МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_____________ Д. Є. Бобилєв
«___» _____________ 2023 р.

Реєстраційний № __________
«___» _____________ 2023 р.

Методика евристичного навчання теми «Декартові координати на площині»

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи МІм-22
ступінь вищої освіти *магістр*
спеціальності: 014.04 Середня освіта
(Математика)
Бойчак Вікторії Ярославівни
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович
Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

При вивченні декартових координат на площині можна використовувати евристичний метод викладання математики, який дозволяє учням самостійно розв’язувати завдання та відкривати нові математичні властивості. Школярі, які навчаються за цим методом, знаходять стимул у труднощах, які стають їм доступними для подолання. Використання евристичного методу впливає на учнів, розвиваючи їхній інтерес до навчання та спонукаючи їх самостійно розв’язувати задачі. Важливо також навчити учнів самостійному пошуку та розв’язанню проблемних задач, оскільки кількість розв'язаних задач не завжди відображає їхній рівень уміння аналізувати та розв’язувати задачі.

Евристичний метод вивчення математики є корисним у шкільній освіті, особливо на початковому етапі, і дозволяє учням розкрити потенціал в самостійних "відкриттях" нових способів розв’язання задач. Однак застосування цього методу вимагає більше часу порівняно з іншими методами навчання. Часте використання лише одного методу не є оптимальним, але глибокий розумовий досвід, набутий учнями під час розв'язання фундаментальних питань, є цінним знанням, що легко усвоюється.

Дослідження з методики навчання математики вказують на необхідність озброєння учнів методами самостійного розв’язування проблемних задач. Методи та способи розв'язування визначаються не лише характером задач, але й наявними знаннями та вміннями учнів на конкретному етапі навчання. Сучасні дослідження показують, що для розв’язання проблемних задач необхідний не лише запас знань, але й загальний підхід до аналізу та пошуку плану розв’язання, що формується через практику та самостійність у вирішенні подібних ситуацій.

Проблемна задача вимагає не лише поверхневого застосування вже вивченого матеріалу, але й активного мислення, пошуку зв'язків та аналізу доказів. Вона спонукає учня не просто відтворювати відомі знання, а й розвиває його критичне мислення та здатність до концептуального розуміння матеріалу. Такий підхід до навчання математики стає важливим кроком у формуванні глибокого розуміння предмету та активізації пізнавальних процесів учнів.

Мета дослідження: розробити науково обґрунтовану методику евристичного навчання в розв'язуванні проблемних задач геометрії 9 класу, спрямовану на розвиток в учнів евристичних умінь.

Об'єкт дослідження: процес навчання геометрії в 9 класах.

Предметом дослідження є евристичні методи під час навчання геометрії учнів 9 класів.

Завдання дослідження:

1. проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з теми дослідження;
2. проаналізувати шкільні підручники і посібники з геометрії 9 класу;
3. розробити методику евристичного навчання у розв'язуванні проблемних задач геометрії в 9 класах при вивченні теми «Декартові координати на площині».

Методи дослідження: спостереження, бесіди з учнями та вчителями, тестування та анкетні опитування. Крім того, використання контрольних робіт сприяло збору об'єктивних даних щодо рівня розуміння та успішності учнів у даній темі. В ході аналізу методики навчання використовувалися такі методи, як пошуковий та навчальний педагогічний експеримент, а також експертна оцінка дидактичних матеріалів. Ці підходи дозволили систематично дослідити ефективність різних методів викладання та їх вплив на розуміння та успішність учнів у вивченні геометричних величин.

Практична значущість роботи полягає у розгляді основних методичних особливостей вивчення похідної на уроках геометрії.

Структура роботи. Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів та загальних висновків, списку використаних джерел, додатків.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ТА МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ З ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Поняття про евристичні методи навчання математики.

На межі філософії, кібернетики, психології та педагогіки виникла нова наукова галузь - евристика. Різні науковці розглядають її зі свого погляду, визначають основні поняття та положення. Кібернетики розглядають евристику як методи, спрямовані на покращення ефективності системи, що вирішує завдання. Психологи вбачають в евристиці розділ психології, що досліджує творче мислення, педагоги розглядають її як науку про методи розв'язання завдань. Філософи приписують терміну "евристичний" правила або твердження, які сприяють відкриттю нового [7].

Останнім часом до евристики відносять і дослідження кібернетиків, які моделюють вищі прояви інтелекту. Проблеми евристики розробляють фахівці з різних галузей - інженери, математики, психологи, фізіологи, педагоги та організатори виробництва. Основу евристики складає психологія, зокрема психологія творчого мислення [9].

Евристична діяльність включає розумові операції та має свою специфіку. Це різновид людського мислення, що формує нові системи дій або відкриває раніше невідомі закономірності об'єктів. Цей процес вивчається та досліджується численними науковцями у різних галузях науки [25, с. 133].

Традиційна форма спілкування - розмова - відіграє важливу роль у дидактичній роботі. Сократ вміло використовував її, що віддзеркалилося в терміні "сократична розмова". Він спонукаючи співрозмовника до самостійного висловлення думок, сприяв народженню істини у його душі. Його метод розвивався у працях великих мислителів і сучасних педагогів.

Коменський відзначав важливість не простого передачі знань, а розкриття здібностей розуміючих речей, які потім стають джерелом живої думки. Знахідність шляхів до кожного учня та розвиток його здібностей стають найбільш можливими через використання евристичного методу.

Незважаючи на внесок вітчизняних педагогів у розвиток науки, евристичний метод навчання залишався мало висвітленим. Аналіз літературних джерел [7, 8, 9] показав, що більшість практиків і теоретиків освіти сприймали евристику лише як один із методів чи прийомів навчання. Такий підхід до евристики як лише передачі нових знань вважаємо помилковим.

Звірюючись з останніми дослідженнями, евристика - це молода галузь науки, що виникла на перетині філософії, кібернетики, психології та педагогіки. Різні вчені тлумачать її відповідно до власних дисциплін, надаючи власне уявлення про основні концепції та положення. Зокрема, кібернетики сприймають евристику як набір методів, спрямованих на покращення ефективності системи, що вирішує завдання. Психологи розглядають її як окрему галузь психології, що вивчає творче мислення, педагоги - як науку про методи розв'язання завдань. Філософи ж використовують термін "евристичний" для опису правил або тверджень, які сприяють відкриттю нового.

Останнім часом евристика також асоціюється з дослідженнями кібернетиків, які моделюють вищі прояви інтелекту. Проблеми, пов'язані з евристикою, вивчаються представниками різних галузей науки - інженерами, математиками, психологами, фізіологами, педагогами та організаторами виробництва. Водночас основу цієї науки складає психологія, зокрема психологія творчого мислення [9].

Евристична діяльність, хоча й включає розумові операції, має свою унікальну специфіку. Це певний вид людського мислення, яке формує нові системи дій або розкриває раніше невідомі закономірності об'єктів. Цей процес досліджують у різних галузях науки [25, с. 133].

Розмова, як засіб спілкування, відіграє ключову роль у дидактичній роботі. Сократ вміло використовував цей метод, що стало відомим як "сократична розмова". Він спонукаючи співрозмовника до самостійного висловлення думок, сприяв народженню істини у його душі. Його метод розвивався у працях великих мислителів і сучасних педагогів [6].

Коменський виділяв важливість не простої передачі знань, а розкриття здібностей розуміючих речей, що стають джерелом живої думки. Найбільше розвиток здійснюється через евристичний метод, оскільки він дає можливість знаходити шляхи до кожного учня та розвивати їх потенціал [10].

Не зважаючи на вагомий внесок вітчизняних педагогів у науковий прогрес, евристичний метод навчання лишався мало висвітленим. Аналіз літературних джерел [7, 8, 9] показав, що більшість практиків і теоретиків освіти розглядали евристику як один із методів чи прийомів навчання, не усвідомлюючи його повний потенціал.

У молодій науці евристики не всі поняття ще чітко визначені, особливо це стосується терміну "евристичний метод". Багато дослідників розглядають його як ефективний, але не повністю надійний спосіб вирішення задач, який дозволяє обмежувати перебір варіантів рішень перед вибором остаточного. Однак це визначення не відображає суттєвих рис "евристичного методу", оскільки представляє лише зовнішній опис явища [10].

Для розкриття суті цього поняття варто зазначити, що термін "евристичний" має подвійне вживання. По-перше, його можна розглядати як діяльність, яка призводить до вирішення складних завдань, та як специфічні прийоми, перенесені на рішення інших завдань. При цьому евристичні прийоми як готові схеми використовуються у "евристичній логіці", а реальний процес - у сфері психології [7].

Хоча евристичні прийоми можна описати математичною мовою як логічні схеми, сам процес евристичної діяльності на сьогоднішній день не має математичного виразу [25].

Евристичний метод навчання математики почав застосовуватися вже в XIX столітті, як це вказується у книзі французького педагога математики Лезана "Розвиток математичної ініціативи". У тій книзі він надає поради вчителеві щодо збереження видимості гри й свободи дитини під час навчання [11].

В українській школі евристичний метод навчання вже в XIX столітті використовували педагоги-математики, які вважали традиційні методи застарілими й не відповідними основним завданням математичної освіти. Наприклад, С. І. Шохор-Троцький відзначав, що навчання повинно заохочувати учнів до розумової роботи, уникати заучування і відпрацьованих форм [15].

Також значний внесок у розвиток евристичного методу навчання вніс Н. А. Ізвольський, який наголошував на розвитку творчих здібностей учнів. Науковий методист В. М. Брадіса описує евристичний метод як форму навчання, де вчитель не надає готових відповідей чи правил для засвоєння, але направляє учнів до самостійного відкриття необхідних концепцій та правил [9]. Важливою є самостійність у пошуку рішень задачі, хоча загальний план вирішення залишається настановною точкою.

Роль евристичної діяльності в математичному навчанні розглядається в книгах Д. Пойа, американського математика. У його роботі "Як вирішувати проблему" він визначає евристику як спеціальну область знань, спрямовану на вивчення правил і методів, що призводять до відкриттів і винаходів. Для розуміння творчого розумового процесу Пой вважає важливим вивчення особистого досвіду у вирішенні завдань та спостереження за рішенням задач іншими людьми. Він формулює певні правила, які сприяють досягненню відкриттів, не вдаючись до детального аналізу психічних процесів, які стоять за цими правилами. У кінці книги він вказує на схему розв'язання задач, яка описує послідовність кроків для досягнення успіху [5, с. 101]: розуміння постановки задачі, складання плану розв'язання, виконання плану та огляд отриманого рішення.

Ця схема відображає принцип головної евристичної діяльності: використання минулого досвіду у вирішенні проблем. Однак, цей принцип не охоплює всю структуру творчої розумової діяльності. Роботи Д. Пойа, орієнтовані на навчання, не розглядають всі складові продуктивного мислення з достатньою глибиною [14].

Погляд Д. Пойа на евристичну діяльність відрізняється від опису цього поняття Д. Брунера в книзі "Процес навчання" [25, с. 198]. Брунер розглядає евристичні прийоми як методи розв'язання задач, які не завжди точні і можуть чи не можуть привести до потрібного результату. Обидва автори не досліджують евристичну діяльність як процес формування прийомів або схем дій. Однак навчання діяльності важливіше і складніше за навчання готових прийомів вирішення завдань.

Вивчаючи математику, учні часто стикаються з труднощами. В евристичному навчанні ці труднощі стають стимулом для вивчення. Наприклад, коли учням не вистачає знань для розв'язання задачі, вони самі починають досліджувати та відкривати нові властивості, збагачуючи свої знання. Учитель організовує та спрямовує роботу, але дозволяє учням самостійно подолати труднощі. Евристичний метод часто використовується у формі евристичних бесід, які змінюють учнівське ставлення до навчання. Поступово вони починають цінувати самостійність у вирішенні завдань [27].

Дослідження у вітчизняних та зарубіжних школах показують корисність евристичного методу при вивченні математики учнями початкової та середньої школи. Але для такого навчання потрібно більше часу, ніж на повідомлення готового рішення. Тому використання евристики на кожному уроці не завжди є оптимальним. Проте цей метод розвиває учнівський розум і сприяє засвоєнню фундаментальних знань [28].

Отже, евристичний метод – це спосіб навчання, що заохочує учнів самостійно знаходити відповіді та шляхи вирішення питань. Його найбільш виразна форма – це евристична бесіда, що спонукає учнів до пошуку відповідей на проблеми за допомогою невеликих досліджень. Отже, спробуємо послідовно розкрити евристичні методи.

Метод "мозкового штурму", винайдений Американським вченим А.Ф. Осборном, описує швидкий та творчий підхід до розв'язання проблеми. Учасникам обговорення пропонують висловлювати максимальну кількість варіантів рішень, навіть найфантастичніших, а після відбору найкращих ідей вони можуть бути використані на практиці [7].

Основні принципи і правила методу полягають у забороні критики пропонованих ідей і стимулюванні всіляких реплік і жартів. Процес розв'язання задачі розпочинається з швидкого пошуку відповідей на тренувальні питання. Надалі, учасники поділяються на дві групи: "генератори ідей" і "експерти". Перша група пропонує різні ідеї, навіть якщо вони фантастичні, протягом 10-15 хвилин, тоді як друга група, "експерти", оцінює ці ідеї після завершення "мозкового штурму" [10].

У процесі генерування ідей критика будь-якого виду заборонена, щоб забезпечити позитивну атмосферу. Після закінчення процесу генерації, усі ідеї систематизуються і оцінюються уважно, включаючи навіть ті, що здаються абсурдними. На остаточний відбір ідей впливає керівник, який спрямовує процес виконання завдання та допомагає уникнути однобічного розвитку ідей.

Метод "мозкового штурму" є гнучким та творчим способом розв'язання проблеми, який може бути повторно використаний з новим колективом для поглиблення рішення чи розширення задачі. Це стимулює нові підходи та сприяє появі різноманітних розв'язків [7].

Метод використовує психологічні та педагогічні засади, зокрема заохочує творче мислення та активізує усіх учасників. Він дозволяє уникнути лінійного мислення та розкриває нові підходи, залучаючи інтуїцію та уяву. Інтерактивний процес викликає синергетичний ефект, покращуючи ідеї та запобігаючи втраті конструктивних варіантів [13].

Цей метод простий у використанні на ділових нарадах і не потребує складних обладнань чи спеціального середовища. Але його недоліки можуть виникнути через ризик вибору менш раціональних ідей серед великої кількості пропозицій. Крім того, він не завжди гарантує ретельний розвиток ідей і може призвести до витрати часу на обговорення не продуктивних пропозицій [7].

Спосіб "мозкового штурму" виявляється не завжди ефективним у виборі продуктивних ідей серед великої кількості пропозицій, тому що може бути складно підібрати лише ті, які дійсно сприятимуть вирішенню завдання. Крім того, недостатня здатність до дистиляції може ускладнити вибір конкретних дійових ідей. Також, метод не завжди забезпечує ретельний розвиток пропозицій та може призвести до витрати часу на обговорення неефективних варіантів.

Щодо методу колективного пошуку оригінальних ідей, він спирається на психологічні та педагогічні принципи, зокрема на співтворчість, довіру до творчих здібностей один одного та оптимальне поєднання інтуїції та логіки. Метод дозволяє зберегти рівність учасників групи і створює психологічний мікроклімат для активізації інтуїції та уяви. Однак його обмеження виявляється у недостатній розробці ідей та непридатності для завдань, які вимагають попередніх розрахунків та обчислень [7].

Метод "евристичних питань", або "ключових питань", застосовується для отримання додаткової інформації в проблемних ситуаціях і упорядкування наявної інформації. Він спонукає до формування нових стратегій вирішення творчих завдань. Незважаючи на простоту та ефективність, не гарантує оригінальних ідей та успішного розв'язання креативних завдань.

Метод "багатовимірних матриць" або "морфологічного аналізу" дозволяє системно вирішувати складні завдання, але вибір оптимального рішення серед сотень варіантів може бути проблематичним [8].

Метод "вільних асоціацій" сприяє зародженню нестандартних зв'язків між компонентами проблеми і творчим досвідом учасників, що може призвести до появи нових ідей для її розв'язання.

Метод інверсії є одним з евристичних підходів у творчому процесі, що спрямований на виявлення неочікуваних рішень творчих завдань, часто протилежних традиційним підходам. Він базується на принципах дуалізму та оптимального використання протилежних процедур творчого мислення. Незважаючи на здатність виробляти оригінальні рішення, метод вимагає високого рівня творчих здібностей та досвіду.

Метод емпатії (метод особистої аналогії) полягає в співставленні особистості з об'єктом або процесом для пошуку спільних характеристик. Використання цього методу сприяє розвитку уяви та фантазії, але вимагає високого рівня емпатії та творчого мислення [14].

Метод синектики використовує асоціативне мислення для генерації альтернативних ідей, шукаючи аналогій у вирішенні завдання. Це поєднання різноманітних елементів, що співпадають в контексті цієї методики. Основна мета полягає у злитті різних індивідів і дисциплін для вирішення конкретної проблеми. Порівняно з "мозковою атакою", синектика характеризується високим рівнем синекторів - учасників синектичної групи [25].

Синектичний метод розвиває оригінальні ідеї через використання аналогій, інтуїції, абстрагування та вільного роздуму. Він сприяє винайденню несподіваних метафор та елементів гри, що дозволяє розв'язувати проблеми неординарними способами [18]. Однак, метод має свої умови та вимоги, включаючи формулювання проблеми в загальному вигляді, початок обговорення з аналізу загальних ознак проблеми та критичний відбір ідей розв'язання.

Метод синектики базується на використанні аналогій експертної групи. Після сформулювання проблеми група експертів шукає аналогії у вирішенні схожих проблем у інших галузях. За допомогою цих аналогій та принципів вирішення проблем експерти намагаються знайти рішення для конкретної задачі [33].

Важливо, щоб члени синектичної групи представляли різні сфери діяльності, збагачуючи групу різноманітністю поглядів. Синектори повинні бути людьми з широким спектром знань і досвідом у різних галузях, що сприяє кращій роботі групи. Це сприяє вирішенню складних проблем у найефективніший спосіб.

Метод організованих стратегій призначений для подолання інерції мислення у вирішенні творчих завдань. Він відрізняється принципом самоврядування у виборі нових стратегій та підходів до проблеми. Евристичні правила цього методу включають запис всіх спонтанних ідей у процесі розв'язання задачі та постійне перевіряння їх ефективності.

1.2 Психологічні особливості формування евристичних прийомів в основному шкільному віці.

Шкільна система у XXI столітті вимагає глибокого переосмислення освітніх підходів, активізації змісту та технологій формування особистості учнів, які є активними учасниками свого життя. Щоб гармонійно і ефективно вписатися у суспільство та ринок праці, випускники українських шкіл повинні мати низку вмінь та компетентностей: бути гнучкими й адаптивними, представляти себе на ринку праці; мислити критично; використовувати знання для вирішення реальних завдань; генерувати нові ідеї, приймати нетрадиційні рішення й нести за них відповідальність; здобувати, аналізувати та використовувати інформацію з різних джерел для власного розвитку та самовдосконалення; вміти обирати серед безлічі альтернатив, які пропонує сучасне життя [14].

Для набуття учнями цих навичок та компетентностей на початковому етапі освіти, вчителі повинні розвивати евристичне мислення учнів на уроках математики. Це вимагає від них розуміння психолого-педагогічних закономірностей навчального процесу, які поєднують в собі досягнення психології, дидактики та відповідну методику їх застосування в навчанні математики.

Багато дослідників, таких як К.В.Власенко, І.А.Горчакова, О.І.Скафа, З.І.Слєпкань, Т.С.Максимова та інші, вивчали психолого-педагогічні передумови організації евристичної діяльності. О.І.Скафа [15] широко розглядала психолого-педагогічні передумови формування евристичної діяльності при вивченні математики. К.В.Власенко [16], використовуючи дослідження О.І.Скафи, визначила передумови організації та керівництва евристичною діяльністю учнів під час вивчення геометрії в класах з поглибленим вивченням математики. Т.С.Максимова [17], досліджуючи виховання творчої особистості майбутніх інженерів, описала психолого-педагогічні передумови формування евристичних умінь студентів технічних вузів під час практичних занять з вищої математики.

Отже, мета аналізу полягає в розгляді психолого-педагогічних передумов формування евристичних умінь учнів початкової школи під час навчання математики. Усі наведені дослідження підтверджують спільні психолого-педагогічні аспекти, такі як: особливості психології школяра, формування позитивних мотивів до навчання, використання традиційних дидактичних принципів, принципів розвивального навчання, ідей проблемного та програмованого навчання, концепція спільної продуктивної діяльності, концепція етапного формування розумових дій, теорія умовно-рефлекторного навчання та діяльнісний підхід до навчання. Всі ці аспекти є ключовими у формуванні евристичних умінь учнів на уроках математики [17].

Підлітковий період пов'язаний з перебудовою психічних процесів особистості школяра та вимагає суттєвих змін у взаємодії та організації діяльності вчителів, хоча ці зміни можуть бути поступовими. У цьому віці увага не тільки стає більш інтенсивною й стійкою, але й відрізняється специфічною вибірковістю. Ставлення стає сугубо вибірковим та цілеспрямованим. Пам'ять значно розширюється та набуває характеру організованих, регульованих і керованих процесів. Особливість цього віку полягає у створенні умов для активного, самостійного та творчого мислення, що свідчить про готовність учнів співпрацювати з вчителями, спрямовуючи свої дії на організацію евристичної діяльності [1].

Значно розвиваються навички знаходження кількох способів розв'язання задачі, використання нестандартних підходів, що переносять навчальну діяльність на продуктивний рівень. Виникає здатність до прогнозування та планування контрольно-оцінних дій. Це дозволяє коректувати навчальну роботу перед її початком [12].

У підлітковому віці відбуваються значні зрушення в розумовій діяльності. Новий характер засвоєння знань вимагає спрямованості на самостійне мислення; потрібна здатність абстрагувати, узагальнювати, порівнювати, міркувати та робити висновки.

Вивчення геометрії сприяє переходу до вищого рівня узагальнення. Підвищення ефективності формування евристичних умінь пов'язане з підвищенням ефективності освоєння учнями розумових дій та засвоєння знань. Найбільш продуктивним шляхом є активізація розумової діяльності учнів. Евристичний підхід до навчання дозволяє активізувати розумову діяльність на найвищому рівні [17].

