

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**Фізико-математичний факультет**  
**Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ В.В. Корольський  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 р.

Реєстраційний № \_\_\_\_\_  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018р.

## ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РЯДІВ

Кваліфікаційна робота студентки  
групи МІм-13  
ступінь вищої освіти магістр  
спеціальності: 014.04 середня освіта  
(математика)

Габ Світлана Сергіївна

Керівник:

кандидат техн. наук, професор  
Корольський Володимир Вікторович

Оцінка:

Національна шкала \_\_\_\_\_

Шкала ECTS \_\_\_\_\_ Кількість балів \_\_\_\_\_

Голова ЕК \_\_\_\_\_  
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК \_\_\_\_\_  
(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_ (підпис) (прізвище, ініціали)

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ РЯДІВ.....	6
1.1. Історичний аспект розвитку теорії рядів .....	6
1.2 Числові ряди .....	13
Висновки до розділу 1 .....	33
РОЗДІЛ II. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ .....	35
2.1. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією.....	35
2.2. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією.....	46
2.3. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з арифметико-геометричною прогресією.....	60
2.4. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з фракталами.....	67
Висновки до розділу 2 .....	79
ВИСНОВКИ.....	81
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	83
ДОДАТКИ.....	88
Додаток А.....	88
Додаток Б .....	90
Додаток В.....	96
Додаток Г .....	98

## ВСТУП

Теорія рядів широко використовується при вивченні функцій, інтегралів, диференціальних рівнянь, при розв'язанні великої кількості прикладних задач, тому і є одним із найважливіших розділів математичного аналізу.

Велику роль сучасна теорія рядів виконує не тільки в математиці, але й в інших галузях, а саме: економіка, інженерія, архітектура, теорія музики, фізика, хімія і т.д.. Такий широкий спектр застосування обумовлений тим, що використання можливостей рядів є одним із найпростіших але і найпотужніших способів одержання результатів із заданою точністю.

Питанням розвитку теорії рядів займалися такі видатні вчені як Л. Ейлер [9], Ж. Л. Даламбер [10], О. Л. Коші [19], Е. Е. Кумер [11], Г. Раабе [15], П. Менгорі [1], Я. Бернуллі [9] та інші.

Проте, проаналізувавши зарубіжну та вітчизняну літературу, можна відмітити, що переважна кількість підручників, посібників, практикумів з математичного аналізу пропонують студентам теоретичні відомості, приклади розв'язання типових і нестандартних задач та вказані способи розв'язання з методичними вказівками, запропоновані системи задач для самостійної роботи, але в контексті сказаного, практично відсутнє візуальне представлення членів рядів та їх збіжності або розбіжності. За нашою думкою, при вивченні розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз» може бути корисною геометрична інтерпретація елементів числових рядів, та візуалізація їх збіжності. Саме тому тема «Геометрична інтерпретація рядів» є актуальною.

**Мета роботи:** дослідження геометричної інтерпретації числових рядів, обчислення їх частинних сум, представлення результатів геометричної інтерпретації засобами сучасних програмних забезпечень.

**Об'єкт дослідження:** числові ряди.

**Предмет дослідження:** геометрична інтерпретація числових рядів і її зв'язок з «сігма-моделями» рядів.

**Завдання даної роботи:**

- 1) аналіз існуючих теоретичних відомостей, пов'язаних з числовими рядами;
- 2) знаходження «сігма-моделей» числових рядів за допомогою параметрів геометричних об'єктів (ліній, площ, об'ємів);
- 3) дослідження на збіжність одержаних числових рядів і їх візуалізація;
- 4) розробка багатоваріантних завдань для практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз».

**Методи дослідження:** аналіз існуючих теоретичних відомостей пов'язаних з числовими рядами; евристичний пошук та комп'ютерні експерименти, пов'язані з геометричною інтерпретацією числових рядів, та обчислення їх частинних сум.

**Наукова новизна:** здійснені дослідження по одержанню числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації членів ряду. Досліджено зв'язок геометричних об'єктів і «сігма-моделей» числових рядів.

**Практичне значення роботи:** на основі зв'язку між моделями геометричних об'єктів і «сігма-моделями» низки числових рядів розроблена і представлена система практичних завдань для підвищення ефективності вивчення розділу «Числові ряди» у рамках курсу «Математичний аналіз».

**Апробація дослідження:**

1. Участь у Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів і молодих вчених «Актуальні аспекти фундаменталізації, математична підготовка у сучасних ВНЗ: погляд студентів і молодих вчених» з доповіддю «Числові ряди, які пов'язані з парадоксом Шварца» м. Харків, 12-13 травня.

2. Участь в XIV Міжнародній науково-практичній конференції молодих дослідників «Содружество наук. Барановичи - 2018» м. Барановичі, з публікацією тез «Геометрическая интерпретация числовых рядов связанных с фракталами» м. Барановичі, 17 травня.

3. Участь в XI Всеукраїнській науково-методичній конференції «Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освіті» з публікацією тез «Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання» м. Одеса, 21-22 травня.

4. Опубліковані матеріали в Віснику міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання» з назвою «Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра» м. Кривий Ріг.

**Структура магістерської роботи.** Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, список використаних джерел, що містять 50 найменувань та додатків. Основний текст викладено на 82 сторінках. Повний обсяг роботи 100 сторінок.

## РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ РЯДІВ

### 1.1. Історичний аспект розвитку теорії рядів

Поняття числа та числового ряду цікавило стародавніх народів ще за часів античності.

Поняття математичної нескінченості, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з'явилося в давньогрецькій або еллінській культурі в VIII – VI ст. до н.е., як принципово новий елемент мислення. Проте, точну дату виникнення рядів дати неможливо [26].

Але відомо, що в Стародавньому Єгипті мали певні уявлення про теорію рядів.

Відомо, що єгипетська ієрогліфічна нумерація була число адитивною. Крім позначень цілих чисел, єгиптяни мали також спеціальні позначення для дробів виду:  $\frac{1}{n}$ , над якими ставився знак  $\circ$  (рот – «частина»). Загальними раціональними дробами виду  $m/n$  єгиптяни не оперували, проте мали певні уявлення [48, с. 25].

Велику увагу єгипетські мудреці приділяли складанню задач розважального характеру або прикладних задач. Однією із найвідоміших задач, була задача на геометричну прогресію – «задача-мандрівниця».

В задачі мова йде про 7 кішок в кожному із 7 домів, кожна кішка з'їла по 7 мишей, кожна з яких з'їла по 7 колосків ячменю, кожний колос міг дати 7 мір хліба. В подальшому задача зустрічалась в різні епохи у різних народів з незначними відмінностями [48, с. 23].

Нескінченні ряди також використовували в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , замість  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  [26].

Уявлення про арифметичну прогресію зустрічається в папірусі Райнда. Так в задачі: «Настанова, як визначати різниці», сказано: Розділи 10 мір хліба на 10 чоловік, якщо різниця між кожною людиною та наступною за нею

складає  $\frac{1}{8}$  міри. В цьому розумінні, кількість хліба складає арифметичну прогресію з 10 членів, з різницею  $\frac{1}{8}$  міри [48, с. 30].

Більш широко представлені уявлення про арифметичну та геометричну прогресії були у Стародавньому Вавилоні. Навіть задачі про розподіл сребра між братами розв'язувались шляхом використання арифметичної прогресії та пропорційної залежності. Вавилоняни знали правило сумування  $n$  членів арифметичної прогресії з даним першим та останнім членами:  $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$  [48, с. 40].

Токож у Стародавньому Вавилоні знали формули для деяких кінцевих сум, наприклад:  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  [1, с. 163]

В селевкідських текстах є задачі на сумування  $n$  членів геометричної прогресії. Наприклад для:  $1^2 + 2^2 + \dots + 2^9$ , було виявлено, що:  $S_n = (S_{n-1} + 1) + S_{n-1}$ . Також було відомо правило сумування скінченного ряду натуральних квадратів:  $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2$ , яке в символічному виразі можна записати у вигляді:  $\sum_1^n m^2 = \left[1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot N$ , де  $N = \sum_1^n m$  [48, с. 40].

Серед таблиць III- II ст. до н. е. була знайдена таблиця місячних ефемерид для 179 р. селевкідської ери (133/132 р. до н. е.) (рис.1.1.), в якій перший стовпчик – номер місяця, другий – число і шестедсятеричні дроби діб для моменту з'єднання Місяця з Сонцем:

12	28,55,57,58	7	29,31,21,22
1	28,37,57,58	8	29,49,21,22
2	28,19,57,58	9	29,56,36,38
3	28,19,21,22	10	29,38,36,38
4	28,37,21,22	11	29,20,36,38
5	28,55,21,22	12	29, 2,36,38
6	29,13,21,22		

Рис. 1.1. – Таблиця місячних ефемерид

Перші три числа другого стовпця – зростаюча арифметична прогресія з різницею  $18'$ , наступні шість чисел складають спадну прогресію з різницею в  $18'$ , та останні чотири числа знов утворюють зростаючу прогресію з

різницею в  $18'$ . Насправді, спостережувані величини підкоряються значно складнішій періодичній закономірності, але вавилонські астрономи не мали можливості більш точно описати періодичні закономірності з'єднань Місяця та Сонця, тому намагалися описати видимі на небі явища за допомогою вже відомих фактів [48, с. 41-42].

Питаннями сумування рядів займалися і китайські математики. Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» підрахував кількість предметів, які складають  $n$  – шарову ступінчасту усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. В XIII ст. Чжу Ши-цзе сумує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій [48, с. 175]. В творі, написаним китайським математиком в 1303 р., зустрічається наступна таблиця чисел (рис 1.2.):

				1																
				1		1														
				1		2		1												
				1		3		3		1										
				1		4		6		4		1								
				1		5		10		10		5		1						
				1		6		15		20		15		6		1				
				1		7		21		35		35		21		7		1		
				1		8		28		56		70		56		28		8		1

Рис. 1.2. – Арифметичний трикутник

Дана таблиця містить біноміальні коефіцієнти до 8-ї степені бінома –  $(1 + x)^8$  включно. Цей факт був підтверджений формулою, знайденою Ньютоном у часи, близько 1665 р.:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!} \cdot x^k \\
& + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k)}{(k+1)!} \cdot x^{k+1} + \dots \\
& + \frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2}{(m-1)!} x^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{m!} x^m \quad (1.1.)
\end{aligned}$$

$$A_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+2)(m-k+1)}{k!} \quad (1.2.)$$

Ньютон знайшов співвідношення між коефіцієнтами двох рядів:  $A_{k+1} = A_k \cdot \frac{m-k}{k+1}$ , де  $m$  – степінь многочлена,  $k$  – індекс многочлена. Далі таблиця Чжу Ши-цзе не продовжується, але можна спостерігати певну закономірність, яка дозволить записувати нові рядки: «Сума довільних двох чисел, які стоять поряд в одному і тому ж рядку, дорівнює числу яке стоїть в наступному рядку між ними». Наприклад  $1 + 2 = 3$ ,  $2 + 1 = 3$ ,  $1 + 3 = 4$ ,  $3 + 3 = 6$  і т.д. Формули (1.1.) і (1.2.) не були відомі в епоху Чжу Ши-цзе, а закономірність між числами спостерігалась лише шляхом спостереження. Трикутна таблиця називається арифметичним трикутником. Відомості про арифметичний трикутник були ще у 2 ст. до н. е у індійських математиків [29].

Для знаходження площ геометричних фігур стародавні вчені використовували теорію рядів. Тому, можна зробити висновок, що геометрична трактовка рядів бере свій початок ще за часів існування Евдокса та Архімеда.

Так були розв'язані задачі, на знаходження об'єму піраміди (розв'язана Евдоксом), площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника та площі спіралі (розв'язані Архімедом). Всі задачі залежать від інтеграла  $\int x^2 dx$ , і їх можна привести до обчислення «сум Рімана» виду  $\sum an^2$ . Так, Архімед досліджував спіраль за допомогою леми, записаної у вигляді:  $N^3 < 3 \sum_{n=1}^N n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^N n < (N+1)^3$  [8, с. 169].

Архімедовий спосіб, щодо знаходження площі сегменту, полягає у тому, що в сегмент вписується трикутник, вершиною якого є точка дотику

дотичної, яка паралельна хорді сегмента, далі, в кожний із обох сегментів, які залишилися, таким же чином вписуються трикутники, сума площ, яких складає чверть площі першого трикутника, далі в чотири нових сегмента знов вписуються трикутники і т.д. Площа даного сегменту виявляється рівною добутку площі першого трикутника помножену на суму нескінченного ряду:  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}$ . Даний прийом застосував Гюйгенс (1629–1695) для визначення меж, в яких повинна знаходитися площа кругового сегмента [45, с. 318].

Формальний розвиток теорії рядів, як нескінченних сум певних доданків, починається з початку XVII століття.

І одним із прикладів дослідження геометричної інтерпретації рядів є відкриття італійського математика П'єтро Менгорі (1626 –1686), який наглядно продемонстрував, за допомогою геометричного розкладання, що ряд:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$  (рис. 1.3). Математик розглядав квадрат зі стороною 1 і, відповідно площею, яка дорівнює 1. Він поділив площу квадрата навпіл, потім одну з половин знову поділив навпіл і т.д., і отримав нескінчену кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію.

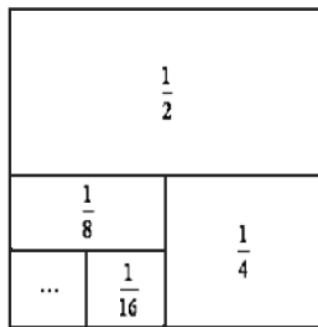


Рис. 1.3 – геометричне розкладання ряду геометричної прогресії

Треба відзначити, що П'єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . В 50 – роках XVII ст. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668 р. Математик У. Броункер (1620 – 1684). Свою назву гармонічний ряд

отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів [1, с. 163].

Вчення про ряди більшою мірою посилилось через потребу знайти для деяких функцій раціональні вирази, які дозволяли б здійснювати інтегрування. При обчисленні таких функцій для окремих значень змінних відчувалась необхідність в дослідженні їх на збіжність. Проте, при прагненні зберегти застосовність ряду для всіх значень змінної, це відчуття було втрачене шляхом виникнення парадоксів та метафізичних міркувань. Серед небагатьох вчених, які займали строгу математичну позицію, був П. Варіньйон (1654 – 1722). В 1715 р. саме він звернув увагу на те, що члени, придатного для використання ряду, повинні безперервно зменшуватись, і остача ряду повинна ставати як завгодно малою [8, с. 138].

Одним із найважливіших методів, який був запропонований в XVII ст. для розкладу функції в ряд, був винайдений Тейлором (1685—1731), який фактично використав інтерполяційну формулу Ньютона, яку він представив у своїх «Началах» [9, с. 140].

В цей час, перші відкриття, в теорії рядів були зроблені видатним Ейлером, який встановив, деякі ряди, суми яких виражаються визначеними інтегралами, та паралельно вивів формулу для їх сумування:

Якщо  $s$  – сума перших  $n$  – членів ряду і,  $t$  виражається через  $n$ , то згідно Ейлеру:  $s = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12dn} + \frac{d^3t}{720dn^3} + \frac{d^5t}{30240dn^5} + \dots$

Для випадку коли  $t = \frac{1}{x}$ ,  $n = x$ , Ейлер отримав рівність виду:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{x} = C + \ln(x) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{720x^4} - \dots,$$

де  $C$  – «ейлерова стала», яку Ейлер вже раніше вивів з шістьма десятковими знаками одночасно з формулою виду:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} = \ln(n + 1) + C$ .

В 1736 р. Ейлер знайшов суму для ряду:  $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots - S = \frac{1}{6}\pi^2$ . В 1750 р. він обчислив суми до  $2k = 24$  та привів їх у вигляді:  $S_{2k} =$

$\frac{2^{2k-1}}{(2k+1)!} A_{2k} \pi^{2k}$ , де коефіцієнти  $A_{2k}$  знаходяться за допомогою суми виду:  $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$  винайденою Як. Бернуллі (1654—1705) [9,с.142].

Ейлер заявив, що необхідна та достатня умова збіжності ряду полягає у тому, що виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{kn} - S_n) = 0$ . Але, як було виявлено пізніше, виконання вказаної рівності може бути лише необхідною умовою збіжності ряду. Більша частина сучасників Ейлера була такої ж думки про збіжність рядів. [9, с. 142 - 144].

Незабаром, математики усвідомили необхідність формулювання достатніх умов збіжності ряду. Таким чином, у 1768 р. була сформульована ознака Даламбера, пізніше у 1821 р. була сформульована радикальна ознака Коші, у 1832 р. Жозеф Раабе запропонував ознаку збіжності, яка базується на порівнянні зі збіжним узагальнено гармонічним рядом і розбіжним гармонічним рядом, а у 1835 р. була сформульована ознака Кумера [26].

Потреба в дослідженні збіжності рядів стала суттєвою, коли виникла полеміка про ряди з синусами та косинусами. Ейлеру неодноразово вказували на незаконність його методу, пов'язаного з використанням теорем про степеневі суми коренів рівняння. Тому вчений шукав шляхи, які виправдають його обчислення. Сам він не створив теорію про розбіжні ряди, але його більш широке розуміння сумування ряду і методи узагальнюючого сумування були виправдані, але строго обґрунтовані та розвинені лише на рубежі XIX ст. та XX ст. Е. Чезаро, Е. Борелем, Л. Фейером та іншими [9, с. 142].

## 1.2 Числові ряди

Сучасне поняття числового ряду пов'язане з поняттям нескінченної числової послідовності. Тому варто розглядати означення числового ряду в наступній інтерпретації.

### Означення 1.1

Нехай задана деяка числова послідовність  $\{a_n\}$ , де  $n$  – натуральне число, тобто  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . Вираз виду:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.3.)$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  – члени ряду, називається числовим рядом [34, с. 4].

Вираз для  $n$ -го члена ряду при довільному  $n$  називається загальним членом ряду [34, с. 4].

### Означення 1.2

Сума  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$   $n$  перших членів ряду (1.3.) називається  $n$ -ю частиною сумою ряду [19, с. 6].

### Означення 1.3

Числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум  $\{S_n\}$  має скінченне значення  $S$ , тобто:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (1.4.)$$

Число  $S$  називається сумою ряда (1.3.) і

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{або} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Якщо границя (1.4.) є нескінченною або не існує, то ряд (1.3.) розбіжний [40, с. 5].

Вивчення нескінченного ряду та його суми є дещо іншою формою вивчення послідовності та її границі, але ця форма має певні переваги як при дослідженні питання про існування границі, так і при його обчисленні. При вивченні збіжності послідовності велике значення має критерій Коші.

### Теорема 1.1. (Критерій Коші для послідовності)

Для збіжності послідовності  $\{S_n\}$  необхідно і достатньо, щоб для будь-якого додатного  $\varepsilon > 0$  знайшовся номер  $M$  такий, що для всіх номерів  $n$ , які задовольняють умову  $n \geq M \in \mathbb{N}$ , і для всіх натуральних  $m \in \mathbb{N}$  виконується умова:  $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$  [11, с. 35].

Як наслідок з цього твердження можна отримати критерій Коші для збіжності ряду [11, с. 37 - 38]:

### Теорема 1.2. (Критерій Коші для ряду)

Для збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  необхідно і достатньо, щоб для будь-якого додатного  $\varepsilon > 0$  знайшовся номер  $M$  такий, що для всіх номерів  $n$ , які задовольняють умову  $n \geq M$ , і для всіх натуральних  $p \in \mathbb{N}$  виконується умова:  $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$ .

Можна також зазначити, що відкидання певної скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність або розбіжність. Цей факт доводиться наступною лемою [40, с. 6 - 7].

### Лема № 1.1.

Відкидання скінченного числа членів ряду (або додавання скінченного числа членів ряду) не впливає на збіжність або розбіжність цього ряду [40, с. 6].

*Доведення.*

Розглянемо ряд:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (1.5.)$$

Паралельно з рядом (1.5.) розглянемо ряд:

$$a_{t+1} + a_{t+2} + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^n a_k \quad (1.6.)$$

який отриманий з ряду (1.3.) шляхом відкидання перших  $t$  членів.

Якщо позначити  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  суму перших  $n$  членів ряду (1.5.) та  $\overline{S_{n-t}} = a_{t+1} + a_{t+2} + \dots + a_n$  суму  $n - t$  перших членів ряду (1.6.), то справедлива така рівність:

$$S_n = S_t + \overline{S_{n-t}} \quad (1.7.)$$

В рівності (1.7.) перейдемо до границі при  $n \rightarrow \infty$ . Так як  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_t = S_t$ , то, враховуючи, що границя від суми дорівнює сумі границь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_t + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_{n-t}}$$

Із даної рівності випливає, що послідовності  $\{S_n\}, \{\overline{S_{n-t}}\}$  одночасно або мають межу, або не мають. Це означає, що із збіжності ряду (1.3.) слідує збіжність ряду (1.5.) та його сума  $S - S_t$ , а з розбіжності (1.3.) випливає розбіжність (1.5.). Вірне й обернене твердження.

*Що і треба було довести.*

Таким чином, відкидання (або додавання) скінченного числа членів ряду не впливає на збіжність ряду, а впливає тільки на значення суми ряду. З урахуванням вище зазначеного, сформулюємо наступний наслідок.

**Наслідок 1.1.** Якщо з ряду відкинути кінцеве число його членів, то його збіжність не порушується; якщо вихідний ряд збіжний, то сума отриманого ряду буде менше суми початкового ряду на суму викинутих членів [11, с. 49].

Деякі математичні поняття з'явилися окремо по відношенню до теорії рядів, але застосовуються до рядів, в певному сенсі, і є інструментами для їх подальшого дослідження. В цьому разі має місце наступна теорема [11, с. 47 - 48]:

**Теорема 1.3.** Приєднаємо до числа членів деякого ряду в якості нових членів довільну (може бути, нескінченну) кількість нулів, розмістивши їх між старими членами ряду довільним чином. У цьому випадку новий ряд буде збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний старий ряд, і сума нового ряду дорівнюватиме сумі старого.

### Примітка 1. 1.

Про збіжність ряду судять по його членам. Однак, як було тільки що виявлено, збіжність ряду не залежить від будь-якого кінцевого числа членів ряду. Тому для встановлення збіжності (або розбіжності) ряду не обов'язково враховувати всі його члени. Досить обмежитися членами, починаючи з деякого місця або починаючи з деякого номера  $n$  [11, с. 49].

В цьому відношенні, справедливо зазначити критерій збіжності ряду з невід'ємними членами. Але спочатку, сформулюємо наступні означення.

