Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск VIII

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2010

УДК 371

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск VIII : в 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2010. – Т. 1 : Теорія та методика навчання математики. – 201 с.

Збірник містить статті з різних аспектів дидактики математики і проблем її викладання у ВНЗ та школі. Значну увагу приділено питанням розвитку методичних систем навчання математики та модернізації математичної освіти в контексті орієнтирів Болонського процесу.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та педагогічних працівників.

Редакційна колегія:
В.М. Соловйов, доктор фізико-математичних наук, професор
М.І. Жалдак, доктор педагогічних наук, професор, акад. АПН України
Ю.С. Рамський, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
С.А. Раков, доктор педагогічних наук, професор
Ю.В. Триус, доктор педагогічних наук, професор
П.С. Атаманчук, доктор педагогічних наук, професор
В.Ю. Биков, доктор технічних наук, професор, чл.-кор. АПН України
О.Д. Учитель, доктор технічних наук, професор
І.О. Теплицький, кандидат педагогічних наук, доцент (відповідальний редактор)
С.О. Семеріков, кандидат педагогічних наук, доцент (відповідальний редактор)

Рецензенти:
Г.Ю. Маклаков – д-р техн. наук, професор кафедри інформаційних технологій навчання Севастопольського міського гуманітарного університету, науковий керівник лабораторії розподілених систем навчання та дистанційної освіти
А.Ю. Ків – д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізичного та математичного моделювання Південноукраїнського національного педагогічного університету ім. К.Д. Ушинського (м. Одеса)

Друкується згідно з рішенням ученої ради Національної металургійної академії України, протокол №7 від 5 березня 2010 р.

ISBN 966-8417-20-1

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АКСІОМАМ ТА ПЕРШИМ ДОВЕДЕННЯМ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ 10 КЛАСУ

О.В. Амброзяк
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
Olga27_1989@ukr.net

Геометрія, так як і арифметика, вимагає для своєї побудови лише декількох простих основних положень. Ці основні положення називаються аксіомами геометрії. Встановлення аксіом геометрії і дослідження їх взаємозв'язків – це задача, яка з часів Евкліда зводиться до логічного аналізу нашого просторового уявлення.

У результаті нагромадження все нових і нових фактів та з'ясування залежностей і зв'язків між ними формувалось поняття про геометричну теорему та її доведення, з'ясовувались твердження, які виникли з досвіду, тобто аксіоми геометрії.

Можна стверджувати, що аксіоми з'явились внаслідок логічної переробки історично нагромадженого досвіду. Люди неодноразово бачили і проводили прямі лінії, перш ніж усвідомити аксіому: «Через будь-які дві різні точки можна провести лише одну пряму».

Зміст і будову шкільного курсу геометрії в основному визначили «Початки» Евкліда. Найважливіші досягнення грецького періоду розвитку геометрії і зараз вивчаються у середній школі.

Будь-яка теорія допускає різні системи аксіом і основних понять. Існують різні аксіоматики стереометрії як математичної теорії і шкільного предмета. У більшості з них основними поняттями є точка, пряма і площина. Однак, в якості основних, вихідних тверджень про ці фігури виступають різні теоретичні посилання – системи аксіом. Одне і те ж твердження, наприклад, існування і єдиність площини, яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій, в одних викладах є аксіомою, в інших – теоремою, якщо прийняті інші аксіоми. У методологічному плані різні варіанти таких аксіоматик рівносильні. Всі вони є незамкнутими – спираються на планіметрію, на поняття дійсного числа, аксіоми в цілому відповідають логічним вимогам несуперечливості, повноти, незалежності. У науково-методологічному плані жодна з цих аксіоматик не має переваг над іншою.

Основними критеріями ефективності аксіоматики в плані навчання є не науково-методологічні вимоги, а дидактичні принципи, зокрема, вимоги наочності і простоти змісту, легкість отримання подальших висновків і їх доведень, усвідомлення аксіом як основного інструменту розгортання знань про основні стереометричні фігури, доступність для творчого самостійного «відкриття» доведень теорем на основі прийнятих систем аксіом.

На сучасному етапі розвитку науки у вищих навчальних закладах геометрію вивчають за векторною аксіоматикою.

Геометрія загальної середньої школи обґрунтовується в різних країнах різними аксіоматиками. [1, 15]

Одні з найбільших труднощів у роботі вчителів математики, а, зокрема, і студентів-практикантів, викликають питання, пов'язані з аксіоматичною побудовою геометрії і використанням геометричних перетворень.

Найперші уроки систематичного курсу стереометрії є одними з найбільш складних як для учнів, так і для вчителів, оскільки відбувається виклад абстрактного матеріалу, який є очевидним на рівні уявлень, але в той же час він є основою всієї подальшої будови теорії і досить складно правильно розставити акценти і виділити головні моменти. Крім того, великі труднощі у учнів викликає саме аксіоматична будова шкільного курсу даної дисципліни.

Часто вчителі 10–11 ласів, намагаються зекономити навчальний час на викладенні найперших вступних тем в стереометрію, що врешті-решт призводить до того, що цей час доводиться витрачати у наступних темах і розділах, оскільки неусвідомленість учнями початкових аксіом та понять тягне за собою нерозуміння подальшого матеріалу.

Нажаль, більшість вчителів сучасної школи мало часу приділяє обґрунтуванню тверджень та цікавих фактів, що не сприяє розвитку математичного мислення, тобто в учнів не виникає потреби критично ставитись до фактів і перевіряти їх строго дедуктивним шляхом. Проблема сьогоднішніх випускників шкіл полягає в тому, що своєчасно їх не навчили звертати увагу на найперші, як виявляється в результаті, основні поняття. Деякі вчителі мало уваги приділяють перевірці домашнього завдання, особливо, якщо це стосується теорії (аксіом, теорем), що пов'язано з недостатньою кількістю навчальних годин. На уроках, здебільшого, вчитель намагається навчити учнів розв'язувати задачі і їх розв'язування доводити до автоматизму, але зовсім забуваючи про те, що потрібно розглядати якомога більше різних за типом задач, оскільки саме найперші уроки стереометрії сприяють розвитку логічного мислення, інтелектуальних вмінь та творчих здібностей учнів.

Взагалі, навчанням стереометрії в школі повинні досягатися дві мети: пізнання учнями властивостей абстрактних просторових форм оточуючого світу і навчання їх логічно міркувати, аргументувати свої переконання, доводити теореми. В результаті повинна бути досягнута єдність сформованих в учнів наочних уявлень про властивості реального простору із строгою логікою обґрунтування цих властивостей. При цьому не повинна ставитись мета навчання учнів аксіоматичним доведенням, а поступове, глибоке оволодіння учнями ідеєю логічної упорядкованості геометричних фактів, їх наукового взаємозв'язку.

Оскільки з поняттям аксіоми учні вже знайомилися на перших уроках курсу планіметрії, де аксіомою називали твердження про властивості найпростіших фігур, яке домовились приймати без доведення, то варто у стереометрії пригадати вже отриманні знання про аксіоми та теореми.

До перших уроків стереометрії ми відносимо ті, які стосуються першої теми курсу – «Аксіоми стереометрії, їх найпростіші наслідки». Слід мати на увазі, що при вивченні перших уроків, учні натрапляють на труднощі, на котрі звертали увагу свого часу О.М. Астряб і Д.М. Майєргойз. Оскільки перші теми курсу в основному своєму викладі залишаються традиційними, то висловлені зауваження є актуальними і нині. Йдеться про труднощі, пов'язані передусім з недостатнім розвитком в учнів просторових уявлень та уяви, значною абстрактністю навчального матеріалу порівняно з планіметричними, перевантаженістю теоремами, в тому числі і дрібними, наявністю багатьох аналогій і відмінностей між відповідними поняттями і твердженнями планіметрії і стереометрії.

З метою зменшення першої із зазначених труднощів учитель повинен використовувати наочність, зокрема стереометричний ящик або сучасні його модифікації. Зменшити другу трудність (абстрактність навчального матеріалу) дасть змогу конкретизація вчителем означень, аксіом і теорем їх різноманітними застосуваннями в навколишньому житті та техніці. Перевантаженість теорем і їх доведень вчитель може зменшити, якщо зосередить увагу учнів на вузлових твердженнях, які будуть часто потрібні надалі.

Щодо аналогій і відмінностей у навчальному матеріалі планіметрії і стереометрії, то вчитель повинен скористатися тими аналогіями, які дають змогу учням краще усвідомити і запам'ятати факти із стереометрії, і застерегти учнів від тих аналогій, які можуть призвести до помилок.

Основна мета вивчення першої теми – повторення аксіом планіметрії і засвоєння учнями аксіом стереометрії. Учні повинні знати аксіоми стереометрії і основні наслідки з них, вміти застосовувати їх при розв'язуванні задач. Як і на перших уроках планіметрії, вимога все доводити є посиланням на аксіоми і доведені раніше теореми тут обов'язкова [2, 441–442].

У 10 класі на першому уроці стереометрії можна дещо розширити інформацію про аксіоми. Варто підкреслити, що ці твердження домовилися прийняти без доведення. Залежно від особливостей вибору первісних понять і побудови курсу геометрії за аксіому можна вибрати твердження, яке в іншому курсі доводиться.

Поняття про теорему і доведення вчителю доводиться нагадати перед доведенням першої теореми з метою свідомого сприйняття самого способу доведення та його необхідності.

Велику увагу варто приділити наочності як засобу ефективного усвідомлення та засвоєння матеріалу. Тому ми пропонуємо ілюструвати доведення складних тверджень в тексті підручника не одним рисунком, як прийнято в діючому підручнику, а поступовими проміжними рисунками до змістовних кроків. Крім того, доцільно перед вивченням теми або доведенням теореми окреслити учням перспективу для того, щоб сприйняття матеріалу було свідомим і концентрувалася увага.

Велику роль у даному процесі відіграє активна участь учнів у доведенні та обговоренні плану доведень, оскільки це сприяє швидшому усвідомленню та запам'ятовуванню матеріалу.

Тобто, умовами успішного навчання системі аксіом стереометрії і першим доведенням на їх основі є наявність належного матеріального забезпечення: опорна блок-схема розгортання змісту (аксіоми, безпосередні наслідки з них та теореми-наслідки); подання доведення теореми як послідовності умовиводів, ілюстрування кроків доведень послідовними динамічними рисунками; плани (схеми) доведень теорем як опори для самостійного їх проведення, тощо.

Ще однією складовою ми вбачаємо розширення задачного матеріалу та впровадження його між теоретичними відомостями. Найчастіше, при вивченні аксіом стереометрії, вчителі викладають теоретичний матеріал та розв'язують письмові задачі, яких, до речі, дуже мало. Ми вважаємо, що доцільно кожну аксіому підкріплювати розв'язуванням усних вправ на застосування аксіом, що сприятиме розвитку просторової уяви, просторової орієнтації, і знову ж таки, глибшому усвідомленню теоретичного матеріалу. Головним завданням вчителя є забезпечення того матеріалу, який допоможе учням на початку вивчення тренувати просторову уяву. Так, на перших уроках вчитель може демонструвати моделі до задач, просити учнів показати на предметах, як вони уявляють умову і висновок до задачі.

Значну роль у кращому засвоєнні такого досить абстрактного матеріалу відіграє інтерпретація теоретичного матеріалу на практичну сферу. Мається на увазі, що на початку вивчення теми варто оперувати абстрактними поняттями (точки, прямі, площини), потім – поняттями оточуючого світу, і як узагальнення – знову абстрактними поняттями як підсумок раніше вивченого.

Учням необхідно давати змогу знаходити у кожній темі прикладну спрямованість, що дає змогу виробити особистісне ставлення, усвідомити її необхідність для кожного окремого учня. Так, доцільно запропонувати учням скласти свої задачі, які ілюструють аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них. Варто зауважити, що краще складати нестандартні задачі, які мають вихід у реальне життя, оскільки стереометрія, як і вся геометрія, описує моделі реального світу.

Крім того, задачі до перших уроків стереометрії у старшій школі не зводяться до простого стандартного застосування системи аксіом та їх наслідків. Мова йде про те, що найбільш цікавими та корисними задачами даного розділу є задачі на уявлювані побудови, тобто такі задачі, які передбачають побудову логічного ланцюжка міркувань, який веде до уявної побудови шуканого об'єкта. Складність таких задач для учнів полягає в тому, що ілюстративні рисунки майже виконуються після усного формування такого ланцюжка, і як правило, вони не несуть змістовної інформації, яка б допомагала у процесі розв'язування. Тому учням необхідно мати розвинуті творчі здібності та просторову уяву для того, щоб уявити та промоделювати взаємне розміщення заданих та шуканих елементів, допоміжних складових та ін.

Отже, питання аксіоматичної будови шкільного курсу геометрії, зокрема і геометрії, вирішено досить давно, але вагомим і актуальним залишається питання раціонального викладання матеріалу. Саме тому кожен вчитель старших класів має змогу вільно викладати аксіоми стереометрії та наслідки з них, але при цьому будь-який вчитель повинен знати особливості аксіоматичної будови геометрії, вимоги до аксіоматики (як науково-методологічні, так і дидактичні) та подальшу перспективу розвитку навчального матеріалу.

Література

1. Александров А. Д. Основания геометрии : учебн. пособие для вузов / Александр Данилович Александров. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 288 с.

2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – К. : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.: іл.

МОЖЛИВОСТІ РОЗВИТКУ ПРОСТОРОВИХ УЯВЛЕНЬ УЧНІВ У ПРОПЕДЕВТИЧНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Н.В. Богатинська, Л.О. Черних
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
andrushchenko83@mail.ru

Основна мета навчання геометрії в школі – розвиток геометричного мислення учнів і всіх його компонентів. Ця мета конкретизується у завданнях, кожне з яких відображає спрямованість на певний компонент геометричного мислення. Розвиток просторових уявлень і уяви – одне з найважливіших завдань шкільного курсу геометрії. Чим вищий рівень розвитку просторових уявлень учнів, тим скоріше і більш глибоко відбувається засвоєння ними системи геометричних знань.

Аналіз стану математичних знань вказує на наявність істотних і стійких недоліків у геометричних знаннях учнів. Неглибоке засвоєння основних геометричних понять, відсутність у багатьох з них навичок розв'язування нескладних геометричних задач пов'язане перш за все з недостатньо розвиненими просторовими уявленнями школярів.

Логіка геометричної частини програми з математики для I–VI класів цілком зрозуміла: підготувати учнів до вивчення складного систематичного курсу геометрії. Якщо вивчення геометричного матеріалу буде відбуватися лише на рівні ознайомлення з термінологією і з примітивними побудовами, якщо неураховувати можливості і інтерес до геометричної діяльності учнів цього віку, значний багаж їх уявлень про оточуючий світ, то таке навчання мало що може внести в розвиток їх геометричного мислення.

Протягом перших шести років навчання учні ознайомлюються з порівняно невеликою кількістю геометричних термінів, в той час як лише в першому параграфі курсу геометрії VII класу «Основні властивості найпростіших геометричних фігур» учням доводиться ознайомлюватися майже із сотнею нових термінів, серед яких: назви фігур та їх елементів; терміни, що означають відношення і властивості; назви приладів, інструментів. Це дуже переконливий приклад «перестрибування» з одного рівня розвитку геометричного мислення на інший, порушення принципів наступності і послідовності навчання.

Перехід від одного рівня розвитку геометричного мислення до іншого не є процесом мимовільним. Розвиток, що веде до вищого рівня, проходить під впливом навчання, а тому залежить від змісту і методів цього навчання. Такий перехід потребує певного часу, проте різні методики навчання дозволяють регулювати цей час.

Програма геометрії старших класів в значній мірі базується на запасі просторових уявлень і конструктивних навичок, сформованих в пропедевтичному курсі геометрії.

Найбільш ефективними засобами розвитку просторових уявлень є: демонстрації фігур та їх взаємного розташування; моделювання; побудови зображень фігур; робота з рисунками. Ці засоби приводять до найкращих результатів, якщо вони використовуються систематично і в комплексі.

Можна, наприклад, вивчаючи поняття «прямокутник» в другому класі, обмежитися виконанням рисунка на дошці. А можна, крім цього, запропонувати учням виділити прямокутники серед інших плоских фігур; показати прямокутники на моделях різних просторових фігур; показати кути цих прямокутників і дати їм назву; виміряти довжини сторін, порівняти їх і зробити відповідний висновок; розрізати паперову модель прямокутника певним способом і скласти з одержаних частин нову геометричну фігуру і таке інше. Часто учні вміють знаходити многокутники на рисунках, розрізнити один від одного, але при цьому не бачать, що дошка, вікно, стіни класної кімнати мають форму прямокутника. Тому на кожному уроці необхідно шукати і виявляти зв'язки між плоскими, просторовими геометричними фігурами і об'єктами оточуючої дійсності. Так організоване вивчення геометричного матеріалу в I–VI класах сприяє ознайомленню учнів з великою кількістю геометричних об'єктів. Уявлення про геометричні фігури міцні, якщо учні набувають їх не при пасивному спогляданні, а внаслідок активної навчальної діяльності.

Формуванню просторових уявлень молодших школярів сприяє і належним чином підібрана система вправ. Аналіз геометричного матеріалу курсу математики I–VI класів дав нам можливість виділити основні види таких вправ:

I. Вправи на порівняння (порівняння довжин відрізків, площ фігур). Наведемо приклади таких вправ: 1. Виміряйте смужки і дізнайтеся, на скільки сантиметрів довжина червоної смужки більша за синю. 2. Виміряйте сторони трикутників, зображених на рисунку. У яких трикутників є рівні сторони? 3. Виміряйте довжину кожної сторони чотирикутника. Покажіть сторони, довжина у яких однакова. 4. Порівняйте площі трикутника АВС і круга; квадрата і п'ятикутника АВСДЕ (рис. 1). 5. Порівняйте площі різних квадратів. Порівняйте довжини сторін цих квадратів.

II. Вправи на розпізнавання. Цей вид вправ спонукає учнів уявляти фігуру, виділяти ті властивості, які дають можливість відшукати її серед множини інших фігур, розвивають «геометричну зоркість» учнів, формують уміння орієнтуватись в складних конфігураціях. Наведемо приклали таких вправ: 1. Знайдіть на рисунку трикутники, чотирикутники, п’ятикутники. 2. Знайдіть прямі кути (рис. 2). 3. Знайдіть на кожному рисунку відрізок, який ділить чотирикутник АВСД: а) на два чотирикутники; б) на чотирикутник і трикутник (рис. 3). 4. Знайдіть на рисунку 4 п’ять чотирикутників. Які з них є прямокутниками?

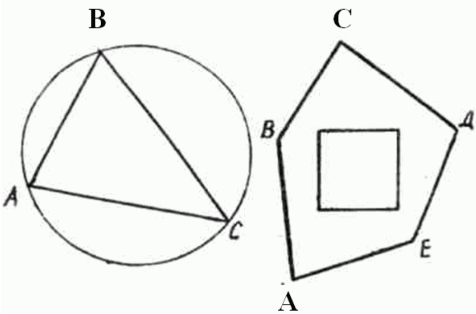


Рис. 1

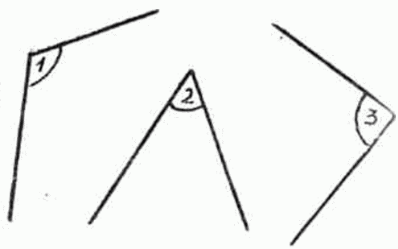


Рис. 2

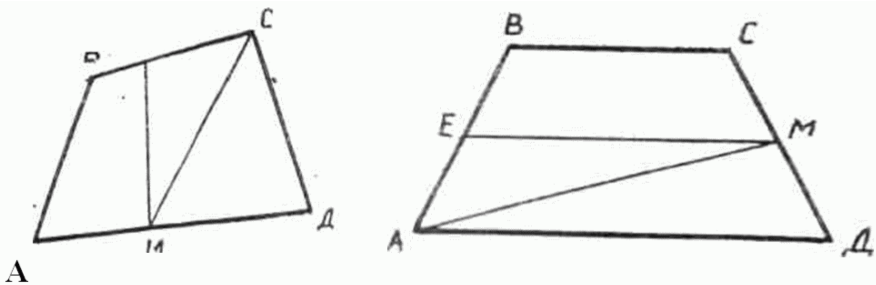


Рис. 3

III. Вправи на взаємне розміщення геометричних фігур. Приклади.

1. Накресліть квадрат і трикутник так, щоб трикутник увесь був усередині квадрата.

2. Розгляньте рисунок і випишіть назви всіх трикутників, що містять кут А; випишіть назви всіх фігур, для яких сторона ЕД є спільною (рис. 5).

IV. Вправи для моделювання. Вони є особливо корисними для тих учнів, просторові уявлення яких піддаються розвитку досить повільно. Приклади таких вправ: 1. Накресліть трикутник і виріжте два таких трикутники. Складіть з них один трикутник і різні чотирикутники. 2. Накресліть прямокутник. Проведіть у ньому один відрізок так, щоб утворився квадрат. 3. Накресліть і виріжте такі три прямокутники, щоб з них можна було скласти один квадрат.

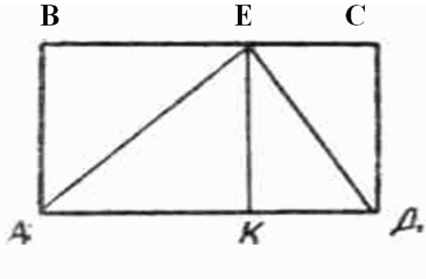


Рис. 4

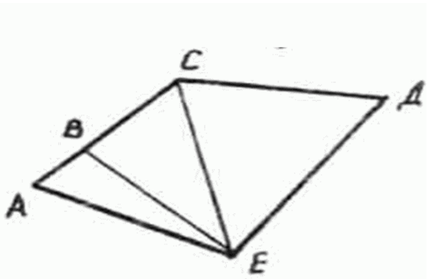


Рис. 5

Дослідження психологів, дидактів, досвід роботи вчителів-новаторів переконливо свідчать про те, що учні I–VI класів можуть бути озброєні міцними геометричними знаннями без дедуктивної формалізації при їх формуванні. Цей період може стати початком вивчення систематичного курсу геометрії. Цілеспрямоване і всебічне ознайомлення учнів із різноманітними геометричними об'єктами та їх відношеннями дає змогу на кінець VI класу досягнути досить високого рівня розвитку геометричного мислення. На цьому рівні учень починає розрізняти елементи фігур, встановлює відношення між ними, тобто аналізує фігури, що сприймаються. Це відбувається у процесі спостережень, вимірювань, побудов, моделювання.

Отже, готуючись до уроків математики, вчителю необхідно ретельно підбирати систему вправ, володіти такою методикою навчання, яка б забезпечувала формування основних знань, умінь, навичок. Планомірна і систематична робота над такими вправами допомагає розвитку просторових уявлень учнів, сприяє підготовці їх до вивчення систематичного курсу геометрії.

Література

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Бевз Г. П. – К. : Вища школа, 1977. – 375 с.

2. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики / Груденов Я. И. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

3. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений : кн. для учителей / Литвиненко В. Н. – М. : Просвещение, 1991. – 127 с.

4. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / Слєпкань З. І. – К. : Зодіак–ЕКО, 2000. – 510 с.

ПОГЛИБЛЕННЯ КУЛЬТУРОЛОГІЧНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

А.І. Дзундза, Н.М. Лосєва
м. Донецьк, Донецький національний університет
mian@i.ua

Однією із провідних сучасних тенденцій розвитку вищої освіти є її гуманітаризація. Загальновідомо, що технократична орієнтованість професійної освіти була поставлена під сумнів педагогічною спільнотою ще наприкінці 80-х років минулого сторіччя. «Саме гуманітарне мислення надає можливості перебороти технократичне і вузькопрофесійне мислення, виховує духовно багату особистість, орієнтовану на загальнолюдські культурні цінності» [5].

Необхідність посилення загальнокультурної спрямованості професійної освіти спрямувала наукову педагогічну думку в бік орієнтації навчання на особистість, на її численні зв'язки з оточуючим середовищем, на формування різних граней культури особистості студента. Це великою мірою стосується посилення культурологічної спрямованості фундаментальної освіти (в тому числі і математичної).

За всіх часів математична освіта грала безперечну культурну роль у соціальному, науковому, технічному і економічному розвитку. Фахівці, які досконало володіють математичними методами завжди становили стратегічний ресурс нації. У зв'язку зі зростаючою роллю математичних теорій наразі надзвичайно велика кількість майбутніх інженерів, економістів, соціологів, організаторів сучасного виробництва відчувають суттєвий культурний вплив математики, що підвищує рівень якостей мислення, виховує цінності самостійного наукового пошуку. Отже, математика – одна з сфер знання, яка має велике загальнокультурне значення. Очевидні чинники цього – у широкому використанні математичних моделей не тільки в різноманітних природничих науках і техніці, але і у виробництві, управлінні, економіці, сфері побуту.

Значне поширення останнім часом одержали математичні методи в сферах, традиційно далеких від математики. Можливості комп'ютерної техніки тільки підсилили особистісний вплив математики і розширили межі її застосування. Тому знання, уміння і навички, здобуті у процесі математичного навчання, є важливим елементом загальнокультурної і професійно-орієнтованої підготовки студентів. Виховні можливості фундаментальної математичної освіти ґрунтуються на «необхідності сприйняття студентами математики як важливого методу світопізнання, формування уявлень про математику як частину загальнолюдської культури, посилення практичного і прикладного аспектів у її викладанні» [5].

Наразі, у науково-педагогічній літературі відбувається широке обговорення проблем виховних і розвивальних можливостей фундаментальної математичної освіти. М. Каган відносить математику разом з філософією до культурологічних наук. Вчений вважає, що головним спрямуванням культурологічних наук є «пізнання людини, що переборює однобічне вивчення індивіда тільки як природної, біологічної істоти, або тільки як носія якоїсь соціальної функції, або тільки як зберігача культурної інформації...» [4].

В. Крутецький пов'язує «математичний» розвиток людини з розвитком загальної культури особистості. На його думку, вивчення методів математичного пізнання розкриває універсальність форм вивчення дійсності, актуалізує математику як частину загальнолюдської культури. Оскільки математика найчастіше вивчає лише абстрактні поняття, створені розумом людини, то це дозволяє відносити її до наук про людський дух, іншими словами, до культурологічних наук [7]. Дотримуючись цих поглядів, спрямованість на виховну і розвивальну функцію фундаментальної математичної освіти ми вважаємо підґрунтям загальнокультурного і професійного розвитку майбутніх фахівців.

Аналіз науково-педагогічної літератури дозволяє нам дійти висновку, що культурологічна спрямованість фундаментальної математичної освіти може бути забезпечена через підсилення гуманітарних компонентів змісту математичного навчання у вищій школі. Так, В. Зінченко доводить, що до змісту математичної освіти необхідно включати знання про людину, природу, суспільство, мислення, способи діяльності, «застосувати у викладанні математичних дисциплін елементів і методів гуманітарного знання з метою розвитку креативних здібностей» [2]. Вчений необхідним компонентом змісту фундаментальної освіти вважає досвід комунікативної, розумової, емоційної діяльності, йдеться про систему заходів, спрямованих на пріоритетний розвиток загальнокультурних компонентів у змісті освіти і, таким чином, на формування особистісної зрілості студентів [2].

Низка науково-педагогічних досліджень присвячено розробці умов реалізації культурологічної функції фундаментальної математичної освіти через забезпечення міжпредметних зв'язків, професійно-прикладної спрямованості математичних дисциплін, виховання мовної культури студентів, залучення історичних фактів і відомостей. Так, М. Віленкин відзначав, що існує необхідність вирішити проблему поглиблення гуманітаризації курсу математики, «зокрема, включення до нього відомостей з історії розвитку математики, її застосувань до соціально-економічних наук» [1].

Т. Іванова вважає, що підсилення культурологічного впливу математичної освіти на особистість студента повинне ґрунтуватися на засвоєнні особистістю гуманітарних аспектів фундаментальних знань. Тому важливим завданням фундаментальної освіти є перетворення суспільно значимих цінностей освіти, зокрема і математичної, у особистісно значимі цінності для кожного студента. Гуманітарний потенціал математичного навчання автор вбачає у зв'язках з іншими науками, у математичній мові, у специфіці творчої математичної діяльності, у методах наукового пізнання, у культурі математичного мислення [3].

Отже, вивчення людини, гуманітарної сфери її діяльності як об'єкта математичного пізнання мусить мати велике емоційне забарвлення для студента, підсилювати світоглядну орієнтацію фундаментальної математичної освіти, сприяти формуванню елементів загальної культури особистості та її окремих проявів, розвитку різноманітних професійно-спрямованих здібностей майбутніх фахівців.

На наш погляд, посиленню культурологічної спрямованості фундаментальної математичної освіти сприяє активне застосування в навчанні математичного моделювання. Наразі інтенсивно розвиваються методи математичного моделювання в галузі економіки, фінансів, менеджменту. Знайомство студентів з цими аспектами додатків математики створює умови для реалізації широкого спектра міжпредметних зв'язків. Застосування математичних методів у соціальних проектах, що визначають майбутність нашої держави: управління фінансовими ризиками, планування господарства, оптимізація шляхів сполучення, модернізація сільськогосподарських підприємств, екологічна безпека тощо, безумовно актуалізують культурний і світоглядний потенціал математичної освіти.

Зупинимося на ціннісному аспекті культурологічної спрямованості математичної освіти. Правильно проаналізувати професійну проблему, оцінити і виділити найбільш істотні дані, вибрати оптимальний спосіб її рішення дозволяє математичний підхід до проектування моделі, розумова кмітливість, фантазія і почуття гармонії. Тому важливою культурною цінністю математики є цінність наукової гармонії.

Ефективним джерелом ціннісного розвитку можуть виступати різні сфери діяльності студента, пізнавальний і особистісний досвід. М. Кларін вважає, що ціннісна сфера особистості може формуватися або під час інтелектуально-пізнавального пошуку, або в процесі комунікативно-діалогічної діяльності, якщо вона веде до створення власної життєвої позиції; або в сфері емоційно-особистісних проявів під час пошуку ціннісних аспектів різних дій і відношень [6]. Можливості ефективної реалізації цих видів діяльності, безумовно, надає відповідна організація математичного навчання.

Отже, формування відношення майбутніх фахівців до математичного знання як до культурної цінності аналізується нами в аспекті становлення низки особистісних характеристик студентів. Тому технології навчання, які поглиблюють культурологічну спрямованість математичної освіти, повинні орієнтуватися на многовимірність професійно-орієнтованого культурного середовища. Викладач, який це усвідомлює, сам повинен виявити себе як творчий суб'єкт. Важливо при цьому зберегти головний, на наш погляд, принцип особистісного підходу – актуалізацію особистісної життєвої позиції студента, як суб'єкта і об'єкта культурного впливу, у всіх видах навчально-виховної діяльності.

Література

1. Виленкин Н. Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты / Виленкин Н. Я. // Математика в школе. – 1988. – №4.

2. Зинченко В. П. Гуманитаризация образования / Зинченко В. П. // Российская педагогическая энциклопедия. – М., 1993. – Т.1.

3. Иванова Т. А. Гуманитаризация общего математического образования : монография / Иванова Т. А. – Нижний Новгород : Изд-во НГПУ, 1998.

4. Каган М. С. Философия культуры / Каган М. С. – СПб. : Метрополис, 1996.

5. Концепція базової математичної освіти в Україні. – К. : Міністерство освіти України ; Інститут системних досліджень освіти, 1993.

6. Кларин М. В. Обучение на основе целостного личностного опыта / Кларин М. В. // Современная школа: проблемы гуманизации отношений учителей, учащихся и родителей. –М., 1993. – Ч. 1.

7. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / Крутецкий В.А. – М. : Наука, 1968. – 432 с.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОПТИМІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

О.Ю. Дюженкова
м. Київ, Національний університет біоресурсів і природокористування України
oduzen@yandex.ru

Останнім часом зменшується кількість аудиторних годин при вивченні вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей. При цьому передбачається збільшення годин на самостійне опрацювання матеріалу. Однак, в сучасній системі освіти України є багато негативних тенденцій, які ускладнюють процес збільшення самостійної роботи у навчальному процесі. Зокрема, бажання отримати вищу освіту досить часто обумовлене не бажанням оволодіти знаннями, а необхідністю отримати відповідний диплом для працевлаштування. І в цьому винні не стільки студенти, скільки стан сучасної системи освіти в нашій країні. Іноді якість викладання дисциплін у вищій школі відбиває бажання вчитись навіть у тих, хто прийшов до вузу отримати необхідні знання для подальшої професії. Враховуючи зниження рівня знань абітурієнтів та небажання вчитися, досить складно очікувати від студентів плодотворної самостійної роботи.

У радянській системі освіти велика увага приділялась саме професійній роботі педагогів під час аудиторних занять. Але відійшовши від тієї моделі викладання, ми нічого кращого не запропонували. На жаль, перехід до Болонської системи в навчальному процесі часто зводиться до формального використання рейтингової системи та тестового оцінювання знань. При цьому викладач більше часу витрачає на заповнення різної документації, підрахунку балів, складання різноманітних тестів, ніж на якісну підготовку до аудиторних занять. Не можна недооцінювати важливість спілкування викладача зі студентом як на заняттях, так і на екзамені. У першу чергу це необхідно для якісного засвоєння матеріалу, оскільки для виявлення помилок як у роботі студента, так і викладача необхідний безпосередній контакт між ними. Зменшення кількості аудиторних годин вимагає більшої ефективності викладання матеріалу. Розглянемо деякі аспекти, що сприяють оптимізації навчального процесу.

У першу чергу, викладання вищої математики студентам нематематичних спеціальностей вимагає серйозної **мотивації та аргументації** матеріалу. Напевно викладачі неодноразово чули від студентів питання: «Де ми будемо використовувати цей матеріал у нашому житті?» Очевидно, що це питання додає клопоту не одному викладачу, особливо, коли часу мало, матеріал складний, а бажання його опанувати у студентів відсутнє. Для того, щоб таких питань було якомога менше, потрібно стимулювати вивчення математики із самого початку. Вже на першій лекції треба націлювати студентів на необхідність базових математичних знань, отримання яких, в першу чергу, потрібно для того, щоб орієнтуватись в сучасному інформаційному просторі.

Протягом вивчення всього курсу вищої математики треба розкривати роль та місце математики, яка в сучасному суспільстві є важливим інструментом аналізу, організації та управління певними процесами. При цьому доцільно використовувати різноманітні прийоми, навіть найпростіші. Виділяючи на кожній парі хоча б п’ять хвилин на мотивацію, можна отримати непоганий результат. Треба звертати увагу на ті життєві ситуації, на ті повсякденні задачі, вирішення яких вимагає застосування математичних знань. У процесі вивчення математики студент повинен навчитись логічно мислити, розуміти суть задач, виділяти основне та оперувати абстрактними поняттями. Зокрема, при вивченні систем лінійних рівнянь можна розглянути просту практичну задачу на використання ресурсів при виготовленні продукції (пошиття одягу із певної кількості матеріалу). При цьому студенти вчаться не тільки розв’язувати системи рівнянь, а й складати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів та використовувати одержані результати.

Одним із важливих засобів якісного вивчення математики є **ефективне подання теоретичного матеріалу.** Цьому сприяють опорні конспекти, в яких викладено суть: основні поняття, їх властивості та застосування. Розглядаючи нові поняття, необхідно висвітлювати їх зв’язок з поняттями, що вивчались раніше. Потрібно відслідковувати логічний ланцюжок між поняттями, зокрема «границя – похідна», «похідна – інтеграл», «границя – ряд», «інтеграл – диференціальне рівняння» тощо. Доцільно використовувати різні прості прийоми, що скорочують час при вивченні основних алгоритмів. Наприклад, при знаходженні оберненої матриці алгебраїчні доповнення елементів зручно обчислювати по рядках, після чого записавши їх у стовпчиках приєднаної матриці, щоб потім окремо її не транспонувати. Такі «дрібниці» можна використовувати для багатьох понять, суттєво скорочуючи час на їх вивчення. Головне, щоб при вивченні теоретичного матеріалу студенти розуміли суть розглянутих понять. Зокрема, при вивченні поняття похідної часто виникають труднощі з її означенням. Але основне, щоб студенти розуміли, що похідна – це швидкість зміни функції (швидкість протікання певного процесу). Одним із суттєвих моментів є розуміння відмінності між необхідними та достатніми умовами. Наприклад, при вивченні числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ важливо показати, що необхідну умову збіжності ряду $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ можна використовувати тільки для доведення розбіжності ряду. Якщо ж умова виконується, то треба проводити подальші дослідження. Проілюструвати це легко за допомогою гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, для якого виконується необхідна умова збіжності, але ряд є розбіжним.

Для якісного засвоєння теоретичного матеріалу необхідно ілюструвати основні математичні поняття **достатньою кількістю різноманітних задач.** В першу чергу доцільно розглянути **усні вправи**, які потребують розуміння суті основних понять і привчають до опрацювання теоретичного матеріалу. Зокрема, такий підхід реалізовано в навчальних посібниках [1], [2], де усні вправи наведені в кінці кожного параграфа. Оскільки основні алгоритми відпрацьовуються за допомогою типових задач, то на їх розгляд виділяється найбільше часу. Проте вдало підібрані **типові задачі** дають змогу не тільки засвоїти теоретичний матеріал, а й сприяють формуванню дослідницьких навичок. Наприклад, при знаходженні похідної складеної функції важливо відпрацювати поняття зовнішньої та внутрішньої функцій. Для цього варто розглянути обчислення похідних таких функцій $y=\ln^5 x$ і $y=\ln x^5$, $y = \sqrt{arctgx}$ і $y = arctg\sqrt{x}$.

При викладанні вищої математики студентам різних спеціальностей необхідно враховувати професійну спрямованість курсу. Цьому сприяють задачі прикладного характеру, що навчають студентів будувати математичні моделі реальних явищ сучасного світу. Зокрема, правильний вибір математичної моделі для майбутніх фахівців-аграріїв дає змогу розв'язувати задачі оптимального використання ресурсів, отримання найбільшого врожаю при найменших витратах тощо. Крім того, достатня кількість **прикладних задач** є необхідною складовою мотивації та стимулювання вивчення вищої математики. Більшість основних математичних понять можна проілюструвати задачами практичного змісту (див. [1], [2], [4]). Зокрема, при вивченні похідної функції можна розглянути велику кількість фізичних, хімічних, економічних та сільськогосподарських задач, що є важливим для майбутніх фахівців. Студентам сільськогосподарських спеціальностей можна запропонувати таку задачу. *Відомо, що витрати (у грн.) на відгодівлю свиней у фермерському господарстві виражаються функцією* $f(x)=1320+800x+0{,}12x^2$, *де* x *– валовий приріст ваги (у центнерах). Знайти мінімальну собівартість S* *одного центнера, якщо* $S = \dfrac{f(x)}{x}$.

Для того, щоб студенти вміли орієнтуватись не тільки в окремо викладеному матеріалі, а й могли застосовувати раніше вивчені алгоритми в різних розділах вищої математики, корисно використовувати **комбіновані задачі**. Їх можна розв’язувати після вивчення кількох розділів вищої математики, зокрема, елементів лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу. Велику кількість таких задач (на використання відомих алгоритмів) наведено в дидактичних матеріалах [3]. Наприклад, можна розглянути таку задачу.

Обчислити інтеграл $\int_a^b \sin^3 x dx$, де $a = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, b – внутрішній кут при вершині B у трикутнику з вершинами A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) і C(3; –2; 1).

Варто відзначити ще один суттєвий засіб – це **обмін викладацьким досвідом**. Кожен викладач в процесі своєї роботи набуває певних професійних навичок, які можуть бути корисними для інших. Звичайно, дуже важливою для обміну досвідом є участь у науково-методичних конференціях. На жаль, більшість викладачів не має змоги брати участь у таких конференціях, тому достатню увагу треба приділяти методичним семінарам в межах кафедри, факультету, університету. Крім того, такі семінари сприяють висвітленню міжпредметних зв’язків, врахування яких є необхідною складовою викладання вищої математики.

Література

1. Дюженкова Л. И. Практикум по высшей математике: учебное пособие (в 2-х частях) / Дюженкова Л. И., Дюженкова О. Ю., Михалин Г. А. – Ч. 1 – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 448 с.

2. Дюженкова Л. И. Практикум по высшей математике: учебное пособие (в 2-х частях) / Дюженкова Л. И., Дюженкова О. Ю., Михалин Г. А. – Ч. 2 – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 468 с.

3. Державний екзамен з математики і методики навчання математики : дидактичні матеріали. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – 88 с.

4. Баврин И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике / Баврин И. И. – М. : Просвещение, 1999. – 80 с.

ОРГАНІЗАЦІЯ СИСТЕМИ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ

В.П. Кисільова-Біла
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
VP_Kiseloyva@mail.ru

Одним із основних завдань вивчення математики у вищому педагогічному закладі на основі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання» є забезпечення природничо-наукової підготовки фахівця. Мета сучасної математичної освіти студента має концептуальний напрям, який полягає у посиленні ролі математики у загальному розвитку людини.

Зміст математичної освіти майбутнього вчителя початкових класів формується з урахуванням класичних теоретичних основ математики, тенденцій розвитку науки, техніки, технології та культури, сучасного розуміння закономірностей побудови світу і ролі людини в ньому.

Навчальна дисципліна «Математика» включає одинадцять змістових модулів, на вивчення яких передбачено 216 годин. Із них: теоретична підготовка – 70 год.; практичні заняття – 88 год.; самостійна робота – 58 год. Засвоєння змісту матеріалу навчального курсу «Математика» контролюється шістьма заліковими кредитами.

Дослідники питання змісту математичної підготовки студентів у вищих педагогічних закладах звертають увагу на суттєве зниження її обсягу [5]. Якщо порівняти обсяг аудиторної математичної підготовки студентів спеціальності «Початкове навчання» за 30 останніх років, то він знизився у середньому на 41,5%, що наочно показано на графіку (рис. 1).

Виділені на графіку 180 аудиторних годин, які зафіксовані у 2005 році, є граничним *максимальним* показником аудиторного навантаження, а *мінімальний* показник, відповідно до нормативів Державного стандарту, може становити 90 аудиторних годин. У цьому випадку зниження обсягу може сягати 67% порівняно з 1980 роком.

Навчальний курс математики для студентів педагогічного факультету має складну будову. Він охоплює досить різні математичні напрями, які не прийнято поєднувати в межах одного навчального предмета. Це: елементи теорії множин, елементи математичної логіки, числові системи, арифметика цілих невід'ємних чисел, елементи алгебри, теорії функцій та геометрії. У кожному із цих розділів є свої специфічні поняття і операції. Суттєві понятійні і операціональні відмінності кожного з цих розділів спричиняють труднощі структурно-логічного порядку у забезпеченні ідейної єдності курсу математики за умови одночасного збереження методологічних чинників у межах кожного розділу.

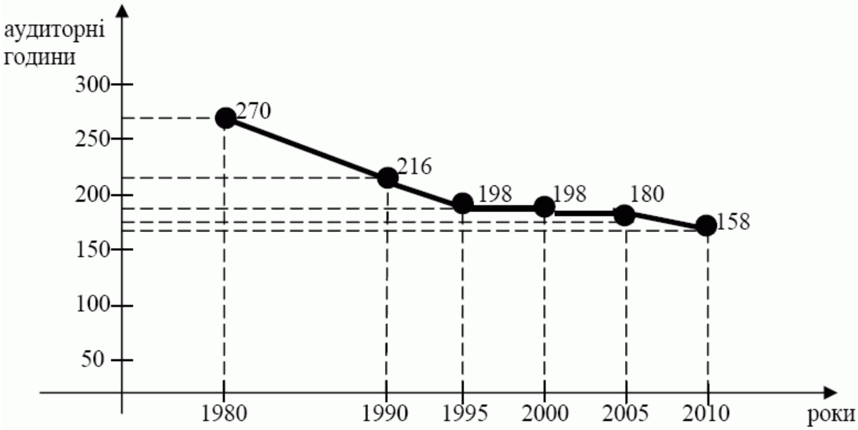


Рис. 1. Зміна обсягу математичної підготовки студентів педагогічних факультетів ВНЗ

Ми поділяємо думку Є. Лодатка про те, що недостатність ресурсу навчального часу не дозволяє додати до визначених Держстандартом змістових ліній необхідні з точки зору математики змістовно-логічні компоненти так, щоб можна було забезпечити певну наступність у переході від одного змістового модуля до іншого, щоб можна було дійсно доказово вивчати математичні твердження, положення і доказово, обґрунтовано приходити до принципово важливих висновків, фактів, уникати фрагментарності змісту матеріалу: «у математиці неможливо знати лише окремі теми, оскільки це предмет безперервний» [5, 39].

Отже, недостатній обсяг навчального часу, відведений на вивчення цієї дисципліни, перешкоджає вивчати його на логічно прийнятій побудові навчального курсу, який завжди був характерним для математики. Відбувається штучне «спрощення» математичного змісту, його перекручування, підміна загальноприйнятих процедур міркування такими, які не характерні для математики. Розуміючи, що опанування студентами спрощеного «під них» навчального матеріалу позбавляє їх можливості математичного розвитку, формує спотворені уявлення про математику і математичні методи, ми прийняли рішення відшукати вихід із цієї ситуації в *системі організації самостійної роботи з математики*. Тим паче, що за Типовим навчальним планом спеціальності «Початкове навчання» біля 30% часу, відведеного на вивчення курсу математики, передбачено на самоосвіту, яка ґрунтується на самостійній роботі студентів. Зміст і обсяг самостійної роботи студентів з математики ускладнюється сьогодні не лише тими прогалинами у структуруванні цієї навчальної дисципліни, про що писали вище, а й умовами перехідного періоду до кредитно-модульної системи навчання. Ми поділяємо думку тих науковців, методистів з математики, які вважають, що сприяти ліквідації того становища, яке склалося сьогодні з вивченням такої навчальної дисципліни як математика на педагогічних факультетах ВНЗ, можливо завдяки достатньому рівню сформованості самостійності студентів в їхній навчальній діяльності. Саме завдячуючи достатньому рівню сформованості самостійності лекційно-практична система зможе виконати свою функцію за призначенням – як основна форма організації вивчення математики у ВНЗ.

Самостійна пізнавальна діяльність сучасного студента вищого навчального закладу є надзвичайно значущою, без неї неможливе становлення майбутнього висококваліфікованого спеціаліста. Самостійна пізнавальна діяльність є складним процесом системного характеру. Він містить багато компонентів, які впливають на його результативність. Це і психічні особливості учасників цього процесу, і організаційні, мотиваційні компоненти та фактори зовнішнього впливу, які значним чином зумовлюють кінцевий результат такого виду діяльності та впливають на формування такої якості особистості студента, як самостійність. «Самостійність – це здатність студента працювати самостійно, організовувати і реалізовувати свою діяльність без стороннього керівництва чи допомоги [8, 7].

Реалізація усіх складових цього процесу є необхідною умовою навчання студента і реалізації його особистісних та суспільних цілей.

Самостійна робота студентів з математики у широкому розумінні – це вся робота з оволодіння науковими знаннями і практичними навичками, активна розумова діяльність в усіх формах навчально-виховного процесу.

Самостійна робота – це така форма навчальної діяльності, при якій процес одержання знань, умінь і навичок здійснюється за рахунок свідомих розумових і фізичних зусиль репродуктивно-творчого характеру самих студентів, але під наглядом викладача і з необхідною корекцією з його сторони, за його завданнями і вказівками щодо мети, організації, змісту і результатів роботи над завданнями, однак без безпосередньої участі викладача. Роль викладача під час організації самостійної роботи в основному зводиться до наставництва, кураторства (tutorship). Основні функції викладача такі: спрямування, консультування та поради студентам у виконанні самостійної роботи. У такий спосіб організації самостійної роботи значна увага приділяється самоконтролю студентів під наглядом викладача. Студент повинен усвідомити мету такого навчання, а викладач акцентувати увагу не стільки на самостійність дій студента, скільки на тому, як він визначає додаткову (до визначеної навчальним планом та викладачем) мету самостійної позааудиторної роботи.

Самостійна робота студента за дидактичним призначенням поділяється на самостійну робота для здобуття нових знань, застосування знань на практиці, повторення, перевірки знань, умінь, навичок [7, 3].

Як загально визнано, кожна система розробляється за певними принципами. Щодо принципів, які лежать в основі системи організації самостійної роботи з математики студентів педагогічного факультету ВНЗ ми не знайшли в методичній літературі чіткої, конкретної інформації і взагалі, питання саме *системи організації самостійної роботи* не обговорюється. Водночас заслуговують на увагу, на нашу думку, принципи побудови дидактичної системи організації самостійної роботи студентів, які описує в своїх дослідженнях О. Демченко [2], та принципи здійснення самостійної роботи (мається на увазі як самостійної пізнавальної діяльності), які подають наші колеги з кафедри математики КДПУ: В. Корольський, О. Віхрова, І. Лов'янова, з урахуванням трансформації відомих принципів дидактики у процесі самостійної роботи студентів при вивченні математики [4, 60].

У нашому варіанті система самостійних робіт з математики, на опрацювання яких відведено 58 годин, складається із 17 робіт.

Система організації самостійної роботи студентів побудована на таких принципах: системність та послідовність; посильність; індивідуалізація та диференціація; успішність та позитивність; активність та інтерактивність; оптимальність [2, 69].

Принцип системності та послідовності передбачає поступове ускладнення як математичного змісту, так і виду самостійної пізнавальної діяльності студента, причинно-наслідковий та логічний зв'язок між усіма елементами системи, логічну завершеність кожного елемента системи, поетапність подання змісту матеріалу та елементарних операцій самостійної діяльності студентів. Це відображається у чіткому виділенні у певних змістових модулях програмного матеріалу, який виноситься на самостійне опрацювання, що фіксується у назві теми самостійної роботи. Тематику самостійних робіт і час, відведений на їх опрацювання у змістових модулях ми подаємо у таблиці 1.

Принцип посильності передбачає наявність різнорівневих завдань для студентів, які б відповідали наявному рівню математичної компетентності кожного студента і враховували рівень розвитку навичок самостійної діяльності їх на конкретному етапі навчання. До практичної частини самостійної роботи пропонуються, як правило, завдання чотирьох рівнів: низький, середній, достатній і високий. Студент сам обирає для розв'язання завдання, які за його самооцінкою відповідають рівню його навчальних досягнень, наперед знаючи, яку максимальну кількість балів він може отримати за правильне його розв'язання.

Таблиця 1.

Орієнтовна тематика самостійних робіт з математики

№ з/п	*Назва змістового модуля*	*Тема самостійної роботи*	*Кількість годин*	
			на самостійне опрацювання	*загальна*
1.	Відношення на множині та їх властивості	Способи задання відношень між елементами однієї множини	2	8
2.	Розміщення, перестановки та комбінації без повторень. Основні комбінаторні задачі з повторенням	Основні правила і поняття комбінаторики. Розв'язування комбінаторних задача	4	8
3.	Підмодуль 2 змістового модуля 3: Система числення віднімання від десяткової. Дії над числами в різних системах	Недесяткові позиційні системи числення	2	10
4.	Підмодуль 1 змістового модуля 4: Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел	Числа порівняльні за модулем	3	9
5.	Підмодуль 2 змістового модуля 4: Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. НСД і НСК. Алгоритм знаходження НСД і НСК	Застосування ознаки подільності Паскаля	1	9
6.	Підмодуль 1 змістового модуля 5: Додавання цілих невід'ємних чисел	Поняття суми і дії додавання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого не-	4	12

№ з/п	Назва змістового модуля	Тема самостійної роботи	*Кількість годин*	
			на самостійне опрацювання	*загальна*
		від'ємного числа		
7.	Підмодуль 2 змістового модуля 5: Віднімання цілих невід'ємних чисел	Поняття різниці і дії віднімання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	4	10
8.	Підмодуль 3 змістового модуля 5: Множення цілих невід'ємних чисел	Поняття добутку і дії множення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	4	10
9.	Підмодуль 4 змістового модуля 5: Ділення цілого невід'ємного числа на натуральне	Поняття частки і дії ділення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа та в теорії вимірювання величин	2	10
10.	Підмодуль 2 змістового модуля 6: Множина дійсних чисел	Десяткові дроби. Арифметичні дії над ними. Перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки	4	6
11.	Змістовий модуль 8: Поняття числового виразу та його значення. Вираз із змінною	Тотожні перетворення числових виразів та вирізів із змінною	4	20
12.	Підмодуль 1 змістового модуля 9: Рівняння з однією змінною. Рівносильні рівняння	Способи розв'язування алгебраїчних рівнянь	4	10
13.	Підмодуль 2 змістового модуля 9: Нерівності. Властивості числових нерівностей. Нерівності з однією і	Розв'язування нерівностей із однією змінною в шкільному курсі математики	4	14

№ з/п	Назва змістового модуля	Тема самостійної роботи	Кількість годин	
			на самостійне опрацювання	загальна
	двома змінними			
14.	Підмодуль 2 змістового модуля 10: Основні елементарні функції шкільного курсу математики, їх властивості і графіки	Дослідження властивостей функції методами елементарної математики та побудова їх графіків	6	16
15.	Підмодуль 1 змістового модуля 11: Означення і основні властивості фігур на площині	Основні геометричні фігури, які вивчаються в початковому курсі математики: означення, побудова, моделі	2	4
16.	Підмодуль 2 змістового модуля 11: Основні задачі на побудову на площині	Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки	4	10
17.	Підмодуль 3 змістового модуля 11: Доведення геометричних тверджень. Способи доведення. Задачі на доведення	Задачі на доведення в початковому курсі математики	4	10
		Разом	58	176

Примітка: загальна кількість годин на вивчення математики 216. У таблиці – 176 год. Не враховані 40 год. тих змістових модулів, для вивчення яких не виділені теми самостійних робіт.