Поява питань - це перший прояв думки, як писав С.Л.Рубінштейн, яка починає працювати, та розуміння, яке починає зароджуватися [18]. Протиріччя завжди є мотивом для виникнення цих питань. Отже, для формування творчого підходу у школярів та розвитку їхніх творчих здібностей вчитель (викладач) повинен показувати, як питання виникають та спонукати учнів до їхнього поставлення. Такий підхід свідчить про те, що уроки математики мають бути побудовані як обговорення різних точок зору, спільний пошук істини, тобто у формі діалогу, а не монологу. При такому співробітництві проблеми творчо розв'язуються спільними зусиллями, активізуються пізнавальні та соціальні мотиви. Спілкування має відбуватися в умовах рівного партнерства. Ідеї рівності, партнерства та взаємної поваги одного до одного лежать в основі педагогіки співпраці. Ці ідеї найефективніше реалізуються за евристичного спрямування навчання математики на уроках, оскільки воно передбачає спільний пошук вчителя (викладача) та учнів [19].

Важливим аспектом у розвитку узагальненого мислення є формування евристичної діяльності. Ми вже наголошували в [19] на тому, що формування евристичних умінь учнів відбувається через організацію вчителем евристичної діяльності на уроках математики, де використовуються евристичні прийоми для розв'язання відповідних завдань.

Евристична діяльність спрямована на вирішення евристичних задач, що, разом із системою евристик, приписами, правилами-орієнтирами і т.д., формують зміст цієї діяльності. Точніше, система евристичних задач допомагає учням опановувати евристичні вміння.

Необхідною умовою для формування евристичних умінь є дотримання принципу індивідуалізації та диференціації, що передбачає досягнення усіма учнями високого рівня освоєння нового матеріалу по-різному. Деякі досягають цього рівня через первинне ознайомлення з матеріалом, іншим потрібно розв'язати ряд задач. Особливо важко це дається школярам із уповільненим розумовим розвитком [21]. Тому, як зауважує О.І.Скафа, без індивідуалізації та диференціації не можна налагоджувати евристичну діяльність учнів [15], що, відповідно, ускладнює формування їхніх евристичних вмінь.

Одним з принципів організації евристичної діяльності є спеціальне формування узагальнених прийомів розумової діяльності, поділених на дві групи: прийоми алгоритмічного та евристичного типу. Тільки формування прийомів алгоритмічного типу не є достатнім, оскільки вони не відповідають специфіці евристичної діяльності і не стимулюють інтенсивної організації саме цієї сторони розумової діяльності. Тривалі вправи з розв'язування задач за прийомами алгоритмічного типу спонукають до дій за готовим зразком, обмежуючи пошук нових шляхів вирішення, що може уповільнювати знаходження розв'язку для нових завдань. Тому формування цих прийомів повинно супроводжуватися спеціальною роботою над озброєнням учнів прийомами евристичного типу. На відміну від прийомів алгоритмічного типу, евристичні прийоми орієнтовані не на логічний, а на змістовний аналіз проблеми.

Евристична діяльність передбачає відкриття нового. Щоб відкрити нове, потрібно володіти вже існуючим, мати достатній запас знань, які знаходяться в стані готовності до застосування. Для цього необхідна спеціальна організація мнемічної діяльності. Це одна з ключових умов для формування евристичних вмінь.

Згідно з Е.Е.Семеновим [22], знання евристик та вміння їх застосовувати розширюють зону найближчого розвитку учня і дозволяють вчителю використовувати "універсальний найменший натяк": "Подумайте, які евристики можуть тут вам допомогти?" Під час використання евристик учень може "натякати сам собі", як власний вчителю, створюючи сприятливі умови для навчання на високому рівні пізнавальних можливостей. Евристики сприяють перенесенню знань в нові ситуації та підвищують пізнавальні можливості тих, хто ними володіє. Застосовуючи евристики, учень краще розуміє структуру пошуку. Замість сліпих зв'язків він отримує досвід структурного розуміння з можливістю осмисленого використання. Це допомагає сприймати різноманітні задачі як єдине утворення, де елементи підпорядковані загальній закономірності у пошуку операцій, що наближають до вирішення проблеми [22].

У нашому розумінні, успішне формування учнівських евристичних умінь має відношення до певних математичних здібностей. Спеціальні математичні здібності, такі як формалізація, узагальнення математичного матеріалу, гнучкість мислення та здатність до раціонального розв'язання, грають ключову роль у формуванні евристичних вмінь учнів [23]. Розвиток цих здібностей, з одного боку, передбачає певні вміння, з іншого – формує пов'язані з ними здібності під час навчально-пізнавальної діяльності (за С.Рубінштейном, Ю.Самаріним та ін.).

Розвиток евристичних умінь учнів, за нашим розумінням, вимагає розвинення математичної інтуїції. Вчителю, щоб розвивати учнівські евристичні вміння, слід розуміти роль інтуїції як пізнавального процесу та прийоми її розвитку [24]. Процес знаходження розв'язання евристичних задач пов'язаний з різними періодами інтуїції та механізмами пошуку рішення на кожному з них: 1) підготовчий; 2) період інкубації; 3) раптове "осяяння" (інсайт); 4) свідоме упорядкування інтуїтивно отриманих результатів.

Основними проявами математичної інтуїції є здатність орієнтуватися в нових ситуаціях, передбачати вірні результати, обирати шляхи їх отримання та помічати помилкові висновки. Для залучення учнів до уроків математики, спрямованих на розвиток евристичних вмінь, важливо пробуджувати інтерес до творчості, до відкриття нових фактів та мотивувати на евристичну діяльність. Формування позитивних мотивів на уроках є важливою передумовою для розвитку евристичних умінь.

Використання інтерактивних методів навчання робить процес навчання різноманітним та ефективним. Під час проведення уроків математики корисно використовувати такі методи, як презентація, реклама, мікрофон, ток-шоу, робота в групах, мозковий штурм, рольові ігри та інші [26]. Використання ІКТ свідчить про залежність рівня пізнавальної мотивації учнів від усвідомлення мети додаткового навчання математики, базового рівня знань, здібностей у вивченні математичних дисциплін, загального розвитку та вміння вчителя (викладача) зацікавити предметом.

Для подолання різних психологічних бар'єрів учителю (викладачу) необхідно створювати ситуації, де підліток має змогу висловлювати свою ініціативу, припускаються помилки, вільно висловлювати свої думки, де кожен учень може працювати власним темпом, створюється атмосфера доброзичливості та відкритості, де відносини з учнями будуються з урахуванням їхньої індивідуальності.

Успішне формування евристичних умінь, на наш погляд, в певній мірі залежить від використання різних технологій навчання і виховання. Особистісно-орієнтована технологія, технологія створення ситуації успіху, інформаційні технології навчання, проектна технологія, інтерактивні методи допомагають активізувати евристичні уміння. Зокрема, для активізації цих умінь використання таких підходів як:

1. Евристичний діалог, що дозволяє планувати навчання як творчий процес, не обмежуючись готовими правилами розв'язання завдань;
2. Відкриті завдання, спрямовані на розвиток творчих якостей учнів і базуються на завданнях, де не існує єдиного правильного відповіді;
3. Евристична ситуація, мета якої - стимулювати учня до власних освітніх результатів під час спеціально організованої діяльності;

4. Рефлексія, що є необхідною умовою для того, щоб учень (і вчитель) бачив структуру своєї освітньої діяльності, усвідомлював і засвоював способи евристичної діяльності.

Для успішного формування евристичних умінь учнів 9 класу, на нашу думку, також важливе дивергентне мислення. Це мислення, яке передбачає, що на одне й те ж питання може бути безліч рівноправних відповідей (на відміну від конвергентного мислення, що орієнтує на однозначні рішення). Формування дивергентного мислення вимагає спеціальної уваги, оскільки це питання не вирішується само собою [28]. Наприклад, вирішення задач різними способами, розв'язання відкритих завдань тощо базується на дивергентному мисленні.

Для досягнення запланованих навчальних результатів важливим є створення умов для ефективної самостійної роботи учнів під час уроків. Ця форма навчання спрямована на закріплення засвоєних матеріалів, розвиток здатності практично застосовувати отримані знання і вміння в математичній діяльності. Формування евристичних умінь школярів на уроках математики вимагає свідомого стимулювання самостійного прагнення до знань, розвитку механізмів саморегуляції мислення, творчого потенціалу та утворення умов для самостійного засвоєння матеріалу та його практичного використання [18].

Організація самостійної роботи сприяє формуванню у школярів здатності до самостійної математичної освіти. Важливо стимулювати їх до самостійного мислення, логічних висновків і узагальнень, оскільки це сприятиме розвитку евристичних умінь.

Отже, ми розглянули основні психолого-педагогічні фактори формування евристичних умінь учнів 9 класу під час уроків математики. Дотримання цих аспектів та їх взаємозв'язку може радикально змінити навчально-виховний процес на уроках та допомогти вчителю ефективно вирішувати завдання з формування евристичних умінь учнів.

1.3 Проблемні задачі в шкільному курсі математики.

Основним засобом, що використовується при вивченні розділу «Декартові координати на площині» для формування знань, умінь і навичок учнів, є використання завдань. Ці завдання є ключовим інструментом для досягнення загальноосвітніх, виховних і розвиваючих цілей. Для відповідного формування важливих елементів теоретичних знань та практичних навичок учнів варто розглядати систему завдань, яка дозволяє ефективно засвоювати навчальний матеріал.

Останнім часом в дидактиці та методиці навчання математики проводились дослідження різних аспектів теорії завдань. Вчені, такі як Н.Г. Амнєєв, Г.О. Балл, М.І. Бурда, Л.Л. Гурова, В.В. Давидов, О.М. Матюшкін та інші, внесли значний внесок у цю область. У своїх дослідженнях вони досліджували ключові аспекти постановки завдань, їх структуру, методи навчання розв'язання завдань, особливості вирішення проблем, коли суб'єкт не має алгоритму для цієї дії.

Усвідомлення проблемної ситуації в розділі «Декартові координати на площині» є першим кроком до її вирішення. На наступному етапі відбувається визначення відомого та невідомого, що перетворює проблемну ситуацію на конкретне завдання. У структурі завдання виділяють умову та вимоги. Для характеристики умови використовують такі ознаки, як звичайність або незвичайність ситуації, а також характер постановки умови (опис словами, графічне зображення, реальна ситуація) та ступінь виразності взаємозв'язку між відомими та невідомими величинами, що є ключовим для вирішення завдання.

У психолого-педагогічній літературі немає єдиного погляду на трактування поняття "задача". Різні автори різними способами підходять до відношення між завданням (об'єктом діяльності) та суб'єктом. Різноманітні підходи до поняття "задача" можна об'єднати у дві групи в залежності від систем, які використовують цей термін. За першою групою авторів, до якої належать З. І. Слєпкань, входять найбільш поширені тлумачення цього терміну в роботах з кібернетики, методики викладання математики. Вони розглядають термін "задача" як ситуацію зовнішньої діяльності, яку можна проаналізувати відокремлено від суб'єкта, який виконує дії. Такий підхід позбавляє поняття "задача" певного психологічного вмісту, розглядаючи його як "неозначене поняття, яке в самому широкому розумінні означає необхідність прийняття рішень". За другою групою визначення "задача" включає психологічний аспект і визначається як загальна характеристика завдання як мети (вимоги), встановленої в певних умовах. Такий підхід розглядає термін "задача" як суб'єктивне, психологічне відображення зовнішньої ситуації, у якій здійснюється цілеспрямована діяльність суб'єкта.

Компоненти та структура завдань найбільш повно розглянуті в роботах Л. Фрідмана, Г. Балла. Компоненти завдань, їх внутрішня структура, як описано в цих роботах, наведено в таблиці "Компоненти завдання".

Далі, важливим аспектом опису завдань як об'єктів засвоєння є їх класифікація за зовнішніми ознаками та внутрішніми особливостями. Наше дослідження видів завдань представлено у таблиці "Класифікація завдань" [17].

Класифікація задач

Таблиця 1.1

№	Підстава (ознака)	Види задач
1.	За вимогами задачі	Задачі на *обчислення*, на *побудову*, на *доведення* і на *дослідження*. Типи алгебраїчних задач на *обчислення*: • числові обчислення (знаходження значень виразів, функцій); • буквенні обчислення – перетворення виразів, знаходження коренів рівнянь, нерівностей, систем. Типи алгебраїчних задач на *побудову*: • складання за умовою виразів, рівнянь, нерівностей, систем, функцій; • побудова графіків функцій; • складання математичних моделей реальних явищ, ситуацій.
2.	За складністю розв'язання	*Прості* і *складні*. *Прості* задачі – задачі, що розв'язують на основі одного елемента теорії, формула, алгоритм, а також ті, з яких не можуть виділені інші задачі; *складні* задачі – можуть бути розчленовані на більш прості.

3.	За природою, об'єктом предметної області	*Математичні*, *арифметичні*, *геометричні*, *алгебраїчні* і *прикладні*.
4.	За відношенням до деякої зафіксованої системи знань	*Репродуктивні*, *конструктивні* і *продуктивні*. *Репродуктивні* – безпосереднє відтворення теоретичних чи практичних знань; *конструктивні* – опосередковане міркуваннями відтворення; *продуктивні* – застосування яке призводить до поглиблення розвитку знань.
5.	За особливістю орієнтувальної частини	*Впізнавальні* задачі (спосіб розв'язання актуалізується в процесі сприйняття умови і вимоги); *розпізнавальні* задачі (актуалізація способу здійснюється на основі нескладного аналізу); *логіко-пошукові* або *аналітико-пошукові* (план розв'язання – результат аналітико-синтетичних міркувань); *евристико-пошукові* (план розв'язання – результат логічного, аналітико-синтетичного і евристичного пошуку).
6.	За особливостями оператора	*Стандартні* і *нестандартні задачі*. *Стандартні задачі* – задачі, що розв'язують на основі деякого стандарту (алгоритму, формули, правила-норми, схеми); *нестандартні* – дія в межах певного обсягу теоретичних знань, стандарту не існує.
7.	За дидактичними цілями	*Пізнавальні*, *тренувальні* (вправи), *розвивальні* (творчі). *Пізнавальні* – задачі за допомогою яких отримують нові знання, *тренувальні* – за допомогою яких виробляють навички і уміння, *розвивальні* (творчі) – призначені накопичення досвіду творчої діяльності.
8.	За особливостями ситуацій застосування деякої визначеної системи знань	Задачі на застосування в *типових (стандартних)*, *змінених* і *нових* ситуаціях.
9.	За місцем у дидактичному процесі	*Критеріальні* і *навчальні* задачі. *Критеріальні* задачі – задачі, що є показником досягнення певного уміння; *навчальні задачі* – спрямовані на досягнення цілей навчання. Типи навчальних завдань, призначених для засвоєння певного способу дії: завдання-взірці, які

		знаходяться в полі зору при виконанні певного завдання, завдання-зразки (на яких здійснюється навчання конкретному способу дій), завдання-орієнтири (які містять елементи орієнтувальної основи).

Задачі володіють своєю ідеєю, що визначає їх зміст. Важливим аспектом вимог є чіткість формулювання. Характеристика задачі також залежить від взаємозв'язку між умовами та вимогами. Умова може включати всі необхідні елементи для вирішення задачі, або містити зайві складові.

Один зі способів тлумачення поняття "задача", який запропонував О.Ф. Єсаулов, визначає її як систему інформаційних процесів, де неузгоджені або суперечливі відношення вимагають перетворення. Суть розв'язання полягає в усуненні такої неузгодженості.

Р.Е. Басангова [17] описує задачу як об'єкт розумової діяльності, що включає вимогу практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання шляхом пошуку відносин між відомими та невідомими елементами. Ряд авторів, таких як М.І. Бурда, Ю.М. Колягін, В.І. Крупіч, Г.І. Саранцев та інші, розглядали поняття "задача" з методичної точки зору.

П.І. Сорокін [27] уточнює, що задача це об'єкт, який містить вимогу та умови для досягнення визначеної мети. Така задача має властивість бути засобом засвоєння знань, способом організації навчання та формою зв'язку теорії з практикою.

Задачі у розділі "Декартові координати на площині" виступають як предмет та засіб навчання. Вони є ключовим інструментом, що забезпечує зв'язок між навчанням та реальним життям, політехнічним спрямуванням і встановленням зв'язків всередині математики та інших навчальних предметів.

Формування вмінь розв'язувати задачі у розділі "Декартові координати на площині" є одним із ключових завдань програми цього розділу. Складність полягає у тому, що в методиці навчання математики деякі загальні принципи, такі як науковість, послідовність, систематичність, зв'язок теорії з практикою, індивідуальний підхід тощо, не отримали достатнього впровадження [5].

Як зазначав Я.А. Коменський, добре засвоюється лише те, що добре обґрунтовано. Отже, розв'язання будь-якої задачі повинно бути обґрунтованим науково. Учні повинні мати елементарне розуміння класифікації задач і вміти визначати їх види [9].

Проблемна задача — це завдання, досягнення якого потребує перетворення вихідних умов. Вона містить у собі реальне або умовне протиріччя, яке вимагає активного мислення та розмірковування для вирішення.

Розв'язання задач у розділі "Декартові координати на площині" вимагає розумової праці. Для навчання вирішенню задач необхідно глибоко розуміти їх природу, структуру та умови, з яких вони виникають.

Формулювання завдання в розділі "Декартові координати на площині" має свої вимоги і умови. Кожне завдання складається з ряду тверджень та вимог, які називаються умовами. При аналізі задачі важливо розподілити її формулювання на умови та вимоги. Часто задача містить кілька незалежних умов і може мати кілька вимог [9].

Стандартні задачі характеризуються наявністю чітких правил або положень, які визначають послідовність розв'язку та виконання кроків у цій послідовності. Нестандартні задачі, навпаки, не мають чітких правил або положень для точного розв'язку [17].

Вміння вирішувати нестандартні задачі у розділі "Декартові координати на площині" є важливим показником математичних знань. Для оволодіння цими навичками потрібно глибоко розуміти відповідну теорію, а це сприяє розв'язання достатньої кількості різноманітних задач.

Часто студенти мають знання теорії, але зустрічають труднощі у розв'язанні задач. Інколи навіть знання теорії не допомагає їм ефективно вирішити поставлені завдання.

Основним викликом у вивченні теореми або теми в розділі "Декартові координати на площині" є успішне розв'язання достатньої кількості задач. Деякі учні можуть виявляти труднощі з розв'язанням задач через відсутність стратегії або плану дій. У таких випадках вони можуть спробувати різні методи без чіткого напрямку. Це може привести до успішного розв'язання, але цей підхід не завжди дозволяє повністю засвоїти метод розв'язання, необхідний для аналізу будь-якої текстової задачі.

Стратегія розв'язування проблемних задач.

Проблемні завдання в розділі "Декартові координати на площині" вирішуються за такою звичайною послідовністю:

1. Визначення необхідної інформації для вирішення проблеми та оцінка власних знань.
2. Розробка плану, щоб крок за кроком поєднати відоме з невідомим, використовуючи різні правила, такі як:
3. Розбиття проблеми на частини.
4. Вирішення простіших підзавдань, які охоплюють аспекти основної проблеми.
5. Використання графічних зображень для подання проблеми різними способами.
6. Розгляд окремих випадків для зрозуміння проблеми.
7. Проведення дослідження етап за етапом в рамках плану.
8. Огляд рішення для переконання, що воно дійсно вирішує проблему і відповідає наявній інформації.

Методи розв'язування проблемних завдань у розділі "Декартові координати на площині" включають аналіз, синтез, порівняння, класифікацію, узагальнення та аргументацію. Ці загальні принципи також допомагають при розв'язуванні проблемних завдань у цьому розділі:

1. Трансформація задачі для зручності розв'язання.
2. Розгляд найпростішого випадку, який потім узагальнюється.

3. Припущення, що твердження у завданні неправильне, і аналіз наслідків цього припущення.
4. Розбиття задачі на простіші підзадачі.
5. Узагальнення завдання для спрощення його розв’язання.
6. Це загальні методи, які допомагають розкрити складність проблемних завдань у цьому розділі.

В розділі "Декартові координати на площині" вирішення проблемних завдань розвиває в учнів навички критичного мислення, розмірковування та здатність знаходити правильні рішення, застосовувати знання на практиці та переносяти їх у нові ситуації. Використання проблемних ситуацій під час навчання допомагає формувати у школярів стійкий інтерес до математики, сприяє їх саморозвитку та становленню особистості, яка може самостійно засвоювати знання та розв’язувати завдання.

Формування логічних умінь учнів потребує систематичних вправ, включаючи цікаві нестандартні задачі, що вимагають кмітливості та винахідливості, а також задачі парадоксального характеру, що спонукають до використання інтуїції та домислу.

Найбільш важливим у розв’язанні задач є сформулювання гіпотези та визначення шляху пошуку рішення. Учні, часто користуючись інтуїцією, намагаються доповнити відсутні знання, що поступово може розвивати в них високорівневі інтуїтивні вміння. Проте без спеціальної роботи над цим, учні можуть спонтанно намагатися вгадати розв’язок задачі там, де потрібен аналіз. Такий підхід не допомагає розуміти суть завдання та може спотворити його зміст.

Також важливо, щоб учні вміли охоплювати математичну структуру задачі, визначали її каркас і ідею розв’язання. Однак вчитель повинен усвідомити, як відділити основне від конкретних форм та представити інформацію у вигляді узагальнених структур, щоб розвивати уміння самостійно здійснювати математичні узагальнення.

При спрямованому навчанні до правильних методів розв’язання задач важливо зберігати міру допомоги, щоб учні могли самостійно досягти успіху та отримати радість від творчого процесу. Це важливо для стимулювання їхнього інтересу та просування у навчанні. Навчальний матеріал також має містити загальні схеми розв’язування задач, підходи до моделювання прикладних ситуацій та інформацію про сутність, склад та структуру задач.

Багато завдань у розділі "Декартові координати на площині" мають свої алгоритми, однак для розвитку творчого мислення і активності учнів необхідно включати не лише стандартні, але й проблемні завдання. Вчителю слід допомагати у формуванні навичок розв’язування проблемних задач для розвитку творчості та гнучкості мислення. Можливо, варто навчати учнів типовим прийомам розв’язання таких завдань з метою накопичення прийомів і подальшого їх використання в навчальній діяльності. Наприклад, можна стимулювати розумову активність учнів за допомогою різних математичних вправ, ребусів та проблемних задач в розділі "Декартові координати на площині".

При використанні проблемних задач важливо враховувати певні особистісні фактори, такі як пізнавальний інтерес учнів до задач, їхня внутрішня мотивація, потреба у знаходженні оптимального шляху розв’язання та впевненість у власних розумових здібностях.

Процес розв’язування проблемних задач може включати кілька етапів: з’ясування умови завдання, самостійний пошук рішення, обговорення ідей та вибір оптимального шляху, оформлення розв’язку та його перевірка. Допоміжні завдання грають важливу роль у формуванні навичок і прийомів розв’язування проблемних задач.

