Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск XI

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КМІ
2013

ДОВЕДЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТВЕРДЖЕНЬ І ЗАДАЧ ТА ЇХ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВИТКУ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ

І. В. Школа, П. І. Ульшин
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
ilona_shkola@rambler.ru

Історія розвитку математики стверджує, що перші геометричні задачі з'явилися у стародавніх народів Єгипту і Вавилону близько XX ст. до н. е. Їхня поява була зумовлена практичними потребами: вимірюванням відстаней, обмеженням площ земельних ділянок, визначенням об'ємів будівельних робіт. Для розв'язування таких задач експериментальним шляхом були знайдені правила, за якими стверджувалося: «Роби так!».

Так розв'язувались геометричні задачі в той період і в Стародавній Греції. Проте, починаючи з VI ст. до н. е., греків зацікавило питання: Чому? – треба робити так. Перший із грецьких мислителів, який почав з'ясовувати такі питання, був Фалес Мілетський (бл. 624–548 рр. до н.е.). Він організував іонійську школу і разом зі своїми учнями почав здійснювати доведення різних тверджень. Для доведення він запропонував користуватись очевидними твердженнями, тобто безперечними, і називалися вони аксіомами.

У школі Фалеса були зроблені наступні доведення: діаметр ділить коло навпіл; кут вписаний у півколо є прямим; у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні; вертикальні кути, утворені двома прямими, – рівні; паралельні прямі ділять сторони кута на пропорційні відрізки (теорема Фалеса); трикутник визначається двома сторонами і прилеглим до них кутом.

Другим творцем теоретичної математики в Стародавній Греції був Піфагор Самоський (бл. 580-500 рр. до н.е.). Він був засновником піфагорійської школи. Піфагорійці, користуючись аксіомами, перетворили раніше відомі правила, знайдені експериментальним шляхом, у наукові положення, обґрунтовані точними доведеннями.

Піфагору і його учням належать наступі доведення в геометрії: сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°; властивості подібних трикутників; властивості паралелограмів і прямокутників; теореми про рівновеликі фігури. Теорема Піфагора стала найвеличнішим досягненням піфагорійської школи.

У VI ст. до н. е. давньогрецькі вчені Гіппократ Хіоський, Демокріт, Левкіпп, Февдій та ін. намагалися систематизувати нагромаджений їх попередниками теоретичний матеріал.

Найбільш вдалим твором із систематизації геометричних знань була праця давньогрецького вченого Евкліда, написана у III ст. до н.е. під назвою «Начала». Для обґрунтування геометрії Евклід використав розроблений ним аксіоматичний метод.

Протягом трьох століть вчені Стародавньої Греції створили теорії, глибину яких по-справжньому змогли зрозуміти й оцінити лише математики XIX і XX століть.

Проблема навчання доведенням досліджувалась багатьма відомими математиками, та, незважаючи на довготривалість досліджень, методика навчання учнів доказово мислити на сучасному етапі не досить досконала. В зв'язку з цим дана тема є *актуальною.*

Доведення – це логічне міркування, при якому встановлюється істинність або хибність будь-якого твердження. При доведенні теореми (або задачі) завжди спираються на аксіоми, або на раніше доведені твердження. Навчання учнів доведення тверджень вважається одним із найскладніших етапів формування логічного мислення. У програмі шкільного курсу математики значне місце відведено розв'язуванню задач на доведення, в яких також висувається вимога довести твердження. Ці задачі складають майже третину від обсягу всіх задач, що пропонуються для розв'язування учням старших класів. Задачі на доведення зустрічаються і у навчальному матеріалі для учнів початкової школи, що закладає фундамент для подальшого свідомого вивчення і розуміння учнями такої галузі математики, як геометрія.

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень: синтетичним, аналітичним, аналітико-синтетичним, методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія і подібність). Розглянемо більш докладно найпоширеніші методи, що застосовуються при доведенні геометричних теорем та задач.

