Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск XI

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КМІ
2013

ВИКОРИСТАННЯ ІСТОРИЧНИХ ВІДОМОСТЕЙ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Л. О. Черних[α], І. М. Горяна[β]
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
[α] laracher@pochta.ru
[β] inna-goryanaya@mail.ru

Математика в усі часи була важливою складовою частиною культури людського суспільства, а тому історія математики є невід'ємною частиною загальної історії. Глибоке розуміння математики в цілому неможливе без знання її минулого, без вивчення, формування та розвитку її основних ідей. Історія математики володіє величезним виховним впливом. Це твердження відноситься до всього спектру уявлень про виховання: формування потреби до праці, відповідальності за доручену справу, високої моральності; розвиток наукової цікавості, тобто бажання не тільки придбати знання, але й примножити їх. Знайомство з біографіями видатних учених, з методами їх роботи впливає на формування характеру учнів, їх ідеалів і високих прагнень. Не можна обійти ще один аспект – вивчення історії математики сприяє розвитку мислення. Великий натураліст, математик та історик Г. В. Лейбніц підкреслював, що історія математики вчить мистецтву відкриттів [1]. Слід зазначити, що питаннями історії математики серйозно займаються не тільки фахівці в цій галузі, але й представники різних математичних дисциплін.

Введення елементів історії науки в шкільний курс математики, звичайно ж, сприяє формуванню діалектико-матеріалістичного світогляду учнів. Ґрунтуючись на відомостях з історії математики, можна показати, що математика виникла з практичних потреб людини, що вона розвивається в результаті розумової та практичної діяльності людей протягом тисячоліть.

Завдання вчителя математики – показати школярам, що початкові математичні поняття, зв'язки між ними, математичні закономірності, аксіоми, методи математики – все це результат абстракції від об'єктів матеріального світу, узагальнення його властивостей і явищ, так званої ідеалізації. Досліджувані в школі властивості, правила, теореми – це узагальнення тисячолітнього досвіду людства. Вони отримані в результаті пізнання навколишнього світу, перевірені практикою, а не дані в готовому вигляді [2]. Таким чином, якщо до викладання математичних понять, термінів, символів підійти з позиції історичного розвитку, то вони перестануть здаватися штучними та відірваними від життя. Значення впливу інтересу до предмета на засвоєння програмного матеріалу загальновідоме, тому створення інтересу до досліджуваного розділу, теми уроку є одним із неодмінних першорядних завдань вчителя. Досвідчений вчитель ніколи не почне виклад нової теми, не кажучи вже про новий розділ математики, без належної вступної частини, що збуджує інтерес і увагу учнів. На наш погляд, там, де це виправдано програмою та метою уроку, такою вступною частиною може і повинна бути 3–5 хвилинна захоплююча розповідь, пов'язана з історією математики.

Як свідчить практика, вчителі дуже рідко використовують на уроках математики історичні відомості. Причиною цьому є недостатня кількість навчального часу, бажання приділити більше уваги на закріплення навчального матеріалу, і звісно, те, що в буденній тяжкій роботі про історію математики просто забувають. Проте більшість учителів розуміють, що повідомлення відомостей з історії математики, корисне в пізнавальному плані, воно сприяє формуванню в учнів діалектико-матеріалістичного світогляду, підвищує інтерес і зацікавленість учнів, має велике світоглядне та загальнокультурне значення і може надати виховний вплив.

В останній час в різних напрямах людської діяльності надзвичайно широкого значення набули задачі, пов'язані з проблемою оптимізації. Особливо корисними в сучасній школі завдяки тісному зв'язку з життєвим досвідом дітей, є так звані екстремальні (оптимізаційні) задачі, тобто задачі, в яких за певним критерієм потрібно вибрати найкращий розв'язок серед кількох можливих. Загальні методи розв'язування багатьох видів таких задач вивчаються у диференціальному численні. Але більшість з них можна розв'язувати елементарними способами, використовуючи властивості деяких функцій та геометричних фігур, тотожні перетворення алгебраїчних та тригонометричних виразів [6]. Учням можна дати таке пояснення: «Серед різних математичних задач зустрічаються задачі, в яких потрібно знайти найкращий варіант, найкоротший шлях, найбільше число із заданими властивостями. У математиці таким проблемам відповідає цілий клас задач, в яких при заданих обмеженнях потрібно відшукати найбільше (максимальне) або найменше (мінімальне) значення деякої функції. Обидва поняття – максимум і мінімум – об'єднуються одним терміном «екстремум».

