

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ АПН СССР

На правах рукописи

УТКИНА Светлана Васильевна

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ПОНЯТИЙ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА
(13.00.02 - методика преподавания математики)

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Москва - 1981

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте содержания и методов обучения АПН СССР.

Научный консультант - старший научный сотрудник,
кандидат педагогических наук
И.Н. Антипов

Официальные оппоненты:

Доктор педагогических наук, профессор - А.М. Пышкало
Кандидат педагогических наук - В.Ю. Гуревич

Ведущая организация - Целиноградский государственный
педагогический институт
им. Сакена Сейфуллина

Защита состоится " " _____ 1981 г., в II часов,
на заседании Ученого совета КО ЦО 601 естественно-математи-
ческого образования Научно-исследовательского института со-
держания и методов обучения АПН СССР (103062, г. Москва,
ул. Макаренко, 5/16).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИИ со-
держания и методов обучения АПН СССР.

Автореферат разослан " " _____ 1981 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета,
кандидат педагогических наук

М.К. Ковалевокая

Актуальность. Повышение эффективности процесса обучения в средней общеобразовательной школе всегда являлось одной из самых насущных проблем народного образования. На XXVI съезде КПСС подчеркивалась необходимость повышения качества обучения и укрепления связи обучения с жизнью.

Учитывая то, что "тесная интеграция науки с производством - настоятельное требование современной эпохи", одно из возможных направлений совершенствования обучения усматривается в знакомстве учащихся с современными научными методами познания, адаптированными к специфике и содержанию школьных курсов.

Среди таких методов особая роль принадлежит системному подходу. Изучение различных объектов как систем обусловлено не только внутренними потребностями самих наук, но и потребностями современного производства, поскольку уровень развития его разнообразных отраслей требует от специалиста навыков и умений мыслить категориями обобщенных фактов и закономерностей.

Формирование системного подхода к объектам изучения различного рода и привитие соответствующих умений, навыков могут быть успешно осуществлены при обучении математике. Большие возможности в этом плане представляет курс геометрии.

Геометрия, как и каждая наука, представляет собой иерархическую систему. Системность школьного курса геометрии выражена особо полно и цельно, поскольку объекты его изучения (фигуры, группы фигур, отношения) являются образами реальных системных объектов. Поэтому естественно предположить, что последовательное использование элементов системного подхода в обучении геометрии, в частности, при формировании ее понятий, повысит эффективность обучения.

I. Отчет Центрального Комитета КПСС XXVI съезду Коммунистической партии Советского Союза и очередные задачи партии в области внутренней и внешней политики: Доклад Генерального секретаря ЦК КПСС товарища Л.И. Брежнева 23 февраля 1981 года. - Правда, 24 февраля 1981, с. 5.

С позиций системного подхода переход от представлений к понятию и есть переход от восприятия отдельных объектов или их общих и общезначимых особенностей (свойств, признаков), отдельных связей между ними к восприятию совокупности таких объектов, особенностей и связей как единого целого. Из сказанного вытекает необходимость специально организованного обучения такому переходу на базе понимания понятий как сложных объектов, то есть систем.

В пропедевтическом курсе геометрии только незначительная часть представлений доводится до уровня понятий. Основной скачок приходится на период изучения курса геометрии, начиная с 6-го класса. Поэтому разработка методики обучения учащихся, обеспечивающей переход от единичных геометрических представлений к их совокупности, а затем к понятию и системе понятий, должна быть увязана как с изучением геометрического материала в 4-5-х классах, так и с курсом геометрии 6-8-х классов. При этом наиболее целесообразным является непосредственное участие обучаемых в формировании понятий и их совокупностей, поскольку в этом случае учащиеся овладевают особыми навыками умственной деятельности, что, в свою очередь, способствует более глубокому осознанию каждого понятия как системы и усвоению связей между понятиями курса. Из всего сказанного выше следует, что один из путей обучения геометрическим понятиям на необходимом уровне может стать системный подход, адаптированный в соответствии с целями обучения математике в средней школе и применяемый в сочетании с другими методами познания и обучения.

Системность, как один из параметров знаний школьников, является важным дидактическим принципом обучения. Это нашло отражение в психолого-педагогических исследованиях Л.Н.Зориной, Т.И.Ильиной, Ф.Ф.Королева, И.А.Лернера, М.Н.Скаткина, А.М.Сохора, В.Н.Тедоровой и др. В работах методистов-математиков Л.Ю.Березиной, В.Ю.Гуревича, В.М.Монахова, К.И.Нешкова, И.Л.Никольской, А.М.Пышкало, В.Н.Рудницкой, И.Ф.Теоленко и др. в различных ракурсах рассматривается системность на определенных этапах учебного процесса. Намеченная в них интерпретация системного подхода базируется на том, что такой подход, имея специфические особенности, выступает как метод и средство обучения, что и позволяет многократно опираться на некоторую специально сформированную систему знаний с последующим ее расширением и углублением.

В последнее время появились работы философского направления,

рассматривающие непосредственный выход понятий "система", "системный подход" в курс математики средней школы в методологическом плане¹. Целый ряд диссертационных исследований пытаются решить проблему повышения эффективности методики преподавания предметов физико-математического цикла с явным или неявным использованием системного подхода. Значительный практический и методический интерес в плане формирования у учащихся системного подхода в изучении понятий школьного курса математики и на отношения между ними представляет исследование А.Л.Жохова².

