8x + 3,$ $y'' = 6x - 8.$

Похідна третього порядку

Визначення
Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(a; b)$ і всередині цього інтервалу вона має похідну другого порядку $f''(x)$. **Похідною третього порядку**, або **третьою похідною**, **від функції** $f(x)$ **в точці** x_0 називають похідну першого порядку, якщо вона існує, від похідної другого порядку: $y''' = (y'')'.$
Позначення
y''', або $f'''(x_0)$, або $\frac{d^3y}{dx^3}$, або $\frac{d^3f(x_0)}{dx^3}$
Правило знаходження
Щоб знайти похідну третього порядку від функції, потрібно цю функцію продиференціювати три рази.
Приклад
Знайти y''' від функції $y = \frac{1}{x}$. *Розв'язання* $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$, $y''' = -\frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$.

Від похідної третього порядку можна перейти до похідної четвертого, а від похідної четвертого – до похідної п'ятого і т. д.

Похідна *n*-го порядку

Визначення
Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(a; b)$ і всередині цього інтервалу вона має похідну $(n-1)$-го порядку $f^{(n-1)}(x)$. **Похідною *n*-го порядку**, або ***n*-ю похідною**, **від функції** $f(x)$ **в точці** x_0 називають похідну першого порядку, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$
Позначення
$y^{(n)}$, або $f^{(n)}(x_0)$, або $\frac{d^ny}{dx^n}$, або $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$
Правило знаходження
Щоб знайти похідну *n*-го порядку від функції, потрібно цю функцію

продиференціювати n разів.
Приклади 1. Знайти похідну шостого порядку від функції $y = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3$. *Розв'язання* $y' = 6x^5 + 10x^4 + 12x^3 + 6x^2$, $y'' = 30x^4 + 40x^3 + 36x^2 + 12x$, $y''' = 120x^3 + 120x^2 + 72x$, $y^{\mathrm{IV}} = 360x^2 + 240x + 72$, $y^{(5)} = 720x + 240$, $y^{(6)} = 720$. 2. Знайти похідну n-го порядку від функції: $y = x^\alpha$. *Розв'язання* $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, ... Можемо вивести формулу для обчислення похідної n-го порядку від даної функції: $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)x^{\alpha-n}$.

Формули для знаходження похідних *n*-го порядку від деяких функцій

$y = x^\alpha$	$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)x^{\alpha-n}$
$y = \ln x$	$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
$y = a^x$	$y^{(n)} = a^x \ln^n a$
$y = \sin x$	$y^{(n)} = \sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2} + x\right)$
$y = \cos x$	$y^{(n)} = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2} + x\right)$

Зауваження. Похідні першого, другого, третього і четвертого порядків позначають $y', y'', y''', y^{\mathrm{IV}}$ або $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), f^{\mathrm{IV}}(x_0)$. Похідні п'ятого порядку і вище позначають $y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, \dots, y^{(n)}$ або $f^{(5)}(x_0), f^{(6)}(x_0), f^{(7)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$.

Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому інтервалі $(a; b)$ і є диференційовною в цьому інтервалі. Тоді для такої функції в кожній точці інтервалу існує диференціал $dy = f'(x)dx$ (**диференціал першого порядку**, або **перший диференціал функції** $f(x)$). Диференціал першого порядку є функцією від x, $dx = const$.

Диференціалом другого порядку, або **другим диференціалом від функції** $f(x)$ називають диференціал, якщо він існує, від диференціала першого порядку і позначають d^2y :

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки $dy = f'(x)dx$, то

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx.$$

dx – стала величина, тому його можна виносити за знак операції диференціювання. Отже,

$$\boldsymbol{d^2y = f''(x)dx^2} \qquad (dx^2 = dx \cdot dx).$$

Диференціалом третього порядку, або **третім диференціалом від функції** $f(x)$ називають диференціал першого порядку, якщо він існує, від диференціала другого порядку і позначають d^3y :

$$d^3y = d(d^2y).$$

Оскільки $d^2y = f''(x)dx^2$, то

$$d^3y = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)'dx.$$

dx^2 – стала величина, тому його можна виносити за знак операції диференціювання. Отже,

$$\boldsymbol{d^3y = f'''(x)dx^3} \qquad (dx^3 = dx \cdot dx \cdot dx).$$

Аналогічно означаються диференціали четвертого, п'ятого й інших порядків.

Диференціалом *n*-го порядку, або ***n*-м диференціалом від функції** $f(x)$ називають диференціал першого порядку, якщо він існує, від диференціала $(n-1)$-го порядку і позначають d^ny :

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Відповідно,

$$\boldsymbol{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n} \qquad \left(dx^n = \underbrace{dx \cdot dx \cdot \ldots \cdot dx}_{n \text{ разів}}\right).$$

Приклад

Знайти диференціал другого порядку від функції $y = 2^{x^2}$.

Розв'язання

$y' = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2,$

$y'' = \ln 2\left(2 \cdot 2^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2\right) = 2\ln 2 \cdot 2^{x^2}(1 + \ln 2 \cdot x^2).$

$$d^2y = 2\ln 2 \cdot 2^{x^2}(1 + \ln 2 \cdot x^2)dx^2.$$

Зауваження. Диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми диференціала.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте визначення, правило находження та механічний зміст похідної другого порядку.
2. Сформулюйте визначення та правило находження похідної третього порядку.
3. Сформулюйте визначення та правило находження похідної n-го порядку.
4. Сформулюйте визначення та правило находження диференціала другого порядку.
5. Сформулюйте визначення та правило находження диференціала третього порядку.
6. Сформулюйте визначення та правило находження диференціала n-го порядку.

16. Формула Тейлора.

Формула Тейлора для многочлена

Нехай задано многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – дійсні числа – коефіцієнти многочлена.

Для зручності розпишемо ще кілька членів многочлена:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Виразимо коефіцієнти заданого многочлена через значення многочлена $P(x)$ та його похідні до n-го порядку включно в точці $x = 0$. Для цього продиференціюємо многочлен $P(x)$ n разів:

$$P'^{(x)} = 1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1},$$

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + n(n-1) a_n x^{n-2},$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \cdots + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3},$$

…………………………………………………………………………………………

$$P^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_{n-1} + n(n-1) \dots 2 a_n x,$$

$$P^{(n)}(x) = n!\, a_n.$$

При $x = 0$

$$a_0 = P(0),$$

$$a_1 = \frac{P'(0)}{1!},$$

$$a_2 = \frac{P''(0)}{2!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1} = \frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!},$$

$$a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Тоді многочлен $P(x)$ матиме вигляд:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Многочлен $P(x)$ можна також записати за степенями різниці $x - x_0$, де x_0 – довільне дійсне число, тобто

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{P^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Приклад

Записати многочлен $x^4 - 4x^3 - 2x + 3$ за степенями двочлена $x - 4$.

Розв'язання

Нехай дано многочлен $P(x) = x^4 - 4x^3 - 2x + 3$.

Знайдемо значення $P(x)$, а також похідних $P(x)$ у точці $x_0 = 4$:

$$P(4) = 256 - 256 - 8 + 3 = -5,$$
$$P'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 2, \quad P'(4) = 256 - 192 - 2 = 62,$$
$$P''(x) = 12x^2 - 24x, \quad P''(4) = 192 - 96 = 96,$$
$$P'''(x) = 24x - 24, \quad P'''(4) = 72,$$
$$P^{IV}(x) = 24.$$

Тоді за формулою Тейлора маємо:

$$x^4 - 4x^3 - 2x + 3 = -5 + 62(x - 4) + 48(x - 4)^2 + 12(x - 4)^3 + (x - 4)^4.$$

Формула Тейлора для довільної функції

Нехай задано довільну функцію $f(x)$, яка в околі деякої точки $x_0 \in (a; b)$ має похідні до n-го порядку включно. Тоді для такої функції можна побудувати многочлен, який називають **многочленом Тейлора для функції $f(x)$**:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{P^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Розглянемо різницю:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Тоді

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

або

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$+ r_n(x).$$

Останню формулу називають формулою Тейлора для функції $f(x)$, а функцію $r_n(x)$ – додатковим членом формули Тейлора.

Теорема 16.1. Якщо $f(x)$ на відрізку $[x_0 - h;\ x_0 + h], h > 0$, має неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то додатковий член $r_n(x)$ у формулі Тейлора для цієї функції можна записати у вигляді

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$.

Отже, маємо **формулу Тейлора із додатковим членом у формі Лагранжа**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

для всіх $x \in [x_0 - h;\ x_0 + h], h > 0$.

