МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

__________ Д.Є. Бобилєв　　　　　　Реєстраційний №________

«___»________ 2023 р.　　　　　　«___»_________ 2023 р.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА КОМБІНАЦІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ ДЛЯ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ

Кваліфікаційна робота студентки групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності: 014.04 Середня освіта (математика)
Михайлової Яни Андріївни
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS ____ Кількість балів _____
Члени комісії:

_______ ________________
(підпис)　　(прізвище, ініціали)

_______ ________________
(підпис)　　(прізвище, ініціали)

_______ ________________
(підпис)　　(прізвище, ініціали)

_______ ________________
(підпис)　　(прізвище, ініціали)

_______ ________________
(підпис)　　(прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Михайлова Яна Андріївна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що у разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП ... 5

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ДО РОЗРОБКИ СИСТЕМИ ЗАДАЧ ... 7

1.1. Основи історії розвитку числових рядів. ... 7

1.2. Особливості представлення числових рядів у ШКМ. ... 9

1.3. Методичні підходи до розробки системи задач з математики. ... 11

РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАДАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ І КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ І $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ ... 13

2.1. Ряди з точковою геометричною інтерпретацією ... 13

2.2. Ряди з лінійною геометричною інтерпретацією ... 17

2.3. Ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією ... 26

2.4. Ряди з кубатурною геометричною інтерпретацією ... 33

2.5. Дослідження одержаних рядів на збіжність ... 36

2.6. Дослідження характеру зростання частинних сум Sn одержаних рядів в залежності від значень $n \in N$ ... 51

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМА ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМБІНАЦІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ... 58

3.1. Задачі для використання на математичних олімпіадах для учнів ліцею ... 58

3.2. Задачі, які пропонуються для використання при вивченні розділу «Числові ряди» студентами спеціальності «Математика» ... 67

ВИСНОВКИ ... 75

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ... 76

ДОДАТКИ 79

Додаток А 79

Додаток Б 104

ВСТУП

Актуальність.

Розділ «Числові ряди» є невід’ємною частиною курсу математичного аналізу для студентів спеціальності «Математика». Адже студенти – майбутні вчителі зможуть використовувати свої надбання під час проведення математичних олімпіад для учнів ліцею і таким чином розвивати в них математичну компетентність.

З наукової точки зору за допомогою такого потужного інструменту як числові ряди можна розв’язувати багато різних прикладних задач, які мають своє застосування у різних сферах діяльності та науках.

Використані алгоритми одержання рядів можна застосувати при проведенні математичних олімпіад, як шкільних, так і міських, на уроках алгебри, геометрії, а також при проведенні факультативних занять з математичних дисциплін у закладах вищої освіти.

Використання числових рядів до розробки системи задач є досить ефективною складовою, яка допоможе учням та надасть можливість у розвитку їх математичних навичок та умінь. Під час розв'язання таких задач здобувачі освіти будуть активно залучені до дослідницької діяльності.

За допомогою геометричної інтерпретації, яка буде розглядатись нами можна створити сприятливі умови для сприйняття навчального матеріалу, поглиблення знань, реалізації нестандартного, компетентнісного, дослідницького, різнорівневого підходів, міжпредметних зв'язків та іншими темами курсу математики при вивченні числових рядів. Це і обумовлює актуальність нашої роботи.

Мета роботи: одержання і дослідження числових рядів за допомогою заданої геометричної моделі і комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ та розробка системи задач з їх використанням.

Об’єкт дослідження: система задач на комбінацію числових рядів

Предмет дослідження: система задач із застосуванням геометричних моделей та комбінації числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

Завдання роботи:

1. Визначити особливості представлення числових рядів у ШКМ.

2. Використовуючи задану геометричну модель одержати і дослідити на збіжність числові ряди: з точковою геометричною інтерпретацією членів ряда; з лінійною геометричною інтерпретацією членів ряда; з квадратурною геометричною інтерпретацією; з кубатурною геометричною інтерпретацією.

3. Дослідити характер зростання частинних сум S_n одержаних рядів в залежності від зміни значень $n \in N$.

4. За результатами досліджень запропонувати систему задач для проведення математичних олімпіад серед учнів ліцеїв і студентів спеціальності «Математика».

5. Скласти систему задач для використання при вивченні розділу «Числові ряди» в процесі опрацювання курсу «Математичний аналіз».

Основні методи дослідження:

1. Аналіз використаних джерел теми дослідження.

2. Створення системи задач та геометричної моделі до них.

3. Синтез та узагальнення власних напрацювань.

Апробація дослідження:

1. Публікація тез та виступ на IV Міжнародній науково-практичній Інтернет-конференції «Математика та інформатика в науці та освіті: виклики сучасності». – 25-26 травня 2023 р., Вінниця, Україна.

2. Публікація двох статей у збірнику наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 22, 2023, Суми.

Структура роботи складається зі вступу, трьох розділів, висновку до розділів, додатків та списку використаних джерел, який має 24 найменувань.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ДО РОЗРОБКИ СИСТЕМИ ЗАДАЧ

1.1. Основи історії розвитку числових рядів.

Нескінченні суми вивчалось ще з Давньої Греції, де застосовувався метод вичерпування, коли потрібно було визначити площу поверхонь, фігур, довжин кривих та ін. Використовуючи даний метод, греки розподіляли тіло по секторах на нескінченне число частинок, площі та об'єми яких були відомі і після цього етапу їх знаходили. Важливим аспектом цього методу є знаходження суми яка визначала себе, як сума нескінченної множини доданків, яка на той час мала високу популярність. З часом розвиток давав про себе знати і подальше дослідження акцентувалось на тісний зв'язок між теорією рядів та многочлену. Першовідкривач цього, є І. Ньютон. У 1676 р. у листі до Лондонського Королівського Товариства з'явилася цікава формула, яка у сучасності відома як бінома Ньютона. На основі цієї формули, англійський математик Брук Тейлор у 1715 р. довів, що функцію, яка має у точці x_0 похідні всіх порядків, можна сумістити утворивши ряд [14, с.6-8].

Тобто, історія розвитку числових рядів передає велику цінність в нашому розумінні сучасної математики. Від самого початку, коли людина почала вивчати взаємозв'язок чисел та розпізнавати закономірності, розвиток числових рядів став ключовою складовою цього процесу. Від простих арифметичних рядів до складних послідовностей Фібоначчі та рядів Тейлора, вони перетинали межі можливостей людського розуму і відкривали двері до нових математичних відкриттів.