Особое место среди научно-методических работ, решающих проблему использования идеи системности при организации обучения, занимают работы А.М.Пышкало. Он впервые теоретически обосновал и апробировал методическую систему обучения геометрии в 1-3-х классах. Разработанное А.М.Пышкало теоретическое обоснование сущности понятия "методическая система обучения элементам геометрии в начальной школе"³ послужило основой постановки вопроса о целесообразности и возможности применения системного подхода при формировании геометрических понятий в 4-8-х классах.

Несмотря на наметившуюся в методике преподавания математики тенденцию внедрения системного подхода в школьную практику как методического средства, проблема разработки методики его применения в обучении геометрии еще не решена. Не исследована содержательная сторона этого подхода с учетом специфики предмета, не обоснованы теоретические предпосылки возможности использования его в планировании, недостаточно выделен общеобразовательный и методический

1. Дмитриевская И.В. Системный подход к абстрагированию. - В кн.: Системный анализ и научное знание, М., 1978, с153-171.
2. Жохов А.Л. Методике систематического применения аналогии при формировании математических понятий и умений решать задачи у учащихся восьмилетней школы : Автореф. дис. на соискание ученой степени канд.пед.наук. - М., 1979, -20 с. - В надзаг.: НИИ содержания и методов обучения АПН СССР.
3. Пышкало А.М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: Авт. док. на моногр. "Методика обучения элементам геометрии в начальных классах", предст. на соиск. учен. степ. д-ра пед.наук. - М., 1975, -60 с. - В надзаг.: АПН СССР НИИ содержания и методов обучения.

эффект обучения геометрии на этой основе. В методической литературе отсутствует сколько-нибудь обстоятельное описание совместной деятельности учителя и учащихся, связанной с системным подходом как способом изучения геометрических закономерностей.

Проблемы и задачи исследования. Проблема исследования: разработка методики формирования геометрических понятий в восьмилетней школе на основе использования системного подхода как методического средства.

Задачи исследования:

- 1) теоретически обосновать целесообразность и возможность использования системного подхода при изучении геометрических понятий;
- 2) выявить основные типы геометрических понятий школьного курса геометрии как структурированных объектов и установить методические предпосылки использования системного подхода при формировании геометрических понятий в восьмилетней школе;
- 3) разработать систему познавательных упражнений, формирующую у учащихся 4-5-х классов готовность к практическому применению системного подхода при изучении курса планиметрии;
- 4) разработать методику применения системного подхода как методического средства при формировании геометрических понятий в 6-8-х классах.

Методы исследования. Решение поставленных задач потребовало привлечения различных методов исследования: изучения педагогической, философской литературы и вопросов общей теории систем; изучения методических исследований по проблеме исследования; анализа школьных учебников и программ, анкетирования, обобщения опыта работы передовых учителей; анализа собственного многолетнего опыта работы в школе; проведения учебно-педагогического эксперимента и оценки его результатов.

Научная новизна исследования состоит в том, что в работе а) теоретически обоснованы целесообразность и возможность применения системного подхода при формировании геометрических понятий; б) впервые выявлены основные типы понятий курса геометрии восьмилетней школы, аналогичные по структуре ; в) разработана методика применения системного подхода как методического средства при форми-

ровании таких понятий.

Практическая ценность выполненной работы определяется возможностью использования полученных результатов в школьной практике а) при формировании у учащихся умений представлять геометрические понятия как структурированные объекты и видеть основу взаимосвязи понятий, принадлежащих одному типу; б) при закреплении и повторении, так как выявленные виды связи между понятиями и типы понятий курса составляют основу подбора материала для закрепления и повторения при активном использовании сравнительного анализа понятий.

Разработанные рекомендации могут быть взяты за основу при отборе понятий для написания школьных учебников геометрии для восьмилетней школы и при разработке методики преподавания геометрии в средней школе.

Апробация и внедрение результатов исследования. Апробация и внедрение результатов исследования в процессе обучения осуществлялись в школах Кривого Рога и Днепропетровской области под руководством и по материалам автора настоящего исследования.

Основные положения работы, рекомендации по использованию системного подхода при организации обучения геометрическим понятиям были опубликованы в виде статей и учебных пособий в республиканских и внутривузовских изданиях. Результаты исследования сообщались на конференциях учителей, методистов (1974-1980 гг.); на научных семинарах и конференциях (Киев, февраль 1976 г. и апрель 1978 г.; Кривой Рог, октябрь 1977 г.), на Всесоюзном совещании семинаре заведующих кафедрами математики педагогических институтов (Москва, декабрь 1980 г.).

Структура диссертации. Последовательность решения сформулированных задач определила содержание и структуру диссертации, которая состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложений.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы проблема, цель и задачи исследования, указаны методы исследования.

В первой главе - "Теоретические предпосылки использования системного подхода в преподавании геометрии" - обоснованы целесообразность и возможность применения системного подхода как методического средства при формировании геометрических понятий у учащихся восьмилетней школы; выделены основные виды связи между поня-

тиями и соответствующие им основные типы структур понятий школьного курса геометрии (задачи 1 и 2).