Якщо в формулі Тейлора прийняти $x_0 = 0$, отримаємо так звану **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

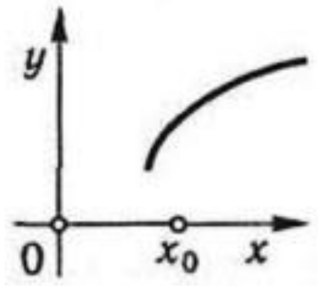
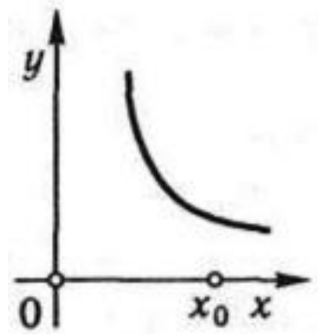
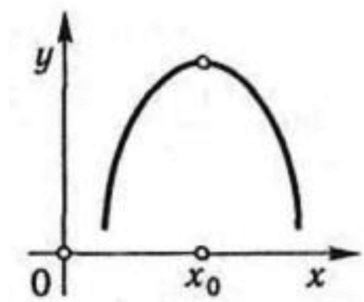
Завдання для самоконтролю

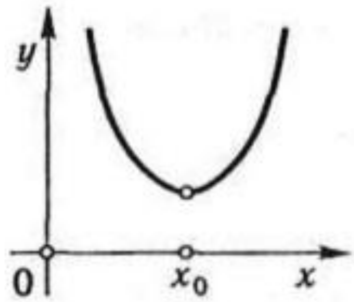
1. Виведіть формулу Тейлора для многочлена.

2. Виведіть формулу Тейлора для довільної функції.
3. Сформулюйте теорему про додатковий член у формулі Тейлора для функції.
4. Запишіть формулу Тейлора із додатковим членом у формі Лагранжа.
5. Запишіть формулу Маклорена.

17. Зростання й спадання функції. Екстремальні точки.

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$, а точка x_0 є внутрішньою точкою цього проміжку.

Назва поняття	Означення поняття	Рисунок
Зростаюча функція	Функція $f(x)$ називається **зростаючою в точці** x_0, якщо існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x) < f(x_0)$, для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f(x) > f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ (рис. 7).	 Рис. 7
Спадна функція	Функція $f(x)$ називається **спадною в точці** x_0, якщо існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a; b\rangle$ і такий, що $f(x) > f(x_0)$, для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ (рис. 8).	 Рис. 8
Точка максимуму та максимум функції	Якщо існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ точки x_0, який міститься в проміжку $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)(x \neq x_0)$, то точку x_0 називають **точкою максимуму функції** $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ – **максимумом функції** $f(x)$ (рис. 9).	 Рис. 9

Точка мінімуму та мінімум функції	Якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ точки x_0, який міститься в проміжку $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)(x\neq x_0)$, то точку x_0 називають **точкою мінімуму функції** $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ – **мінімумом функції** $f(x)$ (рис. 10).	 Рис. 10

Зауваження. Точки максимуму і мінімуму функції називають **екстремальними точками**, а сам максимум і мінімум – **екстремумом функції**.

Якщо функція є зростаючою (спадною) в кожній внутрішній точці проміжку $\langle a;b\rangle$, то вона називається зростаючою (спадною) на цьому проміжку.

Теорема 17.1 (достатня умова монотонності функції). Нехай функція $f(x)$ у кожній внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;b\rangle$ має похідну $f'(x_0)$. Тоді:

1) якщо $f'(x_0)>0$, функція $f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ зростає;

якщо $f'(x_0)<0$, функція $f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ спадає.

Теорема 17.2. Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;b\rangle$ має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Теорема 17.3 (необхідна умова існування екстремуму функції). Екстремум може існувати тільки в тих точках, де похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю, або в точках, де похідна не існує.

Стаціонарна точка – внутрішня точка проміжку, в якій похідна дорівнює нулю. Стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називаються **критичними точками функції**.

Теорема 17.4 (достатня умова існування екстремуму функції). Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці є неперервною, і нехай існує окіл точки $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, в якому $f(x)$ має похідну, крім, можливо, точки x_0. Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\ x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\ x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має ой самий знак (набуває або тільки додатних, або тільки від'ємних значень), то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Рис. 11 ілюструє співвідношення між критичними точками та точками екстремуму.

Рис. 11

Алгоритм дослідження функції на екстремум

1. Знайти область визначення заданої функції.
2. Знайти критичні точки заданої функції із рівняння $f'(x) = 0$, вибрати серед них ті, що входять до області визначення функції.
3. Дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки.
4. Визначити екстремальні точки функції.
5. Знайти значення функції в екстремальних точках.

Приклад

Дослідити функції на екстремум:

а) $y = x^3$;

б) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = x^3 + 5x^2 - 8x - 1$.

Розв'язання

а) $y = x^3$.

1. Областю визначення функції є множина дійсних чисел.
2. Знайдемо критичні точки заданої функції.

$$y' = 3x^2.$$

Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$3x^2 = 0,$$

$$x = 0.$$

Точок, в яких похідна не існує, немає.

3. Дослідимо знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки (рис. 12).

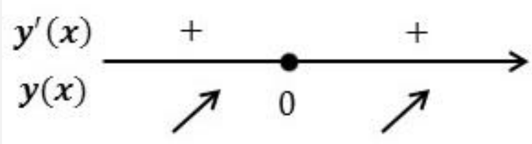


Рис. 12

4. $y'(x)$ при переході через критичну точку $x = 0$ не змінює знак. Отже, $x = 0$ не є екстремальною точкою. Функція $y = x^3$ екстремуму не має.

б) $y = \sqrt{x}$.

1. Областю визначення функції є множина чисел $[0;\ +\infty)$.
2. Знайдемо критичні точки заданої функції.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Рівняння не має дійсних коренів. Однак є точка, в якій похідна не існує: $x = 0$. Отже, $x = 0$ – критична точка заданої функції.

3. $y'(x) > 0$ для всіх $x \neq 0$. Тому $x = 0$ не є екстремальною точкою. Функція $y = \sqrt{x}$ екстремуму не має.

в) $y = x^3 + 5x^2 - 8x - 1$.

1. Областю визначення функції є множина дійсних чисел.
2. Знайдемо критичні точки заданої функції.

$$y' = 3x^2 + 10x - 8.$$

Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$3x^2 + 10x - 8 = 0,$$
$$(3x - 2)(x + 4) = 0,$$
$$x = \frac{2}{3} \text{ або } x = -4.$$

Точок, в яких похідна не існує, немає.

3. Дослідимо знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки (рис. 13).

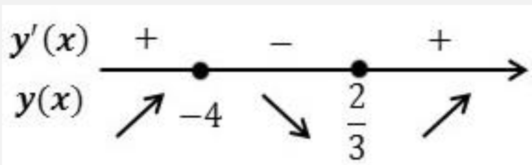


Рис. 13

4. Точка $x = -4$ є точкою максимуму заданої функції, а точка $x = \frac{2}{3}$ – точкою мінімуму.
5. Знайдемо значення функції в екстремальних точках.

$$f_{max} = f(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) - 1 = 47,$$

$$f_{min} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 1 = -\frac{103}{27} = -3\frac{22}{27}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Дайте означення зростаючої (спадної) функції в точці, на проміжку?
2. Дайте означення екстремальних точок та екстремумів функції.
3. Сформулюйте достатню умову монотонності функції.
4. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції.
5. Які точки називають стаціонарними?
6. Які точки називають критичними?
7. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції.
8. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на екстремум.

18. Найбільше і найменше значення функції.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $f(x)$. Тоді. За теоремою Вейєрштраса, така функція на даному відрізку буде набувати своїх найбільшого і найменшого значень: у внутрішніх точках відрізка (рис. 14), на його кінцях (рис. 15) або і там, і там (рис. 16).

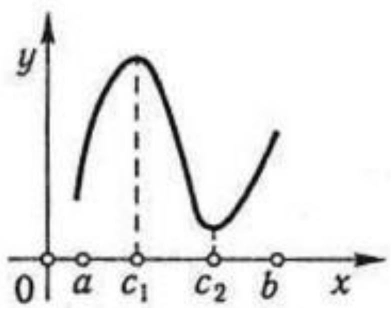


Рис. 14

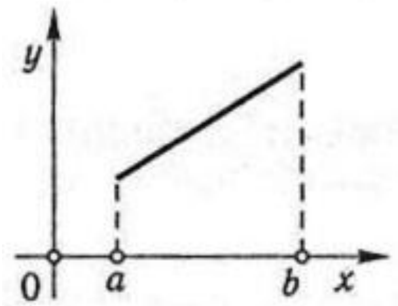


Рис. 15

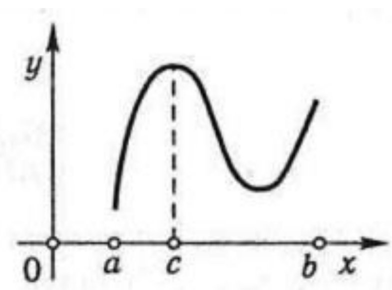


Рис. 16

Алгоритм знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на відрізку

1. Знайти критичні точки функції на заданому відрізку.