Щоб навчити учнів розв’язувати задачі, важливо дати їм можливість розширювати спектр навичок і прийомів у розв’язанні. Збагачення практичного досвіду учнів розв’язуванням проблемних завдань сприяє розвитку їх творчого мислення і пізнавальної активності.

Однією з головних причин складнощів у розв’язанні задач може бути відсутність аналізу задачі з точки зору її визначеності та невміння бачити її внутрішню структуру. Необхідною є розробка загальних методів розв’язування завдань, а також пошук учительських підходів до цієї роботи.

1.4 Методичні особливості вивчення теми «Декартові координати на площині».

Тема **«Декартові координати на площині» [23]** містить початкові відомості з аналітичної геометрії. Тут передбачено знаходження відстані між точками на площині, вивчення рівнянь прямої і кола на площині та використання відповідного математичного апарату для розв′язування задач. Учні мають засвоїти поняття про рівняння фігури, усвідомити зв'язок між геометричним образом на координатній площині і його аналітичним заданням, тобто засвоїти «мову рівнянь» у геометрії. Вивчення цієї теми має за мету розуміння і засвоєння методу координат. Слід урахувати, що вивчення цієї теми за часом узгоджено з вивченням у курсі алгебри графіків функціональних залежностей. Учні мають засвоїти відмінність між фігурою, яка є графіком функціональної залежності $y = f(x)$, і фігурою, яка не може бути графіком функціональної залежності і для аналітичного задання якої використовується рівняння виду $f(x; y) = 0$, зокрема, на прикладі вертикальної прямої і кола.

Зміст навчального матеріалу	Вимоги до підготовки учня
1. Поняття координатної площини Опорні знання: ➧ Координатна пряма(вісь) ➧ Координатний промінь (піввісь) ➧ Координатні точки на прямій ➧ Відстань між точками на координатній прямій Елементи основного змісту: ➢ Система координат на площині ➢ Координатна площина ➢ Відповідність між точками площини і вигляд півплощини ➢ Координатні точки на площині ➢ Всі значення координатної точки на площині	**Пояснює:** що таке прямокутна система координат. **Зображує та знаходить на малюнках:** прямокутну систему координат; точку за її координатами(будує точку за координатами, визначає координати заданої точки).
2. Поняття синуса, косинуса, тангенса кутів від 0°до 180° Опорні знання: ➧ Означення синуса, косинуса, тангенса гострих кутів Елементи основного змісту: ➢ Одиничне коло з центром у початку координат ➢ Відкладання кута α від додатньої півосі x	**Пояснює:** що таке синус, косинус,тангенс кутів від 0°до 180°. **Застосовує:** застосовує означення для розв'язування задач.

➢ Означення синуса, косинуса, тангенса через координати точки перетину сторони кута з одиничним колом	
3. Основні тотожності для $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha$ Тотожності: ➡ $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $[tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}; 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}]$ ➡ $\sin(180° - \alpha) = sin\alpha$ ➡ $\cos(180° - \alpha) = -cos\alpha$ ➡ $\sin(90° - \alpha) = cos\alpha$ ➡ $\cos(90° - \alpha) = sin\alpha$ $[tg(180° - \alpha) = -tg\alpha]$ Доведення тотожностей	**Записує і пояснює:** основні тотожності для $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha$. **Обчислює:** синус(косинус) кута за його відомими косинусом(синусом); синус, косинус,тангенс тупого кута. **Застосовує:** тотожності до розв'язування задач.
4. Відстань між точками із заданими координатами <u>Опорні знання:</u> ➡ Відстань між точками на координатній прямій; ➡ Теорема Піфагора <u>Елементи основного змісту:</u> ➢ Формула відстані між точками ➢ Доведення формул відстані	**Формулює:** теорему про відстань між двома точками. **Записує та пояснює:** формулу відстані між двома точками. **Обчислює:** відстань між двома точками, за даними координатами. **Доводить:** теорему про відстані між двома точками. **Застосовує:** формулу відстані для розв'язування задач.
5. Координати середини відрізка <u>Опорні знання:</u> ➡ Відстань між точками на координатній прямій ➡ Означення трапеції <u>Елементи основного змісту:</u> ➢ Формули координат середини відрізка ➢ Доведення формул координат середини відрізка	**Формулює:** теорему про координати середини відрізка. **Записує та пояснює:** формули координат середини відрізка. **Обчислює:** координати середин відрізка. **Доводить:** теорему про координати середини відрізка. **Застосовує:** формули координат середини відрізка для розв'язування задач.
6. Поняття рівняння. Рівняння кола. <u>Опорні знання:</u> ➡ Формула відстані між двома точками	**Пояснює:** що таке рівняння фігури. **Записує та пояснює:** рівняння кола. **Характеризує:** коло за його рівнянням.

Елементи основного змісту: ➢ Означення рівняння фігури ➢ Теорема про рівняння кола ➢ Доведення теореми про рівняння кола ➢ Наслідок з теореми про рівняння кола	**Зображає та знаходить на малюнках:** коло за його рівнянням у заданій системі координат. **Доводить:** теорему про рівняння кола. **Застосовує:** рівняння фігур для розв’язування задач.
7. Рівняння прямої ➢ Рівняння прямої, що проходить через початок координат ➢ Теорема про зміну кутового коефіцієнту ➢ Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом[Виведення рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом] ➢ Рівняння прямої, що проходить через дві точки [Доведення рівняння прямої, що проходить через дві точки] ➢ Загальне рівняння прямої	**Пояснює:** як можна задати пряму в системі координат. **Записує та пояснює:** рівняння прямої. **Характеризує:** пряму за її рівнянням. **Зображує та знаходить на малюнках:** пряму за її рівнянням у змінній системі координат. **Застосовує:** рівняння прямої для розв’язування задач.
8. Метод координат ➢ Суть методу координат ➢ Етап застосування методу координат	**Пояснює:** суть методу координат та етапи його застосування. **Застосовує:** метод координат до розв’язування геометричних задач (на обчислення та доведення).
9. Контрольна робота	

Метод координат визначає положення точок або об'єктів за допомогою чисел або символів. Наприклад, для позначення розташування шахових фігур на дошці використовуються числа та літери. Координати точок або об'єктів на прямій, площині, у просторі чи на поверхні вказують на їхнє місцезнаходження. Використання методу координат спрощує процес пошуку шляхів до розв'язання завдань. При використанні цього методу:

1. Ми створюємо систему координат.
2. Знаходимо координати точок.

3. Розраховуємо відстані між точками, побудовуємо рівняння прямих тощо.
4. Аналізуємо отримані співвідношення.

Вибір системи координат залежить від мети дослідження та його характеру. Сучасна Декартова система координат для двох вимірів (відома як прямокутна система координат) використовує дві осі, які перпендикулярні одна до одної. Площину, на якій розташовані ці осі, іноді називають xy-площиною. Ось горизонтальна вісь позначається як x (вісь абсцис), вертикальна - як y (вісь ординат). У тривимірному просторі до цих двох вісей додається третя, перпендикулярна xy-площині, яку позначають як вісь z. Всі точки в системі Декартових координат складають Декартовий простір.

Точка перетину, де осі зустрічаються, називається початком координат та позначається як O. Відповідно, вісь *x* може бути позначена як O*x*, а вісь *y* — як O*y*. Прямі, проведені паралельно до кожної осі на відстані одиничного відрізку (одиниці виміру довжини), починаючи з початку координат, формують координатну сітку (рис.1).

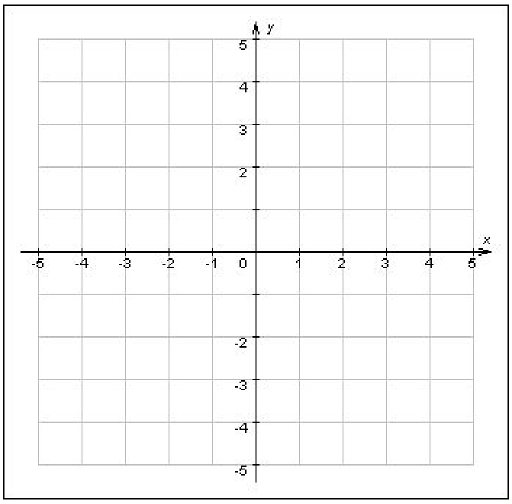


Рис.1

Точка в двовимірній системі координат задається двома числами, які визначають відстань від осі O*y* (абсциса або *x* - координата) та від осі O*x* (ордината або *y* - координата) відповідно. Таким чином, координати формують впорядковану пару (кортеж) чисел (*x*, *y*).

Кожній парі чисел на координатній площині відповідає єдина точка.

На рис. 2 показано, як позначити, наприклад, точку A(-3;2) і B(2;-3)

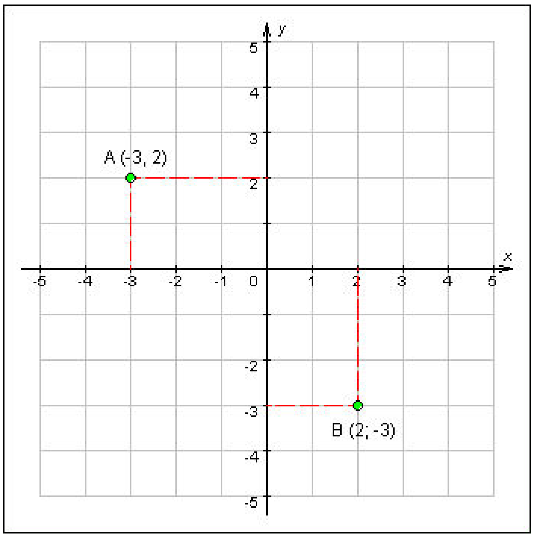


Рис.2

На рис. 3 показано, як система координат розділена осями на чотири чверті.

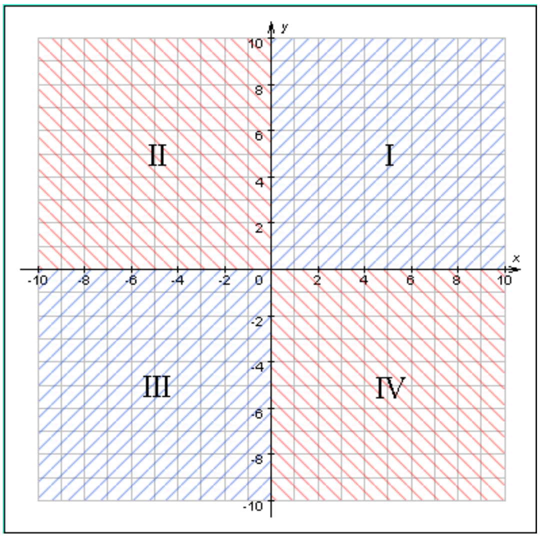


Рис.3

Декартову систему координат (або прямокутну систему координат) вперше запропонував відомий французький математик Рене Декарт (1596 -

1650), близько 1637 р. у праці «Геометрія», одному з додатків до видатного філософського твору «Міркування про метод».

Математик, філософ, фізик і фізіолог, творець аналітичної геометрії і сучасної алгебраїчної символіки, автор методу радикального сумніву у філософії, механіцизму у фізиці, предтеча рефлексології.

Тому їх часто називають декартовими координатами (декартові координати - Cartesian rectangular coordinates).

Основні задачі на координатній площині.

2.1 Відстань між двома точками за їх координатами:

Якщо A(x_1;y_1) і B(x_2;y_2) - дві довільні точки, то відстань між двома точками знаходиться за формулою:

$$\boxed{d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ця формула правильна і для $x_1 = x_2$,

$$\boxed{AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|}$$

або $y_2 = y_1$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.}$$

Це коли відрізок AB паралельний осям координат *Oy* або *Ox* відповідно або лежить на цих осях.

2.2 Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай дано дві довільні точки A(x_1;y_1) і B(x_2;y_2) та точка C(x;y), яка ділить відрізок у відношенні m:n. Тоді координати x;y точки C можна обчислити за формулами:

$$\boxed{x = \frac{n}{n+m}x_1 + \frac{m}{n+m}x_2} \qquad \boxed{y = \frac{n}{n+m}y_1 + \frac{m}{n+m}y_2}$$

Якщо $\frac{\text{AC}}{\text{CB}} = \frac{m}{n} = \lambda$, то координати точки С можна знайти за формулами

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}; \qquad y_0 = \frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}}$$

2.3 Необхідна умова розміщення трьох точок на одній прямій

Як точка C($x;y$) належить прямій, що проходить через точки A($x_1;y_1$) і B($x_2;y_2$), то

2.4 Координати середини відрізка:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}}$$

Якщо A($x_1;y_1$) і B($x_2;y_2$) - дві довільні точки, а C($x_0;y_0$) середина відрізка AB ($\lambda = 1$), координати середини відрізка знаходяться за формулою

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{x_2+x_1}{2}; \qquad y_0 = \frac{y_2+y_1}{2}}$$

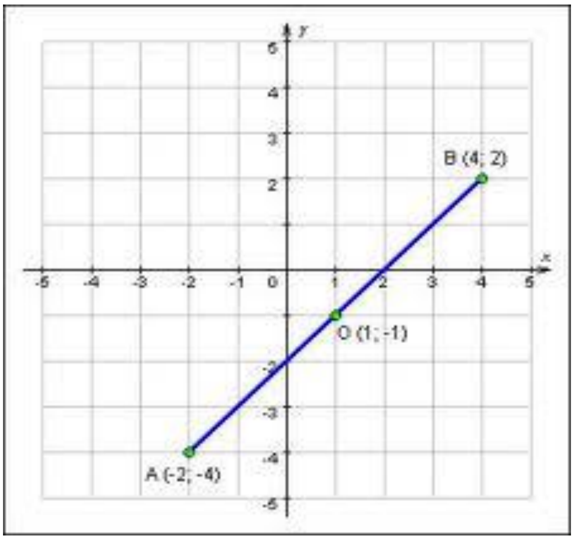


Рис.4

Наприклад: За рис.4 знайдемо координати середини O відрізка AB із кінцями в точках A($-2;-4$) і B (4;2)

$$x_0 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad y_0 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

2.5 Рівняння кола

Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки фігури. І навпаки, будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

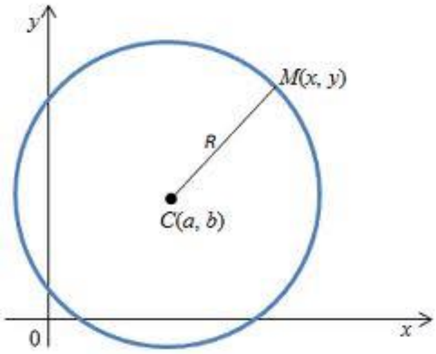


Рис.5

Рівняння кола з центром у точці С($a;b$) і радіусом R зображено на рис.5.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Наприклад.

Знайдіть координати центра та радіус кола $x^2+y^2-8x+8y+7=0$.

Розв'язання

Згрупуємо окремо доданки, які пропорційні x, і окремо, які пропорційні y. Отримані суми доповнимо до повного квадрату:

$x^2+y^2-8x+8y+7=(x^2-8x)+(y^2+8y)+7=(x^2-2\times4x+16-16)+(y^2+2\times4y+16-16)+7=(x^2-2\times4x+16)+(y^2+2\times4y+16)-25=(x-4)^2+(y+4)^2-25=0.$

$(x-4)^2+(y+4)^2=25$ – рівняння кола

з центром у точці А(4; – 4) і радіусом R = 5.

Відповідь: А(4; – 4), R = 5.

Якщо a = 0 і b = 0, тобто центр кола є початок координат, то рівняння кола з центром в точці О (0;0) (рис.6) має вид:

$$x^2+y^2=R^2$$

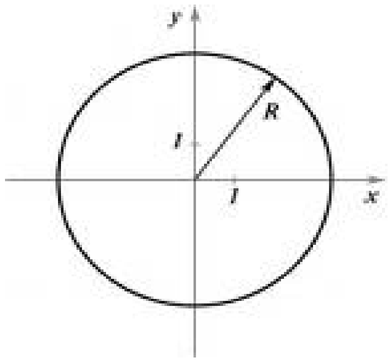


Рис.6

2.6 Рівняння еліпса

Означення. Еліпсом називається ГМТ, сума відстаней від яких до двох заданих точок F_1 $і$ F_2 є сталою величиною, більшою ніж $F_1 F_2$. Точки F_1 $і$ F_2називають фокусами еліпса.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

При $a = b$ одержується коло (рис.7).

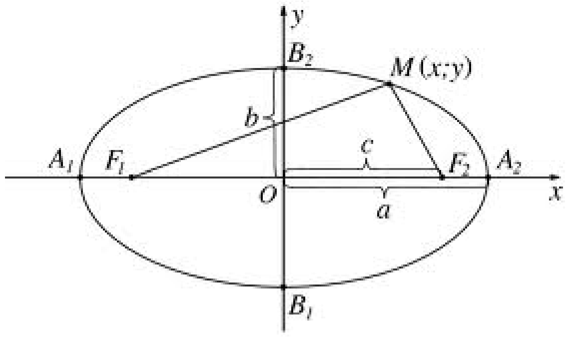


Рис.7

2.7 Рівняння гіперболи

Означення. Гіперболою називається ГМТ, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, меншою ніж $F_1 F_2$. Точки F_1 $і$ F_2 називають фокусами гіперболи.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Залежність між параметрами *a, b, c* виражається співвідношенням (рис.8):

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$$

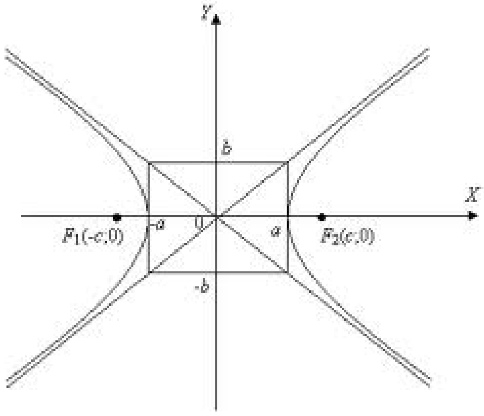


Рис.8

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1}$$

Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1\,(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (рис.9).

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$, а також дві директриси, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо дійсна та уявна півосі рівні *(a = b)***,** то гіпербола називається рівносторонньою. Рівняння рівносторонньої гіперболи має вигляд:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

Рівняння ЇЇ асимптот $y =$

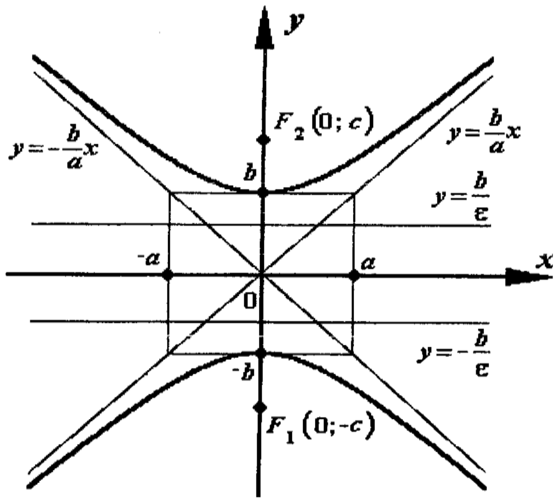


Рис.9

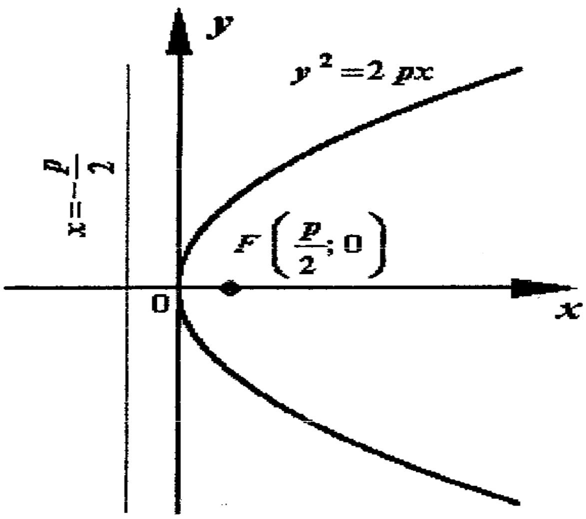
Параболою називається ГМТ, рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь ***Ox***, (рис. 10) має вигляд:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то вітки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то вітки



напрямлені вліво (рис. 10).

Рис.10

2.8 Рівняння прямої в декартовій системі координат

Рівняння прямої має вигляд

$$ax + by + c = 0$$

де a,b,c – константи, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by + c = 0$ задає вертикальну пряму: якщо $b \neq 0$, то це рівняння дає не вертикальну пряму.

2.9 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

$A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

2.10 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \text{ де } k = tg\alpha$$

де α - кут, який утворює ця пряма з додатнім напрямком осі абсцис.

2.11 Рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку $M(x_0;y_0)$

$$y = k(x - x_0) + y_0 \qquad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

де $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$ координати двох довільних точок цієї прямої.

2.12 Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Якщо пряма пере[illegible]х з координатами $A(a;0)$ і

B(0; b), то вона може бути знайдена, якщо використати формулу рівняння прямої у відрізках (рис.11).

Це рівняння називається *рівнянням прямої у відрізках*, бо числа a і b показують, які відрізки відтинає пряма на осях координат.

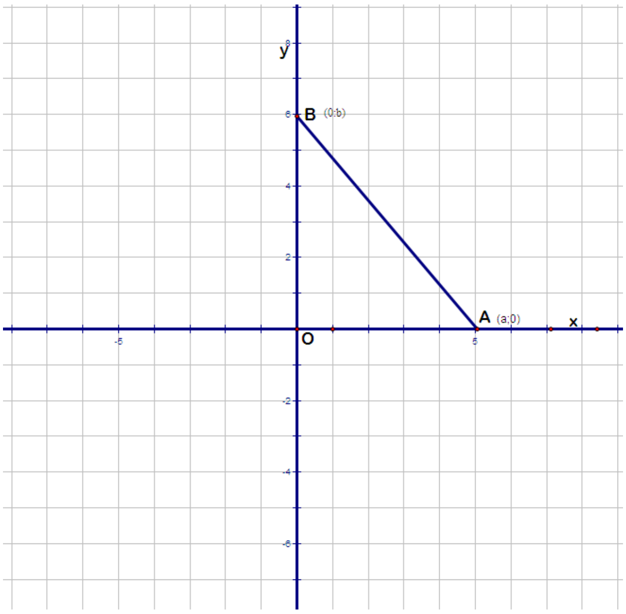


Рис.11

2.13 Відстань від точки до прямої заданою рівнянням $y = \pm x$

Відстань d від точки M(x_0;y_0) до прямої, заданої рівнянням

$ax + by + c = 0$, обчислюється за формулою:

$$\boxed{d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

2.14 Взаємне розміщення прямих на площині

Якщо дві прямі лежать на площині, то можливі три різних випадки їх взаємного розташування:

- прямі перетинаються (тобто мають одну спільну точку);
- прямі паралельні і не співпадають;
- прямі співпадають.