У визначенні методу збіжного ряду, переважне значення мав О. Л. Коші, який був французьким вченим. Серед визначних досягнень, він сформулював елемент схожості елементів і критерії збіжності ряду, які у сучасності дуже широко використовуються.

Торкаючись другої половини XVIII, технологічними перспективами та огляд багатьох праць вчених, можна визначити, що почався більш сучасний етап математики, тобто їх поняття, ознаки, мета, функція мають більш схоже значення, порівнюючи із сучасністю. Особливою датою стало 1715 рік де Б. Тейлор вивів як описували коливання експериментальної струни, щоб диференціювати задачу і під самий кінець він знайшов частковий розв’язок задачі, яка була періодичною функцією [14, с. 6-8].

Протягом всього часу вчені, філософи які володіли математичними здібностями в області алгебри та математики досліджували та вдосконалювали числові ряди. Наприклад, Брук Тейлор у XVIII столітті розробив ряд Тейлора, який дозволяє апроксимувати функції складністю будь-якому ступеню точності. Це відкриття знайшло застосування не тільки в алгебрі, але і в фізиці, хімії та інших науках. Сьогодні числові ряди є невід'ємною частиною сучасної математики та наукових досліджень. Вони застосовуються для розв'язання складних проблем, виявлення закономірностей та побудови математичних моделей. Числові ряди не тільки допомагають нам краще розуміти природу чисел і їх взаємозв'язки, але й продовжують викликати людський розум до нових відкриттів та розширення горизонтів наукового знання.

Отже, числові ряди є важливою складовою математичної науки в цілому. Вивчення основ історії розвитку числових рядів допомагає краще розуміти їх сутність, властивості та використання. Використання історичного методу вивчення, відкриваються інші незвичні, але цікаві деталі, які можуть мати цінну інформацію. З часом вони стали фундаментальним інструментом для розв'язування різних математичних задач. Дослідження і розвиток числових рядів є важливим напрямом в математиці, який має наукову, практичну й теоретичну цінність. Також, вони почали використовуватися як в прикладних, так і в теоретичних дослідженнях. Багато відомих вчених внесли значний внесок у розвиток числових рядів, розробивши нові методи та теореми, які використовуються людством. В сучасності протягом останніх років дослідженням різних числових рядів займались такі автори: Д. Анпілогов і Н. Сніжко [1], В. Бобирь [2, 3], С. Габ [5], В. Корольський [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], R. Beauregard, & V. Dobrushkin [4], А. Христюк [3, 22], Н. Дзигарська і О. Тураєва [6], М. Крюков [13], S. Lucas, & A. Nimbran [15], A. Plaza [18], Н. Сачанюк-Кавецька [19], J. Scott [21], С. Щоголєв [23].

Отже, числові ряди дозволяють проводити грунтовний аналіз та швидко, ефективно і максимально правильно розв'язати складні математичні задачі, а також використовуються в інженерії, фізиці, економіці та багатьох інших науках, адже поєднання наук які є подібними має позитивне значення для науки.

1.2. Особливості представлення числових рядів у ШКМ.

Представлення деяких понять числових рядів є важливою частиною шкільного курсу математики і відіграє важливу роль у розвитку навичок учнів у галузі аналізу, алгебри та арифметики.

Перш за все, числові ряди використовуються для представлення послідовностей чисел. Порядок послідовності чисел числового ряду може мати різний характер, а саме: зростаючим, спадаючим, або може відрізнятися іншими правилами та елементами, підлаштовуючись під окрему ситуацію та задачу. Поняття числових рядів є ключовим для формування розуміння послідовностей та прийняття рішень з їх дослідження.

Одним з найпоширеніших способів представлення числових рядів у школі є формула загального члена ряду (a_n). Ця формула має за мету знайти будь-який елемент ряду чи послідовності, використовуючи його порядковий номер. Формула загального члена є потужним додатковим, зручним інструментом, який допомагає учням знаходити не тільки окремі члени послідовності, але й розв'язувати різні задачі, пов'язані з цією послідовністю. Тобто, його задача проявляється у полегшенні учбового процесу, шляхом виконання певного алгоритму дій, який буде вирішувати самі формули не витрачаючи час.

Необхідною умовою усього процесу вивчення числових послідовностей є вміння розпізнавати та класифікувати різні їх типи. Наприклад, арифметичною прогресією називають послідовність чисел, у якій різниця між кожним наступним членом ряду є постійною величиною. Але геометрична прогресія - це послідовність чисел, у якій кожний наступний член ряду отримується множенням попереднього на постійне число.

Класифікація різних типів послідовностей визначає досягнення учнями більшого розуміння їх спільні риси та особливості. Потрібно зазначити, що формули відіграють значну роль і правильне котристування ними підвищать ефективність для знаходження членів ряду та знаходження рішення в задачі.

Досліджуючи підручник алгебри 9 класу з поглибленим вивченням математики автора Мерзляка А. Г. 2017 року можна зазначити наступні теми уроків, які висвітлюються в розділі «Числові послідовності» [16, с. 317-365]:

1. Числові послідовності.
2. Арифметична прогресія.
3. Сума n перших членів арифметичної прогресії.
4. Геометрична прогресія.
5. Сума n перших членів геометричної прогресії.
6. Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1.
7. Сумування.

Поняття числової послідовності представлено як «послідовність, де членами цієї послідовності є числа». Також у підручнику зазначається, що вони можуть бути поділені на види, як скінченні і нескінченні. Наприклад, відповідна послідовність парних чисел - це така за родом послідовність, яка має нескінченний характер. [16, с. 317].

Крім запису у вигляді формули (a_n), у підручнику зазначається, що числові послідовності можна представити також у вигляді графіку. На думку автора графічне представлення дозволяє учням візуалізувати зміну значень ряду та зрозуміти його закономірності.

Послідовності є одним з важливих понять у математиці. Незважаючи на те, що цій темі приділяється не так багато уваги, вона сприяє формуванню в учнів наступних навичок: правильне вживання буквеної символіки; складання буквених виразів та формул; здійснення числових підстановок у формулах; виконання відповідних обчислень [20, с. 3].

Тобто, ознайомлення з особливостями представлення числових рядів у шкільному курсі алгебри допомагає учням розвивати навички у вирішенні завдань та задач, а також розуміння зміни значень чисел у ряді. Знання про числові ряди дозволяють учням аналізувати та передбачати майбутні значення ряду, що є важливим для розвитку алгебраїчних знань.