На жаль, завданням «на екстремум» у шкільному курсі математики приділяється явно недостатня увага. В кращому випадку школярі старших класів вміють знайти екстремум найпростіших функцій за допомогою похідної. Разом з тим різноманітні сюжети задач на екстремум бувають досить привабливими. Тим більше для зацікавленості учнів при розв'язуванні таких задач доцільним може бути застосування історичних відомостей. Розглянемо детальніше деякі історичні відомості про такі задачі.

Екстремальними задачами людство цікавилося ще з античних часів. У Стародавній Греції ще до VI ст. до н.е. знали про екстремальні задачі, про екстремальні властивості круга і кулі: серед плоских фігур з однаковим периметром найбільшу площу має круг (розв'язання ізопараметричної екстремальної задачі); куля має максимальний об'єм серед просторових фігур з однаковою площею поверхні. Історія зберегла легенду про давню екстремальну задачу, відому як задача Дідони. Фінікійська цариця (IX ст. до н. е.) вирішила оселитися на березі затоки в Північній Африці. Вона домовилася з вожаком племені віддати їй таку частину землі, яку можна охопити шкірою вола. Воїни Дідони розрізали шкіру на тоненькі шматочки, і Дідона захватила ременем, пошитим із цих шматків, частину землі на березі затоки. Так виникло місто Карфаген. Задача Дідони полягає в заданні форми границі ділянки, що має задану довжину, при якій площа ділянки максимальна. Якщо знати максимальні властивості круга, то розв'язання можна отримати негайно: границя ділянки представляє частину кола, що має задану довжину [3].

Після загибелі античної цивілізації наукове життя в Європі стало відроджуватися лише в XV столітті. Екстремальні задачі виявилися серед тих, якими цікавилися кращі мислителі того часу. Якщо в античні часи задач на екстремум досліджувалися лише геометричними методами, то в XVII ст. з'явилися загальні методи вивчення таких задач, які й сприяли виникненню диференціального та інтегрального числення. Перші елементи математичного аналізу були створені Й. Кеплером (1615 рік), котрий пояснив своє відкриття так: «Мені як гарному господарю було потрібно запастися вином і я купив декілька діжок. Через деякий час прийшов продавець – виміряти місткість діжок для того, щоб визначитися з ціною. Для цього він опустив у кожну діжку металевий прут і, не звертаючись ні до яких обчислень, негайно сказав, скільки вина в кожній діжці». Після роздумів Й. Кеплер відкрив секрет такого простого вимірювання об'єму діжок. Виявилося, що бондарі за довгу історію навчилися виготовляти бочки такої форми, при якій вони мали найбільший об'єм при заданій довжині мокрої частини прута. Відкриття Й. Кеплером основної властивості екстремумів спочатку було оформлене П. Ферма у вигляді теореми для многочленів, а потім І. Ньютоном і Г. В. Лейбніцем для довільних функцій. Зараз вона носить назву теореми Ферма, згідно якої в точці екстремуму x_0 неперервної функції $f(x)$ її похідна дорівнює нулю [4].

З тих пір дослідження функцій за допомогою аналізу нескінченно малих величин стало одним з наймiцніших математичних методів, що спонукало виникнення сучасного математичного аналізу. З екстремальними задачами пов'язано і зародження основ іншого розділу сучасної математики – функціонального аналізу. В 1696 р. Й. Бернуллі опублікував статтю з запрошенням до всіх математиків розв'язати наступну задачу. У вертикальній площині задано дві точки, що не лежать на одній вертикалі. Необхідно з'єднати ці точки такою неперервною лінією, щоб кулька скочувалася по ній без дії опору і пройшла шлях від верхньої точки до нижньої за найменший час. Через рік цю задачу, що зараз називається «задача про брахістохрон», розв'язали І. Ньютон, Я. Бернуллі, Г. В. Лейбніц і сам Й. Бернуллі.