Щоб визначити, який з цих випадків має місце, якщо прямі задані своїми рівняннями, то потрібно розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \mathrm{a}_1 + b_1 = c_1, \\ a_2 + b_2 = c_2. \end{cases}$

Розв’язуючи систему рівнянь можна отримати такі три випадки

- Система має тільки один розв’язок.
- Система не має розв’язків.
- Система має нескінченну множину розв’язків.

Система не має розв’язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$,

Система має єдиний розв’язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

Система має нескінченне число розв’язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$,

або можна визначити зо допомогою таких властивостей коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned} \quad \text{або} \quad \begin{aligned} y &= k_1x + b_1, \\ y &= k_2x + b_2, \end{aligned}$$

прямі ***паралельні,*** якщо

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad \text{або} \quad k_1 = k_2,$$

прямі ***перетинаються,*** якщо

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \qquad \lg\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|,$$

прямі ***збігаються,*** якщо

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 &= 0, \\ a_2c_1 - a_1c_2 &= 0. \end{aligned}$$

2.15 Умова перпендикулярності і паралельності прямих

Якщо загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$ запишемо відносно у, то одержимо $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, та виконати заміну $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, то маємо рівняння прямої $y = kx + l$ з кутовим коефіцієнтом.

Прямі $y = k_1x + l_1$ *і* $y = k_2x + l_2$ будуть ***паралельні*** тоді і тільки тоді, коли кутові коефіцієнти будуть рівні $k_1 = k_2$, $l_1 \neq l_2$

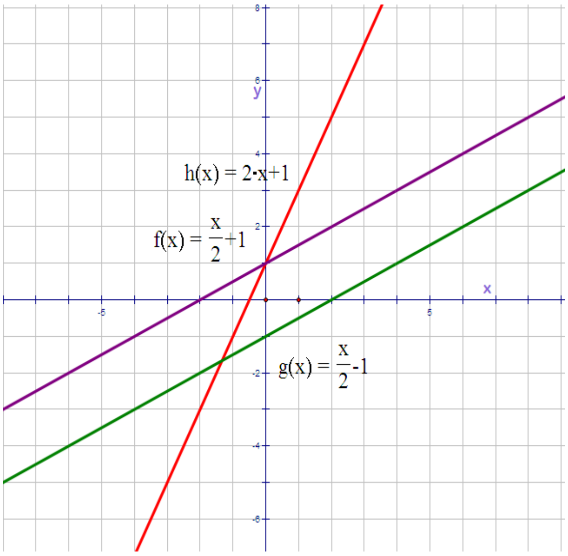


Рис.12

На рис. 12, прямі $y = \frac{x}{2} + 1$ та $y = \frac{x}{2} - 1$ паралельні, а пряма $y = 2x + 1$ перетинається з даними прямими.

Прямі $y = k_1x+l_1$ *і* $y = k_2x+l_2$ будуть ***перпендикулярні*** тоді і тільки тоді, коли добуток кутових коефіцієнтів дорівнює $\mathbf{-1}$.

$$\boxed{\boldsymbol{k_1 \times k_2 = -1}}$$

ВИСНОВОК

У першому відділі дипломної роботи було збудоване базове фундамент для вирішення основного завдання - розробки методичної системи евристичного навчання геометрії для учнів 9 класів. Виявлено, що така методична система є необхідною у процесі навчання з наступних причин:

- розвиток евристичних прийомів учнів під час уроків геометрії грає ключову роль у їхньому особистісному рості;
- для вирішення нестандартних задач необхідність у володінні учнями евристичними навичками, формування яких здійснюється за допомогою використання евристичних методів на уроках;
- евристичні прийоми можливо освоїти лише шляхом самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів, організація якої має відбуватися у процесі навчання;

- навчально-пізнавальна евристична діяльність є оптимальним видом активності для розвитку евристичних умінь учнів на геометрійних уроках.

Для створення методичної системи евристичного навчання геометрії у 9 класі необхідно враховувати психолого-педагогічні передумови формування евристичних прийомів та відповідати методичним вимогам щодо формування та розвитку цих умінь.

Один з основних методів, що дозволяє учням активно проявляти свою творчість під час навчання, - це евристичний метод. Вирішення проблемних задач за допомогою евристичних методів допомагає учням розвивати критичне мислення, знаходити вірне рішення, застосовувати свої знання на практиці та застосовувати їх у нових ситуаціях.

Створення проблемних ситуацій та активна пошукова діяльність на їх основі під час навчання допомагають формувати у школярів стійкий інтерес до математики, сприяють їхньому саморозвитку та становленню особистості.

Проблемні задачі мають свою специфіку в тому, що вони часто пов'язані з аналізом нестандартних ситуацій. Розв'язання цих ситуацій вимагає від учнів кмітливості та винахідливості, що сприяє формуванню гнучкого та творчого мислення.

У процесі вивчення геометрії школярі часто стикаються з певними пізнавальними труднощами. Проте, у навчанні, заснованому на евристичному підході, ці труднощі можуть стати стимулом для вивчення та допомагати учням збагачувати свої знання.

Цінність евристичних уроків геометрії полягає у тому, що учні самі здобувають нові знання, навчаються застосовувати їх на підставі власного досвіду, а вчитель лише направляє їх у правильному напрямку. Евристичне навчання на уроках геометрії сприяє розвитку власних поглядів, розумінню світу та самореалізації учнів.

Однак евристичний метод має свої обмеження - його успішність значно залежить від рівня розвитку та навчання учнів, особливо від сформованості їхніх пізнавальних навичок, а також від досвіду та кваліфікації вчителя.

Необхідно надалі розвивати та удосконалювати методи евристичного навчання для розв'язання нестандартних завдань на уроках геометрії.

Отже, робота над знаходженням нових способів та умов для розвитку творчого навчання є важливим завданням для сучасної психології, педагогіки та методики викладання математики.

Висновки до розділу 1

З огляду на аналіз літературних джерел та розгляд останніх досліджень, виявлено, що евристичний метод навчання у багатьох випадках сприймався як один із прийомів чи методів освіти, і не завжди його потенціал був повністю розкритий. Термін "евристика" отримує різні тлумачення в різних галузях науки, що вказує на його мультидисциплінарний характер. В усвідомленні евристичного методу значуще місце займає психологія, а його поняття часто застосовується в педагогіці та філософії.

Також важливо зазначити, що евристична діяльність, як окрема форма людського мислення, вивчається у різних галузях науки. Вона сприяє розвитку нових систем дій та виявленню раніше невідомих закономірностей об'єктів. Однак, хоча прийоми евристики можна описати логічними схемами, сам процес евристичної діяльності на сьогоднішній день ще не має математичного виразу.

Історично, евристичний метод навчання математики вже застосовувався у XIX столітті, і він продовжує використовуватися в сучасній освіті. Українські педагоги-математики вже тоді підтримували цей підхід, вважаючи традиційні методи застарілими та неефективними.

Отже, ретельний аналіз літературних джерел та історичний контекст підкреслюють значущість евристичного методу навчання, його мультидисциплінарний характер і потенціал у вивченні та розвитку різних галузей науки та освіти.

РОЗДІЛ ІІ Методичні особливості евристичного навчання при розв'язуванні проблемних задач.

2.1 Аналіз підручників та навчальних посібників з геометрії 9 клас.

У навчальних закладах 9-го класу математику вивчатимуть за новими підручниками: "Геометрія. 9 клас" (автори: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) видавництва "Гімназія"; "Геометрія. 9 клас" (автори: Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.) видавництва "Зодіак - ЕКО"; "Геометрія. 9 клас" (автор: Апостолова Г. В.) видавництва "Ґенеза"; "Геометрія, 9" (автори: А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршова) видавництва "Ранок". Ці підручники створено відповідно до Державного стандарту та нових програм з геометрії для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

Підручник "Геометрія. 9 клас", автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, продовжує серію підручників з геометрії для учнів 7-8 класів. Відповідно до кількості тем, що вивчаються у 9 класі, підручник містить шість параграфів, які поділені на пункти.

У структурі підручника виклад матеріалу уніфікований. Кожен пункт включає теоретичну частину, приклади застосування матеріалу, контрольні запитання для самоперевірки, завдання для виконання в класі і самостійного розв'язування. Завдання поділено на практичні, що вимагають побудови геометричних об'єктів, і задачі для розв'язування.

Після кожної теми є завдання у формі тесту "Перевір себе" (6 завдань, по 12 запитань). Така форма самоперевірки сприяє формуванню навичок роботи з матеріалом у тестовій формі. Відповіді до тестів наведено.

Останній розділ містить вправи для повторення матеріалу 9 класу з геометрії. Також є стислі відомості з курсу геометрії 7-8 класів у вигляді довідкового матеріалу. "Предметний покажчик" містить посилання на нові поняття курсу 9 класу. Додається таблиця значень тригонометричних функцій.

Задачі позначені як "ключові", і вони сприяють розвитку творчих навичок учнів та зменшенню кількості теорем, представлених у теоретичній частині. Також активізують самостійне розуміння матеріалу.

У підручнику представлено відповіді до більшості завдань, відповідні високому рівню навчальних досягнень учнів. Вони супроводжуються детальними поясненнями для складних завдань. Розділ під назвою "Коли зроблено уроки" містить різноманітні матеріали, спрямовані на підвищення інтересу до предмета та глибоке вивчення матеріалу.

Тут подано оповідання з історії математики, які стосуються становлення та розвитку понять, що вивчаються у відповідному теоретичному матеріалі підручника. Також наведено короткі біографічні відомості видатних вчених, які внесли значний вклад у розробку відповідних розділів математики.

У підручнику ретельно розглядається застосування теоретичних знань, вивчених у загальному курсі, для розв'язування завдань підвищеного рівня складності.

Використання доступної мови і чітке викладання матеріалу дають можливість учням самостійно засвоювати навчальний матеріал за потреби. Цьому сприяє використання жирного шрифту для математичних термінів, правил та найважливіших математичних тверджень у теоретичній частині.

Підручник "Геометрія, 9" (автори М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова) за методичними підходами до відбору змісту, структурою, художнім оформленням і дизайном аналогічний підручникам з геометрії для 7 і 8 класів цих авторів.

Він має вступне слово до учня, 6 розділів і прикінцеві рубрики. Кожен розділ містить перелік передбачуваних пізнавальних результатів та рубрику для перевірки засвоєння матеріалу.

Кожен розділ поділений на параграфи з наскрізною нумерацією. У кожному параграфі є основний матеріал, додаткові відомості, питання для повторення, система завдань різної складності і блок завдань для практичного застосування.

Матеріал підручника спрямований на самостійне вивчення учнями.

Виклад матеріалу починається з опису практичних дій або відомого досвіду учнів. Малюнки виконують не лише ілюстративну, але і навчальну роль.

Підручник орієнтований на учнів різних навчальних здібностей. Рубрика "Дізнайтеся більше" призначена для зацікавлених учнів, що бажають поглибити свої знання. Наприкінці підручника є розділ "Повторення вивченого" із систематизованим матеріалом, вивченим протягом року. Тут також наведено завдання різної складності, що охоплюють різні аспекти матеріалу.

У підручнику основні визначення понять і формулювання теорем відзначені рамкою з метою спрощення їх розуміння, запам'ятовування та вміння використовувати їх у розв'язанні задач. Інші важливі деталі відображено жирним шрифтом, а наукові терміни виділено курсивом для полегшення їх розпізнавання.

У підручнику "Геометрія. 9 клас" від Апостолової Г.В. можна працювати як у звичайних класах, так і у класах з поглибленим вивченням математики.

Матеріал розділений на розділи, такі як "Координатна площина. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°. Розв'язування трикутників", "Правильні багатокутники. Довжина кола. Площа круга", "Геометричні перетворення", "Вектори на площині", "Початкові відомості зі стереометрії" та "Цікаві додатки".

Останній розділ, "Цікаві додатки", призначений для тих, хто прагне поглибити свої знання у геометрії та дізнатися більше про її застосування в алгебрічних задачах, гармонічних четвірках точок, золотому перерізі, елементах проективної геометрії, інверсії, індукції в геометрії та інших темах. Відповідні додатки мають перелік літератури для подальшого вивчення тем та завдання для самостійного виконання, що дозволяє не лише опрацювати матеріал на уроці чи позакласних заняттях, але й самостійно глибше вивчати певні теми (наприклад, для підготовки реферату чи дослідницької роботи для МАН).

У підручнику подано кілька рівнів дидактичних завдань та матеріалу для вивчення теорії.

Теоретичний матеріал розділений на параграфи, які обов'язкові для вивчення відповідно до державних стандартів, та ті, які рекомендується ознайомитися, але не є обов'язковими для оцінювання в загальноосвітніх класах. Також у підручнику є матеріал, який не є обов'язковим для вивчення і призначений для поглибленого вивчення геометрії.

Розділ "Цікаві додатки" містить додатковий матеріал, який можна використовувати у класах з поглибленим вивченням математики або на позакласних заняттях.

Рубрика "Для допитливих" доповнює навчальний матеріал параграфів додатковою інформацією.

Зміст дидактичного матеріалу розширюється різними рівнями складності та практичними завданнями. Задачі "Для допитливих" містять високий рівень складності і не обмежуються темами програми. Кожен розділ підручника включає завдання для повторення, готування до оцінювання та підсумкове повторення курсу планіметрії в тестовій формі.

Розділ "Словничок" дозволяє швидко відновлювати зміст термінів і означень, а "Узагальнюючі опорні схеми" допомагають узагальнити матеріал теми та полегшують розв'язання задач. Це дозволяє вчителю гнучко працювати з класом, враховуючи їхні потреби.

Підручник "Геометрія—9" А. П. Єршової, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановського та С. В. Єршова продовжує попередній курс, використовуючи систему організації та змістові лінії. Порівняно з попередніми підручниками, цей варіант має нові дидактичні підходи, пов'язані з методами геометрії, що розширюють теми та методи розв'язання задач.

Структура, обсяг та співвідношення розділів матеріалу повністю відповідають програмі. Але порівняно з традиційними підходами введено кілька важливих інновацій. Наприклад, нове означення співнапрямлених променів спрощує деякі доведення і розвиває уявлення учнів про геометричні перетворення.

Кожен розділ, як "Декартові координати на площині", "Геометричні перетворення" та "Вектори на площині", має додатковий параграф з особливостями відповідного методу геометрії. Значно розширено практичні вправи і задачі, що різноманітяться за складністю.

Найбільш складні теореми пояснюються у загальному тексті, а строгі доведення наводяться в "Додатках".

У підручнику з геометрії враховано особливості третього року навчання цього предмета. Кожен розділ має свою структуру: він складається з параграфів, а параграфи - з пунктів. Така організація надає вчителям орієнтир для проведення уроків у різних форматах: блочно-модульній, лекційно-семінарській або комбінованій.

Основний зміст тексту підручника включає визначення, теореми, доповнення та приклади розв'язування задач. Кожну теорему супроводжує її назва. На завершення кожного розділу розміщений підсумковий огляд у вигляді таблиць, що ілюструють зв'язки між елементами навчального матеріалу. Підручник завершується предметним покажчиком, який містить основні поняття й факти, вивчені протягом року.

У кінці кожного розділу представлені контрольні запитання та типові завдання для підготовки до контрольних робіт. Вони дозволяють учням самостійно оцінити рівень своєї підготовки та сприяють корекції знань. Додаткові завдання до розділів допомагають організувати повторення та узагальнення вивчених тем.

Комплексний підхід до диференціації матеріалу враховує види діяльності, фундаментальне спрямування й творчий фактор. Теоретичний матеріал побудовано за схемою «визначення основних понять — аксіоми й теореми - наслідки — приклади застосування». Також увага приділяється опорним задачам, які містять додаткові теоретичні відомості.

Окрім цього, задачі розділені на кілька груп. Усні вправи є проміжним етапом між вивченням теорії та розв'язуванням письмових задач. Графічні вправи допомагають учням уявити геометричні конфігурації. Письмові задачі поділені за рівнями складності та видами діяльності. І накінець, після кожного параграфу подано теоретичний матеріал для повторення та відповідні задачі.

Розв'язування всіх задач не обов'язкове, оскільки їх кількість перевищує наявний навчальний час. Вони подані у надлишковій кількості для того, щоб дати вчителям можливість ширше організувати навчання, диференціювати роботу учнів та враховувати їхні індивідуальні можливості.

2.2 Аналіз різних методик викладання тем з геометрії 9 клас.

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики.

В пропедевтичному плані з декартовими координатами учні вперше ознайомлюються на початку 5 класу. Там вводяться поняття «система координат», «початок координат», «координатна площина», «координати точки», «абсциса», «ордината», «вісь абсцис», «вісь ординат». Тому коли на уроках геометрії учні приступають до вивчення декартових координат на площині, з більшістю понять, пов’язаних з цією темою, вони уже знайомі. Залишвється тільки повторити відповідний матеріал, звести все в систему і наголосити, що декартові координати відіграють важливу роль не тільки в алгебрі, а й геометрії.

Є пропозиції всю шкільну геометрію будувати на основі методу координат. З нею не погоджуються більшість методистів, насамперед тому, що метод координат не дає можливість так, як традиційні методи елементарної геометрії, розвивати просторову уяву учнів. Однак і недооцінювати метод координат було б неправильно.

Учні загальноосвітньої школи повинні добре зрозуміти зв'язок, що існує між найважливішими геометричними фігурами і алгебраїчними рівняннями, і що це дає можливість:

- багато рівнянь і їх систем розв’язувати графічно;
- властивості геометричних фігур досліджувати, розв’язуючи відповідні рівняння.

Під час опрацювання теми «Декартові координати на площині» учні повинні навчитись відшукувати координати середини відрізка, відстань між двома точками, знати рівняння кола, прямої. Йдеться про відповідність подану в таблиці:

Геометричні поняття	Відповідні алгебраїчні співвідношення
Точки A, B, C	Пари чисел $(a_1,; a_2)$, $(b_1; b_2)$, $(c_1; c_2)$,
C – середина AB	$c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2};\ c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$
d – відстань від A до B	$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_1)^2}$
Коло радіуса R з центром в точці $O\ (a; b)$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Пряма	$ax + by = c$

При використанні цих співвідношень опираються на теореми Фалеса і Піфагора.

Пояснюючи учням питання про координати середини відрізка, даний відрізок звичайно малюють в першій чверті, бо так простіше. Проте бажано хоч в кінці пояснення зауважити, що розглядуваний відрізок AB може бути розміщений відносно системи координат як завгодно. Наприклад, якщо відрізок AB розміщено, як показано на рис.1, то абсциса x точки C така ж, як і абсциса точки X – середини відрізка AB_1. За теоремою Фалеса $|x - x_1| = |x - x_2|$ звідки або $x - x_1 = x - x_2$, що для даного розміщення AB неможливо, або $x - x_1 = x_2 - x$. З останньої рівності знаходимо $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогічно можна показати, що й $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Рівняння кола і прямої зручно виводити, користуючись формулою відстані. Наприклад, щоб вивести *рівняння прямої* h рис.2, розглядають дві довільні симетричні відносно цієї прямої точки $A_1 = (a_1; b_1)$ і $A_2 = (a_2; b_2)$. Якщо $A\ (x; y)$ – будь- яка точка

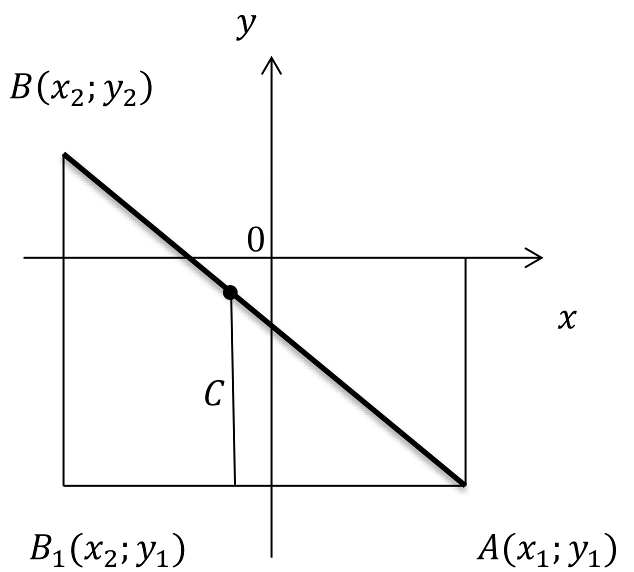


рис. 1

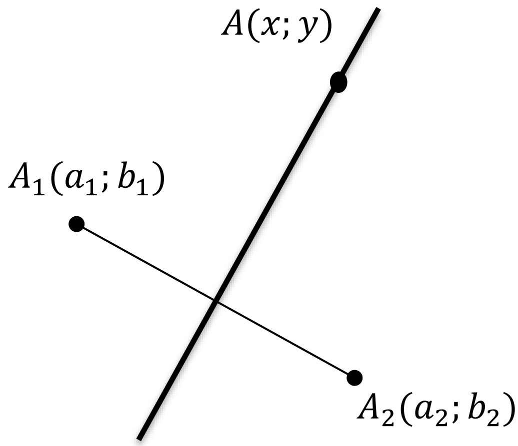


рис. 2

даної прямої, то $AA_1 = AA_2$ (а будь- яка точка, що не лежить на h, цій умові не задовольняє). Отже,

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_1)^2,$$

або

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + ({a_1}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {b_2}^2) = 0.$$

Позначивши $2(a_2 - a_1) = a, 2(b_2 - b_1) = b, ({a_1}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {b_2}^2) = c,$ дістанемо шукане рівняння прямої $ax + by + c = 0$.

Коефіцієнти $a,\ b,\ c$ цього рівняння залежать тільки від координат точок A і A_1.