### Означення 1. 4.

Числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , всі члени якого невід'ємні:  $a_n \geq 0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) називається невід'ємним рядом або рядом з невід'ємними членами [15, с. 21].

### Означення 1. 5.

Послідовність  $\{S_n\}$  називається обмеженою зверху, якщо знайдеться таке число  $M$ , що для всіх натуральних значень  $n = 1, 2, \dots$  виконується нерівність  $S_n \leq M$  [40, с. 11].

Просумувавши члени певної послідовності виникає поняття ряду, і справедливність наступної теореми [40, с. 12].

### Теорема 1. 4.

Для збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  з невід'ємними членами необхідно та достатньо, щоб послідовність його частинних сум  $S_1, S_2, \dots, S_n$  була обмеженою зверху.

*Доведення.* Відмітимо, що в силу невід'ємності членів  $a_n$  послідовність  $\{S_n\}$  частинних сум є монотонно неспадною:

$$S_n \leq S_{n+1} = S_n + a_n \text{ для будь-якого } n \in \mathbb{N}.$$

*Необхідність.* Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, а значить, існує кінцевий  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Тоді за теоремою Вейерштрасса, про границю зростаючої послідовності (неспадна послідовність збіжна тоді і тільки тоді, коли вона обмежена зверху), для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \leq S$ , тобто твердження вірне.



*Достатність.* Неспадна послідовність  $\{S_n\}$  обмежена зверху, тоді послідовність має кінцеву границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , а це означає, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний.

*Що і треба було довести.*

При дослідженні рядів на збіжність доцільно враховувати також певні властивості числових рядів [15, с. 15-17], які доводяться наступними теоремами:

**Теорема 1.5. (асоціативний закон для збіжних рядів)**

Якщо в збіжному ряді

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.8.)$$

випадково об'єднати сусідні члени в групи, не порушуючи порядку членів:

$$(u_1 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2}) + (u_{n_2+1} + \dots + u_{n_3}) + \dots$$

(кожний член при цьому повинен входити тільки в одну групу) і знайти суми  $v_1, v_2, v_3, \dots$  членів, що входять в кожену із груп, то складений із цих сум ряд,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (1.9.)$$

буде розбіжний і має таку ж суму, що і ряд (1.8.).

Враховуючи теорему про асоціативний закон для збіжних рядів, можна зазначити наступний наслідок.

**Наслідок 1.2.** Якщо в результаті описаного в умові попередньої теореми об'єднання ми отримаємо ряд (1.9.), котрий розбіжний, то і початковий взятий ряд (1.8.) також розбіжний [11, с. 41].

Поряд із зазначеною вище теоремою справедливо розглянути випадок про множення ряду на певне стале число.

**Теорема 1.6. (дистрибутивний закон для рядів).**

Нехай

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.10.)$$

– деякий ряд, а  $c$  – довільне число, що відрізняється від нуля. Тоді ряд виду:

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots \quad (1.11.)$$

збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний ряд (1.10.). Якщо ряд (1.10.) збіжний, і сума його рівна  $s$ , то сума ряду (1.11.) рівна  $cs$ .

Дана теорема є актуальною для  $\forall c \in \mathbb{R}$ . Але постає питання про збіжність ряду у випадку, коли  $c = 0$ . В цьому разі справедливе наступне зауваження.

**Примітка 1.2.** Якщо у формулюванні теореми допустити випадок  $c = 0$ , то ряд (1.11.) буде в цьому випадку збіжний завжди [11, с. 43].

Теорема про можливість переставляння в ряді членів, аналогічна комутативності додавання, та має більш вузький характер і справедлива уже не для всіх рядів [11, с. 43].

Наступні теореми доводять той факт, що для рядів справедливі такі арифметичні дії як додавання, множення [46, с. 12].

**Теорема 1.7. (теорема про додавання рядів)**

Нехай

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

– два збіжні ряди відповідно з сумами  $s$  і  $t$ .

Тоді ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$$

теж збігається і його сума  $s + t$ .

**Теорема 1.8.**

Якщо

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

і

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

– два збіжних ряди відповідно з сумами  $s$  і  $t$ , а  $a$  і  $b$  – довільні числа, то ряд

$$(au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \dots + (au_n + bv_n) + \dots$$

також збігається і сума його дорівнює  $as + bt$ .

Зважаючи на теорему про додавання рядів, можна сформулювати наступне твердження, яке стосується віднімання рядів у вигляді наслідку [11, с. 47].

**Наслідок 1. 3. (теорема про віднімання рядів)**

Якщо ряди:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

і

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

Збіжні і мають суми  $s$  і  $t$ , то збігається ряд:

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) + \dots$$

і сума його дорівнює  $s - t$ .

Однією із найголовніших задач теорії рядів – є дослідження рядів на збіжність. Розв’язання цієї задачі спрощується, якщо на початку її розв’язання з’ясувати виконання необхідної ознаки збіжності ряду, яка є наслідком наступної теореми [10, с. 31- 32].

**Теорема 1. 9. (необхідна ознака збіжності ряду)**

Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Доведення.* Оскільки ряд збіжний, то існує границя послідовності частинних сум цього ряду, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , де  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Тоді, використовуючи арифметичні дії збіжних послідовностей, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Покажемо тепер, що умова  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  не є достатньою при дослідженні ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на збіжність.

Для цього розглянемо контрприклад:

Нехай дано ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Для даного ряду необхідна умова виконується, тобто:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty} = 0$ . Для послідовності частинних сум  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  цього ряду справедлива наступна оцінка:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

оскільки  $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$  оскільки для довільного  $k \leq n$ . Тоді, згідно теоремі про граничний перехід в нерівності, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

тобто,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  розбіжний.

*Що і треба було довести.*

Якщо необхідна умова збіжності ряду не виконується, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Якщо ж необхідна умова виконується, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , тоді дослідження продовжується за допомогою достатніх ознак, основними з яких є ознаки, що доводяться наступними теоремами, а саме: теорема 1.10 [11, с. 51], теорема 1.11 [11, с. 55], теорема 1.12 [40, с. 13].

### **Теорема 1.10.**

Якщо для всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується умова

$$0 \leq a_n \leq b_n; \quad (1.12.)$$

тоді

- а) із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- б) із розбіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  слідує розбіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

*Доведення.* Позначимо через  $A_n$  і  $B_n$  відповідно, частинну суму першого та другого рядів:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Відмітимо, що в силу невід'ємності членів заданих рядів послідовностей  $A_n$  і  $B_n$  будуть неспадними.

- а) із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує існування границі послідовності його частинних сум  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ .

Тобто для всіх  $n \in N$  виконується нерівність  $B_n \leq B$ . Звідси, використовуючи умову (1.12.) отримуємо  $A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq B$  для всіх  $n \in N$ . Таким чином, послідовність часинних сум  $A_n$  ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також обмежена зверху та, як було зазначено, є неспадною, а значить має границю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  і  $A \leq B$ .

б) Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  теж розбіжний. Припустимо протилежне. Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний, тоді за доведеним в пункті (а), отримуємо, що збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , що заперечує умову, згідно до якої ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Отримане протиріччя доводить дане твердження.

*Що і треба було довести.*

### **Теорема 1. 11. (гранична ознака порівняння)**

Якщо  $a_n > 0$  та  $b_n > 0$  для всіх  $n \geq m$  ( $m$  – заданий номер) і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ , де  $0 < k < \infty$ , то ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  або збіжні, або розбіжні.

*Доведення.*

а) Нехай, наприклад ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний. З умови існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  для довільного додатного  $\varepsilon$  вірна нерівність  $\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$ .

Розкриваючи знак модуля, запишемо нерівність у вигляді:

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon \quad (1.13.)$$

З нього слідує нерівність

$$a_n < (k + \varepsilon)b_n \quad (1.14.)$$

Якщо так, то із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)b_n$ , із збіжності якого в силу нерівності (1.13.) та теореми 1.10, слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

У випадку, коли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, доведення будується аналогічно з тією лише різницею, що наслідок із нерівності (1.14.) запишемо у вигляді:

$$b_n < \frac{1}{k - \varepsilon} a_n$$

б) розглянемо тепер випадок, коли один із рядів розбіжний. Нехай, наприклад, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Очевидно, що із існування границі:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  ( $k \neq 0$ ), слідує існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$ . Звідси слідує, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  повинен бути розбіжний, так як інакше в силу доведеного в пункті (а), цієї теореми був би збіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а це неможливо.

*Що і треба було довести.*

### **Теорема 1. 12. (ознака порівняння)**

Нехай  $a_n > 0, b_n > 0$  і існує такий номер , що

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{для всіх } n \geq n_0 \quad (1.14.)$$

Тоді справедливі наступні твердження:

1. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний.
2. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  також розбіжний.

*Доведення.*

Візьмемо довільне  $n > n_0$  і напишемо нерівність (1.15.) для  $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n - 1$ :

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}},$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}},$$

.....

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}};$$

Перемножуючи ці нерівності, отримуємо:  $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, n \geq n_0$  (1.16.).

Нерівність (1.16.), подібна нерівності виду:  $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$  виведена лише для значень  $n > n_0$ , але вона також вірна і для  $n = n_0$  [15, с.30].

Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний. Так як ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$  збіжний, то за ознакою порівняння ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний [15]. Це протиріччя доводить друге твердження.

*Що і треба було довести.*

Крім вище зазначених ознак є і інші, більш алгоритмічні, для практичного застосування, достатні ознаки, які сформульовані в наступних теоремах, а саме: теорема 1. 13 [10, с. 60 – 63], теорема 1. 14 [16, с. 231], наслідок 1.4 [15, с. 39- 40], теорема 1.15 [15, с. 41], теорема 1.16 [43, с. 279], теорема 1.17 [33, с. 256], теорема 1.18 [33, с. 257].

### Теорема 1. 13. (ознака Даламбера)

Нехай для числового ряду з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n \in N \quad (1.17.)$$

існує границя (кінцева або нескінчена) послідовності відношень  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q > 0.$$

Тоді справедливі наступні твердження:

- а) якщо  $q < 1$ , тоді ряд (1.17.) збіжний;
- б) якщо ряд  $q > 1$ , або  $q = +\infty$ , тоді ряд розбіжний.

*Доведення.*

а) Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ . Для числа  $r = \frac{(q+1)}{2}$  справедлива нерівність  $q < r < 1$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right) = q - r < 0$ . З властивостей збіжних послідовностей випливає, що

$$\exists n_0 \in N \forall n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \leq 1. \quad (1.18.)$$

Враховуючи (1.18.), для будь-якого натурального числа  $k$  маємо:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq r, \quad \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} \leq r, \quad \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \leq r < 1.$$

Отже,

$$\left( \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right) \left( \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} \right) \dots \left( \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \right) \leq r^k, \quad \text{або} \quad \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \leq r^k$$

Звідси отримаємо, що  $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} r^k, k \in \mathbb{N}$ .

Якщо  $n$  – довільне натуральне число, для якого  $n \geq n_0$ , то, вважаючи  $k = n - n_0$ , отримаємо нерівність:  $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} r^n$ .

Дана нерівність дозволяє застосувати ознаку порівняння для доведення збіжності ряду (1.17.). Дійсно, в силу умови  $0 < r < 1$  геометричний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} r^n = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0-1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

збіжний. Таким чином, згідно ознаки порівняння, ряд (1.17.) також збіжний.

б) Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , при цьому  $q < 1$ , або  $q = +\infty$ . Якщо  $q \neq +\infty$ , тоді припустимо  $r = \frac{(q+1)}{2}$ , а якщо  $q = +\infty$ , то в якості  $r$  візьмемо будь-яке число, яке більше за одиницю. Тоді  $1 < r < q$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_{n+1}}{a_n} - r) = s$ , де  $s = q - r > 0$  при  $q \neq +\infty$ , або  $s = +\infty$  при  $q = +\infty$ . З властивостей послідовностей, які мають додатню межу (кінцеву або нескінчену) отримаємо:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} > r \geq 1$ .

Тоді

$$0 < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \dots \leq a_{n_0+k} \leq \dots$$

Отже, межа послідовності  $\{a_n\}$  не може бути менша від числа  $a_{n_0} > 0$ . Таким чином, не виконується необхідна умова збіжності ряду, та ряд (1.17.) розбіжний.

*Що і треба було довести.*

**Примітка 1.3.** Теорема 1.13 не охоплює випадок, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

В такому разі нічого певного про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , де  $a_n > 0$ , заздалегідь сказати не можна (тобто, використання ознаки Даламбера є не доцільним). Для вирішення цього питання про збіжність такого ряду, є потреба в використанні додаткових досліджень [10, с. 64].

**Примітка 1.4.**

Аналізуючи доведення теореми 1.13, можна помітити, що висновки про збіжність ряду (1.17.) були зроблені з урахуванням умов (1.17.), (1.18.). Це дозволяє сформулювати більш загальний, в порівнянні з граничною ознакою



Даламбера, достатню ознаку збіжності знакододатних рядів, яку зазвичай називають ознакою Даламбера [10, с. 63]:

- 1) якщо існує таке число  $q \in (0,1)$ , що для будь-якого натурального числа  $n > n_0$  справедлива нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , тоді ряд (1.17.) збіжний;
- 2) якщо для будь-якого натурального числа  $n > n_0$  справедлива нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , тоді ряд (1.17.) розбіжний.

Крім ознаки Даламбера мають місце наступні ознаки для дослідження рядів на збіжність.

### Теорема 1. 14. (ознака Раабе)

Для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{в якому } a_n > 0,$$

справедливі наступні твердження:

1. Якщо знайдуться число  $r > 1$  і номер  $n_0$  такі, що:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r \quad \text{для всіх } n \geq n_0, \quad (1.19.)$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний

2. Якщо знайдеться номер  $n_0$  такий, що:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \text{для всіх } n \geq n_0, \quad (1.20.)$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний.

*Доведення.* Встановимо перше твердження.

Із нерівності (1.20.) слідує

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geq n_0 \quad (1.21.)$$

Візьмемо  $p \in (1, r)$ . Так як  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p$ , то за означенням

границі, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться номер  $n_1$ , такий, що для всіх  $n \geq n_1$

абсолютна величина різниці  $\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} - p \right| < \varepsilon$ , звідки витікає, що для цих  $n$

має місце наступна подвійна нерівність:

$$p - \varepsilon < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} < p + \varepsilon, n \geq n_1 \quad (1.22.)$$

Візьмемо  $\varepsilon = r - p > 0$ . Тоді знайдеться номер  $n_1$ , такий, що згідно другій нерівності (1.22) для усіх  $n \geq n_1$  справедлива нерівність:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 < [p + (r - p)] \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$$

або, як можна відмітити:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{r}{n}, n \geq n_1 \quad (1.23.)$$

Із (1.21.) і (1.23.) слідує, що для всіх  $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$  відношення  $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$ , тобто

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\frac{1}{n}\right)^p}, n \geq n_2 \quad (1.24.)$$

Так як  $p > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$  збігається. Тому із (1.24.) випливає, що згідно теореми 1.12, про ознаку порівняння, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається.

Встановимо тепер друге твердження. Із (1.20.) слідує, що при  $n \geq n_0$  відношення  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ , тобто:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, n \geq n_0 \quad (1.25.)$$

Але ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  розбігається. Тому із (1.25.) витікає, що згідно теореми 1.11, про ознаку порівняння, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний.

*Що і треба було довести.*

#### **Наслідок 1.4 (ознака Раабе в граничній формі)**

Якщо  $a_n > 0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$ ,

тоді при  $r > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, а при  $r < 1$  даний ряд розбіжний.

*Доведення.*

Якщо  $r$  – обмежене число, то згідно означення границі, для  $\forall \varepsilon > 0$  знайдеться  $n_0$ , таке. Щоб для всіх  $n \geq n_0$  абсолютна величина  $\left| n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - r \right| < \varepsilon$ , то має місце подвійна нерівність:

$$r - \varepsilon < n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < r + \varepsilon, n \geq n_0 \quad (1.26.)$$

Нехай  $r > 1$ . Якщо  $r$  – обмежене число, то візьмемо  $\varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$ . Тоді знайдеться номер  $n_0$ , такий, що згідно нерівностям (1.26.) для всіх  $n \geq n_0$  має місце:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > r - \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2} = r_1 > 1$$

З цього випливає, згідно ознаки Раабе, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний. Якщо  $r = +\infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний. Дійсно, в цьому випадку знайдеться номер  $n_0$  такий, що для всіх  $n \geq n_0$  справедлива нерівність:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 2$$

і тому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також збіжний за ознакою Раабе.

Нехай  $r < 1$ . Якщо  $r$  – обмежене число, то візьмемо  $\varepsilon = 1 - r > 0$ . Тоді знайдеться номер  $n_0$ , такий, що згідно нерівностям (1.26.) для всіх  $n \geq n_0$  має місце:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > r - (1 - r) = 1$$

З цього випливає, згідно ознаки Раабе, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний. Якщо  $r = -\infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також розбіжний. Дійсно, в цьому випадку знайдеться номер  $n_0$  такий, що для всіх  $n \geq n_0$  справедлива нерівність:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

і тому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  також розбіжний за ознакою Раабе.

*Що і треба було довести.*

Відмітимо, що якщо  $r = 1$  або  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  не існує, то дана ознака не дає відповіді на питання про збіжність досліджуваного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  [15, с. 40].

**Теорема 1.15. (ознака Куммера)**

Нехай числова послідовність  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  така, що  $c_n > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty, \quad (1.27.)$$

тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$  розбіжний. Отже для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , в якому  $a_n > 0$ , справедливі наступні твердження:

1. Якщо знайдуться число  $d > 1$  і номер  $n_0$  такі, що:

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq d \quad (1.28.)$$

для всіх  $n \geq n_0$ , тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний.

2. Якщо знайдеться номер  $n_0$  такий, що:

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0 \quad (1.29.)$$

для всіх  $n \geq n_0$ , тоді ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний.

*Доведення.*

Встановимо спочатку перше твердження. Згідно наслідку 1.2.3, можна вважати, що нерівність (1.28.) виконується для всіх  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Помножуючи цю нерівність на  $a_{n+1} > 0$ , отримаємо:

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq d \cdot a_{n+1} \quad (1.30.)$$

Звідси витікає, що  $b_n = c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$ , тобто послідовність  $\{c_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$  строго спадає, а так як  $c_n a_n > 0$ , то ця послідовність має границю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n = b \geq 0$ .

Тому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збігається, так як послідовність його частинних сум  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  має границю, оскільки  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 a_1 - c_2 a_2 + c_2 a_2 - c_3 a_3 + \dots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$  прагне до числа  $c_1 a_1 - b$ . Але тоді із нерівності (1.30) за теоремою про дистрибутивний закон

для рядів, впливає збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} d \cdot a_{n+1}$ , а звідси із теореми про додавання рядів слідує, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається.

Встановимо тепер друге твердження. Із (1.29.) витікає

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{\frac{c_{n+1}}{c_n}}, n \geq n_0.$$

Звідси із (1.27.), за ознакою порівняння слідує, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний.

*Що і треба було довести.*

### Теорема 1.16 (ознака Гаусса)

Якщо для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , в якому  $a_n > 0$ , знайдуться номер  $n_0$  та числа  $\lambda, \mu, \alpha > 0$  та  $C > 0$  такі, що відношення  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  можна представити у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}, |\theta_n| \leq C \text{ для всіх } n \geq n_0,$$

то

- 1) При  $\lambda > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний;
- 2) При  $\lambda < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний;
- 3)  $\lambda = 1$  і  $\mu > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний;
- 4)  $\lambda = 1$  і  $\mu \leq 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбіжний.

### Теорема 1.17. (радикальна ознака Коші)

Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , де  $a_n \geq 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді:

якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , то:

- 1) При  $l < 1$  ряд збіжний;
- 2) При  $l > 1$  ряд розбіжний;
- 3) При  $l = 1$  ряд може бути збіжний або розбіжний.

*Доведення.*

1) Нехай  $l < 1$ . Розглянемо число  $q$  (таке число завжди знайдеться) що задовольняє відношенню  $l < q < 1$ . Із існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$  слідує, що, починаючи з деякого номера  $N$ , виконано нерівність:  $|\sqrt[n]{a_n} - l| <$

$q - 1$ . Розкриваючи модуль, можна записати нерівність у вигляді:  $\sqrt[n]{a_n} < q$  або  $a_n < q^n$  для всіх  $n \geq N$ .

Розглянемо тепер два ряди:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots \\ q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \end{aligned}$$

Другий з цих рядів є спадною геометричною прогресією, а, значить – збігається. Але тоді за теоремою 3 збігається і ряд  $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ , звідки слідує збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , отриманого з ряду  $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ , додаванням кінцевого числа членів  $a_1 + \dots + a_{N-1}$

2) Нехай  $l > 1$ . Із існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  слідує що, починаючи з деякого номера  $n = N$ , виконано нерівність  $|\sqrt[n]{a_n} - 1| < l - 1$ . Розкриваючи модуль, можна записати нерівність у вигляді:  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  або  $a_n < 1$  для усіх  $n \geq N$ . Але якщо всі члени ряду, починаючи з  $a_n$  більше 1, то цей ряд розбігається, так як його спільний член не прагне до нуля, тобто не виконується необхідний признак збіжності ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ).

3) Нехай  $l = 1$ . В цьому випадку радикальний признак Коші не дає змоги встановити, збігається ряд чи розбігається, необхідні додаткові дослідження. Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Ми знаємо, що він сходиться.

Обчислимо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ , застосувавши попереднє логарифмування:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln n}{n}} = \left| \begin{array}{l} \text{застосовуючи} \\ \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right| = \\ &= e^{-2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Також відомо, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  – розходиться. При цьому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$  і обчислюється він аналогічно.

*Що і треба було довести.*

### Теорема 1.18 (інтегральна ознака Коші)

Нехай члени ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  додатні та не зростають:

$$a_n > a_{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

Нехай існує неперервна не зростаюча функція  $f(x)$  на інтервалі  $[1, +\infty)$  така, що  $f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$ , тоді невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  і ряд поводять себе однаково (або збіжні або розбіжні).

*Доведення.*

Зобразимо члени ряду (1.3.) геометрично, при цьому відкладемо по вісі абсцис номери  $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$  членів ряду, а по вісі ординат – відповідні значення членів ряду (1.3.) (рис.1.4) та побудуємо на даному рисунку графік неперервної не зростаючої функції  $y = f(x)$ .