Принцип індивідуалізації та диференціації вимагає урахування якісних показників прояву самостійності студентів на кожному етапі виконання самостійної роботи та необхідність поділу студентів на групи за цими показниками, як на період виконання, так і під час захисту самостійних робіт. За цим принципом, кожен студент поділяє для себе як теоретичну, так і практичну частину самостійної роботи на такі три блоки: перший блок – це матеріал, який студент може опрацювати самостійно без будь-якої допомоги чи консультації з боку викладача чи студента з більш високим рівнем математичної компетентності; другий блок – це матеріал, який студент може опрацювати з частковою допомогою ззовні; третій блок – це матеріал, який студент може опрацювати тільки після неодноразової допомоги студентів, або з обов'язковою індивідуальною консультацією викладача. У період захисту самостійної роботи (до оцінювання її викладачем) кожен студент повинен до захисту мати власну самооцінку своїх досягнень і оцінку групи, в якій він працював у період виконання роботи.

Принцип успішності та позитивності передбачає безпосередній зв'язок з принципом посильності і на цій основі сприяння формуванню позитивного ставлення до проведення самостійних досліджень уже на якісно більш високому рівні. Просуванню студента на якісно більш високий рівень сприяють методичні рекомендації до кожного завдання самостійної роботи (вивчення теорії та зразки її застосування для практичних цілей); тестові завдання для самоконтролю; виставки індивідуальних навчально-творчих завдань, на яких студент має можливість порівняти власний рівень успішності з успішністю інших студентів групи та ін.

Принцип активності та інтерактивності передбачає формування активної позиції студента – свідомого ставлення до виконання самостійної роботи, яке проявляється в підвищенні ступеня безпосередньої участі кожного студента в плануванні та отриманні результатів у процесі роботи. Інтерактивність передбачає передусім виявлення здатності до колективної праці, створення тимчасових груп з більш-менш чітко розподіленими ролями задля виконання того чи іншого завдання самостійної роботи.

Принцип оптимальності вимагає використання таких видів, форм і методів самостійної роботи студентів, які б сприяли результативному і швидкому зростанню якісних показників розвитку навичок самостійної діяльності студентів за якомога короткий відрізок часу.

Література

1. Грабар Г. А. Теоретична модель розвитку пізнавальної самостійності студентів / Г. А. Грабар // Вересень. – 2003. – №3(25). – С. 51-55.

2. Демченко О. Дидактична система організації самостійної роботи студентів / О. Демченко // Рідна школа. – 2006. – №5. – С. 68-70.

3. Козаков В. А. Самостійна робота студентів як дидактична проблема. – К. : НМКВО, 1990. – 62с.

4. Корольський В. В. Самостійна робота студентів при вивченні математичних дисциплін у педагогічному ВНЗ / В. Корольський, О. Віх-

рова, І. Лов'янова // Рідна школа. – 2005. – №8. – С. 60-62.

5. Лодатко Є. Про математичну підготовку сучасного вчителя початкових класів / Є. Лодатко // Початкова школа. – 2006. – №1. – С.37-41.

6. Положення про організацію самостійної роботи студентів у Криворізькому державному педагогічному університеті. – Кривий Ріг, 2002. – 8 с.

7. Скаткин М. Н. Активизация познавательной деятельности учащихся в обучении / М. Н. Скаткин. – М., 1965. – 287 с.

8. Щербакова К. Й. Вступ до спеціальності : [навч. посібник] / К. Й. Щербакова. – К. : Вища школа, 1990. – 166 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ЗАНЯТТЯХ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

М.А. Кислова[1], С.Ф. Максименко[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький інститут Кременчуцького університету економіки, інформаційних технологій та управління
[2] м. Кривий Ріг, Криворізький металургійний факультет Національної металургійної академії України
ient-tk@rambler.ru

Чисельне моделювання –метод, що отримав розвиток завдяки появі ЕОМ. Суть методу полягає в наступному: на основі відомих законів вже вивчених явищ складається математична модель – абстрактний об'єкт, що підкорюється тим же законам. Змінюючи деякі вхідні параметрами моделі, експериментатор може прослідкувати за змінами, що відбуваються в ній. Змінюючи час, можна поспостерігати за явищем у динаміці, причому масштаб часу моделі може бути значно меншим реального, що дозволяє протягом декількох хвилин поспостерігати явище, на спостерігання за яким в реальності треба було б витратити роки. Основною перевагою методу є те, що він дозволяє не лише поспостерігати, але й передбачити результат експерименту при будь-яких умовах. Завдяки цій можливості описаний метод знайшов застосування в біології, хімії, соціології, екології, фізиці, економіці та багатьох других сферах знань.

Метод чисельного моделювання має такі переваги перед іншими традиційними методами:

– дає можливість змоделювати ефекти, вивчення яких в реальних умовах неможливе, або досить складне за технологічними вимогами, дозволяє моделювати та вивчати явища, що передбачені певними теоріями;

– є екологічно чистим і не являє небезпеки для природи та людини;

– забезпечує наочність;

– зручний у використанні.

Застосування комп'ютерного моделювання можливе не лише для демонстрацій, а й для проведення лабораторних робіт з деяких предметів, в яких експериментальна установка представлена комп'ютерною моделлю явища. Виконання такого роду робіт може бути зумовлено складністю, дороговизною або небезпечністю обладнання та самого експерименту. Так, у фізиці це можуть бути ефекти квантової фізики та фізики ядра. Досить часто проблеми, пов'язані з обладнанням, з якими стикається викладач при проведенні рядового лабораторного практикуму, можуть бути розв'язані заміною його комп'ютерною лабораторною роботою, хоча це має і свої мінуси.

Ще одна специфічна роль моделювання на комп'ютері може бути реалізована при розв'язуванні задач, близьких до реальних умов, але таких, які не можуть бути розв'язані з достатньою точністю аналітично. По суті – це задачі на розв'язування чисельними методами. Наприклад, у вищій математиці – це розв'язування прикладних задач із застосуванням диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь.

Заняття з використанням чисельного моделювання можна проводити як практикум, в процесі якого студенти повинні скласти математичну модель, реалізувати її на комп'ютері, а потім виконати з такою моделлю ряд експериментів. При цьому активізується знання теоретичного матеріалу, студент активно включається в творчу діяльність, що суттєво збільшує результативність учбового процесу. Практикум організовується як сукупність занять з вивчення теоретичних основ відповідного явища, математичних методів, за допомогою яких реалізується дана модель та дослідження, які дані та зв'язки є суттєвими в даному явищі, а які – ні, і їх можна зігнорувати.

Все це сприяє закріпленню у студентів знань законів, формул, методів та більш глибокому їх розумінню, удосконалює навички роботи з математичним апаратом. «Обернений експеримент» сприяє також розвитку у студентів теоретичного мислення. Крім того можуть бути досягнуті і побічні, які не мають до предмету (математики, фізики, хімії і т.д.) прямого відношення цілі – практикум неможливий без вивчення методів обчислювальної математики та основ програмування.

В методичному плані практикум з комп'ютерного моделювання має на меті досягнення таких цілей:

– вивчення законів того предмета, з якого проводиться практикум (вища математика, фізика, хімія , і т.д.);

– вивчення математичних методів фізики, хімії, і т.д.;

– розвиток теоретичного мислення у студентів;

– розвиток уявлень про макро- та мікросвіти та явищ в них;

– виховання у студентів почуття раціонального.

Такі практикуми мають тісні між предметні зв'язки з курсами лінійної алгебри, дискретної математики, математичного аналізу та основ програмування.

Комп'ютерне моделювання дозволяє підвищити самостійність роботи студентів, яка необхідна для переводу знань із зовнішніх носіїв цих знань в пам'ять студентів. Для цього викладач може варіювати форми контролю над засвоєнням учбового матеріалу. Це можна проілюструвати використанням комп'ютера при вивченні теми «Геометричні застосування визначеного інтегралу» на заняттях з вищої математики. Програмним засобом в даному випадку може бути електронна таблиця. Розв’язання в ній задачі інтегрування дозволяє, по-перше, засвоїти багато операцій, що вивчаються в програмному засобі інформаційних технологій, і, по-друге, закріпити матеріал з інтегрування в прикладанні до обчислення площ. Програмна розробка в електронних таблицях складається з набору функцій, що вивчаються, для яких пропонується ввести відповідні числові коефіцієнти та межі інтегрування. В сусідній стовпчик для кожної функції виведені формули для обчислення первісних з вказаними коефіцієнтами та межами інтегрування. Після вибору функцій значення інтегралів та відповідних їм площ розглядаються автоматично. На графіки виводяться підінтегральна функція та первісна.

Таким чином, є можливість графічно та чисельно проаналізувати характер функцій та вплив на значення площі, тобто виконати комп’ютерне моделювання. Так як первісні знаходяться студентами «вручну» і в електронну таблицю вводяться попередньо виведені формули, то робота з комп’ютером не зводиться до механічних операцій та дає поглиблене знайомство з властивостями функцій та набуття навичок їх інтегрування. При цьому з’являється можливість диференціювати темпи роботи, забезпечити її варіативність.

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

И.И. Ковтун
г. Киев, Национальный университет биотехнологий
и природопользования Украины
ira@otblesk.com

Болонская конвенция, к которой присоединилась Украина, по сути, должна быть направлена на повышение качества образования. Исходя из западных стандартов, упор должен быть сделан на самостоятельную работу студентов [4].

Качество математических знаний, необходимых будущим инженерам, зависит, в частности, от методики изложения основного курса высшей математики и от умения лектора пробудить интерес к дальнейшему изучению математических разделов.

С основными математическими понятиями студенты могут познакомиться, используя обычные и электронные учебники. Однако задача лектора состоит не только в том, чтобы указать, где можно прочитать о необходимых математических понятиях, но и дать толчок для изучения *современных методов решения задач*, связанных с будущей специальностью студентов.

Интерес к изучению математики, с нашей точки зрения, можно, и нужно, поддерживать, объясняя, зачем вводится то или иное понятие, почему без него нельзя обойтись, как связаны различные математические понятия, где они используются на практике.

В качестве примера рассмотрим, как целесообразно, с нашей точки зрения, вводить понятие предела. Как одну из задач, приводящих к этому понятию, приводим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть криволинейная трапеция ограничена известной со школы кривой $y=x^2$ и прямыми $x=1$, $y=0$. Заменяем площадь трапеции площадью ступенчатой фигуры, состоящей из суммы площадей s_k прямоугольников со сторонами $\frac{1}{k}$ и $y\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k^2}$, где $k=1, ..., n-1$. Площадь ступенчатой фигуры равна

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} s_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+...+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) \text{ или } S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}.$$

Чем больше n, тем более точно площадь ступенчатой фигуры описывает площадь криволинейной трапеции. Однако при любом сколь угодно большом n площадь ступенчатой фигуры не будет равна площади криволинейной трапеции. Чтобы получить искомую площадь, нужно ввести новую операцию – предельный переход.

Таким образом, введение понятия предела становится естественным и необходимым. Здесь же получаем и бесконечно малые величины $\alpha_1 = \frac{1}{n^2}$ и $\alpha_2 = \frac{1}{n}$.

Далее необходимо рассматривать свойства, связанные с бесконечно малыми величинами, и теоремы о пределах. Это также воспринимается естественно.

Заметим, что задачу о нахождении площади криволинейной трапеции используем и дальше, вводя понятие определенного интеграла. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x) \geq 0$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

В частности, если криволинейная трапеция ограничена кривой $y = \frac{1}{x^2}$, осью абсцисс и прямой $x=1$, то получаем несобственный интеграл первого рода $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$, который сходится, т.е. «площадь» такой трапеции существует. Если криволинейная трапеция ограничена кривой $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямой $x=1$, то получаем несобственный интеграл первого рода $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$, который расходится, т.е. «площадь» такой трапеции не существует.

Одним из инструментов решения практических задач являются ряды [3]. Вводя понятие ряда, также используем задачу о нахождении площади. В данном случае – площади прямоугольного треугольника с катетами $a=1$, $b=2$, расположенными соответственно на осях Ox, Oy. Решение этой задачи приводит к числовому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Вводим понятие общего члена ряда, частичной суммы ряда, понятие суммы ряда, понятие сходимости.

С другой стороны, площадь рассматриваемого треугольника равна 1. Таким образом, видим, что полученный ряд имеет сумму. Как ее определять в общем случае, помогут понятия сходимости и расходимости рядов. Вводим необходимое условие сходимости ряда. Для определения того, сходится или расходится данный числовой ряд, приводим достаточные признаки сходимости рядов.

При решении практических задач используют не весь ряд, а несколько первых членов ряда. Здесь уместно привести примеры рядов А. Пуанкаре [5]. А именно, рассматриваются два числовых ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}.$$

Применяя достаточный признак Даламбера, убеждаемся, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящийся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходящийся.

Запишем несколько членов этих рядов. Имеем a_1=1000, $a_2 = \frac{1000^2}{2}$, $a_3 = \frac{1000^3}{6}$, т.е. первые члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ возрастают. Вычисляем первые члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $b_1 = \frac{1}{1000}$, $b_2 = \frac{2}{1000^2}$, $b_3 = \frac{6}{1000^3}$. Эти члены ряда убывают. Т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$ на практике оказывается «сходящимся». Почему это так? Здесь как раз и целесообразно познакомить студентов с понятием *асимптотической сходимости ряда,* которое не входит в программу курса высшей математики, но широко используется на практике [2].

В разделе «ряды Фурье» приводим функцию Вейерштрасса, представимую в виде ряда

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где a, b – числа, удовлетворяющие условиям: a<1, b>1, ab>1

Функция $W(x)$ непрерывна для всех значений x, но не дифференцируема ни для одного значения x Здесь еще раз уместно подчеркнуть приведенное ранее в разделе дифференциальное исчисление функций одной переменной утверждение: из непрерывности функции одной переменной в точке не следует ее дифференцируемость в этой же точке.

На графике функции $W(x)$ показываем, что форма функции остается неизменной при растяжении в b раз вдоль оси Ox и в $1/a$ раз вдоль оси Oy.

Функция $W(x)$ интересна еще и тем, что она самоподобна: бесконечно малая часть ее графика генерирует форму целого. Такую функцию называют *фракталом.*

Таким образом, студенты знакомятся с новым современным понятием, которое широко применяется в такой науке, как *синергетика* [1].

Отмечаем, что ключевыми принципами синергетики являются: самоорганизация, спонтанность и непредсказуемость. Процессы, которые изучает синергетика, это – нелинейные процессы, так называемые процессы с обострением, часто встречающиеся на практике.

Можно сделать следующие выводы.

С одной стороны, объясняя студентам необходимость введения новых для них понятий, учим их воспринимать основные положения высшей математики сознательно, пробуждаем интерес к изучению математики.

С другой стороны, по возможности, знакомим студентов с методами решения практических задач, выходящими за программу курса высшей математики для инженерных специальностей, с новыми разделами науки, тем самым расширяя кругозор студентов и готовим их к дальнейшему изучению необходимых положений математической науки.

Литература

1. Адрианов И. В. Асимптотическая математика и синергетика / Адрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. – М. : УРСС, 2004. – 300 с.
2. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. – М. : Наука. 1974. – 574 с.
3. Вечорик А. Н. Исследование математической модели с помощью рядов / Вечорик А. Н., Дума А. С., Ковтун И. И. // Проблемы науки, образования и управления: сб. научных трудов. – Харьков : Харьковский национальный университет, 2004. – Вып. V. – С. 74-79.
4. Ковтун И. И. О некоторых новых требованиях при изложении курса высшей математики / Ковтун И. И. // Новый коллегиум. – 2007. – №2. – С. 54-59.
5. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики / Пуанкаре А. // Избранные труды. – Т.1. – М. : Наука, 1971. – С. 329-744.

НАВЧАЛЬНО-РЕЙТИНГОВА ОДИНИЦЯ
ЯК ОСНОВА ПЛАНУВАННЯ І ФОРМУВАННЯ
РЕЙТИНГ-ОЦІНКИ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

В.В. Корольський
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

З метою упорядкування контрольних заходів і формування рейтинг-оцінки студентів при вивченні математичних дисциплін за вимогами кредитно-модульного навчання і використання системи оцінок ECTS пропонується ввести поняття навчально-рейтингової одиниці (НРО). НРО як дидактична одиниця повинна відповідати наступним вимогам (критеріям):

– відповідати за термінами певному часовому проміжку;

– відповідати за змістом певні частині навчального модуля (містити певну кількість змістових модулів, в деяких випадках передбачити частину змісту одного зі змістових модулів);

– містити розподілений перелік теоретичних питань, які потрібно вивчати в межах НРО за двома взаємо-інтегрованими напрямками навчання: 1) аудиторна навчальна робота (АР); 2) самостійна робота студентів (СРС);

– містити набір практичних вправ для розв’язання в якості прикладу в процесі аудиторних занять і пропонованих для розв’язання і доведення в межах самостійної роботи студентів;

– містити декілька нестандартних питань, розв’язок яких потребує творчого підходу до вибору алгоритму розв’язку;

– містити навчальний графік вивчення змісту НРО і термін перевірки якості засвоєння студентом знань, вмінь і навичок, що відповідають призначенню НРО з метою формування рейтингової оцінки за нормами ECTS.

Зрозуміло, що формування рейтингової оцінки протягом навчального семестру потребує використання кількох НРО. Але для того, щоб цей процес був упорядкований, представляється за доцільне мати єдину часову шкалу визначення кількості НРО вивчення окремої навчальної дисципліни протягом кожного окремого семестру. Враховуючи, що узаконеною кількістю годин одного навчального кредиту є норма, яка дорівнює 36 годин, доцільно відвести на кожну окрему НРО величину навчальних годин, яка відповідає умові кратності числу 36 (тобто це може бути 2, 4, 6, 9, 18). Тому вважаємо за доцільне відвести на одну НРО 18 годин загального часу на вивчення певного об’єму знань. В ці години входять години аудиторних занять і години, відведені на СРС. При цьому години на підсумкові екзамени і заліки в НРО не враховуються.

Кількість НРО у кожному навчальному семестрі визначається за формулою

$$K_d = \frac{T_d}{18},$$

де K_d – кількість НРО з окремої навчальної дисципліни d в даному навчальному семестрі, T_d – загальна кількість годин на вивчення дисципліни d.

Наприклад, якщо для вивчення певної дисципліни за планом спеціальності «МІ» в І-му семестрі відводиться 108 годин (загальна кількість годин), то даному курсу відводиться 6 НРО, які розподіляються між обов'язковими аудиторними заняттями (лекції і практичні заняття).

Для встановлення рейтингу навчання кожного окремого студента враховуються усі види навчальної діяльності студента і використовується 100-бальна шкала оцінок. Розглянемо, як здійснюється підрахунок підсумкового за семестр рейтингу студента. Припустимо, що на дисципліну d відводиться K_d НРО (якими можуть бути математичний диктант, тест-контроль, колоквіум, контрольна робота, індивідуальне заняття тощо). Кожна НРО оцінюється кількістю балів до 100. Тоді підсумковий рейтинг за семестр підраховується за формулою

$$R_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{di} K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i},$$

де R_c – середньозважений семестровий рейтинг; R_{di} – рейтингова оцінка i-ої НРО навчання, K_i – кількість НРО, яка приходиться на термін формування R_{di}.

Можна запропонувати іншу схему формування рейтингу R_c: якщо, скажімо, кількість годин на лекції і практичні заняття є однаковою, то НРО можна вважати спільною, але тоді оцінка в балах має дві складові, одна пов'язана з теоретичним навчанням, друга – з практичними заняттями й вправами. Кожній НРО надається певна кількість балів в залежності від складності виучуваного матеріалу. Така методика не потребує додаткових розрахунків і показує динаміку відношення студента до навчання.

Після одержання семестрового рейтингу R_c встановлюється його відповідність національній шкалі оцінок та шкалі оцінок ESTC:

Значення R_c	*Національна оцінка*	*Оцінка ESTC*
90-100	відмінно	A
80-89	добре	B – дуже добре

Значення R_c	*Національна оцінка*	*Оцінка ESTC*
70-79	добре	С
60-69	задовільно	Д
50-59	задовільно	Е – достатньо
30-49	незадовільно	F_x
0-29	незадовільно	F – без права перескладання

За допомогою НРО можна побудувати діаграму інтегрованого навчального процесу (АР↔СРС), розрахованого на кожен навчальний семестр і в цілому на весь термін вивчення окремої навчальної дисципліни. Для прикладу розглянемо вивчення математичного аналізу в першому семестрі студентами спеціальності «МІ». За навчальним планом передбачається 108 годин загального навчального часу: 36 год. – лекції; 36 год. – практичні заняття; 36 год. – СРС. За навчальною програмою планується засвоєння студентами двох навчальних модулів: НМ1 – «Вступ до математичного аналізу», НМ2 − «Диференціальне числення функції однієї змінної». НМ1 містить: ЗМ1 – «Множини», ЗМ2 – «Функція», ЗМ3 – «Границя функції», ЗМ4 – «Неперервність функції». НМ2 складається з наступних змістових модулів: ЗМ1 – «Похідна та диференціал функції», ЗМ2 – «Основні теореми диференціального числення», ЗМ3 – «Застосування методів диференціального числення». Кількість НРО для формування рейтинг-оцінки студента буде дорівнювати значенню: 108:18=6. Таким чином, протягом семестру можна провести три рейтинг-контролі знань із засвоєння теорії і три рейтинг-контролі рівня умінь і навичок застосування теоретичних знань до розв'язання практичних завдань, вправ і сформувати підсумкову рейтинг-оцінку якості знань студента за навчальний семестр. Навчальний модуль НМ2 триває два навчальних семестри, але це не впливає на логіку послідовності вивчення змістових модулів і формування рейтинг-оцінки знань студентів як в І-му, так і в ІІ-му семестрі.

Діаграма навчального процесу: Розподіл змісту навчання і форм його вивчення та графік формування рейтинг-оцінки студента на протязі І-го навчального семестру

<table>
<tr><td>Навчальні тижні, І семестр, 108 год. (3 кред.)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Навчальні модулі (НМ)</td><td colspan="13">НМ1 «Вступ до математичного аналізу» (4 змістових модуля)
80 год. (2,2 кред.)</td><td colspan="5">НМ2 «Диференціальне числення функції однієї змінної»</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Навчальні тижні, I семестр, 108 год. (3 кред.)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="13"></td><td colspan="5">(2 змістових модуля)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Змістові модулі (ЗМ)</td><td colspan="3">ЗМ1 «Множини»</td><td colspan="3">ЗМ2 «Функція»</td><td colspan="4">ЗМ3 «Границя функції»</td><td colspan="3">ЗМ4 «Неперервність функції»</td><td colspan="5">ЗМ1 «Похідна та диференціал функції. Основні теореми».</td></tr>
<tr><td colspan="3">НРО-1</td><td colspan="3">НРО-2</td><td colspan="4">НРО-3</td><td colspan="3">НРО-4</td><td colspan="5">НРО-5, НРО-6 54 год. (1,5 кред.)</td></tr>
<tr><td>Навчальні години на вивчення ЗМ, год. (кред.)</td><td colspan="3">18 (0,5)</td><td colspan="3">18 (0,5)</td><td colspan="4">24 (0,67)</td><td colspan="3">12 (0,33)</td><td colspan="5">36 (1)</td></tr>
<tr><td>Лекції</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">6</td><td colspan="4">8</td><td colspan="3">6</td><td colspan="5">10</td></tr>
<tr><td>Практичні заняття</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">6</td><td colspan="4">8</td><td colspan="3">6</td><td colspan="5">10</td></tr>
<tr><td>Аудиторна самостійна робота студента (СРС)</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td><td colspan="4">2</td><td colspan="3">-</td><td colspan="5">6</td></tr>
<tr><td>Позааудиторна самостійна робота студента (СРС)</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">4</td><td colspan="4">6</td><td colspan="3">-</td><td colspan="5">10</td></tr>
<tr><td>Рейтинг-контроль знань, умінь, навичок (ЗУН)</td><td colspan="3"></td><td colspan="3">Р-к</td><td colspan="4"></td><td colspan="3">Р-к</td><td colspan="5">Р-к</td></tr>
</table>

Розглянемо зміст і структуру НРО-1, НРО-2 НМ1 «Вступ до математичного аналізу» (12 год. лек. + 12 год. практ. зан. +12 год. СРС).

Лекції (ЗМ1):

1.1. Символіка математичної мови. Множина. Основні поняття. Способи задання множин.

1.2. Дії над множинами. Властивості дій над множинами.

1.3. Числові множини. Види числових множин. Зв'язок між числовими множинами. Аксіоми множини дійсних чисел. Абсолютна величина дійсних чисел та її властивості. Множини на числові осі. Потужність множин. Потужність числових множин.

Самостійна робота

1.1.1. Перевірити справедливість наступних тверджень:

а) $m<n\, n \Leftrightarrow m^2 <n^2$; 2) $\forall n \in N \in \dfrac{n\,(n+1)}{2} : N$

б) $\exists! \, : 3n \;= 2n+1$;

в) $\forall n \; \exists \, m : n(n+1) = \; 2m$;

1.2.1 Довести: а) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$

б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

в) $A \cap A = A$

1.3.1. Аксіоми множини дійсних чисел.

1.3.2. Абсолютна величина дійсних чисел та її властивості.

1.3.3. Множини на числові осі, їх зміст та зображення.

Нестандартні питання

а) Нехай $x = [0:1[= \{ x \in R : 0 \le x < 1 \}$. Довести, що sup x=1/

б) Нехай x=[0,1[, тоді min x=0. Чи існує max x?

в) З якої теореми випливає твердження: множина ірраціональних чисел незліченна?

Лекції (ЗМ2):

2.1.Функція. Відображення множин. Область існування і множина значень функції. Способи завдання функцій

2.2. Види функцій. Загальні властивості функцій

2.3. Функції натурального аргументу. Дії над функціями

Самостійна робота

2.2.1. Елементарні функції їх графіки та властивості

2.2.2. Елементарні функції їх графіки та властивості

2.2.1-2.2.2 1) визначити E (f) для функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$

б) $f(x)=|x|+1$

в) $f(x) = \dfrac{2x}{ax^2 - 6x + 5}$

2) записати обернені функції для функцій:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

б) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

в) $f(x)=2^x+1$

2.2.3. 3) Чи обмежені послідовності:

а) $\{(-1)^n | n \geq 1 \}$

б) $\{\sin n \,| n \leq 1\}$

в) $\left\{ \dfrac{n}{n^2+1}, n \geq 1 \right\}$

Рейтинг-контроль знань виконується на 7-му тижні навчання у формі математичного диктанту.

Зміст рейтинг контролю базується на теоретичних питаннях кожного зі змістових модулів ЗМ1, ЗМ2 і завдань, які винесені на СРС.

Примітка: Кожен студент повинен дати відповіді на 5–6 теоретичних питань та розв’язати 3-2 практичні завдання, які заплановані на СРС.

Максимальна кількість балів за виконання завдань рейтинг-контролю 20 балів.

Введення НРО суттєво змінює традиційний характер роботи викладача і потребує:

1) розробки графіка контролю якості виконання СРС;
2) розробки вимог до формування рейтинг-оцінки;
3) розробки завдань на СРС;
4) розробки методичного інформаційного забезпечення СРС;
5) розробки концентрованих форм проведення аудиторних занять;
6) створення електронних інформаційних джерел, організації поточного, атестаційного і підсумкового контролю знань студента.

Використання НРО дозволяє більш ефективно здійснювати планування і організацію інтегрованого навчального процесу: «аудиторна навчальна робота − самостійна робота студента».

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ УЧНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІКТ

Т.Г. Крамаренко[1α], Т.В. Колчук[2β]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
[2] м. Кривий Ріг, Криворізька педагогічна гімназія
[α] tgkramarenko@mail.ru
[β] TanyaKolchuk@rambler.ru

В сучасній освіті все більш актуальним стає впровадження новітніх досягнень, акцентованих на самостійності. Це спричинено широким використанням ІКТ, які дають можливість ефективно реалізувати самоосвітню діяльність тих, хто навчається. Від випускника сьогоднішньої школи суспільство вимагає самостійності, самоорганізованості, здатності до самоосвіти, самонавчання, готовності до навчання у ВНЗ та майбутньої професійної діяльності.

В дидактиці самостійна робота розглядається, з одного боку, як вид навчальної діяльності, що здійснюється без безпосереднього втручання, але під керівництвом учителя, а з іншого – як засіб залучення школярів до самостійної пізнавальної діяльності, засіб формування у них способів її організації.

Самостійність – не просто сума умінь і навичок. Найбільшу самостійність учень проявляє в тих випадках, коли, виконуючи завдання, не відтворює зразок розумової і фізичної дії, а вносить в роботу щось своє, нове (для нього), здійснює «власний» спосіб мислення і діяльності в процесі навчання.

Важливим показником самостійності як риси особистості виступає пізнавальна самостійність, що традиційно визначається як готовність до самостійного оволодіння знаннями на основі вольового зусилля. Результативність формування пізнавальної самостійності в навчальному процесі можлива за умови систематичного залучення учнів до активної пізнавальної діяльності.

Аналіз психолого-педагогічної літератури свідчить про те, що основний шлях підвищення ефективності навчального процесу полягає в залученні учнів до пізнавального процесу. Самостійна робота при цьому забезпечує підвищення якості і міцності засвоєних ними знань, формує їх пізнавальні можливості, уміння і навички.

Значної результативності самостійної роботи у формуванні особистості учня можна досягти, якщо при її організації піклуватися про те, щоб оволодіння кожним новим видом робіт було підготовлене попередніми заняттями і в той же час важливо, щоб учні не зупинялися на досягнутому, а поступово опанували інші види робіт, які вимагають від них більшої самостійності.

Електронний навчальний посібник для вчителів та учнів «Геометрія, 7 клас» (розробники: Т.Г. Крамаренко, Т.В. Колчук, К.С. Репіна, В. Палій) призначений для організації навчальних досліджень у курсі геометрії на основі засобів ІКТ. На CD навчальний посібник «Геометрія, 7 клас» представлений в електронному вигляді, після інсталяції пакета GRAN-2D кожний малюнок посібника можна «оживити» – він оснащений гіперпосиланням на відповідний файл програми, який завантажується автоматично після вибору малюнку. В основу посібника покладено ідею залучення учнів до самостійного активного оволодіння геометрією через виконання комп'ютерних експериментів у середовищі пакету GRAN-2D (у формі індивідуальної або групової роботи, вдома або у класі).

Організація самостійної творчої роботи учнів з використанням ІКТ у курсі математики (а навчальні дослідження є вищою формою творчості учнів) потребує від учителя найвищої кваліфікації (і математичної, і педагогічної, і у галузі ІКТ). І чим менше помітна роль учителя під час навчання і більш продуктивна творча самостійна робота учнів, тим більшої кваліфікації від учителя вона потребує. В ідеалі учні самостійно проводять дослідження: розробляють їх стратегію, будують та досліджують математичні (зокрема, комп'ютерні) моделі з метою експериментальної перевірки гіпотез, доводять правдоподібні твердження або конструюють до них контрприклади, готують звіти та презентації про виконану роботу і все це – у процесі постійного обговорення та співпраці у дослідницькій спільноті, яку утворюють однокласники, вчитель, будь-які інші зацікавлені особи. Учитель при цьому мусить бути рівноправним членом дослідницької спільноти, якомога менше втручаючись у творчі процеси, виконуючи роль наставника, менеджера.

Зауважимо також, що робота учнів з посібником «Геометрія, 7 клас» може відбуватися у вільному режимі: хто, де, у який спосіб, у якій мірі буде опрацьовувати його, залежить від самого учня. Зрозуміло, вчитель залежно від наявності вільного доступу у класі до засобів ІКТ та власних уподобань може використовувати матеріал посібника у доцільній для нього та класу формі: для демонстрацій, постановки задач та висування гіпотез, пошуку закономірностей та побудови контрприкладів на основі комп'ютерних експериментів і т.п. – усього того, що складає основу математичних досліджень (і, відповідно, дослідницького підходу у навчанні). Посібник орієнтований на діючі підручники [1; 2], що дає змогу вчителеві значно зекономити час при підготовці комп'ютерно-орієнтованого уроку та інтенсифікувати навчальний процес, активізувати пізнавальну активність учнів. Але дана орієнтація не є принциповою, і тому підготовлений матеріал може бути використаний у рамках будь-якої програми з геометрії і з будь-яким іншим підручником.

Розроблений електронний посібник містить:

- теоретичний матеріал за діючими підручниками [1; 2], при цьому учень може самостійно обирати тему. При його підготовці враховується специфіка роботи на комп'ютері, коли основна увага учнів фокусується на тих моментах, які виділяються іншим кольором, шрифтом, курсивом, нестандартними прийомами, при використанні різноманітних екранних засобів навчання, які знижують втомлюваність і підвищує інтерес до навчання;
- завдання практичного характеру з тем, які містять різного роду підказки і поради;
- завдання дослідницького характеру, які розвивають дослідницькі уміння і навички учнів і орієнтовані на самостійний пошук інформації , її творче осмислення. В процесі їх виконання учень вчиться оригінально розв'язувати запропоновані задачі, розвиває навички творчої діяльності, розвиває навички творчої пізнавальної діяльності, вміння успішно конструювати й реалізовувати власні прийоми і методи в навчальній практиці;
- електронні наочності, розроблені в педагогічному програмному засобі GRAN-2D, які є зручним інструментом для проведення експериментів з математичними моделями – основою дослідницького підходу;
- презентації для вироблення внутрішньої мотивації учнів для навчання геометрії. Причому учням пропонується самостійно доповнювати її слайди, а отже, знайти ще одну свою власну причину для вивчення тієї чи іншої теми;
- наприкінці вивчення кожної теми учням пропонується пройти тест самоконтролю. Результати тестування подаються за дванадцятибальною шкалою. Таким чином, учень отримує відомості про ступінь успішності засвоєного ним навчального матеріалу. У разі невдалого проходження тесту учень має право повернутися до початку теми, яку вивчив недостатньо добре і скласти тест повторно. Вчитель при цьому отримує результати успішності учнів і може відразу виставляти їх до журналу;
- кросворди для активізації пізнавальної діяльності учнів з перевіркою його розв'язання;
- предметний покажчик, який об'єднано з словником.

Для ведення навчально-дослідницької діяльності і виховання самостійності учнів у навчанні використовуються:

- простий інтерфейс і «Настанова користувача», в якій описано всі моменти роботи з посібником;
- гіпертекстова структура (можливість перегляду навчального матеріалу за гіперпосиланнями), неодночасне відкриття усіх матеріалів, використання предметного покажчика задовольняє пізнавальні потреби учнів і розвиває пізнавальну самостійність учнів;
- матеріал, структурований за параграфами, що забезпечує легкий доступ до нього;
- заохочення власного вибору учня, нестандартних підходів до розв'язання задачі;
- залучення учнів до розробки навчальних матеріалів, що сприяє розвитку пізнавальної самостійності у навчанні, відповідальності за результат своєї праці.

В електронному посібнику нами розроблено розділ «Геометричні побудови». Важко переоцінити роль задач на побудову в математичному розвитку учнів. Їх розв'язання завжди вимагає від учня в тій чи іншій мірі ініціативи, самостійності, дає йому змогу випробувати свої сили. Ці задачі, як правило, не допускають стандартного підходу до їх розв'язування і формального сприйняття їх учнями. Для учня розв'язати задачу на побудову означає провести хоча й маленьке, але своє власне дослідження.

Використання матеріалів даного посібника при вивченні геометричних задач на побудову сприятиме ширшому і глибшому проникненню в суть розглядуваної проблеми. Опановуючи такий змістовний в математичному і логічному відношенні матеріал, в учнів формується пізнавальна самостійність, культура роботи з геометричним матеріалом і виробляються навички опрацювання матеріалу за комп'ютером. В багатьох випадках саме використання графічного розв'язування задачі за допомогою комп'ютера полегшує введення і сприймання нових понять, є джерелом гіпотез, здогадок і оригінальних рішень, надає можливість перевірки певних ідей, сприяє розвитку творчої та евристичної складових мислення учнів і стимулює їх навчально-пізнавальну діяльність.

Справді, запропонована учням нестандартна задача, зовні складна і «загадково» сформульована, для якої можна запропонувати оригінальний графічний розв'язок із зрозумілим поясненням, здатна привернути до себе увагу всього класу, повернути впевненість у власних силах учням, що мають певні прогалини у знаннях геометрії. При цьому зростає зацікавленість учнів до вивчення геометрії, розв'язування задач, самостійної діяльності з набуття нових знань з предмету.

Формування навчально-пізнавальних інтересів, розвиток спеціальних здібностей – все це приводить до того, що навчальна діяльність поступово набуває рис творчої діяльності. Учень виходить за рамки поставлених учителем завдань, активно шукає нові методи реалізації своїх здібностей, по новому осмислює і оцінює результати своєї діяльності. У цих пошуках розвиваються й утверджуються особливості суб'єкта, що характеризують його як особистість.

Геометричні задачі на побудову мають свою загальну специфіку, що притаманна процесу їх розв'язування (аналіз, побудова, доведення, дослідження) і кожна з них володіє своєю індивідуальною особливістю – методом розв'язання (метод геометричних місць точок, методи геометричних перетворень, алгебраїчний метод та інші).

Після того, як учні опанують певним основним методом розв'язування задачі на побудову, треба перейти до розв'язування задачі, де відразу не видно, за яким методом найдоцільніше розв'язувати цю задачу, і де самі учні повинні добирати доцільний для даного випадку метод, виховуючи в собі винахідливість та ініціативу у відшукуванні різноманітних і оригінальних способів розв'язування.

Отже, використання ІКТ в навчальному процесі підсилює внутрішню мотивацію учнів за рахунок новизни, нетрадиційності подання навчального матеріалу, можливості самостійного розв'язання запропонованих завдань і їх творчого переосмислення в умовах, що постійно змінюються. Позитивним для організації такого виду самостійної роботи студентів є траєкторія навчання, яку кожен учасник може будувати самостійно, максимально пристосовуючи її до себе.

Література

1. Бевз Г. П. Геометрія : [підручник для 7 класу] / Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. − К. : Вежа, 2007. − 208 с.
2. Бурда М. І. Геометрія : [підручник для 7 класу] / М. Бурда, Н. Тарасенкова. − К. : Вежа, 2007. − 210 с.
3. Раков С. А. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням динамічної геометрії DG / С. Раков // Математика в школі. – 2005. – № 7. – С. 2-8.

З ДОСВІДУ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

І.В. Лов'янова, Л.Р. Корольська, С.Г. Шиперко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
lira7-1-8@mail.ru

Основною метою впровадження навчальних технологій є інтенсифікація навчального процесу. Серед основних завдань кредитно-модульної системи організації навчального процесу (КМСОНП) є якість, прозорість, об'єктивність оцінювання знань студентів та універсальна система оцінки знань, що дозволяє враховувати усі види навчальної та наукової діяльності студента протягом семестру, дає можливість останньому контролювати рівень своєї підготовки. Згідно з основними положеннями КМСОНП, контроль успішності студента здійснюється у формі поточного, модульного, семестрового та підсумкового контролю.

Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних та лабораторних занять, а також контрольних робіт і має за мету перевірку якості засвоєння матеріалу студентами та залік кредитних модулів навчальної дисципліни. **Модульний** контроль здійснюється кожної чверті. Його здійснюють викладачі, які викладали матеріал модуля. При оцінюванні модулів може бути врахований поточний контроль якості засвоєння. **Семестровий** контроль здійснюється у формі контрольного заходу, який визначила кафедра з певної дисципліни. У разі виконання студентом усіх видів поточних контрольних заходів семестровий контроль виставляється студенту на підставі результатів усіх попередніх модульних контролів. **Підсумковий контроль** – комплексне оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу дисципліни без участі студента на підставі результатів усіх модульних контролів, що передбачені навчальним планом за весь термін викладання [2, 11].

Контроль – важливий структурний компонент навчального процесу, який взаємопов'язаний з його цілями, змістом і методами. Від результатів контролю значною мірою залежать постановка цілей і завдань навчання, вибір і послідовність застосування його методів. Завдяки контролю реалізується зворотній зв'язок, що дозволяє оперативно регулювати і корегувати процес навчання, ставити конкретизовані завдання на наступне заняття [3, 201].

Основна мета контролю як дидактичного управління навчанням – забезпечити ефективність навчання шляхом приведення до системи знань, умінь і навичок студентів, самостійного застосування ними здобутих знань, прагнення до самоосвіти.

На сучасному перехідному етапі в різних вузах по-різному підходять до процедури організації і проведення контролю знань студента та їх оцінювання.

Мета даного дослідження – на основі нормативних документів про КМСОНП та існуючих на практиці підходів до оцінювання знань запропонувати можливий варіант методики оцінювання знань студентів в умовах кредитно-модульного навчання.

Оцінка – кількісний показник якості результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів. Оцінка передбачає зіставлення того, що студент засвоює, з тим, що він повинен засвоїти відповідно до вимог навчальної програми та державних стандартів відповідного кваліфікаційного рівня.

Шкала оцінок якості засвоєння навчального матеріалу представлена в таблиці 1 [4, с.12].

Таблиця 1.

Шкала оцінок якості засвоєння навчального матеріалу

За шкалою ECTS	За національною шкалою		За шкалою навчального закладу (як приклад)	
	екзамен	залік		
A	відмінно	зараховано	5	90–100
B	добре	зараховано	4,5–4,99	82–89
C	добре	зараховано	4–4,49	75–81
D	задовільно	зараховано	3,5–3,99	67–74
E	задовільно	зараховано	3–3,49	60–66
F	незадовільно з можливістю повторного складання	незараховано	2–2,99	35–59
FX	незадовільно з обов’язковим повторним курсом	незараховано	0–1,99	1–34

Як приклад розглянемо методику планування і контролю вивчення курсів «Диференціальні рівняння», «Дискретна математика», «Теорія ймовірностей» студентами спеціальності «Інформатика» на фізико-математичному факультеті КДПУ. Згідно з діючими навчальними планами, названі дисципліни вивчаються протягом одного-двох семестрів і завершуються заліком або екзаменом. Система оцінювання спрямована на заохочення активної, систематичної, творчої роботи студента протягом семестру. У процесі навчання проводяться самостійні роботи (СР), контрольні роботи (КР), індивідуальні домашні завдання (ІНДЗ). Вся робота за семестр з дисципліни оцінюється у 100 балів. Ця величина поділяється на дві складові, у зв’язку із наявністю вихідного контролю.

Якщо вивчення дисципліни завершується заліком, то максимальна кількість балів за роботу у семестрі – 70 балів, вихідний контроль (залікова робота) – 30 балів. При умові здачі студентом екзамену за роботу у семестрі – 60 балів, на екзамені – 40 балів. Навчальна програма побудована за вимогами КМСОНП у ВНЗ та узгоджена зі структурою змісту навчального курсу, передбачає регулярне проведення обов'язкових контрольних заходів, успішне виконання яких має дати семестрову оцінку не більшу 70 балів.

Розглянемо, як з кожної дисципліни контрольні заходи розподіляються за розділами курсу і модулями (табл. 2–4).

Таблиця 2

Контрольні заходи курсу «Теорія ймовірностей»

Змістовий модуль	Основні розділи курсу	Контрольні заходи
1	Елементи теорії ймовірностей	КР1 ІНДЗ1
2	Елементи математичної статистики	КР2 ІНДЗ2

Таблиця 3

Контрольні заходи курсу «Диференціальні рівняння»

Змістовий модуль	Основні розділи курсу	Контрольні заходи
1	Звичайні диференціальні рівняння першого порядку.	СР1 СР2 КР1
2	Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків. Граничні задачі	КР2
3	Системи звичайних диференціальних рівнянь. Теорія стійкості. Варіаційне числення.	СР3
4	Інтегральні рівняння	СР4
5	Математичні моделі й диференціальні рівняння	ІНДЗ
6	Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку. Рівняння математичної фізики	КР3

Таблиця 4

Контрольні заходи курсу «Дискретна математика»

Змістовий модуль	Основні розділи курсу	Контрольні заходи
1	Множини	СР1
2	Бінарні відношення. Відображення.	КР1
3	Алгебраїчні структури	КР2

Змістовий модуль	Основні розділи курсу	Контрольні заходи
4	Комбінаторні конфігурації	СР2
5	Методи підраховування і оцінювання	СР3
6	Основні поняття теорії графів	СР4
7	Зв'язність в графах. Компоненти зв'язності	ІНДЗ 1
8	Цикли в графах	ІНДЗ 2
9	Дерева	ІНДЗ 3
10	Планарність графів. Розфарбування графів.	КР3

З кожної дисципліни ми пропонуємо два варіанти рейтингової оцінки студентів. Перший варіант полягає у накопиченні балів протягом семестру від 0 до 100 за такою схемою:

- 20 балів нараховуються кожному студентові за відвідування занять і відсутність пропусків занять, за кожен не відпрацьований пропуск бали віднімаються від 20;
- 50 (40) балів нараховуються кожному студентові за роботу на практичних заняттях (виконання домашніх завдань, написання самостійних, контрольних, індивідуальних робіт, відповіді біля дошки);
- 30 або 40 балів нараховуються студентам під час складання заліку і екзамену відповідно.

За такою методикою нарахування балів, студенти, які навчаються на «добре» і «відмінно», залік заробляють за результатами навчання у семестрі, а у випадку екзамену мають максимальну кількість балів (60) і шанс отримати високу оцінку на екзамені. Студенти, які навчаються на «задовільно», повинні писати як залікову роботу, так і екзаменаційну, що на наш погляд, спрацьовує на підвищення якості знань студентів, оскільки цілеспрямована підготовка до заліку та екзамену сприяє видаленню тих прогалин у знаннях студентів, які з'явилися протягом семестру.

У відповідності з другим варіантом оцінювання знань студентів пропонуємо всі контрольні заходи з дисципліни оцінювати за п'ятибальною системою і наприкінці семестру обчислювати середній бал студента з даної дисципліни за семестр, який коливатиметься у межах від 0 до 5 балів. Потім, за відповідністю між національною шкалою та шкалою ECTS, перевести отриманий середній бал у стобальну систему. В результаті отримуємо бал, з яким студент виходить на залік або екзамен.

Якщо в кожному із описаних варіантів на кінець семестру студент набирає менше 34 балів, то він не допускається до підсумкового контролю (заліку або екзамену).

На нашу думку, такий підхід до оцінювання знань студентів спрямований на неперервну роботу студента протягом семестру з кожної дисципліни, що значно впливає на якість її засвоєння.

Література

1. Лов'янова І. В. Оцінювання знань студентів в умовах кредитно-модульного навчання / Лов'янова Ірина Василівна // Проблеми сучасної педагогічної освіти : сер. «Педагогіка і психологія» : збірник статей. – Ялта: КГУ, 2008. – Вип. 19. – Ч.2. – С. 48–53.

2. Положення про організацію навчального процесу в кредитно-модульній системі підготовки фахівців. – Кривий Ріг : КТУ, 2005. – 19 с.

3. Чайка В. Основи дидактики : тексти лекцій і завдання для самоконтролю : навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів / Володимир Чайка – Тернопіль : Астон, 2002. – 244 с.

ФОРМИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С ВЫЧИСЛЯЕМОЙ СУММОЙ

А.Н. Моргун
г. Черкассы, Академия пожарной безопасности им. Героев Чернобыля
a-morgun@yandex.ru

Как известно [1], числовой ряд определяется выражением $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$, где a_n, n=1, 2, 3, ... – общий член ряда. При этом предполагается, что общий член задан в виде формулы, в соответствии с которой можно вычислить любой член ряда по его заданному порядковому номеру n.

Суммирование членов ряда можно выполнять последовательно:

$S_1=a_1$,

$S_2=a_1+a_2=S_1+a_2$,

$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$ и т.д.

Мы видим, что каждая очередная частичная сумма получается посредством сложения очередного члена ряда и предыдущего значения суммы. Поэтому, в общем случае, для n-й частичной суммой можно записать $S_n=S_{n-1}+a_n$ при всех $n>1$. При $n=1$ эта формула не используется, так как $S_1=a_1$.

Полную сумму бесконечного сходящегося ряда $S=\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$ с помощью последовательного сложения вычислить невозможно. Поэтому часто с этой целью используют предел $S=\lim_{n\to\infty} S_n$. Отметим, однако, что для этого нужно сначала получить выражение для n-й частичной суммы, что далеко не всегда возможно.

Именно поэтому при планировании и организации практических занятий по высшей математике большой интерес представляют сходящиеся числовые ряды, суммы которых можно получать с помощью простых алгоритмов. В данной статье рассмотрено формирование одного класса числовых рядов, обладающих упомянутым свойством.

Рассмотрим некоторый числовой ряд, n-я частичная сумма которого выражается формулой $S_n=\dfrac{A\cdot n}{B\cdot n+C}$. Будем считать, что $B\cdot n+C\neq 0$ ни при каком n=1, 2, 3, ...

Такой ряд примечателен тем, что он является сходящимся, а его сумма равна $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{A\cdot n}{B\cdot n+C}=\dfrac{A}{B}$. Изучим вопрос, каким же должен быть общий член ряда, чтобы его n-я частичная сумма выражалась формулой $S_n = \dfrac{A \cdot n}{B \cdot n + C}$.

Поскольку $a_n = S_n - S_{n-1}$, то в нашем случае имеем $a_n = \dfrac{A \cdot n}{B \cdot n + C} - \dfrac{A \cdot (n-1)}{B \cdot (n-1) + C}$. Проводим тождественные преобразования и получаем $a_n = \dfrac{A \cdot C}{(B \cdot n + C) \cdot (B \cdot n - B + C)}$.

Отметим, что полученное выражение для общего члена a_n и выражение для n-й частичной суммы не противоречат друг другу при $n=1$, то есть $a_1 = \dfrac{A \cdot C}{(B \cdot 1 + C) \cdot (B \cdot 1 - B + C)} = \dfrac{A \cdot C}{(B + C) \cdot C} = \dfrac{A}{B + C}$ и $S_1 = \dfrac{A \cdot 1}{B \cdot 1 + C} = \dfrac{A}{B + C}$. Это важно, поскольку формула $a_n = S_n - S_{n-1}$ не может применяться при $n=1$.

Отметим также, что корни знаменателя общего члена a_n отличаются между собой на единицу. Действительно, из $B \cdot n + C = 0$ следует $n_1 = -\dfrac{C}{B}$, а из $B \cdot n - B + C = 0$ получаем $n_2 = 1 - \dfrac{C}{B}$, то есть больший корень $n_2 = n_1 + 1$, где n_1 – меньший корень.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Если общий член ряда a_n имеет вид рациональной дроби, в которой

1) знаменатель представляет собой квадратный трёхчлен вида $a \cdot n^2 + b \cdot n + c$, не равный нулю ни при каком $n=1, 2, 3, \ldots$,

2) корни квадратного трёхчлена $a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ – действительные числа и отличаются между собой на единицу,

3) числитель представляет собой некоторую константу,

то n-я частичная сумма такого ряда имеет вид $S_n = \dfrac{A \cdot n}{B \cdot n + C}$, а его сумма $S = \dfrac{A}{B}$.

Теперь решим следующую задачу. Пусть общий член данного ряда a_n имеет вид рациональной дроби, удовлетворяющей вышеуказанным условиям, то есть $a_n = \dfrac{d}{a \cdot n^2 + b \cdot n + c}$, где $d=\text{const}$, а оба корня уравнения $a \cdot n^2 + b \cdot n + c = 0$ не совпадают ни с одним $n=1, 2, 3, \ldots$ и отличаются между собой на единицу. Требуется вычислить сумму данного ряда $S=\frac{A}{B}$, где неизвестные A и B – коэффициенты представления n-й частичной суммы $S_n=\frac{A\cdot n}{B\cdot n+C}$ данного ряда.

Найдём корни знаменателя выражения для a_n, для чего решим уравнение $a\cdot n^2+b\cdot n+c=0$. Пусть n_1 – меньший корень этого уравнения, тогда $n_2=n_1+1$. Согласно теореме Виета имеем $n_1+n_2=-b/a$ или $n_1+n_1+1=-b/a$, откуда $n_1=-\frac{a+b}{2\cdot a}$. Но, с другой стороны, меньший корень равен $n_1=-C/B$. Таким образом, получаем $\frac{C}{B}=\frac{a+b}{2\cdot a}$.

Теперь привлечём выражения для первого члена ряда. С одной стороны, для данного ряда имеем $a_1=\frac{d}{a\cdot 1^2+b\cdot 1+c}=\frac{d}{a+b+c}$. А с другой стороны, как указывалось выше, $a_1=\frac{A}{B+C}$. Разделив числитель и знаменатель этой формулы на B, получим $a_1=\frac{A}{B+C}=\frac{\frac{A}{B}}{1+\frac{C}{B}}$. Отсюда определяем требуемую сумму данного ряда: $S=\frac{A}{B}=a_1\cdot\left(1+\frac{C}{B}\right)$ или, после подстановки, $S=\frac{d\cdot(3\cdot a+b)}{2\cdot a\cdot(a+b+c)}$.

Пример. Найдём сумму ряда $S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2}{n^2+5\cdot n+6}$. Корнями уравнения $n^2+5\cdot n+6=0$ являются числа $n_1=-3$ и $n_2=-2$, отличающиеся между собой на единицу и, очевидно, не совпадающие ни с одним $n=1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, для вычисления суммы данного ряда может быть применена выведенная формула. Здесь $d=2$, $a=1$, $b=5$ и $c=6$. Получаем:
$$S=\frac{d\cdot(3\cdot a+b)}{2\cdot a\cdot(a+b+c)}=\frac{2\cdot(3\cdot 1+5)}{2\cdot 1\cdot(1+5+6)}=\frac{2}{3}.$$

Применить вышеизложенный материал на практических занятиях по высшей математике можно следующим образом.

На этапе подготовки к занятию преподаватель может составить множество задач, например, по следующей схеме:

1) задать меньший корень в виде несократимой дроби $n_1=p/q$, где $q \neq \pm 1$; этим будет достигнуто то, что знаменатель общего члена ряда не обратится в нуль ни при одном n=1, 2, 3, ...; например, $n_1=p/q$=2/3;

2) записать общий член ряда в виде $a_n = \dfrac{d}{a \cdot n^2 + b \cdot n + c}$, где $d=q$, $a=q^2$, $b = -q \cdot (2 \cdot p + q)$, $c = p \cdot (p + q)$; например, d=3, a=9, b=–21, c=10, то есть $a_n = \dfrac{3}{9 \cdot n^2 - 21 \cdot n + 10}$;

3) вычислить ответ к составленной задаче $S = \dfrac{d \cdot (3 \cdot a + b)}{2 \cdot a \cdot (a + b + c)} = -\dfrac{1}{2}$.

