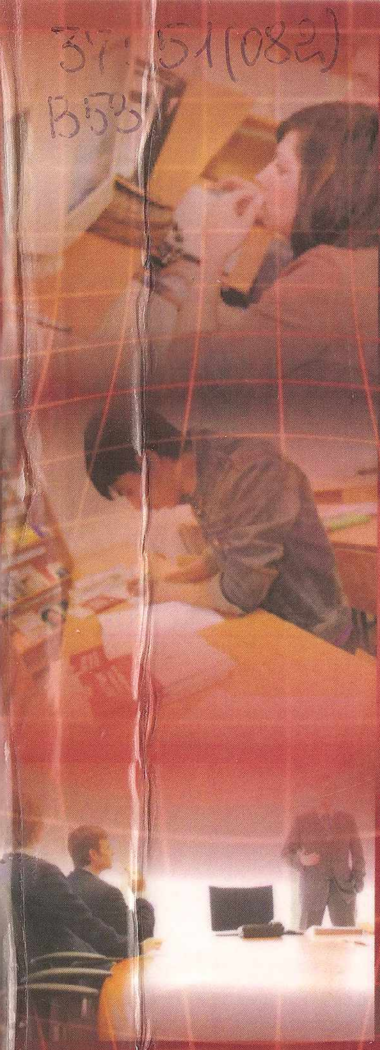


ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО ДОСЛІДНОГО ЦЕНТРУ

“ЛЮДИНА: МОВА, КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ”

ТОМ 42
2018

С.С. ГАБ, В.В. КОРОЛЬСЬКИЙ

УДК 517.521:514.172.4

ЧИСЛОВІ РЯДИ, ЯКІ ПОВ'ЯЗАНІ З ПАРАМЕТРАМИ ДОДЕКАЕДРА

У статті розглядається одержання «сігма-моделей» числового знакододатного ряду за допомогою нескінченої послідовності вписаних додекаедрів в додекаедр зі стороною a = 1. Одержані ряди мають різні види їх геометричної інтерпретації, що дає можливість ефективної реалізації дидактичного принципа наочності при вивченні одного із основних розділів математичного аналізу «Числові ряди».

Ключові слова: *числовий ряд, «сігма-модель» числового ряду, геометрична інтерпретація членів ряду, додекаедр.*

The article deals with the obtaining of "sigma-models" of the numerical log-coded series by means of an infinite sequence of inserted dodecaheders in the dodecahedron with the side a = 1. The resulting series have different types of their geometric interpretation, which makes it possible to effectively implement the didactic principle of visibility when studying one of the main sections of the mathematical analysis "Numerals".

Keywords: *numerical series, "sigma-model" of a numerical series, geometric interpretation of members of a series, dodecahedron.*

Постановка проблеми. В сучасних підручниках теорія числових рядів базується на використанні знакових моделей числових рядів. Знакові моделі і їх застосування при вивченні математичного аналізу можуть бути більш доступними для вивчення числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації членів ряда.

Аналіз актуальних досліджень. В існуючих підручниках і посібниках з математичного аналізу, де одним з розділів є «Ряди», а також в окремих джерелах, пов'язаних з числовими рядами не спостерігається використання візуалізації членів рядів за допомогою їх геометричної інтерпретації. Дослідження зв'язку «сігма-моделей» числових рядів і їх геометричної інтерпретації продемонстровані в роботах [1].

Мета статті – показати приклад одержання числового ряда і його «сігма-моделі» за допомогою геометричної інтерпретації членів ряда, побудованої з використанням параметрів нескінченної кількості додекаедрів вписаних в додекаедр зі стороною $a = 1$.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо додекаедр зі стороною $a = 1$ (рис.1). Для того, щоб отримати множину вписаних додекаедрів виконаємо послідовність наступних дій:

1) проведемо до кожної сторони серединні перпендикуляри;

2) якщо середини відрізків сполучити одержимо наступний додекаедр який вписаний в заданий (рис.2);

3) на подальших кроках побудови, по аналогії, потрібно провести серединні перпендикуляри до кожної сторони попередньо вписаного додекаедра, та сполучити їх, отримаємо послідовність вписаних додекаедрів (рис.3).