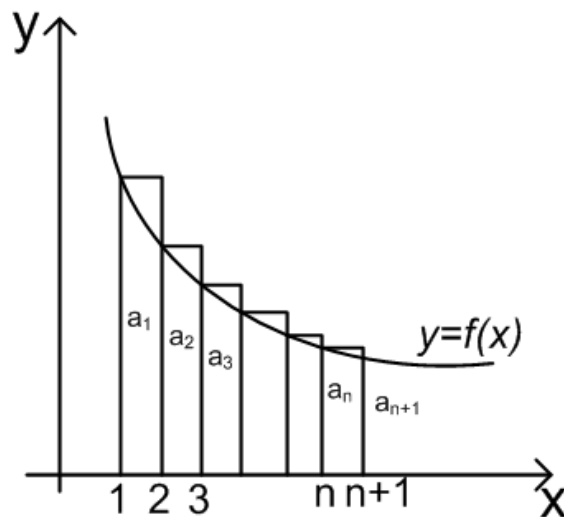


Рис.1.4 – геометричне зображення членів ряду (1.3.)

Розглянемо рис. 1.4, відмітимо, що перший член із побудованих прямокутників має основу – 1, та висоту  $f(1) = a_1$ . Тому, площа цього прямокутника дорівнює  $a_1$ . Площа другого прямокутника дорівнює  $a_2$  і т.д., а площа  $(n + 1)$ -го із побудованих прямокутників дорівнює  $a_n$ . Сума площ побудованих прямокутників дорівнює  $S_n$  перших  $n$  членів ряду. З іншої сторони, ступінчаста фігура, утворена прямокутниками, міститься всередині криволінійної фігури, обмеженої кривою  $y = f(x)$  та прямим  $x=1, x = n + 1, y = 0$ . Площа цієї криволінійної фігури дорівнює:

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx \quad (1.31.)$$

Розглянемо тепер рис.1.5:

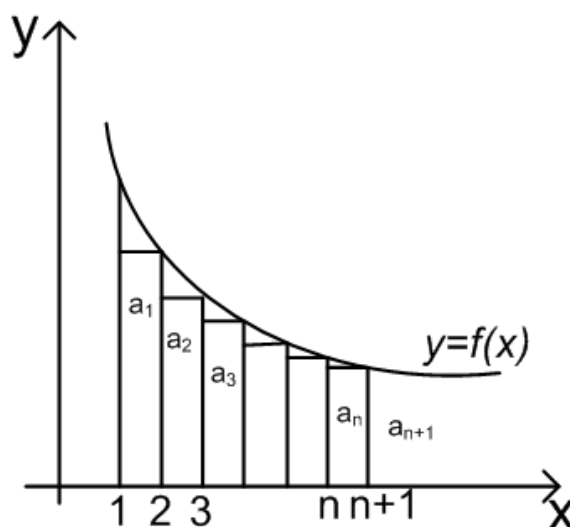


Рис.1.5. – геометричне зображення членів ряду (1.3.)

Перший (зліва) із побудованих прямокутників має висоту  $a_2$ , тому його площа також дорівнює  $a_2$ . Площа другого прямокутника дорівнює  $a_3$  і т.д. Площа останнього із побудованих прямокутників дорівнює  $a_{n+1}$ . Таким чином, сума площ всіх побудованих прямокутників дорівнює сумі всіх членів ряду (1.3), починаючи з другого до  $(n + 1)$ -го, тобто дорівнює  $S_{n+1} - a_1$ . З іншої сторони, ступінчаста фігура, утворена прямокутниками, міститься всередині криволінійної фігури, обмеженої кривою  $y = f(x)$  та прямим  $x=1$ ,  $x = n + 1$ ,  $y = 0$ . Площа цієї криволінійної фігури дорівнює:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx$$

Отже,

$$S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx + a_1 \quad (1.32.)$$

Розглянемо тепер два випадки.

1) Припустимо, що інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збіжний, тобто має скінчене значення.

Так як,



$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Тоді в силу нерівності (1.31.)

$$S_n < S_{n+1} < \int_1^{+\infty} f(x)dx + a_1,$$

тобто, частинна сума  $S_n$  залишається обмеженою при всіх значеннях  $n$ .

Але при збільшенні  $n$  частинна сума зростає, так як члени  $a_n$  додатні. Отже,  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$  має скінчене значення  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , тобто ряд збіжний.

2) Припустимо, що  $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \infty$ . Це означає, що  $\int_1^{n+1} f(x)dx$  необмежено зростає при зростанні  $n$ . Але в силу нерівності (1.31.)  $S_n$  також необмежено зростає при зростанні  $n$ . Тобто ряд розбіжний.

*Що і треба було довести.*

## Висновки до розділу 1

Проаналізувавши теоретичні аспекти з теорії розвитку рядів, а також історичні відомості щодо їх виникнення, можна відмітити, що чіткої періодизації етапів розвитку рядів не має та точну дату їх виникнення встановити не можливо. Проте, відомо що стародавнім цивілізаціям таким, як Стародавній Єгипет, Стародавній Вавилон, Стародавній Китай були відомі окремі факти щодо сумування нескінченної кількості доданків та спроб знаходження їх сум.

За часів існування Евдокса та Ахімеда, було виявлено, що мислителі тогочасності робили спроби застосування теорії рядів для розв'язання задач на знаходження об'єму піраміди, яку досліджував Евдокс, площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника, дослідження яких представлено в роботах Ахімеда.

З'ясовано, що на початку XVII століття починається формальний розвиток теорії рядів, оскільки перед вченими постали питання, які неможливо було розглянути без розвинутої теорії рядів.

Вагомий внесок в розвиток теорії рядів в XVII столітті зробили такі вчені, як Ейлер, Броункер, Кестнер, Менгорі.

Більш детально було проаналізовано роботу П'єтра Менгорі, оскільки, саме він наочно продемонстрував, у вигляді нескінченної кількості прямокутників, що ряд:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ , має суму, яка дорівнює 1.

Ейлер у своїх дослідженнях запропонував необхідну умову збіжності ряду, проте вважаючи її і достатньою умовою водночас, що було помилкою.

Незабаром, а саме XVIII – XIX століттях, математики усвідомили необхідність формулювання достатніх умов збіжності ряду. У 1768 р. Ж. Даламбер сформулював теорему, яка і є достатньою умовою, названою в його честь. Пізніше у 1821 р. Огюстен Луї Коші сформулював теорему про радикальну ознаку, у 1832 р. Жозеф Раабе запропонував теорему – ознака Раабе, а у 1835 р. Ернст Куммер запропонував свою ознаку (ознака Куммера).

Також було проаналізовано більш сучасну наукову літературу стосовно теорії рядів, досліджено властивості числових рядів і розглянуті доведення теорем, наслідками яких є достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів.

## РОЗДІЛ II. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

### 2.1. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією.

Теорія рядів – це розділ математики, який дозволяє будь-яку поставлену задачу розв'язати з досить високою, для теоретичного або практичного її значення, точністю.

Проте, для більш глибокого розуміння в галузі сучасної теорії рядів слід звернути увагу на їх геометричну інтерпретацію.

На нашу думку, геометрична інтерпретація – це спосіб представлення досліджуваного об'єкта в наочній формі, яка дозволяє помітити його властивості та містить інформацію, яка не спостерігається при аналітичному його записі. Такий спосіб дослідження теорії рядів, може бути досить ефективним при розв'язанні задач як прикладного так і теоретичного характеру, а також для можливості реалізації принципу наочності в дидактиці, зокрема, при вивченні розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз».

Розглянемо геометричну інтерпретацію рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією попередньо проаналізувавши її теоретичні аспекти, які стосуються саме поняття арифметичної прогресії.

#### Означення 2.1

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне і те саме число. Це стале для даної послідовності число  $d$  називають різницею арифметичної прогресії [5, с. 161].

Іншими словами, арифметична прогресія – це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a_n + d$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a$  і  $d$  – задані числа.

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю  $d$ . Тому якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно  $a_1$  і  $d$ , то її перші члени становлять:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots,$$

$$\text{Тобто } a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d, \dots$$

Коефіцієнт при  $d$  на 1 менший від порядкового номера члена прогресії [5, с. 162].

Запишемо формулу  $n$ -го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Розглянемо основні властивості арифметичної прогресії [5, с.162-163]:

**Теорема 2.1.** Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів:  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ .

*Доведення.* За означенням,  $d = a_{n+1} - a_n, d = a_n - a_{n-1}$ .

$$\text{Отже, } a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1},$$

$$\text{Звідси } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Крім того правильне і обернене твердження.

**Теорема 2.2.** Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто:  $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ , де  $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k < n, n \geq 2$ .

**Теорема 2.3.** Якщо  $k, l, p, s$ -натуральні числа і  $k + l = p + s$ , то  $a_k + a_l = a_p + a_s$ .

*Доведення.* Використаємо формулу  $n$ -го члена, тоді:

$$a_k + a_l = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = 2a_1 + d(k + l - 2);$$

$$a_p + a_s = a_1 + d(p - 1) + a_1 + d(s - 1) = 2a_1 + d(p + s - 2);$$

$$\text{Але } k + l = p + s, \text{ тому } 2a_1 + d(k + l - 2) = 2a_1 + d(p + s - 2),$$

$$\text{тобто } a_k + a_l = a_p + a_s.$$

*Що і треба було довести.*

**Теорема 2.4.** Сума двох членів скінченої арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів:  $a_k - a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$ .

*Доведення.* Нехай дано  $n$  членів скінченої арифметичної прогресії:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ . Додамо перший і останній її члени, потім – другий і передостанній, потім – третій член від початку і третій від кінця і т.д.. Результати маємо однакові. Справді, якщо  $a_1 + a_n = m$ , то:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m;$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m;$$

і т.д.

Отже,  $a_k - a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$ .

*Що і треба було довести.*

**Теорема 2.5.** Сума  $n$  –перших членів скінченої арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

*Доведення.* Нехай  $S_n$  – сума  $n$  –перших членів арифметичної прогресії  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ . Якщо  $a_1 + a_n = m$ , то  $a_2 + a_{n-1} = m, a_3 + a_{n-2} = m$ , і т.д. Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

+

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

---


$$2S_n = m + m + m + \dots + m + m + m$$

$$2S_n = mn; \quad 2S_n = (a_1 + a_n)n, \quad \text{звідси } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

*Що і треба було довести.*

Якщо  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ , тоді формулу для обчислення частинних сум арифметичної прогресії можна записати у вигляді:  $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ .

Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією представлена в роботі [25, с. 59 - 68], згідно з якою:

Розглянемо лінійну функцію натурального аргументу:

$$f(n) = a + (n - 1)d, \quad (2.1.)$$

де  $a \in \mathbb{R}$  і  $d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

Параметр  $d$  називається різницею, тому що  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$f(n) - f(n - 1) = d. \quad (2.2.)$$

Запишемо праву частину рівності (2.1.) у розгорнутому виді, попередньо просумувавши її значення, починаючи з  $n = 1, 2 \dots$ :  $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) + \dots$ . (2.3.)

Якщо  $n$  скінченне, то сума (2.3.) також має скінченне значення і називається сумою членів арифметичної прогресії. У випадку коли  $n \rightarrow \infty$ , то сума (2.3.) називається числовим рядом, який пов'язаний з арифметичною прогресією і задається своїм загальним членом:  $a_n = a + (n - 1)d$

і має наступну «сігма-модель»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n - 1)d] \quad (2.4)$$

Функцію (2.1.) можна задати у вигляді наступного графіка:

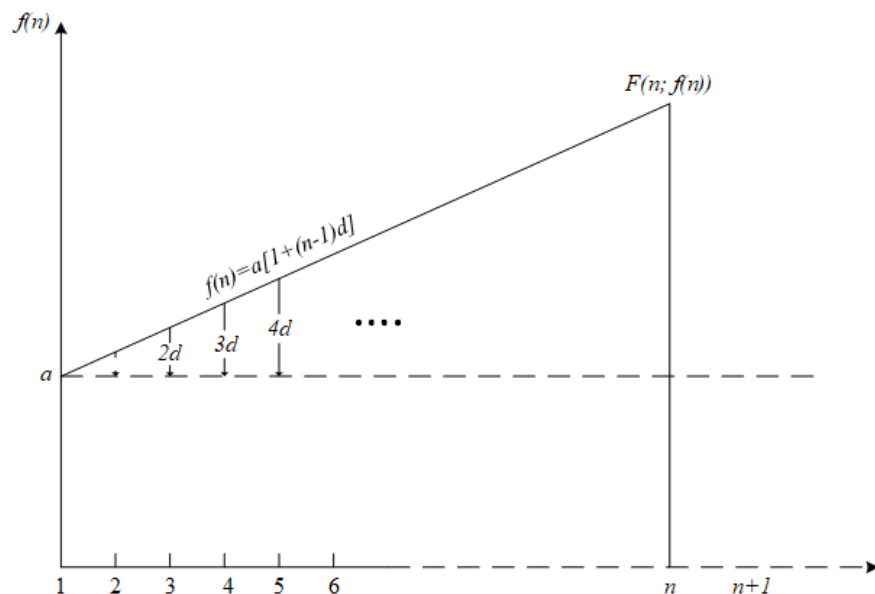


Рис.2.1. – Графік функції арифметичної прогресії з параметрами  $a$  і  $d$

Якщо врахувати  $n \rightarrow \infty$ , то на рис. 2.1 маємо геометричну інтерпретацію числового ряду, який пов'язаний з арифметичною прогресією у вигляді довжин відрізків:  $[1; a]$ ,  $[2; a + d]$ ,  $[3; a + 2d]$ , ...,  $[n; a + (a + 1)d]$  і т. д. В даному випадку, отримаємо ряд з лінійною геометричною інтерпретацією.

За допомогою геометричної інтерпретації числового ряду, який пов'язаний з арифметичною прогресією можна одержати числові ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією.

**Приклад 2.1.** За допомогою рис.2.2. одержуємо значення площ прямокутних трапецій:

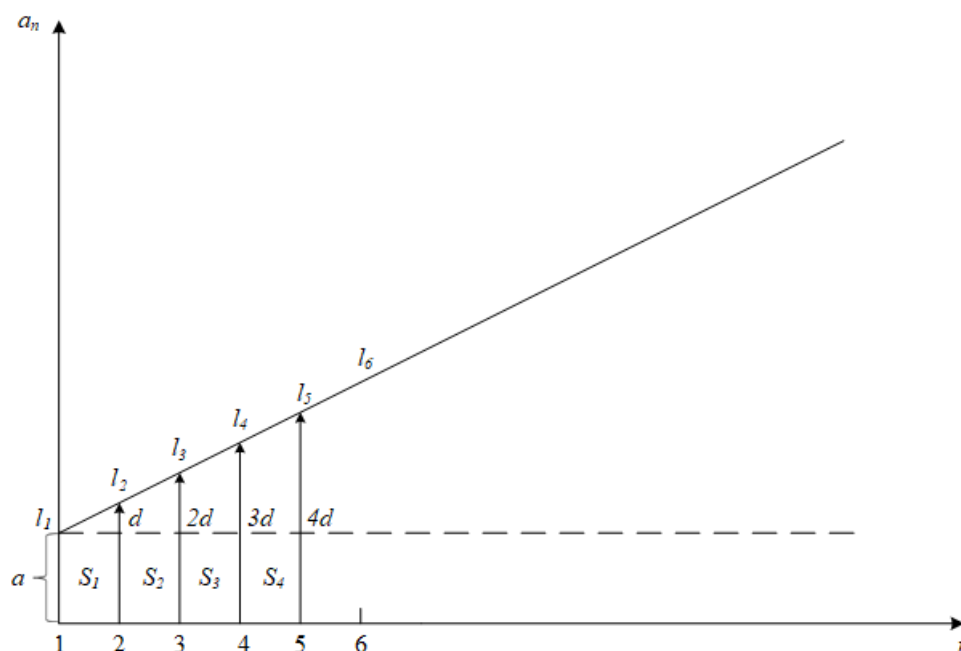


Рис. 2.2. –  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – площі прямокутних трапецій з однаковою висотою  $h = 1$

Обчислимо площі прямокутних трапецій:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} [a + (a + d)] \cdot 1 = a + \frac{1}{2} d \\ S_2 &= \frac{1}{2} [(a + d) + (a + 2d)] \cdot 1 = a + \frac{3}{2} d \\ S_3 &= \frac{1}{2} [(a + 2d) + (a + 3d)] \cdot 1 = a + \frac{5}{2} d \\ S_n &= \frac{1}{2} [(a + (n - 1)d) + (a + nd)] = a + \frac{2n-1}{2} d \end{aligned} \right\} (2.5.)$$

Якщо позначити величини площ  $S_n$  через  $a_n$ , то з рівностей (2.5.) одержуємо числовий ряд з загальним членом  $a_n$ :  $a_n = a + \frac{d}{2}(2n - 1)$  тобто ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ a + (2n - 1) \frac{d}{2} \right] \quad (2.6.)$$

Числовий ряд (2.6.) має квадратурну геометричну інтерпретацію, так як значення його членів ототожнюються з величинами площ трапецій (рис. 2.2.).

Для дослідження ряду (2.6.) на збіжність використаємо наступну часткову суму ряду  $\delta_n$ :

$$\delta_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = na + \frac{d}{2} [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] \quad (2.7.)$$

В дужках маємо арифметичну прогресію з параметрами:  $a = 1, d = 2$ . Знаходимо суму (2.7.) і одержуємо вираз для  $\sigma_n$  у вигляді:

$$\delta_n = na + \frac{d}{2} \cdot \frac{1 + (2n - 1)}{2} n = na + \frac{d}{2} n^2 = \frac{2na + dn^2}{2} = \frac{n}{2} (2a + nd) \quad (2.8.)$$

Обчислюємо суму  $\sigma$  ряду (2.6.):

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} (2a + nd) = \infty \quad (2.9.)$$

Ряд (2.6) має нескінченну суму, тобто є числовим розбіжним рядом.

Якщо задавати різні значення параметрів  $a$  і  $d$ , то можна одержувати різні числові ряди.

**Приклад 2.2.** Нехай  $a = 0, d = 1$ . В цьому випадку маємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{2})$  із величин площ  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (рис. 2.3.), де  $S_1$  – площа трикутника з одиничними катетами,  $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$  – площі прямокутних трапецій з однаковою висотою, яка дорівнює 1.



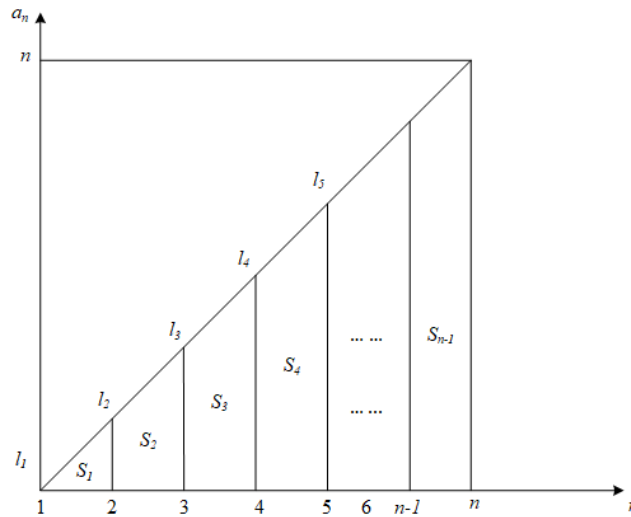


Рис.2.3. – Площі прямокутних трапецій з однаковою висотою  $h = 1$   
Обчислимо значення  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, \dots$

$$n = 1: a_1 = \frac{1}{2} = S_1$$

$$n = 2: a_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} = S_2$$

$$n = 3: a_3 = \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} = S_3 \text{ і т. д.}$$

Для того, щоб знайти суму ряду  $\delta$ , складаємо часткову суму  $\delta_n$ :

$$\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2} = \frac{1}{2}(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)) \quad (2.10.)$$

В дужках рівності (2.10.) маємо арифметичну прогресію з різницею  $d = 2$ . Знаходимо її суму:  $\frac{1+2n-1}{2} n = n^2$  (2.11.)

Використовуючи рівності (2.10.) і (2.11.) одночасно, одержуємо значення  $\delta_n = \frac{1}{2}n^2$ , що добре відображено на рис. 2.3. В цьому разі маємо розбіжний числовий ряд.

Результат одержаний у даному вигляді дозволяє підтвердити відому наступну рівність:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  (2.12.). Тобто сума непарних чисел дорівнює квадрату кількості цих чисел.

**Примітка 2.1.** Використовуючи формулу (2.12.) можна одержати формулу для обчислення суми парних чисел. Для цього в обидві частини

рівності треба додати  $n$  одиниць. Після елементарних перетворень отримаємо:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n^2 + n. \quad (2.13.)$$

За допомогою рівностей (2.11.) і (2.12.) одержимо суму арифметичної прогресії з параметрами  $a = 1, d = 1$ :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n(n + 1) \quad (2.14.)$$

**Приклад 2.3.** Нехай  $a = d$ .

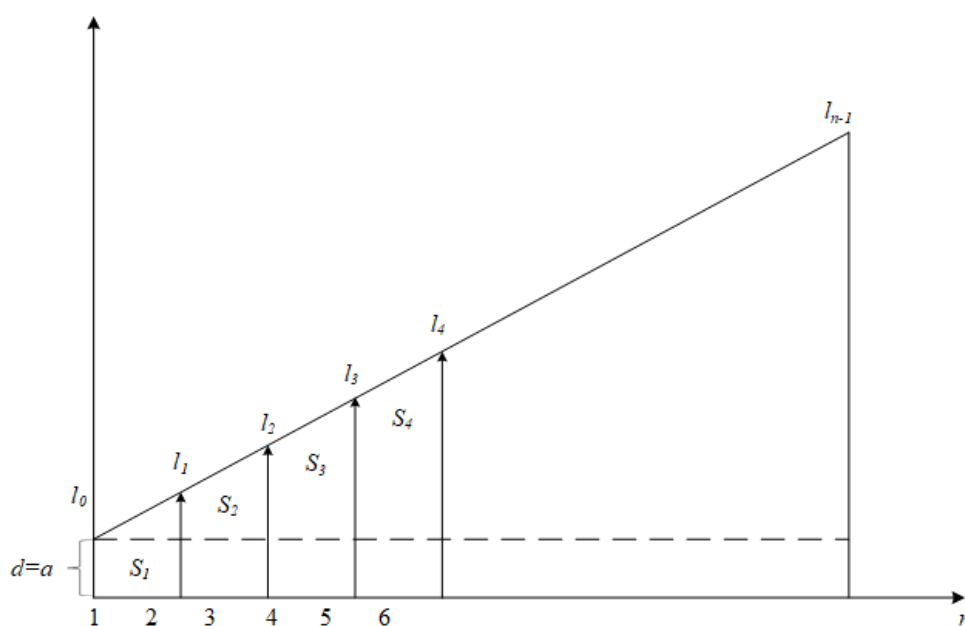


Рис.2.4. – площі трапецій з висотою  $h = 1$  і основами  $a = d$

Площі  $S_1, S_2, \dots, S_n$  мають значення площ трапецій з висотою  $h = 1$ , а величини основ різняться на величину  $d$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}(d + 2d) = \frac{3}{2}d \\ S_2 = \frac{1}{2}(2d + 3d) = \frac{5}{2}d \\ S_3 = \frac{1}{2}(3d + 4d) = \frac{7}{2}d \\ \dots \dots \dots \\ S_n = \frac{1}{2}(nd + (n + 1)d) = \frac{2n-1}{2}d \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (2.15.)$$

Знайдемо  $n$  – у часткову суму  $\delta_n$ :

$$F_n \sim \delta_n = \frac{d}{2} [3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)] = \frac{d}{2} \cdot \frac{3 + 2n - 1}{2} n =$$

$$= \frac{d}{2} \cdot \frac{2n+2}{2} n = \frac{d}{2} (n+1)n \quad (2.16.)$$

Якщо порівняти рівності (2.13.) і (2.16.), можна прийти до висновку: у даному випадку числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2} (2n-1)$  має суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + n$  помножену на коефіцієнт  $\frac{d}{2}$ , тобто мають місце два числових ряду з однаковими частинними сумами  $F_n \sim \delta_n$ .