На практическом занятии учащийся решает задачу вычисления суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{3}{9 \cdot n^2 - 21 \cdot n + 10}$ следующим образом:

1) ищет корни квадратного уравнения $9 \cdot n^2 - 21 \cdot n + 10 = 0$, получает n_1=2/3, n_2=5/3 и делает вывод, что, поскольку они отличаются между собой на единицу и не равны ни одному из чисел n=1, 2, 3, ..., вычислить сумму ряда вышеизложенным методом возможно;

2) учитывает, что для данных условий n-я частичная сумма ряда имеет вид $S_n = \dfrac{A \cdot n}{B \cdot n + C}$, а для меньшего из найденных корней справедливо равенство $n_1=-C/B$, и делает вывод, что C/B=–2/3;

3) использует условие $S_1=a_1$, из которого получает равенство

$$S_1 = \frac{A}{B + C} = \frac{\frac{A}{B}}{1 + \frac{C}{B}} = \frac{3}{9 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 + 10} = -\frac{3}{2};$$

4) учитывает, что для данных условий сумма ряда вычисляется как $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{A \cdot n}{B \cdot n + C} = \dfrac{A}{B}$, и находит искомую сумму ряда по формуле $S = \dfrac{A}{B} = -\dfrac{3}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{C}{B}\right) = -\dfrac{3}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Литература

1. Кривель І. А. Курс лекцій з вищої математики / Кривель І. А., Моргун О. М. – Ч. 4. – Черкаси : АПБ, 2010.

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ДОКЛАДЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

С.С. Недорезов
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
ned-stanislav@ya.ru

Существенным элементом подготовки будущих специалистов и развития их творческих способностей являются выступления студентов с докладами на конференциях и семинарах. Для студентов старших курсов это доклады по специальным дисциплинам, в то время как для студентов младших курсов это доклады по высшей математике, не умаляя при этом, естественно, значения других обеспечивающих дисциплин.

Современный мир характеризуется широким внедрением математических знаний во все сферы человеческой деятельности. Использование математики в технике вызывает серьезные затруднения ввиду сложности рассматриваемых процессов и явлений. Неумелое применение математических подходов приводит к разочарованию, к неверию в возможности решения технических задач с помощью математических методов. «Как правильно применить математику?» – очень важный вопрос для будущего инженера. Подготовка и выступления студентов с докладами по высшей математике в какой-то мере позволяют ответить на этот вопрос.

Обсуждение тем и методики подготовки докладов может оказаться полезным, особенно для начинающих свою преподавательскую деятельность молодых преподавателей. Выбор тематики докладов осуществляется на основе стандартного курса высшей математики с учетом пройденного материала. Студентам первого курса предлагаются доклады по высшей алгебре и математическому анализу. К началу ежегодно проводимых студенческих конференций соответствующий лекционный материал уже начитан и подготовка к докладам не вызывает особых затруднений.

Структура доклада следующая. В первой части доклада излагается общая теория, затем подробно решаются задачи, иллюстрирующие теорию. Такой доклад может быть предложен нескольким студентам, каждый из которых решает свои задачи.

Рассмотрим в качестве примера один из предлагаемых докладов «Обращение матрицы методом разбиения ее на клетки».

Матрица S разбивается на клетки

$$S=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right). \tag{1}$$

Обратная матрица S^{-1} ищется в виде

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матрицы K, L, M, N находим из условия

$$S\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$\begin{cases} A\cdot L+B\cdot N=0 \\ C\cdot L+D\cdot N=1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} A\cdot K+B\cdot M=1 \\ C\cdot K+D\cdot M=0 \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему матричных уравнений (4), получаем

$$L=-A^{-1}\cdot B\cdot N\ ;\ N=\left(D-C\cdot A^{-1}\cdot B\right)^{-1}. \tag{6}$$

Аналогично решая систему (5), имеем

$$K=A^{-1}-A^{-1}\cdot B\cdot M\ ;\ M=-N\cdot C\cdot A^{-1}. \tag{7}$$

Далее матрицы вычисляются в следующей последовательности: N, L, M, K. Размерность вычисляемых квадратных матриц в два раза меньше размерности исходной матрицы S и именно в этом заключается эффективность рассматриваемого метода.

Обратные матрицы в формулах (6) и (7) находятся стандартным методом. Для матрицы $A=\left\|a_{ij}\right\|$ обратная матрица A^{-1} определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left\|A_{ij}\right\|^{T}, \tag{8}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Предполагается, что рассматриваемые матрицы являются невырожденными, т.е. $\det A\neq 0$

В качестве иллюстрации найдем по формулам (2), (6) и (7) матрицу S^{-1}, обратную матрице

$$S=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ \hline -4 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right). \qquad (9)$$

Последовательно вычисляем:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$; $\left\|A_{ij}\right\|=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $CA^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $CA^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $D-CA^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

6. $N=\left(D-C\cdot A^{-1}\cdot B\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

7. $L=-A^{-1}BN=-\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -41 & 30 \\ 59 & -43 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 41 & -30 \\ -59 & 43 \end{pmatrix}$.

8. $M=-NCA^{-1}=-\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -12 & 19 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -19 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

9. $K=A^{-1}-A^{-1}BM=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -19 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 71 & -112 \\ -102 & 161 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -69 & 111 \\ 99 & -159 \end{pmatrix}$.

10. $S^{-1}=\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -69 & 111 & 41 & -30 \\ 99 & -159 & -59 & 43 \\ 12 & -19 & -7 & 5 \\ -5 & 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$S^{-1}S = \begin{pmatrix} -69 & 111 & 41 & -30 \\ 99 & -159 & -59 & 43 \\ 12 & -19 & -7 & 5 \\ -5 & 8 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренный доклад использует и дополняет лекционный материал, связанный с правилами действий над матрицами.

Приведем темы некоторых докладов:

1. Обращение матрицы и вычисление определителя по схеме Гаусса.
2. Обращение матрицы по схеме Халецкого с уточнением ее элементов.
3. Решение системы линейных уравнений методом главных элементов.
4. Решение системы линейных уравнений методом итераций.
5. Решение нелинейных уравнений. Графическое и аналитическое отделение корня уравнения. Уточнение корня комбинированным методом хорд и касательных.
6. Упрощение формул. Криволинейная асимптота.
7. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.
8. Определение геометрических характеристик детали по ее чертежу.
9. Функционально-аналитическая трактовка вычислительной задачи.
10. Точность вычислительного эксперимента: устойчивость, корректность, сходимость.

Более полный перечень тем рекомендуемых докладов можно найти, например, в [1].

Литература

1. Лурье Л.И. Сборник учебно-исследовательских заданий по высшей математике для технических вузов / Л.И. Лурье. – М. : Издательство ВЗПИ, 1990. – 119 с.

ПРО ПОНЯТТЯ ДОВЖИНИ, ПЛОЩІ ТА ОБ'ЄМУ В ГЕОМЕТРІЇ

В.Я. Нікітенко, П.І. Ульшин
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
v-viktorina@mail.ru

Метою навчання у сучасній школі є виховання всебічно і гармонійно розвиненої особистості. Виходячи з цього варто досліджувати, як засобами математики можна сприяти досягненню цієї мети. Важливим завданням освіти, і математичної освіти зокрема, є формування в учнів цілісного наукового світогляду.

Під науковим світоглядом розуміють систему поглядів на оточуючий світ, на можливість його пізнання людиною, на ставлення до суспільства і праці. Ця система поглядів на природу і суспільні явища основана на даних науки. Тому систематична робота вчителів різних предметів по формуванню цілісного наукового світогляду в учнів повинна бути спрямована не лише на озброєння науковим розумінням навколишнього світу, але і перетворення цих знань у внутрішні переконання кожного учня.

В наш час зростання ролі науки в житті суспільства привело до посиленого вивчення історії розвитку науки з метою прогнозування її подальшого розвитку. Знання основних фактів історії виникнення вихідних понять, основних історичних стимулів розвитку, біографічні відомості про видатних математиків (особливо вітчизняних), знання сучасного стану проблем математики має вплив на ставлення учнів до предмету, на мотивацію їх навчальної діяльності. Видатний математик Ф. Клейн вважав, що суттєвою перешкодою для поширення по-справжньому наукового методу навчання є недостатнє знайомство з історією математики. Виходячи з цього дієвим засобом формування наукового світогляду є використання принципу історизму у навчанні.

Проблематикою використання принципу історизму на уроках математики займались такі відомі математики, педагоги і методисти, як Б.В. Гнеденко, Г.І. Глейзер, Н.Я. Віленкін, Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Ю.А. Дробишев, В.І. Жохов, Л.Я. Зорина, О.А. Савіна, А.Я. Хінчин та ін. Методисти вважають, що розглядати факти з історії математики можна як на уроці, так і в позаурочний час – на факультативах, кружках, спецкурсах.

Видатний математик Г. Лейбніц сказав: «Хто хоче обмежитись сучасним, без знання минулого, той ніколи сучасного не зрозуміє». Виходячи з цього, на уроках, розглядаючи історію математики, особливу увагу варто звертати на наукові ідеї, пошуки, проблеми, методи науки. Саме цей матеріал сприяє розвитку мислення учнів, формуванню їхнього наукового світогляду [2].

В геометрії, як і в будь-якій іншій природничій науці, є поняття «величина», яка вводиться на основі діяльності людини, пов'язаної з вимірюванням. До основних величин цієї науки відносяться довжина, площа і об'єм. Розглянемо шляхи їх встановлення.

З історії розвитку стародавніх цивілізацій в Єгипті і Вавилоні відомо, що вже в XX ст. до н.е. люди проводили різні вимірювання на місцевості. Землеміри або гарпедонавти («натягувачі мотузок») були носіями наукових знань тих часів. Вони впорядковували межі земельних ділянок для вирощування злакових культур, проводили іригаційні роботи, будували житло, зерносховища, храми, велетенські піраміди та робили різні розрахунки.

Характерно, що правила, якими користувалися в ті часи, були встановлені експериментально, без доведень. Одиниці виміру теж обиралися довільно і мали різні назви, наприклад, стадія, фут, сажень, крок, лікоть та ін. Видатний грецький історик Геродот писав, що в 530 році до н.е. на острові Самос через гору, на висоті півтораста сажнів від її підніжжя було побудовано тунель довжиною сім стадій, а висотою і шириною по вісім футів. По всій довжині тунелю проходив водостік глибиною двадцять ліктів і шириною три фути [3].

Практично встановлено, що вимірювання довжини відрізка полягає у відкладанні на ньому одиничного відрізка (одиниці виміру) і його частин. Таким способом можна виміряти будь-який відрізок довільною одиницею виміру з будь-якою точністю [1]. Теоретично питання про існування і єдиність довжини відрізка доводиться в розділах з основ геометрії, а означення довжини вводиться аксіоматично.

Довжиною відрізка AB називається невід'ємне число ρ, яке ставиться у відповідність цьому відрізку, позначається $\rho(AB)$ і задовольняє таким трьом вимогам (аксіомам):

1. Рівні відрізки мають рівні довжини, $\rho(AB)=\rho(BA)$;
2. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин, $\rho(AB+BC)=\rho(AB)+\rho(BC)$;
3. Існує відрізок e, який є одиницею виміру довжини, $\rho(e)=1$.

Історично так склалося, що в різних країнах були впроваджені одиничні відрізки з різними довжинами і назвами. Це приводило до незручностей як у торгівельній і будівельній справах, так і в культурних відносинах. Назрівала необхідність в існуванні однакової одиниці виміру довжини.

В XVII ст. вчені намагалися створити таку одиницю довжини, щоб вона була пов'язана безпосередньо з природою. Це давало б можливість відновити її при втраті.

Одним з перших це питання розглядав голландський вчений Хрістіан Гюйгенс (1629–1695), який написав книгу «Маятникові годинники». Досліджуючи коливання математичного маятника при малих відхиленнях, він встановив таку залежність: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де T – період коливань, l – довжина нитки маятника, g – прискорення земного тяжіння.

Гюйгенс запропонував за одиницю довжини взяти довжину l такого математичного маятника, який робить одне коливання за 2 секунди. Дійсно, якщо прийняти l=1 метр і π^2=g, то рівність малих коливань математичного маятника буде виконуватись з похибкою 0,06. Пропозиція Гюйгенса була відхилена. Основним недоліком було те, що g – прискорення земного тяжіння – залежить від широти на поверхні Землі і від відстані до центра Землі.

Після Великої французької революції в 1789 р. в парламент Франції поступило дві пропозиції для вибору одиниці довжини: К. Талейран запропонував за одиницю довжини взяти довжину секундного маятника на широті 45°, а П. Лаплас – за одиницю довжини взяти частину діаметра Землі.

Для розв’язання цього питання на Національних Зборах була створена комісія, в яку ввійшли знамениті французькі вчені: Ж.Л. Лагранж, П. Лаплас, Ж.Ш. де Борда, Г. Монж, Ж.-А. Кондорсе та ін.

30 березня 1791 р. Національні Збори Франції ухвалили пропозицію комісії і затвердили основною одиницею довжини метр, який дорівнює одній десятимільйонній частині четверті земного меридіану, що проходить через Париж. Практично були враховані обидві пропозиції, оскільки прототип метра, представлений Лапласом Національним Зборам, відрізнявся від довжини секундного маятника всього на 0,6%. Еталон метра – стержень із платино-іридійового сплаву – зберігається в Національному Архіві Франції. Для найменування кратних і частинних одиниць метра за пропозицією Ван-Свиндена були затверджені префікси: деци, санти, мілі, дека, гекта і кіло.

В Росії і на Україні метричну систему мір було прийнято Радою Народних Комісарів 14 вересня 1918 р. До 1927 р. метрична система мір в СРСР була повністю завершена. Поступово до метричної системи мір почали переходити й інші країни: Індія (1956 р.), КНР (1959 р.), Індонезія (1961 р.), Англія (1965 р.) і т.д.

До жовтня 1960 р. користувалися означенням метра, прийнятим VII Генеральною Конференцією з міри та ваги (ГКМВ): «Одиниця довжини – метр – визначається відстанню при 0ºС між осями двох середніх штрихів, нанесених на платиново-іридійовому стержні…». Це означення мало певні недоліки. По-перше, воно не відповідало «природній» мірі, оскільки після повторного вимірювання земного меридіана виникла розбіжність із новим результатом. Тому відмовились від назви «природна» міра і прийняли – «штрихова міра». По-друге, було знайдена похибка за рахунок ширини штрихів і їх форми. Ширина штриха на еталоні біля 10 мкм (10^{-5} м), тому допускається похибка на 10^{-6} мкм.

Наступні дослідження показали, що більшої точності набуде метр, якщо його визначити через довжину світлової хвилі. В зв'язку з цим на XI ГКМВ 1960 р. було відмінене діюче з 1889 р. означення метра через платиново-іридійовий прототип і затверджене нове означення метра: «Метр – довжина, рівна 1 650 763,73 довжин хвиль випромінювання у вакуумі, відповідного переходу між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптону-86». Таке означення метра і зафіксоване в ГОСТ 9867-61 «Міжнародна система одиниць».

У відповідності з постановою ГКМВ Міжнародний комітет міри і ваги розробив інструкцію про умови, в яких повинно відбуватися випромінювання еталонної довжини хвилі джерелом світла, який містив ізотоп криптону-86. В ній також вказані конструктивні дані джерела випромінювання. При дотриманні вказаних умов одержується випромінювання довжини хвилі з похибкою 10^{-8}–10^{-9}. В постанові зазначено, що з розвитком науки і техніки випромінювань відкриваються можливості встановлення еталонів довжини більш високої точності.

У жовтні 1983 р. Міжнародний комітет міри і ваги опублікував рекомендацію ввести новий еталон метра. Запропоновано давати означення метра одним з двох методів:

1. як довжину шляху l, який проходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за час t; довжина шляху визначається за виміряним часом t, користуючись співвідношенням $l=ct$ і значенням швидкості світла у вакуумі c=299 792 458 м/с;
2. довжиною хвилі у вакуумі λ плоскої електромагнітної хвилі з частотою v; довжина хвилі обчислюється за виміряною частотою v, користуючись формулою $\lambda=c/v$ і значенням швидкості світла c=299 792 458 м/с.

У 1983 р. XVII ГКМВ визнала за потрібне ввести нове визначення метра, яке ґрунтується на значенні фундаментальної сталої – швидкості світла у вакуумі та є чинним і дотепер.

Уведення нового, простішого визначення метра спрощує розуміння його фізичного змісту, це визначення зручне для навчальних цілей, але для відтворення розміру метра, створення його еталону доцільно й нині використовувати визначення, прийняте XI ГКМВ.

Прогрес сучасної науки та техніки потребує подальшого вдосконалення еталонів довжини. Такі можливості в принципі існують. Зокрема, наприклад, досліджуються можливості застосування новітніх досягнень фізики у вивченні атомних пучків, оптичних квантових генераторів, ефекту Мессбауера тощо для створення нових, точніших еталонів довжини.

Часто використовуються несистемні метричні одиниці. Так, в навігації за одиницю довжини береться морська миля.

1 морська миля=1 м. миля=1852 м

В теоретичних розділах фізики, астрономії та інших науках застосовуються наступні одиниці довжини:

1 ікс-одиниця=1 x=$1{,}00206 \cdot 10^{-13}$ м

1 астрономічна одиниця довжини=1 а.о.д.=$1{,}496000 \cdot 10^{11}$ м

1 світловий рік=$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м

1 парсек=$3{,}086 \cdot 10^{16}$ м

Розглянемо тепер поняття площі та її вимірювання. Відомо, що плоский трикутник – це частина площини, обмежена трикутником. Геометрична фігура вважається простою, якщо її можна розбити на скінченну кількість плоских трикутників.

Площею простої фігури F називається невід'ємне число S, що ставиться у відповідність цій фігурі $S(F)$, ($S(F) \geq 0$), яке задовольняє таким умовам (аксіомам):

1. Рівні фігури мають рівні площі. Якщо $F_1=F_2$, то $S(F_1)=S(F_2)$;
2. Якщо фігура розбивається на прості фігури, то площа цієї фігури дорівнює сумі площ її частин. Якщо $F_1+F_2=F$, то $S(F_1)+S(F_2)=S(F)$;
3. Існує квадрат F_0 зі стороною, рівною одиниці виміру довжини, площа якого дорівнює одиниці виміру довжини, піднесеній до квадрату, $S(F_0)=1$.

В метричній системі виміру одиниця виміру площі 1 м^2.

За допомогою аксіом легко довести, що площа прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S=ab$. Таку формулу було знайдено експериментально ще в Стародавньому Єгипті і Вавилоні. Площа будь-якого многокутника визначається як сума площ трикутників, на які його можна розбити.

Нехай дано довільну плоску фігуру F. Щоб визначити її площу $S(F)$, вписують в цю фігуру многокутники $\{F_{1n}\}$ і описують навколо неї многокутники $\{F_{2n}\}$. Маємо співвідношення $S(F_{1n}) \leq S \leq S(F_{2n})$. Якщо границя верхньої межі вписаних многокутників дорівнює границі нижньої межі описаних многокутників і дорівнює деякому числу, то фігура називається кадрованою і має площу, рівну цьому числу. Якщо лінія, яка є обвідною даної фігури, неперервна, диференційована і задана на скінченному проміжку, то площу цієї фігури можна визначити за допомогою інтегрування.

При введенні об'єму, спочатку дається означення об'єму для простого тіла, тобто тіла, яке розбивається на скінченну кількість трикутних пірамід.

Об'ємом простого тіла M називається невід'ємне число V, яке ставиться у відповідність цьому тілу $V(M)$, ($V(M)\geq 0$), і задовольняє таким трьом умовам (аксіомам):

1. Рівні тіла мають рівні об'єми. Якщо $M_1=M_2$, то $V(M_1)=V(M_2)$;
2. Якщо тіло розбивається на прості тіла, то об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів його частин. Якщо $M_1+M_2=M$, то $V(M_1)+V(M_2)=V(M)$;
3. Існує куб M_0 з ребром, рівним одиниці довжини, об'єм якого дорівнює одиниці довжини, піднесеній до кубу, $V(M_0)=1$.

В метричній системі виміру одиниця виміру об'єму 1 м^3.

Далі встановлюється, що об'єм прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c визначається за формулою $V=abc$. Об'єм будь-якого многогранника визначається числом, рівним сумі об'ємів трикутних пірамід, з яких складається цей многогранник.

Об'єм будь-якої просторової фігури визначається рівністю границь верхньої межі вписаних многогранників і нижньої межі описаних многогранників відносно даної фігури. Якщо вказані границі рівні, то фігура кубована і її об'єм дорівнює значенню цієї границі. Якщо поверхня просторової фігури неперервна і диференційована функція, задана на скінченному проміжку, то її об'єм можна знайти за допомогою інтегрування.

Вимірювання в геометрії є одним із основних процесів і відіграє важливу роль при її вивченні.

Література

1. Александров А. Д. Геометрия / Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. – М. : Наука, 1990. – 672 с.
2. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : монографія / Бевз В. Г. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – 360 с.
3. Глейзер Г. И. История математики в школе, VII-VIII классы / Глейзер Г. И. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.

ГЕОМЕТРО-ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФРАКТАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ КВАДРАТА

А.Б. Нифанин[1], Д.И. Ткач[2]
[1] г. Днепропетровск, Днепропетровский индустриальный колледж
[2] г. Днепропетровск, Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
tkachdi@gmail.com

Постановка задачи: Произвести дальнейшее исследование ранее описанного [1–8] процесса фрактального расширения квадрата с целью выявления его новых позиционных и метрических свойств.

Ход исторического развития естествознания в конце XX века привел к возникновению теории хаоса, синергетике и фрактальной геометрии. Достижения этих наук раскрыли содержание нелинейных объектов, процессов и явлений в природе, имеющих фрактальные структуры и обладающие способностью к самоорганизации. Можно сказать, что они являются тремя взаимосвязанными подсистемами современной системы познания мира. При этом теория хаоса и синергетика носят преимущественно вербально-аналитический характер, а его визуализацией занимается фрактальная геометрия.

Фрактальная геометрия Б. Мандельброта определила новый подход к пониманию реальной природы окружающего мира, геометрия которого со времен Евклида и Аристотеля считалась евклидовой. Автор новой геометрии доказал её фрактальность, основанную на диалектической логике Демократа, согласно которой всё течет и изменяется, а силу закона имеет то, что неизменно в процессе изменения.

Б. Мандельброт в своей книге «Фрактальная геометрия природы» даёт определение фрактала как «структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому», ибо бесконечное дробление и подобие мельчайших частиц целому – это принцип «устройства» природы. К классу фрактальных объектов, помимо реальных береговых линий, имеющих бесконечную длину в конечном пространстве, крон деревьев, элементов земного рельефа и облаков, размерность которых больше двух, но меньше трёх и др., различными математиками предложены абстрактные геометрические фигуры, имеющие фрактальную природу. Это «снежинка» Коха, «дракон» Хартера-Хейтуэя, «салфетка» и «ковер» Серпинского, «пыль» Кантора, «колбаса» Минковского, «отель» Гильберта и др. Все они сконструированы на принципе выполнения последовательных итераций дробления элементов исходной фигуры в сторону уменьшения получаемых самоподобных фигур в их стремлении к дробномерному пределу. Это подобно особенностям перспективного видения столбов вдоль дороги, видимые формы которых закономерно уменьшаются в их стремлении к линии горизонта.

Возникает предположение: если существует реальный прямой процесс фрактального самоподобного уменьшения элементов исходной фигуры, то должен существовать и обратный процесс самоподобного увеличения или расширения исходной фигуры. И оказывается, что такой процесс существует и имеет существенное, но не до конца изученное содержание.

Если в качестве исходной фигуры взять наиболее технологичный квадрат [1] и подвергать его последовательному итерационному «расширению» путем прибавления к последующим результатам итераций результатов его предыдущих топологических преобразований, то станут возникать фигуры, имеющие фрактальный характер (рис. 1). Их фрактальность определяется самоподобием последующего предыдущему.

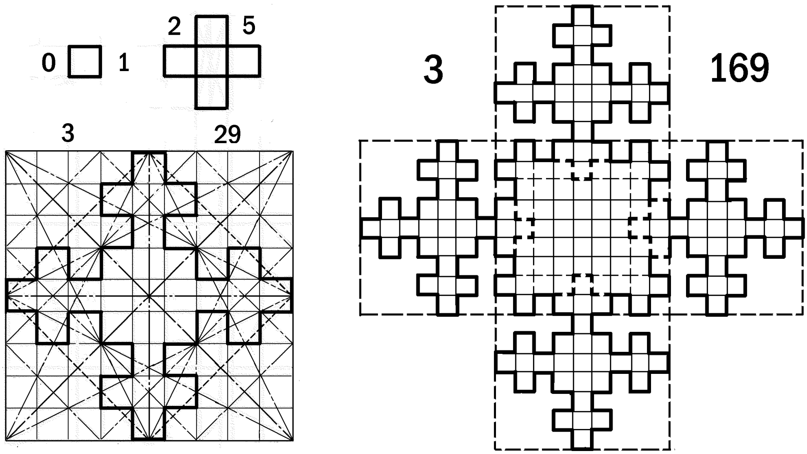


Рис. 1. 4 итераций фрактального расширения квадрата

При этом первая итерация преобразует одиночный квадрат в 5-клеточный крест, вторая – в 29-клеточную фигуру, третья – в 169-клеточную фигуру, четвёртая – в 985- клеточную и т.д. Среди них наиболее оптимальной оказывается 29-клеточная фигура, вписанная в 81-клеточный квадрат, в структуру композиции которого входят 4 золотых треугольника, основаниями которых служат стороны квадрата, вписанного в габаритный квадрат и 4 двойных квадрата как 16 треугольников Дюрера. В результате третьей итерации 29-клеточная фигура топологически преобразуется в 169-клеточную, в структуру которой входят 4 29-

клеточных фигуры, габариты которых самоподобно повторили 5-клеточный крест, две девятых части которых «вросли» в центральный квадрат.

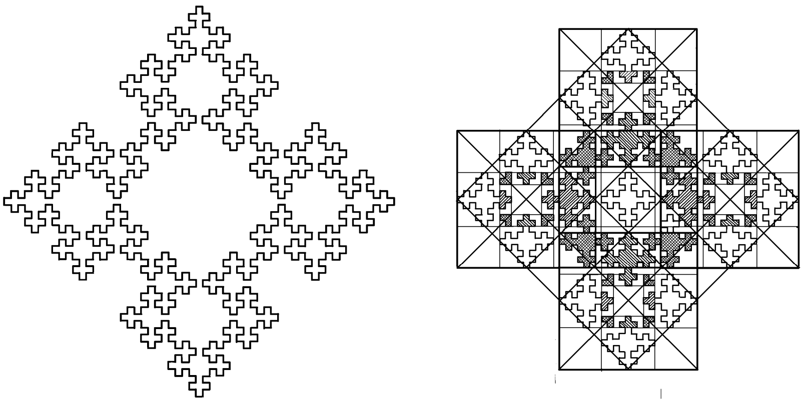


Рис. 2. 985-клеточная фигура 4-й итерации и её структуризация

Четвёртая итерация топологически преобразует 169-клеточную фигуру в 985-клеточную, в структуру которой входят четыре 169-клеточные фигуры, габариты которых самоподобно повторили 5-клеточный крест и своими шестью двадцать третьими частями «вросли» центральный квадрат. Область «врастания» при этом структурируется 29-клеточными фигурами, которые вступают между собой в замковые соединения и можно сказать, что боковые фигуры «вырастают» из центрального квадрата подобно веткам дерева, вырастающим из его ствола. Отсюда следует вывод, что *процесс фрактального расширения квадрата является геометро-графической моделью процесса роста клеточных структур живой природы.*

Результаты последовательных итераций исходной квадратной клетки можно представить элементами комбинаторных композиций, плотно упаковывающих плоскость.

Исходная квадратная клетка в комбинаторном соединении покрывает плоскость непрерывной сетью квадратов с тождественно расположенными сторонами. 5-клеточные кресты плотно упаковывают плоскость, примыкая друг к другу по свастикообразным швам (рис. 3). Количественной характеристикой их взаимного расположения можно принять отношение катетов прямоугольных треугольников, гипотенузы которых соединяют центры этих крестов.

Комбинаторика 4-х 29-клеточных элементов плотно упаковывает плоскость благодаря их замковым соединениям. Отношение катетов треугольников, гипотенузы которых соединяют их центры, равно 2 к 5. Сумма их квадратов (4+25) равна 29, т.е., числу клеток в одном элементе (рис. 4).

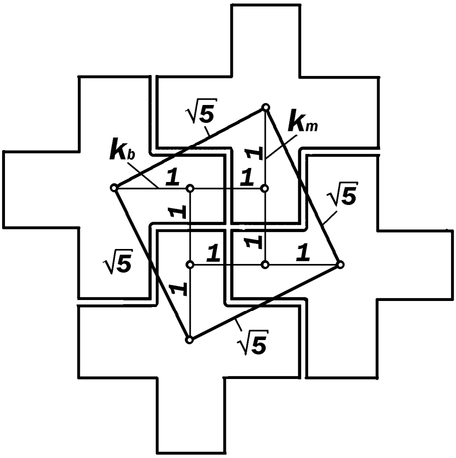


Рис. 3. Упаковка крестов

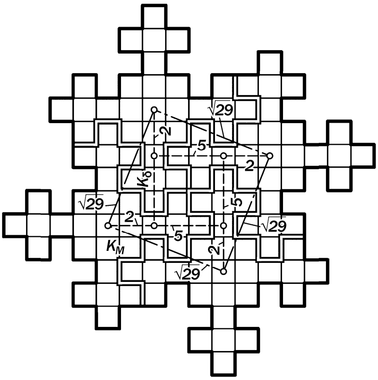


Рис. 4.Упаковка 29-кл. элементов

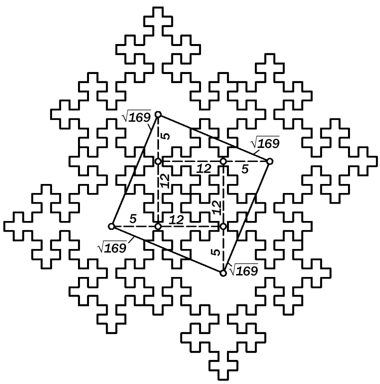


Рис. 5. Упаковка 169-кл. элементов

Комбинаторное соединение 4-х 169-клеточных элементов в замок образует их систему как единое целое. Прямые, соединяющие их центры, являются гипотенузами прямоугольных треугольников, длины катетов которых относятся как 5 к 12. Сумма их квадратов (25+144) равна квадрату гипотенузы (169), т.е., числу клеток в одном элементе. И т.д.

Следуя принятой методике преобразования фигур предыдущих итераций в последующие, можно получать всё более сложные по своей геометрической структуре фигуры, расширяющиеся до бесконечно больших размеров.

Сравнительная оценка процесса изменения значений отношения катетов в прямоугольных треугольниках, гипотенузы которых соединяют центры этих фигур, позволяет определить количественный закон протекания всего итерационного процесса (таблица 1).

Таблица 1

Количественные характеристики итерационного процесса фрактального расширения квадрата

№ итерации (n)	0	I	II	III	IV	V	VI
$\mathbf{K}_b$ – катет большой	**1**	**2**	**5**	**12**	**29**	**70**	**169**
$\mathbf{K}_m$ – катет малый	**0**	**1**	**2**	**5**	**12**	**29**	**70**
Число клеток	**1**	**5**	**29**	**169**	**985**	**5741**	**33461**
Число сторон	**4**	**12**	**52**	**220**	**932**	**3948**	**16724**

Анализ таблицы указывает на следующую закономерность:

$$\mathbf{K}_{b(n)} = \mathbf{2}\ \mathbf{K}_{b(n-1)} + \mathbf{K}_{m(n-1)}.$$

Поскольку $\mathbf{K}_{m(n-1)} = \mathbf{K}_{b(n-2)}$, то тогда $\mathbf{K}_{b(n)} = \mathbf{2}\ \mathbf{K}_{b(n-1)} + \mathbf{K}_{b(n-2)}$, откуда вытекает новый числовой ряд вида:

$$\boxed{\mathbf{a_n = 2\ a_{n-1} + a_{n-2}}} \qquad (1)$$

Это выражение является рекуррентной формулой итерационного процесса расширения квадрата.

Числовой ряд изменения количества клеток в фигурах, начиная с 2-ой итерации, описывается следующим выражением:

$$\boxed{\mathbf{a_n = 6\ a_{n-1} - a_{n-2}}} \qquad (2)$$

Особенности изменения количества сторон последовательных результатов итераций, начиная с 2-ой, описывается выражением:

$$\boxed{\mathbf{a_n = 4\ a_{n-1} + a_{n-2}}} \qquad (3)$$

К числу отличительных особенностей плотных упаковок плоскости различными фрактальными фигурами относится их синергетизм или способность к самоорганизации, так как замковые соединения между ними перераспределяют напряжения от возможных нагрузок и заставляют работать сборную конструкцию, к примеру, дорожного полотна, как монолитную, но трещиноустойчивую, так как роль трещин играют швы между элементами.

Особое внимание следует обратить на тот факт, что справедливость выражений (2) и (3) наступает начиная со 2-ой итерации. Это объясняется эмерженотностью процесса, когда его закономерности, описываемые этими выражениями, возникают скачкообразно и не распространяются на описание его начала.

Рассматривая позиционные свойства плотных упаковок, обратим внимание на свастикообразные швы, как бы зажатые между крестовыми элементами. Если мысленно представить, что они расширяются за счет соответствующего сокращения крестов до одинаковости их ширины, то получится двухэлементная упаковка из крестов и свастик, которая самозамыкается в силу возникающей синергетичности.

Если продолжать процесс сжатия крестов до уровня шва между элементами, то должна возникнуть свастиковая структура, элементы которой также можно представить как результаты соответствующего фрактального расширения квадрата (рис. 6).

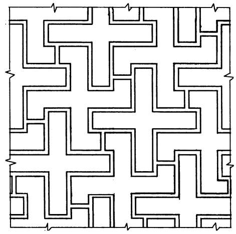


Рис. 6. Упаковка из крестов и свастик

В результате первой итерации квадрата возникает 5-клеточный крест, но, следуя структуре свастики, в результате второй итерации к боковым клеткам креста присоединяются двойные квадраты, в результате чего возникает 13-клеточная свастика (рис. 7).

Третья итерация прибавляет к крестовой основе свастики по 5 П-образно расположенных клеток и получается 25-клеточная свастика, 4-я итерация прибавляет к крестовой основе по 9 специально расположенных клеток и получается 41-клеточная меандроподобная свастика и т.д.

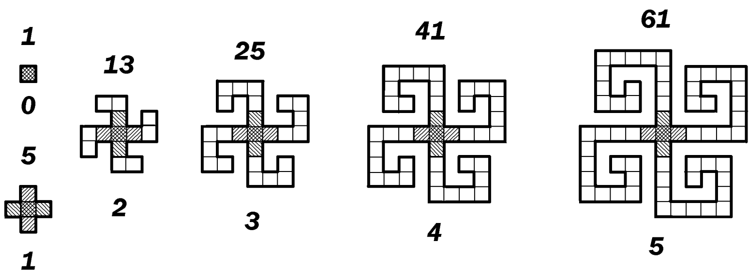


Рис. 7. Четыре итерации фрактального преобразования креста в свастики

Практически исходный квадрат в результате первой итерации преобразуется в пятиклеточный крест, который в последующих итерациях остаётся их инициатором.

Рассмотрим структуры упаковок из свастик разных итераций.

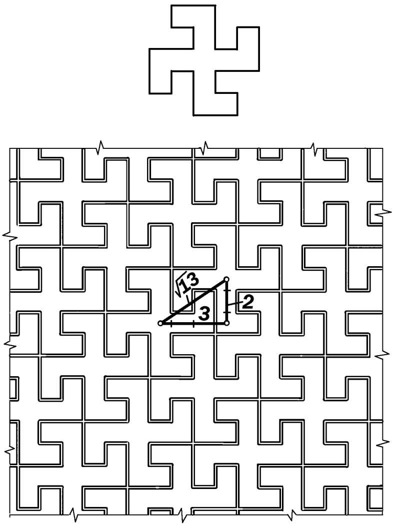


Рис. 8. Упаковка 13-клеточных свастик

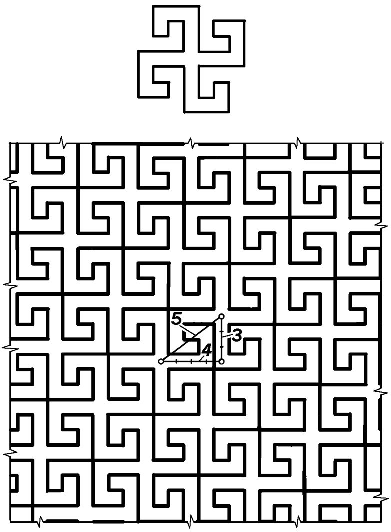


Рис. 9. Упаковка 25-клеточных свастик

Результаты 4-й, 5-й и последующих итераций пяти клеточного креста также плотно упаковывают плоскость, а их метрические характеристики легко экстраполируются на основе имеющейся информации о величинах катетов прямоугольных треугольников, гипотенузы которых соединяют центры элементов (табл. 2).

Таблица 2

Количественные характеристики итерационного процесса фрактального расширения 5-клеточного креста

№ итерации (n)	0	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\mathbf{K}_b$ – катет большой	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{K}_m$ – катет малый	0	1	2	3	4	5	6	7
Число клеток	1	5	13	25	41	61	85	113

Статистический анализ этой таблицы показывает, что:

$$\mathbf{K}_{b(n)} = 2\,\mathbf{K}_{b(n-1)} - \mathbf{K}_{m\,(n-1)}.$$

Поскольку $\mathbf{K}_{m\,(n-1)} = \mathbf{K}_{b(n-2)}$, то $\mathbf{K}_{b(n)} = 2\,\mathbf{K}_{b(n-1)} - \mathbf{K}_{b(n-2)}$. (4)

Оказывается, что выражение (4) описывает ряд натуральных чисел:

$$\boxed{\mathbf{a_{(n)} = 2\, a_{(n-1)} - a_{(n-2)}}}$$

или -n,…, -8,-7,-6,-5,-4,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,… n (5)

Выражение (5) принципиально отличается от общепринятой формулы ряда натуральных чисел $\mathbf{a_{(n)} = a_{(n-1)}} \pm 1$ тем, что оно вытекает из количественного анализа особенностей итерационного процесса фрактальных преобразований 5-клеточного креста, который его пространственно моделируют.

Это означает, что любые операции с числами опосредованно индуцируют соответствующие операции со структурами фрактального расширения свастик.

Сравнение выражений (1) и (5) указывает на одинаковость их элементов в правой части и на их различие в знаках между этими элементами. Это обстоятельство свидетельствует не о противоположности, а о взаимной дополнительности и неразрывной связи процессов фрактальных расширений квадрата и 5-клеточного креста в свастики.

Так как фрактальная геометрия в целом своеобразно визуализирует естественные линейные и нелинейные процессы в природе, то и предлагаемая геометрия фрактального расширения простых геометрических фигур также геометро-графически моделирует процесс роста живых клеточных структур в виде формирования кроны деревьев и поведения вьющихся растений, в частности, усов винограда. Только эти модели более конкретны так как более закономерны и наглядны.

Выводы:

1. Геометрия фрактального расширения простых геометрических фигур, в частности, квадрата и 5-клеточного креста, является новым разделом фрактальной геометрии, имеющим самостоятельное значение.

2. Итерационные процессы фрактального расширения квадрата и свастик взаимодополнительны и неразрывно взаимосвязаны, так как являются геометро-графическими моделями двух сторон единого процесса роста и развития клеточных структур живой природы.

Литература

1. Ткач Д. И. Геометрия трещиноустойчивых и самозамыкающихся структур дорожных покрытий / Ткач Д. И., Нифанин А. Б. // Системные технологии. – 2006. – 3(44). – С. 121-127.

2. Нифанин А. Б. Геометрия двухслойных синергетических структур и её приложения / Нифанин А. Б., Ткач Д. И. // Вісник Київського національного університету технологій і дизайну. – 2006. – №4. – С.9 0-95.

3. Ткач Д. И. Геометрия золотого кольца и её приложения покрытий / Ткач Д. И., Нифанин А. Б. // Геометричне і комп’ютерне моделювання :

збірник №18. – Харків, 2007. – С. 147-153.
4. Ткач Д. И. Геометрия фрактального расширения квадрата и её приложения / Ткач Д. И., Кистол А. Д., Нифанин А. Б. // Строительство, материаловедение, машиностроение : выпуск 41, часть 3. – Днепропетровск, 2007. – С. 118-123.
5. Нифанин А. Б. Графо-аналитическая интерпретация степенного ряда степенного ряда золотой пропорции и золотые логарифмы приложения / Нифанин А. Б., Ткач Д. И. // Наукові нотатки : випуск №22, частина 1. – Луцьк, 2008. – С. 242-248.
6. Ткач Д. І. Побудова і дослідження «люкових» ступеневих рядів золотої пропорції / Ткач Д. І., Ніфанін О. Б. // Прикладна геометрія та інженерна графіка : випуск 80. – К., 2008. – С. 112-116.
7. Ткач Д. И. Фрактальное расширение квадрата как геометрографическая модель процесса роста клеточних структур живой природы / Ткач Д. И., Кистол А. Д., Нифанин А. Б. // Геометричне та комп’ютерне моделювання : збірник наукових праць, випуск 25. – Харків, 2009. – С. 170-175.
8. Нифанин А. Б. Группа золотых иррациональностей как метрическая основа геометрии фрактального расширения квадрата приложения / Нифанин А. Б., Ткач Д. И. // Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование. – Харьков, 2009. – С. 180-191.

ФОРМУВАННЯ ОЦІННО-РЕФЛЕКСІЙНОГО КОМПОНЕНТА ГОТОВНОСТІ ДО НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

М.В. Овчинникова
м. Ялта, Кримський гуманітарний університет
m_ovchinnikova@ukr.net

Постановка проблеми. Формування готовності до науково-дослідницької діяльності майбутнього вчителя математики є цілісним процесом. Дана готовність виявляється у єдності основних компонентів: мотиваційного, когнітивного, операційного і оцінно-рефлексійного.

Ефективне формування оцінно-рефлексійного компонента можливе лише за умови внутрішньої активності майбутніх вчителів математики, що спрямована на самоконтроль, самопізнання, саморозвиток, самовдосконалення і самореалізацію особистості студента. Крім того, рефлексія у науково-дослідницький діяльності необхідна як молодому вчителеві математики, так і педагогові-майстрові для оцінки своїх професійних планів і мотивів, виявлення і розвитку наявних професійних здібностей, вивчення досвіду свого професійного минулого і сьогодення, прогнозування професійного майбутнього.

Формування оцінно-рефлексійного компонента готовності до науково-дослідницької діяльності у майбутніх вчителів математики у їх професійній підготовці – процес тривалий, систематичний, безперервний.

Аналіз досліджень і публікацій дозволив виділити таки базові підходи до вивчення питань рефлексії: діяльнісний (Л. Виготський, О. Леонтьев); педагогічний (О. Анісимов, О. Зак, А. Захарова, А. Найн, Н. Сайгушев); особистісний (Ф. Василюк, М. Гінзбург, О. Лазурський); акмеологічний (К. Абульханова-Славська, А. Бодальов, А. Реан).

Проблема формування оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутнього вчителя математики до науково-дослідницької діяльності у його професійній підготовці вимагає подальшого поглибленого вивчення, що підтверджується необхідністю вирішення таких протиріч :між сучасними вимогами до якості науково-дослідницької підготовки майбутніх вчителів математики та традиційними підходами до неї, що не забезпечують у належній мірі сформованого оцінно-рефлексійного компонента готовності випускників до науково-дослідницької діяльності; між соціальним замовленням на фахівця з високим рівнем сформованості оцінно-рефлексійного компонента готовності і недостатньою теоретичною розробленістю і методичною забезпеченістю процесу формування даного компонента у рамках професійної підготовки майбутніх вчителів математики.

Мета статті: описати комплекс педагогічних умов формування оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності.

Виклад основного матеріалу. У процесі дослідження були виявлені таки педагогічні умови, реалізація яких показала свою ефективність у формуванні оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності: забезпечення рефлексійної спрямованості викладання фундаментальних і професійно-спрямованих дисциплін; створення на навчальних заняттях, у діяльності студентського наукового товариства, індивідуальній науково-дослідницький діяльності оцінно-рефлексійного середовища, що сприяє пізнанню і адекватному оцінюванню студентом себе як суб'єкта науково-дослідницької діяльності і своїх дій; використання освітніх технологій, що актуалізують діяльність самооцінки і рефлексію майбутніх фахівців.

С позицій філософії і психології рефлексія – це принцип філософського мислення; поняття, що позначає віддзеркалення; форма теоретичної діяльності людини у суспільстві (О. Донських, І. Кочергин, Г. Щедровицький) [3].

О. Карпов з позицій системного підходу розглядає рефлексію як комплексне синтетичне утворення, яке виступає одночасно як психічний процес, властивість і стан суб'єкта. Н. Алексєєв і Г. Щедровицький розглядають рефлексію як процес і структуру діяльності і як механізм природного розвитку діяльності. У педагогіці (А. Зимня, К. Вазіна, О. Воронцов) виділено три види рефлексії: елементарна, наукова, філософська [2]. Уміння рефлексувати проявляється через уміння оцінювати і контролювати свої дії, помічати протиріччя, які є причиною руху думки (А. Коржуєв, В. Попков).

Ми розглядали оцінно-рефлексійний компонент готовності майбутнього вчителя математики як стан спрямованості його особистості на усвідомлення своєї науково-дослідницької діяльності і самого себе як її суб'єкта. Даний компонент сприяє розвитку професіоналізму вчителя математики, і проявляється у здібності до постійного особистісного і професійного самовдосконалення і зростання, на основі психологічних механізмів самоаналізу, саморегуляції, самооцінки і самоконтролю.

Відповідно до досліджень Л. Мітіной, П. Решетникова, К. Абульханової-Славської [1], ми виділили таки складові оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності: здібність до рефлексії науково-дослідницької діяльності; здібність до саморегуляції, самоконтролю, самоаналізу; професійна самооцінка. Кожна з даних складових оцінно-рефлексійного компонента розвивається через реалізацію означених педагогічних умов.

Спрямованість рефлексії викладання фундаментальних і професійно-направлених дисциплін забезпечує формування оцінно-рефлексійного компонента готовності через актуалізацію і спонукання внутрішньої активності, мотивів і потреб (Л. Божовіч, О. Леонтьєв, С. Рубінштейн), інтересу (Г. Щукина), цінності (І. Кон), які у процесі науково-дослідницької підготовки майбутніх вчителів математики стають особистісно значимими. Соціальні мотиви виступають як внутрішні регулювальники професійної поведінки майбутнього фахівця.

Забезпечення формування оцінно-рефлексійного компонента здійснювалося доцільним підбором методів і форм організації процесу науково-дослідницької підготовки майбутнього вчителя математики, базувалося на проблемних, частково-пошукових, дискусійних, рефлексійних методах, що спрямовані на усвідомлену побудову висновків, подальший розвиток умінь аналізувати, синтезувати і систематизувати навчальний матеріал, адекватно оцінювати себе і свої дії у процесі науково-дослідницької підготовки. Основним результатом формування оцінно-рефлексійного компонента готовності до науково-дослідницької діяльності майбутнього вчителя математики повинне стати уміння осмислювати і у майбутньому професійно діяти на основі отриманих у ході вивчення фундаментальних і професійно-орієнтованих дисциплін науково-практичних знань.

Створення оцінно-рефлексійного середовища, яке сприяє пізнанню і адекватному оцінюванню студентами себе і своїх дій, проводилося по таким основним напрямах – створення проблемно-конфліктних ситуацій; установка на спільну діяльність; обмін наявним професійним досвідом майбутніх вчителів математики. Основні методи, які ми використовували для створення оцінно-рефлексійного середовища: групові рефлексійні практикуми, ігрове моделювання і тренінговий метод (Н. Алексєєв, С. Неверковіч, С. Котельников, Г. Щедровицький).

Освітні технології, що актуалізують діяльність самооцінки і рефлексію майбутніх вчителів математики – ігрові технології (Г. Щедровицький) [3], які допомагають створенню групової рефлексії через залучення кожного до гри. Ми використовували рольові, ділові, імітаційні ігри.

В процесі професійної підготовки майбутніх вчителів математики сформованість оцінно-рефлексійного компонента їх готовності до науково-дослідницької діяльності перевірялася відповідно до виділеного однойменного критерію, його показників і розподілялася по чотирьох рівнях – нульовому, початковому, середньому і високому. Показники виділеного критерію: здібність до професійного самоврядування; прагнення до професійного саморозвитку; ситуативна, ретроспективна і перспективна рефлексивність; комунікативний самоконтроль; самооцінка особистості і науково-дослідницької мотивації; самооцінка онтогенетичної рефлексії і професійних умінь майбутнього вчителя математики.

Виділення нульового рівня компонента готовності, що формується, зумовлене тим фактом, що серед майбутніх вчителів математики, охоплених експериментальною роботою були виявлені такі, які не мали і початкових умінь професійного самооцінювання і рефлексії. При цьому вони не лише не усвідомлювали їх значущості, але і завжди оцінювали свою практичну діяльність як ідеальну.

На констатуючому етапі експерименту у контрольних і експериментальних групах розподіл по рівнях був таким: високий рівень був відсутній, середній рівень мали 26,8% і 25,6% респондентів відповідно, початковий рівень – 68,3% і 60,5%, нульовій рівень – 4,9% і 14,0%.

За підсумками констатуючого етапу експерименту зроблено висновок, що у традиційних умовах оцінно-рефлексійний компонент готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності має переважно низький рівень. На підставі отриманих результатів і відсутності підтвердження самостійного формування даного компонента підтверджено необхідність цілеспрямованої реалізації наведеного вище комплексу педагогічних умов.

Методика реалізації першої педагогічної умови передбачала: формування базових математичних знань, знань з педагогіки і психології, науково-дослідницьких навичок як складових професіоналізму шляхом активного використання проблемних, частково-пошукових, дискусійних, дослідницьких методів; стимулювання інтересу до науково-дослідницької діяльності, внутрішньої активності і самостійності студентів; підвищення рівня науково-дослідницької компетентності майбутніх фахівців.

Для використання цих методів у процесі професійної підготовки при вивченні фундаментальних і професійно-орієнтованих дисциплін майбутніх вчителів математики були використані прийоми: пошуково-дослідницькі, рефлексії, емпатичні, довірливого спілкування, прийом підведення підсумків. У експерименті ми використовували таки типі проблемних ситуацій: завдання, яке студент не може вирішити у зв’язку недостатністю знань; завдання, що містять протиріччя між теоретично можливими шляхами вирішення ситуації і практичною нездійсненністю вибраного способу. Окрім традиційних, ми використовували такі форми: методологічний семінар, що пояснює важливість саморефлексії і самоконтролю у професійній діяльності і її науково-дослідницький складовій, «круглі столи», лабораторно-практичні заняття, загальна мета яких – самоаналіз професійного потенціалу майбутнього вчителя математики, якого можна реалізувати у процесі науково-дослідницької діяльності, усвідомлення власної позиції до майбутньої і справжньої професійно-направленої науково-дослідницької діяльності; самостійна робота, у ході якої студенти вивчали математичний, педагогічний для психологічний матеріал і розглядали його з позицій організації науково-дослідницької діяльності. Студентам пропонувалися завдання, спрямовані на: усвідомлення студентами специфіки своєї майбутньої науково-дослідницької діяльності у різних ситуаціях і на різних рівнях професіоналізму; аналіз співвідношення понять, пов'язаних з їх науково-дослідницької діяльністю та їх порівняння.

Друга умова реалізовувалася через імітаційне моделювання ситуацій, ігрових, рефлексійних, прийомах діагностики і самодіагностики, довірчого спілкування, підведення підсумків. У процесі вивчення фундаментальних і професійно-орієнтованих дисциплін з метою створення оцінно-рефлексійного середовища нами були використані таки форми організації навчання: ігрова рефлексія, активні види викладання лекційного матеріалу (лекції з навмисними помилками, лекції-дискусії, лекції-візуалізації), лабораторно-практичні заняття, індивідуальні і групові консультації.

Для забезпечення реалізації третьої педагогічної умови застосовувалися діагностичні методики, опитувальники, тести, відеозаписи занять, направлені на усвідомлення власної позиції у напрямі науково-дослідницької складової майбутньої професії; самоаналіз свого внутрішнього науково-дослідницького потенціалу; корекцію своєї професійної самооцінки; рефлексію майбутньої науково-дослідницької діяльності. Завдання, пропоновані майбутнім вчителям математики, були спрямовані на усвідомлення стратегій, тактик, мотивів науково-дослідницької діяльності; усвідомлення свого місця у професійній діяльності, своїх особистісних і професійних якостей.

В результаті проведеного експерименту підсумковий показник даного компонента готовності високого рівня у контрольній групі мали 4,9% і у експериментальній групі – 20,9%, середнього, початкового і нульового рівнів – відповідно 24,4% і 65,1%, 65,9% і 14,0%, 4,9% і 0%.

Висновки. Реалізація у взаємозв'язку і єдності педагогічних умов формування оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності дозволила істотно підвищити рівень сформованості даного компонента.

Подальшої розробки вимагають альтернативні педагогічні умови ефективного формування оцінно-рефлексійного компонента готовності майбутніх вчителів математики до науково-дослідницької діяльності.

Література

1. Альбуханова-Славская К. О. Деятельность и психология личности / Альбуханова-Славская К. О. – М. : Наука, 1980. – 335 с.
2. Зимняя И. А. Педагогическая психология / Зимняя И. А. – Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. – 480 с.
3. Щедровицкий Г. П. Избранные труды / Щедровицкий Г. П. – М. : Шк. культ. полит., 1995. – 800 с.

ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ МЕТОДОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ НА СУЧАСНОМУ ЕТАПІ

Є.І. Орлюк
м. Житомир, Житомирський військовий інститут
Національного авіаційного університету
orlyuk.ei@gmail.com

Розкриємо «Философский энциклопедический словарь» (Москва, Советская энциклопедия, 1983) на сторінці 840 та прочитаємо: «Методология – система принципов и способов организации и построения теоретической и практической деятельности, а также учение об этой системе». Тобто, якщо ми бажаємо розглядати методологію навчання математики у вищій школі, то повинні, перш за все, вести мову про ті принципи, що кладуться в основу викладання математики у технічному вищому навчальному закладі та про те, як ці принципи реалізуються практично під час викладання математичних дисциплін.