Теорія екстремальних задач в XVIII – XIX ст. відігравала важливу роль в інших розділах науки, особливо в механіці та фізиці. За допомогою теорії екстремальних задач можна ефективно знаходити не тільки стан рівноваги, а й складати математичні моделі, досліджувати їх поведінку для різних механічних, фізичних процесів. В основі такого підходу лежить принцип Ферма, відкритий в геометричній теорії світла. Він вивів цей закон із наступного принципу: при русі з однієї точки в іншу світло вибирає найкоротший шлях – шлях, котрий воно може пройти за найменший час.

З кінця XVII до середини XX ст. теорія екстремальних задач пройшла великий шлях. В її розвитку взяли участь майже всі великі математики: К. Т. В. Вейєрштрасс, У. Р. Гамільтон, Й. К. Ф. Гаусс, Д. Гільберт, Х. Гюйгенс, П. Г. Діріхле, та інші. До середини XX ст. склалося враження, що теорія екстремальних задач досягла такого рівня, який дозволяє розв'язати будь-яку екстремальну задачу, що виникає в науці та практиці. До середини XX ст. математика мало використовувалась для розв'язування прикладних задач. Ситуація почала помітно змінюватися напередодні другої світової війни. В економіці та техніці стали виникати задачі, для розв'язання яких практичного досвід і здоровий глузд були вже недостатніми. Це було пов'язано зі збільшенням можливих варіантів вибору, посилюванням вимог до точності розв'язання, з обмеженням на доступні ресурси. Людство стало все енергійніше переходити від використання тільки природних ресурсів до створення штучних матеріалів, систем. Різко підвищився вплив людської діяльності на навколишнє середовище [4]. Всі ці та інші обставини поступово змушували більш науково підходити до розв'язання практичних завдань. Науковий підхід припускає складання математичної моделі досліджуваного практичного явища чи процесу, дослідження моделі відповідними математичними методами, складання алгоритмів розв'язання і реалізацію цих алгоритмів у вигляді програм для ЕОМ. В теорії екстремальних задач нові явища XX ст. вперше були помічені радянським математиком Л. В. Канторовичем. Економістів цікавило питання, щонайкраще розрізати лист фанери, щоб відходи були мінімальними. Л. В. Канторович показав, що ця задача та багато інших практичних задач можуть бути сформульовані у вигляді деякої екстремальної задачі, яка записується як система нестрогих лінійних нерівностей.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

де $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ \ldots \qquad x_n \ge 0.$

Головна особливість цієї задачі полягає в тому, що в її умові присутні нестрогі нерівності. Звісно, з нерівностями вчені зустрічалися і раніше та знаходили для кожного випадку спеціальні прийоми розв’язання. Л. В. Канторович першим чітко заявив, що нестрогі нерівності типові для більшості практичних задач і для їхнього розв’язання в математиці немає загальних ефективних методів. Він же запропонував декілька прийомів розв’язання нового класу екстремальних задач, але завершити роботу завадила Друга світова війна. З початку 50-х років новий розділ екстремальних задач такого типу почав називатися лінійним програмуванням. Він став першим розділом сучасної теорії екстремальних задач, яка відрізняється від класичної теорії наявністю в ній методів розв’язання задач з нестрогими нерівностями і породжуваними останніми замкнутими множинами. Теорія екстремальних задач продовжує розвиватися і в наші дні.

За всю історію розвитку математики накопичилася велика кількість красивих, важливих, яскравих та цікавих екстремальних задач з геометрії, алгебри, фізики. У їхньому розв’язанні брали участь видатні вчені минулих епох – Евклід, Архімед, Аполлоній, Тарталья, Торрічеллі, Йоганн і Якоб Бернуллі, І. Ньютон та багато інших. Розв’язання конкретних задач стимулювало розвиток теорії, і в результаті були вироблені прийоми, що дозволяють єдиним методом розв’язувати задачі найрізноманітнішої природи [6].

Як зазначалось вище, розв’язування на уроках математики задач на екстремум історичного походження сприяє поглибленню і збагаченню математичних знань, дозволяє вчителю зробити процес навчання більш цікавим, сприяє розвитку і вихованню учнів. Задачі зазначеної цільової спрямованості можуть бути досить різноманітні: за формою, в якій вони представлені; за дидактичною метою, якій вони служать; за місцем в процесі навчання.

Розглянемо деякі історичні задачі в сучасному формулюванні.

<u>Задача Тартальї.</u>

Розділити число 8 на такі дві частини, щоб їх добуток, помножений на їх різницю, був максимальним.

Розв'язання.

Позначимо через x найменше із чисел, тоді $(8 - x)$ – друге число.