Пояснюючи учням питання про координати середини відрізка, даний відрізок звичайно малюють в першій чверті, бо так простіше. Проте бажано хоч в кінці пояснення зауважити, що розглядуваний відрізок AB може бути розміщений відносно системи координат як завгодно. Наприклад, якщо відрізок AB розміщено, як показано на рис.1, то абсциса x точки C така ж, як і абсциса точки X – середини відрізка AB_1. За теоремою Фалеса $|x - x_1| = |x - x_2|$ звідки або $x - x_1 = x - x_2$, що для даного розміщення AB неможливо, або $x - x_1 = x_2 - x$. З останньої рівності знаходимо $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогічно можна показати, що й $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

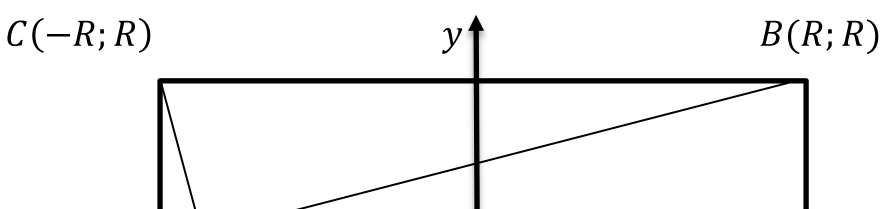
Розглядаючи *рівняння кола* і *прямої,* слід відмітити, що позначають в них ті чи інші букви. Бо нерідко учні на букви $a,\ b,\ c,\ x,\ y$ дивляться як на «рівноправні» змінні, що свідчить про нерозуміння суті. Сказати тільки, що в здобутому рівнянні x, y змінні, а $a,\ b,\ c$ сталі, мало. Учні часто не розуміють цього, бо, розв'язуючи різні задачі, вони й замість $a,\ b,\ c$ підставляють різні числові значення, тому вважають, що і ці букви позначають змінні.Якщо виникнуть подібні непорозуміння, треба роз'яснити, що змінні бувають різних ступенів: коли йдеться про одну певну пряму, $a,\ b,\ c$ позначають певні сталі числа, а $x,\ y -$ змінні, коли ж переходимо від однієї прямої до іншої, принаймні деякі із коефіцієнтів $a,\ b,\ c$ неминуче змінюватимуться.

Зрозуміло, що пояснюючи учням *рівняння прямої*, бажано пов'язати новий матеріал з добре відомим їм матеріалом про графік лінійної функції. Вони добре повинні розуміти, що пряма, якій відповідає рівняння

$ax + by + c = 0$ (при $b \neq 0$) $\neq, -$ не що інше як графік функції $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Тільки пряма, паралельна осі y, якій відповідає рівняння $ax + c = 0$, не є графіком функції.

Метод координат можна доводити багато геометричних теорем, зокрема таких: перетворення симетрії відносно прямої є рух, гомотетія є перетворення подібності і т. ін. Зручно користуватись цим методом під час опрацювання паралельного перенесення і векторів. А можна використовувати його іпри розв'язуванні задач.

Знайдіть суму квадратів відстаней від довільної точки кола радіуса R до вершин описаного навколо цього кола квадрата.



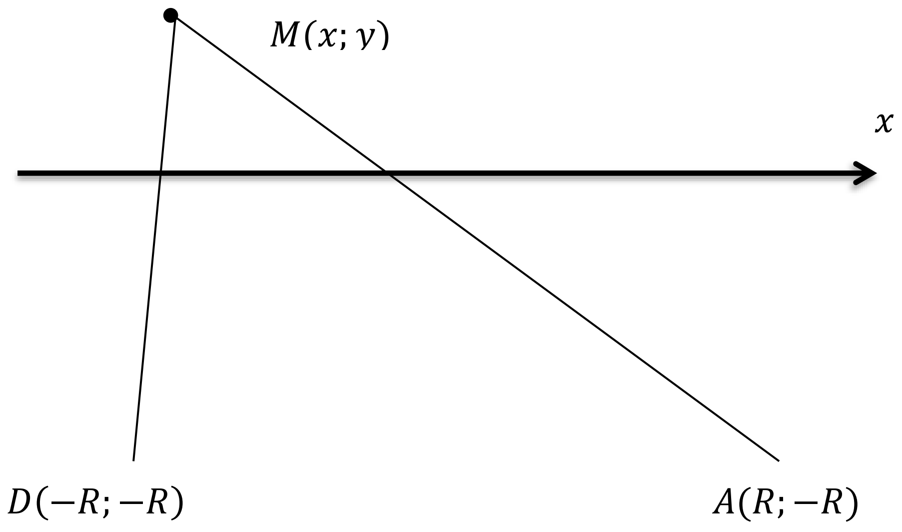


Рис. 3

Розв’язання. Нехай дано коло радіуса R, описаний навколо нього квадрат $ABCD$ і довільну точку М на колі рис. 3. Щоб виразити через R суму $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$, розмістимо систему координат так, щоб її осі були серединними перпендикулярами для сторін квадрата. Тоді вершини квадрата матимуть такі координати: $A(R;-R)$, $B(R;R)$, $C(-R;R), D(-R;-R)$, а даному колу відповідатиме рівняння $x^2+y^2=R^2$. Якщо $M(x;y)-$ довільна точка кола, то

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=(x-R)^2+(y+R)^2+(x-R)^2+(y-R)^2+$$
$$+(x+R)^2+(y-R)^2+(x+R)^2+(y+R)^2=4(x^2+y^2+2R^2)=12R^2.$$

Відповідь: $12R^2$.

2.3 Реалізація евристичного навчання у розв’язуванні проблемних задач.

Задатки творчих здібностей присутні майже в усіх школярів, але їх потрібно розвивати. Евристичні методи зазвичай спрацьовують краще для сильних учнів, яким звичайне завдання здається легким і нецікавим, тому такий учень зацікавиться задачею, що дозволить реалізувати свої можливості та проявити творчий підхід.

Для сильних учнів евристичні методи найкраще застосовувати при розв'язанні нестандартних задач. До таких можна віднести олімпіадні задачі, які для учня є нестандартними. До розв'язання їх потрібно підходити творчо, розглянувши всі можливі варіанти, і дати можливість учню крок за кроком дійти до вірного результату. Інколи припущення, що задача розв'язується саме таким чином, є хибним, а інколи розв'язок виявляється досить легким. Проте з такого припущення випливає розв'язок частини задачі чи деякої іншої задачі, умову якої учень може самостійно сформулювати.

Звичайно, без труднощів не обійтися, але часто ці труднощі стають стимулом у навчанні. Якщо в учнів, в силу різних причин, є прогалини в знаннях з математики, то задачі потрібно підбирати так, щоб труднощі, які долають учні, були їм під силу і вони самі могли заповнити ці прогалини.

Ставлячи перед учнем проблему, шляхом послідовно поставлених задач, потрібно наводити учнів на правильне розв'язання проблеми. Щоб розв'язати задачу, необхідно знайти схему, що приведе до одержання результату: розуміння постановки задачі, складання плану рішення, здійснення плану, аналіз отриманого результату.

Розв'язання задач - специфічне досягнення розуму, розум - це особливий дар, яким наділена людина.

Тільки поступова і продумана робота вчителя і учня дає результат.

Фрагмент уроку на тему «Прямокутна система координат на площині (повторення). Координати середини відрізка».

Тип даного уроку – засвоєння знань, умінь та навичок.

Основна мета уроку – повторити, узагальнити та систематизувати набуті в попередніх класах під час вивчення теми «Прямокутна система координат» знання учнів. Узагальнити й систематизувати вміння будувати точки із заданими координатами на координатній площині та знаходити координати точок за їх зображенням.

Основна мета даного уроку є розглянути формули координат середини відрізка. В процесі уроку в учнів сформовуються первинні вміння відтворювати вивчені формули та застосовувати їх до розв'язування задач.

На цьому етапі вчитель проводить вступну бесіду, в ході якої повідомляє учням:

- історію «відкриття» Рене Декартом прямокутної системи координат;
- важливість координатного методу розв'язування геометричних задач для різних галузей науки і техніки;
- загальний зміст координатного методу.

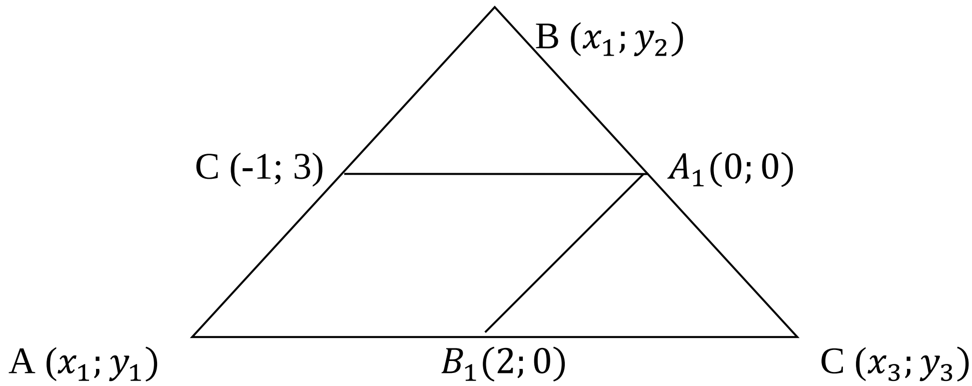
На етапі формування первинних умінь учні в ході успішного виконання завданнь натрапили на нестандартну задачу, на щось нове для них. Це можна реалізувати наступним розв'язанням актуалізації ситуації перетворення.

Задача

Середини сторін трикутника ABC містяться в точках:

$A_1(0;0), B_1(2;0), C_1(-1;3)$.

Які координати мають вершини трикутника?



Вчитель зазначає, що майже всі задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, спрямовані на засвоєння знань формул координат середини відрізка і передбачають їх застосування в прямому або зворотному порядку. Більш цікавою і проблемною є ось ця задача, оскільки передбачає застосування не тільки формул середини відрізка, а й складання системи. А проблемна вона тому, що учні не завжди розуміють, як правильно потрібно складати систему рівнянь.

1. A_1, B_1, C_1 – середини сторін $\triangle$ABC.

Знайти координати вершини $\triangle$ ABC. Позначимо невідомі координаи, як показано на рис. і викристаємо формули для координат середини відрізка.

Учні проводячі аналіз згадують, що кожна координата середини відрізку дорівнює півсуммі відповідних координат кінців відрізку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_2 + x_1 = 0; \\ x_1 + x_3 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_1 + x_3 = 4; \\ x_2 + x_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_1 - x_2 = 4; \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

2. ***Вчитель*:** Щоб перейти до наступного етапу розв'язання задачі, що потрібно скласти?

(Передбачувана відповідь: Складемо два рівняння), маємо $2x_1 = 2;$

$x_1 = 1;\ x_1 + x_3 = 4;\ 1 + x_3 = 4;\ x_3 = 3;\ x_2 = -3.$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 6; \\ y_1 + y_3 = 0; \\ y_2 + y_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 6; \\ y_3 = -y_1; \\ y_2 = -y_3; \end{cases} \qquad + \begin{cases} y_1 - y_3 = 6; \\ y_1 + y_3 = 0; \end{cases}$$

$$2y_1 = 6;\ y_1 = 3$$

$y_3 = -3, y_2 = 6, y_1 = 3.$

Отже: $A\ (1; 3), B\ (-3; 3), C\ (3; -3).$

Детальніше з розробкою урока ви можете ознайомитись в додатку А.

Фрагмент уроку на тему «Рівняння фігури на площині. Рівняння кола».

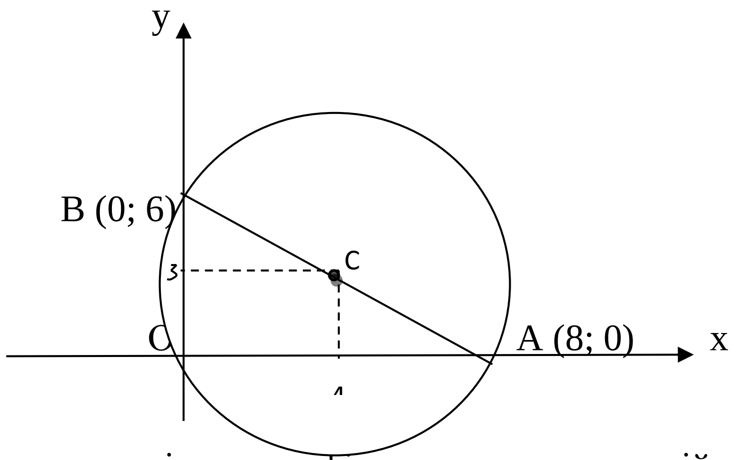
Тип даного уроку - засвоєння знань, умінь та навичок. Основна мета сформувати в учнів уявлення про рівняння фігури на площині.

На цьому етапі вчитель має нагадати учням про те, що метою вивчення теми «Декартові координати на площині» є формування вмінь ставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення. Метою даного уроку є навчитись записувати рівняння деяких фігур за їхніми властивостями.

Дана тема завжди зацікавлює учнів, але щоб краще розуміти її вчитель пропонує цікаву проблемну задачу, розв'язання якої пройде актуалізацією ситуації інтеграції.

Задача

Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і точки: (8; 0) і (0; 6).



Вивчення поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат починається із повторення означення графіка функції. Доцільно провести роботу з учнями щодо повторення графіка лінійної функції (вигляд, алгоритм побудови). Поняття рівняння фігури формується на уявленні про зміст поняття графіка функції. Проте, скориставшись деякою аналогією між поняттями та сформулювавши означення рівняння фігури, вчитель обов'язково повинен звернути увагу учнів на такі моменти, які є найбільш проблемними у розв'язані задачі цього розділу, як:

- рівняння функції та рівняння фігури не є тотожними поняттями;
- означення рівняння фігури складається із двох взаємно обернених тверджень.

Учні проводячи аналіз задачі, спочатку згадують, що таке коло.

1. Коло проходить через точки O (0; 0), A (8; 0), B (0; 6).

Щоб визначити центр і радіус описаного кола навколо $\triangle ABO$, треба провести серединні перпендикуляри до сторін, точка їх перетину є центр кола. Центр описаного кола C навколо прямокутного трикутника лежить на середині гіпотенузи і $R = \frac{1}{2} AB$.

2. Для того щоб скласти рівняння кола, згадаємо його властивість, що міститься в означенні кола: усі точки кола розміщені в одній площині з його центром і однаково від нього віддалені.

Отже, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ — рівняння кола. Якщо центр кола (рис. 141) лежить у початку координат, то воно має рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.

$AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10;$

$R = 5$; С (4; 3).

3. Рівняння кола: $(x-4)^2 + (y-3)^2 - 25$

Після розв.язання задачі учні разом з вчителем роблять висновки. Отже, ми ввели рівняння кола і можемо записати його, якщо відомо центр і радіус цього кола; і можемо знайти центр і радіус кола, якщо відомо його рівняння.

Детальніше з розробкою урока ви можете ознайомитись в додатку Б.

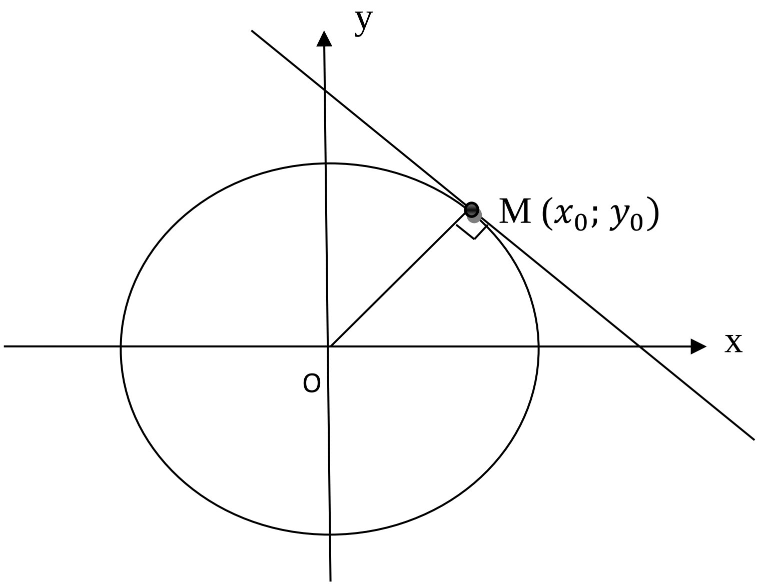
Фрагмент урока з теми «Рівняння прямої».

Тип даного уроку засвоєння знань, умінь. Основна мета - працювати над засвоєнням учнями змісту теореми про рівняння прямої та способу її доведення ізвикористанням означення поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат.

З метою формувати вміння складати рівняння прямої загального виду або рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; застосовувати набуті знання до розв’язування задач вчитель пропонує проблемну задачу, розв’язати ступенем актуалізацією ситуації орієнтування дитини.

Задача

Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = R^2$ у точці М $(x_0; y_0)$.



Перше про, що потрібно пригадати з учнями це про рівняння прямої та дотичну. Така задача є проблемною і складною для учнів, адже потрібно перевіряти належності точки із заданими координатами прямій, складання рівняння дотичної.

1. ***Вчитель:*** Якщо точка М лежить на колі, то чому буде рівний відрізок ОМ?

(Передбачувана відповідь: Відрізок ОМ = R)

Вчитель: Щоб побудувати дотичну до кола в точці М, які кроки потрібно виконати?

(Передбачувана відповідь: Візьмемо точку М на колі, з'єднаємо точку О і точку М, проведемо через точку М пряму перпендикулярно радіусу ОМ.

MN – дотична до кола в точку М.)

2. ***Вчитель:*** Яким буде наступний етап розв'язання задачі?

(Передбачувана відповідь: знаходження дотичної до кола).

MN : y = kx + b;

MO: $\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0}$;

$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}; y = \frac{y_0}{x_0} * x;\ k_1 = \frac{y_0}{x_0}.$

Вчитель: Щоб виконувалася рівність $k * k_1 = -1;\ k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{x_0}{y_0}$; яка умова повинна виконуватися?

(Передбачувана відповідь: потрібно, щоб ОМ було перпендикулярне MN).

Отже будемо мати рівняння дотичної у вигляді $y = -\frac{x_0}{y_0} * x + b.$

Вчитель: Оскільки точка М належить дотичній, то її координати будуть задовольняти якому рівнянню дотичної?

(Передбачувана відповідь: $y_0 = -\frac{{x_0}^2}{y_0} + b;\ b = y_0 + \frac{x_0}{y_0} = \frac{{y_0}^2+{x_0}^2}{y_0} = \frac{R^2}{y_0}$; точка М належить колу, звідси ${x_0}^2 + {y_0}^2 = R^2$

3. ***Вчитель:*** Отже, яке ми будемо мати рівняння дотичної?

(Передбачувана відповідь: $y = -\frac{x_0}{y_0} * x + \frac{R^2}{y_0}$; або $y_0 * y + x_0 * x = R^2$.)

Детальніше з розробкою урока ви можете ознайомитись в додатку В.

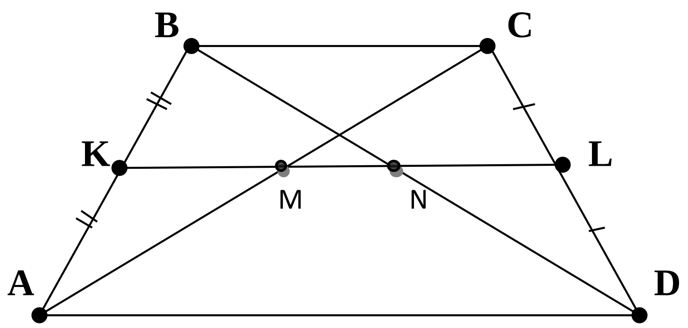
Фрагмент урока з теми «Розв'язування задач методом координат. Взаємне розташування прямих у системі координат»

Тип даного уроку – засвоєння знань, умінь. Основнв мета - сформувати в учнів уявлення про метод координат; сформулювати схему розв'язування геометричних задач методом координат.

На уроці вчитель створює проблемну ситуацію, задачу. Розв'язання якої наштовхне учнів до правильних висновків і пройде в ступені – ситуація пошуку.

Задача

Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.



Нам дано: ABCD – трапеція; AC, BD – її діагоналі.

M – середина AC; N – середина BD.

Потрібно довести, що MN паралельне AD; MN = $\frac{AD-BC}{2}$.

Для початку потрібно повторити та систематизувати відомості про трапецію та її властивості. Згадати трикутник та середню лінію трикутника та трапеції. Запроваджені раніше означення дали можливість розв'язувати дану задачу, яка є складною і проблемною для учнів 9 класу.

Доведення:

Вчитель разом з учнями аналізує малюнок і доповнюють його продовживши MN до перетину з AB і CD.

1. Вчитель: Який з відрізків KM чи KN буде середньою лінією трикутника?

(Передбачувана відповідь: Середньою лінією трикутника буде і KM і KN. Але KM – середня лінія трикутника ABC і KM = $\frac{1}{2}\,BC$; а KN – середня лінія трикутника ABD і KN = $\frac{1}{2}\,AD$;

KN – KM = MN;

Отже, $\frac{1}{2}\,AD - \frac{1}{2}\,BC$ = MN, або MN = $\frac{AD-BC}{2}$.

2. Вчитель: Якщо KL – середня лінія трапеції і KL паралельна AD паралельна BC, тоді чому буде паралельна MN?

(Передбачувана відповідь: MN паралельна AD паралельна BC).

Що й треба було довести.

Детальніше з розробкою урока ви можете ознайомитись в додатку Г.

Висновки до розділу 2

У вивченні евристичного методу навчання та формування евристичних умінь учнів в математиці виявлено декілька ключових аспектів. Перше, евристичний метод спрямований на стимулювання самостійного пошуку відповідей на запитання, надаючи учням можливість активно досліджувати матеріал. Друге, формування евристичних умінь передбачає вироблення та розвиток певних математичних здібностей, таких як здатність до узагальнення, гнучкість мислення та раціональний підхід до вирішення проблем. Третє, використання проблемних задач у вивченні матеріалу сприяє розвитку критичного мислення учнів та застосуванню їх знань на практиці.

Зосереджений підхід на стимулюванні самостійного пошуку відповідей та відкриття нових зв'язків у вирішенні проблемних задач є ключовим елементом евристичного методу. Цей метод вимагає від учнів активного виявлення закономірностей і нових ознак у матеріалі, що стимулює їхні аналітичні здібності та креативне мислення. Такий підхід допомагає у формуванні учнів пізнавальної активності та вміння розв'язувати завдання самостійно.

Також важливо враховувати, що вирішення проблемних задач в математиці вимагає активного мислення, знаходження зв'язків та аргументів. Вивчення нетрадиційних задач, таких як ті, що виникають при вивченні "Декартових координат на площині", розвиває розумові здібності учнів та сприяє виявленню їхнього творчого підходу до розв'язання проблемних ситуацій.

ВИСНОВКИ

Під час перегляду психолого-педагогічної літератури було встановлено, що евристичний метод у навчанні - це шлях до самостійного пошуку відповідей на питання, яке ставиться перед учнями.