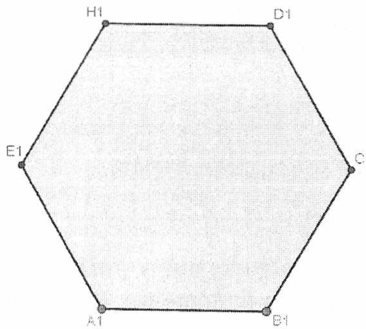


Рис.1

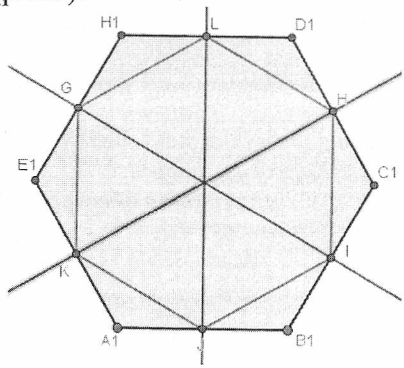


Рис.2

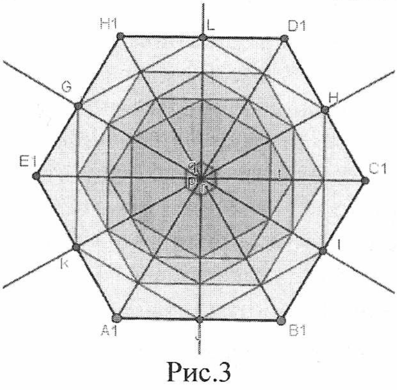


Рис.3

На першому кроці досліджень має місце додекаедр сторона якого $H_1D_1 = 1$ см. Для того, щоб одержати вписаний додекаедр в даний, розглянемо $\Delta\ D_1LO$: LO – серединний перпендикуляр, тому $\angle D_1\,LO = 90^\circ; D_1L = \frac{1}{2}H_1D_1 = \frac{1}{2}; OD_1 == H_1D_1 = 1$ (оскільки навколо правильного шестикутника можна описати коло, радіус якого дорівнює довжині сторони вписаного шестикутника, OD_1 – радіус описаного кола) (рис.4).

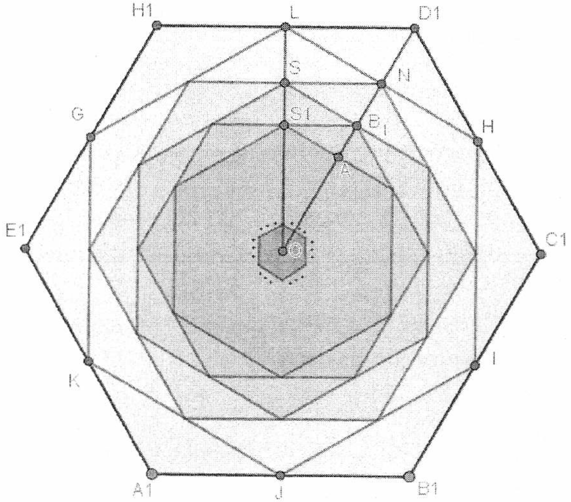


Рис.4

За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка $LO = \sqrt{OD_1^{\ 2} - D_1L^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см).

Відрізок LO як радіус описаного кола для вписаного додекаедра дорівнює його довжині, таким чином при $n = 2$ отримано додекаедр зі стороною: $LO = LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см).

По аналогії до попередніх обчислень знайдемо довжини сторін для декількох подальших вписаних шестикутників.

З $\Delta\ LNO$: NO – серединний перпендикуляр, тому: $\angle LNO = 90^\circ$; $NL = \frac{1}{2}LH = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $OL = LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка NO

$$NO = \sqrt{LO^2 - NL^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12-3}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \text{ (см).}$$

З $\triangle NSO$: SO – серединний перпендикуляр, тому: $\angle NSO = 90^\circ$; $SN = \frac{3}{8}$; $NO = 2SN = \frac{3}{4}$. За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка SO

$$SO = \sqrt{NO^2 - SN^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{36-9}{64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{27}{64}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ (см).}$$

З $\triangle SB_1O$: B_lO – серединний перпендикуляр, тому: $\angle SB_1O = 90^\circ$; $SO = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; $SB_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка SO:

$$B_1O = \sqrt{SO^2 - SB_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{64} - \frac{27}{256}} = \sqrt{\frac{108-27}{256}} =$$

$$= \frac{9}{16} \text{ (см).}$$

З $\triangle B_1S_1O$: S_lO – серединний перпендикуляр, тому: $\angle B_1S_1O = 90^\circ$; $B_1O = \frac{9}{16}$; $S_1B_1 = \frac{9}{32}$. За теоремою Піфагора знайдемо довжину відрізка SO:

$$S_1O = \sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^2 - \left(\frac{9}{32}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{256} - \frac{81}{1024}} = \sqrt{\frac{273}{1024}} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ (см).}$$

Отже сторони вписаних додекаедрів відповідно мають довжини:

$$1;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3\sqrt{3}}{8};\ \frac{9}{16};\ \frac{9\sqrt{3}}{32};\ \ldots$$

тому можемо записати ряд для вписаних шестикутників в наступному вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{2^n}$$

який є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}}{\frac{\sqrt{3^{n-1}}}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}\cdot\sqrt{3^n}}{2^n\cdot\sqrt{3^{n-1}}} = \frac{2^n\cdot 2^{-1}\cdot\sqrt{3^n}}{2^n\cdot\sqrt{3^n}\cdot(\sqrt{3})^{-1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Оскільки периметр це сума всіх сторін многокутника, тому в даному разі периметри для всіх вписаних шестикутників можна представити у вигляді:

$$6\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}$$

Відомо, що площа правильного шестикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2};$$