Але, потрібно розуміти, що з новими підходами зростає швидкість вирішення відповідних задач, адже ефективним чинником в математичній сфері діяльності є час, за допомогою якого можна вирішити будь-яку задачу але швидше, використовуючи формули, графіки за необхідності та формування числових послідовностей в цілому.

Отже, можна визначити, що у шкільному курсі алгебри числові ряди представлені, але не у повному обсязі, зазвичай представлені числові послідовності за допомогою яких як раз і навчають учнів розуміти і працювати з послідовностями чисел.

1.3. Методичні підходи до розробки системи задач з математики.

Важливою складовою у навчальному процесі та використанні систем задач з математики є методичні підходи, які мають комплексний характер та вміють охопити всі організаційні питання з приводу якісної подачі матеріалу.

Зробивши аналіз закону України «Про повну загальну середню освіту», можемо визначити один із таких важливих моментів, як зменшення дослідницького та наукового потенціалу. Тому, потрібно виокремити та розглянути метод математичного моделювання, так як він є один з найважливіших методів наукового пізнання, тобто питання стосується в основному ефективного вивчення математики у шкільних закладах освіти, мета якої є формування та закладення професійного математичного фундаменту, навіть з урахуванням математичних дій з підвищеною складністю та побудова математичних моделей [17].

На сучасному етапі математичної освіти, проблема розв'язування задач та виконання певних завдань методом математичного моделювання та використання числових рядів до розробки системи задач є передовим та актуальним, щоб зробити якісне дослідження та навчити учнів критичному мисленню. Метод математичного моделювання – це сучасний метод та додатковий інструмент розв'язування прикладних задач, який визначається на застосуванні математичної моделі, як наукове підґрунтя.

Математичне моделювання досить актуально, в умовах сьогодення. Дане питання торкалося багатьох вчених і методологія дослідження спонукає поглибити процес аналізу в області математики. В. О. Швець досліджував дане питання і зміг сформувати та визначити етапи розв’язування задачі, використовуючи метод математичного моделювання а саме:

1. Розробка та реалізація математичної моделі – аналіз задачі та її порядку виконання з боку математичної галузі.

2. Структуризація математичної моделі – визначення основної послідовності розв'язування математичної задачі та її регулювання.

3. Детальне пояснення розв'язку математичної задачі , чим керувався та які методи застосовував для вирішення [24, с.16-20].

На сьогоднішній день проблематика полягає у відсутності наукового систематичного аспекту у процесі вивчення математики учнів ліцею. Через недостатню інформацію та недостатню кількість прикладних задач, виникає питання залучення більшого практичного потенціалу. З приводу використання числових послідовностей і рядів до розробки системи задач, було проаналізовано підручник А. Г. Мерзляка 2017 року для 9 класу.

Отже, враховуючи вище викладене можна зрозуміти, що методичні підходи до розробки системи задач з математики мають особливе значення в області математики. Використання числових рядів до розробки системи задач повинно втілюватися на практиці, для покращення показників ефективності та якіснішого розуміння математичної моделі, яка була представлена та проаналізована. Дані проблеми, які були висвітлені, допоможуть збільшити використання та посилити ефективність числових рядів, а також розробити сприятливий клімат для математичної системи в цілому.

РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАДАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ І КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ І $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

2.1. Ряди з точковою геометричною інтерпретацією

На основі заданої геометричної моделі, представленої на рис. 2.1.1., були отримані та проаналізовані числові ряди з різними геометричними інтерпретаціями їхніх членів, які подаються нижче [12, с. 45-47].

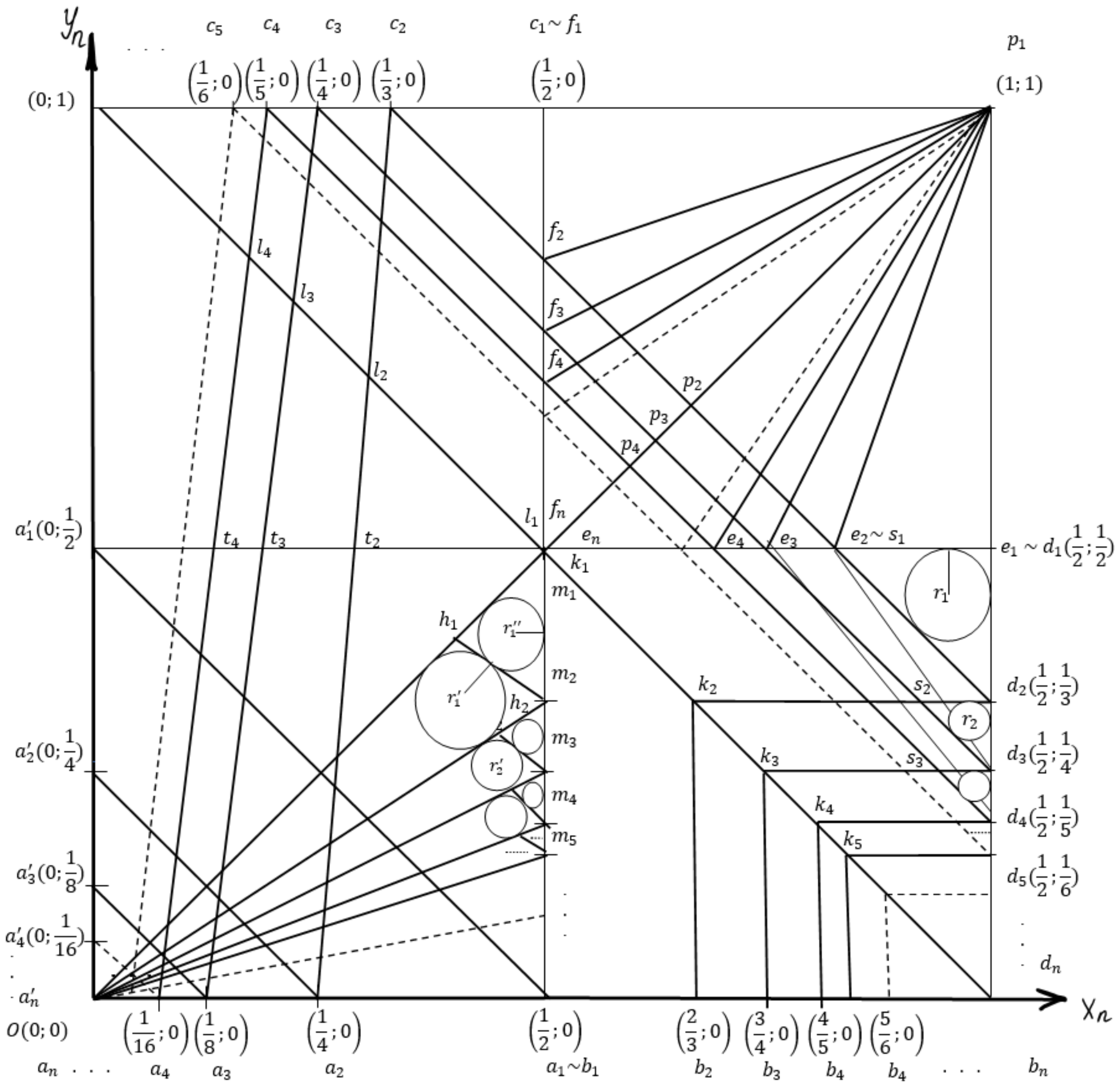


Рис. 2.1.1. Геометрична модель, побудована в квадраті зі стороною a=1 в системі координат Oxy. Квадрат має вершини в т. т. (0;0), (1;0), (1;1), (0;1)