2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка.

3. Порівняти між собою отримані значення функції. Найбільше (найменше) число серед утвореної множини буде найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку.

Приклад

Знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку:

а) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6,\ x \in [-2;\ 0]$;

б) $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x\,,x \in [0;\ \pi]$.

Розв'язання

а) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6,\ x \in [-2;\ 0]$.

1. Знайдемо критичні точки функції на заданому відрізку.

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12,$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0,$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

З-поміж отриманих критичних точок заданому проміжку належить тільки одна: $x = -\frac{1}{2}$.

2. Обчислимо значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\frac{1}{4}$,

$f(-2) = -38$,

$f(0) = 6$.

3. Найбільшим значенням функції є значення в точці $x = -\frac{1}{2}$, яке дорівнює $9\frac{1}{4}$.
Найменшим значенням функції є значення в точці $x = -2$, яке дорівнює -38.
Зробимо символічний запис:

$\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\frac{1}{4}$;

$\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

б) $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x\,,x \in [0;\ \pi]$.

1. Знайдемо критичні точки функції на заданому відрізку.

$$f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x.$$

$$\sin 3x \sin x = 0,$$

$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ або } x = \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, точки виду $x = \frac{\pi k}{3}$ є критичними точками заданої функції. З них проміжку $[0;\ \pi]$ належать чотири: $0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \pi$.
2. Обчислимо значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка.
$f(0) = f(\pi) = 0,$
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},$
$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$
3.
$\max\limits_{[0;\ \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3};$
$\min\limits_{[0;\ \pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$

Завдання для самоконтролю

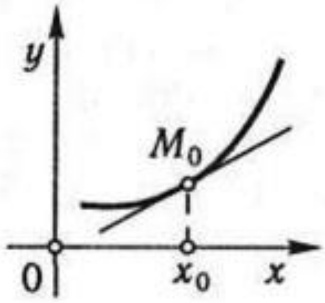
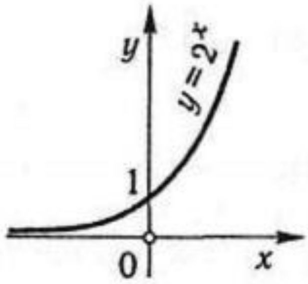
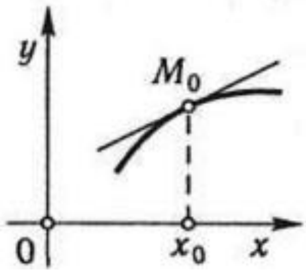
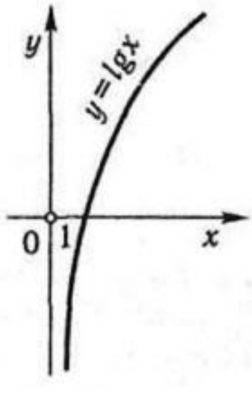
1. Наведіть приклад набуття функцією своїх найбільшого і найменшого значень у внутрішніх точках відрізка
2. Наведіть приклад набуття функцією своїх найбільшого і найменшого значень на кінцях відрізка.
3. Наведіть приклад набуття функцією своїх найбільшого і найменшого значень у внутрішній точці відрізка і на його кінці?
4. У чому полягає відмінність між поняттями «максимум (мінімум) функції» та «найбільше (найменше) значення функції»?
5. Сформулюйте алгоритм знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на відрізку.

19. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна функція, що має неперервну похідну $f'(x)$ на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$. Тоді в кожній точці такої кривої можна провести дотичну. Такі криві називають **гла́дкими** кривими.

Візьмемо на кривій довільну точку $M_0(x_0;\ y_0)$, де $x_0 \in \langle a; b\rangle$, $y_0 = f(x_0)$.

Назва поняття	Означення поняття
Вгнута крива	Якщо існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \subset \langle a; b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ відповідні точки кривої

	лежать над дотичною, проведеною до кривої в точці M_0, то крива **в точці** M_0 називається **вгнутою** (рис. 17). Крива називається **вгнутою на проміжку**, якщо вона вгнута в кожній точці даного проміжку (рис. 18).  Рис. 17 Рис. 18
Опукла крива	Якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)\subset\langle a;b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $(x\neq x_0)$ відповідні точки кривої лежать під дотичною, проведеною до кривої в точці M_0, то крива в точці M_0 називається **опуклою** (рис. 19). Крива називається **опуклою на проміжку**, якщо вона опукла в кожній точці даного проміжку (рис. 20).  Рис. 19 Рис. 20
Точка перегину кривої	Точка M_0 називається **точкою перегину кривої**, якщо існує окіл $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)\subset\langle a;b\rangle$ точки x_0 такий, що для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ крива опукла (вгнута), а для всіх $x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ крива вгнута (опукла) (рис. 21, 22).

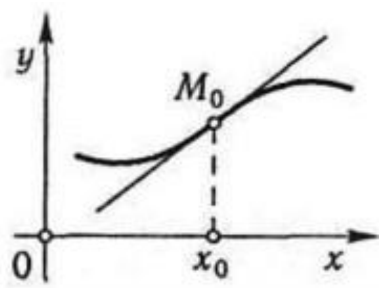


Рис. 21

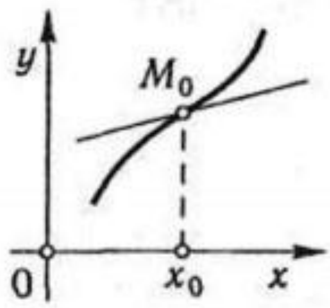


Рис. 22

Теорема 18.1 (достатня умова опуклості та вгнутості кривої). Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$ і в кожній внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a; b\rangle$ існує друга похідна $f''(x_0)$. Тоді:

1) якщо $f''(x_0) > 0$, крива на проміжку $\langle a; b\rangle$ вгнута;

якщо $f''(x_0) < 0$, крива на проміжку $\langle a; b\rangle$ опукла.

Теорема 18.2. Якщо x_0 – абсциса точки перегину графіка кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, то друга похідна в цій точці $f''(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Теорема 18. 3(необхідна умова існування точок перегину кривої). Точка перегину може існувати тільки в тих точках, де друга похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю, або в точках, де друга похідна не існує.

Точки, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками другого роду**.

Теорема 18.4 (достатня умова існування точок перегину кривої). Нехай x_0 – критична точка другого роду кривої $y = f(x)$, яка в цій точці є неперервною, і нехай існує окіл точки $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому $f(x)$ має другу похідну, крім, можливо, точки x_0. Тоді якщо при проходженні через точку x_0 друга похідна змінює знак, то ця точка є точкою перегину функції, якщо ж при проходженні через точку x_0 друга похідна не змінює знак, то ця точка не є точкою перегину.

Алгоритм знаходження точок перегину кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$

1. Знайти від функції $f(x)$ похідну другого порядку $f''(x)$ і цю похідну прирівняти до нуля: $f''(x) = 0$. З коренів рівняння вибрати тільки дійсні корені й ті, які належать області визначення функції.

2. Дослідити знак другої похідної зліва й справа від кожної вибраної точки. Якщо при переході через досліджувану точку знак другої похідної змінюється, то обрана точка є точкою перегину, якщо знак другої похідної не змінюється, то обрана точка не є точкою перегину.

3. Знайти другі координати точок перегину кривої.

Приклад

Знайти інтервали вгнутості й опуклості та точки перегину кривої, заданої рівнянням $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Розв'язання

1. Знайдемо від функції $f(x)$ похідну другого порядку $f''(x)$ і розв'яжемо рівняння: $f''(x) = 0$.

$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x$,

$y'' = 12(3x^2 - 4x + 1)$.

$3x^2 - 4x + 1 = 0$,

$x = \dfrac{1}{3}$ або $x = 1$.

2. Дослідимо знак другої похідної зліва й справа від кожної вибраної точки (рис. 23).

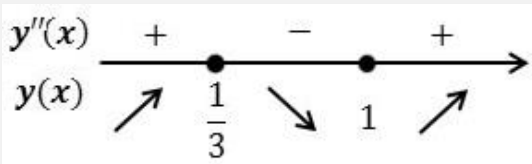


Рис. 23

Отже, крива вгнута в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), (1; +\infty)$. Крива опукла в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

3. Точки перегину кривої: $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right), (1; 13)$.