Во второй главе - "Методика формирования геометрических понятий в восьмилетней школе на основе использования системного подхода в обучении" разработана методика использования системного подхода как методического средства формирования геометрических понятий; выявлены основные направления познавательной деятельности учащихся по выработке навыков системного подхода к геометрическим понятиям; разработана система познавательных упражнений, способствующая подготовке учащихся 4-6-х классов к системному восприятию геометрических понятий и, на этой основе, использованию системного подхода при их изучении в 6-8-х классах (задачи 2, 3, 4).

Теоретические предпосылки использования системного подхода в обучении геометрии

1. Системный подход - эта особая исследовательская позиция, способ познания действительности. Особенность его состоит в том, что исследуемый объект рассматривается как совокупность объектов некоторой природы и заданных на их множестве отношений (то есть как система)¹. При таком подходе объекты исследуются не сами по себе (не как отдельные или изолированные), а через связи между составляющими их элементами или с позиций их связей (отношений) с другими объектами.

Весь курс геометрии восьмилетней школы естественно рассмотреть как систему, заданную набором объектов определенной природы (фигур; элементов фигур; фигур, уже находящихся в определенном отношении) и отношений на этом множестве. Поэтому при раскрытии сущности геометрических понятий их содержание также целесообразно представить как систему, определенную набором свойств геометрических фигур и отношений между ними. Это и обосновывает целесообразность использования системного подхода при обучении геометрии в восьмилетней школе, в частности, при формировании геометрических понятий.

2. Важную роль в понимании геометрических объектов играет понятие "отношение". Отношения в геометрии являются определенной и доступной пониманию учащихся конкретизацией общенаучного понятия "отношение", а именно: "отношение есть всякая совместная определен-

1. Уемов А.И. Формальные аспекты систематизации научного знания и процедур его развития. - В кн.: Системный анализ и научное познание. - М., 1978, с. 95-141.

ность любых нескольких объектов"¹, "взаимная связь различных величин, предметов,..."².

Теоретический анализ отношений, имеющих место в школьном курсе геометрии, позволил выделить те их характеристики, от которых зависит общегеометрический смысл того или иного конкретного отношения (в диссертации эти характеристики рассмотрены подробно - § 1). Кроме того, показано, что в школьном курсе геометрии понятие "отношение" может выполнять функцию основы системного подхода при изучении геометрии, если учащихся специально обучить рассмотрению каждого отношения как зафиксированную определенным образом связь нескольких объектов. Если говорить о геометрических понятиях, то такими объектами являются фигуры. Поэтому любое понятие школьной геометрии может быть представлено как система вида $\langle \text{фигуры } F_1, F_2, F_3, \dots; \text{отношения } \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n \rangle$. Например, понятие "отрезок AB " ($[AB]$) представляется системой $\langle \text{часть прямой, пара точек } A, B, \text{ точка } X; \text{"лежать между..."}, \text{"быть объединением"} \rangle$.

Поскольку совокупность геометрических фигур, изучаемых в восьмилетней школе, строго определена и представлена конкретным объемом сведений о них, то методически целесообразно при формировании геометрических понятий как сложных систем акцентировать внимание учащихся на отношениях между фигурами (или группами их):

Для фиксации информации о структуре геометрических понятий, обусловленной спецификой отношений во множестве элементов определенного вида, нами были использованы так называемые символическая и словесно-символическая модели отношений. С их помощью устанавливалась и раскрывалась специфика связи промежуточных понятий между исходными и формируемым сложным понятием. Модели указанного вида явились средством не только фиксации результатов исследования, но и обучения, в частности, средством конструирования геометрических понятий на основе некоторых исходных данных (см. с. II, 14).

3. Формирование каждого понятия предполагает необходимость осознания учащимися его существенных признаков, а это требует овладения учащимися умениями и навыками вычлечения таких признаков.

1. Левин Г.Д. Категория "отношение": Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. филос. наук. М., 1969, с. 3.
2. Ожегов С.И. Словарь русского языка. - 4-е изд. - М., 1960, с. 465.

На процесс формирования геометрического понятия, представленного системой \langle фигуры F_1, F_2, \dots, F_n ; отношения " $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ " \rangle , можно взглянуть с позиций теории и психологии познания: необходимым условием и базой этого процесса является овладение учащимися промежуточными понятиями. Именно таковы являются элементы системы - фигуры и отношения, собственно и задавшие существенные признаки вводимого понятия. Способ связи промежуточных понятий между собой определяет структуру вводимого понятия, а через нее - специфику процесса его формирования. При этом важно учитывать следующую закономерность. Каждое отношение (независимо от его конкретного содержания) обладает двоякого рода особенностями. Одни из них являются следствиями свойств собственно отношения (например, рефлексивность, транзитивность и т.п. для некоторых двучленных отношений), другие - следствиями особенностей (свойств, признаков) членов отношений (в геометрии - промежуточных понятий).

Пример. Приведенное выше понятие "отрезок" часто выступает промежуточным понятием при раскрытии содержания других понятий. И в этих случаях большую роль играют такие особенности: все его точки наделяны различными функциями по отношению к двум точкам, определяющим эту фигуру (концы, внутренние точки, середина); каждый отрезок определяет прямую. Именно эти особенности, составляя сущность, например, отношений "иметь общей точкой лишь конец" и "не определять одну прямую", задают содержание понятия "двухзвенная ломаная линия".

Таким образом, особенности промежуточных понятий можно рассматривать как фундамент (основание) для появления у более сложного понятия специфических свойств и, одновременно, как фундамент для построения и осознания учащимися определения вводимого понятия. Этим обосновывается необходимость выявления наиболее часто встречающихся в школьной геометрии видов связи промежуточных понятий, определяющих специфику структур сложных понятий.