Розглянемо спочатку задачі точкової геометричної інтерпретації.

<u>Задача 1.</u> Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. e_n

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. b_{n} симетричні e_{n}, тому $e_1e_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; $e_1e_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $e_1e_4 = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$; $e_1e_5 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$e_1\left(1;\frac{1}{2}\right);\ e_2\left(1-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right);\ e_3\left(1-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\ e_4\left(1-\frac{3}{10};\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{7}{10};\frac{1}{2}\right);\ e_5\left(1-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right);\ \ldots\ldots;\ e_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Отже, розглянемо тільки ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n}$, оскільки координати цієї точки по y не змінюються. Тому $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}$ (2.1).

<u>Задача 2.</u> Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. p_{n}

Для того, щоб знайти ряди нам відомі p_1 (1; 1), p_2 $(\frac{3}{4};\ \frac{3}{4})$, p_3 $(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3})$ з рисунку. Визначимо ще т. p_4, вона буде серединою $\mathrm{c}_3 d_3$, тому p_4 $(\frac{1+\frac{1}{4}}{2};\ \frac{1+\frac{1}{4}}{2})$ = p_4 $(\frac{5}{8};\ \frac{5}{8})$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$ (2.2).

<u>Задача 3.</u> Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. f_{n}

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. f_{n} по x дорівнюють координатам послідовності т. т. e_{n} по y, і навпаки. Тому розглянемо тільки ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} y_{\mathrm{n}}$, оскільки координати т. f_{n} по x не змінюються.

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} x_{\mathrm{n}}\ (1) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} y_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}\ (2.3).$$

<u>Задача 4.</u> Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. l_{n} [12].

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. l_{n} симетричні k_{n}, тому

$$l_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\ l_2\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right);\ l_3\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right);\ l_4\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right);\ \ldots;\ l_{\mathrm{n}}(0;1)$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ $(*)$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (**) (2.4)

<u>Задача 5.</u> Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. k_{n}

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. k_n по x відповідають координатам послідовності т. т. l_n по y, і навпаки. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\ (2.4,*) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ (2.5,*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\ (2.4,**) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\ (2.5,**)$$

<u>Задача 6.</u> Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. m_n

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. m_n мають наступний вид

$$m_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\ m_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right);\ m_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right);\ m_4\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right);\ \dots;\ m_n\left(\frac{1}{2};0\right)$$

А також відомо, що координати послідовності т. т. m_n по y дорівнюють координатам послідовності т. т. k_n y. Тому розглянемо тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, оскільки координати т. m_n по x не змінюються.

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\ (2.5,*) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ (2.6)$$

<u>Задача 7.</u> Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. h_n

Для знаходження координат послідовності т. т. h_n розглянемо $\Delta m_1 h_1 m_2$. Цей трикутник є прямокутним і рівнобедреним: $\cos 45 = \frac{m_1 h_1}{m_1 m_2}$, $\sin 45 = \frac{m_2 h_1}{m_1 m_2}$, оскільки $\cos 45 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $m_1 h_1 = m_2 h_1 = m_1 m_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Тому $h_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}; \frac{1}{2} - \frac{1}{12}) = h_1(\frac{5}{12}; \frac{5}{12})$. Аналогічно до цього знайдемо і інші координати послідовності т. т. h_n.

$$h_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}; \frac{1}{3} - \frac{1}{24}) = h_2(\frac{11}{24}; \frac{7}{24});\ h_3(\frac{1}{2} - \frac{1}{40}; \frac{1}{4} - \frac{1}{40}) = h_3(\frac{19}{40}; \frac{9}{40});$$

$$h_4(\frac{1}{2} - \frac{1}{60}; \frac{1}{5} - \frac{1}{60}) = h_4(\frac{29}{60}; \frac{11}{60}); \dots$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\ (*)$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\ (**)\ (2.7)$

<u>Задача 8.</u> Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. s_n

З рисунку видно, що координати по х послідовності т. т. s_n змінюються в стільки раз відповідно як і координати по х послідовності т. т. k_n, тому

$s_1\left(1-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)= s_1\left(\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right)$;

$s_2\left(1-\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)= s_2\left(\frac{8}{9};\frac{1}{3}\right)$;

$s_3\left(1-\frac{1}{12};\frac{1}{4}\right)= s_3\left(\frac{11}{12};\frac{1}{4}\right)$;

$s_4\left(1-\frac{1}{15};\frac{1}{5}\right)= s_3\left(\frac{14}{15};\frac{1}{5}\right)$;

……………………………………………………

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$ (∗), $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (**) (2.8)

Задача 9. Записати ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ [12].

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. a_n і a_n' такі

$$a_1\left(\frac{1}{2};0\right);\ a_2\left(\frac{1}{4};0\right);\ a_3\left(\frac{1}{8};0\right);\ a_4\left(\frac{1}{16};0\right);\ \dots;\ a_n(0;0)$$

$$a_1'\left(0;\frac{1}{2}\right);\ a_2'\left(0;\frac{1}{4}\right);\ a_3'\left(0;\frac{1}{8}\right);\ a_4'\left(0;\frac{1}{16}\right);\ \dots;\ a_n'(0;0)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (2.9).

Задача 10. Записати ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. d_n і c_n такі

$$d_1\left(1;\frac{1}{2}\right);\ d_2\left(1;\frac{1}{3}\right);\ d_3\left(1;\frac{1}{4}\right);\ d_4\left(1;\frac{1}{5}\right);\ \dots;\ d_n(1;0)$$

$$c_1\left(\frac{1}{2};1\right);\ c_2\left(\frac{1}{3};1\right);\ c_3\left(\frac{1}{4};1\right);\ c_4\left(\frac{1}{5};1\right);\ \dots;\ c_n(1;1)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (2.10).