Завдання для самоконтролю

1. Які криві називають гладкими?
2. Сформулюйте означення вгнутої кривої в точці, на проміжку.
3. Сформулюйте означення опуклої кривої в точці, на проміжку.
4. Сформулюйте означення точки перегину кривої.
5. Сформулюйте достатню умову опуклості та вгнутості кривої.
6. Сформулюйте необхідну умову існування точок перегину кривої.

7. Які точки називають кривої називають критичними точками другого роду?

8. Сформулюйте достатню умову існування точок перегину кривої.

9. Сформулюйте алгоритм знаходження точок перегину кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$.

20. Асимптоти кривих

Df

Пряма l називається **асимптотою кривої**, якщо відстань MN від точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M по кривій рухається в нескінченність (рис. 24), тобто

$$\lim_{M\to\infty} MN = 0.$$

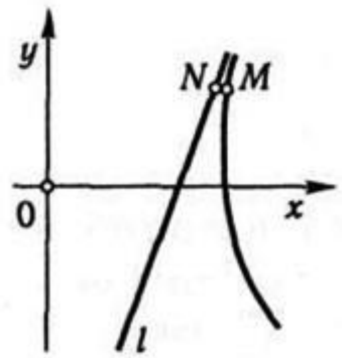


Рис. 24

Розрізняють вертикальні і похилі асимптоти.

Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$.

Рівняння **вертикальної асимптоти** $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Іншими словами, вертикальна асимптота завжди проходить через точки розриву функції.

Рівняння **похилої асимптоти** має вигляд $y = kx + b$,
де

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо $k = 0$, то маємо рівняння **горизонтальної асимптоти**: $y = b$.

Приклад

Знайти асимптоти кривої, заданої рівнянням $y = \frac{2x}{x-2}$.

Розв'язання

1. Вертикальна асимптота має рівняння $x = 2$, оскільки

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x-2}=\infty.$$

2. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(x-2)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x-2}-0\cdot x\right)=2.$$

Отже, похила асимптота має рівняння $y=2$.

Завдання для самоконтролю

1. Що називають асимптотою кривої?
2. Як знайти вертикальні асимптоти кривої?
3. Як знайти похилі асимптоти кривої?
4. Як співвідносяться похилі й горизонтальні асимптоти?

21. План дослідження функції та побудова її графіка

План дослідження функції та побудова її графіка

1. Знаходження області визначення функції.
2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.
3. Дослідження функції на періодичність.
4. Дослідження функції на парність (непарність).
5. Дослідження функції на наявність асимптот.
6. Знаходження екстремальних точок та інтервалів монотонності функції.
7. Знаходження точок перегину та інтервалів опуклості (вгнутості) функції.
8. Побудова графіка функції згідно з проведеним дослідженням.

Приклад

Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

1. Знаходження області визначення функції.

$$D(y):(-\infty;\ -1)\cup(-1;1)\cup(1;\ +\infty).$$

2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.

Точки перетину з віссю *Oy* $(x=0)$: $(0;0)$.

Точки перетину з віссю *Ox* $(y=0)$: $(0;0)$.

Отже, графік проходить через початок координат.

3. Дослідження функції на періодичність.

Функція неперіодична.

4. Дослідження функції на парність (непарність).

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x).$$

Отже, задана функція непарна. Графік функції симетричний відносно початку координат.

5. Дослідження функції на наявність асимптот.

Вертикальні асимптоти мають рівняння $x = 1$ та $x = -1$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0.$$

Отже, похила асимптота має рівняння $y = x$.

6. Знаходження екстремальних точок та інтервалів монотонності функції.

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0,$$

$$x = 0 \text{ або } x = \sqrt{3} \text{ або } x = -\sqrt{3}.$$

При цьому похідна не існує в точках $x = 1$ та $x = -1$. Оскільки вони не належать області визначення функції, їх не враховуємо. Отже, критичні точки: $-\sqrt{3};\ 0;\ \sqrt{3}$.

Дослідимо знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки (рис. 25).

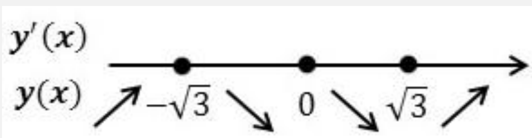


Рис. 25

$$x_{\max} = -\sqrt{3}; \quad y\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$x_{\min} = \sqrt{3}; \quad y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

7. Знаходження точок перегину та інтервалів опуклості (вгнутості) функції.

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Розв’яжемо рівняння $y'' = 0$:

$$\frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0,$$

$$x = 0.$$

Точки, в яких похідна не існує, співпадають із точками, в яких не існує функція. Їх не враховуємо.

Дослідимо знак другої похідної зліва й справа від точки $x = 0$ (рис. 26).

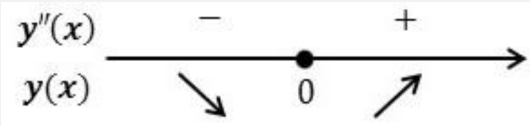


Рис. 26

Отже, $x = 0$ – точка перегину функції.

9. Побудова графіка функції згідно з проведеним дослідженням.

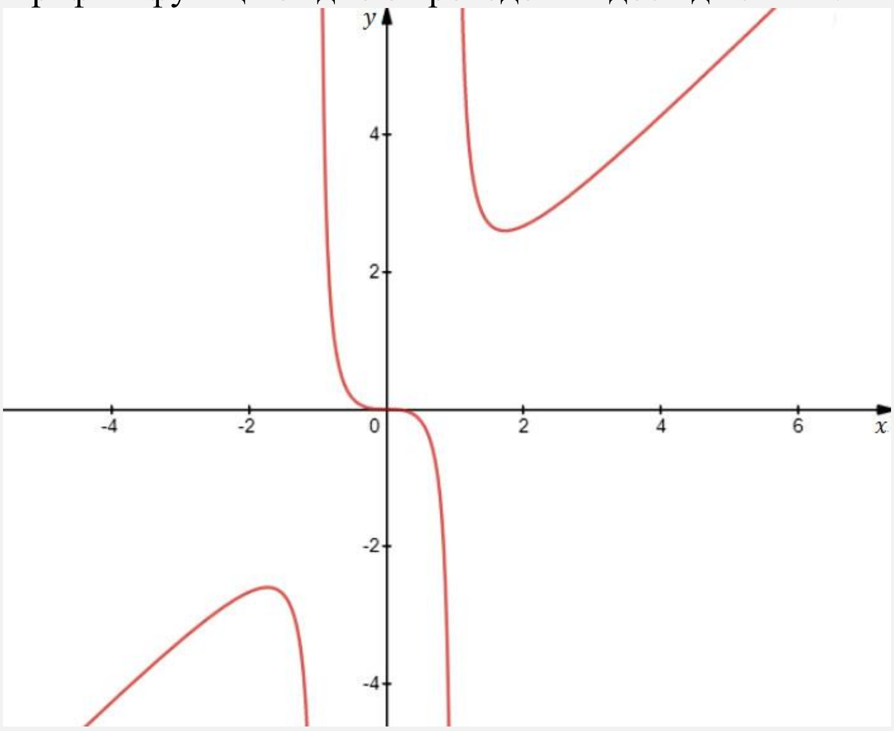


Рис. 27

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте план дослідження функції для побудови її графіка.
2. Розкрийте зміст кожного етапу.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

1. Границя послідовності. Розкриття невизначеностей

1. Довести, що послідовність є зростаючою, якщо:

1) $y_n = 5n - 12$;

2) $y_n = n^2 + n - 1$;

3) $y_n = 3^n - 2^n$;

4) $y_n = \dfrac{n}{n+1}$;

5) $y_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$;

6) $y_n = \dfrac{3^n}{n+1}$.

2. Довести, що послідовність є спадною, якщо:

1) $y_n = 11 - 3n$;

2) $y_n = -n^2 + n + 1$;

3) $y_n = \dfrac{n+1}{n}$;

4) $y_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$;

5) $y_n = \dfrac{n+1}{(n+2)n}$;

6) $y_n = \dfrac{n}{4^n}$.

3. Довести, що границею послідовності $y_n = \frac{n-1}{n}$ є число 1.

4. Довести, що границею послідовності $y_n = \frac{n}{n+1}$ є число 1.

5. Довести, що границею послідовності $y_n = \frac{2n+1}{n+2}$ є число 2.

6. Довести, що границею послідовності $y_n = \frac{3n+1}{n-1}$ є число 3.

7. Довести, що послідовність має границю:

1) $y_n = -\dfrac{3n+1}{1-n}$;

2) $y_n = \dfrac{3n+7}{1-2n}$;

3) $y_n = \dfrac{5-4n}{3-2n}$;

4) $y_n = \dfrac{2n-1}{3-4n}$.