Принципи, про які йде мова, мають властивість здорового консерватизму і були закладені на підставі величезного досвіду викладання математики протягом минулого сторіччя.

У книзі [1] видатного російського математика-педагога Л.Д. Кудрявцева вони чітко сформульовані. Вважаю, що їх варто нагадати всім, хто пов'язав своє життя з математичною освітою. Цитую за першоджерелом.

«<u>Положение первое</u> – объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты и структуры, у которых описан ряд отношений между их элементами.

<u>Положение второе</u> – деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено.

<u>Положение третье</u> – содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики.

<u>Положение четвертое</u> – целью при обучении математики является, приобретение учащимся определенного круга знаний, умения использовать изученные математические методы, развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

<u>Положение пятое</u> – преподавание математики должно быть. по возможности, простым, ясным, естественным, базироваться на уровне разумной строгости.

<u>Положение шестое</u> – при обучении надо отобрать основные прин-

ципиальные вопросы, которым и следует обучать в первую очередь.

Положение седьмое – теоремы существования необходимы для математического образования специалистов в области приложения математики.

Положение восьмое – на первых этапах обучения надо отдавать предпочтение индуктивному методу, постепенно подготавливая и используя дедуктивный подход.

Положение девятое – обучение решению прикладных задач математическими методами не является задачей математических курсов по специальности.

Положение десятое – каким разделам математики и в каком объеме надо учить студентов данной специальности – должны определять специалисты в этой области при консультации с математиками, а как этому учить – это дело профессионалов-математиков».

Враховуючи, що з часу виходу книги [1] пройшло майже тридцять років, за які обчислювальна техніка стала бажаним помічником людини, автор хоче до сформульованих десяти додати ще одне положення.

Положення одинадцяте – вивчення нових математичних понять та об'єктів повинно проходити паралельно з освоєнням їх використання за допомогою сучасних комп'ютерних математичних пакетів.

Якщо принципи навчання математики залишаються фактично незмінними, то всі проблеми, що виникають у математичній освіті, пов'язані, у першу чергу з тими умовами, які складаються у вищій школі (а також і у середній) і при яких треба практично реалізовувати сформульовані принципи.

На жаль, негативні тенденції в сучасній математичній (і фізичній) освіті призвели до того, що міністр освіти і науки І. Вакарчук у своїй доповіді 30 жовтня 2008 року на нараді з ректорами вищих навчальних закладів повинен був констатувати: «погіршення якості викладання фізики і математики в середній і вищій школах… призвели до втрати суспільного престижу цих основоположних наук. Це може мати згубні наслідки для інноваційного розвитку країни, врешті-решт і для національної безпеки України» [2, 3]

Щоб якось виправити положення, МОН України зробило рік тому новорічний подарунок освітянам – 30 грудня 2008 року міністр підписав наказ №1226 «Про затвердження плану дій щодо поліпшення якості фізико-математичної освіти на 2009-2012 роки». Хочеться зупинитися на деяких пунктах цього плану.

Вказівка на те, що необхідно «забезпечити прикладне спрямування змісту вищої математичної освіти» є , безумовно, правильною, але зі шляхом його досягнення – «збільшивши частку практичних занять у навчальних планах» – можна посперечатися. Формальне виконання цього тезису може привести до того, що студент оволодіє більшими практичними навичками при розв'язанні певного класу математичних задач, у той час, як ці задачі знаходяться достатньо далеко від практичних потреб майбутнього фахівця. Тобто, коли ми кажемо про прикладне спрямування змісту вищої математики, то тут повинні перш за все розуміти наповнення курсу такими новітніми розділами, за допомогою яких і вирішуються інженерно-технічні проблеми сьогодення.

На це і націлює пункт 2.4 «Плану дій»: «Удосконалити зміст навчальних програм із базових математичних дисциплін, враховуючи комп'ютерізацію всіх видів інженерної діяльності (дискретна і комп'ютерна математика, нечіткі методи і "м'які" обчислення)» [3]. Перелік новітніх розділів, звичайно можна продовжити; тут можна згадати і фрактальні множини, і генетичні алгоритми, і дробове диференціювання та інтегрування, і таке інше. Зрозуміло, що відповідь на питання, який саме розділ потрібно включати в навчальні програми, ми отримаємо, скориставшись сформульованим вище, десятим принципом навчання математики.

Але тут виникає цілком слушне запитання – а де взяти години на вивчення цих нових розділів? Звідки їх взяти, якщо скорочуються години взагалі на математику в навчальних планах? Тут міністр освіти і науки України не згоден зі мною: «Загрозливого зниження обсягів часу на вивчення математики не відбулося, а за окремими напрямами кількість годин навіть зросла» [2, 12] Але, при цьому, у своїй доповіді чомусь порівнює між собою 1990-й та 1998 роки, ніби за десять останніх років ніяких змін у вищій школі не сталося, ніби не проїхав по ній каток Болонського процесу!

Зараз ми живемо в дуже, на жаль, лукавий час. Час, коли стало за норму казати напівправду, яка, як відомо, гірше за брехню. А напівправда в даному випадку полягає в тому, що на всіх порівняльних діаграмах в доповіді міністра наводиться загальна кількість годин на вивчення математики по різним напрямках навчання. І числа ці дійсно не відрізняються особливо між собою – зараз ми маємо майже те, що і було 20 років тому. А повна правда полягає в тому, що загальна кількість годин складається з годин аудиторних під керівництвом викладача і годин самостійної роботи студентів. І перша частина, на якій і відбувається (у першу чергу) процес навчання, тепер не йде в ніяке порівняння з тим, що було ще десять років назад.

Для прикладу візьмемо наш інститут, напрям підготовки «Радіотехніка» (табл. 1). Які новітні математичні поняття та теорії можна вивчити в таких умовах? Хіба що відкинувши половину того, що вивчалося раніше. Але ж без ґрунтовної математичної підготовки не можна зрозуміти новий математичний апарат та навчитися його застосовувати до потреб інженерної справи.

Таблиця 1

	2000 рік	2009 рік
Загальна кількість годин на математику	675	624
Кількість годин під керівництвом викладача	450	350

Отже, хоча ми маємо офіційний «План дій», залишається багато питань до того, як цей план повинен виконуватись. І рік, що минув з часу його прийняття, не приніс упевненості в тому, що становище в математичній освіті зміниться на краще.

Література

1. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 144 с.
2. Вакарчук І. Сучасна фізико-математична освіта і наука: тенденції та перспективи / Іван Вакарчук // Вища школа. – 2009. – №1. – С. 3-22.
3. План дій щодо поліпшення якості фізико-математичної освіти на 2009-2012 роки : додаток до наказу М-ва освіти і науки України від 20 грудня 2008р. №1226 // Вища школа. – 2009. – № 1. – С. 82-91.

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ С МЕЖПРЕДМЕТНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

О.Е. Первун
г. Симферополь, Южный филиал Национального университета биоресурсов и природопользования Украины
«Крымский агротехнологический университет»
O_Per69@mail.ru

Постановка проблемы. Основной целью обучения математике в агротехнологическом вузе в рамках требований квалификационной характеристики является формирование у студентов умений и навыков, необходимых им в будущей профессиональной деятельности. В этой связи у них должен быть сформирован такой уровень математической подготовки, который необходим для решения задач, требующих анализа ситуаций и выбора решений при изучении специальных дисциплин, осуществлении профессиональной деятельности.

Большинство студентов агропромышленного вуза не осознают цели изучения общеобразовательных дисциплин, в число которых входит математика. При этом, как показывает педагогический опыт, серьезным препятствием для применения математических знаний при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин является отсутствие у студентов навыков, связанных с математическим моделированием.

Анализ последних публикаций. Проблема профессиональной направленности обучения достаточно широко представлена в педагогических исследованиях. Различные стороны этой проблемы отражены в работах Н.А. Антонова, Ю.К. Бабанского, В.М. Монахова и др.

В классической педагогике идее межпредметных связей посвящены труды Я.А. Коменского, И.Г. Песталоции, К.Д. Ушинского и др. Исследования проблем реализации внутри- и межпредметных связей отражены в работах В.А. Гусева, В.А. Далингера, А.Н. Колмогорова, А.Г. Мордковича, П.М. Эрдниева и др..

Цель статьи. Исходя из вышеизложенного, автор статьи сделал попытку осветить ряд проблем относительно применения учебных задач с межпредметным содержанием в обучении математике студентов агротехнологического университета.

Содержание статьи. Реализация межпредметных связей математики с другими предметами чаще всего осуществляется через решение межпредметных задач.

Межпредметная задача – «это задача, условия и требование который содержит компоненты основного и смежного (смежных) предметов, а решение и анализ способствует более глубокому и полному раскрытию объема и содержания понятий, определяющих связь между данными предметами» [3, 11].

В практической селекции и агротехнике математические методы представлены в основном такими статистическими параметрами, как средние, дисперсии, стандартные отклонения, коэффициенты вариаций, корреляций, регрессий, наследуемости степени доминантности, степени силы влияния факторов, корреляционные отношения и т.д. Применение их позволяет более объективно выявлять закономерности изменчивости и наследования хозяйственно-ценных признаков сельскохозяйственных культур. Необходимость целенаправленного обучения студентов решению математических задач с использованием всех этапов математического моделирования подчеркивается во многих методических исследованиях.

Процесс применения математики к любой практической задаче делится на три этапа:

1. Формализация – непосредственное построение математической модели, перевод исходной прикладной задачи на язык математических символов и операций. На этом этапе студенты должны научиться выделять основные взаимосвязи между компонентами условия, анализировать полноту имеющихся данных, выражать математическими символами те положения и их взаимосвязи, которые даны в условии задачи. Как правило, именно формализация прикладной или профессиональной задачи, перевод ее на математический язык, вызывает наибольшие затруднения. На этапе формализации очень важно правильно установить, в чем состоят события, вероятности которых известны или должны быть найдены, выявить отношения между ними.

2. Внутримодельное решение поставленной математической задачи методами, развитыми в самой математике для задач данного типа. На этом этапе студенты учатся выбирать наиболее подходящий метод для решения поставленной математической задачи, пользоваться вспомогательным математическим аппаратом, выбирать приемы решения, выбирать сложные задачи на подзадачи.

3. Интерпретация – составление полученного математического решения с исходной ситуацией, т.е. перевод решения на язык исходной прикладной задачи. На этом этапе студенты должны научиться делать качественные выводы на основании математического решения, выявлять соответствие полученных результатов рассматриваемой ситуации, оценивать значение определенных факторов для практической деятельности.

Применять теоретические знания студенты могут в том случае, если в процессе решения задач они научатся проходить все этапы математического моделирования: формализация, внутримодельное решение, интерпретация. Этот процесс в самом общем виде описывает алгоритм решения вероятностных задач. Проиллюстрируем сказанное на следующих задачах.

Задача. Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2, причем из первого пункта в два раза больше, чем из второго. Вероятность события, состоящего в том, что удобрение из 1-го пункта удовлетворяет стандарту, равна 0,9, а соответствующая вероятность для второго пункта равна 0,7. Определите вероятность события, состоящего в том, что взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту.

При решении подобной задачи у студентов возникают затруднения как в формировании событий и гипотез, так и при вычислении их вероятностей. Рассмотрим решение данной задачи.

1. Формализация. Пусть событие A={взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту}. Можно выделить следующие гипотезы: H_1={удобрение поступило из пункта 1}; H_2={удобрение поступило из пункта 2}. Требуется найти $H(A)$.

2. Внутримодельное решение. Искомая вероятность находится по формуле полной вероятности: $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$ (1).

По условию $P(H_1)\div P(H_2)=2\div 1$. Гипотезы составляют полную группу событий, поэтому $P(H_1)+P(H_2)=1$. Из этих равенств находим вероятности гипотез: $P(H_1)=2/3$, $P(H_2)=1/3$. Из условия следует, что $P_{H_1}(A)=0{,}9,\ P_{H_2}(A)=0{,}7$.

Подставляя полученные вероятности формулу (1), получим: $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{5}{6}=0{,}8(3)$.

3. Интерпретация. Таким образом, событие A={взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту} имеет большую вероятность, т.е. наступит в среднем в 83 случаях из 100.

Теория вероятностей и математическая статистика дают хорошие примеры для иллюстрации процесса применения математики. Теория вероятностей должна указывать студенту источники вероятностных понятий и методов, а также область их практического применения. Одной из таких областей является генетика.

Генетика наука о наследственности, изменчивости и методах управления ими. Она ближе к математике по сравнению с большинством других областей биологии, а значит и логика ее изложения в чем-то близка к логике изложения математики. В решении задач играет роль знание элементарных формул расщепления, умение правильно выписывать гаметы, образуемые особями различных генотипов, знание основных формул теории вероятностей.

В курсе специальных дисциплин «Генетика» и «Селекция и семеноводство» студентами агрономического факультета изучаются следующие разделы: изменчивость и наследственность, методы их изучения; учения Дарвина, Вавилова; цитологические и молекулярные основы наследственности; хромосомная теория; генетика индивидуального развития; генетика популяций; закономерности наследования и изменчивости; методы селекции (отбор, гибридизация, мотогенез, понятие о генной инженерии) и др.

Роль математики в решении основных задач селекции, сортоиспытаний и технологии выращивания зависит не только от степени разработанности математических методов для практической селекции и технологии выращивания, но и от способности селекционеров, агротехников их использовать. В наибольшей степени математические методы разработаны для селекции на уровне генотипов и популяций. На практических занятиях по математике могут быть рассмотрены задачи, подобные следующей.

Задача из реальной жизни. Берутся два сорта гороха – с желтыми и зелеными семенами. Установить, какие будут получены гибриды во втором поколении. Построить вероятностную модель этого испытания. Подобные опыты с горохом начал проводить Грегор Иоганн Мендель в 1856 году.

Прежде чем построить математическую модель, нужно собрать информацию о реальной ситуации, с которой связана эта задача. Преподаватель должен подготовить студентов к моделированию генетических процессов. С этой целью необходимо выделить основные понятия и законы генетики.

Ген признак: A – желтый цвет семян (доминантный признак); a – зеленый цвет семян (рецессивный признак).

Математическая модель. Рассмотрим различные исходы испытания: ω_0 – мужская A-гамета соединяется с женской A-гаметой, образование AA-зиготы; ω_1 – мужская A-гамета соединяется с женской a-гаметой, образование Aa-зиготы; ω_2 – мужская a-гамета соединяется с женской A-гаметой, образование aA-зиготы; ω_3 – мужская a-гамета соединяется с женской a-гаметой, образование aa-зиготы.

Изобразим математическую модель для поэтапного случайного испытания, которое представляет собой древовидный граф (рис. 1).

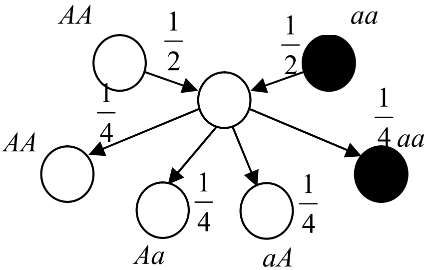


Рис. 1

Рассмотрим следующие события: событие A – желтый цвет семян; событие B – зеленый цвет семян. Зная, что если в генотипе присутствует хотя бы один доминантный аллель, то семена будут желтого цвета, в противном случае – зеленые. $A=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2,\}$; $B=\{\omega_3\}$.

Математические результаты. $P(A)=P(\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\})=$

$$= p(\omega_0)+p(\omega_1)+p(\omega_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ P(B)=P(\{\omega_3\})=p(\omega_3)=\frac{1}{4}.$$

Реальный мир. В итоге можно с уверенностью утверждать: при скрещивании растений с противоположными признаками происходит не разбавление признаков, а подавление одного признака другим; в гибридах 1-го поколения проявляется только доминантный признак, рецессивный признак полностью подавлен; во втором поколении появляются особи как с доминантным, так и с рецессивными признаками, причем отношение числа первых к числу вторых равно 3:1. Это соотношение было получено Менделеевым опытным путем, что и составило содержание первого Закона Менделя или закона расщепления.

С помощью математических расчетов мы подтвердили открытие Менделя закономерности наследственной передачи признаков.

Развитие продуктивного мышления, формирование профессионально значимых умений в процессе изучения теории вероятностей осуществляется на основе решения разнообразных по содержанию и методам задач.

Задача. Элеватор принимает в день зерно одного из трех колхозов А, В, С, вероятность получения зерна в данный день из колхоза А равна 0,5, из колхоза В – 0,3. Найти вероятность того, сто очередная партия зерна в данный день будет получена из колхоза С.

Задача. Всхожесть семян данного растения оценивается 0,9. Найти вероятность того, что из восьми посаженных семян взойдут: а) только 3 семени, б) не менее 6-ти семян, в) не более 3-х семян, г) не менее 3-х и не более 6-ти семян.

Задачи с межпредметным содержанием студенты должны решать не только на практических занятиях. Такие задачи должны быть включены и в лекционный материал. При решении межпредметных задач на лекциях, практических и лабораторных занятиях, а также самостоятельно, происходит формирование умственных действий обучающихся, которое проходит в несколько этапов, согласно теории П.Я Гальперина и Н.Ф. Талызиной [1]: мотивационный; ориентировочный; материализованный; внешнеречевой этап. Этапы беззвучной устной речи и умственного действия являются итоговыми этапами формирования умственных действий.

Для постановки проблемы перед изложением нового учебного материала следует: использовать межпредметные задачи, отличающиеся ясностью фабулы и простотой решения. Приведем примеры таких задач.

Задача 1. Вероятность того, что расход воды в течение дня окажется не превышающим норму, равна 3/4. Найти вероятность того, что расход воды будет нормальным в течение четырех из ближайших пяти дней.

Задача 2. На опытном поле посеяно 1500 семян. Найти вероятность события, состоящего в том, что всходы дадут ровно 1200 семян, если условно считать, что каждое зерно взойдет с вероятностью 0,9.

Вывод. Таким образом, проходя при решении задач этапы формализации, внутримодельного решения и интерпретации, студенты приобретают навыки выполнения мысленных операций, которые характеризуют интеллектуальную деятельность при решении профессиональных задач: выделение основных характеристик задачи; нахождение существенных связей между характеристиками; нахождение системы необходимых ограничений, накладываемых на характеристики; оценка полноты исходной информации и введение при необходимости недостающих данных; замена исходных терминов выбранными математическими эквивалентами; выбор точности числовых значений, соответствующей смыслу задачи и т.д.

Литература

1. Гальперин П. Я. Формирование знаний и умений на основе поэтапного усвоения умственных действий / Гальперин П. Я., Талызина Н. Ф. – М. : МГУ, 1968. – 150 с.

2. Максимова В. Н. Межпредметные связи в процессе обучения / Максимова В. Н. – М. : Просвещение, 1998. – 192 с.

3. Новиков П. Н. Задачи с межпредметным содержанием в средних профессионально-технических училищах : методическое пособие [для преподавателей средних ПТУ] / Новиков П. Н. – Минск : Вышейша школа, 1987. – 147 с.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГАУСА» СЛАБОЧУЮЧИМ СТУДЕНТАМ

Л.С. Попова, А.В. Заверика
м. Київ, Київський національний університет технологій та дизайну
sakisha@ukr.net

У роботі зі слабочуючими студентами необхідно враховувати як рівень підготовки, так і специфіку сприйняття інформації такими студентами. Крім того, під час роботи з сурдоперекладачем виникають певні труднощі. Сурдоперекладачі не мають достатньої математичної підготовки. Це заважає їм коректно доводити до студентів зміст математичних понять та положень.

Спілкування студентів із викладачем через сурдоперекладача теж має свою специфіку. Студент, який щось не зрозумів при розв'язанні задачі, звертається до сурдоперекладача зі запитаннями. Сурдоперекладач або сам пояснює студенту, що він не зрозумів, або звертається зі запитаннями до викладача. Розмову, яку ведуть студент та сурдоперекладач на мові жестів, сам викладач не розуміє, тому викладач не має можливості в повній мірі слідкувати за процесом засвоєння матеріалу студентами.

Під час проведення лекційних та практичних занять у інтегрованих потоках та групах також виникають певні труднощі, які пов'язані з тим, що сам процес викладання уповільнюється. Це приводить до того, що викладач вимушений або більше матеріла виносити на самостійну роботу студентів, або зменшувати кількість прикладів, які пояснюють теоретичний матеріал.

Досвід роботи у чотиригрупному інтегрованому потоці, до складу якого входила одна група слабочуючих студентів у кількості 11 студентів, показав, що для подолання вказаних труднощів у спілкуванні викладача зі студентами, необхідно внести певні зміни у методику проведення як лекційних так і практичних занять.

Для того, щоб зберегти ефективність подання теоретичного матеріалу, слабочуючим студентам необхідно основну частину матеріалу передавати письмово, тобто записувати всі пояснення на дошці, а не надиктовувати, як передбачено традиційною методикою. Використання кванторів для запису означень та теорем значно погіршує сприйняття матеріалу.

Для перевірки якості засвоєння матеріалу бажано використовувати письмові тести.

На практичних заняттях бажано більше уваги приділяти розв'язуванню типових задач та прикладів. Розв'язання типового прикладу викладач записує на дошці у вигляді алгоритму. Кожний крок супроводжується розширеними поясненнями, з урахуванням необхідних теоретичних посилань.

Маючи алгоритм розв'язання типової задачі, слабочуючий студент може користуватись ним під час самостійного розв'язування аналогічних прикладів біля дошки, виконуючи домашнє завдання, на іспиті.

На кожному занятті необхідно проводити перевірку виконання домашнього завдання. Кожен приклад, який входив до домашнього завдання, студенти по черзі розв'язують біля дошки, користуючись своїми конспектами. При розв'язанні студенти вказують крок за алгоритмом, який вони виконують.

Тему «Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса» доцільно починати з прикладу розв'язання рівняння з числовими коефіцієнтами.

Приклад 1. Знайти множину розв'язків рівняння. Записати загальний розв'язок та два частинні розв'язки рівняння

$$2x+3y+4z=5.$$

Розв'язання. Рівняння має три невідомих x, y, z.

Алгоритм розв'язання

1. Запишемо рівносильне рівняння. Перенесемо доданки, що містять невідомі y та z, у ліву частину рівняння, змінивши їх знаки на протилежні,

$$2x=-3y-4z+5.$$

2. Виразимо невідомий x через невідомі y та z

$$x=-\frac{3}{2}y-\frac{4}{2}z+\frac{5}{2}.$$

3. Знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$x=-1,5y-2z+2,5.$$

Значення невідомих y та z вибираємо довільним чином.

4. Знайдемо два частинні розв'язки рівняння. Для цього надамо певні значення невідомим y та z і знайдемо відповідні значення невідомого x

1) $y=0$; $z=1$; $x=-1,5\cdot 0-2\cdot 1+2,5=0,5$;
2) $y=2$; $z=0$; $x=-1,5\cdot 2-2\cdot 0+2,5=-0,5$.

Перевірка. Підставимо знайдені частинні розв'язки у початкове рівняння. Запишемо впорядковані набори чисел, які відповідають частинним розв'язкам рівняння

1) $x=0,5$; $y=0$; $z=1$; тоді $2\cdot 0,5+3\cdot 0+4\cdot 1=1+4=5$; $5=5$;
2) $x=-0,5$; $y=2$; $z=0$; тоді $2\cdot(-0,5)+3\cdot 2+4\cdot 0=-1+6=5$; $5=5$.

Обидва знайдені набори чисел перетворюють задане лінійне рівняння на тотожність.

Після розв’язання рівняння з числовими коефіцієнтами можна розглянути приклад розв’язання системи двох рівнянь з n невідомими у загальному вигляді.

Приклад 2. Виключити невідомий x_1 з другого рівняння системи ($a_{11}\neq 0$), що містить n невідомих.

Розв’язання. Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2. \end{cases}$$

Алгоритм розв’язання

1. Помножимо перше рівняння на $a_{21}\neq 0$, а друге на a_{11},

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2. \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{21} \\ a_{11} \end{vmatrix}$$

2. Запишемо одержані рівняння

$$a_{11}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_2 + a_{13}\cdot a_{21}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot a_{21}\cdot x_n = b_1\cdot a_{21},$$

$$a_{11}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{11}\cdot a_{22}\cdot x_2 + a_{11}\cdot a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{11}\cdot a_{2n}\cdot x_n = b_2\cdot a_{11}.$$

3. Віднімемо від другого рівняння перше. Розглянемо перетворене друге рівняння

$$0\cdot x_1 + (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot x_2 + (a_{11}\cdot a_{23} - a_{13}\cdot a_{21})\cdot x_3 + \ldots +$$
$$+(a_{11}\cdot a_{2n} - a_{1n}\cdot a_{21})\cdot x_n = a_{11}\cdot b_2 - a_{21}\cdot b_1.$$

Одержали рівняння, у якому виключено невідомих x_1. Це рівняння можна представити у іншому вигляді. Коефіцієнти при невідомих x_2, x_3, ..., x_n відповідають мінорам другого порядку, складеним з елементів матриці

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right).$$

Отже, друге рівняння можна переписати у вигляді

$$0\cdot x_1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot x_3 + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix}\cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Одержали загальну формулу перетворення коефіцієнтів біля невідомих у другому рівнянні при виключенні невідомого x_1. Цю формулу можна використовувати у елементарних перетвореннях матриці, розв’язуючи систему методом Гауса.

Проілюструємо розв’язання системи методом Гауса на прикладі розв’язання системи двох рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 3. Розв'язати систему, у якої кількість рівнянь менша за кількість невідомих (***недоозначена система***)

$$\begin{cases}2x+3y-4z=2,\\ -5x+7y+z=-1.\end{cases}$$

Розв'язання. Для розв'язання системи скористаємось методом Гауса.

Алгоритм розв'язання

1. Випишемо розширену матрицю системи

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-4&2\\ -5&7&1&-1\end{array}\right).$$

2. ***Прямий хід.*** Виконаємо елементарні перетворення розширеної матриці. Виконуючи перетворення, скористаємося мінорами 2-го порядку. Коефіцієнти у другому рядку розширеної матриці замінимо на відповідні мінори, (формула 1),

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-4&2\\ -5&7&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-4&2\\ 0&\begin{vmatrix}2&3\\ -5&7\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-4\\ -5&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\ -5&-1\end{vmatrix}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-4&2\\ 0&29&-18&8\end{array}\right).$$

3. ***Дослідження перетвореної системи на сумісність***. Для дослідження системи на сумісність визначимо ранги головної та розширеної матриць системи. Головна та розширена матриці системи мають по два ненульові рядки, отже, їх ранги співпадають і дорівнюють 2. За теоремою Кронекера-Капеллі система є ***сумісною***.

Ранг системи $r=2$ є меншим за кількість невідомих n=3. Система є ***невизначеною*** ($r<n$).

4. ***Зворотний хід.*** За перетвореною розширеною матрицею запишемо систему

$$\begin{cases}2x+3y-4z=2,\\ \qquad 29y-18z=8.\end{cases}$$

Кількість невідомих на 1 більше за ранг системи. Ця система має безліч розв'язків. У системі виділимо два ***головних*** (базових) невідомих x та y і один ***вільний*** невідомий z.

Зворотний хід виконаємо покроково.

Крок 1. Один із невідомих будемо розглядати як параметр. Він може набувати будь-які значення на множині дійсних чисел. Припустимо, що таким невідомим є z, $z=t$.

Крок 2. Перетворимо рівняння системи і перенесемо доданки, що містять невідомий z, у праву частину з протилежним знаком

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=2, \\ \quad 29y-18z=8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=4z+2, \\ \quad 29y=18z+8. \end{cases}$$

Крок 3. Введемо параметр t замість невідомого z у останню систему

$$\begin{cases} 2x+3y=4z+2, \\ \quad 29y=18z+8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=4t+2, \\ \quad 29y=18t+8, \\ \quad z=t. \end{cases}$$

Крок 4. З другого рівняння виразимо невідомий y через параметр t,

$$y=\frac{8}{29}+\frac{18}{29}t\,.$$

Крок 5. Підставимо знайдений вираз для невідомого y у перше рівняння

$$\begin{cases} 2x+3\cdot\left(\dfrac{8}{29}+\dfrac{18}{29}t\right)=4t+2, \\ y=\dfrac{8}{29}+\dfrac{18}{29}t. \end{cases}$$

Крок 6. З першого рівняння виразимо невідомий x через параметр t,

$$2x+3\cdot\left(\frac{8}{29}+\frac{18}{29}t\right)=4t+2 \Rightarrow 2x=4t+2-\frac{24}{29}-\frac{54}{29}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{62}{29}t+\frac{34}{29} \Rightarrow x=\frac{31}{29}t+\frac{17}{29}\,.$$

Відповідь. Запишемо загальний розв'язок системи

$$x=\frac{31}{29}t+\frac{17}{29}, \quad y=\frac{18}{29}t+\frac{8}{29}, \quad z=t$$

Знайдемо частинні розв'язки системи:

- при $t=-1$:
- при $t=2$:

$$\begin{cases} x=\dfrac{31}{29}\cdot(-1)+\dfrac{17}{29}, \\ y=\dfrac{18}{29}\cdot(-1)+\dfrac{8}{29}, \\ z=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{14}{29}, \\ y=-\dfrac{10}{29}, \\ z=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{31}{29}\cdot 2+\dfrac{17}{29}, \\ y=\dfrac{18}{29}\cdot 2+\dfrac{8}{29}, \\ z=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{79}{29}, \\ y=\dfrac{44}{29}, \\ z=2. \end{cases}$$

Така послідовність викладання дозволяє студентам краще зрозуміти тему і набути необхідні практичні навички з розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Надамо зразки тестів для перевірки теоретичних знань студентів.

Всі відповіді обґрунтувати.

1. У основу метода Гауса покладена ідея розв'язання систем лінійних рівнянь, яка використовується

а) у матричному методі; в) у методі виключення невідомого;

б) у методі Крамера; г) інша відповідь (дати свою відповідь).

2. При розв'язанні системи лілійних рівнянь методом Гауса не дозволяється виконувати такі елементарні перетворення розширеної матриці системи:

а) переставляти місцями рядки матриці;

б) множити рядки матриці на нуль;

в) додавати стовпці матриці;

г) додавати або віднімати рядки матриці;

д) додавати або віднімати стовпці матриці;

е) інша відповідь (дати свою відповідь).

3. При виконанні зворотного ходу у методі Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь знаходження значень невідомих починають:

а) з першого рівняння початкової системи;

б) з останнього рівняння перетвореної системи;

в) інша відповідь (дати свою відповідь).

5. Визначити, при якому значенні параметра c система лінійних рівнянь буде несумісною:

а) $\begin{cases} 2x-3y=c \\ 4x+6y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7x-c\cdot y=2 \\ -7x+y=5 \end{cases}$.

6. Записати систему лінійних рівнянь, якщо відомі її головна матриця A та вектор-стовпець B чисел, вільних від невідомих. Визначити, чи є ця система сумісною:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

8. Чи може система лінійних рівнянь, у якої кількість рівнянь більше за кількість невідомих, бути визначеною:

а) так; б) ні; в) інша відповідь (дати свою відповідь).

О ПРОГРАММЕ И ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ В БГУИР

В.А. Ранцевич
г. Минск, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
rancevich@bsuir.by

Инженерам в области радиотехники, многоканальной связи, промышленной электроники и ряда других направлений приходится иметь дело с сигналами, их цифровой обработкой, передачей и преобразованием. С математической точки зрения сигнал является функцией времени и, следовательно, можно ввести для нее понятия расстояния, преобразования, областей определения и значений. Поэтому для успешной обработки сигнала необходима информация о его математических характеристиках. Исследование сигналов в данном направлении предполагает знание ряда вспомогательных математических понятий и методов, которые не входят в классический курс «Высшая математика». Автором статьи при сотрудничестве с коллегами выпускающих кафедр разработана учебная программа «Специальные математические методы и функции» для студентов специальностей: Промышленная электроника, Проектирование и производство радиоэлектронных средств, Медицинская электроника, Вычислительные машины, системы и сети, Электронные вычислительные средства, Многоканальные системы телекоммуникаций, Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения, Информационные технологии и управление в технических системах, Инженерно-психологическое обеспечение информационных технологий. Программа составлена в соответствии с требованиями Образовательных стандартов и учебных планов выше перечисленных специальностей.

Целью изучения дисциплины является освоение математических методов, которые не входят в программу курса высшей математики, но широко используются в инженерно-технических расчетах данного профиля, а также освоение инструментальных средств символьного решения математических задач.

Курс является продолжением математического образования студентов.

Содержание дисциплины

Тема 1. Компьютер в математическом исследовании

Технология решения задач в системах MathCAD или Matlab, интерфейс, ввод-вывод, численное и символьное решение задач, встроенные редакторы, языки программирования систем MathCAD и Matlab.

Тема 2. Элементы функционального анализа

Линейные метрические пространства, скалярное произведение в метрическом пространстве, пространства Евклида, Гильберта, Хемминга, ортонормированный базис, полнота, обобщённые ряды Фурье, линейные отображения, функционалы и операторы, уравнения в операторной форме и их решения.

Тема 3. Специальные функции

Полиномы Лежандра, Лаггера, Эрмита. Функции Бесселя, гипергеометрическая функция, функция Куммера, функция Лапласа, функция ошибок, гамма-функция, функция Гамильтона. Функция Дирака и ее свойства. Эллиптические интегралы.

Тема 4. Интегральные преобразования

Преобразования Фурье, Лапласа, Гильберта, вейвлет-преобразование. Обратные преобразования. Переход от интегрального преобразования к дискретному. Спектральный анализ.

Тема 5. Разностные уравнения. Z-преобразование

Основные свойства z-преобразования, решение разностных уравнений и систем методом z- преобразования.

Тема 6. Экстремальные задачи

Принципы вариационного исчисления, уравнение Эйлера, приложение к задачам анализа, синтеза и оптимизации сигналов (функций) в скалярных, векторных и матричных пространствах.

Тема 7. Метод Фурье решения задач математической физики

Обзор задач математической физики. Уравнения в операторной форме и их решения. Метод Фурье.

Тема 8. Матричный анализ

Действия с матрицами, факторизация, блочные матрицы. Матричные уравнения и их анализ. Приложения к задачам цифровой обработки сигналов и изображений.

Тема 9. Приложение матричного анализа к обработке сигналов и изображений

Построение фильтров. Подавление шумов и помех. Вейвлет-преобразование изображений. Сжатие изображений.

В результате освоения курса «Специальные математические методы и функции» обучаемый должен:

знать:

- преобразование Фурье и его свойства;
- Z-преобразование, его свойства и приложения;
- уравнение Эйлера для простейшей задачи вариационного исчис-

ления;

- метод Фурье для простейших задач математической физики;
- системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами;

уметь:

- решать линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами;
- составлять и решать уравнение Эйлера простейшей задачи вариационного исчисления;

приобрести навыки:

- использования компьютерной математики в математическом исследовании инженерно-технических задач;
- выполнения интегральных и дискретных преобразований;
- решения задач математики операторным методом;
- работы со специальными функциями;
- формулировки и решения задач на языке матриц.

На лекции приходится в зависимости от специальности от 16 до 34 часов. Остальное время распределено на практические и лабораторные занятия.

Примерный перечень тем практических занятий

1. Линейные, метрические, гильбертовы пространства.
2. Обобщенный ряд Фурье, интеграл Фурье, преобразование Фурье.
3. Линейные отображения, функционалы, операторы. Простейшие задачи математической физики.
4. Преобразование Фурье и его свойства.
5. Функции Дирака. Преобразование Гильберта и его свойства.
6. Z-преобразование и разностные уравнения.
7. Вариационное исчисление.
8. Матричный анализ.
9. Приложение матричного анализа к обработке сигналов и изображений.

Примерный перечень тем лабораторных занятий

1. Технология решения задач в системах MathCAD и Matlab.
2. Специальные функции как решения дифференциальных уравнений. Специальные функции как интегралы.
3. Преобразование Фурье и его приложения.
4. Преобразование Лапласа и его приложения.
5. Вейвлет-преобразование и его приложения.
6. Разностные уравнения и Z- преобразование.
7. Решение задач вариационного исчисления с помощью уравнения

Эйлера.

8. Решение задач математической физики методом Фурье.

9. Матричный анализ: матричный анализ и уравнения, действия с матрицами, факторизация, блочные матрицы, приложения к задачам цифровой обработки сигналов и изображений.

В конце семестра предусмотрен зачет.

Студенты проявляют повышенный интерес к данному курсу, так как видят реальные приложения полученных ранее знаний и активно принимают участие в научно-исследовательской работе.

На кафедре высшей математики разработаны два варианта электронного конспекта по данной дисциплине в зависимости от предусмотренного количества часов, создан ЭУМК с набором заданий для практических занятий и самостоятельной работы. Такое углубленное изучение специальных математических методов позволяет еще лучше подготовить высококвалифицированных специалистов для отечественной промышленности.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ ЗА ТЕМОЮ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ II ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ» ЗА КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ У МЕДИЧНОМУ ВНЗ

В.М. Руднєва
м. Київ, Національний медичний університет ім. О.О. Богомольця
masl@biph.kiev.ua

Широке використання диференціальних рівнянь (ДР) у різних галузях медичної науки (епідеміологія, радіологія, імунологія, фармакологія тощо) зумовлює необхідність засвоєння студентами-медиками основних положень теорії ДР та здобуття навичок розв’язку різних типів ДР. Складаючи та розв’язуючи ДР, студенти встановлюють зв’язок між змінними величинами, що характеризують певний процес чи явище, прикладами яких для студентів медичного університету можуть бути розмноження бактерій, седиментація формених елементів крові або твердих частинок у рідині, дифузія та теплопровідність та ін.

Основна методична складність при проведенні практичних занять за темою «Диференціальні рівняння» полягає у невеликій кількості годин, що за умов кредитно-модульної системи відведена на засвоєння студентами-медиками практичних навичок. При роботі з ДР І порядку у студентів труднощів, як правило, виникає менше, адже при їх розв’язуванні використовуються засвоєні студентами на попередньому занятті навички інтегрування. Проте це потребує приблизно половину відведеного на практичне заняття часу, а тому на ДР II порядку з постійними коефіцієнтами, оволодіння навичками розв’язування яких є для студентів складнішим, часу залишається вкрай мало. Додаткові труднощі виникають через те, що при розв’язанні ДР II порядку та складанні характеристичного рівняння (ХР) студенти зустрічаються з добре знайомою «шкільною темою» – розв’язком квадратного рівняння. Це відвертає їх увагу від інших етапів розв’язку та робить засвоєння відповідних навичок недостатньо глибоким та дещо механічним.

Ускладнює роботу і відносно низький рівень базової математичної підготовки студентів, для яких при вступі до вищого медичного закладу зовнішнє незалежне оцінювання з математики та фізики не є обов’язковим. За останні два роки збільшилась частка студентів, які з першої спроби не складають на позитивну оцінку перший підсумковий модульний контроль за загальною темою «Математична обробка медико-біологічних даних» з дисципліни «Медична та біологічна фізика». При цьому питома вага помилок, які студенти-медики роблять при розв'язанні ДР II порядку, є суттєвою. Серед поширених помилок студентів слід окремо виділити такі:

- розв'язавши ХР, не подають загального розв'язку самого ДР;
- невірно складають ХР, якщо у ДР II порядку відсутня перша похідна функції або сама функція;
- ХР, що є неповним квадратним рівнянням, розв'язують невірно;
- плутають дійсні та комплексні корені ХР і відповідно невірно подають загальний розв'язок ДР;
- при добуванні кореня додатного числа отримують лише один додатній корінь ХР і тому обирають невірний загальний розв'язок ДР;
- при отриманні комплексних коренів ХР не вміють вірно визначити їх дійсну та уявну частини, що впливає на загальний розв'язок ДР;
- застосовують метод складання ХР для ДР I порядку, що взагалі не містять похідних вищих порядків.

Слід також відзначити, що серед вищезгаданих помилок не можна виділити найхарактерніші – усі вони зустрічаються з приблизно однаковою частотою. Для глибокого засвоєння навичок розв'язування ДР II порядку та попередження перелічених помилок можна запропонувати наступний методичний підхід у проведенні практичного заняття.

1. Розглянути поетапно приклади для випадків, коли корені ХР є: різними та дійсними, однаковими та дійсними, комплексними.

2. Обрати для розв'язування спершу такі ДР ($F(x, y, y', y'')=0$), для яких ХР є повними квадратними рівняннями, а їх корені – дійсними числами. Запропонувати знайти корені різними способами (за теоремою Вієта, через дискримінант тощо). Акцентувати увагу на тому, що знаходження коренів ХР ще не є розв'язком ДР.

3. Потім навести приклади таких ДР ($F(x, y', y'')=0$ або $F(x, \text{y}, y'')=0$), для яких отримані ХР не є повними квадратними рівняннями, а їх коренями є дійсні числа. Необхідно зробити наголос на необхідності бути уважним при складанні ХР, оскільки невірно складене ХР не приведе до вірного розв'язку ДР. Також необхідно нагадати, що для неповного квадратного рівняння корені краще знаходити розкладанням многочлена на множники, а також – що квадратний корінь з додатного числа є два дійсні числа (а не одне). І лише після цього переходити до прикладів ДР II порядку, для яких складені ХР мають комплексні корені.

Труднощі, що виникають при розв'язуванні ДР II порядку зі сталими коефіцієнтами, поглиблюються у випадку, коли корені складеного ХР є комплексними. Для того щоб вірно подати загальний розв'язок ДР у вигляді $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, необхідно вірно визначити значення коефіцієнтів α та β, які є дійсними числами у складі комплексних спряжених коренів ХР: $\alpha+i\beta$ та $\alpha-i\beta$. Труднощі у студентів-медиків частіше за все виникають у випадках, коли коефіцієнт α дорівнює нулю, а загальний розв'язок ДР подається у вигляді $y=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x$. Тому доцільно перед розв'язуванням таких рівнянь переконатись, що студенти розуміють, як визначати α та β на довільних прикладах. Наприклад:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{-1\cdot 25}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}=\pm i\cdot 5\Rightarrow\alpha=0;\beta=5$$

$$1\pm\sqrt{-1}=1\pm i\Rightarrow\alpha=1;\beta=1$$

$$2\pm\sqrt{-8}=2\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{8}=2\pm i2\sqrt{2}\Rightarrow\alpha=2;\beta=2\sqrt{2}\,.$$

Такий підхід (прийом) значно полегшує подальший розгляд ДР, корені ХР для яких є комплексними. Трапляється, що студенти настільки захоплюються процесом складання ХР при розв'язуванні ДР, що починають застосовувати цей метод для ДР I порядку. Такі спроби необхідно попереджувати, акцентувавши увагу на тому, що ХР складають лише для ДР II порядку зі сталими коефіцієнтами.

Специфіку ДР (залежність між певними величинами та швидкістю змін цих величин) на практичних заняттях студентів-медиків слід ілюструвати не лише при розв'язуванні, а також при складанні рівнянь, бажано на прикладах медико-біологічного спрямування. Так, наприклад, у якості задачі, що призводить до ДР II порядку, можна розглянути коливання ділянки кровоносної судини під впливом змінного тиску, що виникає під час пульсації. При цьому слід визначити фізичний сенс відповідних коефіцієнтів, а лише потім показати, що моделлю (для певних задач) даного процесу може бути коливання маси під впливом сили пружності у в'язкому середовищі (процес, з розгляду якого зазвичай починають знайомство з ДР II порядку). Такий підхід доцільно використовувати і при розгляді інших ДР (приміром, для рівняння дифузії – періодичні зміни парціального тиску кисню у альвеолі при диханні або концентрації гормону у кров'яному руслі), що значно полегшує як сприйняття студентами теоретичного матеріалу, так і засвоєння навичок розв'язування задач.

Література

1. Медична і біологічна фізика : підручник для студентів вищих медичних закладів освіти III–IV рівнів акредитації / Чалий О. В, Агапов Б. Т., Цехмістер Я. В. та ін. – К. : Книга плюс, 2005. – 760 с.

2. Чалий О. В. Вища математика: Навчальний посібник для медичних та фармакологічних навчальних закладів / Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленевська А. В. – К. : Техніка, 2001. – 204 с.

3. Лобоцкая Н. Л. Высшая математика : учебник для вузов / Лобоцкая Н. Л., Морозов Ю. В., Дунаев А. А. – Мн. : Вышэйшая школа, 1987. – 319 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ГРУППОВОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В КУРСЕ «ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ» НА БАЗЕ ИНТЕРАКТИВНОГО САЙТА

Н.В. Савченко[α], Е.А. Терещенко[β]
г. Харьков, Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
[α] nsavchenko@kpi.kharkov.ua
[β] ltereha@rambler.ru

Изучение курса «Основы дискретной математике» на кафедре «Системы Информации» Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» студентами 2-го курса неразрывно связано с регулярной работой на интерактивном сайте курса (http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/nvs14/). Это уже 4-ая версия сайта (предыдущие имели префиксы: nvs3, nvs4, nvs9), поскольку курс вначале изучался в течение двух семестров, теперь – одного. Существование всех этих сайтов интересно с точки зрения, как трансформировалось понимание того, что размещать на сайте курса и как его использовать в ходе учебного процесса. Отчетливо видно увеличение определенных компонент курса и уменьшение не оправдавших себя в ходе реального обучения. Динамический сайт курса создан и развивается на базе виртуальной учебной среды «Веб-класс ХПИ», которая всецело опирается на технологии Microsoft Windows (рис.1).

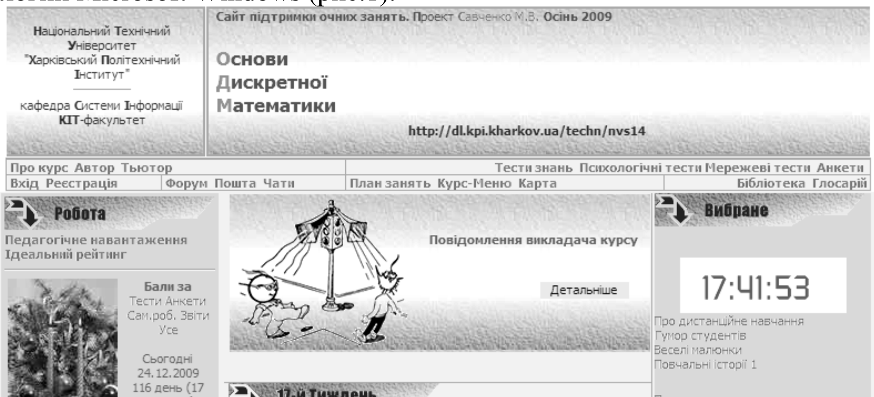
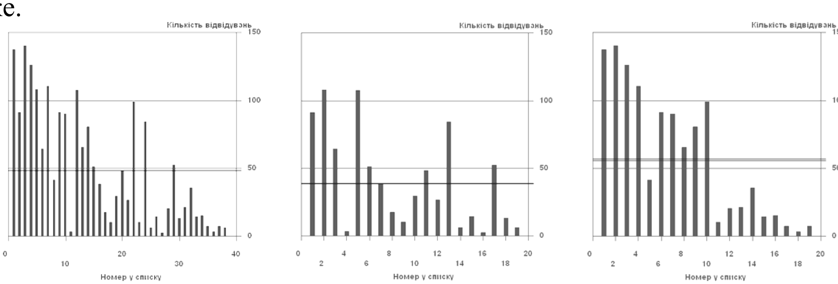


Рис. 1. Стартовая страница интерактивного сайта

Учитывая то, что в последнее время на Украине стала популярной учебная платформа Moodle (технология PHP+MySQL), часть материала размещена также и в этой среде по адресу http://dl.kharkiv.edu/. Сайт курса является открытым для гостей, достаточной зайти под логином: stud и паролем: stud. Какие особенности работы студентов на сайте курса? Обычно регистрация на сайте проводится студентами самостоятельно на протяжении первой недели обучения. Начиная с первой недели обучения, на сайте ведется динамическая рейтинговая таблица достижений каждого студента. При этом в этой таблице учитываются как результаты работы студента на сайте курса, так и на обычных аудиторных занятиях. Система устроена таким образом, что сайт может учитывать работу отдельного студента только на очных занятиях. Начиная осваивать курс, студент с первого занятия четко представляет все виды деятельности в курсе и максимальную степень их оценки (идеальный результат).

К началу занятий на стартовой странице курса размещается ресурс «Идеальная рейтинговая таблица», где четко расписана понедельная деятельность студента и оценка результатов его работы на промежуточных этапах контроля (1-й модуль на 9-ой недели обучения и 2-й модуль на 17-ой неделе обучения). Особую роль в курсе играет информация, размещаемая на стартовой странице курса. Это в первую очередь таблицы недельных заданий, где четко перечислены все виды деятельности и студента и максимальная оценка. Особенностью этих таблиц является то, что они могут отображаться на стартовой странице в свернутом виде. Нажав кнопку «Подробно» студент может увидеть содержимое таблицы без перезагрузки Web-страницы. Наличие в этих таблицах гиперссылок позволяет студенту очень быстро перейти к соответствующему виду деятельности, не используя вспомогательные окна и меню. Однотипные задания объединены в блоки (перечень текущих тестов, список лабораторных работ, редактирование анкет, задания для групповой работы, результаты работы по видам деятельности и т.д.). Группировка заработанных баллов по типам деятельности (тесты, анкеты, отчеты, посещения занятий, самостоятельные работы, общий результат) способствуют тому, что любой студент курса может четко представить себе сильные и слабые звенья своей работы в курсе. Успеваемость студентов во многом зависит от их активности на сайте, опосредованным критерием которой может посещаемость студентов (рис. 2).

Особенностью курса является проведение регулярного тестирования знаний и развития интеллектуальных способностей. В настоящее время в базе подсистемы тестирования размещены 2430 карточек-вопросов. Часть карточек является оригинальными, часть были позаимствованы из литературных источников [1–4]. В каждом тесте студентам предлагается ответить на 10 карточек случайным образом выбранных, как правило, из 50 и более карточек. Использования вопросов из IQ-тестов направлено: на пополнение словарного запаса, тренировки способности к логичным рассуждениям, распознаванию закономерностей, представленных в графическом виде (рис. 3). Тесты знаний направлены на проверку опорных моментов для каждой изучаемой темы, закреплению терминологии, основных алгоритмов, умению выполнять базовые операции. Карточки написаны как на украинском, так и на русском языке.



а) б) в)

Рис. 3. Посещаемость сайта студентами курса (а) и отдельными группами (б – КИТ58А и в – КИТ58Б). График построен за три недели до окончания семестра 24.12.09 (семестр был продлен на три недели из-за карантина в ноябре 2009 года). Средняя посещаемость сайта обеими группами 45, а отдельными 38 и 55. Ордината на графике означает то, что чем меньше номер в списке, тем студент недавно был на сайте. В этом отношении вторая группа более структурирована – активные студенты регулярно посещают сайт.

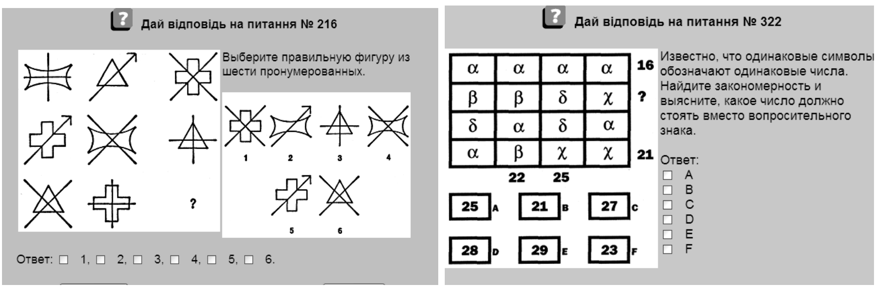


Рис. 3. Примеры карточек для развития интеллекта

Это позволяет студентам изучить терминологию на двух языках, что полезно с точки зрения того, что большое количество литературы по дискретной математике выходит на русском языке и доступно в сети (смотри на сайтах http://www.netbook.perm.ru/, http://gen.lib.rus.ec/, http://ihtika.net/). В частности, на сайте Интернет-магазина «Озон» (http://www.ozon.ru) по дискретной математике за 2008–2009 годы заявлено 17 книг. То, что один из двух еженедельных тестов посвящен развитию интеллекта, делает курс более живым, поскольку сам курс дискретной математики изобилует многообразием изучаемых разделов. Огромное количество абстрактных понятий вызывает трудности в изучении предмета студентами-информатиками, для которых математика не является профилирующим предметом, а их скорее интересуют, как эти понятия помогут им разобраться в прикладных алгоритмах.

Лабораторные работы выполняются студентами непосредственно на сайте курса. Описание лабораторных работ включает программу, которая, с одной стороны реализует основной алгоритм, а с другой – написана на языке JavaScript. Программа непосредственно внедряется в Web-страницу, придавая последней интерактивный характер. Дополнительные вопросы, на которые должен ответить студент, как правило, легко могут быть решены с использованием этой программы. Отчет составляется непосредственно на сайте курса, используя формы, подготовленные преподавателем для каждого студента с использованием инструмента «Анкетирование». Каждая такая анкета может содержать индивидуальные вопросы для каждого конкретного студента. Поскольку студентам разрешается размещать на сайте картинки (gif- или jpg- файлы до 64 килобайта каждый), отчеты могут содержать графический материал, поясняющий алгоритм и работу программы. Используя сайт, можно организовать безбумажную технологию проведения лабораторных работ, экономя средства студентов. При этом защита работ может проводиться обычным образом, включая ответы на дополнительные вопросы, внесения изменений в электронный текст отчета.

Используя сайт, очень легко организовать кросс-проверку отчетов на предмет выявления списываний студентов друг у друга. Это возможно, поскольку система строит таблицы, каждая строка которых представляет отчет конкретного студента, а каждая ячейка – ответ на конкретный вопрос. Анализируя столбцы в этой таблице, легко установить, насколько самостоятельно выполнен конкретный отчет. Примечательно то, что хотя в курсе студент выполняет только 7 работ, но из 17 возможных. При этом количество заданий каждый год расширяется за счет разработки новых лабораторных работ по новым разделам дискретной математики сильными студентами. Важность лабораторных работ в курсе основ дискретной математики заключается в том, что они позволяют студентам почувствовать, как работают абстрактные объекты такой математики в конкретных алгоритмах, на практике применить полученные знания.