В результате рассмотрения с этих позиций понятий школьного курса геометрии в диссертации выделены четыре основных вида связи между промежуточными понятиями при построении других и выявлены соответствующие им четыре основных типа структур геометрических понятий.

Связь между промежуточными понятиями для некоего формируемого представляется "количественной оценкой" их ранее выделенной осо-

бенности. Этот вид связи нами назван первым. Ему соответствует структура понятия типа "подсистема подсистемы" (тип III).

Пример. Поскольку каждая геометрическая фигура содержит хотя бы одну точку, то эта особенность во множестве произвольных фигур порождает отношения "не иметь общих точек" или "иметь общие точки". Последнее из указанных отношений (будучи выделенной особенностью заданной пары фигур) затем "количественно оценивается": сколько общих точек? ("только одна", "не одна"; "только две", "более, чем две",...). Именно этот вид связи лежит в основе формирования таких понятий как отношения во множестве прямых, окружностей прямых и окружностей.

Связь между промежуточными понятиями для некоего формируемого представляется уточнением (детализацией) некоторой ранее установленной особенности каждого (или хотя бы одного) такого понятия. Полученные в результате уточнения новые промежуточные понятия иерархически упорядочиваются по образцу перехода от родового понятия к его виду. Этот вид связи нами назван вторым. Ему соответствует "ярусная" структура понятия (тип III).

Пример. Пусть зафиксирована особенность: "отрезок имеет только одну общую точку с прямой". Ее уточняют за счет детализации указанного отношения: какую именно точку? ("внутреннюю точку" и далее "середину отрезка").

Связь между промежуточными понятиями для некоего формируемого определяется одновременным проявлением нескольких независимых друг от друга особенностей промежуточных понятий. Этот вид связи нами назван третьим. Ему соответствует структура понятия типа "результатирующая подсистема" (тип III).

Пример. Особенности отрезка и прямой: "общей точкой отрезка и прямой может быть середина отрезка" и "отрезок и прямая могут быть взаимно перпендикулярными". Они могут проявляться одновременно.

Если проявление новых особенностей промежуточных понятий связано с введением новых понятий, как членов следующих друг за другом отношений, то получаемое при этом понятие порождается отношением, членами (членом) которого являются данные понятия, уже находящиеся в конкретном отношении. Вид связи между промежуточными понятиями для некоего таким образом формируемого назван нами четвертым. Ему соответствует "уровневая" структура понятия (тип III).

Пример. Особенности понятия "окружность" задаются промежуточ-

ными понятиями, которые "обогащены" как за счет постепенного введения объектов (точек, плоскости, числа $Z(z \neq 0)$, точки A), так и за счет специфики отношений между ними: каждый ранее введенный объект вступает в новое отношение, уже будучи членом ранее зафиксированного отношения (см. подробнее на с. 11).

Выделение четырех основных видов связи промежуточных понятий и рассмотрение их роли при формировании сложных геометрических понятий позволило сделать вывод о практической возможности использования системного подхода в обучении геометрии в восьмилетней школе с опорой на типы структур понятий.

4. Одним из главных результатов теоретической части диссертационного исследования явилось выделение восьми основных типов понятий геометрии восьмилетней школы. Типология осуществлялась на основе анализа содержания понятий как сложных объектов за счет сочетания основных способов построения понятий как систем (способы описаны в диссертации) и использования выделенных четырех основных типов структур понятий.

Охарактеризуем некоторые, например, II, III, V, VI и VII типы понятий.

Существенные признаки понятий, отнесенных нами ко II типу, задаются отношением "иметь общие точки" на множестве пар фигур. За тем это отношение уточняется за счет количества общих точек. В геометрии восьмилетней школы тип представлен отношениями во множестве прямых и окружностей, окружностей (см. первый вид связи - с. 8).

Существенный признак понятий, отнесенных нами к III типу, задается частным случаем отношения, выступающего основным для понятий предыдущего типа - "иметь только одну общую точку", которое уточняется за счет выбора этой общей точки, как точки с особой функцией - "невнутренняя точка отрезка", "середина отрезка", "начало луча - вершина угла". Затем следующий существенный признак задается отношением взаимного расположения исходных фигур - "не определять одну прямую", "принадлежать углу и делить угол пополам", "быть перпендикулярными". В школьной практике этот тип понятий представлен понятиями "ломаная (двухавенная) линия", "биссектриса угла", "серединный перпендикуляр к отрезку" и др.