8. Обчислити границю послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{11-4n}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n+1}{2n+5}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-5}{3-2n^3}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2-4n+1}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+4}{n(2-5n)}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-1}{3n^3+n+1}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n+2}{2n^2-4n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}+1)^2-n}{\sqrt{n}}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-n\right)$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+8n+5}{2n-3}-2n\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{2n+1}-\dfrac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2}\right)$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-3n^2}}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}-3n}{n}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-5}\right)$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1})$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-n\right)$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;

32) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2-5n+3}\right)$;

33) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}$;

34) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$;

35) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)!+4(n+2)!}{(3n-1)(n+1)!}$;

36) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)!+2(n+4)!}{4(n+5)!-3(n+3)!}$.

2. Границя функції в точці. Розкриття невизначеностей

Обчислити границю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+5}{x^2+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5}{x^3-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}4^{\frac{2x}{x+1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

12) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$;

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}$;

14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

15) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$;

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{9x^2-8x-1}$;

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3x^3-3x^2+x-2}{x-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

24) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

26) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

28) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;

30) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

3. Перша та друга важливі границі

1. Обчислити границю, використовуючи теорему про першу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\operatorname{tg} 2x}{4x-\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$;

12) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

2. Обчислити границю, використовуючи теорему про другу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{x^3}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

4. Похідні від елементарних функцій. Похідні від суми, добутку, частки. Похідні складених і степенево-показникових функцій. Похідні функцій, заданих параметрично та неявно

1. Знайти похідну від заданої функції за означенням:

1) $y = 3x - 2$;

2) $y = 3x^2$;

3) $y = \frac{2}{x}$;

4) $y = \sin 5x$;

5) $y = \cos 2x$;

6) $y = \ln x$;

7) $y = e^x$.

2. Знайти похідну функції, застосовуючи правила диференціювання суми, добутку, частки функцій:

1) $y = 4x^2 - 5x + 8$;

2) $y = -\frac{1}{x^2}$;

3) $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}$;

5) $y = \frac{ax+b}{a+b}, a, b - const$;

6) $y = x^2(3x-2)$;

7) $y = (x+2)\sqrt{x}$;

8) $y = x^2 \sin x$;

9) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

10) $y = \frac{2x}{1-x^2}$;

11) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

3. Знайти похідну складеної функції:

1) $y = \sin^2 x$;

2) $y = \sin x^2$;

3) $y = \cos^3 \frac{x}{2}$;

4) $y = \cos \frac{x^3}{2}$;

5) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

6) $y = \ln(\ln x)$;

7) $y = \ln^2 x$;

8) $y = \ln x^2$;

9) $y = \ln\left(\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}\right)$;

10) $y = e^{-x^2}$;

11) $y = \arccos\frac{1}{x}$;

12) $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

13) $y = (\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x)^2$;

14) $y = \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right)^2$;

15) $y = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

16) $y = \ln\left(\mathrm{ctg}x + \frac{1}{\sin x}\right)$;

17) $y = \arccos\sqrt{x}$.

4. Знайти похідну:

1) $y = x^2 e^{-x}$;

2) $y = \left(x + \frac{2}{x}\right)(x^2 - 5)$;

3) $y = e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 8)$;

4) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

5) $y = \frac{\arcsin x}{x}$;

6) $y = \frac{x + e^{2x}}{x - e^{2x}}$;

7) $y = (4x + 1)\mathrm{ctg}(4x + 1)$;

8) $y = \cos^2 2x + 2^{2-x}$;

9) $y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$;

10) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x$.

5. Знайти похідну степенево-показникової функції:

1) $y = x^x$;

2) $y = x^{x^x}$;

3) $y = x^{\ln x}$;

4) $y = (\mathrm{tg}x)^{\sin x}$;

5) $y = (\sin x)^{3e^x}$;

6) $y = (\arcsin x)^{e^x}$;

7) $y = (\ln 3x)^{\sqrt{x}}$;

8) $y = (x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

6. Обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ в точці x_0:

1) $y = 3x^2 + 2, \quad x_0 = 2{,}01$;

2) $y = x^{10} + 1, \quad x_0 = 0{,}997$;

3) $y = x^4, \quad x_0 = 3{,}07$;

4) $\sqrt[3]{7{,}98}$;

5) $\sqrt[3]{26}$;

6) $\sqrt[5]{32{,}02}$;

7) $\mathrm{tg}(46°)$;

8) $\arcsin 0{,}51$;

9) $\mathrm{arctg}(1{,}05)$.

7. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 + 8t - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2t + \sin 2t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln t; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \mathrm{tg}\sqrt{1 + t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = a\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$

8. Знайти похідну функції, заданої неявно:

1) $e^y - y + 5x = 0$;

2) $y = x + \mathrm{arctg} y$;

3) $y - 5 = 6x^3 + \dfrac{y}{x}$;

4) $y\cos xy = x^2 - 4$;

5) $\ln(x^2 + 2y) = 4x + 1$;

6) $x^3 + y^3 = \sin(x + 3y)$;

7) $y = 2^x(y^3 + 5xy) = \sin x$;

8) $e^y \cos x = 2x^2y^2$.

9. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0;\ y_0)$:

1) $y = x^2 + 3x, x_0 = -1$;

2) $y = x^3 - 27, x_0 = 2$;

3) $y = \sin x, x_0 = 0$;

4) $y = \sqrt{3x^2 - 2}, x_0 = -1$.

10. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці його перетину з віссю ординат:

1) $y = x^2 - 3x - 3$;

2) $y = 2x^3 - 5x + 2$;

3) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

11. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці його перетину з віссю абсцис:

1) $y = 8x^3 - 1$;

2) $y = 3x - x^2$;

3) $y = x - \frac{1}{x}$;

4) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

12. Знайти координати точки параболи $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до неї паралельна прямій $y = 7x - 8$.

13. У яких точках дотичні до графіка функції $y = \frac{2}{x}$ паралельні прямій $y = -x$?

14. До графіка функції $y = 2\sin x + 3\cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_1 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення цих дотичних?

5. Знаходження границь функцій із застосуванням правила Лопіталя

1. Знайти границі функцій із застосуванням правила Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{\ln(x-1)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}$;

7) $\lim\limits_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x-b}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\mathrm{arctg}5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+x}{\ln(1-2x)}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$;

12) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\pi - \mathrm{arctg}x}{e^{\frac{1}{x}}-1}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.

2. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to0}(x^2\ln x)$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((2x-\pi)\mathrm{tg}x)$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$;

11) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{4}{x}}$.

3. Знайти другу похідну функції:

1) $y=2x(4-x)^2$;

2) $y=x^2e^{2x}$;

3) $y=(x^2+1)\ln(x+1)$;

4) $y=(2+x^2)\ln^2x$;

5) $y=x\cos x^2$;

6) $y=\cos^2 2x+2^{2-x}$;

7) $y=\frac{x-3}{x+3}$;

8) $y=\frac{\ln x}{x^3}$;

9) $y=2x+\sqrt{1-x}$;

10) $y=\mathrm{tg}(\ln 5x)$.

6. Дослідження функції на екстремум. Знаходження найбільшого й найменшого значень функції на відрізку. Дослідження функції на наявність асимптот

1. Дослідити функцію на екстремум та знайти інтервали її монотонності:

1) $y=2x^3-9x^2+12$;

2) $y=\sqrt[3]{x}+3$;

3) $y=2+x-3\sqrt[3]{x^2}$;

4) $y=x-\ln(x+1)$;

5) $y=\ln x-\frac{x-2}{x+2}$;

6) $y=(x-3)\sqrt{x}$;

7) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$;

8) $y=x^2\sqrt{1-x}$;

9) $y=(1-x)\sqrt{x}$;

10) $y=x^2\sqrt{x+2}$;

11) $y=xe^{2x}$;

12) $y=x^2e^{-2x}$;

13) $y=\frac{x^2}{x-2}$;

14) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$;

15) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 2}$;

16) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x}}$;

17) $y = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x - 1}}$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

1) $y = 3x^2 - x^3, \quad [-1; 3]$;

2) $y = 2x^3 - 9x^2 - 3, \quad [-1; 4]$;

3) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}, \quad [-3; 0]$;

4) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}, \quad [0{,}5; 3]$;

5) $y = x^2 + 4x + \dfrac{16}{x + 2}, \quad [-1; 2]$;

6) $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 3}, \quad [-2; 1]$;

7) $y = (3 - x)e^{-x}, \quad [0; 5]$;

8) $y = \dfrac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, \quad [-3; 3]$;

9) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}, \quad [-3; 2]$;

10) $y = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6; 8]$;

11) $y = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}, \quad [2; 4]$;

12) $y = (x + 1)^2(x - 2)^2, \quad [-2; 4]$;

13) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}, \quad [-4; -1]$;

14) $y = \sqrt{9 + 8x - x^2}, \quad [0; 7]$;

15) $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad [-2; 4]$;

16) $y = (x - 1)^2(x + 5)^2, \quad [-3; 2]$;

17) $y = -x - \dfrac{9}{x}, \quad [-6; -1]$;

18) $y = \operatorname{arctg} x^2, \quad [0; 1]$;

19) $y = \sin x - \cos x, \quad [0; \pi]$;

20) $y = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right), \quad \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$;

21) $y = 4x - 2\sin 4x, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

22) $y = x\sqrt{3} - \cos 2x, \quad -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}$;

23) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x, \quad [0; \pi]$;

24) $y = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right), \quad \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right].$

3. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{2}{x-1}$;

2) $y = \frac{1}{x+1}$;

3) $y = \frac{1}{x^2}$;

4) $y = \frac{2}{|3x|}$;

5) $y = \frac{1}{|x+\sqrt{2}|}$;

6) $y = \frac{x+2}{x-2}$;

7) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

8) $y = \mathrm{ctg}x$;

9) $y = \frac{1}{\sin x}$;

10) $y = \frac{1}{\cos x}$;

11) $y = \frac{1}{\arcsin x}$;

12) $y = \frac{1}{\arccos x}$.