**Примітка 2.2.** Якщо взяти  $d = 2$ , то одержуємо рівність сум рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2} (2n-1)$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + n$ , що власно кажучи, доводиться і формулою (2.8).

**Приклад 2.4.** Розглянемо далі ряд, який складається з величин більших діагоналей (рис.2.1.5), де  $1l_1, 2l_2, \dots, (n-1)l_n$  – діагоналі трапецій.

Обчислимо величини вказаних діагоналей:

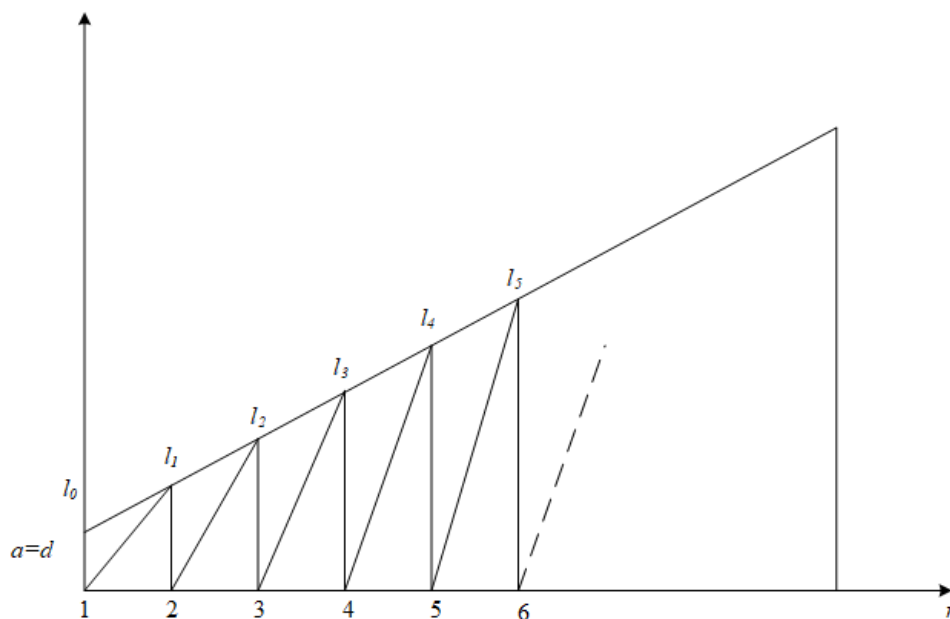


Рис.2.5. – геометрична інтрпретація ряду більших діагоналей

$$\left\{ \begin{array}{l} |1l_1| = \sqrt{d^2 + 1} \\ |2l_2| = \sqrt{4d^2 + 1} \\ |3l_3| = \sqrt{9d^2 + 1} \\ \dots \dots \dots \\ |nl_n| = \sqrt{n^2 d^2 + 1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1l_1| = d \sqrt{1^2 + \frac{1}{d^2}} \\ |2l_2| = d \sqrt{2^2 + \frac{1}{d^2}} \\ |3l_3| = d \sqrt{3^2 + \frac{1}{d^2}} \\ \dots \dots \dots \\ |(n-1)l_n| = d \sqrt{n^2 + \frac{1}{d^2}} \end{array} \right. \quad (2.17.)$$

Одержано числовий ряд з загальним членом:

$$a_n = d \sqrt{n^2 + \frac{1}{d^2}}$$

і наступною «сігма-моделю»:  $\sum_{n=1}^{\infty} d \sqrt{n^2 + \frac{1}{d^2}}$  (2.18.)

Візьмемо  $d = 1$  і запишемо числовий ряд (2.18.) з загальним членом у вигляді:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 1}$  (2.19)

Для дослідження рядів (2.18.) і (2.19.) перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду [10, с. 31- 32]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d \sqrt{n^2 + \frac{1}{d^2}} = \infty. \text{ Тобто ряд (2.18) – розбіжний.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} = \infty. \text{ Тобто ряд (2.19) – розбіжний.}$$

Геометричну інтерпретацію рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією можна отримати за допомогою великої кількості геометричних об'єктів.

Розглянемо наступний приклад:

**Приклад 2.5.** Концентричні кола, радіуси яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії на 0,1 одн.

Побудови виконані за допомогою програмного середовища GeoGebra в двохвимірному та трьохвимірному просторах (рис. 2.6. та рис. 2.7.):

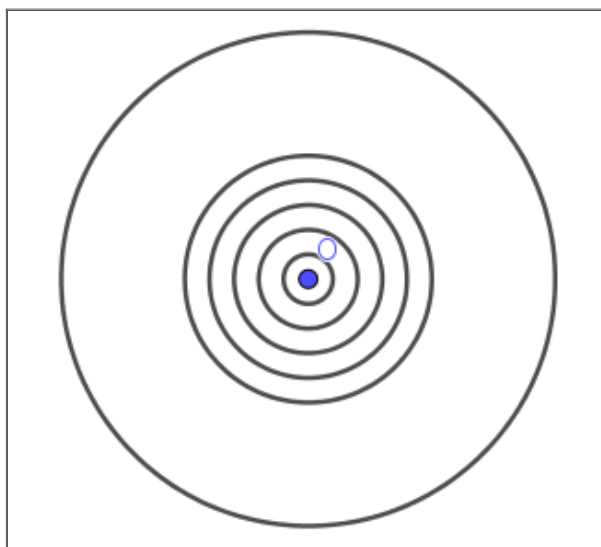


Рис 2.6. – концентричні кола

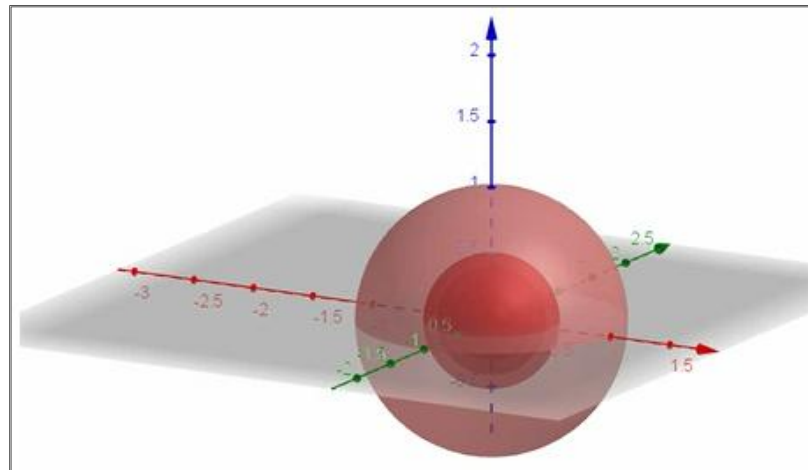


Рис. 2.7. – концентричні сфери

Використовуючи формулу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$$

можемо записати ряд, члени якого є радіуси концентричних кіл у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0,1 + (n-1)0,1) \quad (2.20.)$$

Використовуючи формулу знаходження довжини дуги кола:  $C = 2\pi R$ , запишемо отриманий ряд для довжин кіл у вигляді:

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (0,1 + (n-1)0,1) \quad (2.21.)$$

Використовуючи формулу знаходження площі кола:  $S = \pi R^2$ , запишемо отриманий ряд для площ кіл у вигляді:

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} (0,1 + (n-1)0,1)^2 \quad (2.22.)$$

Аналогічно міркуючи, можемо отримати ряди, які пов'язані з об'ємом куль та площею поверхонь сфер:

$$\frac{4}{3}\pi \sum_{n=1}^{\infty} (0,1 + (n-1)0,1)^3 - (2.23.) \text{ ряд для об'ємів сфер}$$

$$4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (0,1 + (n-1)0,1)^2 - (2.24.) \text{ ряд для площ поверхонь сфер}$$

Для дослідження рядів (2.20.), (2.21.), (2.22.), (2.23.), (2.24.) на збіжність перевіримо виконання необхідної ознаки [10, с. 31- 32]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1 + (n - 1)0,1) = \infty$$

Тобто ряд (2.20.) – розбіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1 + (n - 1)0,1) = \infty$$

Тобто ряд (2.21.) – розбіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1 + (n - 1)0,1)^2 = \infty$$

Тобто ряд (2.22.) – розбіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1 + (n - 1)0,1)^3 = \infty$$

Тобто ряд (2.23.) – розбіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (0,1 + (n - 1)0,1)^2 = \infty$$

Тобто ряд (2.24.) – розбіжний.

Отриманий результат є очевидним, зважаючи на геометричну інтерпретацію.

Інші приклади, які демонструють геометричну інтерпретацію числових рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією подані в Додатку А.

## 2.2. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією

Перед тим як розглянути питання про геометричну інтерпретацію числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією спочатку зазначимо основні теоретичні аспекти.

### Означення 2.2.

Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число [22, с. 170].

Це число називають знаменником геометричної прогресії і позначають  $q$ . Тому якщо  $b_n$  – геометрична прогресія, то справджуються рівності:  $b_2 = b_1q$ ;  $b_3 = b_2q$ ;  $b_4 = b_3q$ ; ... .

Отже, для будь-якого натурального  $n$  матимемо:  $b_{n+1} = b_nq$ .

Тоді,  $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

Тобто, знаменник геометричної прогресії можна знайти, якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній [22, с. 170].

Нехай перший член геометричної прогресії дорівнює  $b_1$ , а знаменник дорівнює  $q$ . Тоді  $b_2 = b_1q$ ;  $b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2$ ;  $b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3$ ;  $b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4$ ; ...;  $b_n = b_{n-1}q = (b_1q^{n-2})q = b_1q^{n-1}$  – формула  $n$  – го члена геометричної прогресії [22, с. 171].

Доведемо деякі важливі властивості геометричної прогресії [22, с. 172]:

**Теорема 2.6.** Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

*Доведення.* Скористаємося формулою  $n$  – го члена геометричної прогресії. Тоді:  $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1q^{(n-1)-1} \cdot b_1q^{(n+1)-1} = b_1^2q^{n-2+n} = b_1^2q^{2n-2} = (b_1q^{n-1})^2 = b_n^2$ .

*Що і треба було довести.*

Крім того, якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ , тобто кожний член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

**Теорема 2.7.** Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто:  $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k < n$ .

**Теорема 2.8.** Якщо  $k, l, p, s$  – натуральні числа і  $k + l = p + s$ , то  $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s$ .

*Доведення.* Скористаємось формулою  $n$ -го члена геометричної прогресії. Тоді:

$$b_k \cdot b_l = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_1^2 q^{(k+l)-2}$$

$$b_p \cdot b_s = b_1 q^{p-1} \cdot b_1 q^{s-1} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$$

Але  $k + l = p + s$ , тому  $b_1^2 q^{(k+l)-2} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$ .

Отже,  $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s$ .

*Що і треба було довести.*

Знайдемо суму  $n$  перших членів геометричної прогресії [22, с. 172].

Для цього розглянемо  $n$  перших членів геометричної прогресії  $b_n$ :  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$ .

Позначимо через  $S_n$  їх суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Враховуючи формулу  $n$ -го члена геометричної прогресії, перепишемо рівність в іншому вигляді:  $S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$ .

Помножимо обидві частини цієї рівності на  $q$ :  $S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n$ .

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню:  $S_n q - S_n = (b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n) - (b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}) = b_1 q^n - b_1 = b_1 (q^n - 1)$ .

Отже,  $S_n (q - 1) = b_1 (q^n - 1)$ .

Якщо  $q \neq 1$ , то  $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$  або  $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$ .

Для геометричної інтерпретації числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією розглянемо показникову функцію натурального аргументу:

$$f(n) = b q^{n-1} \quad (2.25.)$$

де  $b \in \mathbb{R}$  і  $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

Параметр  $q$  називається знаменником, тому що  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (2.26.)$$



Запишемо праву частину рівності (2.25.) у розгорнутому виді, попередньо просумувавши її значення, починаючи з  $n = 1, 2 \dots$ :  $b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots$ . (2.27.)

Якщо  $n$  скінченне, то сума (2.27.) також має скінченне значення і називається сумою членів геометричної прогресії. У випадку коли  $n \rightarrow \infty$ , то сума (2.27.) називається числовим рядом, який задається своїм загальним членом  $b_n$ :  $b_n = bq^{n-1}$  і має наступну «сігма-модель»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} \quad (2.28.)$$

Розглянемо 2 випадки: коли  $q > 1$ , та  $0 < q < 1$ .

1)  $q > 1$ :

Функцію (2.25.) можна задати у вигляді наступного графіка:

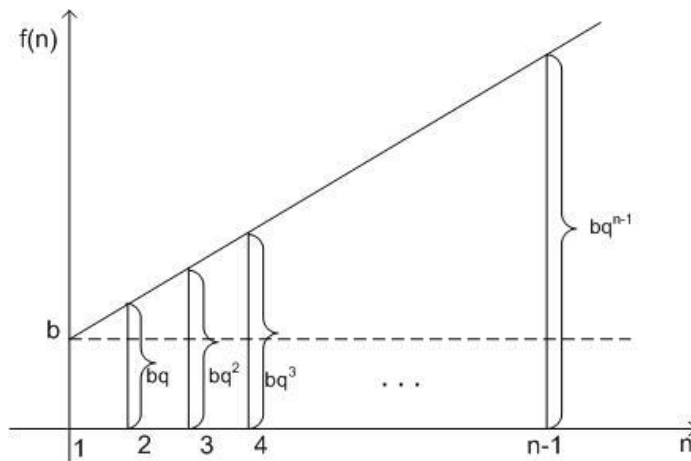


Рис.2.8. – Графік функції геометричної прогресії з параметрами  $b$  і  $q$

Якщо врахувати  $n \rightarrow \infty$ , то на рис.2.8. маємо геометричну інтерпретацію числового ряду геометричної прогресії у вигляді відрізків:  $[1; b]$ ,  $[2; bq]$ ,  $[3; bq^2]$ , ...,  $[n; bq^{n-1}]$  і т. д.

В даному випадку, отриманий числовий ряд є лінійною геометричною інтерпретацією.

За допомогою геометричної інтерпретації ряду, який пов'язаний з геометричною прогресією можна одержати числові ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією. Продемонструємо вище сказане.

**Приклад 2.6.** За допомогою рис.2.9. одержуємо значення площ прямокутних трапецій:

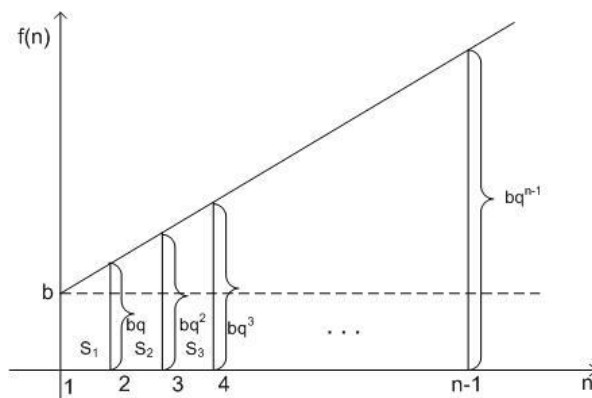


Рис. 2.9. –  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – площі прямокутних трапецій з однаковою висотою  $h = 1$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} [b + bq] \cdot 1 = \frac{b(1+q)}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} [bq + bq^2] \cdot 1 = \frac{b(q+q^2)}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{2} [bq^2 + bq^3] \cdot 1 = \frac{b(q^2+q^3)}{2} \\ \dots & \\ S_n &= \frac{1}{2} [bq^{n-1} + bq^n] = \frac{b(q^{n-1}+q^n)}{2} \end{aligned} \right\} (2.29.)$$

Якщо позначити величини площ  $S_n$  через  $b_n$ , то з рівностей (2.29.) одержуємо числовий ряд з загальним членом  $b_n$ :  $b_n = \frac{b(q^{n-1}+q^n)}{2}$ ,

тобто ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(q^{n-1} + q^n)}{2} \quad (2.30.)$$

Числовий ряд (2.30.) має квадратурну геометричну інтерпретацію.

Для дослідження ряду (2.30.) на збіжність використаємо необхідну умову збіжності ряду [10, с. 31- 32]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(q^{n-1} + q^n)}{2} = \infty$$

Тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, отже маємо числовий розбіжний ряд.

Якщо задавати різні значення параметрів  $b$  і  $q$ , то можна одержувати різні числові ряди.

$$2) 0 < q < 1:$$

**Приклад 2.7.** За допомогою рис.2.10 одержуємо значення площ прямокутних трапецій.

В даному випадку, функцію (2.25.) можна задати у вигляді наступного графіка:

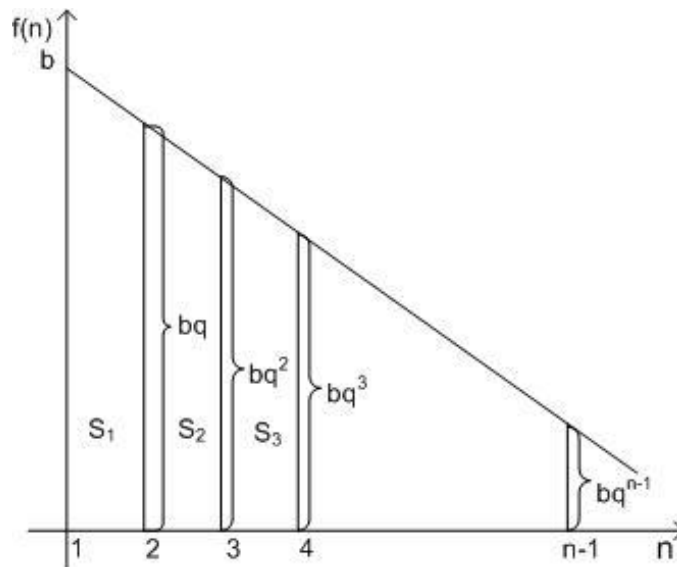


Рис.2.10. – Графік функції геометричної прогресії з параметрами  $b$  і  $q$

По аналогії, якщо врахувати  $n \rightarrow \infty$ , то на рис.2.2.3 маємо геометричну інтерпретацію числового ряду геометричної прогресії у вигляді відрізків:  $[1; b]$ ,  $[2; bq]$ ,  $[3; a + bq^2]$ , ...,  $[n; bq^{n-1}]$  і т. д..

Крім того, ряд для довжин відрізків і ряд (2.30.) з прикладу 2.6. справедливий і для другого випадку.

За умовою,  $0 < q < 1$ , припустимо, що  $q = \frac{1}{k}$ , де  $k \in \mathbb{N}$ , тоді дослідимо отриманий ряд на збіжність:

$$\begin{aligned} & \text{За необхідною умовою збіжності ряду [10, с. 31- 32]: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(q^{n-1} + q^n)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bq^{n-1}}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bq^n}{2} = \left[ q = \frac{1}{k} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{2k^{n-1}} + \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{2k^n} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Тобто, необхідна умова збіжності ряду виконується, тому дослідимо даний ряд на збіжність за допомогою достатньої умови, а саме, використаємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b(q^{n-1+1} + q^{n+1})}{2}}{\frac{b(q^{n-1} + q^n)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b(q^n + q^{n+1})}{2}}{\frac{b(q^{n-1} + q^n)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n(1+q)}{q^n(q^{-1} + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+q)}{\left(\frac{q+1}{q}\right)} = q < 1 \end{aligned}$$

Тобто, можна зробити висновок про те, що ряд (2.30.) збіжний. В даному випадку, з рис.2.10 збіжність ряду спостерігається наочно.

**Приклад 2.8.** Розглянемо далі ряд, який складається з величин більших діагоналей (рис.2.11.) та (рис.2.12.), де  $1l_1, 2l_2, \dots, (n-1)l_n$  – діагоналі трапецій.