Найбільший вплив на процес евристичного навчання мають завдання, які передбачають виявлення нових зв'язків, закономірностей та загальних ознак у вирішенні проблемних задач, базовими елементами яких є невідомі взаємозв'язки між компонентами досліджуваних ситуацій.

Евристична діяльність спрямована на розв'язання евристичних задач, що, разом із системою евристик, евристичними приписами та правилами-орієнтирами, складає сутність евристичної діяльності. Саме система евристично орієнтованих задач сприяє формуванню у учнів вмінь, характерних для евристичного підходу.

У формуванні евристичних умінь учнів 9 класу на уроках математики на наш погляд важливу роль відіграють певні математичні здібності, такі як здатність до формалізації, уміння узагальнювати матеріал, гнучкість мислення, здатність до раціонального підходу до розв'язання проблем. Ця група здібностей, на нашу думку, здатна найбільш ефективно сприяти розвитку евристичних вмінь, оскільки формування вмінь передбачає наявність певних здібностей, а їхнє формування - розвиток пов'язаних із ними вмінь.

Розглядаючи основні психолого-педагогічні аспекти формування евристичних умінь учнів 9 класу, ми переконані, що збереження їх діалектичної єдності може змінити навчально-виховний процес на уроках та забезпечити вчителю можливість успішно вирішувати завдання формування евристичних умінь.

При вивченні розділу "Декартові координати на площині" основним засобом формування знань, умінь та навичок учнів є задачі, які реалізують загальноосвітні, виховні та розвиваючі цілі.

Проблемна задача - це завдання, яке потрібно вирішити шляхом перетворення умов. Це завдання, яке містить у собі суперечливість, що викликає пізнавальні труднощі. Для розв'язання проблемної задачі потрібно активно мислити, шукати зв'язки та аргументи.

Вирішення нетрадиційних задач у розділі "Декартові координати на площині" - це робота розуму. Добре зрозумілий матеріал є основою для успішного вирішення таких завдань. Розв'язання проблемних задач евристичними методами дає змогу учням мислити критично, застосовувати знання на практиці та розвивати нові способи діяльності.

СПИСКИ ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Бевз Г.П. – К. : Вища школа, 1989. – 289 с.

2. Борецький А. Активність у пізнанні // Початкова школа. – 2006. – №9. – С. 2-3.

3. Булах І.С., Хомич Г.О., Виногородський А.М., Сабанадзе І.О. Соціально-психологічні аспекти процесу адаптації учнів: Навчально-методичний посібник. – К.: КДПУ ім. М.П. Драгоманова, Переяслав-Хмельницький державний педагогічний інститут ім. Г.С.Сковороди, 1997.

4. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М.І. Бурда // Педагогіка і психологія. – о 1996. – №1. – С.40-45.

5. Варзацька Л.О. Активізація пізнавальної діяльності учнів // Рідна школа. – 1991. – №2. – С. 28-31.

6. Вишковський І. Методи активізації пізнавальної діяльності // Психолог. – 2004. – №21-22. – С.100-114.

7. Вікова психологія / За ред. Г.С. Костюка. – К.: Рад. шк., 1976. – 270 с.

8. Возняк Г.М., Возняк Н.І., Гап’юк Г.В. Методичні рекомендації до вивчення математики в 9 класі. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 64 с.

9. Волкова Н.П. Педагогіка. – К.: Вид. центр “Академія”, 2001. – 576 с.

10. Галузинський В.М. Педагогічні проблеми пізнавальної активності // Рідна школа. – 2005. – №4. – С. 15-16.

11. Гончарова І.В. Евристичні вміння: роль і значення в процесі навчання математики // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць. Випуск XXXV / За загальною редакцією проф. В.І.Сипченка. - Слов'янськ: Видавничий центр СДПІ, 2007. – С.84-91.

12. Данилова Л., Розвивати пізнавальну активність учнів // Рідна школа. – 2002. – №6.– С.18-20.

13. Зильберберг Н. И. Евристики у підручнику математики та їх використання під час навчання школярів/ Н. И. Зильберберг // Еврестичні методи під час навчання математики: праці Міжнарод. дистанційної конф. – Донецьк: ТЕАН, 1997. – С. 60.

14. Зламанюк Л.М. Методи вдосконалення та активізації навчання як педа-гогічна проблема // Управління школою. – 2004. – №25-26.– С.21-22.

15. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / За ред. Л.Н.Проколієнко. – К.: Рад. школа, 1989. – 608 с.

16. Культчина Л.С. Активізація вчення: сутність і зміст // Педагогика. — 1994. — № I. — С. 7-11. 20. Лозова В.І. Пізнавальна активність школярів. – Х.: Основа, 1990. – 120с.

17. Математика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2013. – 352 с.: іл..

18. Математика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 352 с.: іл..

19. Математика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С.Істер. – К.: Генеза, 2013. – 368 с.: іл..

20. Математика: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. 9 кл. / Н.А.Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.П.Бочко, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 352 с.: іл..

21. Матюшкин А.М. Психологічна структура, динаміка і розвиток пізнавальної активності // Питання психології. — 1982. — № 4. – С. 5-17.

22. Миракова Т. Н. Розвиваючі задачі на уроках математики в 9 класах: посібник для вчителя / Т. Н. Миракова. – Львів: «Квантор», 1991. – 96с.

23. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

24. Орленко Л.Н. Активизація пізнавальної діяльності учнів // Педагогіка. – 1990. – №1. – С. 32-33.

25. Основи практичної психології / В.Панок, Т. Титаренко, Н.Чепелєва та ін.: Підручник. – К.: Либідь, 1999.

26. Прач В.С. Евристичне навчання математики: подорож у світ евристики: факульт. курс для учнів гуманіт. напряму / В.С.Прач, О.І.Скафа. – Донецьк : Ноулідж, 2012. – 275 с.

27. Психологія сучасного підлітка / Під ред. Д.И.Фельдштейна. – М., 1987.

28. Рачкова Л.В. Управління навчально-пізнавальною діяльністю школярів у процесі вирішення ними дидактичних ситуацій: Автореф. десерт. на здоб. ступ. канд. пед. наук / Харків. держ. педагог. інститут. – Х., 1996. – 23с;

29. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З.І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. І перероб. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

30. Тарасенкова Н. А. Використання питань у навчанні математики/ Н. А. Тарасенкова // Математика в школе. – 2005. – № 4. – С. 59–62.

31. Чашечникова О.С. Використання систем підказок з метою розвитку математичних здібностей учнів / О.С. Чашечникова // Математика в школі. – 1998. – №1. – С. 44-48.

32. Чашечникова О.С. Шляхи розвитку творчого мислення учнів в умовах профільного навчання математики / О.С. Чашечникова // Математика в школі. – 2010. – №11. – С.33-38.

33. Яцкова Т.С. Про розвиток евристичного мислення у школярів / Т.С. Яцкова // Математика в школі. – 2001. – №4. – С.53-54.

Додаток А

Конспект уроку з теми «Прямокутна система координат на площині (повторення). Координати середини відрізка»

Мета:

- повторити, узагальнити та систематизувати набуті в попередніх класах під час вивчення теми «Прямокутна система координат» знання учнів;
- узагальнити й систематизувати вміння будувати точки із заданими координатами на координатній площині та знаходити координати точок за їх зображенням;
- розглянути формули координат середини відрізка. Сформувати первинні вміння відтворювати вивчені формули та застосовувати їх до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь та навичок.

Обладнання: підручник М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова Геометрія 9 клас.

План уроку

I. Організаційний етап
II. Перевірка домашнього завдання
III. Формулювання мети і завдань уроку
IV. Актуалізація опорних знань і вмінь
V. Засвоєння знань
VI. Формування первинних умінь
VII. Підсумок уроку
VIII. Домашнє завдання

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

Як завжди, на початку вивчення нової теми необхідно надати учням інформацію про:

- орієнтовний план вивчення теми;
- кількість навчальних годин;

- приблизний зміст матеріалу, що вивчатиметься;
- основні вимоги до знань та вмінь учнів;
- приблизний зміст завдань,що будуть винесені на контрольну роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Вчитель може зібрати зошити учнів на перевірку й оцінити якість виконання аналізу контрольної роботи.

III. Формулювання мети і завдань уроку

На цьому етапі вчитель проводить вступну бесіду, в ході якої повідомляє учням:

- історію «відкриття» Рене Декартом прямокутної системи координат;
- важливість координатного методу розв’язування геометричних задач для різних галузей науки і техніки;
- загальний зміст координатного методу.

Після бесіди вчитель допомагає учням сформулювати мету уроку: ***Вчитель:*** Що саме нам потрібно повторити та систематизувати?

(Передбачувана відповідь: відомості про систему координат).

Вчитель: Вірно! За чим ми можемо вивчити застосування координат для обчислення координат середини відрізка?

(Передбачувана відповідь: за відомими координатами кінців відрізка).

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

Виконання усних вправ

Перш за все необхідно нагадати учням поняття координатної прямої, координати точки на ній, згадати розв'язування двох взаємно-обернених задач, пов'язаних з положенням точки на координатній прямій і знаходження відстані між двома точками, розташованими на ній. Аналогічні відомості згадуються про координатну площину і задачі, пов'язані з нею. З цією метою можна запропонувати для фронтальної роботи в класі таку систему запитань:

1) Що таке координатна пряма? Чим визначається положення точки на координатній прямій?

2) Позначте на координатній прямій точки A(3), B(-2), C(5,6). Знайдіть координати точки К (Мал.1).

Мал. 1

3) Як визначається відстань між точками $A_1(X_1)$ і $A_2(X_2)$ координатної прямої?

4) Знайдіть відстань між точками P(3) і Q(-5).

5) Що таке система координат на площині?

6) Чим визначається положення будь-якої точки на координатній площині?

7) Як знайти положення точки M(x; y) на координатній площині за координатами x, y? Знайти точку P(2; -4) на координатній площині.

8) Як знайти координати точки А, заданої на координатній площині? (Учні знаходять координати точки А, користуючись координатною площиною, зображеною на дошці або на екрані монітору).

9) Як визначити відстань між точками $A_1(X_1; Y_1)$ і $A_2(X_2;\ Y_2)$ за їхніми координатами? Знайти відстань між точками A(2;-3) і B(1;-2). 10) Як визначити координати середини відрізка АВ за відомими координатами його кінців? Знайти для точок A(2;0) і B(5;-2).

10) Як визначити координати середини відрізка АВ за відомими координатами його кінців? Знайти для точок *A(2;0)* і *B(5;-2).*

Далі вчитель створює евристичну ситуацію, яку можна назвати ситуацією перетворення, звертаючи увагу на те, що положення точки в просторі, формула відстані між двома точками і координати середини відрізка в просторі визначаються аналогічно тому, як це робилось на площині. Але для цього треба задати прямокутну (декартову) систему координат в просторі.

З метою усвідомленого засвоєння учнями матеріалу уроку вчитель пропонує вправи на повторення: основних відомостей про декартову систему координат на площині; теореми Фалеса.

1. Яке з наведених тверджень неправильне?

1) Якщо точка А лежитьна осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю.

2) Якщо точка А збігається з початком координат, то її обидві координати дорівнюють нулю.

3) Точки осі абсцис мають ординати, що дорівнюють нулю.

4) Точка В (-2;-2) належить другій чверті.

2. Точка належить четвертій чверті. Які вона має координати за знаком?

3. Сформулюйте теорему Фалеса.

4. Чи може середня лінія трапеції дорівнювати одній з основ?

5. Чи може середня лінія трапеції проходити черезточку перетину діагоналей?

V. Засвоєння знань

Вчитель: Що саме вам відомо про декартову систему координат на площині?

(Передбачувана відповідь: будова та властивості декартової системи координат на площині).

Прямокутна система координат на площині:

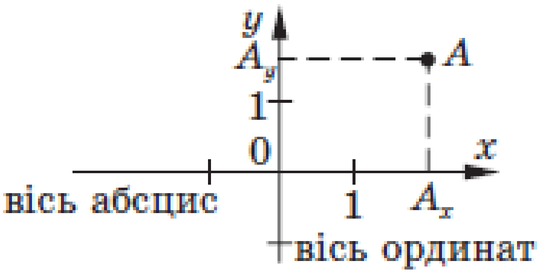
а) координати точки

$A(x, y), x$ — абсциса точки A;

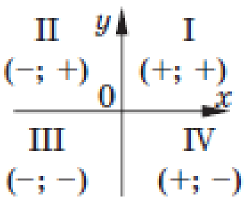
y — ордината точки A.

$|x| =$OA_x

$|y| =$OA_y



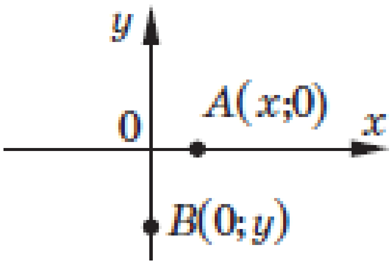
б) Знаки координат точок у різних координатних чвертях.



в) Координати точок, що лежать на координатних осях:

$A(x;0)$ — точка, що лежить на осі абсцис,

$B(y;0)$ — точка, що лежить на осі ординат.



Вчитель: Як ви гадаєте що нам потрібно дізнатися про координати середини відрізка?

(Передбачувана відповідь: формули для знаходження координат середини відрізка).

Вчитель: Так, а саме теорему, що виражає формули для знаходження координат середини відрізка через координати його кінців.

Координати середини відрізка.

Теорема

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Дано: XOY- прямокутна декартова система координат

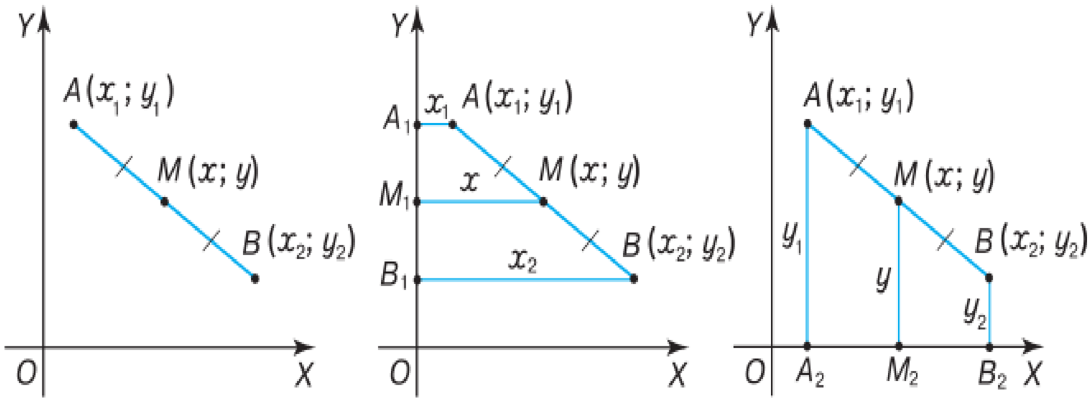
$A(x_1;y_1), B(x_2;y_2),$ точка $M(x;y)$ −середина відрізка AB.

Довести: $x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Доведення: Нехай кінці відрізка містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$. Через точки *A, B* і *M* проведемо прямі, паралельні осі *OX*. Точки їх перетину з віссю *ОУ* позначимо відповідно A_1, B_1, і M_1. Чотирикутник AA_1B_1B – трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $B_1B = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_1 \| AA_1 \| B_1B$ (за побудовою), то MM_1 – середня лінія трапеції AA_1B_1B.

Тому $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Аналогічно доводимо, що $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. Для цього через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OY. Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно $A_2, B_2,$ і M_2. Чоторикутник AA_2B_2B – трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_2 \| AA_2 \| BB_2$ (за побудовою), то MM_2 – середня лінія трапеції AA_2B_2B. Тому $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.



VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

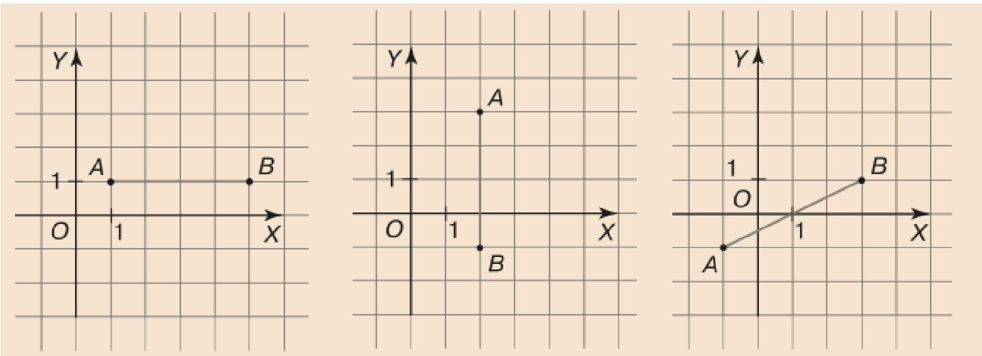
443'. Чи є правильним твердження:

1) ордината середини відрізка дорівнює півсумі координат його кінців;

2) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі ординат його кінців;

3) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі абсцис, а ордината – півсумі ординат кінців відрізка?

444'. Які координати мають кінці відрізка AB і його середина (див. малюнки)?



445°. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями у точках:

1) A (3; – 1), B (– 1; 1);

2) A (5; 4), B (2; 1);

3) A (5; 7), B (11; 17).

448°. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC, якщо:

1) A (– 3; 3), B (6; 6), C (3; – 3); 2) A (2; – 3), B (3; 0), C (– 1; – 2);

3) A (– 1; 1), B (2; 3), C (2; – 3).

Яка довжина медіани BM даного трикутника?

Виконання письмових вправ

Вчитель пропонує учням нескладні вправи різних типів:

1. Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати:

1) точки B, якщо A(2;-3), C(0,5;1); 2) точки A, якщо C(0;-1), B(3;-3).

2. Точка C — середина відрізка AB, точка D— середина відрізка BC. Знайдіть координати точки D, якщо:

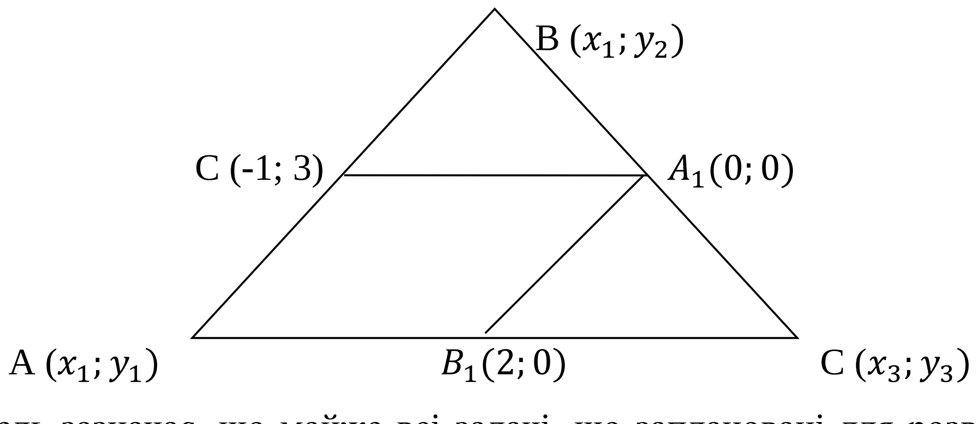
1) A(-3;3), B(5;-1); 2) A(-2;-1), B(2;3).

Робота з підручником:

457*. Середини сторін трикутника ABC містяться в точках:

$A_1(0;0), B_1(2;0), C_1(-1;3)$.

Які координати мають вершини трикутника?



Вчитель зазначає, що майже всі задачі, що заплановані для розв'язування на уроці, спрямовані на засвоєння знань формул координат середини відрізка і передбачають їх застосування в прямому або зворотному порядку. Більш цікавою і проблемною є ось ця задача, оскільки передбачає застосування не тільки формул середини відрізка, а й складання системи. А проблемна вона тому, що учні не завжди розуміють, як правильно потрібно складати систему рівнянь.

3. A_1, B_1, C_1 – середини сторін $\triangle$ABC.

Знайти координати вершини $\triangle$ ABC. Позначимо невідомі координаи, як показано на рис. і викристаємо формули для координат середини відрізка.

Учні проводячі аналіз згадують, що кожна координата середини відрізку дорівнює півсуммі відповідних координат кінців відрізку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_2 + x_1 = 0; \\ x_1 + x_3 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_1 + x_3 = 4; \\ x_2 + x_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -2; \\ x_1 - x_2 = 4; \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

4. ***Вчитель*:** Щоб перейти до наступного етапу розв'язання задачі, що потрібно скласти?

(Передбачувана відповідь: Складемо два рівняння), маємо $2x_1 = 2$;

$x_1 = 1$; $x_1 + x_3 = 4$; 1 + $x_3 = 4$; $x_3 = 3$; x_2 = -3.

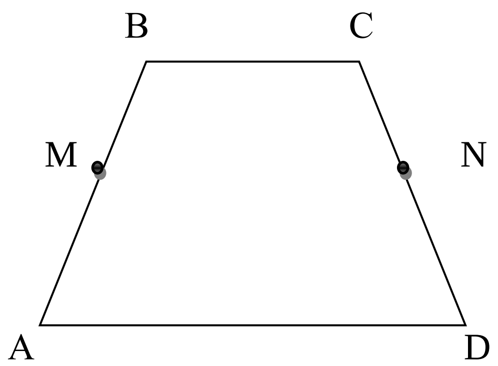
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 6; \\ y_1 + y_3 = 0; \\ y_2 + y_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 6; \\ y_3 = -y_1; \\ y_2 = -y_3; \end{cases} \quad + \begin{cases} y_1 - y_3 = 6; \\ y_1 + y_3 = 0; \end{cases}$$

$2y_1 = 6$; $y_1 = 3$

$y_3 = -3, y_2 = 6, y_1 = 3$.

Отже: A $(1; 3)$, B $(-3; 3)$, C $(3; -3)$.

461*. Середини бічних сторін трапеції мають рівні ординат (абсциси). Чи паралельні її основи осі абсцис (ординат)? Відповідь поясніть.



При розв'язуванні однієї із таких видів задач, постає проблема у використані формул координат середини відрізка і передбачають їх застосування в прямому або зворотному порядку. Також потрібно згадати властивості трапеції.

1. Фігура з умови задачі представлена на малюнку. В даному випадку слід припустити, що розглянута трапеція - це чотирикутник ABCD, в якому задані середини бічних сторін.

   Нехай М $(x_1;\ y_1), N\ (x_2;\ y_2)$;

   ABCD – трапеція, M і N – середини бічних сторін.

2. Після аналізу малюнку корисно звернути увагу учнів на те, за умовою задачі $x_1 = x_2$ (або $y_1 = y_2$).

   Основи трапеції паралельні осі абсцис, бо ординати точок M і N рівні: $y_1 = y_2$.