4. Знайти похилі асимптоти графіка функції:

1) $y = x + \frac{1}{x}$;

2) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

3) $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$;

4) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

5) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$;

6) $y = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$;

7) $y = \frac{x^4-8}{(x+2)^4}$.

7. Дослідження функції та побудова її графіка

Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$;

2) $y = \frac{x^2}{1+x}$;

3) $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

4) $y = \frac{2x-x^2}{x-1}$;

5) $y = \frac{x}{1-x^2}$;

6) $y = \frac{4}{x^2} - x$;

7) $y = \frac{x}{\ln x}$;

8) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$;

9) $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$;

10) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$;

11) $y = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$;

12) $y = \frac{2x}{x^3-8}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Границя послідовності. Границя функції в точці. Неперервність функції

	Довести, що послідовність $\{y_n\}$ має границю.	**Обчислити границю послідовності.**
	1	**2**
1	$y_n = \dfrac{2n+1}{n-2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^3-1}$
2	$y_n = \dfrac{4n+1}{n-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n^4-3}$
3	$y_n = \dfrac{n+7}{n+2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3n^2-3}$
4	$y_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-10}{10n^2-1}$
5	$y_n = \dfrac{4n-1}{2n+3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{100}$
6	$y_n = \dfrac{n+7}{n-7}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{(n-1)^3}$
7	$y_n = \dfrac{2n+3}{2n+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2}{3-n^2}$
8	$y_n = \dfrac{n-10}{n+11}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-n^3}{3n^5}$
9	$y_n = \dfrac{11n+1}{n+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{23n^2-1}{23n^4-1}$
10	$y_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^7-2}{3n^2-1}$
11	$y_n = \dfrac{2n}{n-4}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6-7}{n^7-6}$
12	$y_n = \dfrac{6n}{3n+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n^2}{2-n^3}$
13	$y_n = \dfrac{5n}{n+3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^5+6}$
14	$y_n = \dfrac{1-2n}{n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9-n^2}{n-3}$

15	$y_n = \dfrac{6-n}{3-n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-4}{n+4}$

Обчислити границю послідовності.		
	3	**4**
1	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-2}{3n^2-3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(9-n)(n^2+9)+n^3}{n^2+4n}$
2	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+4}{2n+3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(n-2)+1}{(2n+3)(2n+1)}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{2n^2+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(2n-1)(4-n^2)+4n^3}{2n^2+1}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5}{3n^2+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2-1)(n^3+1)-2n^5}{2-n^3}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-1}{7n^3+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-(n+2)(2n+3)}{n^2+1}$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9-n^3}{2n^3+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2+8)(2n^2-3)+1}{12n^4}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2+2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-3)(2-n^2)+n^3}{1-3n^2}$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3}{2n^2+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(3n^2+2)-6n^3}{(3+n)(n+1)}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n^2}{4n^2+2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-(n^2+3)(n-2)}{(7n-1)(n^2+2)}$
10	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-1}{2n^2+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4+(n^2+3)(n^2-8)}{2(n^4+1)+3n^2(n^2+1)}$
11	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{1-2n^2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4+n)(n^2-3)+n^3}{(n^2+1)(n-7)}$
12	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+1}{3n^3-5}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n^2-12)-n^4}{n^2+1}$
13	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+(n+2)(27n+1)}{(6n^2+1)(n+3)}$
14	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{2-n^2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+10n+25}+n^2}{2n^2+1}$
15	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+4n^2+1}+n^2}{2n^2+1}$

Обчислити границю послідовності.		
	5	**6**
1	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+2(n+1)!}{2(n+3)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$
2	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!+n!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-4}\right)$
3	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+2(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-4}\right)$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+2)!-n(n+1)!}{(n+3)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n^2+2)(n^2-3)}-\sqrt{n^4-9}\right)$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+1}-n\right)$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+4)!-(n+2)!}{(n+4)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(n+\sqrt{9+n^2}\right)$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-1)!-(3n+1)!}{3n!\,(n-1)}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2-3n+2}\right)$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n)!-(3n-1)!}{(3n-1)!\,(3n-2)}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+2)(n+3)} - \sqrt{(n-1)(n-2)}\right)$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n)!+(4n+1)!}{2n^2(4n-1)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n-1)}-\sqrt{n^2-8}\right)$
10	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(2n)!+(2n+1)!}{n^2(2n-1)!+(2n)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n-1}-\sqrt{n^2-4}\right)$
11	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+(n+2)!}{2(n+1)!-(n+2)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}\right)$
12	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2(n+2)!-n!}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+6)}-n\right)$

13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6(n+4)!}{2n(n+3)!-(n+2)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-8)}\right)$
14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)!+3(n+2)!}{(3n-1)(n+1)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-5}\right)$
15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+4(n+2)!}{4(n+4)!+3(n+2)!}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)$

Обчислити границю функції в точці.		
	7	**8**
1	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x+1}{7x^2+8}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}$
2	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[5]{x}+7}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-4x-6}$
3	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+5}{-x^2+9}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+5x-2}$
4	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2\sqrt{x}+x}{4x-31}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-9}$
5	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-\sqrt[4]{x}}{x}$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+9x+9}$
6	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{4\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[5]{x}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7}$
7	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{4-\sqrt[3]{x}}{2x}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{11x^2+9x-2}$
8	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+10x-3}{3x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{2x^2-11x+5}$
9	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+7x-8}{2x^2+\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2+8x+12}$
10	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x+7}{x^2+3x-6}$	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+5x-12}$
11	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+8x-12}{4x^2-3}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{3x^2-11x-20}$
12	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-8x+1}{2x+9}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+5x+2}$

13	$\lim\limits_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{x-4}$	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}$
14	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3+3x^2}{9}$	$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{2x^2+7x+3}$
15	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2-12}{x}$	$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+4x+3}{2x^2+x-1}$

Обчислити границю функції в точці.		
	9	**10**
1	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$	$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{3x-8}-2}{\sqrt{x}-2}$
2	$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
3	$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^2+4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$
4	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^2+7x-30}$	$\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$
5	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+2x-6}{x^2+5x-24}$	$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{4x}-4}{\sqrt{x}-2}$
6	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$
7	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 11} \frac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$
8	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2+2x+1}$	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$
9	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$
10	$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$
11	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$
12	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9-x}-\sqrt{9+x}}{2x}$

13	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{x}}{x^2-2x-8}$
14	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{16-x^2}$
15	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-2}{x^2-64}$

Обчислити границю функції, використовуючи теореми про першу та другу важливу границі.		
	11	**12**
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,x}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{3-2x}\right)^{2x-1}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-2}\right)^{2x+1}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-2}\right)^{4x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin^2 12x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-3x}{2-3x}\right)^{2x+1}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+1}\right)^{2x-3}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,11x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-2}\right)^{3x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{6x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x-2}\right)^{2x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,4x}{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{-3x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x}{\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x-1}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\,4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{-x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{2x+1}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x+5}$

13	$\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x \cdot \mathrm{ctg}\, 7x)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+4}\right)^{x+1}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 6x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+4}\right)^{-3x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+4}\right)^{3x+2}$