Задача 11. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. b_n такі

$$b_1\left(\frac{1}{2};0\right);\ b_2\left(\frac{2}{3};1\right);\ b_3\left(\frac{3}{4};1\right);\ b_4\left(\frac{4}{5};1\right);\ \dots;\ b_n(1;1)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ (2.11).

<u>Задача 12.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$, де (x_n, y_n) – координати точок s_n

Використовши <u>задачу 8</u>, знайдемо цей ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}, \frac{1}{n}\right) \quad (2.12)$$

2.2. Ряди з лінійною геометричною інтерпретацією

Числові ряди, одержані за результатами розв'язання задач (2.1-2.12) є рядами <u>точкової геометричної інтерпретації</u>. Ці ряди можуть бути використані для одержання числових рядів <u>лінійної геометричної інтерпретації</u>, які представлені нижче.

<u>Задача 1.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n a_{n+1}}|$

$$|\overline{a_1 a_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

$$|\overline{a_2 a_3}| = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$|\overline{a_3 a_4}| = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$$

…………………………...

$$|\overline{a_n a_{n+1}}| = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n a_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ (2.13).

<u>Задача 2.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{b_n b_{n+1}}|$

$$|\overline{b_1 b_2}| = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$|\overline{b_2 b_3}| = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$|\overline{b_3 b_4}| = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

…………………………...

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{2n+2-n-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+2)}$ (2.14).

<u>Задача 3.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_n d_{n+1}}|$ [12].

$$|\overline{d_1 d_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$|\overline{d_2 d_3}| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$|\overline{d_3 d_4}| = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

……………………………..

$$|\overline{d_n d_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_n d_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (2.15).

<u>Задача 4.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_n e_{n+1}}|$

$$|\overline{e_1 e_2}| = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$|\overline{e_2 e_3}| = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

$$|\overline{e_3 e_4}| = \frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

……………………………

$$|\overline{e_n e_{n+1}}| = \frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{n+4}{2(n+2)} = \frac{(n+2)(n+3)-(n+4)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+5n+6-n^2-5n-4}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_n e_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (2.16)

<u>Задача 5.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_n p_{n+1}}|$

$$|\overline{p_1 p_2}| = \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{p_2 p_3}| = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$|\overline{p_3 p_4}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{16\sqrt{2}-15\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

……………………………………………

$$|\overline{p_n p_{n+1}}| = \frac{(n+1)\sqrt{2}}{2n} - \frac{(n+2)\sqrt{2}}{2(n+1)} = \frac{(n+1)^2\cdot\sqrt{2}-n(n+2)\cdot\sqrt{2}}{2n(n+1)} = \frac{\sqrt{2}(n^2+2n+1-n^2-2n)}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2n(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_n p_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2n(n+1)}$ (2.17).

<u>Задача 6.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_n l_{n+1}}|$

$$\left|\overline{l_1 l_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\left|\overline{l_2 l_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\left|\overline{l_3 l_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{20^2}+\frac{1}{20^2}} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

………………………………………………………

$$\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)}\right)^2+\left(\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+(n^2+2n+1-n^2-2n)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$ (2.18).

Задача 7. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{m_n m_{n+1}}\right|$ (2.19)

З рисунку видно, що ряд (2.15) дорівнює ряду (2.19), тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{m_n m_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Задача 8. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{h_n m_{n+1}}\right|$

$$\left|\overline{h_1 m_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\left|\overline{h_2 m_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{24}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{11}{24}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{24}\right)^2+\left(\frac{5}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{24^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{24}$$

$$\left|\overline{h_3 m_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{40}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{19}{40}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{40}\right)^2+\left(\frac{11}{40}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\cdot 121}{40^2}} = \frac{11\sqrt{2}}{40}$$

………………………………………………………………………

$$\left|\overline{h_n m_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(n+2)(n+1)-2n-3}{2(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{2n+2-n^2-3n-1}{2(n+1)(n+2)}\right)^2} = \sqrt{\frac{(n^2+n-1)^2-(-n^2-n+1)^2}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot(n^2+n-1)^2}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{h_n m_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$ (2.20).

Задача 9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a'_n a_n}|$

$$|\overline{a'_1 a_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\overline{a'_2 a_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{a'_3 a_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{64}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

……………………………………

$$|\overline{a'_n a_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|a'_n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ (2.21).

Задача 10. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{om_n}|$

$$|\overline{om_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\overline{om_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$|\overline{om_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

…………………………………………………………

$$|\overline{om_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{om_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)}$ (2.22).

Задача 11. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{oh_n}|$

$$|\overline{oh_1}| = \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{12^2}} = \frac{\sqrt{50}}{12}$$

$$|\overline{oh_2}| = \sqrt{\left(\frac{7}{24}\right)^2 + \left(\frac{11}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+121}{24^2}} = \frac{\sqrt{170}}{24}$$

$$|\overline{oh_3}| = \sqrt{\left(\frac{9}{40}\right)^2 + \left(\frac{19}{40}\right)^2} = \sqrt{\frac{81+361}{40^2}} = \frac{\sqrt{442}}{40}$$

…………………………………………

$$\left|\overline{oh_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4n^2+12n+9+n^4+9n^2+1+6n^3+6n+2n^2}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^4+6n^3+15n^2+8n+10}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n^2+2n+2)+4n(n^2+2n+2)+5(n^2+2n+2)}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}{2^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{oh_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}$ (2.23)

Задача 12. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_1f_n}\right|$

$$\left|\overline{p_1f_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\overline{p_1f_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{6}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$\left|\overline{p_1f_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

……………………………………………………………………

$$\left|\overline{p_1f_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{n+3}{2(n+1)}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(n+3-2n-2)^2}{2^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2+(-n+1)^2}{2^2(n+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2+2n+1+(n-1)^2}{2^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1+n^2-2n+1}{2^2(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_1f_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$ (2.24).

Задача 13. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_1e_n}\right|$ (2.25)

З рисунку видно, що ряд (2.24) дорівнює ряду (2.25), тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_1f_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_1e_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$$

Задача 14. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{f_ne_n}\right|$

$$\left|\overline{f_1e_1}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left|\overline{f_2e_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$|f_3 e_3| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

....

$$\left|\overline{f_n e_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{n+3}{2(n+1)}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{n+3}{2(n+1)}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(\frac{n+3-n-1}{2(n+1)}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\frac{4}{4(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{f_n e_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ (2.26).