Существенные признаки понятий, отнесенных к V типу, задаются отношениями, члены (или хотя бы один член) которых уже находятся в заданном ранее отношении, при постепенном введении новых исходных фигур. Специфика связи существенных признаков понятий этого типа

(именно пятого типа) наглядно представляется словесно-символической моделью (четвертый вид связи - см. с. 9):

- I. $\langle \text{точка}^*, \text{точка}^{**} \text{ "быть различными" } (F_1) \rangle$
- II. $\langle \text{пары различных точек } l, \text{ плоскость } \alpha, \text{ "принадлежать" } (F_2) \rangle$
- III. $\langle \text{пары различных точек, принадле-} \quad ; \quad \text{точка } ; \quad \text{"иметь об-} \\ \text{жащих} \quad ; \quad \quad ; \quad \quad ; \quad \quad ; \quad \text{щей точкой} \\ \text{плоскости } \alpha \quad ; \quad \quad ; \quad \quad ; \quad \quad ; \quad \text{точку } A" (F_3) \rangle$
- IV. $\langle \text{пары различных точек плоско-} \quad ; \quad \text{число } Z ; \quad \text{"находиться на} \\ \text{сти } \alpha, \text{ одна из которых точка } A, \quad ; \quad (Z > 0) \quad ; \quad \text{расстоянии } Z \\ \text{от точки } A" (F_4) \rangle$
- V. $\langle \text{"множество всех точек плоскости } \alpha, \\ \text{находящихся на данном расстоянии } Z \\ \text{от данной точки } A (K \in \alpha)" \rangle \longrightarrow \text{Окружность}$

Существенные признаки вводимого понятия, отнесенного к VII типу, представляются признаками ранее известного понятия на основе взаимнооднозначного соответствия между этой парой понятий (например, "быть равноудаленными" во множестве пар точек и "быть равными" во множестве неотрицательных чисел, выражающих расстояние между точками пар). В школьной практике понятия этого типа представлены, например, отношениями "лежать между...", "быть разделенными" (участвует четвертый вид связи - см. с. 9).

Существенные признаки понятий, отнесенных к VIII типу, задаются отношениями во множестве фигур-элементов, определяющих фигуры конкретного вида (точки как вершины многоугольника, пара различных лучей с общим началом как стороны угла и др.). В курсе планиметрии этот тип представлен целым рядом понятий, в частности, понятиями "вписанный многоугольник", "вписанный угол в круг".

Осуществленная типология понятий курса геометрии восьмилетней школы позволила наглядно "зафиксировать" специфику структуры целых групп аналогичных понятий с опорой на вид связи их промежуточных понятий, на основные типы структур понятий, а это помогло определить узловые положения методики их формирования.

Методика формирования геометрических понятий в восьмилетней школе на основе использования системного подхода в обучении

5. Важным условием формирования геометрических знаний является усвоение учащимися сущности общего подхода к раскрытию содержания целого ряда геометрических понятий, поскольку это позволяет учащимся уловить единство хода рассуждений и, на основе этого, ов

ладеть знаниями в системе. Отсюда следует, что учащиеся важно научить видеть связь между геометрическими понятиями, между свойствами этих понятий и осмысливать их, научить исследовать эту связь и результаты использовать, например, при решении задач.

Один из практических путей решения этой проблемы состоит, на наш взгляд, в обучении учащихся системного представления геометрических понятий, поскольку это способствует развитию соответствующего стиля мышления, при котором ученик приобретает умения и навыки, прежде всего, выделять объединяющие признаки группы понятий (принадлежащих одному типу), а затем "выполнять" эти признаки "индивидуальным" содержанием за счет конкретизации исходных данных. В связи с этим методика применения системного подхода в обучении геометрии трактуется нами как определенная система совместных действий учителя и учащихся, направленных на формирование системного представления геометрических понятий и реализующихся при выполнении соответствующих познавательных упражнений.

В соответствии с принятым нами толкованием методики применения системного подхода в обучении геометрии, обучение учащихся системному подходу осуществлялось через систему познавательных упражнений, выполняющих определенную дидактическую функцию: подготовительных, реализующих, практических и транслирующих упражнений. При этом выполнение упражнений трех первых видов направлено на формирование предпосылок использования системного подхода при дальнейшем изучении курса планиметрии (задача 3).

Подбор упражнений каждого вида таков, что способствует постепенному формированию системного взгляда на геометрические понятия. Рассмотрим каждый вид упражнений.

В процессе решения подготовительных упражнений осуществляется конкретизация, разъяснение, в чем именно состоит связь понятий, каковы различные стороны ее проявления и каково ее значение в раскрытии содержания конкретных геометрических понятий. При этом учащиеся нацеливаются на понимание того, что каждому виду фигур присущ определенный набор особенностей, что каждая особенность может выступать фундаментом (основой) отношения определенного содержания, когда осуществляется совместное рассмотрение нескольких фигур или их групп.

Примером таких упражнений является следующее: заданы пары отрезков. Какими свойствами фигуры "отрезок" обусловлено каждое из взаиморасположений отрезков в парах?

Специфика выявленных отношений во множестве геометрических фигур осознается учащимися уже при выполнении подготовительных упражнений, носящих творческий характер. Например:

1. Элементом каких фигур может выступать отрезок?

Дать примеры.

2. Сравните свойства фигуры "отрезок" и отрезка как элемента фигуры \mathcal{F} (\mathcal{F} - треугольник; круг).

3. Перечислите все специальные названия отрезка как элемента треугольника и объясните, чем обусловлено появление его различных названий.

4. Игра. Дан чертеж некоторой фигуры. Назовите несколько фигур, элементом которых является эта фигура.

С учетом того, что отношение определяется вместе с множеством, на котором оно задается, были определены дидактические функции следующей группы познавательных упражнений реализующих. Одна из этих функций состояла в том, чтобы обучить учащихся фиксировать результаты исследования геометрических понятий как сложных с этим. Такая фиксация осуществлялась при помощи названных выше (с. 7) символических и словесно-символических моделей понятий (см. также с. II, 14).