Сайт позволяет очень легко создать коллекцию индивидуальных заданий для проведения самостоятельных работ. На практических занятиях студенты не только решают задачи у доски, но в конце занятий обязательно выполняют письменную самостоятельную работу. Это задание включает несколько задач на закрепление ключевых моментов изучаемой темы. Часто задача, которую разбирают у доски, кажется, простой, но как только студент начинает ее решать самостоятельно, то сразу натыкается на невидимые ранее барьеры. Преодолев это препятствие, студент переходит на следующую ступень понимания изучаемого материала, получает конкретные самостоятельные навыки в решении задач. Основным моментом является то, что такой вид деятельности проводится регулярно на каждом практическом занятии. При этом каждый студент получает возможность регулярно выступать, умение работать у доски, что не так просто как кажется со стороны.

Особенностью данного курса является способ подачи теоретического материала. Студент прослушивает и конспектирует лекцию в аудитории. Рабочий конспект преподавателя (отсканированный рукописный вариант) для каждой лекции размещается на сайте курса в библиотеке. Студент может воочию увидеть «кухню подготовки» лекции. Интерес могут вызвать те места, которые были изложены в другом объеме, что было опущено и почему. Конспект преподавателя составлялся таким образом, чтобы на его основе можно было составить аудио-конспект лекции [5]. Студент может повторно прослушать лекцию, если одновременно будет просматривать конспект преподавателя или свой и слушать запись лекции преподавателем. Поскольку запись производится на компьютере преподавателя в «тепличных» условиях, она гарантировано хорошего качества и по времени существенно меньше, чем длительность обычной лекции. Аудио-лекция разбита физически на небольшие mp3-файлы, что дает возможность быстро перейти к прослушиванию любого фрагмента лекции. Интересна возможность прослушивания студентами лекций на mp3-плеере по пути на занятия.

Курс содержит 28 презентаций, в который материал лекций представлен в свернутом виде (автор С.В. Чумаченко, факультет компьютерной инженерии и управления, кафедра АПВТ, Харьковский Национальный университет радиоэлектроники, e-mail: ri@kture.kharkov.ua) в виде таблиц, картинок, схем, историческими справками, страничками отдыха, литературными ссылками. Материал в таком виде очень полезен для систематизации знаний, подготовки к экзаменам. Презентации содержат дополнительный материал, который не вошел в курс, поскольку каждый преподаватель имеет свое видение курса, выстраивает акценты исходя из общих задач курса, аудитории студентов, их будущей специальности.

Не секрет, каждая учебная группа состоит из студентов различной степени подготовки, по-разному воспринимающих новый материал, умению правильно организовать свою работу, поставить правильные учебные цели, оптимальным образом достигнуть результата. Для преодоления такой однородности в курсе применяется метод организации работы в малых группах. Для того, чтобы подчеркнуть направленность группы на получение значимого конечного результата, в курсе такие группы именуются бригадами. В каждой бригаде обязательно назначается старший – бригадир. Его функция организовать работу студентов своей бригады, собрать результаты каждого в одно целое, провести проверку и сдать окончательный продукт преподавателю. Ссылки на техническое задание проекта компактно выложены на стартовой странице сайта (рис. 4).

а) б) в)

Рис. 4

а) фрагмент стартовой страницы сайта, предназначенный для организации групповой работы. Частично видны задания для лабораторных работ; б) блок списка всех обязательных тестов курса; в) таблица заданий для 14-й недели обучения

Важным моментом является принцип организации бригад. Бригады организуются после месяца учебы в курсе, когда с помощью текущей рейтинговой таблицы можно упорядочить студентов с точки зрения полученных ими результатов. Студенты, набравшие максимальное число баллов, назначаются бригадирами. В осеннем семестре 2009 года курс изучало около 40 студентов, было организовано 8 бригад. Следовательно, бригадирами стали первые восемь наилучших студентов. Следующие восемь студентов вошли в восемь разных бригад и т.д.

Такой принцип позволяет организовать бригады с приблизительно равными потенциальными возможностями в получении конечного результата в установленное время с хорошим качеством. Как правило, назначенные таким образом бригадиры полностью оправдывают возложенные на них обязанности. Но всегда бывает один или два ошибочно выбранных бригадира, что указывает на способность студента работать индивидуально, т.е. неспособного организовать работу группы. В этом случае инициативу в группе берет неформальный лидер, который стремится получить результат, видя, как другие бригады, успешно выполняют порученную им работу. В бригаде могут изначально возникнуть конфликты, если староста группы будет назначен простым исполнителем. Хотя это очень полезно с точки зрения того, что должность старосты накладывает определенные обязанности, и староста должен конкретно оправдывать занимаемую должность. На протяжении семестра бригады выполняют два задания, по одному в каждом модуле. Какие же типы заданий предлагаются в курсе дискретной математики? В осеннем семестре 2009 года были предложены следующие виды работ: набор текста лекций из рукописного варианта в электронный, перевод на украинский язык, подготовка материалов для издания в виде препринта. Поскольку рукописный вариант лекций не всегда понятен студентам, то очень полезными оказались аудио-лекции, прослушивая которые можно очень легко воспроизвести непонятные фрагменты рукописи. Выполняя набор математического текста, студент получают практические навыки работы с редакторами математических формул, подготовки графических рисунков, строгому следованию стилевым особенностям подготовки материала для дальнейшей печати. Перевод текста на украинский язык дает возможность познакомиться с терминологией на украинском языке. Выполненные студентами работы трансформируются в pdf-формат и размещаются на сайте курса. Лекции, набранные в первом этапе конкретной бригадой, передаются для перевода и макетирования другой бригаде. Бригада должна устранить недостатки в полученной работе, что поднимает ответственность за выполненную работу. В весеннем семестре 2009 студенты других групп выполняли частично аналогичную работу, но и получили практику в подготовке аудиокниги. Бригады читали разные фрагменты одной книги. К сожалению, проект оказался незавершенным из-за халатного отношения одного бригадира, который не смог получить окончательный результат. Такой вариант не был предусмотрен в оценке работы студентов в целом. Следовательно, бригадная работа должна включать при оценивании результата и баллы за достижение конечного результата, поскольку, в отличие от набора отдельных лекций, создание аудиокниги подразумевает выполнение всех составляющих проекта, а не только отдельных фрагментов.

Книги по математике с большим количеством формул озвучивать не имеет смысла, поскольку результат получается плохо воспринимаемым на слух. Подходящими являются книги серии «Эврика», издаванные издательством «Молодая гвардия» в 60–90 годы прошлого столетия и посвященные популяризации математики и компьютерных наук [6].

Полный список таких книг можно найти на сайте «Публичная библиотека Вадима Ершова и К°» (http://publ.lib.ru/publib.html) в разделе «Эврика» (http://publ.lib.ru/ARCHIVES/E/"Evrika"/_"Evrika".html). Некоторые из этих книг переведены в html-формат на сайте «Библиотека юного исследователя» (http://nplit.ru/). При изучении дискретной математики, желательно порекомендовать студентам посетить образовательный видео портал (http://univertv.ru/), где приводятся записи видеолекций по математике.

Выводы. Использование сайта для очных занятий позволило существенным образом улучшить структурную организацию учебного процесса, усилить контроль за самостоятельной работой студентов, придать занятиям соревновательный характер, реализовать принципы открытости результатов работы студентов (рис. 5). Повторное использование сайта преподавателем существенно облегчает процесс организации и сопровождения занятий. Результаты использования интерактивного сайта для организации групповой работы студентов показали необходимость проведения такой работы.

Работу сдает бригадир. Он предъявляет следующие документы:
1. Распечатку сделанной работы.
2. Электронный вариант работы. Оценка выставляется после сверки исходной рукописи с набранным текстом.
3. Заработанные баллы выставляются членам бригады незамедлительно в рейтинговую таблицу курса.

Перечень бригад и номеров лекций

Бригада №1 (Перевод+оригинал макет: Лекция №1 (выкачать для редактирования) и Лекция №23 (выкачать для редактирования))
Рябик Владислав (бригадир)
Авдєєв Дмитро
Калінін Володимир
Кулик_1 Максим
Локтішев Роман

а)

Останнє оновлення: 24.12.2009 16:33:02

Итоги работы студентов групп. КИТ-47А,Б, 67. Весна 2009
Набранные баллы. Оценка (необходимое минимальное количество баллов)

	F	FX	3E	3D	4C	4B	5B	5A
Модульный контроль 1 (1-9 Недели)	0	186	266	292	371	424	451	472
Модульный контроль 2 (10-17 Недели)	0	166	237	260	331	378	401	420
За семестр	0	351	501	551	701	801	851	891

Загальні бали
Бали за: T9 - Звіти, T18 - Тести, T19 - Анкети, T20 - Сам. Роб.
До зимової сесії залишилось:
15 дн 6 год 59 хв 17 сек

0	Прізвище	ім'я	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	T20	Сума
1	Мазанко	Владислав	4	12	8	16	8	21	8	21	177	21	8	21	8	12	.	.	.	302	72	58	777
2	Жолудь	Максим	4	17	8	21	8	16	8	17	176	16	8	21	8	8	.	.	.	255	62	52	705
3	Ірха	Максим	4	17	8	21	8	21	8	21	165	8	8	21	8	12	.	.	.	253	53	49	685
4	Шепелєва	Анастасія	4	12	8	17	8	17	.	21	153	12	8	13	8	8	.	.	.	287	60	46	682
5	Мєлєшкова	Юлія	4	17	8	15	7	16	8	17	163	12	8	21	8	12	.	.	.	230	60	60	666
6	Білоконь	Інна	4	17	8	20	8	21	8	17	170	21	8	21	8	9	.	.	.	180	61	60	641
7	Семененко	Ігор	4	12	8	16	8	16	8	16	152	16	8	16	8	12	.	.	.	201	61	44	606
8	Рябик	Владислав	4	12	4	16	8	21	.	21	136	13	8	8	4	9	.	.	.	227	58	49	598
9	Житинський	Олександр	4	12	8	16	8	21	8	21	133	17	8	17	.	13	.	.	.	215	40	50	591
10	Мишкович	Антон	4	12	8	20	8	21	8	20	153	21	8	17	.	8	.	.	.	176	44	58	586
11	Кулик_1	Максим	4	12	8	12	8	21	.	21	133	17	.	17	.	13	.	.	.	206	41	65	578
12	Примшиц	Юлія	4	17	8	15	8	16	8	16	167	16	8	21	8	12	.	.	.	152	45	50	571
13	Набойченко	Владислав	4	12	4	11	4	8	8	16	117	12	4	12	4	4	.	.	.	205	63	45	533

б)

Рис. 5

а) фрагмент страницы – технического задания для группового проекта;
б) фрагмент итоговой рейтинговой таблицы

Среду «Веб-класс ХПИ» и описание к ней можно скачать по адресу: http://narod.ru/disk/16295726000/web_class2009.zip.html (4.2 Мбайт). Материалы курса можно получить, написав электронное письмо Н.В. Савченко (nsavchenko77@mail.ru).

Литература

1. Бардачов Ю. М. Дискретна математика : підручник / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков ; за редакцією В.Є. Ходакова.– 2-ге вид., переробл. і допов.– К. : Вища шк., 2008.– 383 с.

2. Штенберг Р. Дж. Отточите свой интеллект /Пер. с англ. ; худ. обл. М. В. Драко.– Мн. : Попурри, 2000.– 544 с.
3. Рассел К. Большая книга IQ-тестов : 1600 заданий /Пер. с англ. – М. : АСТ ; Астрель, 2007.– 544 с.
4. Савченко Н. В. Сборник тестов к курсу «Основы дискретной математики» : для студентов компьютерных специальностей / Савченко Н. В., Нефидова Е. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2007. – 88 с.
5. Савченко Н. В. Опыт создания конспекта лекций по основам дискретной математики в mp3-формате / Савченко Н. В. //. Материалы IX международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии" (Воронеж, 12-13 февраля 2009 г.) : сборник материалов. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2009. – Том 2. – С. 774-777.
6. Чачко А. Г. Искусственный разум / Чачко А. Г. – М. : Молодая гвардия, 1978.– 224 с. – (Эврика)

ДИФЕРЕНЦІАЦІЯ НАВЧАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ СУЧАСНОЇ ШКОЛИ

І.А. Северин
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
Iriska@i.ua

На початку XXI ст. диференціація та індивідуалізація навчання і виховання учнів стала основоположним принципом роботи середніх загальноосвітніх навчальних закладів України. Створюється педагогічна система на засадах врахування освітніх потреб, можливостей і пізнавальних інтересів школярів, яка забезпечує як роботу з обдарованими дітьми, так і попередження неуспішності і відставання учнів. Це досягається, зокрема, ефективним поєднанням інваріантної та варіативної складових базового навчального плану в задоволенні запитів учнів і досягненні ними найкращих освітніх результатів. Такий підхід уможливлює варіативність робочих планів, за якими працюють середні навчальні заклади.

Епоха універсалізації освіти, енциклопедичних знань відходить у минуле. Темпи сучасного життя потребують більш раннього визначення сфери подальшої професійної підготовки. Таку можливість надає школярам диференціація освіти.

Разом з тим окремі аспекти диференціації не знайшли належного розв’язання. Особливо це стосується учнів старшої школи в умовах інтенсифікації навчально-виховного процесу. Викладене вище і зумовлює актуальність вибраної теми нашої статті.

Аналізуючи психолого-педагогічну літературу, ми прийшли до висновку, що нині існують різні означення термінів «педагогічна технологія», «диференціація навчання», «технологія диференційованого навчання» у дидактів і психологів.

На думку Б.Г. Ліхачова, педагогічна технологія – сукупність психолого-педагогічних установок, що визначають спеціальний добір і компоновку форм, методів, засобів, способів навчання, виховних засобів, вона є організаційно-методичним інструментарієм педагогічного процесу [7, 187].

Г.К. Селевко вважає, що педагогічна технологія функціонує і як наука, що досліджує найбільш раціональні шляхи навчання, і як система способів, принципів і регуляторів, що застосовуються в навчанні, і як реальний процес навчання [8, 67].

М.М. Фіцула переконаний, що диференціація навчання – це організація навчально-виховного процесу з урахуванням типових індивідуальних особливостей учнів [10, 190].

В.І. Бондар визначає, що диференціація навчання – це:

– поділ цілого на якісно відмінні частини;

– розподіл класу на групи дітей залежно від їхнього рівня розвитку для надання допомоги;

– розподіл завдань за складністю і трудністю залежно від індивідуальних можливостей учнів;

– навчання, що передбачає індивідуальний підхід до окремих учнів, групи дітей з метою надання допомоги в оволодінні програмним матеріалом [1, 97].

Отже, під диференційованим навчанням будемо розуміти організаційну систему, у якій навчальні групи, класи формуються за певною спільною ознакою й відповідно до цього навчання проводиться за різними навчальними планами й програмами з максимальним урахуванням індивідуальних особливостей учнів і забезпеченням оптимальних результатів у їхньому розвитку та у формуванні відповідних якостей.

Технологія диференційованого навчання має враховувати індивідуальні особливості учнів у всіх формах і способах навчального процесу.

Мета технології диференційованого навчання – це створення оптимальних умов для виявлення задатків, розвитку інтересів і здібностей. Навчальний процес орієнтований на засвоєння програмного матеріалу на основі використання методів диференційованого навчання на різних рівнях, але не нижче обов'язкового (стандарт) [5, 13].

Мета нашого дослідження конкретизувалася в завданні розглянути форми і методи практичного застосування диференційованого підходу у навчанні учнів старшої школи на уроках математики.

Диференційоване навчання у практичній діяльності вчителя передбачає, що всі учні одержують однакові завдання, але слабшим надається індивідуальна допомога під час їх виконання або окремі посильні для них завдання. Інколи учням пропонують легше завдання, але згодом ускладнюють додатковим, яке вони виконують відповідно до своїх можливостей. Загалом диференціація завдань за містом може здійснюватися на підставі кількості завдань, за ступенем їх трудності, самостійності виконання. На практиці такий поділ здійснюють на підставі реальних навчальних можливостей учнів [4, 359].

Використовуються різні варіанти диференціації, які можна поділити на три основні види:

1) групування учнів на основі їхніх особливостей чи комплексів цих особливостей для навчання за різними навчальними програмами;

2) індивідуалізація навчальної роботи всередині класу (групова);

3) індивідуалізація темпу вивчення матеріалу (прискорене вивчен-

ня – акселерація, уповільнене – ретардація) [5, 14].

Виділяють такі основні особливості диференціації:

1. Диференціація передбачає обов’язкове врахування індивідуальних особливостей учнів.

2. Індивідуалізація в умовах класно-урочної системи здійснюється через диференціацію навчання.

3. Мета диференціації – створення оптимальних психолого-педагогічних умов для виявлення і розвитку нахилів і здібностей кожного учня.

4. Диференціація передбачає створення принципово нової педагогічної технології навчання, яка сприятиме широкому впровадженню ідей диференціації в практику роботи школи.

5. Методи навчання в умовах диференційованого навчання змінюються відповідно до індивідуально-типологічних особливостей учнів та змісту навчання.

6. Диференціація оптимізує, гуманізує процес навчання, дає можливості для розвитку творчих здібностей учнів, забезпечує їхню максимальну пізнавальну активність на основі самостійної роботи, постійного зворотного зв’язку, об’єктивізації контролю та оцінки знань [2, 43].

Концепція єдності рівневої та профільної диференціації вимагає, звичайно, детального розгляду. Розкриємо внутрішню єдність двох названих видів диференціації.

– Навчання математиці повинно бути диференційованим. Причому в цьому навчанні повинні бути представлені й рівневість і профільність.

– Учневі повинна бути надана можливість вибору тієї або іншої диференціації в будь-який час, у будь-якому класі.

– При виборі форм диференціації перевагу потрібно віддавати не екстенсивним, а інтенсивним формам.

– Диференціація повинна бути добровільною як для учня, так і для вчителя. Диференціацію в жодному разі не можна «впроваджувати».

– Учень і вчитель повинні бути в процесі навчання рівноправними. Якщо учні працюють по-різному, то й учитель повинен працювати з ними по-різному; якщо диференціація покликана полегшити, зробити більш цікавою, корисною, продуктивною роботу учня, то вона тим більше повинна полегшити, зробити більше цікавою, корисною, продуктивною і роботу вчителя.

– Врахування психологічних особливостей учнів і вчителів. У зв’язку із цим особливо важливо враховувати посильність навчальних і виховних задач, які ставляться перед учнями й учителем.

– Дотримання принципу комплексності диференціації. Він полягає в тому, що учневі надається можливість учитися диференційовано по всіх предметах або хоча б по групі предметів, а також перейти в диференціацію, акцентовану на профільність, у будь-якому класі, почати її в будь-який час, по будь-якому предмету.

– Дотримання принципу навчання прогресивними методами. Без дотримання цього принципу нездійсненна й диференціація на цивілізованому рівні.

– Шкільний курс математики повинен містити гуманітарну, загальнокультурну, по можливості філософську частину, володіння якою обов'язково для всіх учнів.

– Іти до учня, іти від учня й знову повертатися, по суті, не йдучи від нього, повертатися до учня колишнього й одночасно іншого.

– Зміст контрольних робіт повинен надавати учням можливість вибору тих або інших задач, кожна з яких явно оцінена певною кількістю балів. Потрібно з'ясовувати не те, чого учень не знає, а те, що він знає. Тільки при цій умові диференціація буде засобом підтримки в учня віри в себе, у свої можливості, а оцінка – відбивати справжній рівень знань школяра [9, 3].

Значно більше відповідає ідеї рівневого навчання подання математичної інформації великими блоками, одним-трьома теоретичними комплексами, що вичерпують всю тему.

Виходячи з цих міркувань, рекомендується така схема вивчення навчальних тем: 1) ознайомлення з теоретичним матеріалом теми і його застосування у найпростіших ситуаціях; 2) уроки досягнення ОРН (обов'язкові результати навчання) з теми; 3) залік з ОРН; 4) самостійне розв'язування завдань підвищеного рівня учнями, які досягли ОРН; 5) продовження роботи над ОРН учнями, які частково оволоділи ними; 6) розбір з усіма учнями завдань підвищеного рівня; 7) перевірочна робота на підвищеному рівні або з ОРН: узагальнення, систематизація теоретичних знань, залік з теоретичного матеріалу; 8) підсумкова контрольна робота.

Навчальний теоретичний матеріал з кожної теми можна умовно поділити на три блоки:

– блок основних обов'язкових знань (означення математичних понять, теореми і алгоритми, правила, що лежать в основі виконання завдань обов'язкового рівня);

– блок другорядних, допоміжних знань, які сприяють первинному засвоєнню основного навчального матеріалу;

– додатковий блок, що розширює, і поглиблює знання з теми.

Прийнявши обов'язкові результати навчання за основу диференціації, складаємо три блоки теоретичних знань:

– блок основних (обов’язкових) знань: означення протилежних чисел, цілих чисел, правила порівняння чисел різних класів;

– блок допоміжних знань: означення координатної прямої, координати точки, системи координат, координатної площини, правило порівняння чисел за допомогою координатної прямої;

– блок додаткових знань: символічний запис означення модуля числа, означення перпендикулярних і паралельних прямих.

Спрямованість вивчення теоретичних положень з теми на конкретний рівень засвоєння, правильне використання термінів, виконання побудов, відтворення формулювань, застосування їх як алгоритмів дає змогу скоротити час на засвоєння теоретичного матеріалу протягом двох спарених уроків.

Другим етапом вивчення кожної теми є робота, спрямована на досягнення учнями ОРН.

Основу оволодіння учнями ОРН складає репродуктивна діяльність. У більшості випадків вона відбувається за такою схемою:

– ознайомлення учнів із зразками виконання всіх завдань залікової роботи;

– фронтальне (письмове, усне) виконання значної кількості вправ кожного типу;

– виконання біля дошки усіх завдань залікової роботи (3–4 учні);

– самостійне розв’язування учнями варіантів залікової роботи (окремі учні отримують необхідну індивідуальну допомогу).

Перший етап роботи над ОРН завершується виконанням одного з варіантів залікової роботи. Учні, які правильно розв’язали всі завдання, переходять на більш високий рівень навчання, інші ж – продовжують роботу з формування вмінь обов’язкового рівня.

Організація підвищеного рівня навчання за запропонованою схемою дає змогу реалізувати потенціал задач середньої складності для формування в учнів елементів творчості, сприяє набуттю досвіду самостійно розв’язувати ускладнені, змінені задачі шляхом зведення їх до послідовного розв’язування відомих елементарних. Відведення одного-двох уроків у кожній темі на самостійну пошукову діяльність дозволяє залучати до роботи всіх, без винятку, учнів. При цьому задачі середньої складності стають засобом формування елементів продуктивної діяльності для незначної кількості учнів, а для більшості – засобом формування ускладненої продуктивної діяльності.

Основне завдання поглибленої підготовки – оволодіння учнями методами і прийомами розв’язування задач підвищеної складності (творчих, олімпіадних, конкурсних), сконструйованих на матеріалі основного курсу і розділів математики, що не входять до загальноосвітнього курсу (елементи логіки, комбінаторика, теорія ймовірності тощо), набуття учнями досвіду творчої, пошукової діяльності. За основу беруться задачі підвищеної складності з чинних підручників, а також олімпіадні та конкурсні задачі. Для кожної з них складаються блоки задач, в яких застосовується спільний спосіб чи прийом розв'язування [3, 59].

Отже, нові вимоги до шкільної практики переносять акцент в діяльності вчителя з передачі готових знань на організацію і управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів в її багатопланових проявах. Відповідно до Національної доктрини розвитку освіти [6, 12], одним з основних напрямків оновлення змісту шкільної освіти є її особистісна орієнтація, основною метою якої є розвиток самостійності учнів, включаючи прагнення до самоосвіти, самовиховання, самореалізації. Тому актуальним і стає використання у навчальному процесі диференціації на уроках математики в старшій школі.

Література

1. Бондар В. І. Форми організації процесу навчання. Урок. Таксономія уроків різних типів. Дидактика / В. Бондар. – К., 2005. – С. 97-120.

2. Братанич О. Проблема дефініцій базових понять у теорії диференційованого навчання / О. Братанич // Рідна школа. – 2000. – №7. – С. 43-45.

3. Бурда М. І. Рівнева диференціація у шкільній математиці / М. І. Бурда, В. В. Дивак, Г. М. Литвиненко // Рідна школа. – 1990. – №9. – С. 59-63.

4. Волкова Н. Педагогіка / Наталя Волкова. – К., 2001. – 576 с.

5. Грязнов Ю. Технології активного навчання фізики: розвивальна, проблемна, диференційована, модульна / Юрій Грязнов // Фізика та астрологія в школі. – 2002. – №6. – С. 13-17.

6. Концепція 12-річної загальної середньої освіти // Інформаційний збірник міністерства освіти України. – 2000. – №21. – С. 12.

7. Лихачев Б. Т. Педагогика / Б. Т. Лихачев. – М., 1992. – 464 с.

8. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии : учебное пособие / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

9. Семенов Е. Е. Диференцированое обучение математике с позицій гуманизма / Е. Е. Семенов, В. В. Малиновский // Математика в школе. – 1991. – №6. – С. 3.

10. Фіцула М. М. Педагогіка : [навчальний посібник] / Михайло Михайлович Фіцула. – К. : Академвидав, 2006. – 560 с.

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРАКТИЧНА ГОТОВНІСТЬ ЯК СКЛАДОВІ МЕТОДИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

С.О. Скворцова
м. Одеса, Південноукраїнський національний педагогічний університет
ім. К.Д. Ушинського
skvo2007@mail.css.od.ua

В умовах модернізації української системи освіти школі потрібен компетентний вчитель, спроможний ефективно діяти, розв'язуючи стандартні та проблемні задачі, що виникають у навчально-виховному процесі. Тому перед педагогічними навчальними закладами на перший план виходить завдання поліпшення підготовки майбутнього вчителя відповідно вимог компетентністного підходу.

Різні аспекти підготовки студентів до педагогічної діяльності досліджено у працях А. Алексюка, В. Афанасьєва, І. Беха, В. Бондаря, О. Глузмана, Н. Ничкало та ін. Сутність й зміст формування готовності майбутніх педагогів до педагогічної діяльності розглядають О. Біда, Л. Кондрашова, М. Коць, Н. Кузьміна, С. Литвиненко, А. Ліненко. Проблемам професійної підготовки вчителя математики присвячені роботи І. Акуленко, В. Бевз, Г. Бевза, М. Бурди, С. Гончаренка, О. Дубинчук, В. Клочка, А. Кузьминського, Н. Лосєвої, Ю. Мальованого, О. Матяш, В. Монахова, О. Мордковича, В. Моторіної, Г. Михаліна, О. Скафи, З. Слєпкань, Н. Тарасенкової, О. Чашечнікової, В. Швеця та інших науковців. Вчені розглядають поняття «професійна компетентність вчителя математики», «методична компетентність вчителя математики», процес формування професійної та окремо методичної компетентності майбутнього вчителя математики. Між тим, загальноприйнятого означення поняття «методична компетентність вчителя математики», класифікацій методичних компетентностей й досі не існує.

<u>Метою</u> статті є визначення змісту поняття «методична компетентність вчителя математики» через її складові – теоретичну та практичну готовність до проведення уроків математики.

Методична компетентність має яскраво виражений прикладний характер й поєднує систему спеціально-наукових, психолого-педагогічних, дидактико-методичних знань, умінь й особистого досвіду в їхньому застосуванні під час викладання математики. Методична компетентність вчителя математики розглядається нами як теоретична і практична готовність до проведення занять з математики за різними навчальними комплектами, що виявляється у сформованості системи дидактико-методичних знань і умінь з окремих розділів та тем курсу, окремих етапів навчання й досвіду їх застосування (дидактико-методичних компетенцій), спроможність ефективно розв'язувати стандартні та проблемні методичні задачі. Виходячи з особливостей педагогічної діяльності вчителя, логічної обумовленості і послідовності його дій, операцій по її здійсненню, В. Сластьонін, І. Ісаєв та Є. Шиянов виділяють бінарні групи педагогічних задач: аналітико-рефлексивні; конструктивно-прогностичні; організаційно-діяльнісні; оцінно-інформаційні; коректувально-регулюючі [2]. Всі ці групи педагогічних задач має розв'язувати вчитель математики під час навчання учнів, причому високий рівень їх вирішення обумовлений наявністю всіляких моделей, конструкцій розв'язування, зафіксованих в пам'яті індивіда, які мають бути засвоєні на рівні умінь у їх застосуванні.

Саме узагальнене уміння педагогічно мислити, що передбачає наявність аналітичних, прогностичних, проектних і рефлексійних умінь, вважають змістом теоретичної готовності А. Роботова, Т. Леонтьева, І. Шапошникова [1].

Між тим, зазначені вміння складені за своєю структурою, й більшість з них можна подати у вигляді композиції вмінь нижчого порядку. Розглянемо склад вмінь, які мають бути сформовані в майбутнього вчителя математики для того, щоб він набув методичної компетентності (табл. 1).

Таблиця 1.

Зміст теоретичної готовності до навчання учнів математики

№	Вміння			
	Аналітичні	Прогностичні	Проектні	Уміння рефлексій
1	• *аналізувати та осмислювати з метою визначення і встановлення взаємозв'язків між різними компонентами та чинниками, що впливають на ефективність навчання математики, алгебри або геометрії:*	• *усвідомлювати мету діяльності у вигляді результату, що передбачається:*	• *проектувати процес навчання математики; алгебри або геометрії:*	• *контролювати та оцінювати власну діяльність:*
	– особливості і побудову курсу	– формулювання освітніх ці-	– складання календарного пла-	– оцінювання правильності

№	Вміння			
	Аналітичні	Прогностичні	Проектні	Уміння рефлексій
	математики 5-6 класів, алгебри і геометрії; – нормативні документи: Державний стандарт, програму; – вимоги до рівня навчальних досягнень учнів; – критерії оцінювання навчальних досягнень учнів;	лей, що діагностуються, і завдань навчання математики, алгебри або геометрії;	ну з математики; алгебри або геометрії для кожного року навчання; – визначення окремих етапів процесу навчання математики і завдання, характерні для них; – проектування очікуваних результатів опанування програми для певного року навчання;	сформульованих цілей, їх перетворення, конкретизацію в ті або інші завдання; – оцінювання адекватності вирішуваних пріоритетних завдань необхідним умовам;
	– процес навчання учнів математики: основні засоби, методи і форми організації навчального процесу, можливі структури уроку математики;	– прогнозування педагогічного процесу (освітніх, розвивальних і виховних можливостей змісту курсу для певного року навчання або окремої теми, утруднень учнів в учінні; прогнозування результатів використання тих або інших методів, засобів і прийомів освіти); – відбір мето-	– проектування процесу навчання математики дотримуючись вимог до математичної підготовки учнів; – планування змісту і видів діяльності учасників процесу навчання математики; – визначення форми і структури освітнього процесу залежно від сформульованих завдань і особливостей учасників;	– оцінювання відповідності змісту діяльності учнів поставленим завданням; – контроль ефективності методів, прийомів і засобів педагогічної діяльності, що застосовувалися; – оцінювання відповідності організаційних форм, що застосовувалися, віковим особливостям учнів, рівню їх розви-

№	Вміння			
	Аналітичні	Прогностичні	Проектні	Уміння рефлексій
		дів, форм та засобів досягнення освітніх цілей та завдань; – уявне опрацювання структури і окремих компонентів процесу навчання математики;	– планування індивідуальної роботи з учнями для надання своєчасної диференційованої допомоги або для розвитку їх здібностей; – відбір форм, методів і засобів навчання і виховання для здобуття якісного педагогічного результату; – планування системи прийомів, направлених на стимулювання пізнавальної активності школярів;	тку, змісту навчального матеріалу; – визначення причин успіхів і невдач, помилок і скрути в ході реалізації поставлених завдань навчання математики; – оцінювання цілісного досвіду своєї педагогічної діяльності і його відповідності критеріям і рекомендація, пропонованим сучасною наукою.
	– зміст курсу математики, алгебри або геометрії для певного року навчання, а також зміст окремих його тем;	– формулювання очікуваних результатів опанування теми або курсу для певного року навчання.	– проектування процесу навчання окремої теми відповідно вимог до її опанування;	
	– методичні системи, що реалізовані у чинних підручниках;		– проектування уроків математики за різними навчально-методичними комплектами;	
	– передовий педагогічний досвід		– проектування пошукової дія-	

№	Вміння			
	Аналітичні	Прогностичні	Проектні	Уміння рефлексій
	вчителів-практиків з проблем організації сучасного уроку математики та вивчення окремих його тем; – педагогічні інновації при побудові уроку або при вивченні окремих тем; – особливості використання сучасних навчальних технологій під час навчання математики;		льності учнів із врахуванням новітніх педагогічних підходів до організації навчання або опанування окремої теми;	
2.	• *інтерпретувати результати аналізу з метою формулювання пріоритетних педагогічних завдань і знаходження оптимальних способів їх розв'язування;*		– виокремлювання завдань, що виникають під час навчання учнів математики та проектування ходу їх розв'язування, обґрунтовуючи способи їх поетапної реалізації;	
3.	• *правильно діагностувати процес навчання учнів математики, алгебри або геометрії.*		– проектування діагностичних процедур відповідно критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів із окремої теми.	

Очевидно, що всі ці вміння базуються на знаннях цілей і завдань навчання математики; особливостей і побудови курсу математики; на знаннях про нормативні документи; про побудову календарного планування; на знаннях вимог до математичної підготовки учнів; критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів; основних засобів, методів і форм організації навчального процесу; на знаннях про можливі структури уроку математики; методичних систем, що реалізовані у чинних підручниках; відмінностей цих методичних систем; на знаннях передового педагогічного досвіду вчителів-практиків з проблем організації сучасного уроку математики та вивчення окремих його тем; загальних особливостей використання сучасних навчальних технологій під час навчання математики; на знання про порядок вивчення окремих тем курсу математики 5–6 класів, курсу алгебри, курсу геометрії 7–12 класів; на знаннях про результати опанування цими темами; на знаннях традиційної методики вивчення окремих тем; інноваційних підходів їх опанування.

Під практичною готовністю майбутнього педагога до проведення уроків математики ми розуміємо набуття ним досвіду застосування складових теоретичної готовності на практиці: через імітацію майбутньої педагогічної діяльності під час рольових ігор, через проектну діяльність по розв’язуванню методичних проблем тощо.

Наступним кроком має бути визначення переліку компетенцій (знань, умінь і досвіду їх застосування), що складають методичну компетеність вчителя математики.

Література

1. Роботова А. С. Введение в педагогическую деятельность / А. С. Роботова, Т. В. Леонтьева, И. Г. Шапошникова и др. – М. : Академия, 2000. – 200 с.

2. Сластенин В. А. Педагогика : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; под ред. В.А. Сластенина. – М. : Академия, 2002. – 576 с.

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ММС SAGE В МОБІЛЬНОМУ КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

К.І. Словак[1], М.В. Попель[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький економічний інститут Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана
[2] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
Slovak_kat@mail.ru

Сучасне уявлення про якісну математичну освіту передбачає таку важливу складову навчального процесу, як застосування інформаційно-комунікаційних технологій математичного призначення, зокрема – систем комп'ютерної математики (СКМ). Використання СКМ у курсі вищої математики дозволяє: більш наочно і зрозуміло подати теоретичний матеріал; позбавити студентів від виконання рутинних обчислень; забезпечити багаторівневий процес навчання, а, отже, сприяє підвищенню пізнавального інтересу і головне – дозволяє зробити процес навчання більш швидким та змістовним.

Поступово все більшої популярності набуває новий напрямок розвитку СКМ – мобільні математичні середовища (ММС).

Мобільне математичне середовище – це мережне програмне забезпечення, що надає можливість доступу до математичних об'єктів в будь-який зручний час та будь-який спосіб. Застосування таких середовищ дозволяє інтегрувати аудиторну і позааудиторну роботу у безперервний навчальний процес та надає можливість організувати в межах одного середовища повний цикл навчання: а) зберігання та подання навчальних матеріалів; б) математичних досліджень; в) індивідуальної та колективної роботи; г) оцінювання навчальних досягнень.

Яскравим представником мобільних математичних систем є Web-СКМ Sage.

За допомогою Sage можна:

1) виконувати будь-які обчислення, як аналітичні (дії з алгебраїчними виразами, розв'язування рівнянь, диференціювання, інтегрування тощо), так і чисельні (точні – з будь-якою розрядністю, наближені – з будь-якою, наперед заданою точністю);

2) подавати результати обчислень у зручній для сприйняття формі, будувати дво- та тривимірні графіки кривих та поверхонь, гістограми та будь-які інші зображення (в тому числі анімаційні);

3) поєднувати обчислення, текст та графіку на робочих листах з можливістю їх друку, оприлюднення в мережі та спільної роботи над ними;

4) створювати за допомогою вбудованої у Sage мови Python моделі для виконання навчальних досліджень;

5) створювати нові функції та класи мовою Python [1].

Під час вивчення курсу вищої математики ММС Sage доцільно використовувати за такими напрямами:

– графічні інтерпретації математичних моделей та теоретичних понять;
– автоматизація рутинних обчислень;
– підтримка самостійної роботи;
– математичні дослідження [2].

Таким чином, ММС Sage можна вважати ефективним засобом для створення мобільних курсів, а також модульним динамічним об’єктно-орієнтованим середовищем для навчання.

В процесі вивчення мобільного курсу вищої математики особливої уваги заслуговує застосування моделей з графічним інтерфейсом і напівавтоматичним управлінням. Використання та дослідження таких моделей дозволяє значно легше зрозуміти математичну, фізичну чи економічну суть методів та алгоритмів; глибше усвідомити новий матеріал та створити змістову основу для розв’язання прикладних задач, а також сприяє підвищенню пізнавальної активності через наочність.

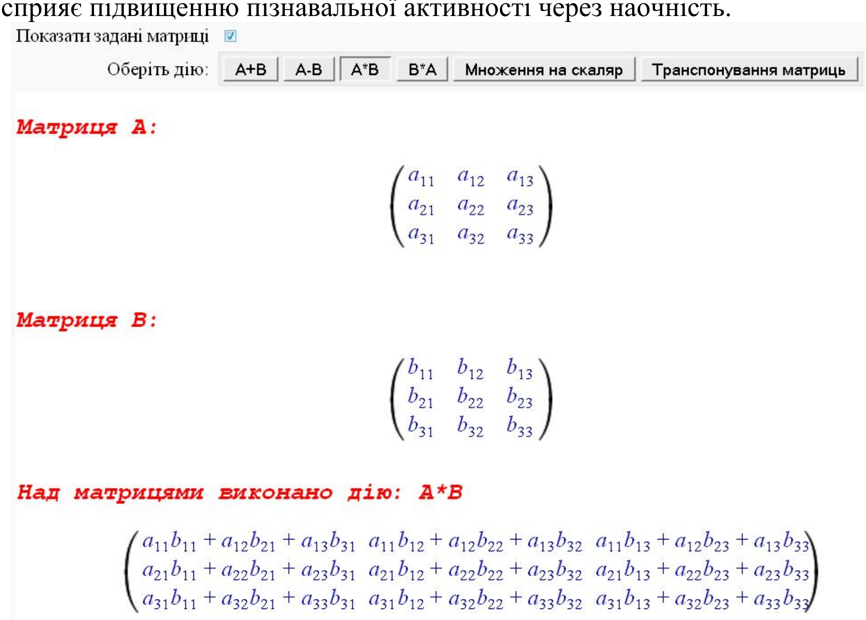


Рис. 1. Інтерфейс користувача моделі «Операції над матрицями»

Наведемо декілька прикладів.

Так, під час вивчення першого модуля курсу «Елементи лінійної алгебри», зокрема теми «Матриці та дії над ними», пропонуємо студентам модель, яка демонструє правила додавання та віднімання матриць, множення матриці на скаляр, транспонування матриці, множення двох матриць на прикладі квадратних матриць третього порядку (рис. 1).

Особливістю цієї моделі є те, що результат виконання тієї чи іншої операції подано у вигляді формули, тобто користувач не просто отримує готовий результат, а бачить, які дії потрібно виконати для того, щоб отримати суму, різницю чи добуток матриць.

Таку модель доцільно використати під час лекції, звільняючи викладача від громіздких записів на дошці, а студентів у зошитах, тим самим вивільняючи час на обміркування та засвоєння алгоритмів розв’язування задач.

При вивченні модуля «Елементи векторної алгебри» пропонуємо застосовувати дві моделі: перша – ілюструє операції над векторами (рис. 2), друга – залежність скалярного добутку векторів від градусної міри кута між ними (рис. 3). Під час роботи з останньою моделлю змінюючи кут між векторами (рухаючи повзунок відповідного поля) студент переконується, що дійсно скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю тощо.

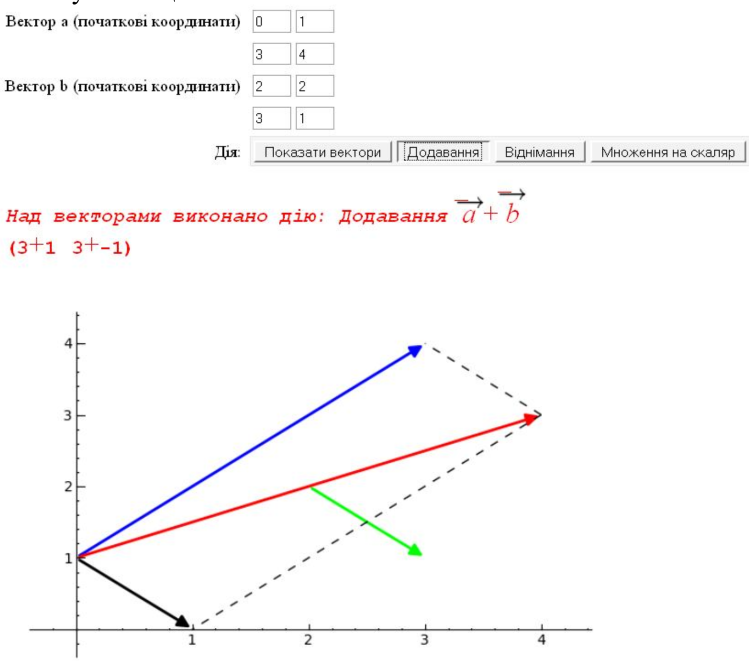


Рис. 2. Інтерфейс користувача моделі «Операції над векторами»

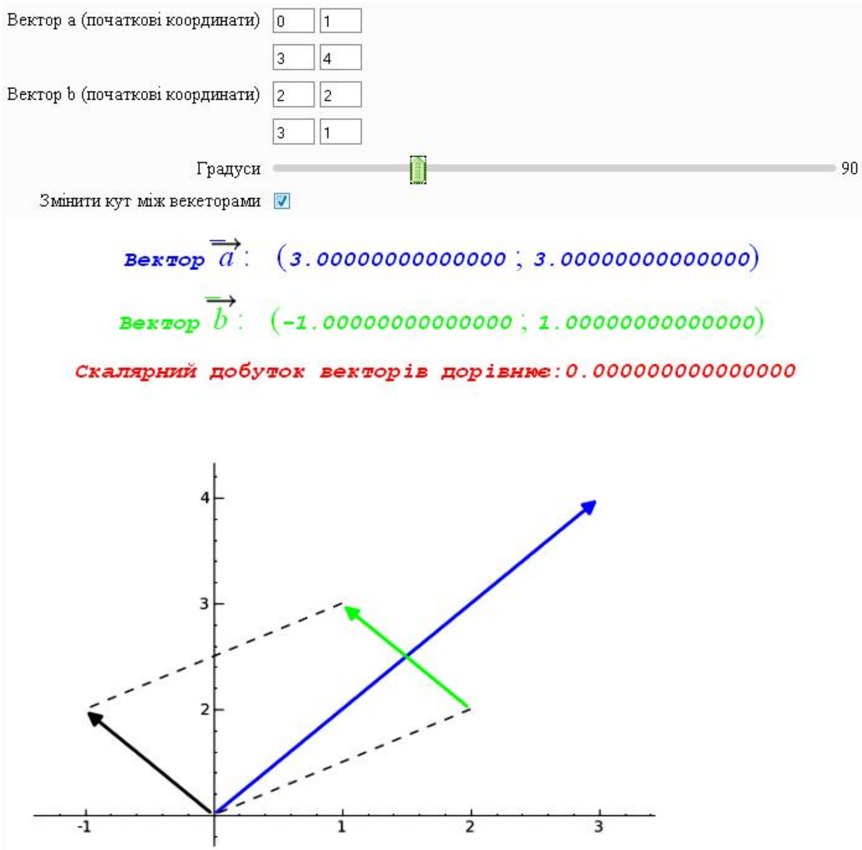


Рис. 3. Інтерфейс користувача моделі «Скалярний добуток векторів»

Наступну модель, пропонуємо використати при вивченні модуля «Ряди», зокрема розкладання елементарних функцій у ряд Маклорена.

При роботі з цією моделлю користувач має можливість змінювати функцію, що розкладається та вибирати, яку кількість частинних сум зображати на графіку. Запропонована модель може виступати не тільки в якості ілюстрації теоретичних понять, а й інструментом для досліджень. Так, змінюючи положення повзунка в ту чи іншу сторону, студент помічає певну закономірність та робить висновок, що чим більшу кількість членів ряду Маклорена взяти, тим точніше графік відповідної частинної суми співпадає з графіком заданої функції.

Крім цього, студентам пропонується відстежити та пояснити наступний факт: якщо поступово (крок за кроком) збільшувати кількість частинних сум, користувач легко зрозуміє, що коли розкладати непарну функцію, то графік будь-якої парної частинної суми співпадає з передуючим йому графіком непарної частинної суми та навпаки.

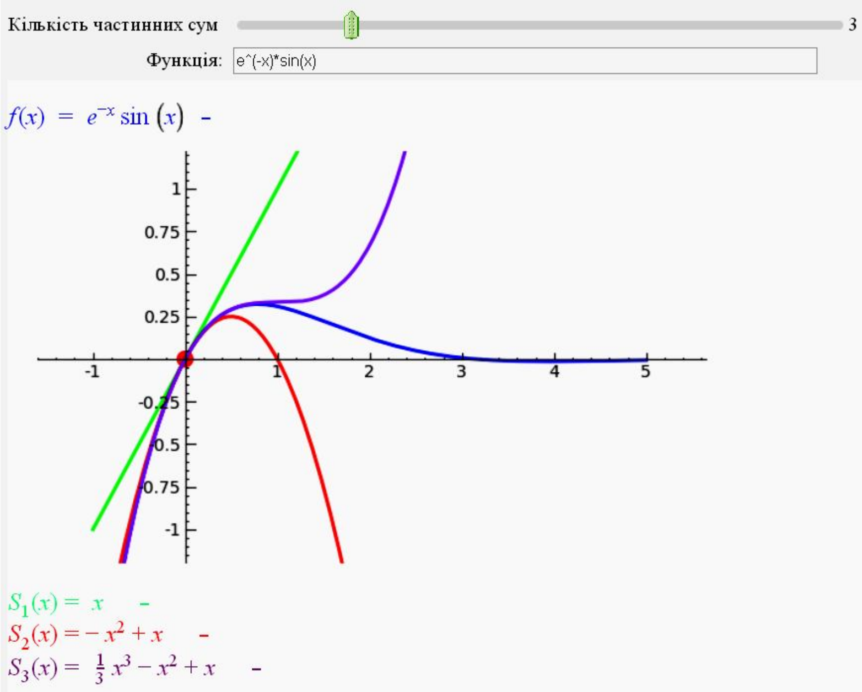


Рис. 4. Інтерфейс користувача моделі «Розвинення функції ряд Маклорена»

Таким чином, під час вивчення мобільного курсу вищої математики використання розроблених моделей дозволяє підвищити ефективність вивчення багатьох математичних понять; сприяє активізації пізнавальної активності та дослідницької діяльності студентів. Разом з тим, потрібно усвідомлювати, що ефективність впровадження у навчання СКМ забезпечується педагогічно виваженим добором змісту, методів і засобів навчання, зокрема комп'ютерних програм, форм і методів їх використання та систематичністю роботи студентів із комп'ютером [3].

Література

1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. – 316 с.

2. Словак К. І. Застосування мобільних математичних середовищ у процесі навчання вищої математики студентів економічних ВНЗ / Словак К. І. // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики». – Суми : Видавництво СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2009. – С. 230–231.
3. Шавальова О. В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп’ютеризації навчання : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання математики / Шавальова О. В. ; Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова. – К., 2007.

СИСТЕМНАЯ ПАРАДИГМА ТЕОРИИ ОБРАТИМЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Д.И. Ткач
г. Днепропетровск, Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
tkachdi@gmail.com

Постановка задачи. Доказать необходимость концептуального перехода от понимания начертательной геометрии как прикладной науки к её пониманию как фундаментальной математической дисциплины с её приложениями [1; 2] на основе системной парадигмы как «строго научной теории, воплощенной в системе понятий, выражающих существенные черты действительности» [3, 963].

Такая постановка задачи вытекает из чувства неудовлетворённости традиционным содержанием монжевой начертательной геометрии [4] и произведений её многочисленных интерпретаторов – авторов вузовских учебников для профессиональной подготовки широкого круга специалистов созидательных профессий: строителей зданий, сооружений, приборов, самолётов, кораблей, машин и механизмов, компьютерной и космической техники и т.п., а также архитекторов, проектировщиков и конструкторов всех этих рукотворных материальных систем. Подавляющее большинство этих учебников напоминают рецептурные справочники по выполнению графических построений, дающих ответы на два прагматичных вопроса, поставленных Гаспаром Монжем: 1) как на двумерной плоскости изображать трёхмерные объекты и 2) как «на основе точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, которые вытекают из их формы и взаимного расположения» [4, 12]. Но они не отвечают на основной вопрос: что такое изображение, какова его природа и почему человечество не может без него обойтись? А ведь ответ на него актуализирует необходимость изучения и развития теории изображений, которой является начертательная геометрия.

В традиционном изложении эта прикладная наука парадоксальна по нескольким направлениям. Существуя более 200 лет, она не имеет общепринятого определения и предмета исследования, а как геометрия, лишена собственной аксиоматики и поэтому не входит в классификацию геометрических систем, произведенную Феликсом Клейном в его Эрлангентской программе. Эти обстоятельства определили её общее кризисное состояние, «выходом» из которого явилось переименование в «прикладную геометрию». Но и в таком качестве она по-прежнему не имеет ни общепринятого определения, ни, тем более, собственной аксиоматики, а предметами исследования стали объекты, процессы и явления разнообразных областей её приложений. Это привлекло к научным исследованиям по специальности 05.01.01 «Прикладная геометрия и инженерная графика» широкий круг специалистов из различных отраслей знания, не специализирующихся в области теории и практики изображений, но использующих аппарат так называемого «геометрического моделирования». Поэтому их публикации не содержат порой ни одной иллюстрации и испещрены аналитическими выкладками. Будучи математиками, они не защищают диссертации на степени кандидатов и докторов физико-математических наук, а довольствуются степенями кандидатов и докторов технических наук, что менее хлопотно и не менее престижно.

Начиная с 1964 года, в Украине вышел 81 выпуск межведомственного республиканского научного сборника «Прикладная геометрия и инженерная графика», создана общественная организация «Украинская ассоциация прикладной геометрии», отметившая в 2009 году своё 10-летие и ежегодно проводятся по несколько конференций по «современным проблемам геометрического моделирования…». В итоге прикладная геометрия сформировалась как научная дисциплина, а инженерная графика, научной основой которой является начертательная геометрия, отошла на второй план в предположении, что её традиционное содержание вполне удовлетворяет нужды кафедр, ведущих геометро-графическую подготовку специалистов созидательных специальностей. И получается некое «раздвоение личности» тех преподавателей, которые в научном плане творчески занимаются прикладной геометрией, а в педагогическом – рутинно, – начертательной. В итоге студент, с трудом понимающий эту «начерталку», не вырабатывает в себе основ конструктивно-композиционного мышления как начала преобразования его обывательского мышления в профессиональное проектное, имеющее креативный характер. Это обстоятельство является основным негативом, требующим принципиально нового подхода к его устранению.

В качестве такого подхода предлагается системная парадигма теории обратимых изображений, основанная на переосмыслении традиционного содержания начертательной геометрии с позиций естественнонаучного принципа системности и создании на его основе непротиворечивой концепции системной начертательной геометрии.

Принцип системного понимания природы любых объектов и явлений как проявление философского принципа их всеобщей взаимосвязи, является одним из основных факторов современного развития науки и техники. Согласно этому принципу объект считается изученным, если он понят как некоторая непрерывная система взаимосвязанных и взаимодействующих элементов [5]. Общая теория систем утверждает, что объект или процесс любой природы является системным. Это означает, что системное содержание имеют не только материальные образования естественного или искусственного происхождения, но и всякого рода их изоморфные концептуальные модели, т.е., мысленные образы, локализованные в сознании человека.

Совершенно очевидно, что любой действительный искусственный объект состоит из действительных элементов, которые в процессе его созидания так или иначе располагаясь относительно друг друга, связываются между собой соответствующими материальными связями. Понимание этого приводит к возникновению в сознании исследователя идеального образа объекта, элементами которого становятся геометрические понятия точки, линии, плоской фигуры, поверхности, а связями – понятия об их взаимной принадлежности, пересечении, параллельности, перпендикулярности, касании, подобии, конгруэнтности, тождественности, симметрии, гомотетичности, гомологичности и т.д., свойства которых описываются аксиоматикой евклидовой геометрии.

Если объект не существует, но должен существовать, то его идея зарождается в сознании архитектора, волей которого существующие в нем понятия об элементах и связях между ними интегрируются в единое целое и формируют идеальный образ объекта, который по своей сути является его *геометрической моделью*. Так как образ виртуален и изменчив, то информация о свойствах его идеальной формы кодируется на листе бумаги графически, при помощи точек и линий. В результате возникает *графическая модель* объекта, несущая в себе информацию о позиционных и метрических свойствах его геометрической модели, т.е., однозначного мысленного представления о его действительной форме как материализованной структуре реального пространства.