Синтетичними називаються міркування, які здійснюються при доведенні математичних тверджень, коли хід думок спрямований від умови до вимоги. Будь-яку задачу коротко можна записати так: $A \Rightarrow X$, де A – умова задачі, X – її вимога. Знаючи умову A, можна дібрати послідовність тверджень A^1, A^2, ..., A^n, X, які безпосередньо випливають з A. Схематично такі міркування можна представити так:

$$A \Rightarrow A^1 \Rightarrow A^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^n \Rightarrow X$$

Проте синтетичні міркування не позбавлені недоліків: важко здогадатися, в якому напрямі необхідно спрямувати хід думок, щоб прийти до вимоги задачі. Це ускладнює самостійне використання цього методу учнями при доведенні тверджень. Але він має і свої переваги: переконливість, лаконізм, простота з логічної точки зору.

На відміну від синтетичних міркувань, більш досконалими є аналітичні міркування. Такі міркування виступають у двох основних формах: *низхідного аналізу* (описав Евклід), *висхідного аналізу* (ввів Папп).

Схема міркувань при аналізі Евкліда має наступний вигляд:

$$X=>A^{n}=>\ldots=>A^{2}=>A^{1}=>A,$$

але такі міркування не можна вважати строгими доведеннями.

Аналіз Евкліда зручно використовувати при пошуку способу розв'язання нестандартних задач. Якщо напрям думок знайдено, подальші доведення здійснюють за допомогою синтетичних міркувань. Такий процес розв'язування задач можна представити у вигляді наступної схеми:

(міркування при аналізі Евкліда) (синтетичні міркування)

$$X=>A^{n}=>\ldots=>A^{2}=>A^{1}=>A,\ A=>A^{1}=>A^{2}=>\ldots=>A^{n}=>X.$$

У такому випадку говорять, що задачу розв'язано аналітико-синтетичним методом. При аналізі Паппа схема міркувань має наступний вигляд:

$$X<=A^{n}<=\ldots<=A^{2}<=A^{1}<=A.$$

Висхідний аналіз має доказову силу і є методом доведення математичних тверджень.

Даний метод має недолік. Використовуючи аналітичний метод при доведенні твердження можна отримати багато сторонньої інформації, серед якої доведеться вибирати лише необхідну вам у відповідності з умовою задачі. Даний метод має свої переваги, оскільки його можна застосовувати при розв'язуванні складних задач. Так, при його використанні складну задачу можна розбити аналітичними міркуваннями на ряд більш простих задач, а потім за допомогою синтезу поєднати розв'язки цієї задачі в єдине ціле.

Метод доведення від супротивного використовується в шкільному курсі досить часто, інколи навіть виявляється найпростішим способом доведення певного твердження. Користуються цим методом так:

1) припускають, що висновок теореми є хибним, і формулюють твердження, протилежне до цього висновку;

2) доводять, що це твердження або його наслідки суперечать умові теореми або якійсь аксіомі чи вже доведеній теоремі;

3) роблять висновок, що зроблене припущення про те, що висновок теореми є хибним, само є хибним. А із цього випливає, що висновок теореми є істинним.

Цей метод викликає в учнів певні труднощі, адже психологічне сприйняття факту доведення, формування заперечення висновку теореми є складною абстрактною мисленнєвою діяльністю. Але не дивлячись на всі його недоліки, цей метод є одним з найпоширеніших методів, які застосовуються при розв’язуванні задач на доведення як в планіметрії, так і в стереометрії.

Метод математичної індукції – один з важливих методів доведення математичних тверджень, який ґрунтується на принципі математичної індукції: якщо твердження $T(n)$, залежне від натурального числа n, істинне для $n=1$ і з припущення про те, що воно істинне для $n=k$ випливає його істинність і для натурального числа $n=k+1$, то це твердження істинне при всіх натуральних значеннях n. Принцип математичної індукції – одна з аксіом арифметики натуральних чисел (аксіом Пеано).