тоді ряд для площ отриманих вписаних додекаедрів має вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}\right)^2\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot 3\sqrt{3}}{2^{2n}\cdot 2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot\sqrt{3}}{2^{2n+1}}$$

Дослідимо отримані ряди на збіжність. За допомогою ознаки Д'ламбера отримаємо [2, с. 20]:

(1): $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}\sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

– ряд збіжний;

(2): $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}}{6\frac{\sqrt{3^n}}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}\sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

– ряд збіжний;

(3): $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+2}\cdot\sqrt{3}}{2^{2n(+1)+1}}}{\frac{3^{n+1}\cdot\sqrt{3}}{2^{2n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2^{2n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{3}\cdot 2^{2n+3}} = \frac{1}{3} < 1$

– ряд збіжний;

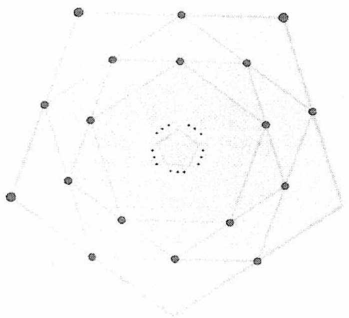
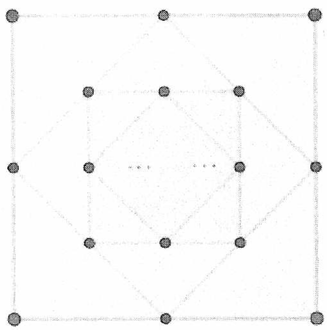
Узагальнюючи вище зазначене можна зробити висновки:

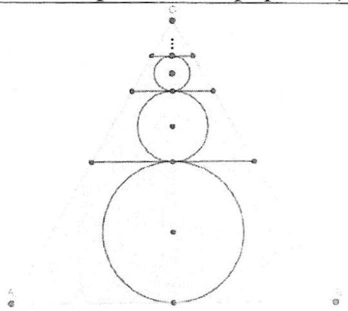
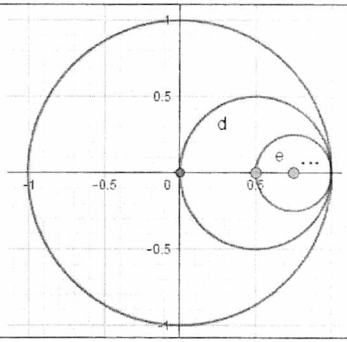
1. Використання різних геометричних об'єктів може бути використано для одержання «сігма-моделей» числових рядів, що дає можливість реалізації дидактичного принципа «наочності» при вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди»;

2. Одержання «сігма-моделей» числових рядів може бути темою курсових рядів з математики при підготовці майбутніх вчителів математики;

3. Одержання зв'язку «сігма-моделей» числових рядів і геометричної інтерпретації їх членів може бути використано в якості завдань для лабораторних робіт при вивченні студентами спеціальностей «Математика» та «Інформатика» методів наближених обчислень, а також як завдань для засвоєння студентами елементів комп'ютерної графіки і дизайна.

Наведемо приклади вправ для практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «Числові ряди» та для лабораторних занять при вивченні комп'ютерних технологій.

Завдання	*Геометрична інтерпретація*
1. Знайти суму периметрів вписаних правильних п'ятикутників ($a = 1$). 2. Знайти суму сторін вписаних правильних п'ятикутників. 3. Знайти суму площ вписаних правильних п'ятикутників. 4. Знайти суму радіусів вписаних/описаних кіл. 5. Знайти суму площ вписаних/описаних кіл.	
1. Знайти суму периметрів вписаних квадратів ($a = 1$). 2. Знайти суму сторін вписаних вписаних квадратів. 3. Знайти суму площ вписаних квадратів. 4. Знайти суму радіусів вписаних/описаних кіл. 5. Знайти суму площ вписаних/описаних кіл.	

Завдання	*Геометрична інтерпретація*
1. Знайти суму площ трикутників, вписаних в рівносторонній трикутник зі стороною $a = 1$. 2. Знайти суму площ кіл діаметри яких є висотами трапецій. 3. Знайти суму значень середніх ліній вписаних трикутників.	
1. Знайти суму радіусів вписаних/описаних кіл. 2. Знайти суму площ вписаних/описаних кіл.	

Список використаних джерел:

1. Корольський, В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський // Новітні комп'ютерні технології : зб. наук. пр. / Криворізький національний університет. – Кривий Ріг, 2017. – с. 57–62.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / Л. Д Кудрявцев. – 2-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2004. – 720 с.