1. $f(x) = x(8 - x)\,(8 - 2x) \to max, \qquad 0 \le x \le 4.$

2. Необхідна умова екстремума функції: $f'(x) = 0$, отже

$f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 64$

$f' = 6x^2 - 48x + 64$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 24x + 32 = 0$

$D = 192$

$x_1 = 4 - 4\sqrt{3}\,/\,3$

$x_2 = 4 + 4\sqrt{3}\,/\,3$

3. Необхідна умова екстремуму виконується в точках x_1 і x_2. Другий корінь є більшим.

<u>Відповідь</u>: $x = 4 \pm 4\sqrt{3}\,/\,3$.

<u>Задачі Дідони.</u>

1. Укажіть таку форму земельної ділянки, котра при заданій довжині периметра L мала б найбільшу площу. Розв'язком цієї задачі буде коло.

2. Серед усіх дуг довжиною L з кінцями в заданих точках (0, 0) і (0, a), які лежать на відрізку $0 \le 0 \le a$, $y \ge 0$, знайти таку, яка разом із відрізком, що сполучає кінці дуги, обмежила б фігуру найбільшої площі. Розв'язком цієї задачі є дуга кола.

<u>Задачі Евкліда.</u>

1. На земельній ділянці, яка має форму трикутника ABC, потрібно побудувати будинок прямокутної форми так, щоб він прилягав до сторони ділянки AC (рис. 1). Відомо, що $AC = 40$ м, $h = 20$ м. Яку найбільшу площу ділянки може зайняти будинок?

<u>Розв'язання</u>.

Нехай $MN = x$, $MK = y$. Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta NBP$, то $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{NP}{BE}$ або $\dfrac{40}{20} = \dfrac{y}{20 - x}$. Отже, $y = 40 - 2x$,

[виділимо повний квадрат]

$S_{max} = 200;\ \ x = 10,\ \ y = 20.$

<u>Відповідь</u>: 200 м^2.

2. В даний трикутник ABC вписати паралелограм $ADEF$, який має

найбільшу площу. Легко довести, що розв'язком цієї задачі буде паралелограм, вершини *D*, *E*, *F* якого ділять навпіл відповідні сторони трикутника (рис. 2).

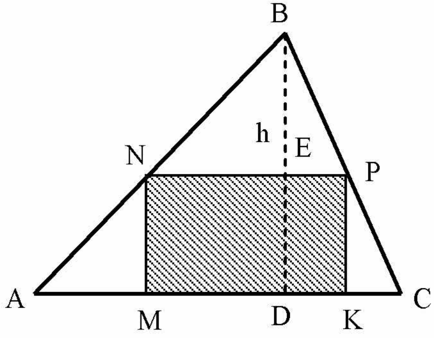

Рис.1

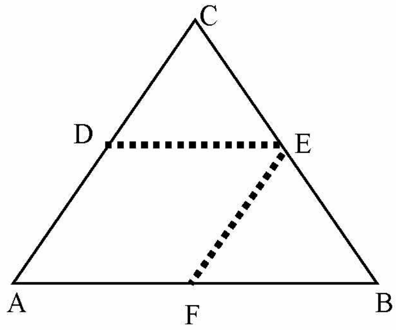

Рис.2

Висновок. Використання принципу історизму в процесі навчання розв'язування задач на екстремум в курсах природничо-математичних дисциплін є ефективним засобом збудження інтересу до навчальної дисципліни, стимулює пізнавальну активність, сприяє більш свідомому засвоєнню відповідного навчального матеріалу.

Список використаної літератури

1. Бевз В. Г. Історія математики / В. Г. Бевз. – Харків : Основа, 2006. – 176 с.

2. Белобородова С. В. Об историко-генетическом методе / С. В. Белобородова // Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 7–9.

3. Возняк Г. М. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4-8 классов : кн. для учителя / Г. М. Возняк, В. А. Гусев. – М. : Просвещение, 1985. – 144 с.

4. Габасов Р. Ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях [Электронный ресурс] / Р. Ф. Габасов // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 115-120. – Режим доступа : http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9706_115.pdf

5. Глейзер Г. И. История математики в школе / Г. И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1964. – 376 с.

6. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах / В. М. Тихомиров. – 2-е изд., исправленное. – М. : МЦНМО, 2006. – 200 с.