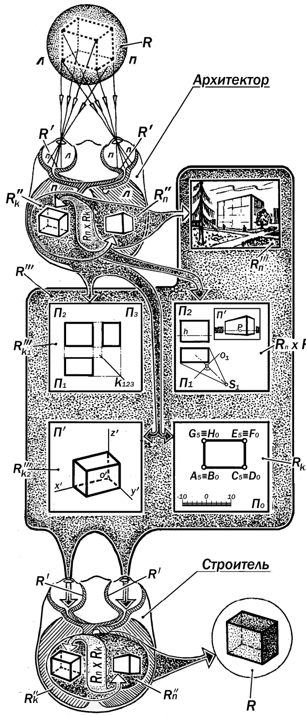
Эта графическая модель служит обязательной основой создания проектной модели объекта как источника информации не только о его позиционных и метрических, но и о прочностных, акустических, оптических, декоративно-художественных, экономических и прочих свойствах. В результате возникает замкнутая цепь или своеобразный диалектический круговорот соответствий между элементами этих различных по своей природе пространств.

Понятие «пространство» (рис. 1) относится к числу и философских, и физических, и геометрических, ибо пространственность материальных объектов, воспринимаемая непосредственно, с давних пор вызывала познавательный интерес человека. В итоге раскрыты такие его свойства как трёхмерность, однородность и изотропность, непрерывность и бесконечность. Эти свойства характеризуют воспринимаемое человеком реальное пространство R локальных масштабов, в котором справедливы законы ньютоновой механики и объекты которого, как системы, описываются евклидовой геометрией. Процесс этого описания двухступенчатый. Прежде эти объекты воспринимаются зрительно, т.е., чувственно (R'), что влечёт за собой, в силу предметности зрительного восприятия, индуцирование гипотетического визуального пространства $R''_п$, заполненного их зрительными образами, в силу динамизма восприятия, – множеством перспективных видимых форм, а затем, – после осмысления увиденного, формируется концептуальное пространство знаний R''_k, в котором каждый объект приобретает одну идеальную форму, описываемую евклидовой геометрией. При этом геометрия визуального пространства $R''_п$ не является евклидовой, так как заполнено перспективными стереообразами реальных объектов и поэтому описываются гиперболической геометрией Лобачевского. Если визуальное пространство дополняется образами изучаемых объектов, порождаемыми, допустим, слухом, обонянием и осязанием, то оно становится *перцептуальным пространством* $R_п$ нашего сознания, определяемым экстенсивным порядком сосуществования любых ощущений, создающих в совокупности целостные образы воспринимаемых объектов и явлений. Под целостностью этих объектов следует понимать их системную составленность, лежащую в основе формирования идеального образа объекта, структура идеальной формы которого подлежит графическому отображению в её условные формы-изображения R'''k, заполняющие картинное пространство R'''. Естественно, что геометрия картинного пространства не является евклидовой, так как его элементами являются не сами идеальные объекты эвклидова пространства, а их условные изображения.

Получается, что сознание проектировщика подобно «черному ящику», на входе в который происходит «мыслеобразное» отражение реальных или воображаемых объектов, а на выходе получаются их изображения, свойства которых и подлежат аксиоматическому описанию средствами системной начертательной геометрии.

Отсюда следует, что *изображением является интеллектуальный синтетический продукт, несущий информацию о свойствах изображенного объекта.* Этот продукт ноуменален, ибо он умосоздаваем и умопостигаем. В основу его создания положен принцип проецирования, реализуемый в искусственных проекционных аппаратах различной конструкции.

Подобно тому, как для евклидовой геометрии предметом аксиоматического описания являются позиционные и метрические свойства действительной формы реального объекта, так для системной начертательной геометрии картинного пространства предметом такого описания являются *изобразительные свойства* различных видов проекций его идеальной формы, графическими средствами кодирующие информацию о её геометрических свойствах.



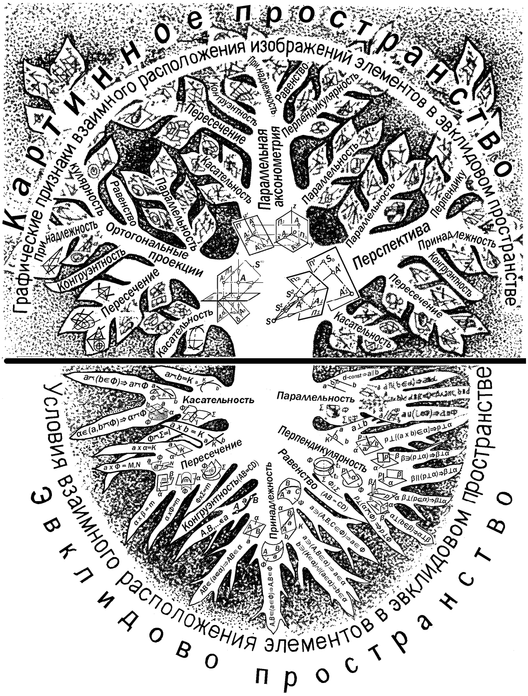


Рис. 1. Пространства и формы объекта

Рис. 2. Дерево системной начертательной геометрии

Таким образом, в логическую структуру системной парадигмы теории обратимых изображений естественно входит эвклидова информация о позиционных и метрических свойствах идеальной формы проектируемого объекта для его последующего графического моделирования. Эта информация извлекается из исходного условия путём его структурного анализа, после чего такому же анализу подвергается получаемое изображение, а в качестве аксиоматического вывода следует логическая импликация-утверждение о его выявленном изобразительном свойстве. Таким образом, формулировка такого утверждения выступает как бы определением соответствующей теоремы, доказательство которой предшествовало этому утверждению. Общая совокупность таких утверженний для каждого вида проекций образует *аксиоматику геометрии его картинного пространства*, что снимает основной парадокс традиционной начертательной геометрии. Такой путь достижения истины весьма эффективен благодаря возбуждению системно-аналитического мышления, развивающего его до уровня креативности.

Образно взаимосвязь эвклидовой и начертательной геометрий можно представить в виде гипотетического *дерева* (рис. 2). Его разветвлённые «корни» погружены в эвклидово пространство, элементами которого являются *понятия* точек, линий, плоскостей и поверхностей. Эти элементы, как своеобразные «питательные вещества», поступают в эту «корневую систему» и там, подчиняясь конструктивно-композиционным мыслям, образуют соответственные мыслеобразные системы-представления, вступая только в те отношения и связи, которые описываются группами аксиом сочетания, порядка, непрерывности и движения евклидовой геометрии.

При этом первые 4 группы аксиом описывают взаимную принадлежность, пересечение, касание и параллельность, которые определяют *позиционные свойства* геометрической, т.е., идеальной формы объекта, а группа движения порождает и описывает конгруэнтность, равенство, тождественность и перпендикулярность элементов объектов-систем, которые определяют их *метрические свойства.*

Разумеется, что такое распределение элементов и связей между ними требует чёткого представления условий того или иного взаимного расположения, которые описываются позиционными теоремами эвклиддовой геометрии. Процедура такого избирательного образования геометрических по сути дела является процессом проектного мышления, воспитание и развитие которого является главной целью профессионального становления специалиста. Как результат такого образа мышления в концептуальном пространстве сознания возникают вполне определенный воображаемый объект, информация про позиционные и метрические свойства идеальной формы которого требует, как правило, графического кодирования в виде обратимых изображений. В этом случае движение творческой мысли заставляет человека брать в руки карандаш и двигать его концом-точкой по листу бумаги, устанавливая взаимнооднозначные соответствия между точками и линиями воображаемого объекта и соответствующими им графическими конструкциями на бумаге. А это, в свою очередь, вызывает в нашем дереве соответствующее движение образованных в его «корневой системе» геометрических объектов по стволу до тех или иных «скелетных веток», в начале которых расположены проекционные аппараты получения различных обратимых изображений. Подвергшись проецированию этими аппаратами, наши воображаемые объекты преобразовываются в соответствующие их структурам комплексные ортогональные, аксонометрические, перспективные и другие чертежи. Количество таких «скелетных веток» равно количеству видов проекций и каждая из них имеет «ветви первого порядка» связей и отношений, на которых, в свою очередь, есть «плодовые ветви» второго порядка с «плодами» этого дерева в виде «листьев» с искомыми обратимыми изображениями.

Нетрудно видеть, что исходной причиной кризисного состояния традиционной начертательной геометрии является совершенно абстрактное представление о геометрической природе изображаемого изображаемого объекта как о пространственной форме или о множестве точек. Первое является абсурдным, так как каждый объект имеет свою конкретную форму, но не является ею. Второе неконструктивно и поэтому не подлежит графическому моделированию.

Между тем, логика возникновения и развития начертательной геометрии как науки об обратимых изображениях объектов, необходимых человеку, требует прежде всего, ясного представления о природе того, что изображается. Поэтому системное понимание природы любого проектируемого объекта совершенно естественно. Ведь в родственных изобразительных дисциплинах – рисунке и живописи, изучение пластической анатомии человека, т.е., морфологии человеческого тела, без знания которого немыслимо его грамотное художественное изображение, считается обязательным.

Но свою «анатомию» имеет любой объект. Она называется его «структурой» как совокупностью устойчивых взаимосвязей между элементами, интегрирующей их в единое целое. С понятием о структуре объекта тесно связано понятие о его *форме* как о внутренней организации его содержания, которое, в свою очередь, является «определённым образом упорядоченной совокупностью элементов и процессов, образующих предмет или явление» [6]. Нетрудно видеть, что понятие о содержании адекватно понятию о системе, откуда следует, что под *формой объекта можно понимать материализованную структуру пространства его локализации*.

В отличии от монжевой и евклидовой геометрий, в которых слово «форма» употребляется, но не раскрывается, в системной начертательной геометрии морфология объекта раскрывается по мере изложения, в итоге показывающего, что в объект, локализованный в реальном пространстве, имеет одну действительную форму, он же, локализованный в визуальном пространстве, имеет множество видимых форм, он же, локализованный в концептуальном пространстве, имеет одну идеальную форму, а будучи расположенным в картинном пространстве, приобретает несколько условных форм тех видов проекций, в которых он изображен. При этом разумеется, что в каждом пространстве форма объекта является результатом «материализации» его структуры, в результате которой возникает объект конкретного устройства, строения или конструкции. Поэтому *позиционными и метрическими свойствами обладает не сам объект, а его конкретная форма.*

Так как структуры перечисленных пространств различны, то заполняющие их изображения обладают отличными друг от друга изобразительными свойствами, которые должны описываться различными по своей аксиоматике геометриями. Отсюда следует, что системная начертательная геометрия в качестве своих подсистем имеет геометрии картинных пространств ортогональных, аксонометрических и центральных проекций, а также проекций с числовыми отметками, наиболее распространенных в архитектурно-строительном проектировании.

Фундаментальность этим геометриям придаёт содержание их технологических направлений, прежде рассматривающих структуры геометрических аппаратов получения и взаимного преобразования обратимых изображений, а затем, – их графических моделей. Минимизация структуры последних приводит к фундаментальному понятию *определителя изображений* [7] как неизменяемой графической конструкции, присоединенной к картинной плоскости и создающей в ней все условия для непосредственного и независимого построения и преобразования обратимых изображений, и тем самым превращающим картинную плоскость в картинное пространство. Если в этом пространстве происходят такие преобразования его элементов, при которых каждое последующее является результатом произведения двух предыдущих, то в своей совокупности они образуют соответствующую *группу преобразований*. В соответствии с клейновой классификацией геометрических систем, основным предметом исследования того или иного пространства являются инварианты соответствующих групп преобразований их элементов. В нашем случае картинное пространство заполнено обратимыми изображениями и поэтому роль инвариантов их взаимных преобразований играют соответственные графические конструкции в виде определителей изображений и графических алгоритмов этих преобразований. А это вводит системную начертательную геометрию в клейнову классификацию геометрических систем.

Переход от системного представления о природе изображаемого объекта к системному пониманию его проекционных изображений происходит на основе соблюдения принципов проецирования, системности, модельности, изоморфизма, взаимности связей и отношений между элементами геометрических и графических систем, алгоритмичности, экзактности, движения и рациональности разрабатываемых геометрографических технологий.

Комплексное соблюдение этих принципов определяет фундаментальность как в целом системной начертательной геометрии, так и каждой её подсистемы. Этим содержанием системная парадигма теории обратимых изображений коренным образом отличается от содержания прикладной начертательной геометрии, что даёт основание считать *системную начертательную геометрию самостоятельной фундаментальной математической дисциплиной, аксиоматически описывающей изобразительные свойства различных видов проекций существующих и воображаемых объектов-систем для их практического использования в различных областях науки, техники и искусства.* Что и требовалось доказать.

Выводы:

1. Принятие системной парадигмы теории обратимых изображений в качестве рабочей идеи переосмысления содержания традиционной начертательной геометрии привело к концептуальному преобразованию последней в системную начертательную геометрию как фундаментальную математическую науку.

2. Системная начертательная геометрия как фундаментальная наука может служить основой эффективной педагогической технологии развития креативного мышления студентов творческих специальностей.

Литература

1. Ткач Д. И. Геометрия картинного пространства ортогональных проекций как фундаментальная наука и как учебная дисциплина / Ткач Д. И. // Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование. – Харьков, 2009.

2. Ткач Д. І. Методологічні основи викладання та вивчення системної нарисної геометрії як фундаментальної науки і як навчальної дисципліни / Ткач Д. І. // Матеріали IV науково-технічної конференції «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищий школі». – Кривий Ріг, 2004.

3. Советский энциклопедический словарь, изд. III. – М. : Советская энциклопедия, 1985.

4. Монж Г. Начертательная геометрия / Монж Г. – М. : Изд. АН СССР, 1947.

5. Зейтун Ж. Организация внутренней структуры проектируемых архитектурных систем / Зейтун Ж. – М. : Стройиздат, 1984.

6. Свидерский В. И. О диалектике элементов и структуры / Свидерский В. И. – М. : Соцэкзиз, 1962.

7. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия / Русскевич Н. Л. – К. : Выща школа, 1978.

ВИВЧЕННЯ ЦІКАВИХ ЛІНІЙ І ТОЧОК ТРИКУТНИКА У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ

П.І. Ульшин, С.Е. Федосєєв
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Деякі властивості ліній і точок у трикутнику були відомі ще у стародавні часи. Так у V столітті до н.е. давньогрецький вчений Піфагор і його учні, розв'язуючи задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки, використовували властивості медіан, бісектрис і кутів.

Підсумовуючи результати, зроблені попередниками у III столітті до н.е., грецький математик Евклід у праці «Початки» дав означення бісектрис, медіан і висот трикутника і довів, що точка перетину бісектрис трикутника є *центром вписаного в нього кола*, а точка перетину серединних перпендикулярів до сторін є *центром описаного кола* навколо цього трикутника.

Теорему про перетин трьох перпендикулярів трикутника в одній точці довів у II столітті до н.е. видатний грецький вчений Архімед і назвав цю точку *ортоцентром*, від грецького слова «ортос», що означає «прямий», «правильний». Ним же доведено й існування точки перетину трьох медіан трикутника, яку він назвав *барицентром*, тобто центром його ваги (центроїдом).

У XVIII столітті розглянуті точки перетину медіан, бісектрис, висот і серединних перпендикулярів до сторін трикутника були названі *цікавими точками*, а медіани, бісектриси і висоти – *цікавими лініями* трикутника за їх важливі властивості.

Пізніше при дослідженні властивостей трикутника з'явилися нові цікаві лінії і точки. Про них написали в своїх творах вчені: Ш. Бріаншон, Л. Ейлер, Ж. Понселе, Е. Торрічеллі, П. Ферма, К. Фейєрбах та інші.

У 1765 році Л.Ейлер довів, що у довільному трикутнику ортоцентр, барицентр і центр описаного кола лежать на одній прямій, причому відстань від центра описаного кола до барицентра вдвічі менша, ніж відстань від барицентра до ортоцентра.

У 20-х роках XIX століття французькі математики Ж. Понселе, Ш. Бріаншон встановили незалежно один від одного наступну теорему: основи медіан, основи висот і середини відрізків висот від ортоцентру до вершин трикутника (*точки Ейлера*) лежать на одному і тому ж колі, що називається *колом дев'яти точок* або *колом Фейєрбаха*.

Великий вклад у розвиток геометрії трикутника внесли математики XIX–XX століть Брокар, Лемуан, Тебо та інші.

У шкільному курсі геометрії із цікавих ліній і точок трикутника вивчаються медіани, бісектриси, висоти і серединні перпендикуляри та точки їх перетину, а саме: барицентр, центр вписаного кола, ортоцентр і центр описаного кола. Властивості цих ліній і точок дають можливість розв'язувати велику кількість цікавих геометричних задач.

Розглянемо розв'язування деяких задач, в яких використовуються властивості цікавих ліній і точок трикутника.

Задача 1. Побудувати трикутник АВС за відомими трьома точками М, Р і Н, які є перетином з описаним навколо нього колом, відповідно: медіани, бісектриси і висоти, проведених з однієї його вершини А.

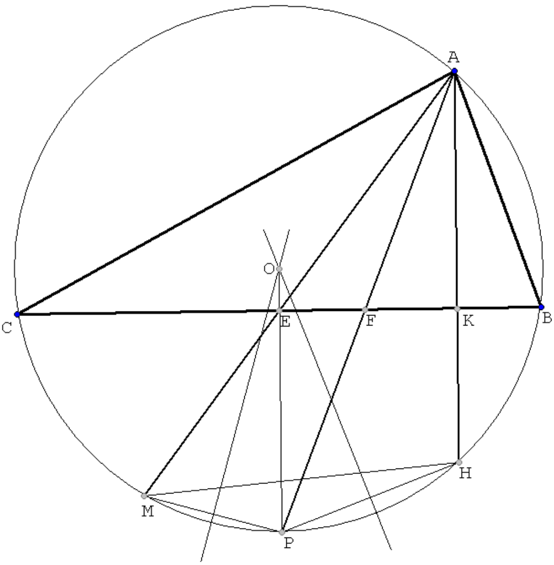


Рис. 1

Розв'язання

Дано три точки М, Р і Н. Побудуємо коло, що проходить через дані точки. Точка О – центр кола – знаходиться на перетині серединних перпендикулярів, проведених до відрізків МР і РН. Отже, (О,ОР) – коло, описане навколо шуканого ΔАВС (рис. 1).

Використовуючи властивості бісектриси АР, можна сказати, що точка Р ділить дугу ВРС, на яку спирається вписаний кут ВАС, навпіл, а хорда ВС, утворена кінцями цього кута, ділиться відрізком ОР навпіл у точці Е і ОР ⊥ ВС. Оскільки ВС – сторона шуканого трикутника, то висота його, проведена з вершини А, перпендикулярна до ВС.

Виконуємо побудову: 1) Проводимо пряму ОР; 2) Будуємо НА || ОР; 3) АМ – медіана; 4) Е = ОР ⋂ АМ; 5) Будуємо (ЕК) ⊥ АН; 6) (ЕК) ⋂ (О,ОР) = В, С; 7) ΔАВС – шуканий; (АМ), (АР), (АН) – прямі, на яких лежать медіана, бісектриса і висота трикутника.

Задача 2. Дано гострокутний трикутник АВС, в якому точки A_1, B_1 і C_1 – основи висот даного трикутника. Довести, що висоти AA_1, BB_1 і CC_1 є бісектрисами внутрішніх кутів $\Delta A_1B_1C_1$.

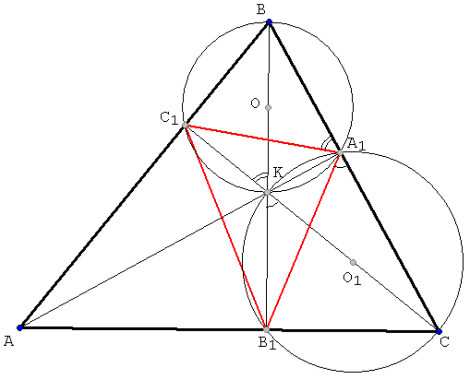


Рис. 2

Розв'язання

Нехай точка K є перетином висот ΔABC. Побудуємо коло на відрізкові BK як на діаметрі. Це коло пройде через точки A_1 і C_1, оскільки $\angle BC_1K = \angle BA_1K = 90^o$.

Із побудови бачимо, що $\angle C_1KB = \angle C_1A_1B$, бо вони вписані і спираються на одну і ту ж дугу BC_1 кола (O,OB). (рис. 2).

Побудуємо коло (O_1,O_1K) на відрізкові KC як на діаметрі; O_1 – середина KC. Точки A_1 і B_1 лежать на побудованому колі, бо $\angle KA_1C = \angle KB_1C = 90^o$, згідно умови задачі. $\angle B_1KC = \angle B_1A_1C$, бо спираються на дугу B_1C. Оскільки $\angle B_1KC = \angle C_1KB$, як вертикальні, то $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$. Звідси випливає, що $\angle B_1A_1C_1$ ділиться відрізком AA_1 навпіл. Отже, ми показали, що в висота AA_1 трикутника ABC є бісектрисою внутрішнього $\angle A_1$ в трикутнику $A_1B_1C_1$.

Аналогічно можна довести, що BB_1 – бісектриса $\angle A_1B_1C_1$ і CC_1 – бісектриса $\angle A_1C_1B_1$.

Задача 3. Довести, що в будь-якому трикутнику ABC точка O, центр описаного кола, M, точка перетину медіан (барицентр), і H, точка перетину висот (ортоцентр), лежать на одній прямій.

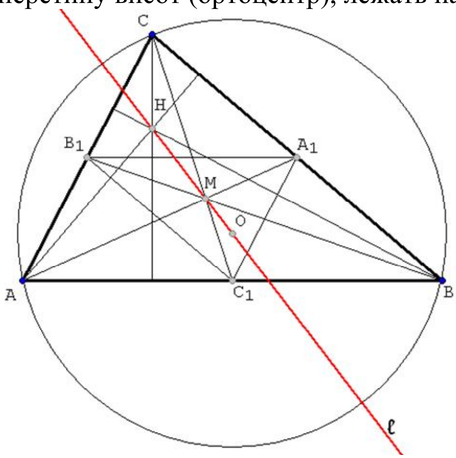


Рис. 3

Розв'язання

Нехай дано ΔABC, в якому O – центр описаного кола, M – барицентр і H – ортоцентр (рис. 3). Покажемо, що точки O, M і H лежать на одній прямій. Оскільки точки A_1, B_1 і C_1 – середини сторін BC, AC і AB ΔABC, то $\Delta A_1B_1C_1$ побудований на середніх лініях ΔABC. Такі трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, рівним відношенню відповідних сторін, а саме: $k = \frac{1}{2}$.

У точці O перетинаються серединні перпендикуляри, проведені до сторін ΔABC. Вони ж є висотами $\Delta A_1B_1C_1$, оскільки відповідні сторони його паралельні до сторін ΔABC. Звідси слідує, що точка O є ортоцентром $\Delta A_1B_1C_1$. Відомо, що у подібних трикутників відповідні відрізки пропорційні. Тому $OC_1 \parallel HC$ і $OC_1 : HC = 1 : 2$.

Розглянемо трикутники OC_1M і HMC. Оскільки CC_1 – медіана, то $MC_1 : MC = 1 : 2$ і $\angle HMC = \angle MC_1O$ як кути при паралельних $OC_1 \parallel HC$ і січній CC_1. Отже, трикутники OC_1M і HMC подібні як такі, в яких при рівних кутах відповідно пропорційні сторони. Із подібності трикутників слідує, що відповідні кути їх рівні, тобто $\angle CMH = \angle OMC_1$. А ці кути вертикальні, утворені двома прямими CC_1 і ℓ, що перетинаються. Звідси слідує, що три точки O, M і H лежать на одній прямій.

Вперше це було встановлено Л. Ейлером. Така пряма, яка проходить через центр описаного кола, барицентр і ортоцентр у будь-якому трикутнику, називається *прямою Ейлера*. Вона відноситься до цікавих ліній у трикутнику.

Задача 4. Довести, що у будь-якому трикутнику середини сторін, основи висот і середини відрізків, які з'єднують точку перетину висот з вершинами, лежать на одному колі.

Розв'язання

Нехай дано довільний ΔABC і в ньому A_1, B_1, C_1 – середини сторін; A_2, B_2, C_2 – основи висот; A_3, B_3, C_3 – середини відрізків, які з'єднують точку H – ортоцентр – з вершинами трикутника (рис. 4).

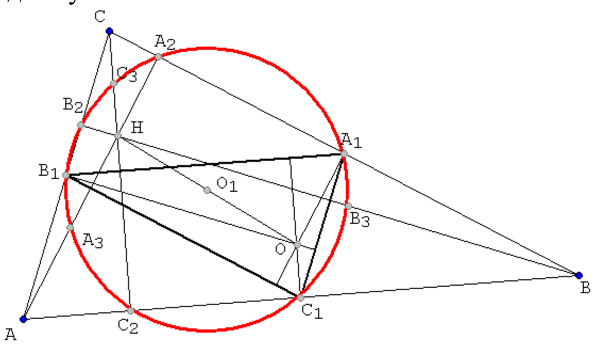


Рис. 4

Сторони $\Delta A_1B_1C_1$ є середніми лініями ΔABC, тому трикутники подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$. Точка O є перетином серединних перпендикулярів до сторін ΔABC, тому є ортоцентром $\Delta A_1B_1C_1$. Згідно з подібністю трикутників, має місце відношення $OC_1 : HC = 1 : 2$. Звідси слідує, що $HC_3 = OC_1$ і OC_1HC_3 – паралелограм, у якому діагоналі OH і C_1C_3 перетинаються у точці O_1 і діляться навпіл. Отже, точка O_1 – середина відрізка C_1C_3, а також відрізка OH.

Міркуючи аналогічно, із паралелограма OA_1HA_3 слідує, що точка O_1 є серединою відрізка A_1A_3. Із паралелограма B_1OB_3H знаходимо, що O_1 – середина відрізка B_1B_3.

Оскільки трикутники $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ і $C_1C_2C_3$ прямокутні з прямими кутами при вершинах A_3, B_3 і C_3, і точка O_1 ділить їхню гіпотенузу навпіл, то ця точка є центром кола, описаного навколо $\Delta A_1B_1C_1$, і яке проходить через точки A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 і C_3. Отже, коло (O_1,O_1A_1) є колом дев'яти точок трикутника ABC.

Вперше помітив існування такого кола у трикутнику видатний вчений Л. Ейлер. Пізніше німецький математик К. Фейєрбах встановив, що центр кола дев'яти точок трикутника лежить на прямій Ейлера і ділить навпіл відрізок між ортоцентром і центром описаного кола навколо трикутника.

Задача 5. Довести, що якщо віддалені вершини рівносторонніх трикутників, побудованих на сторонах будь-якого трикутника, з'єднати з протилежними їм вершинами даного трикутника, то ці прямі перетнуться в одній точці.

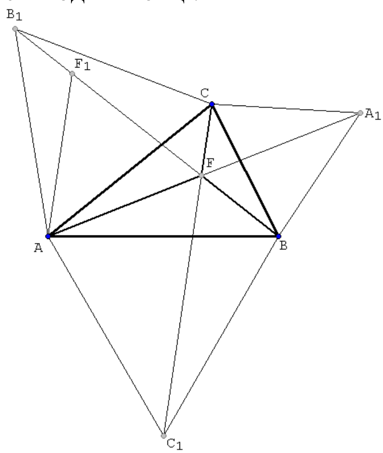


Рис. 5

Розв'язання

Нехай дано довільний ΔABC. Побудуємо на сторонах даного трикутника рівносторонні трикутники: ΔABC_1, ΔACB_1 і ΔBCA_1. Доведемо, що прямі (рис. 5) AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Сполучимо точку F перетину відрізків AA_1 і BB_1 з точками C_1 і C. Доведемо, що точки C, F, C_1 лежать на одній прямій.

Відкладемо на FB_1 відрізок $FF_1=FA$. Утворився рівносторонній трикутник AFF_1. Повернемо точки C, F, C_1 навколо точки A на 60^o (проти годинникової стрілки). Тоді C перейде в B_1, F – в F_1, C_1 – в B. Таким чином, після повороту точки C, F, C_1 перейшли відповідно у три точки B, F_1, B_1, які лежать на одній прямій. Звідси і самі точки C, F, C_1 також лежать на одній прямій. Отже, ми показали, що три прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в точці F.

Вперше знайшов цю точку П. Ферма (1601–1665), яка була названою *точкою Ферма*, і відноситься до цікавих точок трикутника. Ферма також довів, що кути, які утворюються між відрізками, що з'єднують дану точку з вершинами трикутника, рівні між собою і дорівнюють 120^o.

Задача 6. Знайти точку в трикутнику, сума відстаней від якої до вершин трикутника була б найменшою.

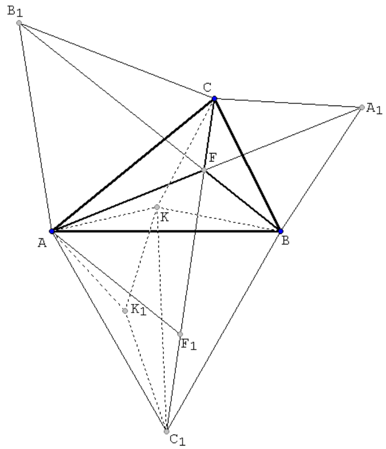


Рис. 6

Розв'язання

Побудуємо на сторонах ΔABC поза нього рівносторонні трикутники: ΔABC_1, ΔACB_1 і ΔBCA_1 (рис. 6). Відомо, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці F, яка є точкою Ферма. Нехай K – довільна точка площини трикутника ABC. Здійснимо поворот ΔACK навколо точки A на 60º (за годинниковою стрілкою). Нехай точка K перейде при цьому в точку K_1. Тоді трикутник AKB перейде в трикутник AK_1C_1. При цьому маємо: $AF = AF_1 = FF_1$, $BK = C_1K_1$ і, отже, $AK + BK + CK = CK + KK_1 + K_1C_1 > CC_1$ **(1)**.

Відкладемо на FC_1 відрізок $FF_1 = FA$. Утворився рівносторонній трикутник AFF_1. Повернемо ΔAFB навколо точки A на 60º (за годинниковою стрілкою). ΔAFB займе положення ΔAF_1C_1. При цьому $AF = FF_1$, $FB = F_1C_1$ і, отже, $CC_1 = CF + FF_1 + F_1C = AF + BF + CF$ **(2)**.

З (1) і (2) маємо: $AF + BF + CF < AK + BK + CK$. Отже, точка Ферма і є шуканою.

Вперше встановив цей факт П. Ферма.

Із приведених задач слідує, що існують цікаві лінії і точки трикутника, які не вивчаються у шкільній геометрії, проте можуть викликати зацікавленість в учнів, і тому пропонуються до розгляду на математичних гуртках або факультативних заняттях.

Вивчення цікавих ліній і точок у трикутнику збагачує знання учнів, розширює світогляд, розвиває розумові здібності, підвищує інтерес до вивчення геометрії.

Література

1. Глейзер Г. И. История математики в школе VII–VIII кл.: [пособие для учителей] / Герш Исаакович Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.
2. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника / Семен Исаакович Зетель. – М. : Учпедгиз, 1962. – 152 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / Виктор Васильевич Прасолов. – М. : Наука, 1986. – Ч. I. – 272 с.

НЕРАВЕНСТВА В РАЗЛИЧНЫХ ПОЛЯХ

З.Е. Филер
г. Кировоград, Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко
filier@rambler.ru

Линейные неравенства. Рассматриваются решения классических неравенств в различных множествах *методом невязки*, т.е. заменой их соответствующими уравнениями, где *положительная* невязка r изменяется на бесконечном интервале (первые две колонки) или на отрезке (0; 1).

Таблица

<table>
<tr><td rowspan="3">R</td><td rowspan="3">Действите-льные
$a, b, c, d, x,$
$r>0$</td><td>$ax<b$</td><td>$ax>b$</td><td>$b-c<ax<b+d$</td></tr>
<tr><td>$ax=b-r$</td><td>$ax=b+r$</td><td>$ax=b-c+(d+c)r$
$0<r<1$</td></tr>
<tr><td>$x=(b-r)/a$</td><td>$x=(b+r)/a$</td><td>$x=(b-c+(d+c)r)/a$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Комплекс-ные
a, b, c, d, x
$r>0$</td><td>$x=a\cdot(b-r)/|a|^2$</td><td>$x=a\bullet(b+r)/|a|^2$</td><td>$x=a\bullet(b-c+(d+c)r)/|a|^2,$
$0<r<1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">K</td><td rowspan="3">Кватернио-ны
a, b, c, d, x
$r>0$</td><td>$x=a\bullet(b-r)|a|^2$</td><td>$x=a\bullet(b+r)/|a|^2$</td><td>$x=a\bullet(b-c+(d+c)r)/|a|^2$</td></tr>
<tr><td>$xa<b$</td><td>$xa>b$</td><td>$b-c<xa<b+d$</td></tr>
<tr><td>$x=(b-r)\ a^*\ |a|^2,$
$r>0$</td><td>$x=(b+r)a^*/|a|^2,$
$r>0$</td><td>$x=(b-c+(d+c)r)a^*/|a|^2,$
$0<r<1$</td></tr>
</table>

Очевидно, формулы для решения неравенств во множествах **C** и **K** одинаковы. Но ввиду некоммутативности умножения в теле кватернионов, для неравенств $xa<b$, $xa>b$ *и* $b-c<xa<b+d$ приходится использовать умножение справа на сопряжённый к a кватернион a^*, для получения квадрата модуля $|a|^2 = aa^*$, что и даёт формулы в последней строке. Граничные значения $-c$ и d в последнем столбце должны быть хотя бы лексикографически упорядочены.

Подчеркнём ещё раз, что здесь $r>0$ в привычном смысле (как действительная величина).

1. Примеры решения неравенств с соответствующими графиками

1. $\mathbf{3x<2}\Rightarrow 3x=2-r,\ r>0\Rightarrow x=(2-r)/3\in R.$

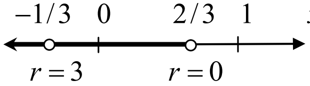


Рис. 1

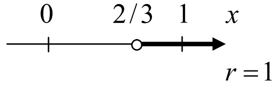


Рис. 2

2. **$3x>2$**$\Rightarrow 3x=2+r,\ r>0\Rightarrow x=(2+r)/3\in R$.

3. $(3+i)x<2-i\Rightarrow(3+i)x=2-r-i,\ r>0\Rightarrow x=(2-r-i)/(3+i)$, $x=(5-3r)/10-\mathrm{i}(5-r)/10\in \mathrm{C}$.

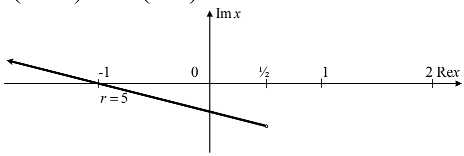


Рис. 3

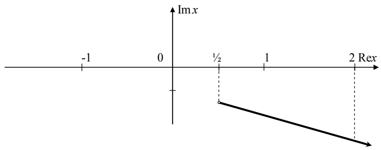


Рис. 4

4. $(3+i)x>2-i\Rightarrow (3+i)x=2+r-i,\ r>0\Rightarrow x=(2+r-i)/(3+i)$,
$x=(5+3r)/10-i(5+r)/10\in C$.

5. $2-i<(3+i)x<5-2i\Rightarrow(3+i)x=2-i+r(3-i)\Rightarrow x=(2-i+r(3-i))/(3+i)=(2-i+r(3-i))$
$\cdot(3-i)\ /10=(5-5i+r(8-6i))/10$; $x(0)=0{,}5-0{,}5i$, $x(1)=1{,}3-1{,}1i$.

Множество решений неравенств во всех здесь рассмотренных примерах является *осью* или *отрезком* прямой, т.е. **одномерно**. Оно является прообразом соответствующего линейного отображения: в примере 3, например, оно переводит *луч* $r>0$ в *луч*, изображённый на рис. 3. При привычном употреблении знака неравенства «< », как мы уже отмечали, необходимо хотя бы лексикографическое упорядочение левой и правой частей двойного неравенства (рис. 5).

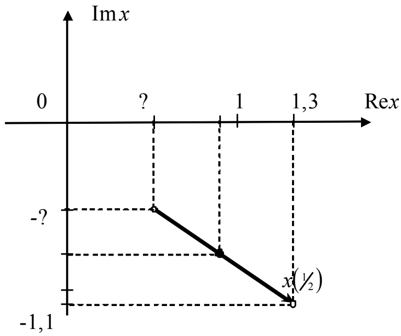


Рис. 5

Интересно рассмотреть пример «обмена» граничных значений:

6. $5-2i\subset(3+i)x\subset 2-i\Rightarrow(3+i)x=5-2i+r(-3+i)\Rightarrow x=(5-2i+r(-3+i))\cdot(3-i)/10=$ $=(13-11i\ -r(8-6i))/10$; $x(0)=1{,}3-1{,}1i$, $x(1)=0{,}5-0{,}5i$. Концы отрезка $x(r)$

просто поменялись местами. Это соответствует значению знака упорядочения «$\subset$» на «больше». Убедимся, что $x(0{,}5)$ лежит посередине этого отрезка, вычислив $x(0{,}5)=0{,}9-0{,}8i$.

Нам днями стала известна одна работа [1, с. 31–32, 34], где упоминается возможность упорядочения во множестве комплексных чисел. Процитируем из неё соответствующие места на языке оригинала. «Зауважимо, що досить поширеною є думка про неможливість упорядкувати множину комплексних чисел, тобто ввести у множині **C** відношення < або >. Насправді це не так. Домовимося комплексне число $z=a+bi$ вважати меншим за комплексне число $\lambda=c+di$ і писати: $z<\lambda$, якщо $a<c$, або якщо $a=c$ і $b<d$. Наприклад: $100i<2<2+i<3-500i$. Порівнюючи комплексні числа, зважають, яке з комплексних чисел має більшу дійсну частину, а якщо вони дорівнюють одна одній, то порівнюють уявні частини (так само, як порівнюють скінченні десяткові дроби, розміщують слова у словнику або прізвища у класному журналі). Визначене так відношення < у множині комплексних чисел:

а) *антисиметричне* – якщо $z<\lambda$, то відношення $\lambda<z$ неможливе;

в) *транзитивне* – якщо $z<\lambda$, $\lambda<\mu$, то $z<\mu$;

в) *зв'язне* – якщо $z\neq\lambda$, то або $z<\lambda$, або $z>\lambda$. …

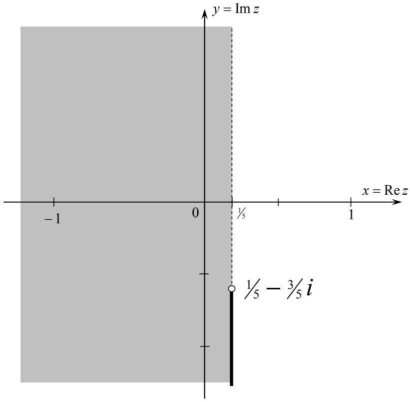
Треба також чітко усвідомити, що множина комплексних чисел може бути упорядкована: як і дійсні, комплексні числа можна за певними правилами порівнювати. З цим фактом і в наш час ще не всі погоджуються. А якщо погоджуються, то заперечують проти застосування знака < або > для порівняння комплексних чисел. Але ж знак < або > використовується для позначення відношення порядку не тільки в множині дійсних або комплексних чисел, а й взагалі, в довільній упорядкованій множині (див. [6, с.140, 384, 385]).

Примітка. Крім поняття «упорядкована множина» є ще поняття «упорядковане *поле*». Поле комплексних чисел упорядкувати не можна, тому що крім вимог антисиметричності, транзитивності і зв'язності для упорядкованого поля повинна виконуватись ще одна умова: якщо $a>0$, то $a^2>0$. А ввести відношення >, для якого виконувалися б всі чотири умови, в множині комплексних чисел не можна.». Тут приведена ссылка на известную книгу Н. Бурбаки «Теория множеств». Среди упражнений есть

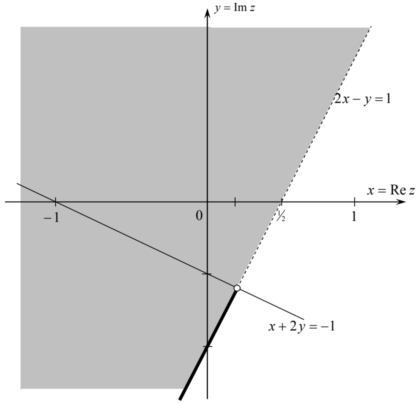
4. *Розмістити* числа $3+5i$, $2i$, $3-5i$, 2 у порядку зростання;

5. Розв'язати нерівність $(2+i)z<1-i$.

Ответов на упражнения в [1, 34] не дано, метод решения упражнения 5 – не указан. Если сохранять школьные правила (при делении на положительное число знак неравенства сохраняется), то решением будет: $z<(1-i)/(2+i)=(1-3i)/5$. Подчеркнём, что здесь знак < обозначает область, где действительная часть x меньше 1/5 с её полуграницей – полупрямой $x=1/5$ при $y<-3/5$ (рис. 6а). Если же правило деления на «положительное» число $2+i$ тут «не работает», то будем искать $z=x+iy$ с действительными x и y. Непосредственно подставив его в данное неравенство, получим: $(2+i)(x+iy)<1-i \Rightarrow 2x-y+i(x+2y)<1-i \Rightarrow 2x-y<1$, $\forall(x+2y)$ или $2x-y=1$, $x+2y<-1$. Областью-решением является затемненная часть лоскости с частью граничной прямой, отсекаемой другой прямой $x+2y=-1$ сверху (рис. 6б).



а)



б)

Рис. 6

Решим это неравенство методом «комплексной невязки» $r=s+it$, прибавляемой в левую (меньшую) сторону неравенства: $(2+i)(x+iy)+s+it=1-i \Rightarrow 2x-y+s=1$, $x+2y+t=-1$, $s>0, \forall t$ или при $s=0$, $t>0 \Rightarrow$ та же область, что и на рис. 6б. Таким образом, «школьное правило» (сохранение знака неравенства при делении на число, «большее нуля»), здесь *не приемлемо*.

В отличие от метода действительной невязки, дающей решение–отрезок прямой, метод *комплексной невязки* даёт кусок плоскости – двумерный объект – множество точек $z(s, t)$, двухпараметрическое семейство точек комплексной плоскости. Метод действительной невязки даёт часть решения $z(s, 0)$. Даже для действительных неравенств можно рассматривать *комплексные решения*. Для примера 1, когда вместо числовой *полуоси* $x<2/3$ будет *полуплоскость* $x<2/3$, $\forall y$ с частичной границей $x=2/3$, $y<0$. Аналогично обобщается решение неравенства $x>2/3$. Рассматривая решение неравенства в действительной области (на числовой оси), мы получаем тоже одномерное множество; комплексное решение с действительной невязкой даёт одномерное множество решений, а с комплексной невязкой – двумерное решение. Для примера 5 имеем $0<s+it<1$, т.е. $0<s<1$, $\forall it$. Поэтому в уравнение $(3+i)x=2-i+r(3-i)$ надо вместо x вставить $(x+iy)$, а вместо r – значение $s+it$:

$$(3+i)(x+iy)=2-i+(s+it)(3-i)\Rightarrow 3x-y+i(x+3y)=2-i+3s+t+i(3t-s)\Rightarrow$$
$$3x-y=2+3s+t,\ x+3y=-1+3t-s\Rightarrow 0<s<1,\ \forall t;\ s=0\Rightarrow t>0;\ s=1\Rightarrow t<0.$$

Исключив t, получим уравнение $-8x+6y=-7-10s$. При $s=0$ имеем прямую $-8x+6y=-7$; при $s=1$ – прямую $-8x+6y=-17$. Неравенство $0<s<1$ выполняется *между* ними. Исключив s, получим прямую $6x+8y=-1+10t$. *При* $t=0$ имеем прямую $6x+8y=-1$, которая при пересечении с прямыми $-8x+6y=-7-10s$ даст точки. Они отсекают на прямых $s=0$ и $s=1$ полупрямые противоположных направлений.

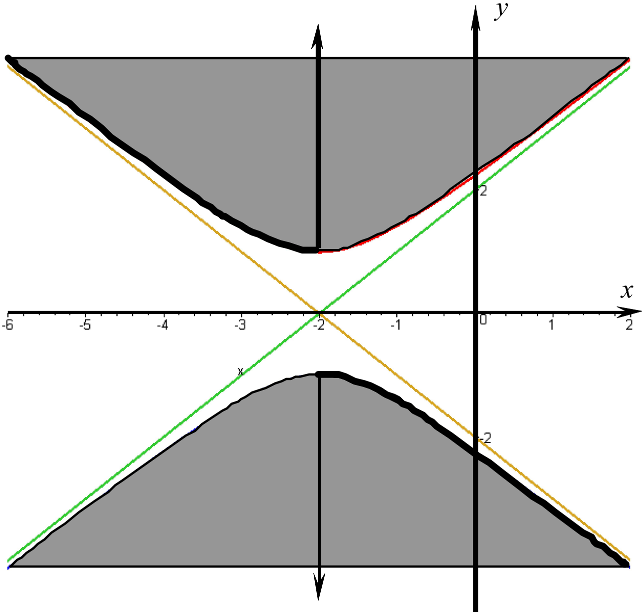


Рис. 7

Квадратные неравенства в широком смысле рассмотрим на примере: $x^2+4x+5<0$. Методом комплексной невязки $s+it$ для комплексного аргумента $x+iy$, получаем линии $y^2-(x+2)^2=1+s$, $2(x+2)y=-t$; $s>0$, при $s=0$ и $t>0$. Это **гиперболы** с вертикальным расположением вершин на прямой $x=-2$, и полуосями $a=b=\sqrt{1+s}$ и граничной гиперболой при $s=0$ (рис. 7). Она присоединяется к области так: левая верхняя ветвь и правая нижняя. А раньше, при неравенствах в обычном (узком) смысле, была только эта действительная **ось** гипербол [2, рис. 3]. Уравнения гипербол

$\frac{y^2}{1+s}-\frac{(x+2)^2}{1+s}=1$. На границе s=0 и $(x+2)y=-\frac{t}{2}$, t>0. Неравенство $x^2+4x+3<0$ эквивалентно уравнению $y^2-(x+2)^2=-1+s$, $2(x+2)y=-t$; $s>0$, при $s=0 \Rightarrow t>0$. При $s<1$ это гиперболы с вершинами на оси $0x$, а при $s>1$ – гиперболы с вершинами на оси $x=-2$. При $s=1$ – это асимптоты этих гипербол. При $t=0$ или $x=-2$ и $y=\pm\sqrt{-1+s}$, или $y=0$ при $x+2=\pm\sqrt{1-s}$ при $1-s>0$.

В общем случае, неравенство $a<f(z)<b$ эквивалентно уравнению с комплексной невязкой $s+it=(f(z)-a)/(b-a)\equiv\varphi(z)$. Переходя к действительной и мнимой частям функции $\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $u(x,y)=\mathrm{Re}\varphi(z)$, $v=\mathrm{Im}\varphi(z)$; $0<s<1$, $\forall t$; при $s=0$ будет линия $u(x,y)=0$; $u(x,y)>0$ с той стороны полуплоскости, куда «смотрит» $\mathrm{grad}u(x;y)$. Граница включена там, куда «смотрит» $\mathrm{grad}v(x,y)$ от точки пересечения $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$. При $s=1$ – вторая *граница* области; её часть, с перпендикуляром $-\mathrm{grad}v(x,y)$ включена в область-решение.

При классическом понимании решения неравенства имеем $v(x,y)\equiv0$. Для неравенства $f(z)<0$ решение – полуплоскость, как и для неравенства $0<f(z)$. Например, для неравенства $\exp(z)<0$ имеем $e^x(\cos(y)+i\sin(y))\Rightarrow$ $u=e^x\cos(y)$, $v=e^x\sin(y))\Rightarrow u=0$ при $\cos(y)=0\Rightarrow y=\pi/2+\pi n$; $\mathrm{grad}u=\{e^x\cos(y),$ $-e^x\sin(y)\}$ при $y=\pi/2+\pi n$; $\mathrm{grad}u=\{e^x0,-e^x(-1)^{n-1}\}=e^x\{0;(-1)^n\}$. При $n=0$ это вектор, который «смотрит вверх» от оси Ox. На границе области – прямой $y=\pi/2$ вектор $\mathrm{grad}v=\{e^x\sin(y), e^x\cos(y)\}=e^x\{1;0\}$ «смотрит» вправо $\Rightarrow$ левая часть границы – прямой $y=\pi/2$, включается в область. Решение неравенства – совокупность горизонтальных полос типа $\pi/2<y<3\pi/2$, где $\exp(y)<0$. Между такими полосами функция имеет знак «+» (в широком смысле). В узком смысле, решения – параллельные прямые $y=n\pi$ – середины полос – решений в широком смысле.

Упорядочение комплексных чисел в алгебраической форме $z=x+iy$ с преобладающей действительной частью, не является единственным. Мы уже ранее рассматривали уравнение $f(z)=r\cdot\exp(i\varphi)$ как обобщение неравенств $f(z)<0$ при $\varphi=\pi$ и $f(z)>0$ при $\varphi=0$ с $r>0$. Если считать комплексное $z<\lambda$ при модуле z, меньшем модуля λ, и любых аргументах φ, а при равных модулях – аргументы φ упорядочить по возрастанию на отрезке $[0;2\pi)$, то получим упорядочение в кольце, в отличие от упорядочения в вертикальных полосах.

Интересно найти физический смысл неравенств в комплексной области в широком смысле, кроме тривиального сравнения комплексных сопротивлений Z для синусоидальных токов, когда $Z=R+i(L\omega-1/(C\omega))$ и сравнении контуров R–L–C по активному сопротивлению R, а при равных активных сопротивлениях – по реактивным сопротивлениям (Lω–1/(Cω)). В полярной системе имеем Z=|Z|exp(i(ωt–θ), |Z|=$\sqrt{R^2+(L\omega-1/(C\omega))^2}$, $tg\theta=(L\omega-1/C\omega)/R$. Сравнение может идти по модулям R, а при равных R – по аргументам θ.

Литература

1. Кужель О. В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа / Кужель О. В. – К. : Вища школа, 1974. – 80 с.

2. Ткаченко С. П. Комплексні розв'язки квадратної нерівності / Ткаченко С. П., Філер З. Ю. // Матем. в школі. – 2003. – №2. – С. 47–49.

АСПЕКТИ ЗНО З МАТЕМАТИКИ

З.Ю. Філєр[α], Л.В. Ізюмченко[β]
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка
[α] filier@rambler.ru
[β] lizyumch@mail.ru

У Проекті Конституції Президента України Віктора Ющенка є Стаття 56, у якій сказано: «Громадяни мають право безоплатно здобути вищу освіту в державних і комунальних закладах на *конкурсній основі* з урахуванням їх особистих здібностей». У виступі кандидата в Президенти В.Ф. Януковича на XII з'їзді Партії регіонів в п. 2.2. Освіта – гідна інвестиція в майбутнє! є фраза «Насамперед буде забезпечено: *відмову* від системи обов'язкового зовнішнього оцінювання для вступу до вищих навчальних закладів». Кандидат у Президенти Ю.В. Тимошенко стверджує: «Буде завершено *заміну шкільних випускних* та *вступних іспитів* до вищих навчальних закладів зовнішнім незалежним тестуванням». Виділення курсивом зроблено нами. Ми – фахівці з математики, тому в статті піде розмова про зовнішнє *незалежне* оцінювання (ЗНО) з математики.

Яку мету ставили при введенні ЗНО? Кажуть, ліквідацію корупції при вступі до ВНЗ. Але цього року знайдена така «шпаринка» – пільговики. Ми вважаємо ЗНО дуже вчасним і надзвичайно корисним: важливою є поява загальних вимог до вступників, а тому й до вчителів у процесі навчання. У результаті ЗНО бажаючим стати студентами ВНЗ створені однакові умови для виявлення рівня індивідуальних навчальних досягнень. Крім того, не потрібно забувати про «людський фактор»: вчитель не може бути повністю об'єктивним при екзаменаційній оцінці знань *своїх* учнів. Порядний вчитель не буде занижувати оцінку, але завищувати оцінку на рівні «балу» (за 12-бальною шкалою) – може. Перш за все, тим, хто проявив себе добре протягом року, а на екзамені чогось не згадав. А непорядний? Може спокуситися на хабар… Особливо, якщо держава не дає гідної оплати.

Чому є намагання відмінити ЗНО? Кому воно заважає? Чи дійсно при наявності хоча б посередніх *знань*-вмінь можна скласти тести на мінімально необхідні 124 (рейтингові) бали?

У 2009 році було 20 питань першого рівня, які оцінювалися кожне 1 балом з вибором відповіді серед 5 можливих, 10 питань по 2 бали, на нескладному рівні, які треба було розв'язати, 1 геометрична задача з повним розв'язком оцінювалася 4 балами й ще 2 приклади третього рівня, які були оцінені в 4 і 6 балів – усього 54 бали.

Незважаючи на плюси ЗНО, хочемо відмітити і певні недоліки, які стосуються складної *системи обробки результатів* тестування, зокрема переведення балів, набраних абітурієнтами при розв'язуванні задач, у рейтингові бали за непропорційною шкалою.

З таблиці, наведеної у [3], видно, що той, хто реально набрав 0 балів, вже «набрав» 100 балів, а ті, хто набрав 53 або 54 бали (розв'язав усі задачі) отримав 200 балів. Для чого додають 100 балів? Можливо, щоб приховати катастрофічно погані знання (тобто, відсутність реальних знань) у основної маси учнів, чи щоб не образити абітурієнта, який нічого не розв'язав і нічого не вгадав? Чи знає про це пересічний українець – батько та матір, та й сам абітурієнт? Ті, хто вгадав більше 3 балів (з 54-ох), «зумів» отримати прохідні до ВНЗ 124 бали. На рис. 1 показана гістограма, на якій ми відняли ці міфічні 100 балів.