Далее, поскольку в основе любого понятия как системы лежит некоторый набор отношений, обеспечивающий связь понятий и определяющий его структуру, возникла необходимость специального обучения учащихся 5-х классов пониманию следующих фактов: конкретные отношения, имеющие смысл во множестве геометрических фигур, фиксируются, как правило, определенным изображением (на плоскости). Однако одно и то же изображение (рисунок, чертеж) содержит в себе информацию о различных отношениях между фигурами; в геометрии каждое двучленное отношение \mathcal{C} между фигурами может быть однозначно охарактеризовано определенным набором P пар фигур, взятых из множества A и B , то есть отношению \mathcal{C} соответствует множество P из $A \times B$; аналогия в способах соотношения (связи) промежуточных понятий обуславливает однотипность понятий, а отличие самих промежуточных понятий - отличие однотипных понятий.

Примером упражнений, выполняющих названные дидактические функции, являются следующие:

1) Начертите пару параллельных отрезков и установите, какие еще из отношений имеют смысл для данной пары отрезков.

2) а) Расставьте в пары отрезки Мухи-Цокотухи (К. Чуковский

"Муха-Цокотуха"). б) Изобразите рисунок-схему каждой пары гостей.
 в) Установите, кто из гостей остался без пары. г) Как можно по-другому оставить пары гостей?

3) Дано $A = \{a, b, c, d\}$ - множество прямых (на плоскости) (рис.1).

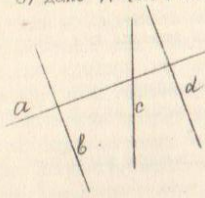


Рис.1

а) При помощи таблицы или стрелок составьте всевозможные пары прямых и укажите подмножества, задающие отношения на множестве этих пар:
 $\varphi_1 \rightarrow P_1$ "пересекаться", $\varphi_2 \rightarrow P_2$ "быть параллельными", $\varphi_3 \rightarrow P_3$ "быть перпендикулярными".
 б) Выделите цветом множества P_1 и P_2 . Достаточно ли двух цветов, чтобы "покрыть" ими таблицу? Останутся ли "свободные ячейки" для множества P_3 ? в) Охарактеризуйте $P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2, P_1 \setminus P_2, P_2 \setminus P_1, P_1 \cup P_3, P_2 \cup P_3$ и постройте схемы отношений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ на одном и том же множестве представляются символической моделью их связи, как на рис.2).

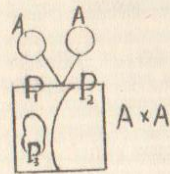


Рис.2

Учащиеся в процессе решения реализующих упражнений приобретают навыки и умения фиксировать связь отношений при помощи схем (см.рис.2), что в дальнейшем позволяет фиксировать связь между промежуточными понятиями для вводимых более сложных понятий.

Практические упражнения (по разработке практических умений и навыков использования системного подхода при изучении геометрических понятий) выполняют особую развивающую функцию: способствуют выработке умений и навыков анализа определений (описаний) геометрических понятий с точки зрения внутренней связи промежуточных понятий. В результате происходит осмысление структуры геометрических понятий через выяснение "индивидуальных" особенностей структур конкретных понятий. "Открытая" учащимися особенность лучше осознается при выполнении упражнений творческого характера по "конструированию" геометрических понятий с опорой на некоторую совокупность данных (набор исходных фигур, схем (моделей) понятия и т.д.).

Особое значение приобретают те практические упражнения, при выполнении которых осуществляется постепенный переход от задан-

ных ситуаций к неизвестной и тем самым разрешаются проблемно-исковые ситуации.

1) Описать отношения на множестве пар фигур а) (окружность; прямая); б) (прямая; прямая) (рис. ...). (Заданы отношения и пары фигур. Описать отношения).

2) Описать отношения во множестве фигур, заданных на рисунке. (Заданы отношения. Установить вид фигур и описать отношения).

3) Дано: окружность и отрезки. Задать и описать отношения на множестве пар а) (окружность; отрезок); б) (отрезок; отрезок). (Заданы фигуры конкретного вида. Задать и описать отношения).

4) Дано: фигура F и множество фигур определенного вида. Задать отношения и описать их. (Задать фигуры определенного вида и отношения во множестве их, описать отношения).

Упражнения типа (1) - (4) способствуют развитию умений и навыков многостороннего рассмотрения пар фигур, заданных чертежом и, тем самым, развитию "геометрической зоркости" учащихся, широте их геометрического мышления.

При выполнении упражнений подготовительного, реализующего и практического характера у учащихся постепенно формируются умения и навыки осмысления геометрических объектов как систем, а именно: исходные фигуры, задающие исследуемые понятия, свойства этих фигур; конкретные отношения во множестве фигур и свойств, обуславливающих эти отношения.

Результаты итоговых контрольных работ в экспериментальных пяти классах показали, что за два года обучения по разработанной нами методике использования системного подхода при осмыслении геометрических понятий (I-й период обучения) ученики, выполняя подготовительные, реализующие и практические упражнения, приобрели достаточно устойчивые умения и навыки анализа геометрических объектов на основе их структурного представления.

7. Основным положением разработанной нами методики формирования геометрических понятий в 6-8-х классах явилось использование односторонности их структур с опорой на перенос умений и навыков (приобретенных учащимися в 4-5-х классах) рассмотрения таких понятий и структурирование объектов (II-й период обучения).