<u>Задача 15.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_{n+1}d_{n+1}}\right|$

$$\left|\overline{e_2 d_2}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\left|\overline{e_3 d_3}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|e_4 d_4| = \sqrt{\left(1-\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\cdot 9}{10^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

....

$$\left|\overline{e_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{n+4}{2(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2n+4-n-4}{2(n+2)}\right)^2+\left(\frac{2-n-2}{2(n+2)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot n^2}{4(n+2)^2}} = \frac{n\sqrt{2}}{2(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+2)}$ (2.27)

<u>Задача 16.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n e_n}\right|$

$$\left|\overline{d_1 e_1}\right| = 0$$

$$\left|\overline{d_2 e_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{6}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$|d_3 e_3| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

....

$$\left|\overline{d_n e_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{n+3}{2(n+1)}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+3-2n-2}{2(n+1)}\right)^2+\left(\frac{n+1-2}{2(n+1)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot(n-1)^2}{4(n+1)^2}} = \frac{(n-1)\sqrt{2}}{2(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_{n+1}d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sqrt{2}}{2(n+1)}$ (2.28).

Задача 17. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right|$

$$\left|\overline{c_1 l_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\overline{c_2 l_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\overline{c_3 l_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

…………………………………………

$$\left|\overline{c_n l_n}\right| = \frac{1}{n+1}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (2.29)

Задача 18. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right|$

$$\left|\overline{k_1 d_1}\right| = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\overline{k_2 d_2}\right| = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\overline{k_3 d_3}\right| = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

…………………

$$\left|\overline{k_n d_n}\right| = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (2.30)

Задача 19. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n p_{n+1}}\right|$

$$\left|\overline{c_1 p_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\left|\overline{c_2 p_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\left|c_3 p_4\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{64}+\frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{18}{64}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

……………………………………………………………………

$$|\overline{c_n p_{n+1}}|=\sqrt{\left(\frac{n+2}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n+2}{2(n+1)}-1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{n+2-2}{2(n+1)}\right)^2+\left(\frac{n+2-2n-2}{2(n+1)}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot n^2}{4(n+1)^2}}=\frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{c_n p_{n+1}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)}$ (2.31).

<u>Задача 20.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_n s_n}|$

$$|\overline{d_1 s_1}|=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$|\overline{d_2 s_2}|=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$|\overline{d_3 s_3}|=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

....

$$|\overline{d_n s_n}|=1-\frac{1}{3\cdot(n+1)}=\frac{3\cdot(n+1)-1}{3\cdot(n+1)}=\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_n s_n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$ (2.32).

<u>Задача 21.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{s_n s_{n+1}}|$

$$|\overline{s_1 s_2}|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{18^2}+\frac{1}{6^2}}=\sqrt{\frac{10}{18^2}}=\frac{\sqrt{10}}{18}$$

$$|\overline{s_2 s_3}|=\sqrt{\left(\frac{11}{12}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{36^2}+\frac{1}{12^2}}=\sqrt{\frac{1+9}{36^2}}=\frac{\sqrt{10}}{36}$$

$$|s_3 s_4|=\sqrt{\left(\frac{14}{15}-\frac{11}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{60^2}+\frac{1}{20^2}}=\sqrt{\frac{10}{60^2}}=\frac{\sqrt{10}}{60}$$

....

$$|\overline{s_n s_{n+1}}|=\sqrt{\left(\frac{3n+5}{3\cdot(n+2)}-\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3n^2+8n+5-3n^2-8n-4)}{3\cdot(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9\cdot(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{3\cdot(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{s_n s_{n+1}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{10}}{3\cdot(n+1)(n+2)}$ (2.33)

<u>Задача 22.</u> Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{r_n}$

Для знаходження даного ряду використаємо формулу для обчислення радіуса вписаного кола у прямокутний трикутник $\Delta\, \mathrm{d_n s_n d_{n+1}}$. А також задачі 2.3, 2.15, 2.20, оскільки сторони $\Delta\, \mathrm{d_n s_n d_{n+1}}$ будуть представлені у вигляді рядів цих задач.

$$\mathrm{r_n} = \frac{\left|\overline{\mathrm{d_n s_n}}\right| + \left|\overline{\mathrm{d_n d_{n+1}}}\right| - \left|\overline{\mathrm{s_n d_{n+1}}}\right|}{2}$$

$$\mathrm{r_n} = \frac{\frac{3n+2}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{\sqrt{\mathrm{n}^2+4n+40}}{6(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}}{2} =$$

$$= \frac{2(3n^2+8n+4)+6-\sqrt{n^2+4n+40}}{2\cdot 6(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{6n^2+16n+14-\sqrt{n^2+4n+40}}{12(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{r_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{6n^2+16n+14-\sqrt{n^2+4n+40}}{12(n+1)(n+2)}$ (2.34)

<u>Задача 23.</u> Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} r_n'$

Для знаходження даного ряду використаємо формулу для обчислення радіуса вписаного кола у прямокутний трикутник $\Delta\, \mathrm{e_n h_n m_{n+1}}$. А також задачі 2.8, 2.10, 2.11, оскільки сторони $\Delta\, \mathrm{e_n h_n m_{n+1}}$ будуть представлені у вигляді рядів цих задач.

$$r_n' = \frac{\left|\overline{\mathrm{oh_n}}\right| + \left|\overline{\mathrm{h_n m_{n+1}}}\right| - \left|\overline{\mathrm{om_{n+1}}}\right|}{2}$$

$\left|\overline{\mathrm{om_{n+1}}}\right|$ знайдемо за допомогою ряда $\left|\overline{\mathrm{om_n}}\right|$ із <u>задачі 2.10</u>.