Рис. 1

Вибравши «стратегію» відповіді на перші 20 завдань, натискуючи одну і ту ж відповідь (наприклад, А), абітурієнт ймовірно отримував мінімальні 4 бали; знаючи вірну відповідь хоч на одне питання, він набрав би більше 124 балів… Для чого це зроблено? Щоб заспокоїти людей, зокрема, батьків? З.Ю. Філєр брав участь у вступних екзаменах у Донецькій політехніці в 60-ті роки, де 30% вступників отримували «2» на письмовому іспиті з математики, а потім ще 10–20% – на усному. Це були *об'єктивні* оцінки знань абітурієнтів. З тих пір знання кращими не стали. Тоді, принаймні, до ВНЗ не проходили ті, хто не знав таблицю множення і не вмів розв’язати квадратного рівняння та лінійної нерівності. Вони знаходили себе в ПТУ і йшли на виробництво. А зараз більше 90% мають право вступати до ВНЗ.

Порівнюючи дані за 2008 та 2009 рр., відмітимо, що вдвічі зросла кількість учнів, які не подолали 24-бальний бар’єр для вступу до ВНЗ (не набрали хоча б 4 бали із 54-ох).

Крім того, обробка даних зроблена так, щоб 52–53 % «набрали» більше 150 балів (які насправді відповідали порядку 13 реальних балів при розв’язуванні задач з 54-ох можливих). Про це свідчать дані в Офіційному звіті про проведення ЗНО [2], показані на рис. 2: модою на ньому є значення 5 балів, а середній набраний бал – 13,89, що складає чверть від 54-х балів. Це не досягає навіть «двійки» за 5-бальною системою.

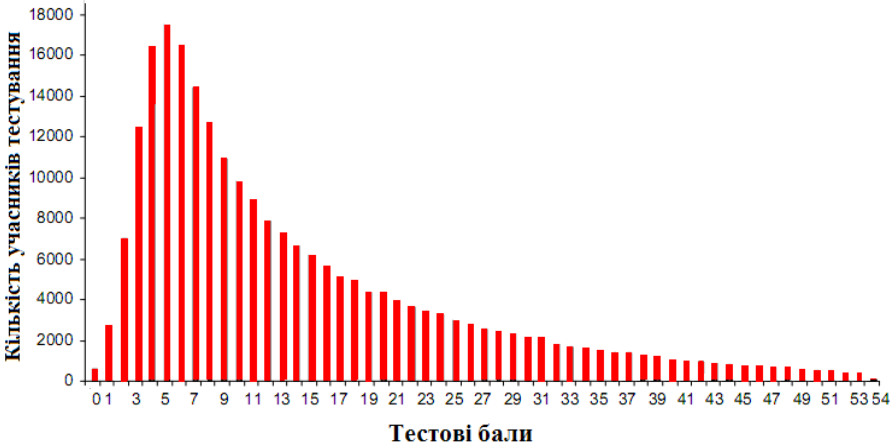


Рис. 2. Розподіл учнів за набраними балами

Ми зіставили відсоток тих, хто отримав менше 50 «рейтингових» балів в Україні і в Росії у 2008 році. В Україні таких 47,86%, а в Росії – 78,84%. Така суттєва різниця підтверджує, що «важливо, не скільки набрав, а як рахують». Уведення трьох оцінок за тест (первинна, у балах від 0 до 54; рейтингова, від 100 до 200 балів; критеріальна, за 12-бальною шкалою) дозволяє *ховати* реальний стан низьких знань учнів з математики. Для чого це потрібно, нам невідомо. Ми тільки відчуваємо це «на власній шкурі», коли навчаємо тих, хто набрав 124 бали за рейтинговою шкалою з математики.

Ми порівняли середні набрані бали із ЗНО [2] з тих предметів, які були обов’язковими для складання (українська мова, математика, історія), та предметів природничого циклу (таблиця 1). Катастрофічно поганими є знання школярів з математики та фізики (середній бал складає

26–27% від можливого); трохи кращими – з історії і біології (37–39%) та географії, хімії, української мови і літератури (42–44%).

Таблиця 1

Результати ЗНО–2009

Предмет	Кількість учасників	Максимально можливий бал / максимально набраний бал	Середній набраний бал	Середній набраний бал, у % до можливого
Українська мова і література	434 210	111 / 109	48,4	43,6 %
Математика	235 305	54 / 54	13,89	25,7 %
Історія України	178 245	90 / 87	35,0	38,9 %
Біологія	102 072	84 / 83	31,18	37,1 %
Географія	50 550	100 / 100	41,99	42,0 %
Фізика	32 142	51 / 51	13,49	26,5 %
Хімія	28 650	95 / 95	40,03	42,1 %

Структура тестів–2009. У цілому завдання в тестах 2009 р. не складніші завдань 2008 р. Звертаємо увагу на те, що у 2009 р. навіть із задачами першого рівня впорались менше 50 % учнів, другого рівня – 15–20 %, а третього – лише 4–6 % (рис. 3) [2].

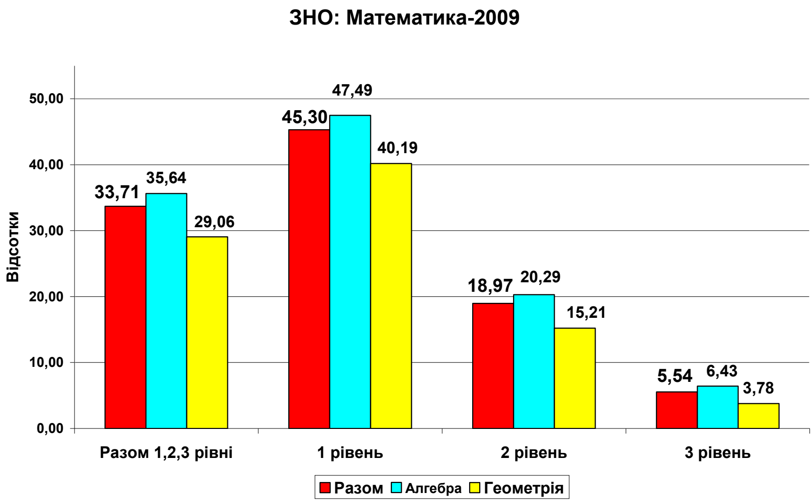


Рис. 3

Відмітимо, що кількість набраних балів з алгебри вища, ніж з геометрії, і ця тенденція прослідковується на усіх рівнях. Можливо, це свідчить про те, що під час тестування перевіряється уміння *розв'язувати* задачі, а на уроках геометрії і в підручниках більше уваги приділяється доведенню теорем, ніж розв'язуванню задач. Зупинимося на задачах першого рівня.

Відзначимо, що тільки 40 % учнів зуміли знайти правильну відповідь з п'яти запропонованих на завдання №3: *Обчисліть:* $\sqrt[3]{128}\big/\sqrt[3]{2}$; третина упоралась із вибором правильної відповіді на задачу №6: *Розв'яжіть нерівність:* $\left(1/5\right)^x \le 1/25$. Менше 40 % змогли вказати відповідь на питання №9: *Якщо* $a = 1 - b/c$*, то* $b=$. Можливо, якби замість b було звичне x, то результат був би кращим. Відзначимо, що знаходити компоненти дій вчать у початковій школі; крім математики, їх постійно використовують під час розв'язування задач з біології, хімії, фізики. При цьому троє із п'яти випускників так і не навчилися цього робити за 10-11 років навчання. Особливо хотілось би виділити задачу №10: *Укажіть правильну нерівність: А)* $3/8 > 5/8$*; Б)* $7/3 > 7/2$*; В)* $8/9 > 9/8$*; Г)* $5/6 > 4/5$*; Д)* $19/21 > 6/7$. Правильну відповідь Г) обрали 49 %, неправильні відповіді: Д) 17 %, А) 16 %, Б) 10 %, В) 7,5 %. Про яку логіку може йти мова, якщо кожний шостий випускник вважає, що $3/8 > 5/8$; кожний десятий, що $7/3 > 7/2$, і кожний тринадцятий, що правильний дріб $8/9$ більший за $9/8$, що не піддається ніякому логічному поясненню. Раніше такі вправи могли бути дійсно задачами для учнів 1-3 класів початкової школи.

Задачу №20 (першого рівня) зміг розв'язати один із шести учнів: *Свинцеву кулю радіуса 5 см переплавили в кульки однакового розміру, радіус кожної з яких 1 см. Скільки таких кульок одержали?* Причому неправильну відповідь – 5 кульок – обрали більше 50 % випускників.

Результати тестування з математики. Як виглядають різні регіони в цьому сенсі? На рис. 4 відмічені регіони, які мають кращі і найгірші результати [2]. Різниця між ними суттєва – майже у півтора рази для, наприклад, м. Київ (67,8 балів) та Кіровоградської обл. (49 балів).

Найкращі показники, отримані по областях, у балах: Тернопільська 60, Миколаївська і Сумська – 57,5, Івано-Франківська і Львівська – 57, Волинська – 56, Хмельницька, Черкаська і Чернігівська – 55, Донецька, Запорізька, Одеська, Рівненська, Херсонська – 54, Харківська і Закарпатська – 53, вищі за середні показники по Україні. **Найгірші** показники отримані по областях: Луганська, Чернівецька та Кіровоградська (49-50 балів).

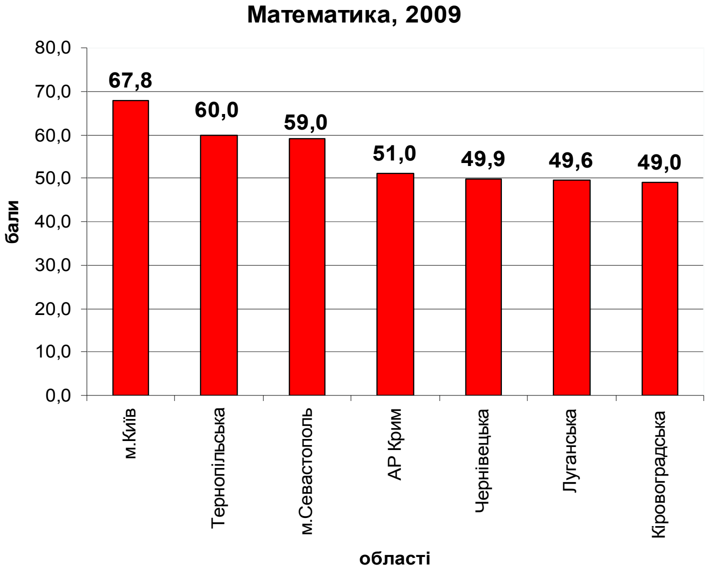


Рис. 4

Про переведення тестових балів у рейтингові. На рис. 5 показано, скільки «подарували» кожному абітурієнту при перерахунку набраних за розв’язання задач балів у оцінку за рейтинговою шкалою.

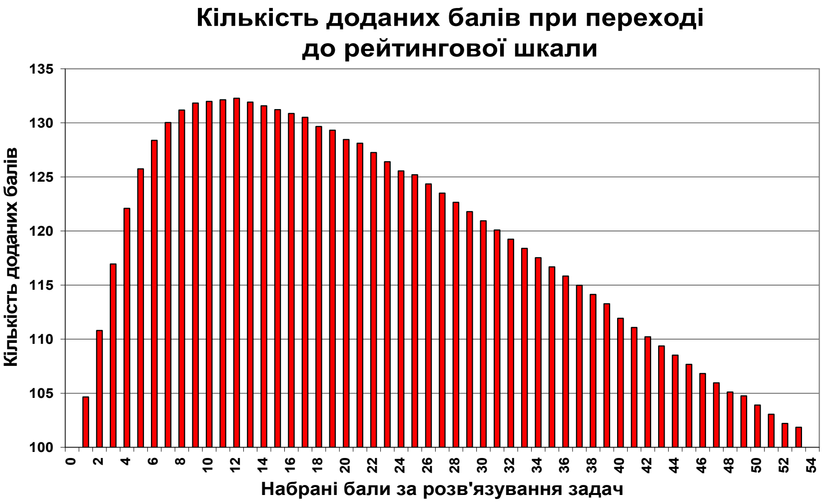


Рис. 5

Тим, хто отримав 9–14 балів з 54-ох (тобто реально розв’язав 17–26% завдань), додали найбільше – по 132 бали (отрималося 149–158 балів із 200, тобто 74–79% від 200). Відзначимо, що ті, хто отримав 4 бали з 54-ох (тобто реально розв’язав 7,4% завдань), після переведення за рейтинговою шкалою мав уже 129,5 балів (65% від 200) – пропуск до ВНЗ, особливо якщо він був пільговиком.

Через це складається враження благополуччя в знаннях учнів математики. За непропорційною шкалою ховається майже *повне незнання* учнями математики.

Висновки

1. Дворічний досвід обов’язкового тестування в Україні свідчить про його позитивний вплив на ставлення учнів до вивчення математики та на вчителів у зв’язку з появою деякого еталона залишкових знань.

2. У результаті проведення ЗНО бажаючим стати студентами ВНЗ створені однакові умови для виявлення рівня індивідуальних навчальних досягнень.

3. За підсумками ЗНО є можливість проаналізувати та порівняти роботу навчальних закладів системи загальної середньої освіти та освітніх систем окремих регіонів.

4. Викликає подив наявність складної системи обробки результатів тестування, яка приховує реальний низький стан знань учнів з математики. У результаті цього студентами стають молоді люди, які не мають достатніх знань для продовження навчання у ВНЗ.

5. Переведення балів, набраних абітурієнтами при розв’язуванні задач, у рейтингові бали за **непропорційною** шкалою носить характер *приписок* у матеріальному виробництві і створює негативний вплив на учнів, привчає до обману і самообману.

6. Треба не знижувати вимоги до середнього низького рівня знань, а визнати цей рівень недостатнім, піднімати вимоги до достатнього рівня, тим самим боротися за його підвищення.

Література

1. Філєр З. Ю. Що я думаю про зовнішнє тестування з математики / Філєр З. Ю. // Математика в школі. – 2009. – №1–2. – С. 13–17.

2. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів України в 2009 році [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://datatp.com.ua/ZVIT2009_.zip

3. http://www.osvita.ua/test/test_about/3878

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

З.Е. Филер[1α], А.И. Музыченко[2β]
[1] г. Кировоград, Кировоградский государственный педагогический университет имена Владимира Винниченко
[2] г. Кировоград, Государственная летная академия Украины
[α] filier@rambler.ru
[β] muzichenko_a@mail.ru

Рассмотрим системы уравнений второго порядка

$$\mathrm{A}x''+\mathrm{C}x=0. \tag{1}$$

В смысле устойчивости эта система эквивалентна системе $\mathrm{A_c}x''+\mathrm{C_c}x=0$, где $\mathrm{A_c}$ и $\mathrm{C_c}$ – симметричные части матриц A и C. Далее для матриц $\mathrm{A_c}$ и $\mathrm{C_c}$ будем использовать обозначения A и C без индексов.

Доказательство эквивалентности системы с матрицами A и C в смысле устойчивости системе с матрицами $\mathrm{A_c}$ и $\mathrm{C_c}$ легко получить умножением скалярно системы (1) на вектор x' справа и слева и сложением: $((\mathrm{A}x', x')+(x', \mathrm{A}x)+(\mathrm{C}x, x)+(x, \mathrm{C}x))'=0$. Используя свойство квадратичных форм $(x, \mathrm{A}x)=(\mathrm{A}^*x, x)$, получим требуемое, т.к. $(\mathrm{A}+\mathrm{A}^*)/2=\mathrm{A_c}$. Сумма

$$\mathrm{E}=0,5((\mathrm{A}x', x')+(\mathrm{C}x, x)) \tag{2}$$

играет роль полной энергии, производная которой по времени равна нулю. Первое слагаемое играет роль кинетической энергии, второе – потенциальной энергии.

Если оба слагаемые в (2) – положительно определённые квадратичные формы, то система (1) устойчива неасимптотически. Если форма $(\mathrm{C}x, x)$ не является знакоопределенной, то система (1) неустойчива [1].

Поиск решения систем (1) в виде $x=\mathrm{H}\sin\omega t \Rightarrow x''=-\mathrm{H}\omega^2\sin\omega t \Rightarrow (\mathrm{C}-\omega^2\mathrm{A})\mathrm{H}=0$, $\mathrm{H}\neq 0$ приводит к характеристическому уравнению $\det(\mathrm{C}-\omega^2\mathrm{A})$.

Все корни этого характеристического уравнения относительно ω действительны, тогда $\omega^2>0$. Если матрицы A и C положительно определены (ПО) (квадратичные формы $(\mathrm{A}y, y)$ и $(\mathrm{C}x, x)$ ПО); тогда замена $\omega^2=t/(1-t)$ финитизирует область определения характеристического уравнения (ХУ) $\det(\mathrm{C}(1-t)-\mathrm{A}t)=0$ при $0<t<1$. Если все корни ХУ лежат в этом промежутке, то уравнение устойчиво; легче установить, что нет корней на отрезке $(-1; 0)$ при финитизации заменой $\omega^2=t/(1+t)$; тогда будет уравнение

$$f(t)=\det(\mathrm{C}(1-t)-\mathrm{A}t)=0. \tag{3}$$

В случае устойчивости все его корни *не* принадлежат отрезку $(-1; 0)$. Поэтому достаточно «пройтись» по отрезку $(-1; 0)$, убедившись в их отсутствии.

Когда нет уверенности в ПО матриц A и C, наличие экстремумов характеристического многочлена свидетельствует о наличии пары действительных или комплексно сопряжённых корней с действительной частью, близкой к точке экстремума. Значения $f(-1)$=det(A), $f(0)$=det(C); если значение $B=f(-b)=\det(Ab+C(1-b))$ не принадлежит отрезку $(f(-1); f(0))$ (функция $f(t)$ не монотонна).

Если вторая производная отрицательная, а функция положительна в точке экстремума, то в этой точке функция имеет максимум. Если эта точка экстремума единственная, то функция не имеет корней на промежутке (–1; 0) и система устойчива. Поэтому в неустойчивом случае нет необходимости проходить весь интервал (–1; 0), дойдя до точки b.

На основе предложенного алгоритма разработана программа анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений 2-го порядка без перехода к уравнениям 1-го порядка. Программа тестирована на конкретных примерах.

Покажем работу программы для систем вида (1) с матрицами:

$$A:=\begin{bmatrix} 959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 849 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 399 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 104 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 398 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 648 \end{bmatrix},$$

$$C:=\begin{bmatrix} 295 & 2 & 4 & 8 & 3 & 9 & 2 & 8 & 9 \\ -2 & 381 & 1 & 6 & 7 & 7 & 3 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 450 & 3 & 8 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -8 & -6 & -3 & 115 & 5 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ -3 & -7 & -8 & -5 & 842 & 2 & 9 & 5 & 9 \\ -9 & -7 & -3 & -5 & -2 & 839 & 7 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -9 & -7 & 956 & 9 & 4 \\ -8 & -3 & -1 & -8 & -5 & -4 & -9 & 861 & 9 \\ -9 & -5 & -3 & -4 & -9 & -3 & -4 & -9 & 260 \end{bmatrix}.$$

В результате работы программы был выдан результат: сообщение «Система асимптотически устойчива» и построены графики ХУ $f(t)$ и его производной $f'(t)$. Из рис. 1 видно, что производная имеет на интервале (-1;0) один корень. Это свидетельствует о наличии в этой точке экстремума – максимума.

На рис. 1 показано рабочее окно программы с выводом результатов. Вывод на экран графиков является не обязательным этапом работы программы, а делается с методической целью для обучаемого.

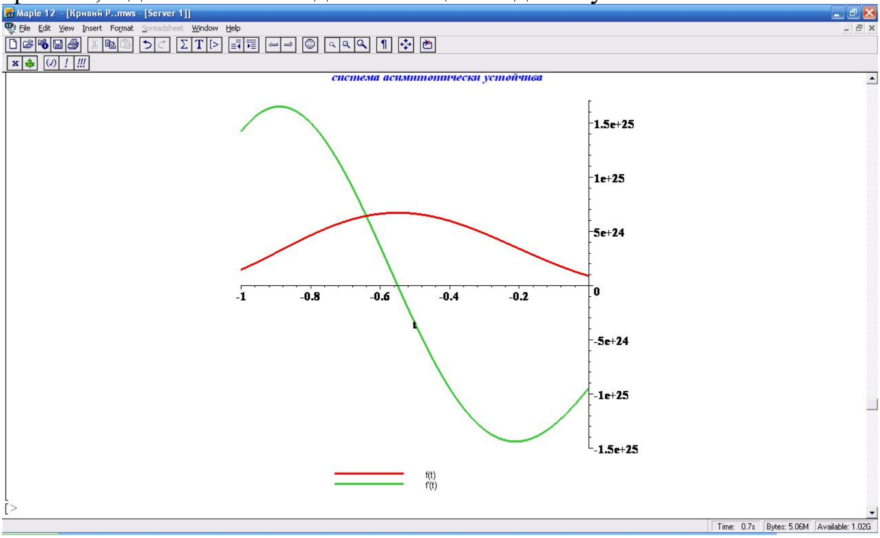


Рис. 1

Для системы с матрицами A и C программа выдает сообщение о неустойчивости системы (рис. 2):

$$A := \begin{bmatrix} 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 & 0 & 8 & 3 & 7 & 4 & -3 \\ -7 & 3 & -1 & 3 & 1 & -2 & 2 & 5 & -10 \\ -9 & 1 & 9 & -5 & 2 & 3 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 3 & 4 & 4 & 8 & 10 \\ -8 & -1 & -2 & -3 & 6 & 1 & 8 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & -3 & -4 & -1 & 3 & 6 & 6 & -8 \\ -7 & -2 & 4 & -4 & -8 & -6 & 8 & -6 & -6 \\ -4 & -5 & 4 & -8 & 3 & -6 & 6 & 9 & -1 \\ 3 & 10 & 8 & -10 & 8 & 8 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из графика XY $f(t)$ видно, что на интервале (–1;0) функция имеет минимум. Этот факт свидетельствует о наличии на этом промежутке пары комплексно-сопряженных корней, что приводит к неустойчивости. Первая производная $f'(t)$ принимает нулевое значение в точке экстремума (рис. 2).

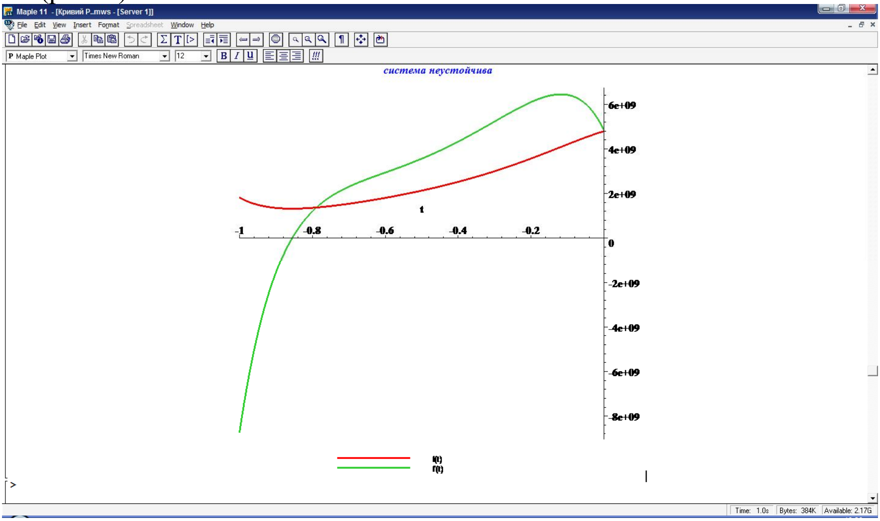


Рис. 2

Если использовать встроенные процедуры отыскания корней, можем найти значения корней для ХУ $f(t)$ на отрезке (–1;0).

Литература

1. Филер З. Е. Исследование устойчивости линейных систем / Филер З. Е., Музыченко А. И. // Материалы 3 межд. науч.-техн. конференции «Моделиров. и комп. графика» 7-9 окт. 2009. – Донецк, 2009.

ВИХОВНІ МОЖЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО НАВЧАННЯ ЯК ЗАСОБУ ФОРМУВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТУДЕНТІВ

В.О. Цапов[1], С.Г. Цапова[2]
[1] м. Донецьк, Донецький національний університет
[2] м. Донецьк, Донецький бізнес-ліцей
cva@dongu.donetsk.ua

Останнім часом в офіційно-нормативних документах, які регламентують діяльність вищих освітніх закладів, наголошується, що кожний сучасний випускник повинен уміти обґрунтовано і цивілізовано розв'язувати економічні і соціальні проблеми. Це зумовлює необхідність підготовки всебічно освічених людей, які спроможні усвідомлювати всю соціально-економічну систему загалом і впливати на різні складові цієї системи, тобто підготовку конкурентоспроможного фахівця, який має високий рівень розвитку загальної культури та її окремих проявів, в тому числі і економічної культури.

Серед соціальних наук економіка найбільшою мірою використовує математику. Однак частіше студенти вивчають окремі розділи математики, при цьому слабо актуалізуються між предметні зв'язки математики, не достатньо демонструються її прикладні можливості [2]. Візьмемо, наприклад, такий розділ математики як диференціальне числення. На наш погляд, в цьому розділі можна яскраво продемонструвати виховні можливості математичного навчання, його світоглядний і культуроспрямований вплив на особистість студента.

В економіці широко використовуються середні величини: середня ціна продукції, середня продуктивність праці тощо. Так само середні величини важливі і при комерційній діяльності: середній доход, середній об'єм продажів тощо. Ще, наприклад, при плануванні розвитку виробництва, та і будь-якої підприємницької діяльності, може виникнути така задача: потрібно з'ясувати, на яку величину зросте результат, якщо витрати скоротити. Оперуючи середніми величинами, не можна одержати відповіді на таке питання. Тут мова йде про приріст змінних величин. В аналогічних задачах потрібно знайти границю відношення приростів розглянутих величин, або як кажуть, граничний ефект. Отже, тут застосовується поняття диференціального числення – похідної функції. Диференціальне числення дає можливість розглядати великий спектр задач економічного змісту, досліджувати економічні процеси, явища. Вирішення економічних задач методами диференціального числення вимагає впровадження фрагментів економічної теорії [1].

Розглянемо поняття, що ілюструє економічний зміст похідної. Витрати виробництва Y будемо розглядати як функцію кількості продукції x, що випускається . Нехай Δx – приріст продукції, тоді ΔY – приріст витрат виробництва і $\Delta Y/\Delta x$ – середнє приріст витрат виробництва на одиницю продукції. Похідна $Y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta Y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові витрати на виробництво одиниці продукції. Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількості продукції, що випускається) x, і визначаються не постійними виробничими витратами, а лише змінними (на сировину, паливо тощо). Аналогічно можуть бути визначені граничний виторг, граничний доход, граничний продукт, гранична корисність, гранична продуктивність та інші граничні величини. Застосування диференціального числення до дослідження економічних об'єктів і процесів на основі аналізу цих граничних величин одержало назву граничного аналізу. Граничні величини характеризують не стан (як сумарні або середні величини), а процес, зміну економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або щодо іншого досліджуваного фактора. Проте варто враховувати, що економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини в силу неподільності багатьох об'єктів економічних розрахунків і перервності (дискретності) економічних показників у часі (наприклад, річних, квартальних, місячних тощо). Разом з тим у ряді випадків можна відвернутися від дискретності показників і ефективно використовувати граничні величини [3].

Розглянемо економічний зміст похідної на прикладах.

Задача на продуктивність роботи.

Нехай функція $U=U(t)$ виражає кількість виготовленої продукції U за час t. Необхідно знайти продуктивність роботи в момент t_0. Очевидно, за період від t_0 до $t_0+\Delta t$ кількість виготовленої продукції змінилася від значення $U_0=U(t_0)$ до значення $U_0+\Delta U=U(t_0+\Delta t)$; тоді середня продуктивність роботи за цей період часу $W_{сер}=\Delta U/\Delta t$. Очевидно, що продуктивність роботи в момент t_0 можна визначити як границю середньої продуктивності роботи за час з t_0 до $t_0+\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} W_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta U / \Delta t = U'(t).$$

Отже, похідна об'єму виготовленої продукції, відносно часу, $U'(t_0)$ – це продуктивність роботи на момент часу t_0.

Приклад. Об'єм продукції U (од.) робочого дня є функція $U=-t^3-5t^2+75t+425$, де t – час (ч). Знайти продуктивність роботи через 2 години від початку роботи.

Розв'язок. Продуктивність праці визначається похідною $U'(t)$. Тоді $U'=(-t^3-5t^2+75t+425)'=-3t^2-10t+75$. Знаходимо продуктивність праці в момент часу $t=2$, тоді $U'(2)=19$ (од.)

Відповідь. Продуктивність через 2 години від початку роботи дорівнює 19 од.

Задача на темп і швидкість продуктивності роботи.

Приклад. Об'єм продукції U, що вироблена бригадою робітників, можна описати рівнянням $U=-\frac{5}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+100t+50$, де t – робочий час у годинах. Обчислити продуктивність роботи, швидкість і темп її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

Розв'язок. Продуктивність праці визначається похідною $Z(t)=U'(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100$ (од/год.), а швидкість і темп зміни продуктивності – відповідно похідною $Z'(t)$, та логарифмічною похідною $T_z(t)=(\ln Z(t))'$.

$Z'(t)=-5t+15$ (од/год^2.),

$$T_z(t)=\frac{Z'(t)}{Z(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t+40} \text{ (од/год.)}.$$

Залишилося підставити відповідні значення $t_1=1$, $t_2=7$.

Відповідь. $Z(1)=112{,}5$ (од/год.), $Z(7)=82{,}5$ (од/год.),
$Z'(1)=10$ (од/год^2.), $Z'(7)=-20$ (од/год^2.),
$T_z(1)=0{,}09$ (од/год.), $T_z(7)=0{,}24$ (од/год.),

Отже, до кінця роботи продуктивність праці істотно змінюється; при цьому зміна знака $Z'(t)$ і $T_z(t)$ із плюса на мінус свідчить про те, що збільшення продуктивності роботи в першу годину робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Граничні витрати

Витрати виробництва K будемо розглядати як функцію випущеної продукції x. Нехай Δx – приріст продукції, тоді ΔK – приріст витрат виробництва і $\Delta K/\Delta x$ – середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції. Похідна $K'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва та наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Приклад. Залежність між витратами виробництва Y й об'ємом продукції x, що випускається, виражається функцією $Y=50x-0{,}05x^3$ (грош.од.). Визначити середні і граничні витрати при об'ємі продукції 10 одиниць.

Розв'язок. Функція середніх витрат (на одиницю продукції) визначається відношенням $Y_{сер} = \dfrac{Y}{x} = 50 - 0,05x^2$ (грош.од.). Функція граничних витрат визначається похідною $Y'(x)=50–0,15x^2$ (грош.од.).

Відповідь. Середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош.од., граничні витрати, тобто додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (об'ємі продукції, що випускається, складає 10 одиниць), дорівнюють 35 грош.од.

Граничний доход

Нехай $U(x)$ – доход від продажу x одиниць товару. Тоді границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta U / \Delta x = U'(x)$ називається граничним доходом. Економічний зміст граничного доходу дуже простий: він наближено дорівнює зміні сумарного доходу при зміні кількості реалізованого товару на одиницю. Аналогічно визначається граничний прибуток.

<u>Приклад.</u> На основі статистичних досліджень фірма установила функцію прибутку від ціни p за одиницю продукції $f(p)=–50p^2+500p$. Знайти граничний прибуток фірми щодо ціни p, розрахувати її при $p=2$, $p=5$, $p=10$ (тис.грн.).

Розв'язок. Граничний прибуток визначається похідною $f'(p)=–100p+500$ (тис.грн.).

Відповідь. $f'(2)=300$ (тис.грн.), $f'(5)=0$, $f'(10)=–500$ (тис.грн.).

Бачимо, що при збільшенні ціни одиниці продукції до 5 тис.грн. прибуток буде зростати і буде максимальним при $p=5$ тис. грн. $f(5)=1250$ тис.грн. Якщо ціна одиниці продукції, починаючи з 5 тис. грн., буде збільшуватися, то прибуток фірми буде зменшуватися. Так, при $p=8$ тис. грн. прибуток фірми буде дорівнювати $f(8)=800$ тис. грн. У цьому випадку фірма понесе відносно з оптимальним варіантом утрати на 1250–800=450 тис. грн.

Застосування похідної в економічній теорії

Розглянемо деякі приклади використання похідної в економічній теорії. Як ми бачимо, різні, у тому числі базові закони теорії виробництва і споживання, попиту та пропозиції виявляються прямими наслідками математичної теорії. Спочатку розглянемо економічну інтерпретацію теореми Ферма. Один з базових законів виробництва звучить так: «Оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу». Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо $MS(x_0)=MD(x_0)$, де MS – граничні витрати, а MD – граничний доход. Позначимо функцію прибутку за $C(x)$. Тоді $C(x)=D(x)–S(x)$. Очевидно, що оптимальним рівнем виробництва є той, при якому прибуток максимальний, тобто таке значення випуску x_0, при якому функція $C(x)$ має екстремум (максимум). За теоремою Ферма в цій точці $C'(x_0)=0$. Але $C'(x)=D'(x)-S'(x)$, тому $D'(x_0)=S'(x_0)$, тобто $MS(x_0)=MD(x_0)$. Один з найбільш знаменитих економічних законів – закон спадної прибутковості - –вучить наступним чином: зі збільшенням виробництва додаткова продукція, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного тощо.), з деякого моменту спадає. Інакше кажучи, величина $\Delta Y/\Delta x$, де Δx – збільшення ресурсу, а ΔY – збільшення випуску продукції, зменшується при збільшенні x. У такий спосіб закон спадної прибутковості формулюється так: функція $Y=f(x)$, що виражає залежність випуску продукції від вкладеного ресурсу, є функцією, опуклою вверх. Іншим базисним поняттям економічної теорії є функція корисності $U=U(x)$, де x – товар, а U – корисність. Ця величина дуже суб’єктивна для кожного окремого споживача, але досить об’єктивна для суспільства в цілому. Закон спадної корисності звучить так: зі зростанням кількості товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає. Очевидно, цей закон можна переформулювати так: функція корисності є функцією, опуклої вверх. У такій постановці закон спадної корисності служить відправною точкою для математичного дослідження теорії попиту та пропозиції.

Отже, всі економічні поняття і закони є наслідком математичних теорем і понять. Ми розглянули тільки частину «математичного простору» – похідну – і побачили, що вона є базисом для численних економічних правил і формулювань. Ми переконалися, що математика є важливим засобом економічного виховання студентів, підготовки їх до продуктивної професійної діяльності.

Література

1. Апатова Н. В. Інформаційні технології в навчанні математики / Апатова Н. В. // Сучасні інформаційні технології в навчальному процесі. – К. : НПУ, 1997. – С. 39–52.

2. Ігнатенко М. Я. Прикладні задачі в курсі математики / Ігнатенко М. Я., Соколенко Л. О. // Рідна школа. – 1997. – №5. – С. 58–59.

3. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и её преподавание / Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1980. – 51 с.

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ ЧЕРЕЗ ІНТЕГРАЦІЮ ПРОФЕСІЙНО СПРЯМОВАНИХ НАВЧАЛЬНИХ КУРСІВ

О.С. Чашечникова, О.В. Семеніхіна, Л.Г. Чашечнікова
м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка
chash-olga@yandex.ru

В умовах розбудови системи освіти необхідно забезпечити надійний рівень методичної підготовки майбутнього вчителя математики, розвинути його творчі здібності. Тому необхідно формувати та розвивати у студентів не лише вміння застосовувати наданий викладачем «методичний арсенал», але й прагнення відшуковувати власний, творчий підхід до вирішення реальних, часто – непередбачуваних, – професійних проблем навчання математики.

Існує певна низка умов, за яких накопичений методичною наукою потенціал дійсно впроваджується у реальну шкільну практику та позитивно впливає на ефективність навчального процесу. Серед них чільне місце займає озброєність вчителя математики наявним «арсеналом» та вміння його ефективно використовувати.

Це передбачає ґрунтовне знання математики як навчального предмету, уміння аналізувати сутність проблеми, встановлювати міжпредметні зв'язки. Сучасний творчо працюючий вчитель має бути не лише обізнаним стосовно нових надбань у різних галузях науки і техніки, але й зацікавленим у їх впровадженні у навчальний процес.

Серед професійно-спрямованих навчальних предметів у процесі навчання майбутніх вчителів математики чільне місце займає методика навчання математики. Загальновідомо, що в результаті вивчення цієї дисципліни студенти повинні чітко розуміти відповіді на запитання: чому, як, для чого і кого навчати. Також необхідно створювати умови для розвитку прагнення майбутніх фахівців до науково-обґрунтованого пошуку шляхів вдосконалення своєї праці.

Майбутньому вчителю математики, тим більше, – в умовах впровадження профільного навчання математики, обов'язково знадобиться уміння доцільно підбирати та вдосконалювати форми, методи, прийоми, засоби навчання. Адаптація їх до роботи з різними групами учнів – це й є шлях до відповіді на запитання «**ЯК** ефективно навчати математики».

Але диференційоване навчання математики передбачає орієнтацію змісту навчального матеріалу як на різні профілі навчання, так і на різні рівні. Майбутній вчитель математики повинен навчитися досліджувати і вдосконалювати зміст шкільного курсу математики для різних груп учнів та розробляти системи ефективних форм, методів і засобів навчання та виховання учнів у процесі викладання математики; аналізувати наукову, навчальну, методичну літературу з предмету; проводити уроки різного типу в класах і школах з різним рівнем математичної підготовки, користуючись як традиційними, так і новітніми засобами навчання.

Традиційно студенти фізико-математичних факультетів педагогічних вузів відрізняються за рівнем підготовки з питань, які відповідають шкільним програмам з математики. Більшість з них не навчались у класах фізико-математичного профілю, тому до вступу в університети не мають ґрунтовної підготовки з питань, що відповідають програмі для класів з поглибленим вивченням математики.

Тому серед цілей вивчення курсу елементарної математики на старших курсах є надання студентам ґрунтовної підготовки з шкільного курсу математики відповідно програмам для поглибленого і підвищеного рівнів навчання (озброїти студентів знаннями основних методів розв'язування завдань; забезпечити підвищення рівня знань і вмінь студентів, що дозволить їм якісно та ефективно розв'язувати завдання, відповідні підвищеному та поглибленому рівням; завдання, що пропонуються на заняттях математичних гуртків, факультативів, олімпіадні завдання); створення якісної бази для подальшого вивчення курсу методики навчання математики, для проходження педагогічної практики у навчальних закладах різного типу та класах різного профілю.

Нами створено відповідну програму з елементарної математики для студентів старших курсів. Розподіл матеріалу за семестрами узгоджено з програмою з методики навчання математики, враховано мету підготовки студента до продуктивного проходження педагогічної практики.

Повернення традиційної «арифметики» у сучасні шкільні програми з математики вимагає підготовки студента до навчання учнів розв'язувати задачі не лише алгебраїчними, але й арифметичними способами; «нагадування» про задачі на відсотки, на пропорції, про суміші та сплави.

Особливий акцент робиться на методах та прийомах розв'язування цілих і раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами; таких, що містять змінну під знаком модуля; відповідних систем та сукупностей рівнянь та нерівностей. Більш ґрунтовно розглядається матеріал про обернені тригонометричні функції. Формується погляд на арифметичну та геометричну прогресії як функції.

Пропонуються завдання творчого характеру на побудову нестандартних графіків функцій та рівнянь; на доведення нерівностей.

Зокрема, розглядаються нерівності в геометрії. Належна увага звертається на розв'язування задач на дослідження; на побудову (як на площині, так і у просторі); на застосування координатного і векторного методів розв'язування задач.

Важливою є доцільна та ефективна організація самостійної діяльності студентів (до цього спонукає також проведення оглядових лекцій, лекцій проблемного характеру, вимога працювати з різними джерелами інформації з метою стимулювання самостійної роботи студентів). Студентів необхідно озброїти навичками використання різних методів та прийомів розв'язування завдань, навчити визначати раціональність використання певних методів при розв'язуванні конкретних завдань; продовжувати формування їх загальної математичної культури (обчислювальна культура, графічна культура, культура математичної мови, в тому числі, – використання знаково-символьної системи та ін.).

Звичайно, вирішення проблеми ґрунтовної математичної та методичної підготовки майбутнього вчителя математики, збільшення часу на самостійну навчально-пізнавальну діяльність студентів саме в аудиторії потребує достатньої кількості навчальних годин на вивчення як методики навчання математики, так і елементарної математики, яких традиційно не вистачає. Одна з причин такого дефіциту в сучасних умовах – саме те, що на перших етапах викладачу необхідно деякою мірою усунути прогалини та недоліки у базовій шкільній математичній підготовці деяких студентів з певних питань, без ґрунтовності якої неможна взагалі говорити про удосконалення та поглиблення знань з шкільної математики.

Одним із шляхів вивільнення навчального часу на заняттях від виконання рутинної роботи є грамотне впровадження у навчальний процес сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Для автоматизації рутинних перетворень, обчислень, побудов були створені численні програмні засоби: Mathematica, Matlab, MathCAD, Maple, Derive, Statistica та ін. Навіть табличні процесори сучасних офісних пакетів (зокрема, Excel) оперують досить широкими математичними та графічними наборами команд. Але пакет Mathematica розповсюджується лише на ліцензійних умовах і для комфортної роботи вимагає значних апаратних потужностей. Пакет Matlab (матрична лабораторія) ліцензований, має основним призначенням роботу з масивами різних типів, що суттєво звужує область застосування. Пакет MathCAD ліцензований, надає можливості в оформленні документів з математичною символікою, проте має утруднений в засвоєнні графічний інтерфейс для конструювання керуючих об'єктів. Пакет Statistica ліцензійний і спеціалізований.

Серед програмних продуктів математичного спрямування варто виділити і вітчизняні математичні середовища – GRAN та DG. Ці програмні продукти рекомендовані до використання в навчальному процесі МОН України, не вимагають значних апаратних ресурсів, адаптовані до шкільного курсу математики і побудовані так, що на їх освоєння не вимагається багато часу. Ці пакети виділені нами не лише як засіб підтримка (візуалізації, спрощення обчислень тощо) курсу елементарної математики, що вивчається студентами, але і як інструмент професійної діяльності студентів – майбутніх вчителів математики.

На заняттях нами використовуються згадані математичні пакети, оскільки поряд із переліченими характеристиками-вимогами до програмних продуктів вони дають змогу не лише візуалізувати дані та результат задачі, а й здійснити дослідження розв’язків, причому зробити це динамічно, що є великою перевагою: студент має можливість звернути увагу не лише на результат, а і проаналізувати разом з викладачем всі можливі випадки під час розв’язування конкретної математичної задачі, а також передбачити можливі помилки учнів, що є важливим для оволодіння майбутньою професійною діяльністю.

Крім того, не просто ознайомлення з програмами та їх можливостями, але й систематичне впровадження ППЗ у навчальний процес у педагогічних ВНЗ надає можливість студенту надбати досвід їх використання, дійсно усвідомити їх роль і місце у навчальному процесі, переконатися у перевагах певних програм та у подальшій професійній діяльності використовувати їх доречно та ефективно.

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Л.О. Черних, Н.В. Богатинська
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
laracher@pochta.ru

Однією з основних змістових ліній шкільного курсу математики є числова лінія, яка посідає особливе місце серед інших методичних ліній ШКМ. Формування поняття числа – складний і довготривалий процес, який відбувається протягом всього навчання в школі. Сучасне вчення про число ґрунтується на теорії натуральних чисел, яка в університетському курсі «Числові системи» будується аксіоматично. Існує дві основні схеми розвитку поняття числа:

– логічна схема (натуральні, цілі, раціональні, дійсні, комплексні числа);

– історична схема (натуральні з нулем, невід'ємні раціональні, дійсні, комплексні числа).

Формування поняття числа в сучасній школі відбувається, як відомо, за історичною схемою, що обумовлюється психолого-педагогічними особливостями учнів певного віку. Історична еволюція поняття числа відображається в свідомості учня поступово, збагачуючись кожний раз новим змістом. При цьому надзвичайно важливо, щоб випускник школи на кінець навчання мав уявлення про логічну схему розвитку чисел.

Досвід свідчить про те, що старшокласники мають досить нечіткі уявлення про співвідношення між основними числовими множинами; не розрізняють таких понять, як «дріб» і «дробове число»; некоректно використовують теоретико-множинну символіку при встановленні відношення належності для чисел і числових множин (зокрема, числових проміжків); недостатньо володіють прийомами обчислень (усних, письмових, за допомогою обчислювальної техніки).

Усунути ці недоліки математичної культури учнів, розширити та поглибити їх уявлення про число дозволяє тема «Комплексні числа». Вона посідає особливе місце в шкільному курсі математики, оскільки:

– завершує лінію послідовного розширення числових множин, що проходить через весь шкільний курс;

– тісно пов'язана з іншими не менш важливими розділами алгебри (зокрема, розв'язання рівнянь);

– дає можливість встановити найтісніші зв'язки з геометрією і фізикою.

Надзвичайно багатий ідейний і логічний зміст теми «Комплексні числа» найбільш повно реалізується в умовах профільного навчання. Доцільно побудована методика вивчення комплексних чисел в профільних класах сприяє:

– систематизації та узагальненню знань і умінь учнів з числової лінії;

– розвитку загальної математичної культури учнів;

– формуванню наукового світогляду випускників;

– реалізації міжпредметних зв'язків (зокрема, математики і фізики) та внутрішніх зв'язків між різними розділами самої математики.

Зупинимось детальніше на методичних особливостях узагальнення та систематизації знань і умінь учнів з числової лінії та розглянемо деякі аспекти розвитку їх математичної культури при вивченні теми «Комплексні числа». Можливості для такої роботи виявляються вже на етапі введення чисел нової природи. В результаті систематизації відомостей про натуральні, цілі, раціональні, дійсні числа з'ясовується залежність між ними; уточнюються алгебраїчні операції, які виконуються в кожній з цих множин, описуються властивості цих операцій.

Не розкриваючи строго поняття мінімального алгебраїчного розширення для числових систем, вчителю слід все ж таки сформулювати певні з вимог на доступному для них рівні. З'ясовуючи принцип розширення множини чисел, виділяють спільну ідею, яка об'єднує всі відомі їм етапи розширення поняття числа: вимога зробити здійсненною операцію, яка не виконувалася у вихідній множині чисел. Завершується даний етап постановкою задачі про добування кореня. Зробити це можна таким чином: «Серед відомих нам дійсних чисел немає такого числа, квадрат якого дорівнює числу –1. Уявить, що в деякій числовій множині таке число існує. Назвемо його уявною одиницею, позначимо через «i» та матимемо: $i^2=-1$».

Перед введенням алгебраїчної форми комплексного числа слід детальніше зупинитися на такому важливому понятті, як «форма запису числа» (відображення філософських категорій «зміст» і «форма»). Важливо уточнити, що одне і те саме число можна записати по-різному. Наприклад, натуральне число 4 може бути представлене в таких формах:

$$4 = \sqrt{16} = \frac{12}{3} = \lg 10000.$$

При цьому, незалежно від того, в якій формі записане дійсне число, його зміст не міняється і в кожному випадку йому відповідає одна й та сама точка числової прямої.

По можливості, слід уточнити зміст понять «дріб» і «дробове число». Перше з них характеризує певну форму запису числа (звичайний дріб, десятковий дріб); друге – характеризує множину чисел, які доповнюють цілі до раціональних. Нечіткі уявлення учнів про ці поняття пов'язані з традиційним формулюванням завдань типу: додати два дроби з однаковими знаменниками (яке, по-суті, означає – додати два числа, які записані у вигляді звичайних дробів з однаковими знаменниками).

Продовжуючи цю ідею в темі «Комплексні числа», слід зазначити, що нові числа також можуть бути записані по-різному: в алгебраїчній формі, в тригонометричній формі, в показниковій формі. В школі учнів знайомлять з першими двома формами запису комплексного числа.

Подальшому розвитку обчислювальної культури учнів сприяє вивчення теми «Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі». Як правило, учні добре засвоюють алгоритми виконання дій додавання, віднімання, множення та ділення комплексних чисел, представлених алгебраїчно, але при цьому часто роблять помилки в обчисленнях. Систему прикладів на відпрацювання відповідних алгоритмів слід будувати, використовуючи методичний прийом варіації неістотних ознак. Оскільки дійсна частина і коефіцієнт при уявній частині комплексного числа – це довільні дійсні числа, то задати їх можна як натуральні, цілі, дробові, ірраціональні (використовуючи при цьому різноманітні форми для їх запису).

Задача 1. Знайти суму, різницю, добуток, частку комплексних чисел α і β:

1) $\alpha = 2 - 3i; \beta = -1 + 4i;$ 2) $\alpha = \frac{1}{2} - i; \beta = 0{,}7 + \frac{5}{13}i;$

3) $\alpha = \sqrt{2}\,i; \beta = \sqrt{2} - i;$ 4) $\alpha = \pi + 3i; \beta = -1 + 0{,}4i;$

5) $\alpha = \lg 2 - i; \beta = \log_2 10 + i;$ 6) $\alpha = \sin 3 + 3i; \beta = \cos 3 - 3i.$

Навички роботи з уявною одиницею доцільно формувати при розв'язуванні задач на обчислення, в яких застосовуються різні натуральні та цілі від'ємні степені уявної одиниці та використовуються формули скороченого множення.

Задача 2. Обчислити :

1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010};$ 2) $6i^5 + 5i^4 + 4i^3 + 3i^2 + 2i + 1;$

3) $(i^{23} - 2\,i^{45} + 3\,i^{52})^2;$ 4) $i^{100} + i^{-100} + i^{99} + i^{-99}.$

Властивості бінарних відношень «бути рівними», «бути взаємно протилежними», «бути взаємно спряженими» для комплексних чисел можна досліджувати на певному теоретичному рівні та з використанням геометричного змісту комплексного числа. Учні з'ясовують, що:

– добуток і сума двох взаємно спряжених комплексних чисел – це числа дійсні;

– число, спряжене до суми (добутку) комплексних чисел, дорівнює сумі (добутку) комплексних чисел, спряжених до доданків (співмножників);

– точки, які зображають рівні комплексні числа, збігаються;

– точки, які зображають протилежні комплексні числа, розташовані симетрично відносно початку координат;

– точки, які зображають спряжені комплексні числа, розташовані симетрично відносно вісі OX.

На нашу думку, доцільно одразу ж при введенні поняття «комплексне число» ознайомити учнів з геометричною інтерпретацією комплексних чисел. Можна підкреслити, що необхідність розширення множини дійсних чисел пов'язана з двома проблемами: неможливістю розв'язати рівняння $x^2 + 1 = 0$ на множині R і потребою винайти числа, які відповідають точкам площини, аналогічно до того, як дійсні числа відповідають точкам прямої.

З'ясувавши, що алгебраїчна форма комплексного числа містить пару дійсних чисел, а кожній парі дійсних чисел відповідає цілком певна точка координатної площини, можна встановити відповідність між комплексними числами і точками координатної площини. Зазначивши, що числу виду $z = a + bi$, де a, b – дійсні числа, відповідає точка площини з координатами (a, b), можна ввести позначення для дійсної частини та коефіцієнта при уявній частині комплексного числа z:

$a = \mathrm{Re}\, z$,$b = \mathrm{Im}\, z$.

Задача 3. Зобразити множину всіх точок комплексної площини, для яких виконуються такі умови:

1) $\mathrm{Im}\, z = 2$; 2) $\mathrm{Re}\, z = -1$; 3) $\mathrm{Im}\,(z + 1) = 0$; 4) $\mathrm{Im}\, z \geq 0$;
5) $\mathrm{Re}\, z \leq 3$; 6) $\mathrm{Re}\,(z + 2) > 0$; 7) $\mathrm{Re}\, 2z > 0$; 8) $\mathrm{Im}\, 2z = 1$;
9) $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 1$; 10) $\mathrm{Re}\,(iz) = 1$; 11) $\mathrm{Im}\, z > 3 \wedge \mathrm{Re}\, z < 2$;
12) $\mathrm{Re}\, z^2 = 0$; 13) $\mathrm{Im}\, z^2 = 0$; 14) $\mathrm{Re}\, 1/z = 0$.

Логіка розгортання навчального матеріалу дозволяє від алгебраїчної форми запису комплексного числа $z = a + bi$ перейти до геометричної інтерпретації – точка координатної площини $A(a; b)$. Від геометричної інтерпретації перейти до векторної – вектор, початком якого є точка O (0;0) і кінцем є точка $A(a;b)$. Від векторної інтерпретації перейти до тригонометричної форми комплексного числа, пов'язавши її з алгебраїчною формою. Саме в цій темі доцільно обговорити з учнями питання про «зміст» і «форму», яке розширює рамки їх світогляду. Важливо підкреслити, що вивчення нової (тригонометричної) форми комплексного числа сприяє більш глибокому розумінню суті самого поняття «комплексне число» та забезпечує досить продуктивне «знаряддя» для розв'язання великого кола прикладних задач.

Труднощі в роботі з тригонометричною формою комплексного числа пов'язані перш за все з тим, що для засвоєння нового матеріалу у учнів повинні бути сформовані на достатньому рівні знання та вміння з тригонометрії. Саме тому слід відібрати та систематизувати той тригонометричний матеріал, без якого не можна вводити та використовувати тригонометричну форму комплексного числа. Особливої уваги заслуговують нові характеристики комплексного числа – модуль і аргумент. Формуючи поняття «модуль комплексного числа», доцільно провести аналогію з поняттям «модуль дійсного числа». З геометричної точки зору, модуль дійсного числа – це відстань від початку відліку до точки, яка відповідає цьому числу на числовій прямій. Аналогічно, модуль комплексного числа – це відстань від початку координат до точки , яка відповідає цьому числу на координатній площині. Важливо підкреслити, що це твердження є більш загальним, оскільки кожне дійсне число є комплексним. Тепер всі дійсні числа зображаються точками координатної площини, які лежать на вісі ОХ, саме тому вона називається дійсною віссю.

Задача 4. Зобразити множину всіх чисел z комплексної площини, які задовольняють таким умовам:

1) $\arg z = 0$; 2) $\arg z = \pi$; 3) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $\arg \bar{z} = \dfrac{\pi}{4}$; 5) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; 6) $\arg (z - i + 1) = \dfrac{\pi}{4}$;

7) $|z| \leq 3$; 8) $1 \leq |z - 1 + 2i| \leq 3$; 9) $a\mathrm{rctg}\ |z+3| < \dfrac{\pi}{3}$.