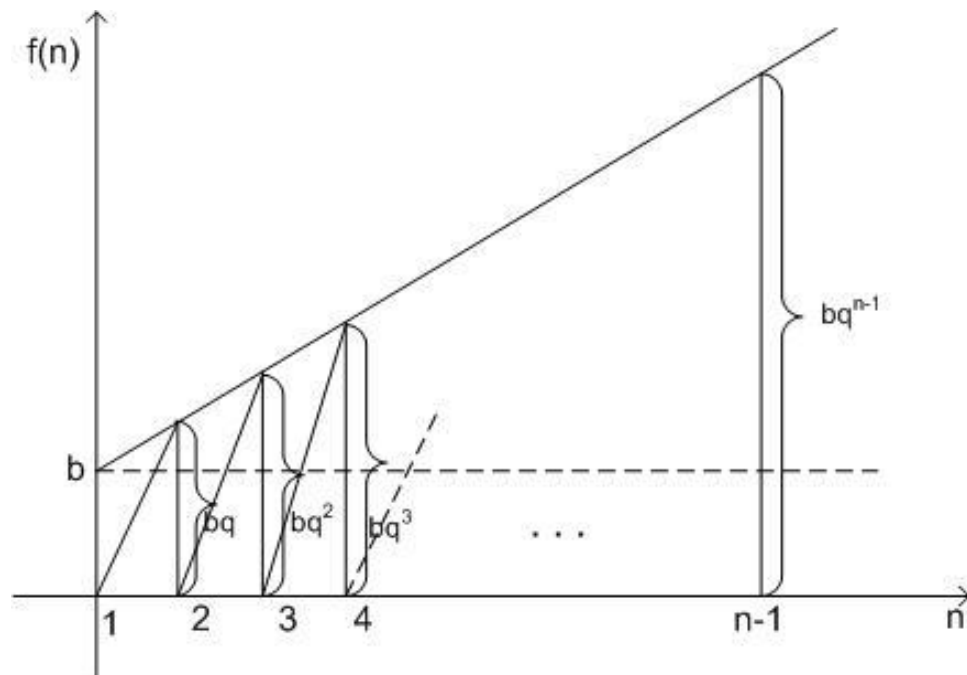
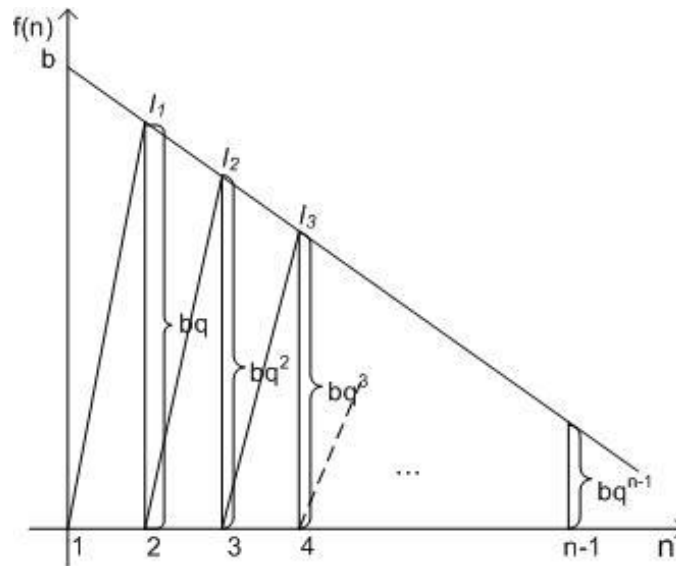


Рис.2.11. – для  $q > 1$

Рис.2.12. – для  $0 < q < 1$ 

Обчислимо величини вказаних діагоналей:

$$\left\{ \begin{array}{l} |1l_1| = \sqrt{bq^2 + 1} \\ |2l_2| = \sqrt{(bq^2)^2 + 1} \\ |3l_3| = \sqrt{(bq^3)^2 + 1} \\ \dots \\ |nl_n| = \sqrt{bq^{2n} + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1l_1| = q \sqrt{b + \frac{1}{q^2}} \\ |2l_2| = q^2 \sqrt{b + \frac{1}{q^4}} \\ |3l_3| = q^3 \sqrt{b + \frac{1}{q^6}} \\ \dots \\ |nl_n| = q^n \sqrt{b + \frac{1}{q^{2n}}} \end{array} \right. \quad (2.31.)$$

Одержано числовий ряд з загальним членом:

$$b_n = q^n \sqrt{b + \frac{1}{q^{2n}}} \quad (2.32.)$$

І наступною «сіigma-моделю»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sqrt{b + \frac{1}{q^{2n}}} \quad (2.33.)$$

За необхідною умовою збіжності ряду [10]:

При  $q > 1$ , ряд (2.33.) розбіжний, тому, що:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \sqrt{b + \frac{1}{q^{2n}}} = \infty.$

При  $0 < q < 1$ , ряд (2.33.) розбіжний, тому, що  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \sqrt{b + \frac{1}{q^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{bq^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b}{k^{2n}} + 1} = 1.$

Зазначимо, що лінійну, квадратурну та куботурну інтерпретацію числових рядів можна розглянути за допомогою великої кількості геометричних об'єктів. Розглянемо приклади числових рядів пов'язаних з нескінченно спадною геометричною прогресією, знаменники якої відповідно дорівнюють:  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$  для таких геометричних об'єктів як квадрат та куб [23].

**Приклад 2.9.** Розглянемо квадрат зі стороною  $a_1 = 1$ . Розіб'ємо сторону даного квадрату навпів, отримаємо квадрат зі стороною  $a_2 = \frac{1}{2}$ . Продовжимо даний процес для всіх наступних квадратів, зі сторонами, які вдвічі менші за сторони попередніх квадратів. На подальших кроках міркувань запишемо:

$$a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}; a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}; a_5 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}; \dots; a_k = \frac{1}{2^n}; \dots$$

Отримаємо послідовність вкладених квадратів (рис. 2.13) зі сторонами:  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4}; \dots \frac{1}{2^n}; \dots$ , та послідовність вкладених кубів (рис. 2.14.):

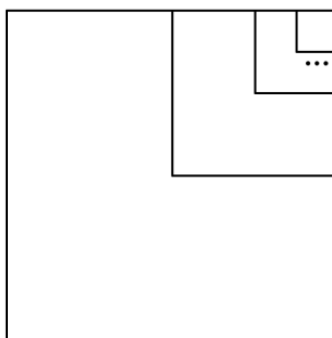


Рис.2.13. – вкладені квадрати

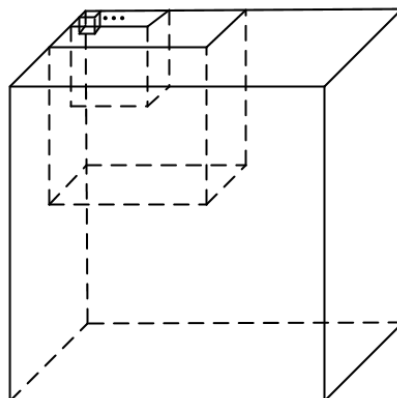


Рис.2.14. – вкладені куби

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (2.34.)$$

який є одним із варіантів представлення лінійної геометричної інтерпретації числового ряду.

Знайдемо площі розглянутих вкладених квадратів за формулою  $S = a^2$ , отримаємо:  $S_1 = a_1^2 = 1^2 = 1$ ;  $S_2 = a_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ ;  $S_3 = a_3^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ ; ...  $S_n = a_n^2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}$  ...;

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \quad (2.35.)$$

Розглянутий ряд демонструє один із варіантів представлення квадратурної геометричної інтерпретації.

Покажемо куботурну геометричну інтерпретацію числового ряду (рис 2.14). По аналогії, будемо розглядати послідовність вкладених кубів, сторони яких є вдвічі меншими від попередньої ітерації, і відповідно мають вид:

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}; a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}; a_5 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}; \dots; a_k = \frac{1}{2^k}; \dots$$

Знайдемо об'єми для вкладених кубів за формулою:  $V = a^3$ , і отримаємо наступні результати:  $V_1 = a_1^3 = 1^3 = 1$ ;  $V_2 = a_2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ ;  $V_3 = a_3^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}$ ; ...  $V_k = a_k^3 = \left(\frac{1}{2^k}\right)^3 = \frac{1}{2^{3k}}$ ; ...

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} \quad (2.36.)$$

Дослідимо отримані ряди на збіжність. Перевіримо виконання необхідної ознаки [10, с. 31]:

$$(2.34.): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 ;$$

$$(2.35.): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n}} = 0;$$

$$(2.36.): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{3n}} = 0$$

Тобто необхідна ознака для рядів (2.34.), (2.35.), (2.36.) виконується.

Дослідимо отримані ряди на збіжність. За допомогою радикальної ознаки Коші [36, с. 43]:

$$(2.34.): \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$(2.35.): \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{4} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$(2.36.): \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{3n}}} = \frac{1}{8} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

Оскільки знаменники отриманих рядів відповідно дорівнюють:

$q = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{4}; q = \frac{1}{8}$ , тобто  $|q| < 1$  обчислимо межу частинних сум для

ряду (2.34.), (2.35.), (2.36.) за відомою формулою [32, с.8]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - b_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Якщо  $|q| < 1$ , то  $q^n \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ , тому:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$

$$(2.34.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

$$(2.35.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3};$$

$$(2.36.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}.$$

Дослідження рядів, які пов'язані з геометричною прогресією, на збіжність можна проводити за допомогою результатів чисельного експерименту. За допомогою електронних таблиць Microsoft Excel 2007 проведемо експериментальне дослідження обчисливши частинні суми для



перших 10 членів рядів (2.34.), (2.35.), (2.36.) побудуємо відповідні графіки та переконаємось в справедливості наших міркувань (Таблиця 2.1.).

Таблиця 2.1.

### Частинні суми перших 10 членів рядів (2.34.), (2.35.), (2.36.)

п-й член геометричн. прогресії	частинні суми для сторін квадратів	п-й член геометричн. прогресії	частинні суми для площ квадратів	п-й член геометричн. прогресії	частинні суми для об'ємів квадратів
0	0,000000000000	0	0,000000000000	0	0,0000000000000000
1	1,000000000000	1	1,000000000000	1	1,0000000000000000
2	1,500000000000	2	1,250000000000	2	1,1250000000000000
3	1,750000000000	3	1,312500000000	3	1,1406250000000000
4	1,875000000000	4	1,328125000000	4	1,1425781250000000
5	1,937500000000	5	1,332031250000	5	1,1428226562500000
6	1,968750000000	6	1,333007812500	6	1,14285278320312
7	1,984375000000	7	1,33325195313	7	1,14285659790039
8	1,992187500000	8	1,33331298828	8	1,14285707473754
9	1,996093750000	9	1,33332824707	9	1,14285713434219
10	1,998046875000	10	1,33333206177	10	1,14285714179277



Рис.2.15. – графік для частинних сум ряду (2.34.)

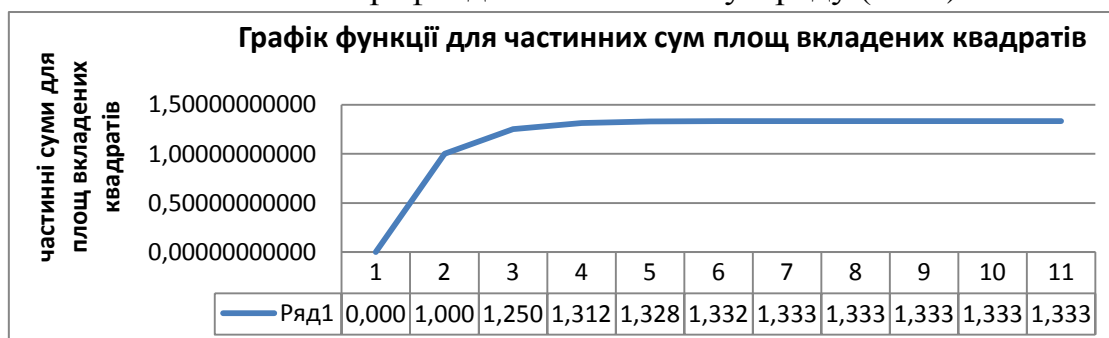


Рис.2.16. – графік для частинних сум ряду (2.35.)



Рис.2.17. – графік для частинних сум ряду (2.36.)

За допомогою програмного середовища Lazarus покажемо побудовану модель ряду (2.36.), а саме, вкладених кубів.

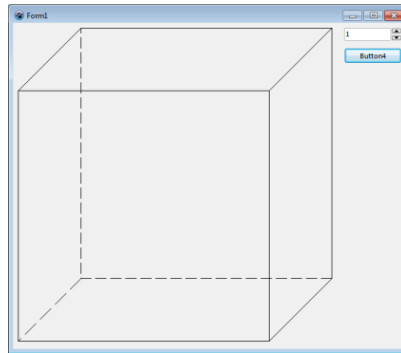


Рис.2.17.– I-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.36.)

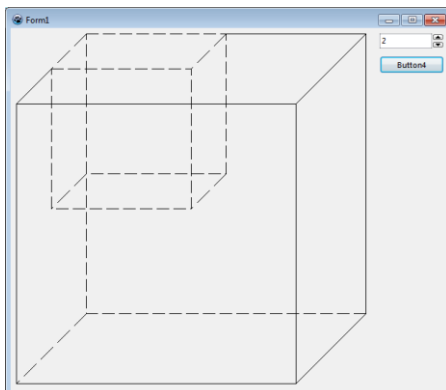


Рис.2.18. – II-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.36.)

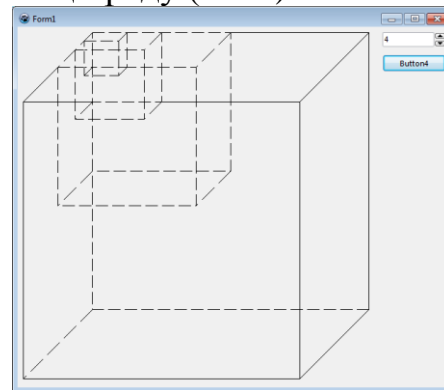


Рис.2.19. – IV-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.36.)

Аналогічно, вибираючи бажану кількість ітерацій за допомогою поля для введення числа та кнопки можна продемонструвати моделі подальших геометричних інтерпретацій ряду (2.36.) у вигляді вкладених кубів.

Реалізація даної моделі представлена в наступному коді програми:

```

procedure TForm1.draw(w: Integer);
var
  i: Integer;
begin
  i := 100 - Round(w/4);

  if w = 400 then paintbox1.canvas.pen.style := psSolid;
  paintbox1.canvas.moveto(100, 0);
  paintbox1.canvas.lineto(w+100, 0);
  paintbox1.canvas.lineto(w+100, w);
  if w = 400 then paintbox1.canvas.pen.style := psDash;
  paintbox1.canvas.lineto(100, w);

```

```

paintbox1.canvas.lineto(100, 0);

if w = 400 then paintbox1.canvas.pen.style := psSolid;
paintbox1.canvas.moveto(i, Round(w/4));
paintbox1.canvas.lineto(w+i, Round(w/4));
paintbox1.canvas.lineto(w+i, w+100-i);
paintbox1.canvas.lineto(i, w+100-i);
paintbox1.canvas.lineto(i, Round(w/4));
paintbox1.canvas.moveto(100, 0);
paintbox1.canvas.lineto(i, Round(w/4));

paintbox1.canvas.moveto(w+100, 0);
paintbox1.canvas.lineto(w+i, Round(w/4));

paintbox1.canvas.moveto(w+100, w);
paintbox1.canvas.lineto(w+i, w+100-i);

if w = 400 then paintbox1.canvas.pen.style := psDash;
paintbox1.canvas.moveto(100, w);
paintbox1.canvas.lineto(i, w+100-i);
end;
end.

```

Функціонування кнопки для одержання користувачем бажаної ітераційної моделі представлена в наступному кодї:

```

procedure TForm1.Button4Click(Sender: TObject);
var
  i, n, w: Integer;
begin
  paintbox1.canvas.Clear;
  paintbox1.Canvas.brush.Color:=clBtnFace;
  n := StrToInt(Edit1.Text);
  for i:=1 to n do
  begin
    case i of
      1: w := 400;
      2: w := 200;
      3: w := 100;
      4: w := 50;
      5: w := 25;
    end;
    draw(w);
  end;
  paintbox1.canvas.pen.style := psDash;

```

end;

Інші приклади, які демонструють геометричну інтерпретацію числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією подані в Додатку Б.

### 2.3. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з арифметико-геометричною прогресією

Розглянемо таку послідовність як арифметико-геометрична послідовність, яка задається наступним рекурентним співвідношенням [37]:

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n + d, \quad (2.37.)$$

де  $q$  і  $d$  – постійні параметри. Якщо, покладемо, що в рівності (2.37.)  $q=1$ , отримаєм арифметичну прогресію:  $u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = u_n + d$ , якщо  $d = 0$  – геометричну прогресію:  $u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n$  [37].

За аналогією, будемо стверджувати, що  $q$  – знаменник, а  $d$  – різниця арифметико-геометричної прогресії.

Арифметико-геометрична прогресія має ознаки як арифметичної так і геометричної прогресії. Виведемо формулу її загального члена [37].

Нехай в рекурентному співвідношенні (2.37.)  $q \neq 1$  та  $d \neq 0$ . Додамо до обох частин співвідношення (2.37.) вираз  $\frac{d}{q-1}$ , і отримаємо:

$$\begin{aligned} u_{n+1} + \frac{d}{q-1} &= qu_n + d + \frac{d}{q-1}; \\ u_{n+1} + \frac{d}{q-1} &= \frac{qu_n(q-1) + d(q-1) + d}{q-1}; \\ u_{n+1} + \frac{d}{q-1} &= \frac{u_n q^2 - qu_n + dq - d + d}{q-1}; \\ u_{n+1} + \frac{d}{q-1} &= \frac{u_n q^2 - qu_n + dq}{q-1}; \end{aligned}$$

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = \frac{u_n q(q-1) + dq}{q-1};$$

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = \frac{q(u_n(q-1) + d)}{q-1};$$

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q \left( u_n + \frac{d}{q-1} \right).$$

Враховуючи, що співвідношення – рекурентне, можна записати аналогічні рівності для  $k = n + 1, n, \dots, 2$ :

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q \left( u_n + \frac{d}{q-1} \right),$$

.....

$$u_2 + \frac{d}{q-1} = q \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right)$$

Перемноживши виписані рівності та скоротивши однакові співмножники, отримаємо формулу загального члена арифметико-геометричної прогресії:  $u_{n+1} = q^n \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) + \frac{d}{1-q}$ . (2.38.)

Якщо, позначити через  $u_n = a_n + \frac{d}{q-1}$ , тоді  $u_{n+1} = qu_n$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$ , послідовність  $\{u_n\}$  є геометричною прогресією і  $u_n = u_1 q^{n-1}$  [6, с. 57].

$$u_n = u_1 q^{n-1} \rightarrow a_n + \frac{d}{q-1} = \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) q^{n-1} \rightarrow$$

$$a_n = \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} \quad (2.39.) \rightarrow$$

$$\rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n u_n = \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} =$$

$$= \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) \frac{q^n - 1}{q-1} - \frac{nd}{q-1} \quad (2.40.)$$

Таким чином, маємо дві основні формули [6, с. 57]:

$$\begin{cases} a_n = \left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1}; \\ S_n = \left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right)\frac{q^n-1}{q-1} - \frac{nd}{q-1}. \end{cases} \quad (2.41.)$$

Параметри  $a$  та  $d$  можна виразити із наступних рівностей [6, с. 58]:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}q + d \\ a_{n+1} = a_nq + d \end{cases} \rightarrow q = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \rightarrow a_{n+1} = a_n \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} + d \rightarrow$$

$$d = \frac{a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} \\ q = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \end{cases} \quad (2.42.)$$

**Примітка 2.3.** При  $d = a_1(1 - q)$  прогресія стає стаціонарною, тобто  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = \frac{d}{q-1}$ ; при  $|q| < 1$  арифметико-геометрична прогресія збіжна (при чому  $0 \leq q < 1$  – монотонно) до числа  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \frac{d}{1-q}$ , а при  $|q| \geq 1$  арифметико-геометрична прогресія розбіжна [6, с. 58].

Сформулюємо тепер основні властивості арифметико-геометричної прогресії [37]:

1) Арифметико-геометрична прогресія (2.37.) є лінійно рекурентною послідовністю другого порядку та задається рівнянням:

$$u_{n+1} = (q + 1)u_n - qu_{n-1}$$

При  $q = 1$  отримаємо характеристичну властивість арифметичної прогресії:  $u_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$ .

2) Характеристична властивість арифметико-геометричної прогресії.

Послідовність  $\{a_n\}$ , де  $a_n = u_{n+1} - u_n$ , є геометричною прогресією зі знаменником  $q$ , тобто  $|u_{n+1} - u_n| = \sqrt{|u_n - u_{n-1}| |u_{n+2} - u_{n+1}|}$ .

3) Послідовність  $S_1 = u_1$ ,  $S_2 = u_1 + u_2$ , ...,  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ,  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ , ... частинних сум членів арифметико-геометричної

прогресії є лінійно рекурентною послідовністю третього порядку та задається наступним рівнянням:  $S_{n+1} = (q + 2)S_n - (2q + 1)S_{n-1} + qS_{n-2}$ .

4) Якщо послідовність частинних сум  $S_1, \dots, S_n, \dots$  є арифметико-геометричною прогресією, то послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  є геометричною прогресією.

Для того, щоб геометрично інтерпретувати ряди, які пов'язані з арифметико-геометричною прогресією розглянемо наступний приклад [6, с. 59]:

**Приклад 2.10.** Дана трапеція  $ABB_1A_1$ , у якої  $|AB| = a$  і  $|A_1B_1| = a_1$ . Нехай точка  $A_2$  – точка перетину діагоналі  $AB_1$  з середньою лінією трапеції  $C_2D_2$ ,  $B_2$  – точка перетину діагоналі  $BA_1$  з середньою лінією трапеції. Основа трапеції  $ABB_2A_2$  дорівнює  $|A_2B_2| = a_2$ . В трапеції  $ABB_2A_2$  також знайдемо точки перетину середньої лінії з діагоналями  $AB_2$  і  $BA_2$ : відповідно  $A_3$  і  $B_3$ . Основа трапеції  $ABB_3A_3$  дорівнює  $|A_3B_3| = a_3$  (рис. 2.3.1). Якщо продовжити цей процес, отримаємо послідовність  $a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Знайдемо ряд для верхніх основ та дослідимо його на збіжність.

Розглянемо два випадки:

1)  $a_1 < a$  (рис. 2.20.)

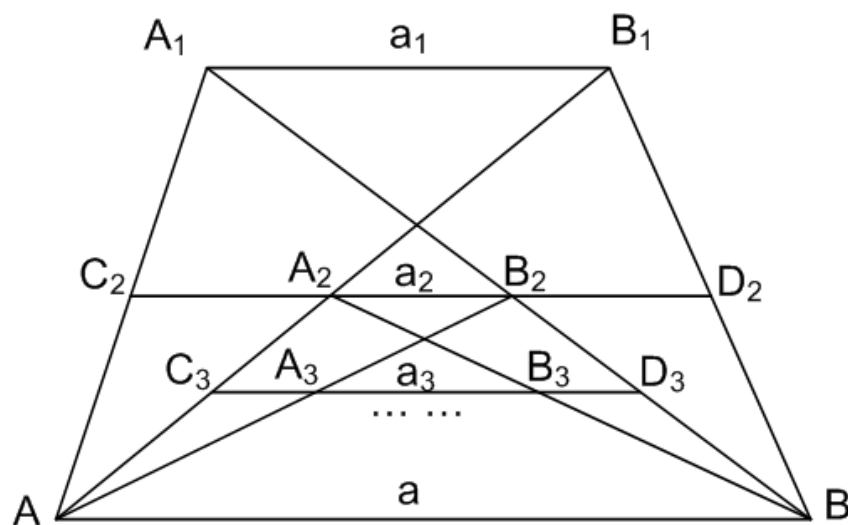


Рис. 2.20. – при  $a_1 < a$

Так як  $C_2D_2$  – середня лінія трапеції  $ABB_1A_1$ , тоді  $C_2B_2$  – середня лінія  $\Delta AA_1B$ , а  $C_2A_2$  – середня лінія трикутника  $\Delta AA_1B_1$ , відповідно,  $|C_2B_2| = \frac{1}{2}a$  і  $|C_2A_2| = \frac{1}{2}a_1$ . Обчислимо довжину відрізка  $A_2B_2$ :  $|A_2B_2| = |C_2B_2| - |C_2A_2| = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_1$ .