Дослідити функцію на неперервність, вказати характер точок розриву.		
	13	**14**
1	$y=\frac{2x}{x-1}$	$y=\frac{2x^2-3x}{x}$
2	$y=\frac{x+3}{x+6}$	$y=\frac{4x^2-25}{2x-5}$
3	$y=\frac{2-3x}{x+1}$	$y=\frac{2x^2+3x+1}{x+1}$
4	$y=\frac{x}{x-4}$	$y=\frac{2x-x^2}{2x}$
5	$y=\frac{3x+5}{2x-1}$	$y=\frac{x^2+x-6}{x+3}$
6	$y=\frac{3-x}{3+x}$	$y=\frac{x-4x^2}{2x}$
7	$y=\frac{x+1}{x-4}$	$y=\frac{x^2+x-2}{x-1}$
8	$y=\frac{4x+3}{4x-3}$	$y=\frac{x^2-9}{x-3}$
9	$y=\frac{3x}{3x-1}$	$y=\frac{3x^2+x}{2x}$
10	$y=\frac{7x}{x+8}$	$y=\frac{x^2+6x-7}{x}$
11	$y=\frac{2x-5}{x+1}$	$y=\frac{x^2-81}{x-9}$
12	$y=\frac{5x}{3x+7}$	$y=\frac{x^2-x-6}{x-3}$
13	$y=\frac{2x+7}{x-5}$	$y=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$
14	$y=\frac{5x}{x+1}$	$y=\frac{x^2+7x+12}{x+3}$

15	$y=\dfrac{x+3}{x-7}$	$y=\dfrac{9x^2-16}{3x+4}$

Дослідити функцію на неперервність, вказати характер точок розриву.		
	15	**16**
1	$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3,\\ 6, & x=3.\end{cases}$	$y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$
2	$y=\begin{cases}2x, & x\le 1,\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$	$y=e^{\frac{1}{x-1}}$
3	$y=\begin{cases}\sqrt{x}-1, & x\le 0,\\ 3x^2, & x>0.\end{cases}$	$y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$
4	$y=\begin{cases}8x-5, & x\le 1,\\ 2x+1, & x>1.\end{cases}$	$y=2e^{-\frac{1}{x}}$
5	$y=\begin{cases}2x-1, & x\le 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$	$y=e^{\frac{1}{x+1}}$
6	$y=\begin{cases}x, & x\le -1,\\ \sqrt{x+1}, & x>-1.\end{cases}$	$y=e^{\frac{1}{3-x}}$
7	$y=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x+1}, & x\neq -1,\\ 3, & x=-1.\end{cases}$	$y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$
8	$y=\begin{cases}2x, & x\le 0,\\ 2x^2, & x>0.\end{cases}$	$y=e^{\frac{1}{2-x}}$
9	$y=\begin{cases}-x+1, & x\le 0,\\ x^2-4, & x>0.\end{cases}$	$y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{2}{1-x}}}$
10	$y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ -x^2, & x>1.\end{cases}$	$y=e^{\frac{1}{2x-1}}$

11	$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2. \end{cases}$	$y = \dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$
12	$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}$	$y = e^{\frac{1}{(x-2)^2}}$
13	$y = \begin{cases} -x, & x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$	$y = e^{\frac{1}{x+2}}$
14	$y = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \leq 0, \\ 3x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$	$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$
15	$y = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}, & x \neq -1, \\ 2, & x = -1. \end{cases}$	$y = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2x}} + 1}$

2. Похідна функції та її застосування

Знайти похідну функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.		
	1	**2**
1	$y = x^5 + 3x^2 + 1$	$y = \cos\dfrac{x^2}{2}$
2	$y = 2x + \dfrac{1}{x}$	$y = \cos^2\dfrac{x}{2}$
3	$y = 1 + 3x + \ln x$	$y = 2e^{-x^2}$
4	$y = 2\arcsin x$	$y = \dfrac{(x^2 + 2x + 3)^3}{3}$
5	$y = 3\arccos x$	$y = \dfrac{1}{2\sqrt{3x - 2}}$
6	$y = 2\sqrt{x} + x^2$	$y = \sqrt[3]{3x + 1}$
7	$y = 2e^x + 13x + 1$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}}$
8	$y = 5\,\mathrm{arctg}\, x$	$y = \ln(3x - 2)$

9	$y = \operatorname{arcctg} x + 2x$	$y = \sqrt[4]{(5-x)^3}$
10	$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$	$y = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$
11	$y = 2\ln x + 3x$	$y = \operatorname{ctg}^3 \frac{2x}{3}$
12	$y = 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x}$	$y = \operatorname{tg}^2 \frac{4x}{5}$
13	$y = \frac{e^x}{2} + \frac{x}{2}$	$y = 2x + \operatorname{arctg}2x$
14	$y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$y = \operatorname{arctg}\frac{2}{x}$
15	$y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$	$y = \sin\frac{3x^2}{2}$

Знайти похідну функції $\boldsymbol{y = f(x)}$.		
	3	**4**
1	$y = (4 + e^x)(3 - 2e^x)$	$y = \frac{2 + e^x}{2 - e^x}$
2	$y = (x^2 + 4x + 1)e^{2x}$	$y = \frac{\sin 2x}{x^2 + 3x + 4}$
3	$y = (x^4 + 2)\cos x$	$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
4	$y = (x - 1)\sin 3x$	$y = \frac{\ln x}{x}$
5	$y = (2x^2 + 1)\operatorname{tg}2x$	$y = \frac{\sin 3x}{\cos 2x}$
6	$y = e^{2x}\cos x$	$y = \frac{2x^2 + 3}{\operatorname{tg}2x + 1}$
7	$y = (3x + 1)\operatorname{arctg}2x$	$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$
8	$y = (3x^2 + 2)\operatorname{tg}x$	$y = \frac{e^x}{x^2 - 1}$
9	$y = e^{-x}\cos 2x$	$y = \frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}$

10	$y = (3x^2 + x - 1)\sin 2x$	$y = \dfrac{2x^2}{1 - 3x + x^2}$
11	$y = (x^3 + 1)\sin 3x$	$y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$
12	$y = e^{-2x}(3x^2 - 1)$	$y = \dfrac{\sin 2x}{x^2 + 2}$
13	$y = \sqrt{x+1}\cos x$	$y = \dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$
14	$y = \sqrt{x}(x^2 + 1)$	$y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-4}$
15	$y = \sqrt{x^3}\sin x$	$y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

	Знайти похідну від функції, застосовуючи метод логарифмічного диференціювання.	**Обчислити наближено.**
	5	**6**
1	$y = x^{\frac{1}{x}}$	$\sqrt[3]{80}$
2	$y = (\sin x)^{\ln x}$	$y = \sin 31°$
3	$y = (\ln x)^{x+2}$	$y = 4{,}05^6$
4	$y = x^{\mathrm{tg}x}$	$y = \cos 46\,°$
5	$y = (\cos x)^{3x}$	$\sqrt[3]{64{,}01}$
6	$y = (\mathrm{tg}x)^{e^x}$	$y = \cos 33°$
7	$y = (\mathrm{tg}x)^{\sqrt{x}}$	$y = 2{,}99^5$
8	$y = (1 + \sqrt{x})^x$	$y = \sin 88°$
9	$y = x^{\sin x}$	$y = 3{,}01^5$
10	$y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$	$\sqrt[4]{90}$
11	$y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$	$y = 3{,}01^5$
12	$y = (\cos x)^{\mathrm{arctg}3x}$	$y = \mathrm{tg}44°$
13	$y = x^{\ln^2 x}$	$\sqrt[4]{15{,}8}$

14	$y = x^{\mathrm{arctg}x}$	$y = 4{,}02^7$
15	$y = (\ln x)^{\cos x}$	$\sqrt[5]{250}$

Знайти похідну від функцій, заданих неявно та параметрично.		
	7	**8**
1	$\mathrm{tg}\dfrac{y}{x} = 5x;$	$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$
2	$x\sin y - y\cos x = 0;$	$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t\,, \\ y = \sin t - t\cos t\,. \end{cases}$
3	$x^2 + y^2 + 3xy = 0;$	$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$
4	$x^4 + y^4 = x^2y^2;$	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
5	$y^2 = x\cos y$	$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t}. \end{cases}$
6	$\sin xy = x + 3y$	$\begin{cases} x = t^3\ln t\,, \\ y = t^2\ln t\,. \end{cases}$
7	$x - y = \ln x + 2y$	$\begin{cases} x = t + \sin t\,, \\ y = 4 - \cos t\,. \end{cases}$
8	$xy = \mathrm{tg}x - y$	$\begin{cases} x = e^{-6t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$
9	$y = x^2 + \sin y$	$\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t - \ln t. \end{cases}$
10	$y = e^{xy}$	$\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - 1}. \end{cases}$

11	$2x - \frac{1}{y} = xy$	$\begin{cases} x = 2 - 3\cos t, \\ y = 1 + \sin t. \end{cases}$
12	$\mathrm{tg}x - y = y^2$	$\begin{cases} x = \frac{4}{t}, \\ y = \sin 4t. \end{cases}$
13	$y^3 - xy + x^3 = 1$	$\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$
14	$\sqrt{x} + y = y^2$	$\begin{cases} x = 2 + \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$
15	$x^2y = y^4 - x^2$	$\begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = 7t^3 - 2t^2. \end{cases}$