Оскільки $\left|\overline{\mathrm{om_n}}\right| = \frac{\sqrt{\mathrm{n^2+2n+5}}}{2(\mathrm{n}+1)}$, тоді $\left|\overline{\mathrm{om_{n+1}}}\right| = \frac{\sqrt{(\mathrm{n}+1)^2+2(\mathrm{n}+1)+5}}{2(\mathrm{n}+2)}$

$$r_n' = \frac{\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} + \frac{(\mathrm{n}^2+\mathrm{n}-1)\cdot\sqrt{2}}{2(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} - \frac{\sqrt{(\mathrm{n}+1)^2+2(\mathrm{n}+1)+5}}{2(\mathrm{n}+2)}}{2}$$

$$r_n' = \frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)} + (\mathrm{n}^2+\mathrm{n}-1)\cdot\sqrt{2} - \sqrt{n^2+4n+8}}{4(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} r_n' = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(\mathrm{n}^2+\mathrm{n}-1)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{n^2+4n+8}}{4(n+1)(n+2)}$ (2.35)

<u>Задача 24.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} r_n''$

Для знаходження даного ряду використаємо формулу для обчислення радіуса вписаного кола у прямокутний трикутник $\Delta\, h_n m_n m_{n+1}$. А також <u>задачі 2.7, 2.8</u>, оскільки сторони $\Delta\, h_n m_n m_{n+1}$ будуть представлені у вигляді рядів цих задач.

$$r_n'' = \frac{|\overline{h_n m_n}| + |\overline{h_n m_{n+1}}| - |\overline{m_n m_{n+1}}|}{2}$$

$$|\overline{h_n m_n}| = |\overline{om_n}| - |\overline{oh_n}|$$

$$|\overline{h_n m_n}| = \frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5} - \sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}$$

$$r_n'' = \frac{\frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5} - \sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)} + \frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}}{2}$$

$$r_n'' = \frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5} - \sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)} + (n^2+n-1)\cdot\sqrt{2} - 2}{4(n+1)(n+2)}$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5} - \sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)} + (n^2+n-1)\cdot\sqrt{2} - 2}{4(n+1)(n+2)} \quad (2.36)$$

2.3. Ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією

Ряди першої і другої групи можуть бути використані для знаходження рядів квадратурної та кубатурної геометричної інтерпретиції, які представлені нижче.

<u>Задача 1.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta o a_n' a_n}$ [12].

I спосіб: Використаємо шкільні формули для знаходження $S_{\Delta O a_n' a_n}$. В даному випадку $S = \frac{1}{2}\, ab \sin\alpha \Rightarrow S_{\Delta O a_n' a_n}. = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2n+1}}$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O a_n' a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ (2.37)

II спосіб: Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$S_{\Delta O a'_n a_n} = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{1}{2^n}\right)\cdot 0 - \left(-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O a'_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ (2.37)

III спосіб: Використаємо формулу для обчислення площі за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$S_{\Delta O a'_n a_n} = \int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(-x + \frac{1}{2^n}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2^n}x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2^n}} = \frac{-1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{-1+2}{2^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O a'_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ (2.37)

Було представлено різні способи розв'язання однієї задачі, скориставшись якими ми прийшли до одного і того самого загального члена ряда.

Задача 2. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$

I спосіб: Використаємо шкільні формули для знаходження $S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$ та задачі 2.3 і 2.15. В даному випадку $S = \frac{1}{2}\, ab \sin\alpha$, тоді площа даного трикутника буде мати такий вид: $S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{2}n}{2(n+2)} = \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ (2.38)

II спосіб: Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$S_{S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-(\frac{2}{2(\mathrm{n}+1)})(\frac{n+2-2}{2(\mathrm{n}+2)})\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-\mathrm{n}}{2(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}\right| = \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{d}_1 \mathrm{e}_{n+1} \mathrm{d}_{n+1}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ (2.38)

<u>Задача 3.</u> Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{O} \mathrm{m}_{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{O} \mathrm{m}_{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+1-n-2}{2(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{O} \mathrm{m}_{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$ (2.39)

<u>Задача 4.</u> Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}}$

І спосіб: Використаємо шкільні формули для знаходження $\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}}$. В даному випадку $S = \frac{1}{2}\, ah_a \Rightarrow \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{n}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}n}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)^2}$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)^2}$ (2.40)

ІІ спосіб: Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{\mathrm{n}+3}{2(n+1)} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{n}+3}{2(n+1)} - 1\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{4} - \frac{(\mathrm{n}-1)^2}{4(\mathrm{n}+1)^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} + 1 - \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} - 1}{4(\mathrm{n}+1)^2}\right| = \frac{n}{2(n+1)^2}$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_1 \mathrm{f}_{\mathrm{n}} \mathrm{e}_{\mathrm{n}}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)^2}$ (2.40)

<u>Задача 5.</u> Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{m}_{\mathrm{n}} \mathrm{h}_{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{m_n h_n m_{n+1}}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} - \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n^2+3n+2-n^2-3n-1}{2(n+1)(n+2)}\cdot\left(\frac{2n+2-2n-3}{2(n+1)(n+2)}\right) - \left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left(\frac{2n+4-2n-3}{2(n+1)(n+2)}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\frac{-1}{4(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}\right| = \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{m_n h_n m_{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$ (2.41)

<u>Задача 6.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_{\Delta \theta \mathrm{f_n e_n}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$\mathrm{S}_{\Delta \theta \mathrm{f_n e_n}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|-\left(\frac{(n+3-n-1)^2}{4(n+1)^2}\right)\right| = \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_{\Delta \theta \mathrm{f_n e_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)^2}$ (2.42)

<u>Задача 7.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_{\Delta \theta \mathrm{t_n l_{n+1}}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$S_{\Delta\theta t_n l_{n+1}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{3-2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{2n-n-1}{2(n+1)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(3-2^n)(n-1)}{2^{n+2}(n+1)}\right|=\frac{(3-2^n)(n-1)}{2^{n+3}(n+1)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta\theta t_n l_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2^n)(n-1)}{2^{n+3}(n+1)}$ (2.43)

Задача 8. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta O h_n m_{n+1}}$

Розглянемо задачу першим способом розв'язання.

Використаємо шкільні формули для знаходження $S_{\Delta O h_n m_{n+1}}$. В даному випадку $S=ab\sin\alpha \Rightarrow S_{\Delta O h_n m_{n+1}}=\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}\cdot\sin 90^0$

$$S_{\Delta O h_n m_{n+1}}=\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta O h_n m_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{8(n+1)^2(n+2)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta O h_n m_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{8(n+1)^2(n+2)^2}$ (2.44)

Задача 9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta h_n m_n m_{n+1}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$$

$$S_{\Delta h_n m_n m_{n+1}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{n^2+3n+2-n^2-3n-1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{2n+2-2n-3}{2(n+1)(n+2)}\right)-\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{2n+4-2n-3}{2(n+1)(n+2)}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2(n+1)(n+2)}\right)-\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-1}{4(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}\right|=\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta h_n m_n m_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$ (2.45)

<u>Задача 10.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}}$

Розглянемо задачу першим способом розв'язання.