Реализация разработанной методики осуществлялась при выполнении транслирующих упражнений, выполняющих следующие дидактические функции: установление структуры некоторого понятия A и "открытие" того, что понятие B имеет такую же структуру, как и по-

являющие A (однотипность понятий A и B); установление однотипности ряда понятий; выявление аналогии и отличия таких понятий и обоснование этого.

В процессе выполнения транслирующих упражнений формирование геометрических понятий осуществляется через формирование представителей определенного типа с последующим обоснованием их "индивидуальных" особенностей. При этом делается установка не на формальное запоминание определений понятий, а на усвоение одинаковости их структур и на отношения, обеспечивающие ее.

Обоснование восьми основных типов геометрических понятий как систем определенной структуры (см. примеры на с. 10-11) определило методику введения представителей каждого типа и методику обоснования однотипности ряда понятий. Поскольку о большинстве геометрических понятий (окружность, круг, луч, "быть параллельными", "пересекаться" и др.) ученики к началу шестого класса имеют общее представление, то возникает необходимость создания ситуации, при которой они убеждались бы в возможности описания этих понятий на базе других (то есть промежуточных понятий) и усваивали бы особенность структуры каждого понятия.

Решение этих познавательных задач происходит при поэтапном формировании понятий как сложных систем. Так, например, формируя понятия "окружность", "круг", "шар", "сфера" и др., ставят следующие методические задачи: 1) обучить пониманию геометрической сущности понятия "окружность"; 2) показать однотипность понятий "окружность", "круг", "сфера" и др.; 3) добиться осмысления этих понятий как однотипных; 4) усвоить словесно-логическое определение понятия "окружность"; 5) составить описание понятий "круг", "сфера" и др. с опорой на определение "окружность".

Среди указанных методических задач особая познавательная функция принадлежит первой. Ее решают, как правило, в ходе эвристической беседы с привлечением анализа, сравнения, оценки результатов исследования и обязательным поэтапным фиксированием их в виде соответствующих рисунков.

Применение системного подхода к формированию геометрических понятий выполняет развивающую функцию, поскольку учащиеся приобретают единую точку зрения на геометрические факты. Так, при формировании понятий первого типа, задающихся системой \langle фигура F_1 , фигура F_2 ; "принадлежать", "лежать между"... (быть разделенными) "быть объединением" \rangle , (луч, отрезок, полуплоскость, полоса,

угол, многоугольник, круг, сектор и др.) нет необходимости и возможности требовать в восьмилетней школе усвоения общего принципа их построения с первого знакомства с ними. Для учащихся этой возрастной группы он довольно необычен и абстрактен. Поэтому при раскрытии содержания первого понятия, например, понятия "луч", закрепляя его, достаточно разобрать возможный вариант описания только следующего понятия этого типа - полуплоскость, выделяя факторы, обеспечивающие их аналогию и отличие, и тем самым начать "закладывать" единую точку зрения на все понятия этого типа и сущность понятия "тип...".

Особенность педагогического руководства процессом осмысления геометрических понятий является ориентация учащихся на поиск существенных связей между ними. Обучение этим навыкам осуществляется при формировании геометрических понятий. Так, аналогия понятий "двухзвенная ломаная линия", "серединный перпендикуляр к отрезку", "биссектриса угла" (тип III, с. 10) обеспечивается за счет их объединяющего признака - "иметь только одну общую точку" (тип II, с. 10), и притом "особую точку" ("конец - начало", "середина отрезка", "вершина угла - начало угла") - и особого взаимного расположения исходных фигур, заданных их "необщими" точками (двух отрезков без их общего конца, открытого луча и угла "без вершины" и т.д.)

Для усвоения учащимися однотипности понятий "медиана треугольника", "биссектриса угла треугольника", "радиус окружности" и др. (VI тип понятий) обучение организуется так, что школьники получают практическую возможность для их сравнения, сопоставления, анализа за счет сравнения особенностей точек, являющихся концами "исследуемых" отрезков. Это достигается в процессе решения упражнений познавательного характера, в частности:

1) Дайте несколько названий фигуре F , изображенной на рисунке ..., и объясните причину появления их. (Отрезок, сторона треугольника, медиана треугольника и т.д. Появление различных названий отрезка AB обусловлено принадлежностью его концов различным множествам).

2) Какая из фигур может быть общим элементом замкнутой трехзвенной ломаной линии и круга, треугольника и круга?

3) Охарактеризуйте отрезок как элемент а) трехзвенной ломаной замкнутой линии, б) треугольника, в) параллелограмма.

8. Разработанная методика формирования геометрических понятий в восьмилетней школе, использующая системный подход, была

апробирована и внедрена в практику в период с 1974 г. по 1978 г. Основными целями эксперимента были: 1) проверка целесообразности и возможности использования системного подхода как методического средства в обучении геометрии; 2) изучение влияния разработанной методики на математическое развитие учащихся. Эксперимент проводился в различных школах Кривого Рога и Днепропетровской области (СШ № 72, 107, ВШ № 47, 86 и Софиевской СШ). Всего экспериментом охвачено более 400 учащихся 4-8-х классов.

На первом этапе в 1974-1975 гг (констатирующий эксперимент) была выявлена степень сформированности геометрических понятий, изучение которых предполагает программа по математике в 4-5-х классах и по геометрии в 6-8-х классах.