Скласти рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ у точці з абсцисою $\boldsymbol{x_0}$.		**Знайти похідну другого порядку.**
	9	**10**
1	$y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{3}$	$y = \frac{2}{x}$
2	$y = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}$	$y = 2\sqrt{x}$
3	$y = 4\sqrt{x} - 3, x_0 = 9$	$y = \frac{1}{2}\cos 4x$
4	$y = \sin x, x_0 = 0$	$y = (4x + 1)^3$
5	$y = \cos x, x_0 = \pi$	$y = -\sin(2x + 1)$
6	$y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = \sin\frac{x^2}{4}$
7	$y = \frac{x}{x + 1}, x_0 = -2$	$y = x\sin x$
8	$y = \sqrt{2x + 5}, x_0 = 2$	$y = \cos^2 x$

9	$y = \cos x\,, x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{2}{x-2}$
10	$y = \sin x\,, x_0 = \frac{5\pi}{2}$	$y = \sqrt[3]{x}$
11	$y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x_0 = -\frac{\pi}{2}$	$y = (1-2x)^4$
12	$y = \sqrt{4x^2 + 3x}, x_0 = -1$	$y = \cos\frac{x}{2}$
13	$y = \frac{x^2 - 4x}{x-2}, x_0 = 3$	$y = \frac{\sin^2 x}{2}$
14	$y = \frac{x^3}{x+1}, x_0 = 1$	$y = -x\cos x$
15	$y = x^3 + 2x + 2, x_0 = 3$	$y = \ln(2x+1)$

Обчислити границю функції з використанням правила Лопіталя.		
	11	**12**
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$	$\lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{tg}\frac{2}{x}$
2	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x$
3	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{tg}x - 1}{\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$
4	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\ln(x^2-3)}$	$\lim\limits_{x\to 0} x^3e^{\frac{1}{x^3}}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x\ln x^2$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln\frac{1}{x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2 + 2\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}2x$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x\cos x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x\cdot\ln x^2$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{2}{x}$

10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$	$\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln x^3$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x-\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\mathrm{ctg}\pi x$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}x\ln x^2$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-2x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}x\,\mathrm{arctg}\dfrac{2}{x}$
15	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(4-x^2)}{x^2+4x-12}$	$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Обчислити границю функції з використанням правила Лопіталя.		
	13	**14**
1	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$
3	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{2}{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\mathrm{ctg}^2x\right)$
4	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$
5	$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

7	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^{x-\frac{\pi}{2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{arctg}x}-\frac{1}{x}\right)$
8	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\text{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\text{ctg}^2 x\right)$
9	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\text{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\text{tg}\frac{\pi x}{2}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$
10	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{2}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x^2}\right)$
12	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg}x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{tg}\, x}-\frac{1}{x^2}\right)$
13	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos^2 x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4}{\ln x}-\frac{4}{2x-1}\right)$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+2^x)^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\text{tg}x\right)$
15	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{\sin x}-\frac{2}{x}\right)$

	Дослідити функцію на екстремум та знайти інтервали її монотонності.	**Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку.**
	15	**16**
1	$y=x+\frac{4}{x^2}$	$y=x^2+\frac{16}{x}-16,\quad [1;\ 4]$
2	$y=\frac{x^2-3}{x-2}$	$y=\sin 2x-x,\quad \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$
3	$y=\frac{1}{x^2+1}$	$y=108x-x^4,\quad [-1;\ 4]$

4	$y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$	$y=\sqrt{21+4x-x^2},\quad [-1;\ 7]$
5	$y=\frac{x-1}{x^2}$	$y=\frac{3x}{x^2+1},\quad [0;\ 5]$
6	$y=-\frac{1}{(x-3)^2}$	$y=x^3(8-x),\quad [0;\ 7]$
7	$y=\frac{x^2}{x^2-16}$	$y=x-4\sqrt{x}+5,\quad [1;\ 9]$
8	$y=2\sqrt{x}-x$	$y=\frac{x}{1+x^2},\quad [0;\ 2]$
9	$y=\frac{x^2-6x}{x+2}$	$y=2x-\cos 4x,\quad [-\pi;\ \pi]$
10	$y=x+\frac{9}{x}$	$y=2\sqrt{x}-x,\quad [0;\ 4]$
11	$y=\frac{x^2}{x^2+3}$	$y=\frac{x^2+3}{x^2+2x+5},\quad [-1;\ 3]$
12	$y=\frac{1}{(x+1)^2}$	$y=\frac{4-x^2}{4+x^2},\quad [-1;\ 3]$
13	$y=\frac{1}{16-x^2}$	$y=\frac{x^3}{x^2-x+1},\quad [-1;\ 1]$
14	$y=2x-\sqrt{x}$	$y=x-\sin x,\quad [0;\ 2\pi]$
15	$y=\sqrt{1+x^2}$	$y=2x^2+\frac{108}{x},\quad [2;\ 4]$

	Знайти вертикальні асимптоти кривої.	**Знайти похилі асимптоти кривої.**
	17	**18**
1	$y=\frac{2}{\lvert x\rvert}$	$y=\frac{x^2+2x}{x-1}$
2	$y=\frac{1}{x^2+1}$	$y=\frac{2x^2+3}{x+7}$
3	$y=\frac{3}{x^2-1}$	$y=\frac{x^2+x}{2x+1}$
4	$y=\frac{2}{1-x^2}$	$y=\frac{2-x^2}{1-x}$

5	$y = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$	$y = \dfrac{1-2x^2}{x+1}$
6	$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$	$y = \dfrac{1-4x^2}{2x+1}$
7	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x$	$y = \dfrac{(x-3)^3}{(x+1)^2}$
8	$y = \dfrac{1}{x^2+x-2}$	$y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}$
9	$y = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x^2}{2}$	$y = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$
10	$y = \sqrt{x-1}$	$y = \dfrac{x+2x^2-x^3}{x^2+1}$
11	$y = \dfrac{x^2}{2x^2-8}$	$y = \dfrac{(x+3)(x-2)}{2x+1}$
12	$y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$	$y = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$
13	$y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-3}$	$y = -\dfrac{2x^3}{x^2+2}$
14	$y = \dfrac{1}{\ln x}$	$y = \dfrac{2x^2+3}{x+2}$
15	$y = \dfrac{2}{x^3+1}$	$y = \dfrac{2+3x-x^2}{2-x}$

Побудувати графік функції.		
	19	**20**
1	$y = x^4 - 2x^2 + 4$	$y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$
2	$y = 3x - x^3 - 2$	$y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$
3	$y = 2x^3 - 3x^2 + 3$	$y = x + \dfrac{9}{x}$
4	$y = 3x - \dfrac{x^3}{4}$	$y = \dfrac{x^3}{4-3x^2}$
5	$y = x^3 - 3x^2 + 4$	$y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

6	$y = 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$	$y = \frac{2x^2}{(4 - x^2)^2}$
7	$y = x^4 - 5x^2 + 4$	$y = \frac{x^2}{x - 1}$
8	$y = (x - 4)^2(x - 1)^2$	$y = \frac{3x^3}{3x^2 - 1}$
9	$y = x^3 + 3x^2$	$y = \frac{2x}{x^2 - 1}$
10	$y = 3x - \frac{1}{4}x^3$	$y = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$
11	$y = 3x - x^3$	$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$
12	$y = \frac{x^4}{2} - 2x^2$	$y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$
13	$y = 6x^2 - 8 - x^4$	$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$
14	$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$	$y = \frac{4 - x^2}{x^2 + 1}$
15	$y = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 1$	$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. Санкт-Петербург : Лань, 2016. 492 с.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. Изд. 11-е, стер. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 736 с.
3. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. для вузов. Москва : ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. 656 с.
4. Дзядик В. К. Математичний аналіз : підручник для матем. спец. ун-тів : у 2 т. Київ : Вища школа, 1995. Т. 1. 495с.
5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підруч. для вузів : у 2 ч. Київ : Либідь, 1993. Ч. 1. 320 с.
6. Корольський В. В. Математичний аналіз. Вступний курс (на підтримку самостійної роботи студентів) : навч. посіб. Кривий Ріг : друкарня СПД Щербенюк С. Г., 2012. 248 с.
7. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2013. 398 с.
8. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах : в 2 ч. Киев : Вища школа, 1974. Ч. 1. 680 с.
9. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. Изд. 3-е. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1957. 467 с.
10. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Вид. 3-тє, переробл. і допов. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.

Катерина В’ячеславівна Польгун

Диференціальне числення функції однієї змінної (компетентнісний підхід)

Навчальний посібник