Тема «Комплексні числа» посідає особливе місце як в самій математичній науці, так і в шкільному курсі математики. В ній закладений значний світоглядний та дидактичний потенціал, вона містить широкі можливості для розвитку логічної, обчислювальної, алгоритмічної, графічної культури учнів.

Література

1. Карп А. П. Материалы для работы над темой «Комплексные числа» в классах с углубленным изучением математики / Карп А. П. // Математика в школе. – 1992. – № 6. – С. 8–10.

2. Криволапов В. П. Задачі на геометричну інтерпретацію комплексних чисел / Криволапов В. П. // У світі математики. – 1984. – № 15. – С. 194–204.

3. Шаран О. В. Методика вивчення комплексних чисел у профільних класах загальноосвітніх шкіл : автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Шаран О. В. ; Нац. пед. ун–т ім. М.П. Драгоманова. – К., 2009.

ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Л.О. Черних[α], К.С. Репіна[β]
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
[α] laracher@pochta.ru
[β] 25_summer@mail.ru

Тема «Комплексні числа» має широкі змістовні і методичні можливості для узагальнення та систематизації уявлень учнів про число; для розвитку логічної, алгоритмічної, графічної культури; для демонстрації широкого кола прикладних задач.

Розглянемо приклади застосування комплексних чисел при розв'язанні геометричних задач. Для цього попередньо виділимо основні теоретичні відомості про комплексні числа.

1. Комплексне число α в алгебраїчній формі записується так: $\alpha=a+bi$, де a, $b\in\mathbf{R}$, $i^2=-1$. Характеристики комплексного числа, заданого алгебраїчно: a – дійсна частина комплексного числа, b – коефіцієнт при уявній частині комплексного числа.

2. Комплексне число α в тригонометричній формі записується так: $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Характеристики комплексного числа, записаного тригонометрично, такі: r– модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа.

3. Між характеристиками комплексного числа $\alpha=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ існує такий зв'язок:

$$r=|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi$$

4. Комплексному числу $\alpha=a+bi$ відповідає точка $M(a, b)$ або вектор $\overrightarrow{OM}$ координатної площини. Говорять також, що точка M має комплексну координату α і записують: $M(\alpha)$.

5. Числа $\alpha=a+bi$ та $\overline{\alpha}=a-bi$ називаються взаємно спряженими. Існують такі властивості комплексно-спряжених чисел:

a) $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=|\alpha|^2\in\mathbf{R}$,

b) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$,

c) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$,

d) $\overline{\alpha : \beta} = \overline{\alpha} : \overline{\beta}$.

Додатково слід розглянути деякі спеціальні теоретичні положення про комплексні числа та їх геометричну і векторну інтерпретації.

[1] Комплексним числам $\alpha=a+bi$ та $\beta=c+di$ відповідають точки $A(\alpha)=A(a;\, b)$ та $B(\beta)=B(c;\, d)$. При цьому

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |\alpha - \beta|.$$

[2] Для будь-якого комплексного числа z виконується: $z\overline{z} = |z|^2$, тому $|AB|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = |\alpha-\beta|^2 = (\alpha-\beta)\left(\overline{\alpha-\beta}\right) = (\alpha-\beta)\left(\overline{\alpha}-\overline{\beta}\right)$ (1).

[3] Нехай точка C ділить відрізок AB в такому відношенні: $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$, де $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ задані своїми комплексними координатами. Тоді $\lambda = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}$. Отже, $\gamma = \dfrac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$. Якщо $\lambda=1$ (тобто точка C – середина відрізка AB), то $\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ (2).

Розглянемо приклади задач з планіметрії, при розв'язанні яких можна використовувати комплексні числа.

<u>Задача 1.</u> Точки M та N — середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Довести, що $|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2$ (рис. 1).

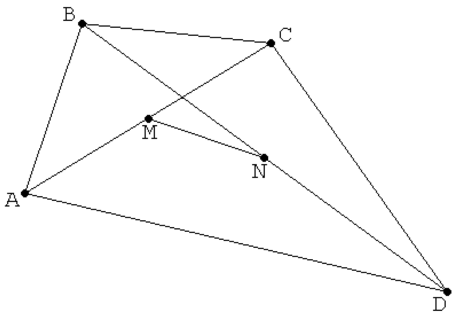


Рис. 1

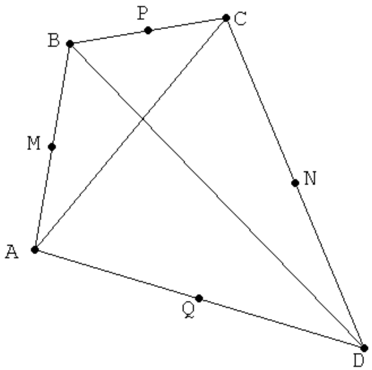


Рис. 2

Розв'язання:

1) Нехай точкам A, B, C, D, M, N відповідають комплексні числа α,

$\beta, \gamma, \eta, \omega, \upsilon$.

2) Розглянемо ліву частину доводжуваної рівності і застосуємо до неї формулу (1):

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=$$
$$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+(\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+(\gamma-\eta)(\overline{\gamma}-\overline{\eta})+(\eta-\alpha)(\overline{\eta}-\overline{\alpha})=$$
$$=2(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}+\eta\overline{\eta})-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma+\gamma\overline{\eta}+\overline{\gamma}\eta+\eta\overline{\alpha}+\overline{\eta}\alpha).$$

3) Оскільки M – середина відрізка AB, то $\omega=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Оскільки N – середина відрізка BD, то $\upsilon=\frac{1}{2}(\beta+\eta)$.

4) Розглянемо праву частину доводжуваної рівності і застосуємо до неї формулу (1):

$$|AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2=$$
$$=(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})+(\beta-\eta)(\overline{\beta}-\overline{\eta})+4(\omega-\upsilon)(\overline{\omega}-\overline{\upsilon})=$$
$$=(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}+\eta\overline{\eta})-(\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\gamma+\beta\overline{\eta}+\overline{\beta}\eta)+$$
$$+(\alpha+\gamma-\beta-\eta)(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}-\overline{\beta}-\overline{\eta})=2(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}+\eta\overline{\eta})-$$
$$-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\gamma}+\overline{\beta}\gamma+\gamma\overline{\eta}+\overline{\gamma}\eta+\eta\overline{\alpha}+\overline{\eta}\alpha).$$

5) При перетворенні лівої та правої частина доводжуваної рівності одержали рівні комплексні числа. Отже, доводжувана рівність правильна.

Задача 2. Довести, що сума квадратів діагоналей AC, BD чотирикутника $ABCD$ дорівнює подвоєній сумі квадратів відрізків MN, PQ, що з'єднують середини протилежних сторін (рис. 2).

Розв'язання.

Потрібно довести: $|AC|^2+|BD|^2=2(|MN|^2+|PQ|^2)$.

1) Нехай точкам A, B, C, D, M, N, P, Q відповідають комплексні числа $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \omega, \upsilon, \tau, \mu$; M – середина відрізка AB, N – DC, P – BC, Q – AD.

2) Розглянемо ліву частину доводжуваної рівності та застосуємо до неї форму (1):

$$|AC|^2+|BD|^2=(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})+(\beta-\eta)(\overline{\beta}-\overline{\eta})=$$
$$=\left(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}+\eta\overline{\eta}\right)-(\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\eta\overline{\beta}+\beta\overline{\eta}).$$

3) Розглянемо праву частину доводжуваної рівності та застосуємо до неї форму (1):

$$2(|MN|^2+|PQ|^2)=2\left((\omega-\upsilon)(\overline{\omega}-\overline{\upsilon})+(\tau-\mu)(\overline{\tau}-\overline{\mu})\right)=$$
$$=2\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\eta-\gamma)\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-\overline{\eta}-\overline{\gamma})+\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha-\eta)\frac{1}{2}(\overline{\beta}+\overline{\gamma}-\overline{\alpha}-\overline{\eta})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\left(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}+\eta\overline{\eta}\right)-2(\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\eta\overline{\beta}+\beta\overline{\eta})\right).$$

4) Очевидно, що доводжувана рівність є правильною.

Задача 3. Довести, що сума квадратів медіан *BM*, *AN*, *CP* трикутника *ABC* дорівнює $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін (рис. 3).

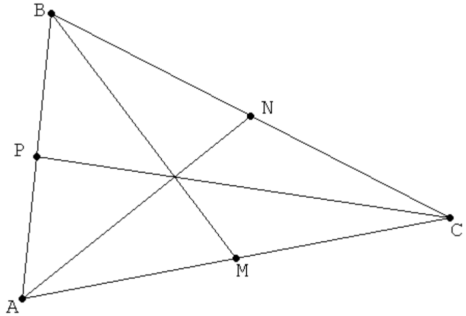


Рис. 3

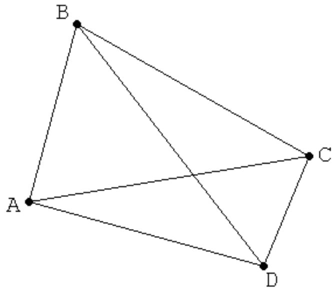


Рис. 4

Розв’язання:

Потрібно довести: $\left|AN\right|^2+\left|BM\right|^2+\left|CP\right|^2=\frac{3}{4}\left(\left|AB\right|^2+\left|BC\right|^2+\left|AC\right|^2\right).$

1) Нехай точкам *A*, *B*, *C*, *M*, *N*, *P* відповідають комплексні числа α, β, γ, ω, υ, τ.

2) Розглянемо ліву частину доводжуваного твердження та, скориставшись формулами (1) і (2), матимемо:

$$\left|AN\right|^2+\left|BM\right|^2+\left|CP\right|^2=(\alpha-\upsilon)\left(\overline{\alpha}-\overline{\upsilon}\right)+(\beta-\omega)\left(\overline{\beta}-\overline{\omega}\right)+(\gamma-\tau)\left(\overline{\gamma}-\overline{\tau}\right)=$$

$$=\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)\right)+\left(\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right)\left(\overline{\beta}-\frac{1}{2}\left(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}\right)\right)+$$

$$+\left(\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\left(\overline{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}\right)\right)=\frac{3}{2}(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma})-$$

$$-\frac{3}{4}\left(\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\gamma\overline{\beta}\right).$$

3) Розглянемо праву частину доводжуваної рівності та застосуємо формулу (1), матимемо:

$$\frac{3}{4}\left(\left|AB\right|^2+\left|BC\right|^2+\left|AC\right|^2\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left((\alpha-\beta)\left(\overline{\alpha}-\overline{\beta}\right)+(\beta-\gamma)\left(\overline{\beta}-\overline{\gamma}\right)+(\alpha-\gamma)\left(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(2\left(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma}\right)-\left(\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\gamma\overline{\beta}\right)\right).$$

4) Отже, доводжувана рівність правильна.

Задача 4. (Теорема Бретшнейдера) Якщо a, b, c, d – довжини послідовних сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, m та n – довжини його діагоналей, то $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A+\angle C)$ (рис. 4).

Розв'язання:

1) Нехай комплексні числа u, v, w, z відповідають векторам $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$, де $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, тоді $u+v+w+z=0$.

2) Розглянемо $|uw-vz|$, враховуючи, що $z=-(u+v+w)$:

$$|uw-vz|=|uw+v(u+v+w)|=|u+w|\cdot|v+w|.$$

Тоді $|uw-vz|^2=|u+w|^2|v+w|^2$ (*).

3) Розглянемо праву частину рівності (*) з урахуванням умови задачі: $|u+w|^2|v+w|^2=m^2n^2$.

4) Розглянемо ліву частину рівності (*) та застосуємо формулу (1):
$$|uw-vz|^2=(uw-vz)\left(\overline{uw}-\overline{vz}\right)=|uw|^2+|vz|^2-\left(uw\overline{vz}+\overline{uw}vz\right).$$

5) За умовою задачі: $|uw|^2=a^2c^2$ та $|vz|^2=b^2d^2$.

6) Переконавшись, що аргумент числа $uw\overline{vz}$ дорівнює $\pm(\angle A+\angle C)$, одержимо, що $uw\overline{vz}+\overline{uw}vz=2abcd\cos(\angle A+\angle C)$.

7) З попередніх міркувань одержимо доводжувану рівність: $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A+\angle C)$.

Література

1. Волковский Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Волковский Л. И. – М. : Просвещение, 1985.
2. Скопец З. А. Геометрические миниатюры / Скопец З. А. – М. : Просвещение, 1990.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. II / Прасолов В. В. – М. : Наука,1986.
4. Привалов И. И. Введение в теорию функции комплексного переменного / Привалов И. И. – М. : Просвещение, 1988.

ПРЕДМЕТ І МЕТОД СТОХАСТИКИ

М.В. Шмигевський
м. Київ, Київський національний університет технологій та дизайну

Відомо, що завданням науки є створення системи понять про явища дійсності, а також встановлення і дослідження закономірностей, яким підлягають ці реальні явища. Їх вивчення часто зумовлює потребу проводити певні експерименти і спостерігати за їх наслідками. Такі експерименти називають також дослідами або *випробуваннями*. Результати (наслідки) випробувань називають *подіями*.

На результати випробувань впливає багато різноманітних чинників, що взаємодіють між собою. Будь-яке конкретне поєднання цих чинників називають ситуацією, або сукупністю умов, або *комплексом умов*. Кожна ситуація створює передумови появи однієї чи декількох відповідних подій.

Наприклад, якщо комплекс умов складає: атмосферний тиск 760 мм і температура 100^{o} за Цельсієм, то подією буде перетворення води в пару (позначимо цю подію через А). Змінивши комплекс умов (тобто змінивши або тиск, або температуру) подію А можна й не отримати. У цьому разі може відбутися подія В (вода буде в рідкому стані) або подія С (вода буде в твердому стані).

Отже, кожну подію можна розглядати як результат реалізації відповідного комплексу умов. Надалі, кажучи про деяку подію, ми будемо вважати, що комплекс умов або відповідна ситуація вже зафіксована, і на цьому не будемо наголошувати.

У комплекс умов, який породжує певну подію А, включають лише основні, найбільш впливові складові. Врахувати всі фактори, що породжують подію А, практично неможливо. Тому в багатьох випадках на появу події А впливають випадкові фактори. Ці фактори можуть зумовити випадковість події.

Наприклад, метеорологічні явища зазнають впливу багатьох невизначених факторів. І ми не можемо врахувати всі сили, які діють, скажімо, на хмари. Динаміка хмар підлягає випадковим законам.

Також не можна отримати повну інформацію про всі сили, які діють у суспільстві. Суспільний розвиток – результат сумісної дії багатьох випадкових факторів. Це ж можна сказати й про поведінку окремої людини, про формування її психологічного стану.

Більшість математичних методів, які застосовують в різних галузях природознавства, техніки, економіки, гуманітарних науках спираються на уявлення про наявність випадковості в цих галузях.

Випадковість – це не вигадана математична абстракція, вона, безумовно, існує в реальному світі. Це означає, що іноді ми не в змозі отримати повну інформацію про явища не лише через наші невміння, нездатність, неточність приладів, але й об'єктивно: так влаштована природа.

У фізиці добре відомий принцип невизначеності Гейзенберга (1927 рік), згідно з яким неможливо одночасно точно визначити деякі величини, наприклад, імпульс і координату мікрочастинок. Це випливає з природи самих мікрочастинок (корпускулярно-хвильовий дуалізм), а не відбиває недоліки методу і принципів вимірювання. Справжній стан частинки можна описати тільки ймовірністю, пов'язаною з хвильовою функцією.

Сучасні наукові дослідження переконують у тому, що на квантово-механічному рівні майже всі фундаментальні закони природи мають імовірнісний характер. Такий висновок у певній мірі є справедливим і для багатьох явищ техніки, економіки, природознавства, гуманітарних наук.

На описовому рівні випадкова подія та пов'язані з нею поняття означаються наступним чином.

Подію називають ***випадковою подією*** *(або стохастичною подією), якщо при реалізації певного комплексу умов вона може відбутися або не відбутися.*

Експерименти, наслідками яких є випадкові події, називають ***випадковими експериментами*** *(або стохастичними експериментами)*.

Отже, результат випадкового експерименту не можна передбачити заздалегідь. Неможливість однозначно передбачити результат відрізняє випадковий експеримент (явище) від детермінованого.

Слово «*стохастичний*» походить від грецького слова *στοχατς* – здогадка. Вживається у значенні – випадковий, ймовірний.

Приклади випадкових подій: народження хлопчика в сім'ї; вступ юнака до вищого навчального закладу; банкрутство фірми в умовах кризи тощо.

Не всі випадкові події підлягають вивченню засобами теорії ймовірностей. Випадкові події, що вивчаються в теорії ймовірностей, мають дві характерні особливості. По-перше, всі вони відбуваються в масових явищах, і тому їх називають *масовими подіями*.

Подію називають ***масовою подією****, якщо комплекс умов, що її породжує, можна повторити як завгодно багато разів (хоча б у принципі, теоретично).*

Наприклад, масовими є наступні події: випадання герба (тризуба) при підкиданні монети; випадання «шістки» (шести очок) при киданні грального кубика; попадання в «десятку» під час пострілу по мішені тощо.

Зрозуміло, що масовою випадковою подією буде також випадання цифри (решки) при підкиданні монети. Нагадаємо, що решка – це лицьова сторона монети (аверс), на якій вибито її номінал, наприклад 1 гривня. Орел, герб, тризуб – це зворотна сторона (реверс) монети.

Другою особливістю випадкових подій, що вивчаються в теорії ймовірностей, є *статистична стійкість частот*. Це означає, що при проведенні великої кількості випробувань відносна частота випадкової події (відношення числа появ події до загального числа випробувань) виявляє властивість стійкості, тобто стабілізується біля деякого числа, яке визначає ймовірність події.

Стійкість частот – це об’єктивна властивість масових випадкових явищ реального світу. Така властивість стійкості частот дозволяє досить точно прогнозувати властивості явищ, пов’язаних із даними випробуваннями.

Замість терміну «статистична стійкість» вживають також термін «статистична однорідність».

Таким чином, *предметом теорії ймовірностей є вивчення кількісних закономірностей, які характерні для масових однорідних випадкових подій*.

Зазначимо, що теорія ймовірностей має справу не безпосередньо з явищами дійсності, реального світу, а з їх математичними моделями. У математичній моделі мають бути правильно передані суттєві сторони явища, що вивчається. Несуттєві сторони не враховують, відкидають. Занадто детальний опис явища призводить до ускладнення математичної моделі та може призвести до практичної неможливості її дослідження. Занадто спрощена модель може привести до хибних висновків. Тому вельми важливим є вибір «золотої середини», тобто вибір адекватної моделі, яка з одного боку підлягає ефективному дослідженню математичними засобами, а з іншого – з високим ступенем точності описує реальні явища.

Наведемо схему, яка вказує на місце математичних моделей при дослідженні реальних явищ.

$$\begin{bmatrix} \textit{Реальні} \\ \textit{явища} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textit{експерименти, досліди,} \\ \textit{випробування, спостереження}}}$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Накопичення фактів,} \\ \textit{опис явищ} \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{абстрагування}}$$

$$\begin{bmatrix}\textit{Побудова}\\ \textit{моделі}\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textit{вивчення моделі}\\ \textit{математичними засобами}}} \begin{bmatrix}\textit{Висновки}\\ \textit{в межах моделі}\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textit{практична перевірка}\\ \textit{моделі та застосування}}} \begin{bmatrix}\textit{Порівняння висновків із реальними фактами,}\\ \textit{практичне використання}\end{bmatrix}.$$

Таким чином, *теорія ймовірностей – це математична наука, яка вивчає математичні моделі випадкових експериментів, тобто експериментів, наслідки яких не можна визначити однозначно умовами проведення експерименту*. При цьому припускається, що сам експеримент можна повторити як завгодно багато разів (хоча б у принципі) при незмінному комплексі умов, а наслідки експерименту (випадкові події) мають статистичну стійкість.

Якщо говорити більш детально, то теорія ймовірностей встановлює такі зв'язки між ймовірностями випадкових подій у математичних моделях, які дозволяють обчислювати ймовірності складних подій за ймовірностями простих подій.

У теорії ймовірностей використовують результати і методи багатьох галузей математики (комбінаторики, математичного аналізу, алгебри, логіки та ін). Однак теорія ймовірностей має певну своєрідність, оскільки вона тісно пов'язана з різними застосуваннями, причому ці застосування не настільки звичні, як, наприклад, застосування диференціальних рівнянь.

Тому ефективно оволодіти теорією ймовірностей може лише той, хто розв'язує багато задач. Ці задачі часто мають «нематематичну» постановку, і треба вміти будувати відповідну математичну модель. У результаті наполегливих дій по розв'язуванню задач і вивченню теоретичного матеріалу здобувається теоретико-ймовірнісна інтуїція та приходить досвід у використанні цієї науки на практиці.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства, техніки, економіки, гуманітарних науках. Багато вчених вважають, що в наш час відбувається "стохастична революція" у свідомості людського суспільства. Це обумовлено передусім тим, що багато подій і процесів у нашому житті мають випадковий характер.

Зазначимо, що теорія ймовірностей слугує також для обґрунтування математичної і прикладної статистики. Статистичні методи у свою чергу використовуються при плануванні та організації виробництва, для аналізу технологічних процесів, для контролю якості продукції та в інших цілях.

Предметом математичної статистики є дослідження статистичних закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища. Ці дослідження проводять на підставі статистичних даних – результатів спостережень, а закономірності вивчають за допомогою методів теорії ймовірностей.

Таким чином, математична статистика виступає як цільове застосування теорії ймовірностей для дослідження статистичних даних із метою одержання наукових і практичних висновків щодо закономірностей масових випадкових явищ.

Зазначимо, що методи теорії ймовірностей і математичної статистики застосовуються в таких дисциплінах, як «Теорія надійності», «Економетрія», «Теорія ризику», «Теорія масового обслуговування» та ін.

Широкому впровадженню математико-статистичних методів дослідження сприяла поява в другій половині XX ст. електронних обчислювальних машин і, зокрема, персональних комп'ютерів. Імовірнісно-статистичні програмні пакети зробили ці методи більш доступними і наочними, оскільки трудомістку роботу по розрахунку різних статистик, параметрів, характеристик, побудову таблиць і графіків став виконувати комп'ютер. А досліднику і користувачу комп'ютера залишилася головним чином творча робота: постановка задачі, побудова математичної моделі, вибір методів розв'язування та інтерпретація результатів.

Відомо, що теорія ймовірностей виникла при розв'язуванні задач, що виникали в азартних іграх. Однак у наш час теорія ймовірностей має стільки ж спільного з азартними іграми як, наприклад, геометрія – з вимірюванням площ при землемірних роботах. «Наука про випадкове» досягла значних успіхів за кілька століть свого розвитку та ще не всі її вершини підкорено.

Література

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А. Н. – М., 1974.

2. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности / Майстров Л. Е. – М., 1980.

3. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном / Гнеденко Б. В. – М., 1981.

4. Шмигевський М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика / Шмигевський М. В., Зелепугіна І. М., Попова Л. С. – К., 2010.

ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ СТОХАСТИКИ

М.В. Шмигевський
м. Київ, Київський національний університет технологій та дизайну

Передісторія теорії ймовірностей

У цей період, початок якого губиться в глибині століть, ставились і розв'язувалися деякі задачі, які пізніше були віднесені до теорії ймовірностей. Ніяких наукових методів розв'язування таких задач на той час ще не було.

Нині важко встановити, хто вперше поставив питання, нехай і в дуже недосконалій формі, про вимірювання самої можливості появи випадкової події. Ще в Стародавньому Китаї, Ірані та Римі були відомі факти стабільності деяких відношень (частот), пов'язаних із демографічними даними, а також із даними про постачання великих міст.

Думка про те, що закони природи проявляються через масу випадкових подій, викладена в поемі Лукреція Кара «Про природу речей» (98–95 рр. до н.е.). Деякі ймовірнісні уявлення мали й інші античні філософи, зокрема Демокріт і Платон.

Певні міркування про випадкове зустрічаються й у літературних творах Середньовіччя. Зокрема, у «Божественній Комедії» видатного поета, «батька італійської літератури» Данте Аліґ'єрі (1265–1321) неодноразово наводяться зауваження про гру в кості (підкидання гральних кубиків) і навіть спроби підрахувати число сприятливих можливостей тієї чи іншої комбінації.

Більш чіткі постановки питань уперше зустрічаються в трактаті «Сума знань» (1487, опубл. 1494), який написав Лука Пачолі (прибл. 1445–1517), італійський математик і монах, автор перших ґрунтовних праць з математики епохи раннього Відродження. До речі, талановиті ілюстрації до праць Луки Пачолі виконав сам Леонардо да Вінчі.

Суттєве просування в розв'язуванні початкових задач імовірнісного характеру пов'язано з іменами італійських учених Нікколо Фонтана (Тарталья) (прибл. 1500–1557) і Джироламо Кардано (1501–1576). У рукопису «Книги про гру в кості» (1526, опубл. 1663) Кардано розв'язав багато задач про підкидання гральних кубиків і випадіння на них того чи іншого числа очок.

У «Загальному трактаті про міру і число» (1556) Тарталья прагнув розв'язати задачу про поділ ставки між гравцями, які не довели гру до кінця. Він знайшов хиби в міркуваннях Луки Пачолі, який раніше досліджував цю задачу. Однак, як з'ясувалося дещо пізніше, і сам Тарталья не уник помилок при розв'язуванні цієї задачі. Та це й не дивно, оскільки на той час ще не було вироблено необхідних понять – поняття ймовірності та поняття математичного сподівання.

Варто зазначити, що у вище вказаному трактаті Тарталья правильно розв'язав деякі задачі комбінаторики. Зокрема, він розглянув задачу про число різних способів, якими можна розсадити 10 осіб на 10 місцях, і знайшов відповідь: $10!=10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Ще він отримав низку комбінаторних тотожностей.

Задачі імовірнісного характеру досліджував також знаменитий італійський учений Галілео Галілей (1564–1642). Він обчислював кількість усіх можливих варіантів при підкиданні трьох гральних кубиків, а також кількість різних способів, якими може бути отримане те чи інше значення суми очок на всіх трьох кубиках. Однак Галілей, як і його попередники, так і не дійшли до поняття ймовірності. Працями цих учених і закінчується передісторія теорії ймовірностей.

Початок історії теорії ймовірностей

Зазвичай вважають, що теорія ймовірностей зародилася в 1654 році в листуванні двох видатних французьких учених – Блеза Паскаля (1623–1662) і П'єра Ферма (1601–1665). Збереглося лише три листи Паскаля і чотири листи Ферма. Самий перший лист Паскаля втрачено і про його зміст можна судити лише за відповіддю Ферма.

Варто зазначити, що зацікавив Паскаля задачами з теорії ймовірностей придворний французького королівського двору кавалер де Мере (1607–1705), який був освіченою людиною, захоплювався філософією та літературою, але водночас був ще й вельми азартним гравцем. Саме він поставив перед Паскалем дві задачі, які поклали початок теорії ймовірностей.

Перша задача. Скільки разів треба підкинути два гральні кубики, щоб шанси отримати хоча б один раз дубль 6-6 (тобто поява одночасно двох шісток), були більші, ніж шанси не отримати жодного разу дубль 6-6.

Друга задача. Два гравці А та В грають у гру, де шанси перемоги для кожного з них однакові. За домовленістю перший, хто виграє шість партій, отримає весь приз (всю ставку). Гру зупинено за рахунку 5:3 на користь гравця А. Як справедливо поділити приз (ставку)?

Паскаль і незалежно від нього Ферма розв'язали обидві задачі, хоча й різними методами. Паскаль писав у листі до Ферма: «Я більше не маю сумнівів щодо правильності отриманого мною результату, оскільки він дивовижно співпадає зі знайденим Вами. Наші думки зустрілися. Я бачу, що насправді істина одна: і в Тулузі, і в Парижі».

Стосовно першої задачі було встановлено, що при 24 підкиданнях шанси отримати хоча б один дубль 6-6 менші 50% (приблизно 49,1%), а при 25 підкиданнях шанси отримати хоча б один дубль більші 50%.

Друга задача виявилася складнішою. До Паскаля та Ферма протягом майже двох з половиною століть цю задачу розглядали як задачу про пропорції. Ділили приз у співвідношенні 5:3 (Пачолі), 2:1 (Тарталья) тощо.

Паскаль та Ферма першими запропонували поділити приз відповідно до ймовірностей виграшу матчу (якби він продовжився) кожним із гравців (гравцю А до перемоги залишилося виграти одну партію, а гравцю В – три партії). Користуючись імовірнісними міркуваннями, незалежно один від одного, ці вчені встановили, що приз треба поділити у відношенні 7:1. Цей результат виявився вельми несподіваним для сприйняття в XVII ст.

Зазначимо, що Паскаль першим почав вживати термін «теорія ймовірностей» для назви нової математичної дисципліни. Він мав намір написати трактат «Математика випадку», в якому, мабуть, хотів систематизувати і викласти отримані ним і Ферма результати. На жаль, свій намір Паскаль так і не здійснив – далася взнаки перевтома, хвороба, вплив релігійних проповідників. Учений упав у тенета страху й містики, відійшов від науки. Усе подальше життя присвятив релігії. Доказ раціональності віри в Бога Паскаль сформулював так: «Якщо Бога не існує, то той, хто вірить у нього, нічого не втрачає, але якщо Бог існує, то той, хто не вірить у нього, втрачає все.»

Що стосується Ферма, то він взагалі писав мало і завжди дуже стисло, окрім цього, не публікував свої праці – вони циркулювали за його життя лише в рукописах. Деякі відкриття він здійснив при листуванні.

Підкреслимо, що в листуванні Паскаля і Ферма зустрічалось і таке важливе поняття, яке згодом отримало назву «математичне сподівання».

Першою і єдиною (до початку XVIII ст.) книжкою з теорії ймовірностей була праця «Про розрахунки в азартних іграх» (1657), яку написав голландський учений Християн Гюйгенс (1629–1695). Спочатку ця праця була опублікована у вигляді додатку до книги «Математичні етюди» його вчителя Франса Ван Схоотена (1615–1660). Згодом була перекладена різними мовами і неодноразово перевидавалась. Цей математичний твір здійснив великий вплив на наступні покоління вчених, які проклали нові шляхи в теорії ймовірностей.

Християну Гюйгенсу належать пророчі слова: «При уважному вивченні предмету читач помітить, що має справу не лише з грою, але що тут закладаються основи дуже цікавої та глибокої теорії».

На початковий етап розвитку теорії ймовірностей суттєвий вплив здійснили не лише азартні ігри, а також і задачі, що виникали в практиці страхових товариств, при обробці результатів астрономічних спостережень та при проведенні статистичних досліджень народонаселення. Перші наукові основи статистики були закладені в працях англійських учених Джона Граунта (1620–1674) та Вільяма Петті (1623–1687). Продовжувачем досліджень Граунта і Петті став Едмунд Галлей (1656–1742), знаменитий астроном (його іменем названа планета Галлея).

До кінця XVII ст. завершився тривалий період накопичення відомостей про випадкові явища, було розв'язано багато задач імовірнісного характеру. Багато вчених із різних позицій підходили до ідеї кількісної оцінки можливості появи випадкової події, до поняття ймовірності. Однак у XVII ст. в явному вигляді поняття ймовірності так і не було введене. Це трапилося лише в XVIII ст., в якому вчені спиралися на міцний фундамент, закладений попередниками.

Протягом XVII–XVIII ст. ще не було усталеної назви для науки, що створювалася. Вживалися назви «вчення про випадкове», «доктрина шансів», «числення ймовірностей» та ін. І лише в XIX ст. стали використовувати сучасну назву «теорія ймовірностей», яка закріпилася після ґрунтовних праць Лапласа.

Період становлення теорії ймовірностей

Уведення поняття ймовірності зайняло тривалий проміжок часу, протягом якого відбувалося вдосконалення формулювань. Класичне означення ймовірності було підготовлене дослідженнями Граунта і Петті, результати яких переконливо показали переваги поняття відносної частоти перед поняттям абсолютної частоти появи події в серії випробувань.

Класичне означення ймовірності (в недосконалому вигляді) вперше з'являється в знаменитому трактаті «Мистецтво припущень» (інший варіант перекладу: «Мистецтво здогадок»), який написав швейцарський учений Якоб Бернуллі (1654–1705). Цей трактат був опублікований у 1713 році вже після смерті вченого його племінником Миколою Бернуллі. Багато фахівців вважають, що саме з цього трактату власне й розпочинається справжня історія теорії ймовірностей.

Я. Бернуллі писав: «Імовірність є ступінь достовірності і відрізняється від неї, як частина від цілого». У це формулювання вчений вкладав сучасний зміст, що видно з його подальших міркувань. Він також володів і статистичним означенням імовірності, а також побудував математичну модель для опису серії незалежних випробувань (схема Бернуллі). Я. Бернуллі сформулював і довів важливу теорему, яку згодом назвали законом великих чисел.

Теорема Бернуллі стверджує, в схемі незалежних випробувань з однаковою ймовірністю появи події в кожному з них, відносна частота події у певному сенсі прямує до ймовірності події. Теорема Бернуллі теоретично обґрунтовує властивість стійкості відносної частоти.

Зазначимо, що в 1837 році французький учений С. Пуассон (1781–1840) узагальнив цю теорему, поширивши її на випадок послідовності незалежних випробувань, коли ймовірності події в різних випробуваннях різні (залежать від номера випробування). Він же вперше ввів термін «закон великих чисел».

Класичне означення ймовірності, запропоноване Я. Бернуллі, сприйняв англійський математик Абрахам де Муавр (1667–1754). Імовірність він означав так: «Отже, ми будуємо дріб, чисельник якого буде число випадків появи події, а знаменник – число всіх випадків, при яких подія може з'явитися чи не з'явитися. Такий дріб буде виражати дійсну ймовірність появи події».

Муавр, як і Бернуллі, спеціально не зазначав, що всі шанси повинні бути рівноможливими. Зауваження про рівноможливість шансів уперше зробив французький учений П'єр Лаплас (1749–1827) у своєму трактаті «Аналітична теорія ймовірностей» (1812). Тому вважають, що саме Лаплас першим дав класичне означення ймовірності (у досконалій формі). Це означення використовують і в сучасних підручниках для школярів та студентів.

Лаплас довів теорему, яка згодом отримала назву «центральна гранична теорема». Найпростішим варіантом центральної граничної теореми є інтегральна теорема Лапласа (опублікована в 1812 р.). Однак частинний випадок цієї теореми був відомий ще А. Муавру (1733), у зв'язку з чим теорему Лапласа досить часто називають теоремою Муавра-Лапласа.

Зазначимо, що Муавру належить пріоритет у введенні поняття незалежності випадкових подій, умовної ймовірності, а також теореми множення ймовірностей. Свої дослідження він виклав у «Доктрині шансів» (1718).

Перше чітке і остаточне формулювання теореми додавання ймовірностей міститься у праці англійського математика Томаса Байєса (1702–1761). Ця праця була зачитана на засіданні Лондонського королівського товариства через два роки після смерті автора. Вона містить означення несумісних подій (у термінології Байєса – нещільних подій). Байєсу приписують також теорему про переоцінку ймовірностей гіпотез. Однак, насправді, ця теорема відсутня у працях Байєса, оскільки він на той час не знав формули повної ймовірності.

Результат, який приписують Байєсу («теорема Байєса»), а також формула повної ймовірності, мабуть, уперше отримали сучасне формулювання у праці Лапласа «Досвід філософії теорії ймовірностей» (1814).

Важливий вклад у розвиток теорії ймовірностей зробив видатний німецький математик, астроном, фізик і геодезист Карл Гаусс (1777–1827). З його іменем пов'язують нормальний закон розподілу ймовірностей, нормальну криву (криву Гаусса), метод найменших квадратів, розробку теорії похибок вимірювань.

У теорії ймовірностей вивчають не лише випадкові події, але й випадкові величини. Уперше це поняття зустрічається в працях Я. Бернуллі, М. Бернуллі та Муавра. Я. Бернуллі розглядав число появ події А в послідовності n незалежних випробувань. У наш час це число розглядають як випадкову величину, що може приймати значення 0, 1, 2, …, n з імовірностями, які визначаються за формулою Бернуллі. Що стосується Муавра, то він фактично отримав нормальний закон розподілу ймовірностей.

Однак ці вчені явно не формулювали нове поняття – поняття випадкової величини, необхідність якого вже визрівала. Я. Бернуллі залишався на рівні схеми випадкових подій. Муавр нормальний розподіл використовував лише для наближених обчислень точних значень шуканих імовірностей.

Перший крок до введення нового поняття зробив Пуассон у мемуарі «Про ймовірності середніх результатів спостережень» (1832). Самого терміну «випадкова величина» в нього ще не було, він говорив про «деяку річ», яка може приймати значення $a_1, a_2, ..., a_n$ відповідно з імовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

Пуассон вивчав також неперервні випадкові величини та щільності їх розподілів. Його термін «річ» не прижився і згодом його перестали використовувати. П.Л. Чебишев у своїх мемуарах із теорії ймовірностей вжив термін «величина» і автоматично припускав незалежними всі випадкові величини, які він розглядав. У працях О.М. Ляпунова вже застосовується термін «випадкова величина» і скрізь, де це необхідно, наголошується, що розглядаються незалежні випадкові величини. О.М. Ляпунов наводить сучасне означення функції розподілу, а також формулу для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини в заданий проміжок.

Поняття математичного сподівання в початковому розумінні зустрічалося ще в листуванні Паскаля та Ферма. У більш явній формі це поняття було введене Гюйгенсом. Термін «сподівання» запропонував Схоотен – учитель Гюйгенса, а термін «математичне сподівання» ввів Лаплас (1795). Ця назва походить від поняття «очікуваного значення виграшу», яке було пов'язане з азартними іграми. Однак у повній мірі поняття математичного сподівання було гідно оцінене й вдало застосоване в дослідженнях П.Л. Чебишева та його учнів.

Період становлення теорії ймовірностей тривав до середини XIX ст.

Основними здобутками цього періоду були: побудова основ аналітичних методів у теорії ймовірностей, виведення нормального закону розподілу, доведення граничних теорем, формування різних уявлень про ймовірність (геометрична ймовірність і статистична ймовірність), застосування імовірнісних методів у природознавстві та інших галузях знань.

Період Петербурзької школи теорії ймовірностей

На міцну математичну основу теорія ймовірностей була поставлена вченими Петербурзької математичної школи, серед яких виділяються основоположник російської школи теорії ймовірностей П.Л. Чебишев (1821–1894) та його талановиті учні А.А. Марков (1856–1922) і О.М. Ляпунов (1857–1918).

П.Л. Чебишев сформулював і довів закон великих чисел (опублікований у 1867 р.) у більш загальній формі, ніж його попередники. Саме П.Л. Чебишев перейшов від розгляду випадкових подій до розгляду випадкових величин і змістив центр досліджень у теорії ймовірностей у бік вивчення випадкових величин. Виявилося, що теореми Бернуллі та Пуассона є окремими випадками теореми Чебишева.

Також варто відзначити, що П.Л. Чебишев сформулював центральну граничну теорему при суттєво загальних умовах (1887). Для доведення своєї теореми П.Л. Чебишев розробив метод моментів. Однак із часом з'ясувалося, що у формулюванні теореми та в її доведенні було допущено ряд неточностей і прогалин. Ліквідував ці недоліки А.А. Марков – учень П.Л. Чебишева (1898).

Дещо пізніше (1901) О.М. Ляпунов (теж учень П.Л. Чебишева) довів центральну граничну теорему при ще ширших умовах. Для доведення своєї теореми О.М. Ляпунов розробив ефективний метод характеристичних функцій, який широко застосовується в сучасній теорії ймовірностей.

Зазначимо, що першою публікацією з теорії ймовірностей у Росії була праця Даниїла Бернуллі «Досвід нової теорії про міру жеребу» («Specimen theoria novae de mensura sortis»), яка опублікована в 1738 році в п'ятому томі «Записок Імператорської Академії наук» («Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae»).

Автором першої роботи з теорії ймовірностей російською мовою був А.Ф. Павловський (1789–1857) – ректор Харківського університету, вчитель М.В. Остроградського. У 1821 р. у Харкові він опублікував науково-популярну брошуру «О вероятности».

Першою російською дисертацією з теорії ймовірностей була магістерська дисертація П.Л.Чебишева «Досвід елементарного аналізу теорії ймовірностей», яку він виконав за пропозицією професора Н.Д. Брашмана на фізико-математичному факультеті Московського університету в

1845 р. і захистив дисертацію в 1846 р., у 25-тирічному віці.

У Санкт-Петербурзі теорією ймовірностей і математичною статистикою активно займалися академік М.В. Остроградський (1801–1861) і академік В.Я. Буняковський (1804–1889), який видав (1846) перший російський підручник «Основи математичної теорії ймовірностей». Ці видатні вчені (до речі, українського походження) відіграли велику роль у розповсюдженні ідей теорії ймовірностей та математичної статистики в Росії та Україні.

Із 1847 р. П.Л. Чебишев розпочав викладати в Санкт-Петербурзькому університеті. Із 1860 р. до нього переходить від В.Я. Буняковського курс теорії ймовірностей, що стало додатковим стимулом для його досліджень у цій галузі. Власне, з цього часу й почала зароджуватися «Петербурзька школа», яка зробила значний вклад у розвиток теорії ймовірностей.

На думку академіка А.М. Колмогорова, П.Л. Чебишев створив російську математичну школу, яка стала найкращою у світі в багатьох галузях математики, зокрема і в теорії ймовірностей. Багато вчених, які належали до «Петербурзької школи» або були учнями її вихованців, створили свої власні математичні школи в Москві, Києві, Одесі, Харкові та багатьох інших містах.

Сучасний період розвитку теорії ймовірностей

Розвиток теорії ймовірностей на початку XX ст. призвів до необхідності перегляду та уточнення її логічних основ, насамперед – самого поняття ймовірності.

Наприкінці XIX ст. французький математик Ж. Бертран (1822–1900) навів ряд парадоксів, пов'язаних із теорією ймовірностей. Видатний французький математик, фізик, астроном і філософ А. Пуанкаре (1854–1912) узагальнив ці парадокси, які підкреслювали нечіткість та неточність деяких означень понять теорії ймовірностей.

Ситуацію, що склалася на той час, досить образно характеризують слова англійського економіста Джона Кейнса (1883–1946): «Для вчених теорія ймовірностей мала присмак астрології та алхімії». Німецький математик Ріхард Мізес (1883–1958) був ще більш критичним: «У наш час теорія ймовірностей не є математичною наукою». А французький учений Поль Леві (1886–1971) вважав, що «в певному сенсі теорії ймовірностей взагалі не існувало – її ще треба було створювати».

Початок XX ст. ознаменувався саме тим, що до логічного обґрунтування теорії ймовірностей виявили серйозний інтерес ряд видатних учених із різних країн. Уперше про це чітко було сказано німецьким математиком Давидом Гільбертом (1862–1943) на Міжнародному конгресі математиків у 1900 році. Серед 23 найголовніших проблем, які сформулював Гільберт на конгресі, шоста проблема саме й полягала в побудові аксіоматичних основ теорії ймовірностей.

У 10–20 рр. XX ст. характер досліджень у теорії ймовірностей багато в чому визначався ідеями теорії множин і теорії функцій. Виявилося, що можна встановити глибокі аналогії між основними поняттями теорії множин і метричної теорії функцій, з одного боку, і основними поняттями теорії ймовірностей – з іншого боку. Так були встановлені аналогії між мірою множини і ймовірністю події, інтегралом і математичним сподіванням.

Уперше такі ідеї стали проникати в теорію ймовірностей завдяки французькому математику Емілю Борелю (1871–1956), починаючи з 1905 року. На базі цих ідей польський математик А. Ломницький (1881–1941) побудував варіант теоретико-множинної аксіоматики теорії ймовірностей. Його велика стаття на цю тему була опублікована в 1923 році.

За шість років до цієї праці, виходячи з інших принципів, С.Н. Бернштейн (1880–1968) запропонував першу за часом аксіоматичну систему теорії ймовірностей (1917). Через два роки (1919) розпочалася публікація статей Ріхарда Мізеса, присвячених критиці основ теорії ймовірностей того часу і побудові підходу, який ґрунтується на статистичній стійкості частот. Саме Мізеса вважають засновником так званої частотної концепції в теорії ймовірностей. Р. Мізес народився у Львові, освіту отримав у Віденському університеті, працював у Франції, Німеччині, Туреччині, США.

У 1925 році з’явилася ґрунтовна книга Поля Леві «Числення ймовірностей». У ній зроблено спробу відійти від традиційної системи викладу матеріалу. У цій книзі теорія ймовірностей пов’язується з теорію множин і теорією міри, хоча й без посилань на статтю А. Ломницького, яка була опублікована на два роки раніше.

Професор Харківського університету С.Н. Бернштейн ще в 1917 році опублікував статтю «Досвід аксіоматичного обґрунтування теорії ймовірностей», а в 1927 році – книгу «Теорія ймовірностей», в якій виклав власну аксіоматику теорії ймовірностей. Ця книга неодноразово перевидавалася і тривалий час вважалася однією з найкращих серед творів світової літератури з теорії ймовірностей.

Однак корінна перебудова всього викладу основних понять теорії ймовірностей, що мала вирішальне значення для прогресу цієї науки в XX ст., була здійснена завдяки глибоким працям Андрія Миколайовича Колмогорова (1903–1987). Його славнозвісна монографія «Основні поняття теорії ймовірностей» спочатку була видана в Берліні німецькою мовою (1933), а згодом у Москві російською мовою (1936 р.; перевидана 1974 р.).

Ця монографія завершила етап побудови теорії ймовірностей як цілісної математичної науки. Завдяки аксіоматизації теорія ймовірностей стала абстрактно-дедуктивною математичною дисципліною, тісно пов’язаною з іншими розділами математики. Після публікації цієї монографії А.М. Колмогорова визнали одним із найвидатніших математиків XX ст. Вважають, що для теорії ймовірностей Колмогоров зробив те ж саме, що Евклід для геометрії: побудував аксіоматичну теорію і отримав глибокі наукові результати.

Варто зазначити, що з цих позицій вдалося побудувати єдиний підхід не лише до понять випадкової події та випадкової величини, але й підготувати базу для побудови теорії випадкових процесів і випадкових полів.

У XX ст. у зв’язку з фізичними, біологічними, інженерними та іншими дослідженнями виникла необхідність розглядати випадкові процеси $\xi(t)$, тобто випадкові функції від однієї незалежної змінної t, під якою, зазвичай, розуміють час.

Поняття випадкового процесу повністю сформувалося в XX ст. і пов’язане з іменами А.М. Колмогорова, О.Я. Хінчина, Є.Є. Слуцького, Н. Вінера. Це поняття у наш час є одним із центральних і широко використовується у різних галузях природознавства, інженерної справи, економіки, організації виробництва.

Початком побудови загальної теорії випадкових процесів стали дві знамениті статті. Першу з них «Про аналітичні методи в теорії ймовірностей» написав А.М. Колмогоров (1931), а другу – «Теорія кореляції стаціонарних стохастичних процесів» написав О.Я. Хінчин (1934).

Значний напрямок у теорії випадкових процесів пов’язаний з іменем С.Н. Бернштейна. По-перше, він увів до розгляду так звані стохастичні диференціальні рівняння, а по-друге, ним уперше було введене поняття мартингалу, значення якого для теорії ймовірностей виявилося дуже важливим.

Паралельно з розвитком загальнотеоретичних концепцій розвивалися й роботи по застосуванню ідей і результатів теорії випадкових процесів до задач фізики, геофізики, теорії турбулентності, теорії масового обслуговування та ін.

Новий розквіт теорії випадкових процесів прийшовся на другу половину XX ст. завдяки дослідженням Х. Крамера, П. Леві, В. Феллера, А.М. Колмогорова, О.Я. Хінчина, Б.В. Гнеденка, Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода, В.С. Королюка, М.Й. Ядренка, Ю.В. Прохорова, В.С. Пугачова, О.О. Боровкова та їх учнів.

У ході створення теорії випадкових процесів відбулося виокремлення ключових понять. Якщо випадкова величина $\xi(t)$залежить від одного дійсного параметра t, то прийнято говорити про випадковий процес $\xi(t)$. При цьому, як правило, параметр t називають часом. Якщо ж час t приймає лише дискретну послідовність значень – t_1, t_2, ..., то вживають назву не «випадковий процес», а «випадкова послідовність». Якщо ж випадкова величина залежить не від одного, а від багатьох аргументів, то її називають «випадковим полем».

В останні десятиліття теорія випадкових полів отримала значний розвиток і перетворилась у могутній засіб розв'язання різноманітних теоретичних і практичних задач.

Особливий і дуже важливий напрям досліджень у теорії ймовірностей розвиває у наш час Срініваса Варадхан (народився в 1940 р. в Індії, працює нині в США). Саме він першим з усіх «імовірносників» світу був удостоєний найвищої математичної премії, а саме Абелівської премії (аналог Нобелівської премії, але лише для математиків).

Академія наук Норвегії прийняла рішення присудити Абелівську премію за 2007 рік С. Варадхану з Інституту математичних наук ім. Куранта, Нью-Йорк (США) «за фундаментальний вклад у теорію ймовірностей, і особливо за створення єдиної теорії великих відхилень».

Теорія великих відхилень займається дослідженням випадків, коли відбуваються рідкісні події. Ця тема може мати конкретні застосування в таких різних галузях, як фізика, біологія, економіка, статистика, інформатика та інженерія.

Закон великих чисел стверджує: ймовірність того, що відхилення буде більшим даного значення, прямує до нуля. Однак, у практичних застосуваннях, знання того, як швидко ймовірність прямує до нуля, має вирішальне значення. Наприклад, який треба мати резерв капіталу, щоб утримувати ймовірність розорення страхової компанії нижче рівня, що вважається прийнятним?

У своїй епохальній праці «Асимптотичні ймовірності і диференціальні рівняння» (1966), а також у своєму оригінальному розв'язанні проблеми поларона в евклідовій квантовій теорії поля (1969), Варадхан почав будувати загальну теорію великих відхилень, яка з часом стала значним внеском у науку.

Теорія великих відхилень Варадхана дає уніфікований і ефективний метод для дослідження великої кількості різноманітних явищ, які виникають у складних стохастичних системах, у таких несхожих галузях, як теорія квантових полів, статистична фізика, економетрія і фінансова математика, оптимізація транспортних задач. Ця теорія також набагато розширила можливості використання комп'ютерів для аналізу виникнення рідкісних випадків.

Протягом останніх сорока років теорія великих відхилень стала наріжним каменем сучасної теорії ймовірностей, як у теоретичній, так і в прикладній математиці.

Варадхан також зробив вагомий внесок і в інші розділи теорії ймовірностей. Зокрема, він розвинув мартингальний метод для опису процесів дифузії, як, наприклад, розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь. Іншою важливою темою є аналіз гідродинамічних границь, які описують макроскопічну поведінку дуже великих систем частинок, що знаходяться у взаємодії.

Внесок Варадхана в науку має велику концептуальну значимість. Його ідеї продовжують здійснювати вплив, і ще тривалий час будуть залишатися стимулом для подальших наукових досліджень.

Київська школа теорії ймовірностей

Київська школа протягом XX ст. здобула великий авторитет у науковому світі та широке міжнародне визнання.

Першими дослідниками теорії ймовірностей в Україні були С.Н. Бернштейн та М. П. Кравчук (1892–1942) – академіки, математики світової слави.

Інтенсивний розвиток Київської школи теорії ймовірностей розпочався з 1950 року, коли академік Борис Володимирович Гнеденко очолив кафедру теорії ймовірностей та алгебри в Київському університеті.

Б.В. Гнеденко приніс в університет дух і традиції славетної Московської школи теорії ймовірностей А.М. Колмогорова та О.Я. Хінчина, учнем яких він був. Насамперед, це активне залучення молоді до самостійних досліджень, підтримка молоді в складних життєвих ситуаціях.

Першими його учнями були майбутні академіки В.С. Королюк, В.С. Михалевич, А.В. Скороход, які зробили фундаментальний внесок у розвиток багатьох напрямків теорії ймовірностей і сприяли утвердженню позицій школи.

Важливу роль у розвитку української школи теорії ймовірностей мала наукова і педагогічна діяльність чл.-кор. НАН України Й.І. Гіхмана в Київському (1947–1966 рр.) та Донецькому (1966–1985 рр.) університетах.

Окрім вище згаданих, найбільш відомими представниками Київської школи теорії ймовірностей є академіки НАН України Ю.Л. Далецький, І.М. Коваленко; члени-кореспонденти НАН України В.В. Анісімов, М.І. Портенко, М.Й. Ядренко; доктори наук М.С. Братійчук, В.В. Булдигін, Г.П. Буцан, В.Л. Гірко, Д.В. Гусак, А.А. Дороговцев, В.О. Дубко, І.І. Єжов, О.К. Закусило, О.В. Іванов, М.В. Карташов, Ю.В. Козаченко, Є.О. Лебедєв, М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура, М.П. Моклячук, Д.С. Сільвестров, А.Ф. Турбін, В.М. Шуренков та ін.

У 1970 р. Київський університет почав видавати журнал «Теорія ймовірностей та математична статистика». Із 1974 р. журнал перекладається Американським математичним товариством і має світове визнання фахівців.

Література

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А. Н. – М., 1974.

2. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности / Майстров Л. Е. – М., 1980.

3. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном / Гнеденко Б. В. – М., 1981.

4. Шмигевський М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика / Шмигевський М. В., Зелепугіна І. М., Попова Л. С. – К., 2010.

Наукове видання

Теорія та методика навчання

математики, фізики, інформатики

Випуск VIII

В 3-х томах

Том 1

Підп. до друку 16.03.10
Папір офсетний №1
Ум. друк. арк. 11,7

Формат 80×84 1/16
Зам. №1-1603
Наклад 300 прим.

Жовтнева друкарня
50014, м. Кривий Ріг, вул. Електрична, 5
Тел. (0564) 407-29-02

E-mail: semerikov@gmail.com