   Якщо $x_1 = x_2,$ то основи паралельні осі ординат.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання:

1. За якими формулами визначають координати середини відрізка?

2. Сформулюйте і доведіть теорему про координати середини відрізка.

3. Серединою якого з відрізків AB, CD, EF є точка S(4;2), якщо кінці цих відрізків мають координати A(1;2), B(-5;8), C(3;4), D(5;2), E(2;2), F(6;2)?

Варіанти відповідей:

А) AB, Б)CD, В) EF, Г) Жодного з наведених.

4. Знайдіть координати центра кола О, діаметром якого є відрізок MN, якщо M(-2;-4) і N(6;8).

А) O(2;2), Б) O(-2;2), В) O(3;1), Г) O(4;4).

VIII. Домашнє завдання

Під час запису домашнього завдання вчитель дає рекомендації до розв’язання тих чи інших номерів.

1. Вивчити зміст засвоєних на уроці понять та формул.
2. Повторити теорему Піфагора.
3. Розв’язати задачі:

449°. Побудуйте паралелограм з вершинами у даних точках:

1) A (– 4; 1), B (0; 5), C (3; 0), D (– 1; – 4);

2) A (– 2; 4), B (– 6; 12), C (– 2; 16), D (2; 8).

456. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами у точках:

1) A (1; 1), B (2; 3), C (5; – 1); 2) A (– 1; 6), B (– 5; 3), D (– 2; – 1).

Додаток Б

Конспект уроку з теми «Рівняння фігури на площині. Рівняння кола»

Мета:

- сформувати в учнів уявлення про рівняння фігури на площині;
- працювати над засвоєнням учнями властивостей та ознак точок, що належать фігурі із заданим рівнянням; змісту теореми про рівняння кола та наслідку з неї.

- сформувати первинні вміння відтворювати зміст вивчених понять; використовувати їх для аргументації своїх міркувань; записувати рівняння кола із заданим центром та радіусом та визначати радіус і центр кола за даним рівнянням цього кола; розв’язувати задачі, що передбачають застосування нових понять разом із раніше вивченим матеріалом.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь та навичок.

Обладнання: підручник М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова Геометрія 9 клас.

План уроку

I. Організаційний етап
II. Перевірка домашнього завдання
III. Формулювання мети і завдань уроку
IV. Актуалізація опорних знань і вмінь
V. Засвоєння знань
VI. Формування первинних умінь
VII. Підсумок уроку
VIII. Домашнє завдання

Хід уроку

I**. Організаційний етап**

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Правильність виконання домашнього завдання перевіряємо за зразком (готові розв’язання роздаються учням для самостійного опрацювання та порівняння з результатами, одержаними під час виконання вправ удома). Можливі питання висвітлюються під час фронтальної роботи.

III. Формулювання метиі завдань уроку

На цьому етапі вчитель має нагадати учням про те, що метою вивчення теми «Декартові координати на площині» є формування вмінь ставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення.

Вчитель: Що стало першим кроком вивчення у цьому напрямі?

(Передбачувана відповідь: стало вивчення формул координат середини відрізка та відстані між двома точками).

Вчитель: А який наступний крок?

(Передбачувана відповідь: навчитись записувати рівняння деяких фігур).

Вчитель: Отже, мета уроку — навчитись записувати рівняння деяких фігур за їхніми властивостями.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою усвідомленого засвоєння учнями змісту нового матеріалу
слід повторити:

- означення графіка числової функції;
- ознаку належності точки із заданими координатами до графіка функції;
- означення кола та його елементів, властивостей точок кола;
- формулу відстані між двома точками із заданими координатами.

V. Засвоєння знань

Вчитель: Вивчення поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат починається із повторення означення графіка функції. Тому, як ви вважаєте, що буде впершу чергу доцільніше повторити?

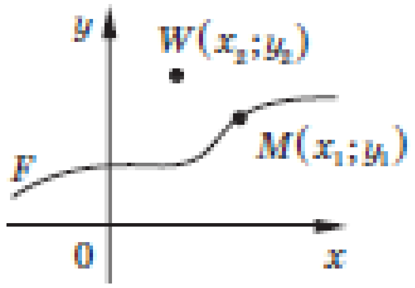
(Передбачувана відповідь: графік лінійної функції).

1. Рівняння фігури в прямокутній системі координат.

Рівняння здвома змінними x і y називається *рівнянням фігури* F у прямокутній системі координат, якщо:

а) координати будьякої точки фігури F задовольняють це рівняння;

б) будьяка пара чисел, що задовольняє рівняння фігури, є координатами точки фігури F.



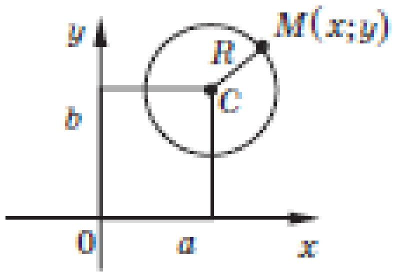
2. Рівняння кола.

У прямокутній системі координат рівняння кола радіуса R із центром у точці C$(a;b)$ має вигляд: $(x-a)^2$ + $(y-b)^2$ = R^2.

Наслідок

Рівняння кола радіуса R із центром у початку координат має вигляд:

$x^2+y^2=R^2$.



VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

467'. Побудуйте коло з даним центром C і радіусом R :

1) C (– 1; 1), R = 3; 2) C (2; – 1), R = 1; 3) C (– 2; – 3), R = 4.

468'. Визначте координати центра і радіус кола, заданого рівнянням:

1) (x – 2)2 + (y – 1)2 = 16; 2) (x – 1)2 + (y – 3)2 = 3.

470°. Складіть рівняння кола з радіусом R і центром у точці C :

3) R = 5, C (2; 1); 2) R = 5 , C (– 2; – 1); 3) R = 4, C (2; – 2).

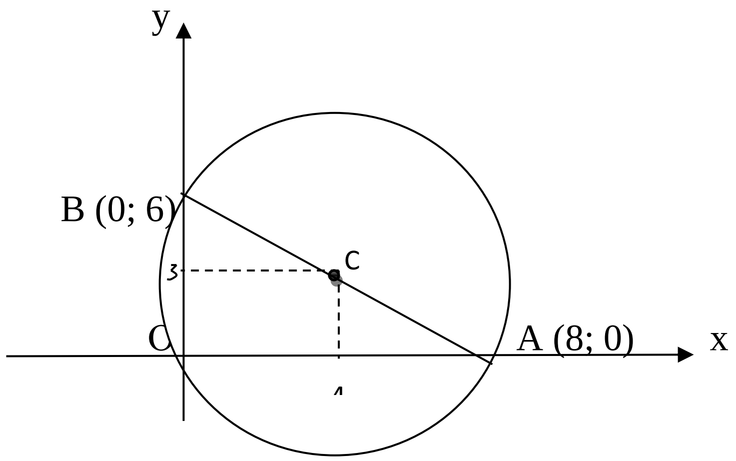
473°. Коло дотикається до осі абсцис, а його центр має координати:

1) (2; – 1); 2) (– 3; 2); 3) (4; 5).

Чи перетинає дане коло вісь ординат? Відповідь поясніть.

Виконання письмових вправ

486*. Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і точки: (8; 0) і (0; 6).



Вивчення поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат починається із повторення означення графіка функції. Доцільно провести роботу з учнями щодо повторення графіка лінійної функції (вигляд, алгоритм побудови). Поняття рівняння фігури формується на уявленні про зміст поняття графіка функції. Проте, скориставшись деякою аналогією між поняттями та сформулювавши означення рівняння фігури, вчитель обов'язково повинен звернути увагу учнів на такі моменти, які є найбільш проблемними у розв'язані задачі цього розділу, як:

- рівняння функції та рівняння фігури не є тотожними поняттями;
- означення рівняння фігури складається із двох взаємно обернених тверджень.

Учні проводячи аналіз задачі, спочатку згадують, що таке коло.

4. Коло проходить через точки O (0; 0), A (8; 0), B (0; 6).

Щоб визначити центр і радіус описаного кола навколо $\triangle ABO$, треба провести серединні перпендикуляри до сторін, точка їх перетину є центр кола. Центр описаного кола C навколо прямокутного трикутника лежить на середині гіпотенузи і $R = \frac{1}{2}\ AB$.

5. Для того щоб скласти рівняння кола, згадаємо його властивість, що міститься в означенні кола: усі точки кола розміщені в одній площині з його центром і однаково від нього віддалені.

Отже, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ — рівняння кола. Якщо центр кола (рис. 141) лежить у початку координат, то воно має рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.

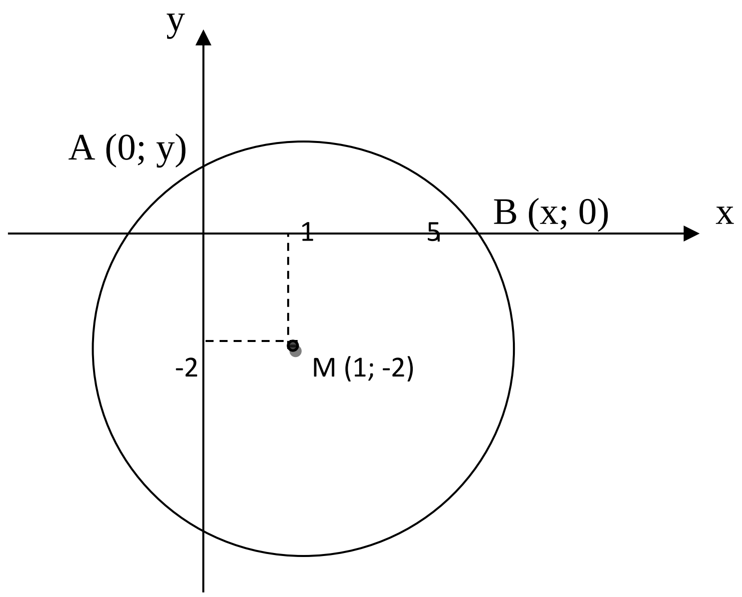
$AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10;$

$R = 5$; C (4; 3).

6. Рівняння кола: $(x-4)^2 + (y-3)^2 - 25$

Після розв.язання задачі учні разом з вчителем роблять висновки. Отже, ми ввели рівняння кола і можемо записати його, якщо відомо центр і радіус цього кола; і можемо знайти центр і радіус кола, якщо відомо його рівняння.

489*. Визначте довжину хорд кола з кінцями на осях координат, якщо коло задано рівнянням: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.



Перед тим, як розглядати дану задачу слід повторити:

- означення графіка числової функції;
- ознаку належності точки із заданими координатами до графіка функції;
- означення кола та його елементів, властивостей точок кола.

Коло: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ має центр M (1; -2) і R = 5.

1. MB = $\sqrt{(1-x)^2 + (-2)^2} = 5,$

$(1-x)^2$ + 4 = 25; $(1-x)^2 = 21; x > 0; x > 1;$

x – 1 = $\sqrt{21}$; x = 1 + $\sqrt{21}$;

B (1 + $\sqrt{21}$; 0).

$MA^2 = 1^2 + (-2-y)^2 = 25; (2+y)^2 = 24;\ 2+y = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$

y = $2\sqrt{6} - 2$;

A (0; $2\sqrt{6}$ – 2).

AB = $\sqrt{(1+\sqrt{21})^2 + (2\sqrt{6}-2)^2} = \sqrt{1+2\sqrt{21}+21+24-8\sqrt{6}+4}$ =

= $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$.

2. MC^2 = $(-1)^2 + (y_1+2)^2 = R^2$;

$y_1{}^2$ + $4y_1 + 5 = 25$;

$y_1{}^2$ + $4y_1 - 20 = 0$;

$y_1 = -2 \pm \sqrt{20}$ = $-2 \pm 2\sqrt{6}$;

y_1 = $-2 - 2\sqrt{6}$; $y_1 < 0$

C (0; $2\sqrt{6} - 2$);

AC^2 = $(-2\sqrt{6} - 2 - 2\sqrt{6} + 2)^2 = 16 * 6 = 96$,

AC = $4\sqrt{6}$.

3. BC = $\sqrt{(0-1-\sqrt{21})^2 + (2\sqrt{6}+2)^2}$ =

= $\sqrt{1+2\sqrt{21}+21+24+8\sqrt{6}+4}$ = $\sqrt{50+2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$.

VII. Підсумки уроку

Тестові завдання

1. Яка з точок не лежить на колі $x^2 + y^2$ = 25?

1) (4;3); 2) (–4;3); 3) (–4;–3); 4) (3;5).

2. Знайдіть рівняння кола з центром у точці A(–2;8) і радіусом 5.

1) $(x+2)^2 + (y+8)^2$ = 25; 2) $(x+2)^2 + (y-8)^2 = 5$;

3) $(x+2)^2 + (y-8)^2$ = 25; 4) $(x+2)^2 + (y-8)^2 = 5$.

3. Знайдіть рівняння кола зцентром у початку координат O(0;0) і радіусом 10.

1) $(x-1)^2+(y-1)^2$ =100; 2) x^2+y^2 = 10;

3) $(x-0)^2+(y-0)^2 = 10^2$; 4) $\sqrt{x^2+y^2}$ = 10.

4. Знайдіть рівняння кола з центром у точці O(−3;−7).

1) $(x-3)^2+(y-7)^2$ = 49; 2) $(x+3)^2+(y-7)^2$ = 25;

3) $(x+3)^2+(y+7)^2$ = 36; 4) $(x-3)^2+(y+7)^2$ = 81.

5. Кола задані рівняннями x^2+y^2 = 1 і $(x-4)^2+y^2$(x−4) = 1. Яка відстань між центрами цих кіл?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1.

VIII. Домашнє завдання

Під час запису домашнього завдання вчитель дає рекомендації до розв'язання тих чи інших прикладів. Розв'язати задачі.

1. Складіть рівняння кола зцентром A і радіусом AB, якщо A(1;1), B(−3;−2). Які зточок: C(4;5), D(−4;1), E(1;1) — лежать на цьому колі?

2. Коло задано рівнянням x^2+y^2 −1 = 4. Знайдіть точки перетину цього кола з осями координат.

3. Складіть рівняння кола описаного навколо прямокутного трикутника ABC, якщо ∠A = 90 , B(4;0), C(−2;−8).

Повторити: ГМТ, зокрема ГМ точок, рівновіддалених від кінців відрізка, формулу відстані між двома точками із заданими координатами.

Додаток В

Конспект уроку з теми «Рівняння прямої»

Мета:

- працювати над засвоєнням учнями змісту теореми про рівняння прямої та способу її доведення ізвикористанням означення поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат;

- сформувати знання про випадки розташування прямої в системі координат та вид рівняння прямої в кожному зцих випадків; рівняння невертикальної прямої виду $y = kx+m$;

- сформувати вміння відтворювати зміст вивченої теореми та її окремих випадків; складати рівняння прямої загального виду або рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; застосовувати набуті знання до розв'язування задач.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь.

Обладнання: підручник М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова Геометрія 9 клас.

План уроку

I. Організаційний етап
II. Перевірка домашнього завдання
III. Формулювання мети і завдань уроку
IV. Актуалізація опорних знань і вмінь
V. Засвоєння знань
VI. Формування первинних умінь
VII. Підсумок уроку
VIII. Домашнє завдання

Хід уроку

I. **Організаційний етап**

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II**. Перевірка домашнього завдання**

Вчитель може зібрати зошити учнів на перевірку й оцінити якість виконання домашніх вправ як домашню самостійну роботу або провести перевірку домашнього завдання за зразком. Рівень засвоєння знань та вмінь попереднього уроку перевіряємо під час виконання учнями завдань математичного диктанту.

Математичний диктант:

Дано коло $(x-4)^2+(y+1)^2$= 25.

1) Радіус кола дорівнює..., а координати центра...

2) Коло перетинає вісь ординат у точках, координати яких...

3) Точки М(0;2) і К(4;4) лежать на даному колі, оскільки...

4) Координати середини відрізка МК такі... Ця точка не належить колу, оскільки...

ІІІ. Формулювання метиі завдань уроку

На цьому етапі вчитель нагадує про мету вивчення теми. Після чого пропонує учням пригадати, з чого розпочалось вивчення питання про рівняння фігури в прямокутній системі координат (із графіка лінійної функції). Таким чином, постає питання про вивчення рівняння прямої в прямокутній системі координат. Формулювання і доведення відповідної теореми та формування вмінь її застосовувати до розв'язування задач — основна мета уроку.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

Виконання усних вправ

З метою усвідомленого засвоєння учнями змісту нового матеріалу уроку можна запропонувати їм вправи на повторення означень та способів застосування таких понять:

- ГМ точок, рівновіддалених від кінців відрізка;
- формула відстані між двома точками в прямокутній системі координат;
- рівняння фігури в прямокутній системі координат;
- системи лінійних рівнянь із двома змінними, способи їх розв'язання.

V. Засвоєння знань

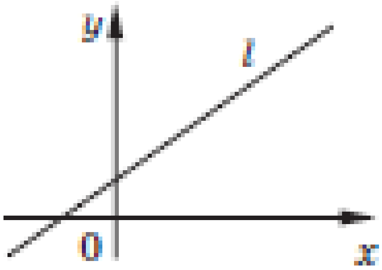
Вчитель: На чому ґрунтується формулювання і доведення теореми про рівняння прямої?

(Передбачувана відповідь: на означенні поняття рівняння фігури в прямокутній системі координат).

Вчитель: А на якій формулі?

(Передбачувана відповідь: на формулі відстані між двома точками та уявленні про геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка.)

Вчитель: Після виведення рівняння прямої розглянемо питання про особливі випадки розташування прямої в системі координат, залежності між коефіцієнтами a, b, c у загальному рівнянні прямої та її розташуванням у системі координат (відносно координатних осей). На закінчення розглянемо питання про запис рівняння невертикальної прямої у вигляді y = kx+m (яке пізніше буде названо рівнянням прямої зкутови м коефіцієнтом) та використання саме та кого способу запису рівняння прямої для розв’язування задач на складання рівняння прямої, що проходить черездві точки, корди нати яких відомі. Спосіб розв’язання зазначеної задачі передбачає складання та розв’язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Ця система утворюється підстановкою координат двох точок, черезякі проходить пряма, у рівняння y = kx+m.

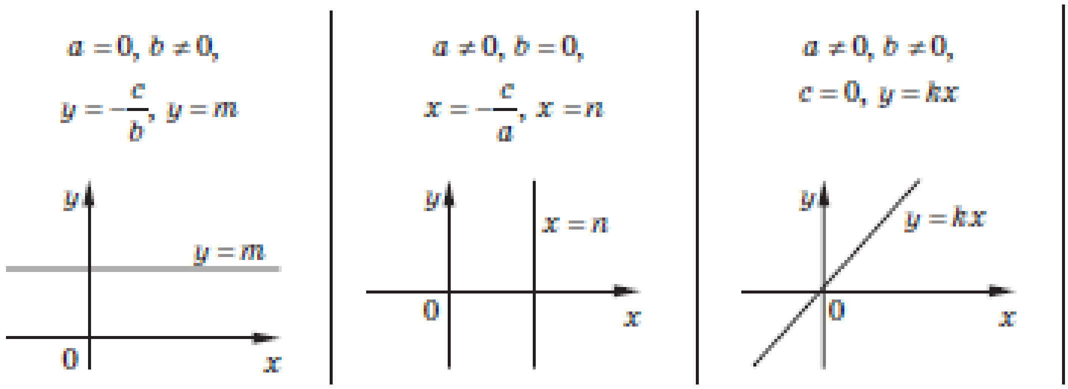


1. Рівняння прямої

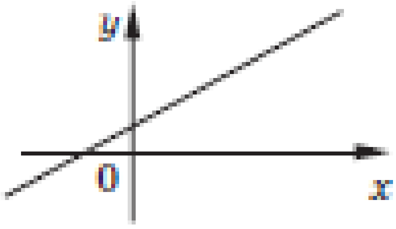
У прямокутній системі координат рівняння прямої має вигляд:

ax+by+c = 0, де a, b, c — деякі числа.

2. Окремі випадки розташування прямої



3. Рівняння прямої, що не є паралельною осі ординат



Якщо a ≠ 0, b ≠ 0, то рівняння ax + by + c = 0 можна подати у вигляді:

$y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = kx + m.$

4. Як скласти рівняння прямої, що проходить черезз адані дві точки.

Якщо пряма проходить черезточку A(−6;−1) і B(3;2), то в рівнянні *y = kx +m:*

$\begin{cases} -1 = -6k + m \\ 2 = 3k + m \end{cases}$ $k = \frac{1}{3}, m = 1.$

отже, рівняння прямої

$y = \frac{1}{3}x + 1$ або $y = \frac{1}{3}x + 1| * 3$

$x + 3 - 3y = 0, x - 3y + 3 = 0.$

VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

1. Черезякі з точок *K(5;0), M(−5;3), B(−10;7), C(−25;0)* проходить пряма *x+5y−25 = 0?*

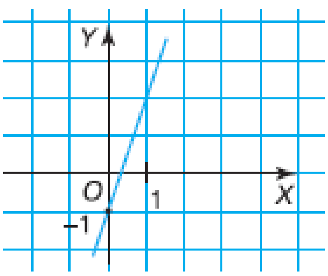
2. Чи перетинаються в точці *A(0;1)* прямі *2x+ y−1 = 0* і *3x−2y+2 = 0*?

497'. На якому з малюнків 171 – 173 зображено пряму:

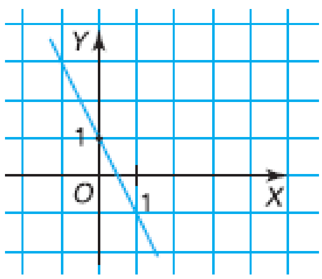
1) y = x – 2; 2) y = 3x – 1; 3) y = – 2x + 1?

Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма?

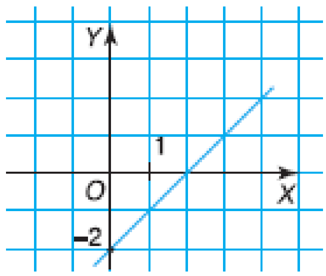
Який у неї кутовий коефіцієнт?