Аналогічно для трапецій  $ABB_2A_2$ ,  $ABB_3A_3$  і так далі. Послідовність

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_1; \\ a_3 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_2 \\ a_4 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_3 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.43.)$$

визначається першим членом  $a_1$  та рекурентним відношенням:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_n$$

Застосувавши формулу  $n$  – го члена системи (2.41.), отримаємо:

$$\begin{aligned} a_n &= \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \left( a_1 + \frac{\frac{1}{2}a}{-\frac{1}{2}-1} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{\frac{1}{2}a}{-\frac{1}{2}-1} = \\ &= \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{a}{3} \quad (2.44.) \end{aligned}$$

Таким чином, коли  $n$  має скінченне значення то послідовність  $\{a_n\}$  з загальним членом (2.44.) є арифметико-геометричною прогресією. У випадку коли  $n \rightarrow \infty$ , то сума членів послідовності (2.44.) називається числовим рядом, який задається своїм загальним членом  $a_n$ :  $\left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{a}{3}$ .

Запишемо наступну «сігма-модель»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{a}{3} \quad (2.45.)$$

Використаємо необхідну ознаку [10, с. 31] і дослідимо ряд (2.45.) на збіжність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{a}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{a}{3} =$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \left( -\frac{1}{2^{n-1}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{3} = \left( a_1 + \frac{a}{3} \right) \cdot 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \neq 0.$$

Тобто, ряд (2.45.) є рядом розбіжним.

2)  $a_1 > a$ .

В цьому разі геометрична інтерпретація дещо змінюється (рис. 2.21.)

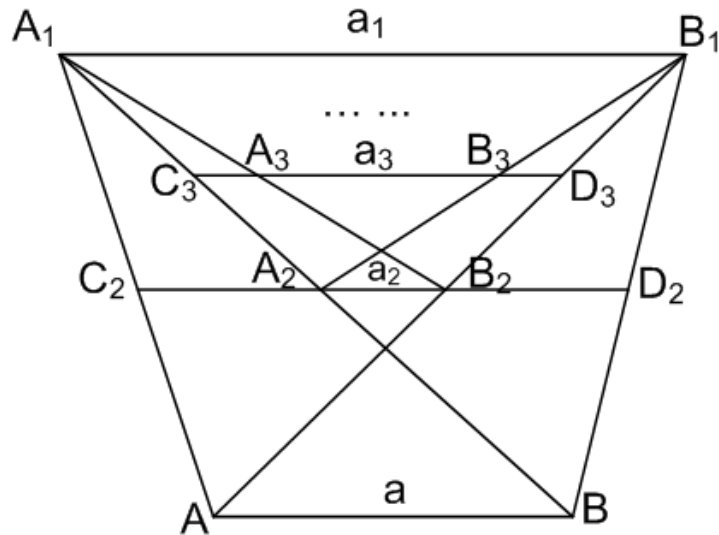


Рис. 2.21. – при  $a_1 > a$

Так як  $C_2D_2$  – середня лінія трапеції  $ABB_1A_1$ , тоді  $C_2B_2$  – середня лінія  $\triangle AA_1B_1$ , а  $C_2A_2$  – середня лінія трикутника  $\triangle AA_1B$ , відповідно,  $|C_2B_2| = \frac{1}{2}a_1$  і  $|C_2A_2| = \frac{1}{2}a$ . Обчислимо довжину відрізка  $A_2B_2$ :  $|A_2B_2| = |C_2B_2| - |C_2A_2| = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a$ .

Аналогічно для трапецій  $ABB_2A_2$ ,  $ABB_3A_3$  і так далі. Послідовність

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a; \\ a_3 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a; \\ a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a; \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.46.)$$

визначається першим членом  $a_1$  та рекурентним відношенням:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a.$$

Застосувавши формулу  $n$  – го члена системи (2.41.), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left( a_1 + \frac{d}{q-1} \right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \left( a_1 + \frac{-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}-1} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}-1} = \\
 &= (a_1 + a) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + a \quad (2.47.)
 \end{aligned}$$

Таким чином, коли  $n$  має скінченне значення то послідовність  $\{a_n\}$  з загальним членом (2.47.) є арифметико-геометричною прогресією. У випадку коли  $n \rightarrow \infty$ , то сума членів послідовності  $\{a_n\}$  називається числовим рядом, який задається своїм загальним членом  $a_n$ :

$$(a_1 + a) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + a.$$

Запишемо наступну «сігма-модель»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + a \quad (2.48.)$$

Використаємо необхідну ознаку [10, с. 31] і дослідимо ряд (2.48.) на збіжність:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a) \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a) \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right) + a = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a) \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} a = (a_1 + a) \cdot 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a = a \neq 0
 \end{aligned}$$

Тобто, ряд (2.48.) – розбіжний.

Інші приклади, які демонструють геометричну інтерпретацію числових рядів, які пов'язані з арифметико-геометричною прогресією розглянуті в Додатку В.

## 2.4. Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з фракталами

Історія розвитку ідей фрактальної геометрії має тісний зв'язок з іменами таких відомих математиків як: Вейерштрасс, Кантор, Пеано, Хаусдорф, Жуліа, Фату та ін. [7, с. 8]. Після аналізу основ фрактальної геометрії можна зробити висновок про те, що за допомогою елементів фракталів можливо одержати приклади числових рядів і запропонувати їх геометричну інтерпретацію, тому що чітко спостерігається геометрична інтерпретація самих фракталів.

До недавніх часів геометричні моделі явищ природи, різноманітних об'єктів життєвого призначення досліджувались на основі геометрії Евкліда з використанням понять: пряма, коло, багатокутник, сфера та інші. Проте такий набір є корисним при вивченні суто елементарних конструкцій і стає практично непридатним для вивчення більш складних об'єктів таких як форми хмар, дерев, контурів материків та інших. Тому, на сьогоднішній день, використовують нові геометричні поняття. Одним із таких понять є фрактал як основний компонент фрактальної геометрії, засновником якої є Бенуа Мандельброт. Саме він здійснив важливу роль в представленні всієї краси та користі фрактальної геометрії для пізнання навколишнього світу [12].

Зазвичай, якщо кажуть, що множина  $F$  є фракталом, то мають на увазі наступне:

- 1)  $F$  має тонку структуру, тобто подібні деталі доволі малих масштабів;
- 2)  $F$  є занадто нерегулярним для того, щоб описуватися традиційною геометрією, як локально, так і глобально;
- 3)  $F$  володіє властивостями самоподібності її елементів, можливо приблизними або статистичними;
- 4) зазвичай будь-яка певна «фрактальна розмірність»  $F$  більше, ніж його топологічна розмірність і т.п. [31, с. 10].

В межах нашого дослідження використаємо більш просте означення:

Фрактал – це геометричний об’єкт, в якому один і той же фрагмент повторюється при кожному послідовному зменшенні його масштабу [31, с. 7].

Фрактали, які мають дану властивість і утворюються в результаті простої рекурсивної процедури називаються конструктивними фракталами [31, с. 7].

Для побудови конструктивних фракталів характерно задавати «основу» та «фрагмент», які повторюються при кожному зменшенні масштабу. Іноді для конструктивних фракталів використовують термін «автомодельний» фрактал [31, с. 14].

Розглянемо детальніше приклади геометричної інтерпретації числових рядів, які пов’язані з конструктивними фракталами.

**Приклад 2.11.** Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов’язані з фракталом «Серветка Серпинського» [13].

В 1915 році польський математик Вацлав Серпинський відкрив знаменитий фрактал «серветка Серпинського». Побудова фрактала починається з рівностороннього трикутника (рисунок 1). З нього вирізається перевернутий центральний рівносторонній трикутник зі стороною, що дорівнює половині довжини сторони вихідного трикутника. Залишаються три рівносторонніх трикутника зі сторонами, вдвічі менше вихідного трикутника. До них також застосовується операція видалення центрального трикутника, утворюється дев’ять трикутників, з яких, в свою чергу, теж вирізається трикутник і так до нескінченності. В результаті і утворюється серветка Серпинського [21, с. 15].

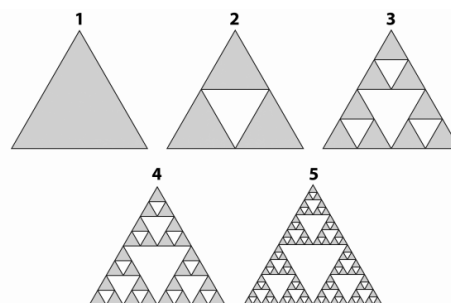


Рисунок 2.21. – Зображення ітераційної процедури побудови трикутної серветки Серпинського

В контексті нашого дослідження візьмемо рівносторонній трикутник зі стороною рівною 1. Продовжуючи вище зазначений процес отримаємо послідовність вкладених рівносторонніх трикутників сторони яких відповідно рівні:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$$

Просумувавши члени, зазначеної вище, послідовності, запишемо ряд для сторін рівносторонніх вкладених трикутників в загальному вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (2.49.)$$

який є прикладом ряду, який пов'язаний з нескінченно спадної геометричною

прогресію, знаменник якої:  $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}$ .

Площі даних вкладених трикутників, обчислювалися за формулою:

$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , і мають наступні значення:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{16}; \frac{\sqrt{3}}{64}; \frac{\sqrt{3}}{256}; \dots; \frac{\sqrt{3}}{2^{2n}}; \dots$$

Просумувавши члени, зазначеної вище послідовності, запишемо ряд для знайдених площ рівносторонніх вкладених трикутників в загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2^{2n}} \quad (2.50.)$$

який є рядом, який пов'язаний з геометричною прогресію, знаменник якої:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2^{2n}}}{\frac{\sqrt{3}}{2^{2(n-1)}}} = \frac{1}{4}$$

Досліджуємо отримані ряди (2.49.), (2.50.) на збіжність, за допомогою ознаки Даламбера [27, с. 23]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}}}{\frac{\sqrt{3}}{2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{2n}}{\sqrt{3} \cdot 2^{2(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{2n}}{\sqrt{3} \cdot 2^{2n+2}} = \\ &= \frac{1}{4} < 1 - \text{ряд збіжний.} \end{aligned}$$

Можна зауважити, що сумарні площі трикутників, вирізаних на черговому кроці ітераційної процедури, утворюють нескінченно спадну геометричну послідовність [21, с.16]:

$$S_1 = \left[ S_{\Delta \text{рівн.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S_n \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4};$$

аналогічно, можна знайти площі всіх наступних вирізаних трикутників та їх суму:  $S_2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{16}$ ;  $S_3 = 3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{64}$ ; ...  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}^{2n-1}}{2^{2n}}$ ; ...

Просумувавши члени даної послідовності отримаємо ряд наступного виду:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2n-1}}{2^{2n}} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2n} \cdot \sqrt{3}^{-1}}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2n}}{2^{2n}} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (2.51.) \end{aligned}$$

який є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії,

знаменник якої:  $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \frac{3}{4}$

Оскільки знаменники отриманих рядів відповідно дорівнюють:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $q = \frac{1}{4}$ ;  $q = \frac{3}{4}$ , тобто  $|q| < 1$  обчислимо межу частинних сум для ряду (2.49.), (2.50.), (2.51.) за відомою формулою [32, с. 8] –  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$ :

$$(2.49.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

$$(2.50.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, q = \frac{1}{4} \right\} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$(2.51.): \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q} = \left\{ b_1 = \frac{\sqrt{3}}{16}, q = \frac{3}{4} \right\} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Звідси, можна зробити висновок про те, що повна площа, вирізаних при побудові серветки, трикутників рівна площі вихідного трикутника, а отже серветка Серпинського має нульову площу [21, с. 15].

Крім того, для даного фрактала можна знаходити і інші числові ряди, які пов'язані з його елементами: ряди які, пов'язані з довжиною висоти (медіани, бісектриси), пов'язані з середньою лінією трикутників тощо.

Метод дослідження рядів геометричних прогресій на збіжність можна проводити за допомогою результатів чисельного експерименту. За допомогою електронних таблиць Microsoft Excel 2007 проведемо експериментальне дослідження обчисливши частинні суми для перших 20 членів рядів геометричних прогресій виду (2.49.), (2.50.), (2.51.).

З отриманих результатів (Таблиці 2.2.) дослідження можна наочно впевнитись, що частинні суми сторін, площ трикутника Серпинського прямують до своїх меж відповідно.

Таблиця 2.2.

п-й член	частинні суми	частинні суми	площі вирізаних
геометр.	для сторін трикутника	для площ трикутника	трикутників при
прогресії	Серпинського	Серпинського	побудові фрактала
0	0	0,000000000000	0
1	1	0,433012701892	0,108253175
2	1,5	0,541265877365	0,189443057
3	1,75	0,568329171234	0,250335468
4	1,875	0,575094994701	0,296004777
5	1,9375	0,576786450567	0,330256758
6	1,96875	0,577209314534	0,355945744
7	1,984375	0,577315030526	0,375212483
8	1,9921875	0,577341459524	0,389662538
9	1,99609375	0,577348066773	0,400500079
10	1,998046875	0,577349718586	0,408628235
11	1,999023438	0,577350131539	0,414724352
12	1,999511719	0,577350234777	0,419296439
13	1,999755859	0,577350260586	0,422725505
14	1,99987793	0,577350267039	0,425297304
15	1,999938965	0,577350268652	0,427226154
16	1,999969482	0,577350269055	0,428672791
17	1,999984741	0,577350269156	0,429757768
18	1,999992371	0,577350269181	0,430571502
19	1,999996185	0,577350269188	0,431181802
20	1,999998093	0,577350269189	0,431639527

Впевнитись в правильності математичних досліджень можна за допомогою графіків.



Рис. 2.22. – Графік функції для частинних сум ряду (2.49.)

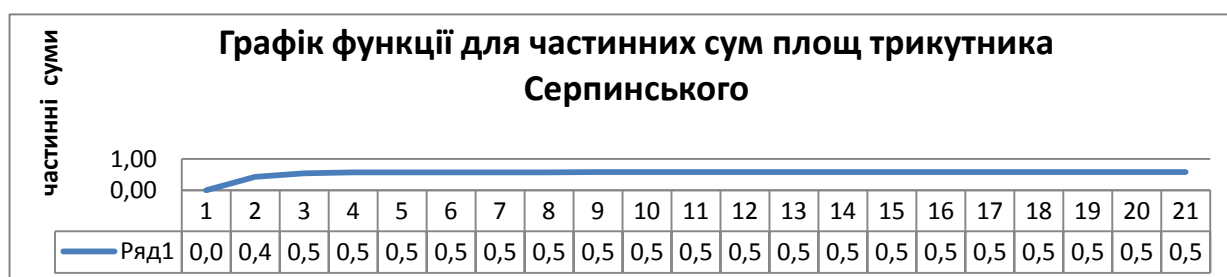


Рис. 2.23. – Графік функції для частинних сум ряду (2.50.)



Рис. 2.24 – Графік функції для частинних сум ряду (2.51.)

За допомогою програмного середовища Lazarus покажемо побудовану модель ряду, пов'язаного з фракталом «серветка» Серпинського.

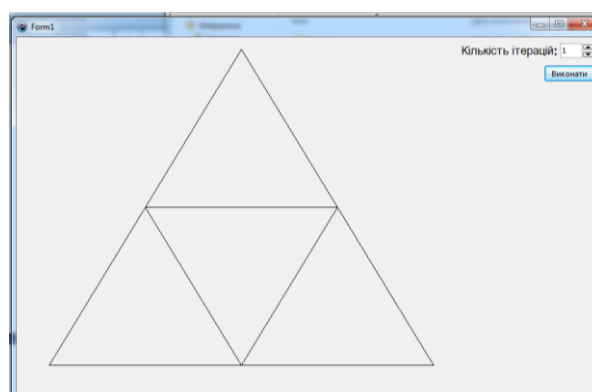


Рис. 2.25. – I-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.49.)



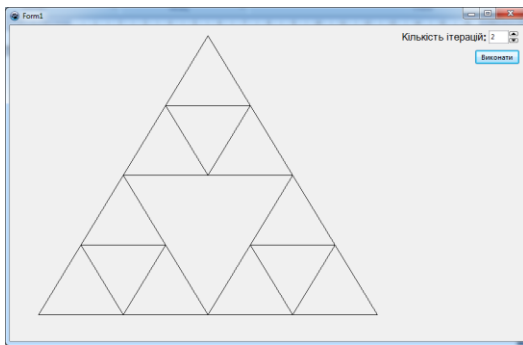


Рис. 2.26. – II -а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.49.)

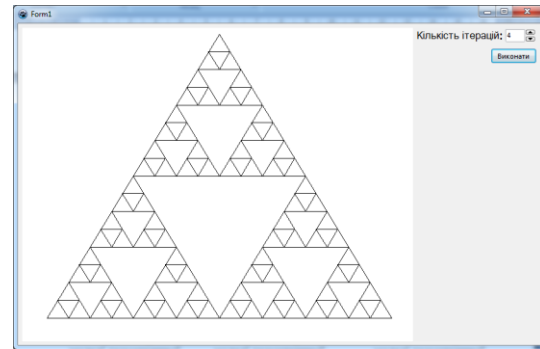


Рис. 2.27. – IV-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (2.49.)

Аналогічно, вибираючи бажану кількість ітерацій за допомогою поля для введення числа та кнопки можна продемонструвати моделі подальших геометричних інтерпретацій ряду у вигляді вкладених трикутників.

Реалізація даної моделі представлена в наступному коді програми [39]:

```
begin
```

```
    paintbox1.canvas.moveto(x1,y1);
    paintbox1.canvas.lineto(x2,y2);
    paintbox1.canvas.moveto((x2),round(y2));
    paintbox1.canvas.lineto(round(x3),round(y3));
    paintbox1.canvas.moveto(round(x3),round(y3));
    paintbox1.canvas.lineto(round(x1),round(y1));
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.draw(x1, y1, x2, y2, x3, y3: Real; n: real);
```

```
var
```

```
    x1n, y1n, x2n, y2n, x3n, y3n : Real;
```

```
begin
```

```
    if n > 0 then
```

```
        begin
```

```
            x1n := (x1 + x2) / 2;
```

```
            y1n := (y1 + y2) / 2;
```

```
            x2n := (x2 + x3) / 2;
```

```
            y2n := (y2 + y3) / 2;
```

```
            x3n := (x3 + x1) / 2;
```

```
            y3n := (y3 + y1) / 2;
```

```
        tr(trunc(x1n), trunc(y1n), trunc(x2n), trunc(y2n), trunc(x3n), trunc(y3n));
```

```
        draw(x1, y1, x1n, y1n, x3n, y3n, n - 1);
```

```
        draw(x2, y2, x1n, y1n, x2n, y2n, n - 1);
```

```

        draw(x3, y3, x2n, y2n, x3n, y3n, n - 1);
    end;
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    paintbox1.canvas.Clear;
    iter:=StrToInt(Edit1.Text);
    tr(320,10,600,470,40,470);
    draw(320,10,600,470,40,470,iter);{ }
end;

```

**Приклад 2.12.** Геометрична інтерпретація числових рядів, які пов'язані з фракталом «Килим Серпинського»

«Килим Серпинського» є однією із форм «серветки Серпинського». Алгоритм побудови зводиться до наступного: квадрат ділиться на 9 рівних квадратів зі стороною, рівною  $\frac{1}{3}$  від довжини сторони вихідного. Після того вирізається центральний квадрат. На другому кроці кожен квадрат, який залишився, ділиться на 9 рівних квадратів зі стороною, рівною  $\frac{1}{9}$  від довжини сторони початкової фігури та  $\frac{1}{3}$  сторони квадратів, отриманих після першого кроку. Потім в кожному із 8 квадратів, які залишилися після першого кроку, знову вирізається центральний квадрат. Процедура повторюється до нескінченності, формуючи при цьому форму «килима» [17, с. 191].

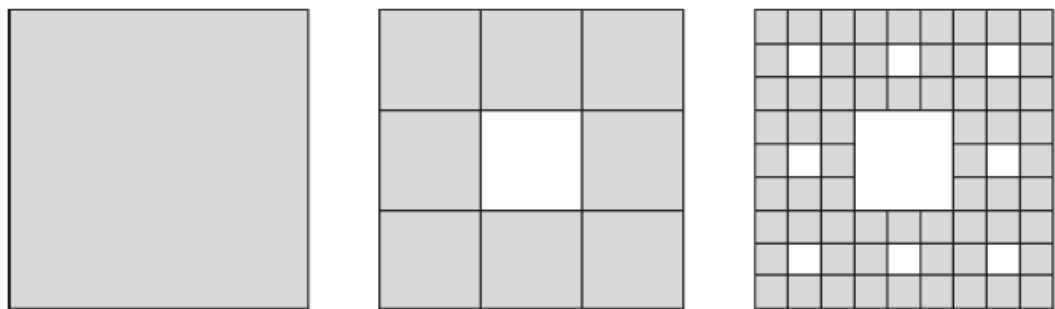


Рис. 2.28. – Зображення ітераційної процедури побудови килима Серпинського

Візьмемо квадрат зі стороною рівною 1. На першому кроці побудови фрактала видаляється центральний квадрат зі стороною  $\frac{1}{3}$ , тоді площа фігури, що утворилася становить:  $S_1 = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$  (кв.од). Після другого кроку

ітераційної процедури площа фігури становить:  $S_2 = \frac{8}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$ , відповідно на третьому кроці побудови площа становить  $\left(\frac{8}{9}\right)^2 - 8^2 \cdot \frac{1}{27^2} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$ . Аналогічно, на  $n$ -му кроці ітераційної процедури площа килима Серпинського становить  $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ .

В свою чергу, на кожному ітераційному кроці з'являються нові квадрати, площі яких утворюють послідовність наступного виду:

$$\frac{1}{9}; \frac{1}{81}; \frac{1}{729} \dots; \frac{1}{3^{2n}};$$

Таким чином, можна отримати наступні ряди:

1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  (2.52.) – ряд для сторін квадратів, утворених при побудові килима Серпинського;

2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$  (2.53.) – ряд для площ квадратів, утворених при побудові килима Серпинського;

3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$  (2.54.) – ряд для площ утвореної фігури, при побудові килима Серпинського;

Оскільки знаменники отриманих рядів відповідно дорівнюють:  $q = \frac{1}{3}$ ;  $q = \frac{1}{9}$ ;  $q = \frac{8}{9}$ , тобто  $|q| < 1$  обчислимо межу частинних сум для ряду

(2.52.), (2.53.) за відомою формулою [32, с. 8] –  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$ :

$$(2.52.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2};$$

$$(2.53.): \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{1}{9} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8};$$

Реалізація даної моделі представлена в програмному середовищі Lazarus, наступному кодї програми [38]:

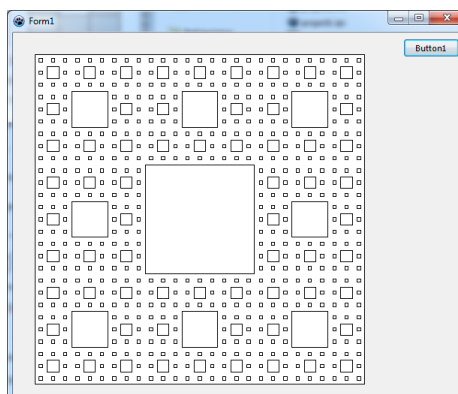


Рис. 2.29.— Зображення ітераційної процедури побудови килима Серпинського в середовищі Lazarus

```
{ TForm1 }
```

```
TForm1 = class(TForm)
```

```
  Button1: TButton;
```

```
  PaintBox1: TPaintBox;
```

```
  procedure Button1Click(Sender: TObject);
```

```
  procedure PaintBox1Click(Sender: TObject);
```

```
private { private declarations }
```

```
  procedure Serp( x1, y1, x2, y2: Real; n: Integer);
```

```
public
```

```
  { public declarations }
```

```
end;
```

```
var
```

```
  Form1: TForm1;
```

```
  x1, y1, x2, y2, x3, y3: Double;
```

```
implementation
```

```
{ $R *.lfm }
```

```
{ TForm1 }
```

```
procedure TForm1.Serp(x1, y1, x2, y2: Real; n: Integer);
```

```
var
```

```
  x1n, y1n, x2n, y2n: Real;
```

```
begin
```

```
  if n > 0 then
```

```
  begin
```

```
    x1n := 2*x1/3 + x2 / 3;
```

```
    x2n := x1/3 + 2*x2 / 3;
```

```
    y1n := 2*y1/3 + y2 / 3;
```

```
    y2n := y1/3+2*y2 / 3;
```

```

PaintBox1.canvas.Rectangle(Round(x1n), Round(y1n), Round(x2n), Round(y2n));
    Serp(x1, y1, x1n, y1n, n-1);
    Serp(x1n, y1, x2n, y1n, n-1);
    Serp(x2n, y1, x2, y1n, n-1);
    Serp(x1, y1n, x1n, y2n, n-1);
    Serp(x2n, y1n, x2, y2n, n-1);
    Serp(x1, y2n, x1n, y2, n-1);
    Serp(x1n, y2n, x2n, y2, n-1);
    Serp(x2n, y2n, x2, y2, n-1)
end
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    paintbox1.canvas.Rectangle(20, 20, 460, 460);
    Serp(20, 20, 460, 460, 4);
end;

```

Крім одержаних рядів можна отримувати ряди пов'язані з периметрами утворених квадратів, з діагоналями утворених квадратів тощо.

Трьохвимірним аналогом «килима Серпинського» є «губка Менгера» відкрита професором Іллінойського технологічного університету Карлом Менером в 1946 році. Алгоритм побудови аналогічний побудові фрактала «килима Серпинського»: кожна грань куба ділиться на 9 рівних квадратів. Потім із вихідного кубика видаляється 7 кубиків зі стороною  $\frac{1}{3}$  (центральный і по одному центральному кубуку із кожної грані), з 27 кубиків залишається тільки 20. З кубиками, які залишилися зі стороною  $\frac{1}{3}$  проводиться така ж сама процедура, в підсумку утворюючи само подібний об'єкт, в якому будь-яка грань – це «килим Серпинського» [17, с.191].

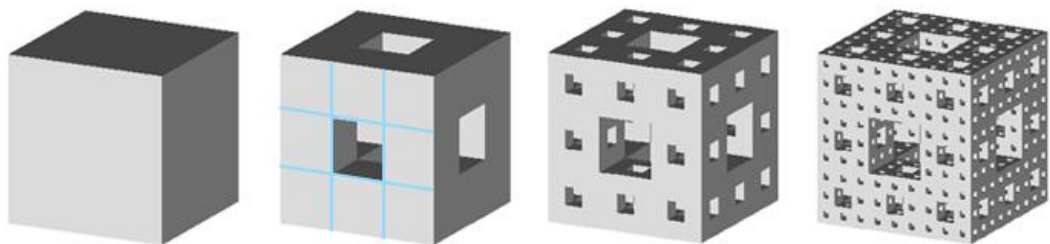


Рис. 2.30. – зображення ітераційної процедури побудови «губки Менгера»

Об'єми даних вкладених кубиків, обчислювалися за формулою:  
 $S_{\text{куб.}} = a^3$ , і мають наступні значення:

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3; V_2 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^3; V_3 = \left(\frac{1}{3^3}\right)^3; \dots; V_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)^3; \dots$$

Запишемо ряд для знайдених об'ємів вкладених кубиків в загальному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{3n}} \quad (2.55.)$$

Для того, щоб отримати ряд для об'ємів утвореної фігури, при побудові килима Серпинського будемо виконувати обчислення після кожної ітераційної процедури:

$$\text{I - а ітераційна процедура: - } S_1 = 1 - 7 \cdot \frac{1}{3^3} = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27};$$

$$\text{II - а ітераційна процедура: - } S_2 = \frac{20}{27} - 20 \cdot 7 \cdot \frac{1}{(3^2)^3} = \frac{400}{3^6};$$

$$\text{III - а ітераційна процедура: - } S_3 = \frac{400}{3^6} - 20^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{(3^3)^3} = \frac{8000}{3^9};$$

$$\text{IV-а ітераційна процедура: - } S_4 = \frac{8000}{3^9} - 20^3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3^{4^3}} = \frac{160000}{3^{12}};$$

... ..

$$n - \text{а ітераційна процедура: - } S_n = \frac{27 \cdot 20^{n-1}}{3^{3(n-1)}} - \frac{20^{n-1} \cdot 7}{(3^n)^3} = \frac{20^n}{3^{3n}};$$

... ..

Згорнемо дану послідовність та отримаємо ряд наступного виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{20}{3^3}\right)^n \quad (2.56.)$$

Дослідимо даний ряд (2.56.) на збіжність:

Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{3^3}\right)^n = 0$$

Перевіримо виконання достатньої умови збіжності ряду, а саме використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{20}{3^3}\right)^n} = \frac{20}{3^3} < 1 - \text{ряд збіжний.}$$

Оскільки знаменник отриманого ряду дорівнює  $q = \frac{20}{27}$ , тобто  $|q| < 1$  обчислимо межу частинних сум для ряду (2.56.) за відомою формулою [32, с. 8] –  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$ :

$$(2.56.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1, q = \frac{20}{27} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{20}{27}} = \frac{27}{7}.$$

Інші приклади, які демонструють геометричну інтерпретацію числових рядів, які пов'язані з фракталами розглянуті в Додатку Г.

## Висновки до розділу 2

1. Проведені дослідження підтверджують той факт, що числові ряди можна інтерпретувати за допомогою великої кількості геометричних об'єктів.

2. Одержана геометрична інтерпретація числових рядів пов'язаних з арифметичною прогресією, геометричною прогресією, арифметико-геометричною прогресією та виведено формули щодо знаходження їх загальних членів та сум перших  $n$  – членів.

3. Проаналізовано поняття «фрактал». Фрактал – це геометричний об'єкт, в якому один і той же фрагмент повторюється при кожному послідовному зменшенні його масштабу. Фрактали, які мають дану властивість і утворюються в результаті простої рекурсивної процедури називаються конструктивними фракталами.

4. За допомогою параметрів конструктивних фракталів отримані «сігма-моделі» низки числових рядів, що можуть бути запропоновані при вивченні розділу «Числові ряди».

5. Одержані числові ряди, які пов'язані з фракталами, поширюють можливості вивчення відомих фраталів: трикутник Серпинського, килим Серпинського, крива Коха, острів Коха, парадокс Шварца.

6. Для того, щоб отримати числові ряди, які пов'язані з такими поняттями як «арифметична прогресія», «геометрична прогресія», «арифметико-геометрична прогресія» доцільно використовувати класичні поняття сум членів цих прогресій.

7. Для реалізації дидактичного принципу наочності, при вивченні числових рядів варто використовувати освітню математичну програму GeoGebra та середовище візуального програмування Lazarus.



## ВИСНОВКИ

Згідно до поставленої мети та завдань було проаналізовано літературу з теми магістерської роботи та з'ясовано, що:

1. Чіткої періодизації етапів розвитку рядів не має та дату їх виникнення встановити не можливо;

2. За часів існування Евдокса та Ахімеда, було виявлено, що мислителі тогочасності робили спроби застосування теорії рядів для розв'язання задач на знаходження об'єму піраміди, площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника;

3. На початку XVII століття починається систематизація та розвиток теорії рядів;

4. Переважна кількість підручників, посібників, практикумів з математичного аналізу пропонують студентам теоретичні відомості, приклади розв'язання типових, та нестандартних задач, способи розв'язання з методичними вказівками, задачі для самостійної роботи, але в контексті сказаного, практично відсутнє візуальне представлення членів рядів та їх збіжності або розбіжності.

5. Евристичним пошуком знайдено «сігма-моделі» числових рядів за допомогою параметрів геометричних об'єктів (ліній, площ, об'ємів) та досліджено їх на збіжність;

6. Проаналізовано поняття «фрактал». Фрактал – це геометричний об'єкт, в якому один і той же фрагмент повторюється при кожному послідовному зменшенні його масштабу.

7. За допомогою параметрів конструктивних фракталів отримані «сігма-моделі» низки числових рядів, що можуть бути запропоновані при вивченні розділу «Числові ряди».

8. Одержані числові ряди, які пов'язані з фракталами, поширюють можливості вивчення відомих фракталів: трикутник Серпинського, килим Серпинського, крива Коха, острів Коха, парадокс Шварца.

9. Для того, щоб отримати числові ряди, які пов'язані з такими поняттями як «арифметична прогресія», «геометрична прогресія». «арифметико-геометрична прогресія» доцільно використовувати класичні поняття сум членів цих прогресій.

10. Реалізовано комп'ютерні експерименти стосовно геометричної інтерпретації числових рядів за допомогою освітньої математичної програми GeoGebra та середовища візуального програмування Lazarus.

В рамках нашого дослідження було обрано саме ці програмні засоби оскільки:

GeoGebra – вільно-розповсюджене динамічне середовище, яке дозволяє здійснювати побудову геометричних об'єктів за допомогою циркуля і лінійки та керувати ними. Крім того, програмне середовище GeoGebra, завдяки своєму зручному та інтуїтивно зрозумілому інтерфейсу, може використовуватись людьми, які мають елементарні навички роботи на комп'ютері.

Lazarus - це середовище візуального програмування з яким учні починають знайомитись ще за часів їхнього навчання в школі. Тому студентам фізико-математичного факультету, спеціальності «Математика» може бути цікаво використати вже здобуті знання з інформатики та розширити їх для виконання нових завдань, зокрема при вивченні математичного аналізу розділу «Числові ряди».

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, значений : Словарь – справочник / Н. В. Александрова. – 3-е изд., испр. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. Алексеев Е. Р. Free Pascal и Lazarus : учеб. по программированию / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Т. В. Кучер. – Москва : Изд. дом ДМК – пресс, 2010. – 442 с.
3. Алексеев Е. Р. Самоучитель по программированию на Free Pascal и Lazarus / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Т. В. Кучер. – Донецк : УНИТЕХ, 2009. – 503 с.
4. Балханов В. К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления : учебн. пособие / В. К. Балханов. – Улан-Удэ : ЕГУ, 2013. – 223 с.
5. Бевз Г. П. Алгебра : підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ: Освіта, 2017. – 272 с.
6. Белый Е. К. Математика не для ЕГЭ. Прогрессии : учеб. пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый. – Петрозаводск : ПетрГУ, 2016. – 132 с.
7. Божокин С. В. Фракталы и мультифракталы : учебн. пособ. / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки ; пер. с фр. И. Г. Башмакова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1963. – 292 с.
9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
10. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.

11. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., перераб. и доп.. – Москва : Наука, 1979. – 408 с.
12. Габ С. С. Числові ряди, які пов'язані з парадоксом Шварца / С. С. Габ // Актуальні аспекти фундаменталізації математичної підготовки в сучасних вищих навчальних закладах. Погляд студентів та молодих вчених : Всеукр. науково-практична конф. здобувачів вищої освіти та молодих вчених (Харків, 12 – 13 квітня 2018 р.) : матер. доповідей та виступів. – Харків, 2018. – С. 114 – 117.
13. Габ С.С. Геометрическая интерпретация числовых рядов, связанных с фракталами / С. С. Габ // Материалы XIV Международной научно - практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2018» (Барановичи, 17 мая 2018 г.). – Барановичи, 2018. – С. 50 – 51.
14. Гергега А. Н. Конструктивные фракталы в теории множеств : учебн. пособие / А. Н. Гергега. – Одесса : «Освита України», 2017. – 85 с.
15. Горячев А. П. Числовые и функциональные ряды / А. П. Горячев. – Москва : МИФИ, 2007. – 264 с.
16. Гурьянова К. Н. Математический анализ : учебн. пособие / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов. – Екатеринбург : Урал. федер. ун-т, 2014. – 332 с.
17. Деменок С. Л. Просто фрактал / С. Л. Деменок. – 3-тє вид. – Санкт Питербург : Страта, 2016. – 244 с.
18. Жалдак М. І. Математичний аналіз функції : навч. посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ : НПУ, 2007. – 429 с.
19. Замятин В. Н. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие / В. Н. Замятин, С. М. Шаова. – Майкоп : АГУ, 2010. – 69 с.
20. Игудесман К. Б. Фрактальная геометрия [Электронный ресурс] / К. Б. Игудесман. – Казань : КГУ, 2010. – 63 с. – Режим доступа: <https://www.google.com.ua/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ve>

[d=2ahUKEwjC-](#)

[Iqt8PTeAhXmkIsKHW9VAW4QFjANegQIChAC&url=http%3A%2F%2Fold.kpfu.ru%2Ff5%2Ffg%2Ffg.pps&usg=AOvVaw0LOc\\_sw8ZSn6UNOkpgBQ4O.](#) –

(дата обращения 03.04.2018). – Заглавие с экрана.

21. Иудин Д. И. Фракталы: от простого к сложному / Д. И. Иудин, Е. В. Копосов. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2012. – 200 с.
22. Істер О. С. Алгебра : підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. С. Істер . – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.
23. Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання / В. В. Корольський, С. С. Габ. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 67 – 73.
24. Корольський В. В. Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра / В. В. Корольський, С. С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина : мова, культура, пізнання» : науковий журнал / за ред.. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – С. 39–45.
25. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.
26. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.
27. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е вид., стер. – Москва : Дрофа, 2004. – 720 с.
28. Кузьмина С. С. Числовые ряды : учебн. пособие / С. С. Кузьмина, О. Я. Шевалдина. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. – 161 с.
29. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк / Алексей Иванович Маркушевич. – Москва – Ленинград : Изд-во НКТП СССР, 1936. – 103 с.

30. Матяш В. И. Ряды. Курс лекций : учебн. пособие / В. И. Матяш. – 2-е изд., испр. и дополн. – Москва : МГТУ «МАМИ», 2007. – 150 с.
31. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
32. Никонорова С. П. Числовые и функциональные ряды : учеб. пособие / С. П. Никонорова. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2010. – 78 с.
33. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т.2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 560 с.
34. Плужникова Е. Л. Математический анализ. Ряды : учебн. пособ. / Е. Л. Плужникова, Б. Г. Разумейко. – Москва : Издательский дом «МИСис», 2011. – 141 с.
35. Рудой Е. М. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды : учебн. пособие / Е. М. Рудой. – Новосибирск : НГПУ, 2010. – 198 с.
36. Ряды : учебное пособие для студентов-заочников 3 курса физико-математических факультетов педагогических институтов / Н. Я. Виленкин, В. В. Цукерман, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – Москва : Просвещение, 1982. – 160 с.
37. Суконник Я. Арифметико-геометрическая прогрессия / Я. Суконник // Квант. – 1975. – №1. – С. 36 – 39.
38. Тарасенко В. Компьютерная графика. Ковер Серпинского / Владислав Тарасенко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://grafika.me/node/43>. – Заглавие с экрана.
39. Тарасенко В. Компьютерная графика. Треугольник Серпинского / Владислав Тарасенко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://grafika.me/node/42>. – Заглавие с экрана.
40. Трофимов В. К. Теория рядов : учебно пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т.Э. Захарова. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – 145 с.
41. Трубецков Д. И. Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия / Д. И. Трубецков, Е. Г. Трубецкова. – Москва : Рос. академ. Наук, 2017. – 148.

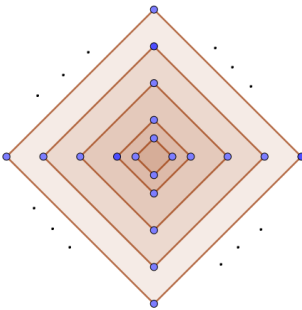
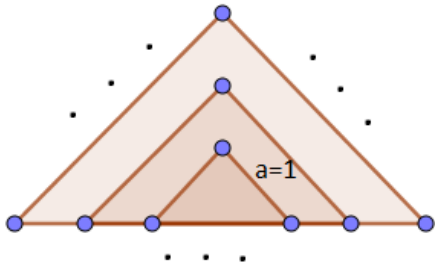
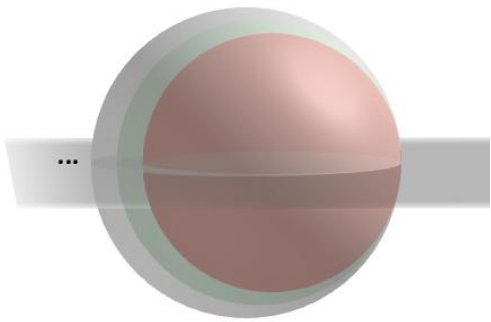
42. Федер Е. Фракталы / Е. Федер ; пер. с англ. А. Шукуров и др. – Москва : Мир, 1991. – 254 с.
43. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с.
44. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1951. – 498 с.
45. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках / Г. Г. Цейтен ; пер. с нем. П. Новиков. – Москва – Ленинград : ОНТИ, 1938. – 456 с.
46. Числовые и функциональные ряды : учебное пособие / Т. Н. Титова, Т. А. Мацевич, Е. Е. Ассеева, А. Н. Серова. – Москва : Изд-во Моск. гос. строит. ун-та, 2016. – 123 с.
47. Чумак О. В. Энтропии и фракталы в анализе данных / О. В. Чумак. – Москва – Ижевск : НИЦ, 2011. – 164 с.
48. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с.
49. Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия : в 3 т. Т. 3 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1972. – 496 с.
50. Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия: в 3 т. Т. 2 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 301 с.

## ДОДАТКИ

## Додаток А

Приклади вправ на знаходження числових рядів, які пов'язані з арифметичною прогресією за їх геометричною інтерпретацією

Таблиця А.1.

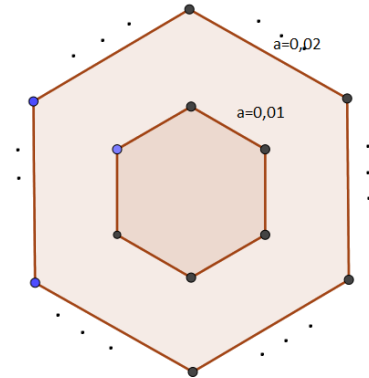
<i>Вправи</i>	<i>Геометрична інтерпретація</i>
<p><b>Вправа А.1.</b> Дано квадрати, сторони яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії на 0,1 одн. (<math>a_1 = 1</math>). Знайти числові ряди для сторін квадратів, периметрів квадратів, площ квадратів. Дослідити ряди на збіжність.</p>	
<p><b>Вправа А.2.</b> Дано рівносторонні трикутники, сторони яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії на 0,1 одн. Знайти числові ряди для сторін трикутників, периметрів трикутників, площ трикутників. Дослідити ряди на збіжність.</p>	
<p><b>Вправа А.3.</b> Дано сфери, радіуси яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії. Знайти числові ряди для радіусів кіл, площ поверхонь сфер, об'ємів сфер. Дослідити ряди на збіжність. Рівняння сфер на трьох перших ітераційних кроках:</p> $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(x + 0,1)^2 + y^2 + z^2 = 1,21$ $(x + 0,2)^2 + y^2 + z^2 = 1,44$	



Продовж. табл. А.1.

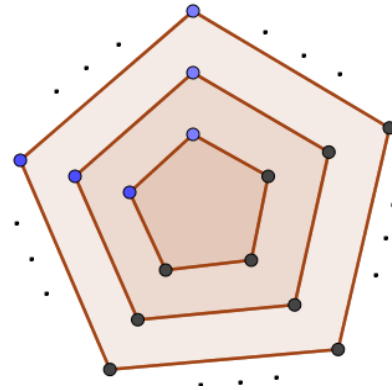
**Вправа А.4.** Дано додекаедри, сторони яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії на 0,01 одн. ( $a_1 = 0,01$ ).

Знайти числові ряди для сторін додекаедрів, периметрів додекаедрів, площ додекаедрів. Дослідити ряди на збіжність.



**Вправа А.5.** Дано правильні п'ятикутники, сторони яких послідовно збільшуються за законом арифметичної прогресії на 0,01 одн. ( $a_1 = 0,01$ ).

Знайти числові ряди для сторін правильних п'ятикутників, периметрів правильних п'ятикутників, площ правильних п'ятикутників. Дослідити ряди на збіжність.



Приклад геометричної інтерпретації числових рядів, які пов'язані з геометричною прогресією.

### Приклад Б. 1.[24]

Розглянемо додекаедр зі стороною  $a = 1$  (рис. Б.1). Для того, щоб отримати множину вписаних додекаедрів виконаємо послідовність наступних дій:

1) проведемо до кожної сторони серединні перпендикуляри;  
 2) якщо середини відрізків сполучити одержимо наступний додекаедр який вписаний в заданий (рис. Б. 2);

3) на подальших кроках побудови, по аналогії, потрібно провести серединні перпендикуляри до кожної сторони попередньо вписаного додекаедра, та сполучити їх, отримаємо послідовність вписаних додекаедрів (рис. Б. 3).