Реалізація на практиці цього методу здійснюється за наступною схемою:

1) перевіряється істинність твердження при $n=a$, де a – найменше з допустимих значень;

2) припускається, що воно істинне для $n=k>a$;

3) доводиться, що з пунктів 1) і 2) випливає істинність твердження для $n=k+1$.

4) робиться висновок про істинність твердження $T(n)$ для всіх натуральних значень $n\geq a$.

Розглянемо цікаві геометричні задачі на доведення, які використовуються в шкільному курсі геометрії.

<u>*Задача* 1</u>. (теорема-властивість кутів) Якщо дві прямі паралельні, то при їх перетині січною різносторонні кути рівні.

<u>Дано</u>: a, b, c – прямі на площині, $a||b$, c – січна.

Довести: $\angle 1=\angle 2$ (рис. 1).

Доведення:

1. Припустимо, що $a||b$ і c – січна, що їх перетинає, але не вірно, що утворені різносторонні кути рівні, тобто $\angle 1\neq\angle 2$.

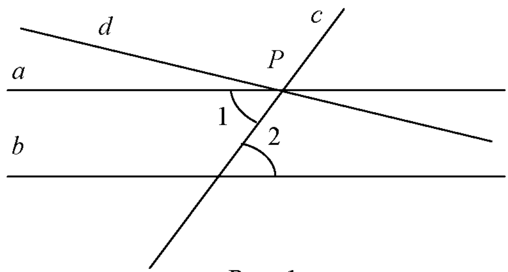

Рис. 1

2. Проведемо через точку P перетину прямих a і c пряму d так, щоб різносторонні кути, утворені січною c і прямими b і d, були рівними. Тоді за ознакою паралельності прямих прямі b і d паралельні. Одержуємо, що через точку P проходять дві прямі, a і d, паралельні прямій b. А це суперечить аксіомі паралельних прямих.

3. Ми припустили, що при перетині паралельних прямих січною різносторонні кути не рівні і прийшли до протиріччя. Отже наше при-

пущення не вірне. Дана теорема є істинним твердженням.

<u>Задача 2</u>. Ребра DA, DB, DC тетраедра $ABCD$ перпендикулярні між собою; a, b, c – довжини ребер DA, DB, DC, h – висота, яка опущена з вершини D (рис. 2). Довести, що $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

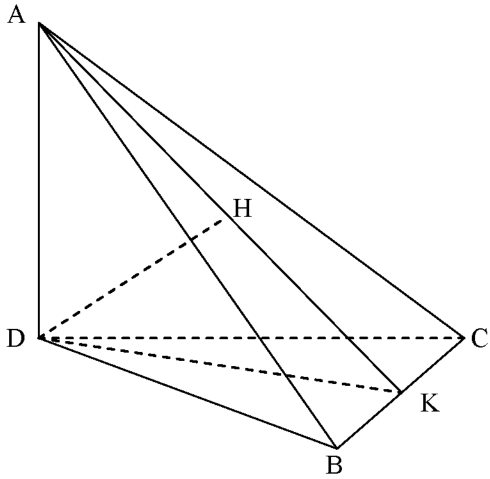

Рис. 2

<u>Доведення</u>:

Оскільки бічні грані тетраедра є прямокутними трикутниками, то AD є перпендикулярною до площини ΔBDC. Значить AD і DK є перпендикулярні і ΔADK – прямокутний. І за результатом допоміжної задачі для висоти DH і катетів DA і DK цього трикутника має місце рівність:

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DK^2};$$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{DK^2};$$

Покажемо, що DK є висотою прямокутного ΔBDC. Справді, AD є перпендикулярною до площини ΔBDC, отже AD і BC або BC і AD є перпендикулярні. Оскільки DH перпендикулярна до площини ΔABC, то DH і BC або BC і DH є перпендикулярні. Таким чином маємо, що BC перпендикулярна до площини, визначеної прямими AD і DH. Тобто BC перпендикулярна до площини ΔADK. Отже, BC і DK – перпендикулярні. Значить DK є висота у прямокутному ΔBDC. За аналогічною планіметричною задачею маємо, що: $\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DB^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$;

І одержуємо: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.