Мал. 171



Мал. 172



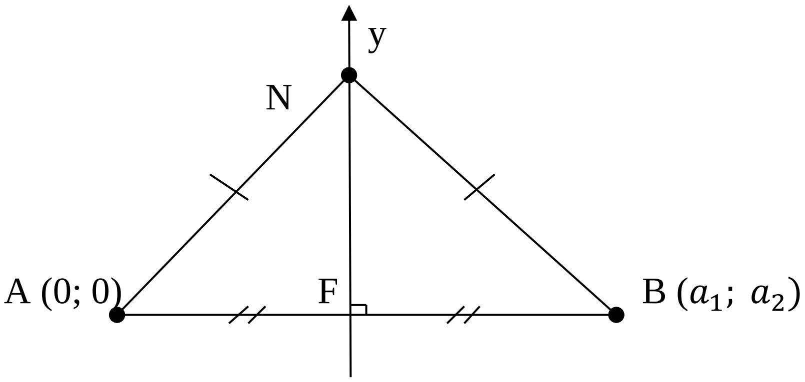
Мал. 173

Виконання письмових вправ

509. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом: 1) 45°; 2) 30°.

513. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку (– 2; 1) і утворює з віссю абсцис кут: 1) 45°; 2) 60°.

525*. Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок: (0; 0) і $(a_1;\ a_2)$.



Перше, з чого потрібно розпочинати розв'язувати задачі такого типу – це з поняття геометричного місця точок, рівновіддалених від кінців відрізка.

Проблемою розв'язання такої задачі постає питання у знанні формули відстані між двома точками в прямокутній системі координат;

1. ***Вчитель:*** Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок A і B?

(Передбачувана відповідь: є серединний перпендикуляр до відрізка AB.

M – середина AB: M ($\frac{a_1}{2}$; $\frac{a_2}{2}$)).

2. ***Вчитель:*** Що потрібно проведемо через точку M?

(Передбачувана відповідь: проведемо пряму NF перпендикулярну AB, візьмемо точку N (x; y); AN = BN).

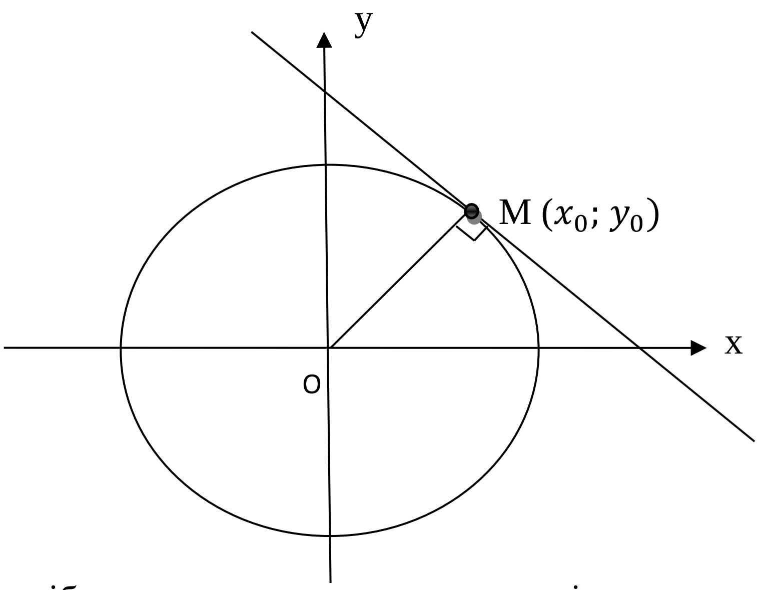
3. AN = $x^2 +\ y^2; BN^2 = (x -\ a_1)^2 + (y - a_2)^2$;

   $x^2 +\ y^2 =\ x^2 +\ y^2 - 2xa_1 + {a_1}^2 - 2ya_2 + {a_2}^2$.

Вчитель: Запишіть рівняння прямої NF перпендикулярної AB.

(Передбачувана відповідь: Маємо: $2xa_1 + 2ya_2 - ({a_1}^2 + {a_2}^2) = 0$ або в такому вигляді y = $-\frac{a_1}{a_2} * x + + \frac{{a_1}^2+{a_2}^2}{2a_2}$ –рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від кінців відрізка AB).

527*. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = R^2$ у точці M $(x_0; y_0)$.



Перше про, що потрібно пригадати з учнями це про рівняння прямої та дотичну. Така задача є проблемною і складною для учнів, адже потрібно перевіряти належності точки із заданими координатами прямій, складання рівняння дотичної.

4. ***Вчитель:*** Якщо точка М лежить на колі, то чому буде рівний відрізок ОМ?

(Передбачувана відповідь: Відрізок ОМ = R)

Вчитель: Щоб побудувати дотичну до кола в точці М, які кроки потрібно виконати?

(Передбачувана відповідь: Візьмемо точку М на колі, з'єднаємо точку О і точку М, проведемо через точку М пряму перпендикулярно радіусу ОМ.

MN – дотична до кола в точку М.)

5. ***Вчитель:*** Яким буде наступний етап розв'язання задачі?

(Передбачувана відповідь: знаходження дотичної до кола).

MN : y = kx + b;

MO: $\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0}$;

$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$; $y = \frac{y_0}{x_0} * x$; $k_1 = \frac{y_0}{x_0}$.

Вчитель: Щоб виконувалася рівність $k * k_1 = -1$; $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{x_0}{y_0}$; яка умова повинна виконуватися?

(Передбачувана відповідь: потрібно, щоб ОМ було перпендикулярне MN).

Отже будемо мати рівняння дотичної у вигляді $y = -\frac{x_0}{y_0} * x + b$.

Вчитель: Оскільки точка М належить дотичній, то її координати будуть задовольняти якому рівнянню дотичної?

(Передбачувана відповідь: $y_0 = -\frac{{x_0}^2}{y_0} + b$; b = $y_0 + \frac{x_0}{y_0} = \frac{{y_0}^2 + {x_0}^2}{y_0} = \frac{R^2}{y_0}$; точка М належить колу, звідси ${x_0}^2 + {y_0}^2 = R^2$

6. ***Вчитель:*** Отже, яке ми будемо мати рівняння дотичної?

(Передбачувана відповідь: $y = -\frac{x_0}{y_0} * x + \frac{R^2}{y_0}$; або $y_0 * y + x_0 * x = R^2$.)

VII. Підсумки уроку

Тестове завдання

1. Яка знаведених прямих паралельна осі х, якщо вони задані рівняннями:

1) 2y−10 = 0; 2) 3x−27 = 0;

3) y = x; 4) 3x− y−1 = 0?

2. Запишіть рівняння прямої, зображеної на рисунку.

1) y = 0; 2) x = 0; 3) y = 4; 4) x = 4.

3. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої 2x+ y−5 = 0?

1) k = 2; 2) k = −5; 3) k = 1; 4) k = −2.

3. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої 2x+ y−5 = 0?

1) k = 2; 2) k = −5; 3) k = 1; 4) k = −2.

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст теореми про рівняння кола та окремих випадків розташування прямої у системі координат.

Розв’язати задачі.

514. Складіть рівняння прямих, що містять середні лінії трикутника ABC, якщо: 1) A (2; – 3), B (– 2; 3), C (6; – 3); 2) A (1; – 2), B (– 1; 2), C (5; 10).

519. Знайдіть довжину відрізка AB, який відтинають осі координат від прямої: 1) 5x – 12y + 3 = 0; 2) 4x + 3y – 6 = 0; 3) 4x – 2y – 3 = 0.

521*. Доведіть, що прямі $3x + 4y – 2 = 0$ і $3x + 4y – 3 – m2 = 0$ не мають спільних точок.

Повторити формули координат середини відрізка, відстані між двома точками та рівняння кола в прямокутній системі координат.

Додаток Г

Конспект уроку з теми «Розв'язування задач методом координат. Взаємне розташування прямих у системі координат»

Мета:

- сформувати в учнів уявлення про метод координат; сформулювати схему розв'язування геометричних задач методом координат.

- працювати над засвоєнням учнями поняття кутового коефіцієнта в рівнянні прямої, знань критеріїв паралельності та перпендикулярності прямих.

- сформувати первинні вміння відтворювати виведені формули та зміст теореми, записувати їх відповідно до умов практичних задач, а також розв'язувати задачі на обчислення із використанням цих формул.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь.

Обладнання: підручник М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова Геометрія 9 клас.

План уроку

I. Організаційний етап
II. Перевірка домашнього завдання
III. Формулювання мети і завдань уроку
IV. Актуалізація опорних знань і вмінь
V. Засвоєння знань
VI. Формування первинних умінь
VII. Підсумок уроку
VIII. Домашнє завдання

Хід уроку

I. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання

Вчитель збирає зошити на перевірку із виконаною домашньою самостійною роботою. У разі необхідності учні (із низьким рівнем досягнень) отримують правильні розв'язання цих вправ для самостійного опрацювання вдома. Можна також провести аналіз розв'язання найбільш складних задач.

III. Формулювання мети і завдань уроку

Під час можливого обговорення вправ домашньої самостійної роботи вчитель демонструє учням особливості теми «Декартові координати». Однією зтаких особливостей є використання відповідності між геометричними об’єктами та алгебраїчними виразами або формулами, що відображують властивості цих об’єктів. Таким чином, вчитель може, поперше, підготувати учнів до усвідомленого сприйняття змісту координатного методу розв’язання геометричних задач та, подруге, створити умови для позитивної мотивації навчальної діяльності учнів на уроці.

IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

З метою усвідомленого засвоєння учнями змісту нового матеріалу уроку вчитель пропонує їм вправи на:

- складання рівняння прямої в декартових координатах, якщо пряма паралельна до однієї зкоординатних осей та проходить через точку із заданими координатами;
- складання рівняння кола за відомим центром та радіусом, за координатами кінців одного здіаметрів;
- перетворення цілих алгебраїчних виразів;
- співвідношенняміжсторонами і кутами прямокутного трикутника;
- повторення ознакпаралельності двох прямих,щоперетнуті третьою;
- застосування формул зведення для кутів $180° - \alpha$.

V. Засвоєння знань

Вчитель: Діти, як ви вважаєте в чому допомагає застосування методу координат?

(Передбачувана відповідь: допомагає учням деякі задачі розв’язувати більш простими способами.)

Вчитель: Вірно! Отже, давайте розглянемо дану тему більш детальніше.

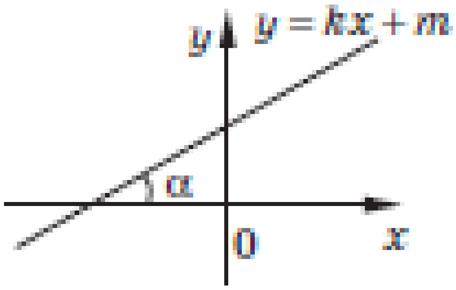
1. Схема розв’язування геометричних задач методом координат:

1) Сформулювати умову задачі мовою координат (задавши на площині систему координат).

2) Перетворити алгебраїчні вирази, що утворились при цьому, використовуючи відомі співвідношення та формули.

3) «Перекласти» здобутий результат мовою геометрії.

2. Кутовий коефіцієнт в рівнянні прямої.

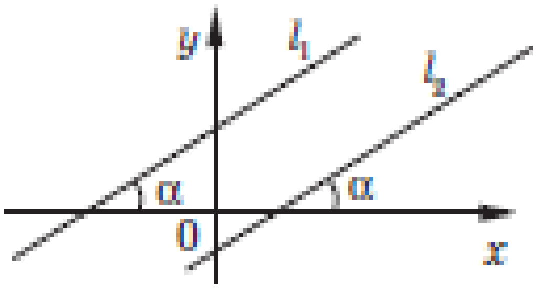


У рівнянні прямої y = kx +m число k — кутовий коефіцієнт.

$k = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

де $(x_1;\ x_2)$ і $(y_1;\ y_2)$ — координати двох точок прямої, α — кут нахилу прямої до додатної півосі абсцис.

3. Критерій паралельності прямих у системі координат.



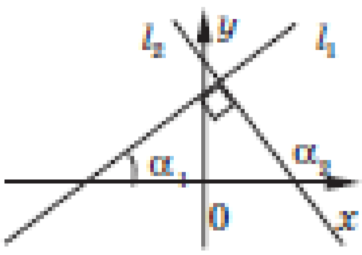
Якщо то

$l_1: y = k_1x + m_1,$ $\leftrightarrow$ $l_1 \| l_2$

$l_2: y = k_2x + m_2,$

$k_1 = k_2, m_1 \neq m_2$

4. Критерій перпендикулярності прямих.



Якщо то

$l_1: y = k_1x + m_1,$ $\leftrightarrow$ $l_1 \perp l_2$

$l_2: y = k_2x + m_2, k_1 * k_2 = 1$

VI. Формування первинних умінь

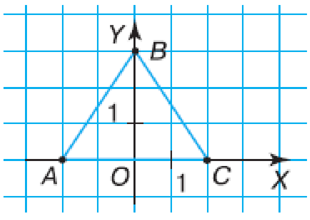
Виконання усних вправ

536'. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат:

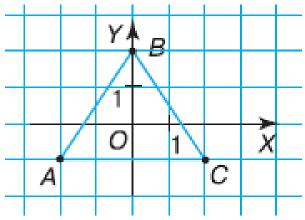
1) A (– 2; 0), B (0; 3), C (2; 0) (мал. 186);

2) A (– 2; – 1), B (0; 3), C (2; 0) (мал. 187);

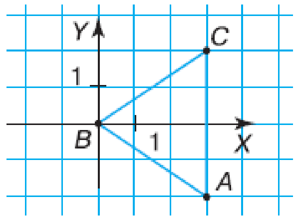
3) A (– 2; 3), B (0; 0), C (2; 3) (мал. 188)?



Мал. 186



Мал. 187



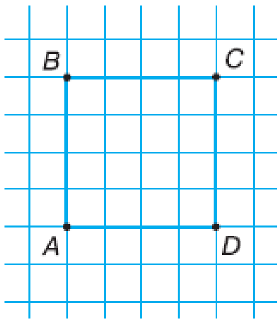
Мал. 188

537'. На малюнках 189 – 191 зображено чотирикутник ABCD. Введіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати:

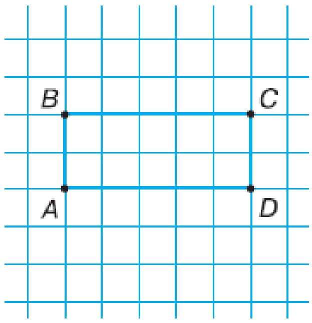
1) A (0; 0), B (0; 4), C (4; 4), D (4; 0) (мал. 189);

2) A (– 2; 0), B (– 2; 2), C (3; 2), D (3; 0) (мал. 190);

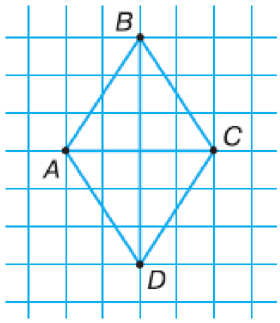
3) A (– 2; 0), B (0; 3), C (2; 0), D (– 3; 0) (мал. 191).



Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191

1. Дано прямі:

   1) $2x - y + 2 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $x + y + 2 = 0$; 4) $y + 3 = 0$.

Яка зних проходить через точку (2;−4)? Кутовий коефіцієнт якої прямої дорівнює (–1)? Яка зцих прямих не має кутового коефіцієнта? Чому? Яка з цих прямих паралельна осі x, осі y?

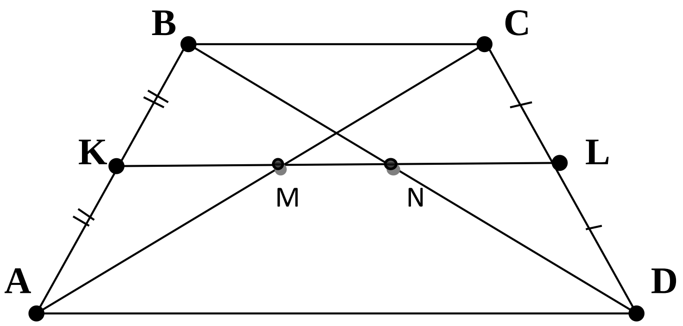
2. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, яка:

   1) паралельна прямій $y = -0{,}5x + 7$;

   2) перпендикулярна до прямої $y = -0{,}5x + 7$.

Виконання письмових вправ

555*. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.



Нам дано: ABCD – трапеція; AC, BD – її діагоналі.

M – середина AC; N – середина BD.

Потрібно довести, що MN паралельне AD; MN = $\frac{AD-BC}{2}$.

Для початку потрібно повторити та систематизувати відомості про трапецію та її властивості. Згадати трикутник та середню лінію трикутника та трапеції. Запроваджені раніше означення дали можливість розв'язувати дану задачу, яка є складною і проблемною для учнів 9 класу.

Доведення:

Вчитель разом з учнями аналізує малюнок і доповнюють його продовживши MN до перетину з AB і CD.

3. Вчитель: Який з відрізків KM чи KN буде середньою лінією трикутника?

(Передбачувана відповідь: Середньою лінією трикутника буде і KM і KN. Але KM – середня лінія трикутника ABC і KM = $\frac{1}{2}\,BC$; а KN – середня лінія трикутника ABD і KN = $\frac{1}{2}\,AD$;

KN – KM = MN;

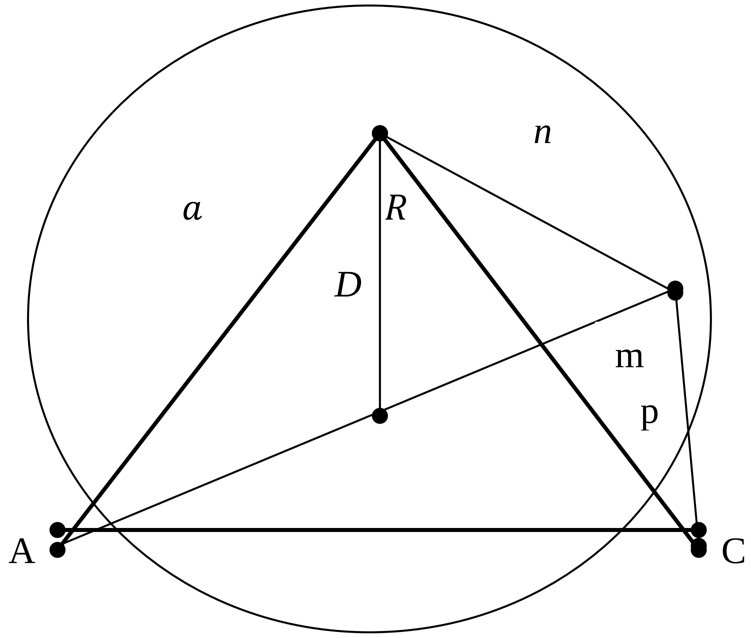
Отже, $\frac{1}{2}\,AD - \frac{1}{2}\,BC$ = MN, або MN = $\frac{AD-BC}{2}$.

4. Вчитель: Якщо KL – середня лінія трапеції і KL паралельна AD паралельна BC, тоді чому буде паралельна MN?

(Передбачувана відповідь: MN паралельна AD паралельна BC).

Що й треба було довести.

559*. Навколо правильного трикутника зі стороною a описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь – якої точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.



Щоб застосувати метод координат: потрібно накреслити фігуру та вивести прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури), скористатися відомими формулами.

На рис. зображений правильний трикутник АВС зі стороною a.

1. Навколо трикутника АВС описане коло.

   Візьмемо на колі довільну точку М. Позначимо відстань від точки М до вершини трикутника відповідно n, m, p.

   $m = n + p$.

   Дійсно, відкладемо $MD = n$, одержимо рівносторонній трикутник ВMD.

   Звідси: $\angle$ ABD = $\angle$CBM, тоді $\Delta ABD = \Delta CBM$, тобто $AD = p$.

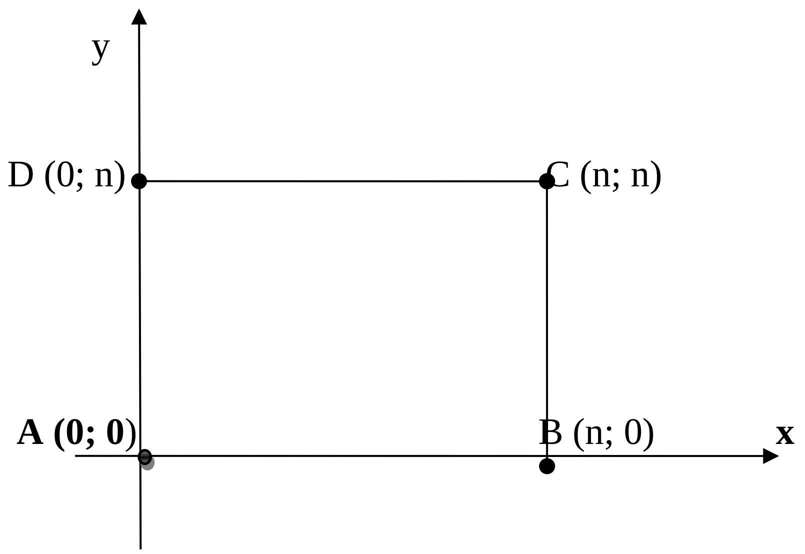
2. Розглянемо трикутник ВМС: $a^2 = n^2 + p^2 - 2 * n * p * cos120°$ =

   = $n^2 + p^2 + n * p$.

3. Маємо: $m^2 + n^2 + p^2 = (n + p)^2 + n^2 + p^2 =$

$= 2 * (n^2 + \ p^2 + n * p) = 2a^2$.

562*. Якщо координати двох сусідніх вершин квадрата є цілими числами, то координати двох інших його вершин також є цілими числами. Доведіть.



При розв’язуванні однієї із таких видів задач, спочатку потрібно пригадати, що таке квадрат та його властивості. Також потрібно вивести прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури).

Доведення:

1. ABCD – квадрат, помістимо його в прямокутну систему координат так, щоб точка A (0; 0).
2. Нехай сторона квадрата дорівнює цілому числу *n*. Тоді B (n; 0).

Сторони квадрата рівні і попарно паралельні, звідси D (0; n), C (n; n)/

Висновок: якщо координати двох сусідніх вершин є цілими числами, то і координати двох інших його вершин також є цілими числами.

VII. Підсумки уроку

Контрольні запитання

Дві прямі задані рівняннями y = 3x−m і y = kx+2. Якими можуть бути значення k і m, щоб ці дві прямі:

1) були паралельними;

2) перетиналися з віссю 0у в одній і тій самій точці;

3) були перпендикулярними?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст засвоєних на уроці понять.

Розв’язати задачі.

546. У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузі AB узято точку M так, що AM = 4 см. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо AC = 15 см, BC = 20 см.

549. Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів його суміжних сторін.

553*. Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі половини квадрата третьої сторони трикутника і подвоєного квадрата медіани, проведеної до цієї сторони.

Повторити формули координат середини відрізка, відстані між двома точками, рівняння кола та загальне рівняння прямої.