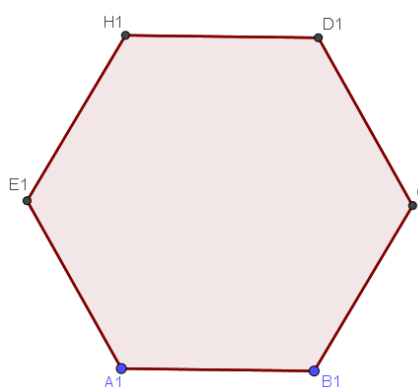


Рис. Б. 1.

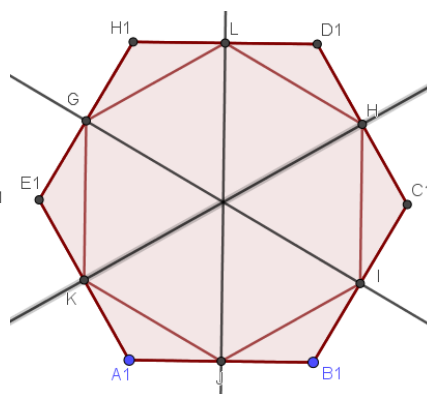


Рис. Б. 2 .

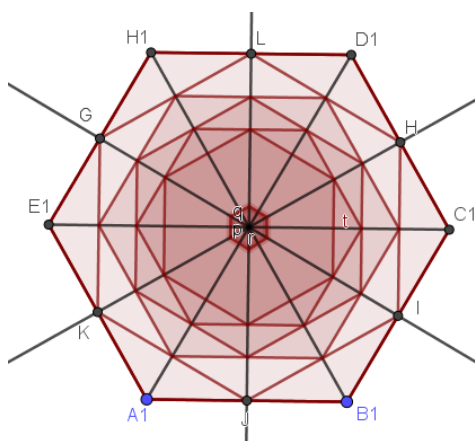


Рис. Б. 3.

На першому кроці досліджень має місце додекаедр сторона якого  $H_1D_1 = 1$  см. Для того, щоб одержати вписаний додекаедр в даний, розглянемо  $\triangle D_1LO$ :  $LO$  – серединний перпендикуляр, тому  $\angle D_1LO = 90^\circ$ ;  $D_1L = \frac{1}{2}H_1D_1 = \frac{1}{2}$ ;  $OD_1 = H_1D_1 = 1$  (оскільки навколо правильного шестикутника можна описати коло, радіус якого дорівнює довжині сторони вписаного шестикутника,  $OD_1$  – радіус описаного кола) (рис. Б. 4.).

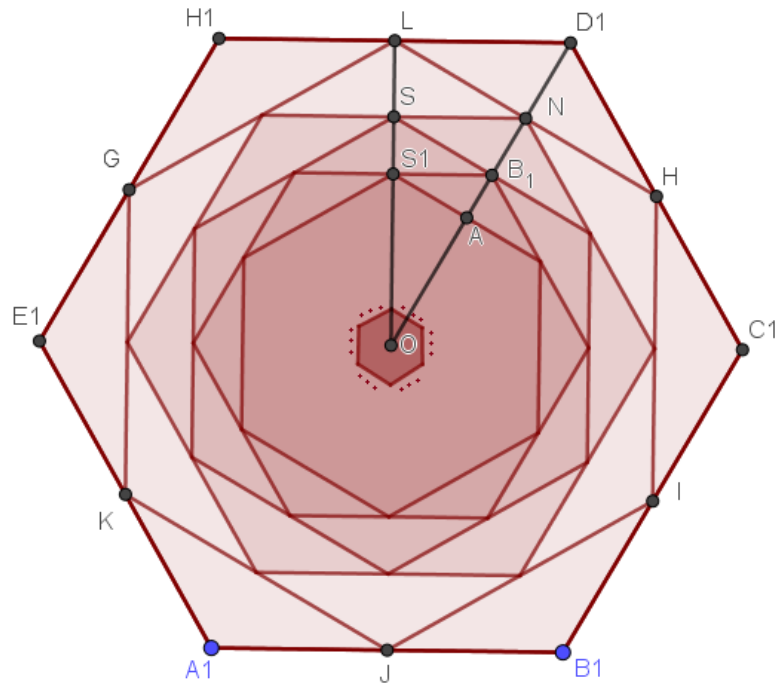


Рис.Б.4.

За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка

$$LO = \sqrt{OD_1^2 - D_1L^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (см).}$$

Відрізок  $LO$  як радіус описаного кола для вписаного додекаедра дорівнює його довжині, таким чином при  $n = 2$  отримано додекаедр зі стороною:  $LO = LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (см).

По аналогії до попередніх обчислень знайдемо довжини сторін для декількох подальших вписаних шестикутників.

3  $\triangle LNO$ :  $NO$ - серединний перпендикуляр, тому:  $\angle LNO = 90^\circ$ ;  $NL = \frac{1}{2}LH = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ;  $OL = LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка  $NO$ :

$$\begin{aligned} NO &= \sqrt{LO^2 - NL^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12 - 3}{16}} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \text{ (см)}. \end{aligned}$$

3  $\triangle NSO$ :  $SO$ - серединний перпендикуляр, тому:  $\angle NSO = 90^\circ$ ;  $SN = \frac{3}{8}$ ;  $NO = 2SN = \frac{3}{4}$ . За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка  $SO$ :

$$\begin{aligned} SO &= \sqrt{NO^2 - SN^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{36 - 9}{64}} = \\ &= \sqrt{\frac{27}{64}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ (см)}. \end{aligned}$$

3  $\triangle SB_1O$ :  $B_1O$ - серединний перпендикуляр, тому:  $\angle SB_1O = 90^\circ$ ;  $SO = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ;  $SB_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ . За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка  $SO$ :

$$\begin{aligned} B_1O &= \sqrt{SO^2 - SB_1^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{64} - \frac{27}{256}} = \sqrt{\frac{108 - 27}{256}} = \\ &= \frac{9}{16} \text{ (см)}. \end{aligned}$$

3  $\triangle B_1S_1O$ :  $S_1O$ - серединний перпендикуляр, тому:  $\angle B_1S_1O = 90^\circ$ ;  $B_1O = \frac{9}{16}$ ;  $S_1B_1 = \frac{9}{32}$ . За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка  $SO$ :

$$S_1O = \sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^2 - \left(\frac{9}{32}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{256} - \frac{81}{1024}} = \sqrt{\frac{273}{1024}} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ (см)}.$$

Отже сторони вписаних додекаедрів відповідно мають довжини:

$$1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{8}; \frac{9}{16}; \frac{9\sqrt{3}}{32}; \dots$$

тому можемо записати ряд для сторін вписаних шестикутників в наступному вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n}$$

який є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}}{\frac{\sqrt{3^{n-1}}}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1} \cdot \sqrt{3^n}}{2^n \cdot \sqrt{3^{n-1}}} = \frac{2^n \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt{3^n}}{2^n \cdot \sqrt{3^n} \cdot (\sqrt{3})^{-1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Оскільки периметр це сума всіх сторін многокутника, тому в даному разі периметри для всіх вписаних шестикутників можна представити у вигляді:

$$6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n}$$

Відомо, що площа правильного шестикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2};$$

тоді ряд для площ отриманих вписаних додекаедрів має вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}\right)^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot 3\sqrt{3}}{2^{2n} \cdot 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot \sqrt{3}}{2^{2n+1}}$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки [10, с. 31- 32]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n} = 0;$$

$$6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n} : 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n} = 0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot \sqrt{3}}{2^{2n+1}} : \sqrt{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n+1}} = 0.$$

Дослідимо отримані ряди на збіжність. За допомогою ознаки Д'ламбера отримаємо [27, с. 20]:

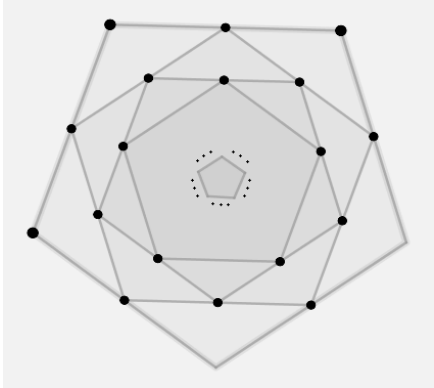
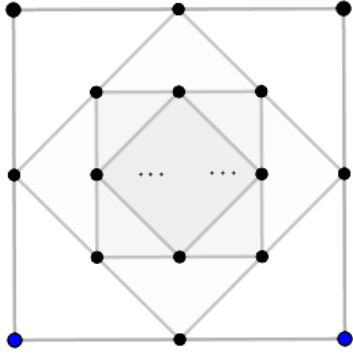
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1} \sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6^{\sqrt{3^{n+1}}}}{2^{n+1}}}{\frac{6^{\sqrt{3^n}}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1} \sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+2} \cdot \sqrt{3}}{2^{2n+1} + 1}}{\frac{3^{n+1} \cdot \sqrt{3}}{2^{2n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{2n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{2n+3}} = \frac{1}{3} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

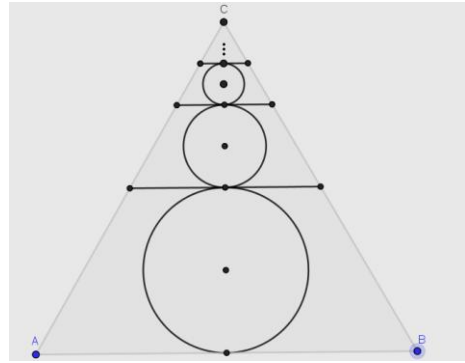
Наведемо приклади вправ для практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди» та для лабораторних занять при вивченні комп'ютерних технологій.

Таблиця Б.1.

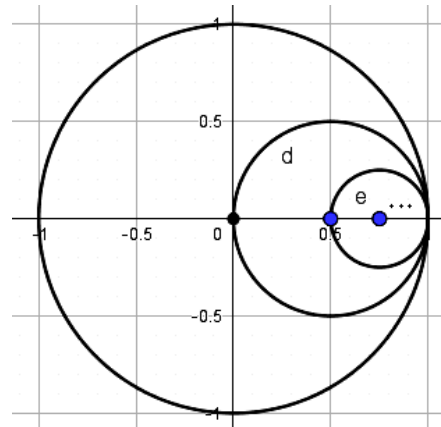
Вправи	Геометрична інтерпретація
<p><b>Вправа Б. 1.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Знайти суму периметрів правильних п'ятикутників (<math>a = 1</math>).</li> <li>Знайти суму сторін вписаних правильних п'ятикутників.</li> <li>Знайти суму площ вписаних правильних п'ятикутників.</li> <li>Знайти суму радіусів вписаних / описаних кіл.</li> <li>Знайти суму площ вписаних / описаних кіл.</li> </ol>	
<p><b>Вправа Б. 2.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Знайти суму периметрів квадратів (<math>a = 1</math>).</li> <li>Знайти суму сторін вписаних квадратів.</li> <li>Знайти суму площ вписаних квадратів.</li> <li>Знайти суму радіусів вписаних / описаних кіл.</li> <li>Знайти суму площ вписаних / описаних кіл.</li> </ol>	

**Вправа Б. 3.**

1. Знайти суму площ трикутників, вписаних в рівносторонній трикутник зі стороною  $a = 1$ .
2. Знайти суму площ кіл діаметри яких є висотами трапецій.
3. Знайти суму значень середніх ліній вписаних трикутників.

**Вправа Б. 4.**

1. Знайти суму радіусів вписаних/описаних кіл.
2. Знайти суму площ вписаних/описаних кіл.



Приклад геометричної інтерпретації числових рядів, які пов'язані з арифметико-геометричною прогресією [37].

### Приклад В.1

Висоти гострокутного трикутника  $A_1B_1C_1$  продовжені до перетину з описаним колом відповідно, в точках  $A_2B_2C_2$ , які є вершинами гострокутного  $\Delta A_2B_2C_2$ . Висоти  $\Delta A_2B_2C_2$  продовжені до перетину з описаним колом відповідно в точках  $A_3B_3C_3$ , які є вершинами гострокутного  $\Delta A_3B_3C_3$ , і т. д., до  $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  включно. Знайти загальний член для знаходження кутів трикутника  $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$  враховуючи кути  $\Delta A_1B_1C_1$  відомими. Обчислимо ряд, який пов'язаний з кутами трикутників і дослідимо його на збіжність.

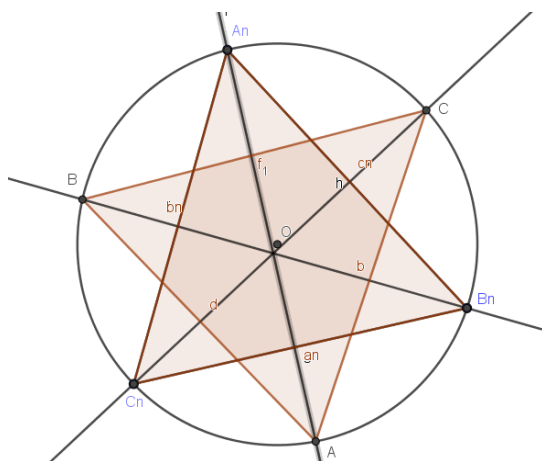


Рис. В. 1 – реалізація побудови в програмному засобі GeoGebra

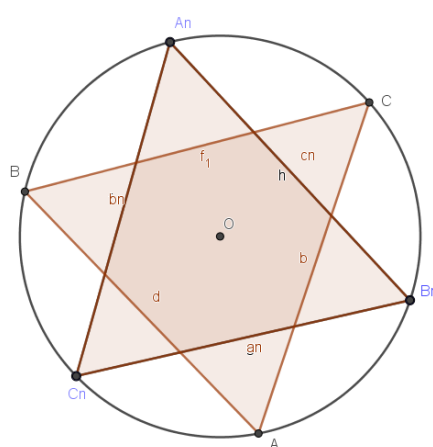


Рис. В. 2 – реалізація побудови в програмному засобі GeoGebra

На рис. В. 2. зображені коло і вписані гострокутні трикутники  $A_nB_nC_n$  і  $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ . Виразимо  $\angle A_{n+1}$  через  $\angle A_n$ :

$$\angle A_{n+1} = \angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}$$

$$\angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1} = \angle B_{n+1}A_{n+1}A_n + \angle A_nA_{n+1}C_{n+1}$$

$$\angle B_{n+1}A_{n+1} = \angle B_{n+1}B_nA_n$$

$$\angle A_nA_{n+1}C_{n+1} = \angle A_nC_nC_{n+1}$$

$$\text{Тобто, } \angle B_{n+1}B_nA_n + \angle A_nC_nC_{n+1} = \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_n\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_n\right) =$$



$$= \pi - 2\angle A_n$$

отже  $\angle A_{n+1} = -2\angle A_n + \pi$  і послідовність кутів  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  утворює арифметико-геометричну прогресію. За формулою загального члена арифметико-геометричної прогресії знайдемо (2.41.):

$$\angle A_{n+1} = (-2)^n \left( \angle A_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n \left( \angle A_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} = \infty$$

$$\angle B_{n+1} = (-2)^n \left( \angle B_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n \left( \angle B_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} = \infty$$

$$\angle C_{n+1} = (-2)^n \left( \angle C_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n \left( \angle C_1 - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} = \infty$$

Приклади вправ [37] для практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди».

*Таблиця В.1.*

<p><b>Вправа В. 1.</b> Навколо гострокутного трикутника <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> описаний гострокутний трикутник <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, сторони якого є дотичними до кола, описаного навколо трикутника <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> в його вершинах. Навколо трикутника <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, аналогічним чином, описаний гострокутний трикутник <math>\Delta A_3 B_3 C_3</math> і т.д., до трикутника <math>\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}</math> і т.д.. Знайти ряд, який пов'язаний з кутами трикутників. Дослідити ряд на збіжність. Виконати побудову.</p>
<p><b>Вправа В. 2.</b> Навколо трикутника <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> описаний трикутник <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, вершини якого співпадають з центрами вневписаних кіл в трикутник <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math>. Навколо трикутника <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, аналогічним чином, описаний трикутник <math>\Delta A_3 B_3 C_3</math> і т.д., до трикутника <math>\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}</math> і т.д.. Знайти ряд, який пов'язаний з кутами трикутників. Дослідити ряд на збіжність.</p>
<p><b>Вправа В. 3.</b> Бісектриси трикутника <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> продовжені до перетину з описаною, навколо трикутника <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> колом відповідно в точках <math>A_2, B_2, C_2</math>. Бісектриси <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math> продовжені до перетину з описаною, навколо трикутника <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math> колом відповідно в точках <math>A_3, B_3, C_3</math> і т.д.. Знайти ряд, який пов'язаний з кутами трикутників. Дослідити ряд на збіжність.</p>
<p><b>Вправа В. 4.</b> В трикутник <math>\Delta A_1 B_1 C_1</math> вписаний трикутник <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, утворений проєкціями центру вписаного кола на його сторони. В <math>\Delta A_2 B_2 C_2</math>, аналогічним чином, вписаний трикутник <math>\Delta A_3 B_3 C_3</math> і т.д.. Знайти кути трикутника <math>\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}</math>. Знайти ряд, який пов'язаний з кутами трикутників. Дослідити ряд на збіжність.</p>

## Додаток Г

Приклад геометричної інтерпретації числових рядів, які пов'язані з фракталами.

**Приклад Г.1.** (Приклад який пов'язаний з парадоксом Шварца [12])

*Парадокс Шварца* полягає у наступному:

1) розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник  $ABC$  з катетами  $AB = 1, BC = 1$ . За теоремою Піфагора довжина найкоротшого шляху з  $A$  в  $C$  дорівнює  $\sqrt{2}$ .

2) припустимо, що за умовою задачі ми можемо пересуватися тільки по вертикалі або горизонталі. Тоді довжина шляху з  $A$  в  $B$  потім в  $C$ , дорівнює  $AB + BC = 1 + 1 = 2$ . В подальшому будемо рухатись по відрізкам, які в половину менше ніж попередні. Очевидно, що відрізки  $AK = LC = \frac{1}{2}$ , а отже  $KT = LT = \frac{1}{2}$ . Довжина шляху через відрізки  $AK, KT, TL, LC$  буде дорівнювати  $AK + KT + TL + LC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ . Більше того, ми можемо вибрати шлях з  $A$  в  $B$ , що складається з вертикальних і горизонтальних відрізків, як завгодно близьке до гіпотенузи  $AC$ , але його довжина буде дорівнює 2, що очевидно більше, ніж довжина самої гіпотенузи [20] (Рис. Г. 1).

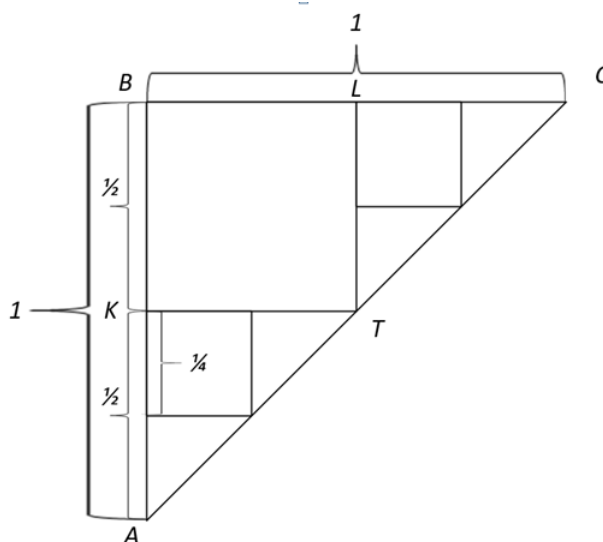


Рис. Г. 1 – Принцип побудови парадокса Шварца

Проаналізувавши літературу було виявлено певну закономірність числових послідовностей [5].

Так отримаємо послідовність вкладених прямокутних трикутників з катетами  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \frac{1}{2^n}; \dots$ . Враховуючи, що дана послідовність має очевидну закономірність, отримуємо ряд виду:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  (Г.1.);

Відповідно гіпотенузи даних вкладених прямокутних трикутників мають значення:  $\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{2}}{16}; \dots \frac{\sqrt{2}}{2^n}; \dots$ . В цьому разі маємо ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} \quad (\text{Г.2.})$$

Площі даних вкладених трикутників мають наступні значення:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{32}; \frac{1}{128}; \dots; \frac{1}{2^{2n+1}}; \dots$$

Відповідно одержуємо ряд для площ вкладених трикутників:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \quad (\text{Г.3.})$$

Перевіримо виконання необхідної умови [10, с. 31- 32]:

$$(\text{Г. 1}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0;$$

$$(\text{Г. 2}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} = 0;$$

$$(\text{Г. 3}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0;$$

Необхідна умова виконується.

Дослідимо отримані ряди на збіжність. За допомогою ознаки Д'ламбера отримаємо [27, с. 20]:

$$(\text{Г. 1}): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1} \sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

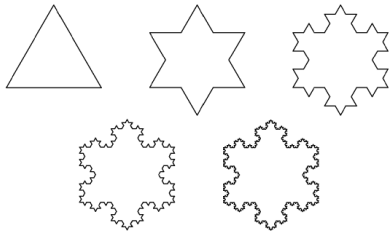
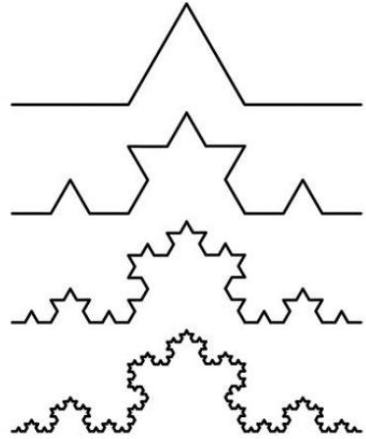
$$(\text{Г. 2}): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}}{6 \frac{\sqrt{3^n}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1} \sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 - \text{ряд збіжний};$$

$$(Г. 3): \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} \cdot \sqrt{3}}{2^{2n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{2n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{2n+3}} = \frac{1}{3} < 1 - \text{ряд}$$

збіжний;

Приклади вправ для практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди».

Таблиця Г.1.

<i>Вправи</i>	<i>Геометрична інтерпретація</i>
<p><b>Вправа Г. 1.</b> Ознайомитись із фракталом «Сніжинка Коха / Острів Коха»</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти числовий ряд, який пов'язаний із периметром фрактала.</li> <li>2. Дослідити ряд на збіжність.</li> <li>3. Зробити висновок.</li> </ol>	 <p style="text-align: center;"><i>Сніжинка Коха / Острів Коха</i></p>
<p><b>Вправа Г. 2.</b> Ознайомитись із фракталом «Крива Коха».</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти числовий ряд, який пов'язаний із відрізками фрактала.</li> <li>2. Дослідити ряд на збіжність.</li> <li>3. Зробити висновок.</li> </ol>	 <p style="text-align: center;"><i>Крива Коха</i></p>