Параллельно с констатирующим экспериментом проводился поисковый эксперимент с группой учащихся пятых классов по разработанной нами программе.

Целью второго этапа (обучающий эксперимент) являлось установление возможности использования системного подхода как методического средства при формировании геометрических понятий. Этот этап предполагал апробацию методики обучения геометрическим понятиям в два периода: первый период обучения 4-5 классов, второй - 6-8 классов. Эта часть эксперимента, начиная с 1975/76 уч.года, проводилась на протяжении трех учебных годов в СШ № 72 Кривого Рога в двух параллельных классах. С 1976/77 уч.года эксперимент в этой части проводился учителями СШ № 107, ВШ № 47 и № 86 Кривого Рога и Софиевской СШ, обучающихся по разработанным нами учебным материалам.

Третий этап эксперимента был направлен на проверку прочности сформированных геометрических понятий у учащихся 7-х экспериментальных классов, а также на уточнение материалов, откорректированных по результатам предыдущего этапа, и методики обучения геометрии с использованием элементов системного подхода.

Сопоставительный анализ результатов проверочных работ в экспериментальных и контрольных классах, наблюдение за деятельностью учителей, учащихся и за математическим развитием последних на протяжении нескольких лет, анкетирование учителей позволяют сделать вывод о реализуемости и эффективности использования системного подхода как методического средства обучения геометрическим понятиям. Для учителя эффект от его использования состоит в том, что он получает научно-методическую основу для: а) установления преемственности методов формирования геометрических понятий; б) орга-

низации повторения; в) подбора задач, упражнений; г) создания проблемных ситуаций. Для учащихся эффект состоит в предоставлении им многих возможностей для: а) обеспечения систематизации знаний в процессе обучения; б) для открытия закономерностей в построении определений понятий; в) приобретения умений и навыков использования геометрических знаний и осуществления их переноса; г) уяснения значимости каждого компонента формально-логического определения понятий; д) приобретения умений и навыков самостоятельной работы с геометрическим текстом.

Основные результаты исследования

1. Теоретически обоснованы целесообразность и возможность использования системного подхода как методического средства обучения геометрическим понятиям.

2. Разработана типология понятий курса геометрии восьмилетней школы с опорой на их структурное представление и на этой основе установлены методические предпосылки использования системного подхода при формировании геометрических понятий в 4-8-х классах.

3. Разработана система познавательных упражнений, создающая у учащихся 4-5-х классов предпосылки к практическому применению системного подхода при изучении планиметрии.

4. Разработана методика применения системного подхода как методического средства при формировании геометрических понятий в 6-8-х классах.

5. Показано, что применение системного подхода при обучении геометрии позволяет уменьшить количество понятий, вводимых как принципиально новых для учащихся; выявить и использовать внутриструктурные связи между понятиями; вскрыть и использовать внутрисубъектные связи курса геометрии восьмилетней школы и на этой основе рационально организовать повторение; выработать системный взгляд на геометрические понятия, обучать учеников определенному стандарту рассуждений и тем самым повышать их логическую культуру, активизировать познавательную деятельность учащихся.

Перспективность результатов исследования определяется возможностью использования полученных рекомендаций при разработке методики обучения доказательствам теорем и решению задач в курсе геометрии восьмилетней школы, при разработке методики изложения отдельных тем и при организации обобщающего повторения в курсе алгебры средней школы.

Основным выводом из проведенного исследования является утверждение о целесообразности и возможности применения в школьной практике системного подхода как методического средства обучения, позволяющего а) формировать у учащихся системные представления о геометрических понятиях; б) развивать способность к переносу формируемых знаний и умений; в) повышать качество и глубину знаний и тем самым способствовать развитию их общего математического образования.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в статьях:

1. Уткина С.В. Элементы геометрии в учебниках для младших школьников. - Початкова школа, 1974, № 6, с.31-35 (на укр.язике).
2. Уткина С.В. Методика формирования понятия отрезок. - Початкова школа, 1975, № 3, с.34-38 (на укр.язике).
3. Уткина С.В., Сильнова Э.С. Формирование понятия площадь фигуры. - Початкова школа, 1976, № 10, с.44-50 (на укр.язике).
4. Уткина С.В. Таблицы по математике для 4-5-х классов. Геометрия: 15 таблиц с методическими указаниями. - Киев: Рад.школа, 1977 (на укр.язике).
5. Уткина С.В. Изучение геометрических фигур как средства познавательной активности в процессе обучения математике в 4-5-х классах. - В кн.: Розвиток пізнавальної самостійності учнів молодших і середніх класів у процесі навчання математики. Кривий Ріг, 1977, с.96-97 (на укр.язике).
6. Уткина С.В. Формирование понятия "отношение" при изучении геометрического материала в 4-5-х классах. - В кн.: Розвиток пізнавальної самостійності учнів молодших і середніх класів у процесі навчання математики. Кривий Ріг, 1977, с.100-102 (на укр.язике).
7. Уткина С.В. Понятие "отношение" как основа системного подхода к обучению геометрии. - Радянська школа, 1979, № 12, с. 55-61 (на укр.язике).

С.В. Уткина

Печатается в печать 15/IV - 84 г. Объем 1,0 п. л. Тираж 120 экз.
Заказ 404. Бесплатно.

Репозитив НИИ содержания и методов обучения
Академии педагогических наук СССР
103062, Москва, К-62, Макарьино, 5/16.