Використаємо шкільні формули для знаходження $S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}}$. В даному випадку $S = \frac{1}{2}\, a h_a \Rightarrow S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{e_n e_{n+1}}| \cdot |\overline{e_1 p_1}|$

$$S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4(n+1)(n+2)}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$ (2.46)

<u>Задача 11.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_n d_{n+1}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$S_{\Delta d_n s_n d_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{3n+2}{3(n+1)} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{3n+2-3n-3}{6(n+1)}\right)\left(\frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{6(n+1)^2(n+2)}\right| =$$

$$= \frac{1}{12(n+1)^2(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_n d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)^2(n+2)}$ (2.47)

<u>Задача 12.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_{n+1} d_{n+1}}$

Розв'яжемо другим способом.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$S_{\Delta d_n s_{n+1} d_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{3n+5}{3(n+2)} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{3n+5-3n-6}{6(n+2)}\right)\left(\frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{6(n+1)(n+2)^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{12(n+1)(n+2)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_{n+1} d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)(n+2)^2}$ (2.48)

Задача 13. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$

I спосіб: Використаємо шкільні формули для знаходження $S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$ та задачі 2.3 і 2.15. В даному випадку $S = \frac{1}{2}\, ab \sin\alpha$, тоді площа даного трикутника буде мати такий вид: $S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{2}n}{2(n+2)} = \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ (2.49)

II спосіб: Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$S_{S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\left(\frac{2}{2(n+1)}\right)\left(\frac{n+2-2}{2(n+2)}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{-n}{2(n+1)(n+2)}\right| = \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ (2.49)

Задача 14. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}}$

Знайдемо даний ряд, використовуючи звичайну формулу для знаходження площі трапеції, а саме $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2}\cdot h$, де a, b – основи даної трапеції.

$$S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}} = \frac{\overline{|d_n k_n|} + \overline{|d_{n+1} k_{n+1}|}}{2}\cdot\overline{|d_n d_{n+1}|}$$

Для знаходження $S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}}$ використаємо задачі 2.3 і 2.18.

$$S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2+n+1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+3}{2(n+1)^2(n+2)^2}$$

Отже, $S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}} = \frac{2n+3}{2(n+1)^2(n+2)^2}$ (2.50)

2.4. Ряди з кубатурною геометричною інтерпретацією

<u>Задача 1.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де v_n – об’єми тіл обертання прямих $|\overline{om_n}|$ навколо осі OX [12].

Використаємо наступну формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Враховуючи координати точок $o(0;0), m_n\left(\frac{1}{2};\frac{1}{n+1}\right)$ одержуємо:

$$V_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,dx$$

Знайдемо підінтегральну функцію, це буде рівняння послідовності прямих, на яких розташовані точки $0, m_n$.

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{n+1}}$$

Спрощуючи даний вираз отримаємо: $y = \frac{2x}{n+1}$

$$V_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{n+1}\right)^2 dx = \frac{4\pi}{(n+1)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{4\pi}{(n+1)^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{4\pi}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{6(n+1)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6(n+1)^2}$ (2.51), де v_n – об’єми тіл обертання прямих $|\overline{o\,m_n}|$ навколо осі OX.

<u>Задача 2.</u> Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де v_n – об’єми тіл обертання прямих $|\overline{f_n\,e_n}|$ навколо осі OX

Використаємо формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Враховуючи координати точок $f_n\left(\frac{1}{2};\frac{n+3}{2(n+1)}\right)$, $e_n\left(\frac{n+3}{2(n+1)};\frac{1}{2}\right)$ одержуємо:

$$V_n = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+3}{2(n+1)}} f^2(x)\,dx$$

Знайдемо підінтегральну функцію, це буде рівняння послідовності прямих, на яких розташовані точки f_n, e_n.

$$\frac{x-\frac{n+3}{2(n+1)}}{\frac{1}{2}-\frac{n+3}{2(n+1)}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{n+3}{2(n+1)}-\frac{1}{2}}$$

Спрощуючи даний вираз отримаємо:

$$y = -x + \frac{n+2}{(n+1)}$$

$$V_n = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+3}{2(n+1)}} \left(-x+\frac{n+2}{(n+1)}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+3}{2(n+1)}} (x^2 + 2x\frac{n+2}{(n+1)} + \left(\frac{n+2}{(n+1)}\right)^2)\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{n+2}{(n+1)}x^2 + x\left(\frac{n+2}{(n+1)}\right)^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+3}{2(n+1)}} = \pi(\frac{\frac{n+3}{2(n+1)}^3}{3} + \frac{n+2}{(n+1)}\cdot\left(\frac{n+3}{2(n+1)}\right)^2 +$$

$$+\frac{n+3}{2(n+1)}\left(\frac{n+2}{(n+1)}\right)^2 - (\frac{1}{24}+\frac{n+2}{(n+1)}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+2}{(n+1)}\right)^2)) = \pi(\frac{(n+3)^3}{24(n+1)^3} + \frac{(n+2)(n+3)^3}{8(n+1)^3} +$$

$$+\frac{(n+3)(n+2)^3}{2(n+1)^3} - (\frac{1}{24}+\frac{n+2}{4(n+1)} + \frac{(n+2)^2}{2(n+1)^2})) = \pi(\frac{(n+3)^3+3(n+2)(n+3)^3+12(n+3)(n+2)^3}{24(n+1)^3} -$$

$$-(\frac{1}{24}+\frac{n+2}{4(n+1)} + \frac{(n+2)^2}{2(n+1)^2}))$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(\frac{(n+3)^3+3(n+2)(n+3)^3+12(n+3)(n+2)^3}{24(n+1)^3} - (\frac{1+6(n+1)(n+2)+12((n+2)^2)}{24(n+1)^2}), \quad (2.52)$$ де

v_n – об'єми тіл обертання прямих $\left|\overline{f_n\,e_n}\right|$ навколо осі OX.

Задача 3. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{v_n}$, де $\mathrm{v_n}$ – об'єми тіл обертання прямих $|\overline{l_n l_{n+1}}|$ навколо осі OX

Використаємо формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Враховуючи координати точок одержуємо:

$$V_n = \pi \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+2}} f^2(x)\,dx$$

Знайдемо підінтегральну функцію, це буде рівняння послідовності прямих, на яких розташовані дані нам точки, вона буде дорівнювати x^2.

$$V_n = \pi \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+2}} -x^2\,dx = -\pi\,(\frac{x^3}{3})\Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+2}} = -\pi\left(\frac{\left(\frac{1}{n+2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^3}{3}\right) =$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{3(n+2)^3} - \frac{1}{3(n+1)^3}\right) = -\pi\left(\frac{(n+1)^3-(n+2)^3}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right) =$$

$$= -\pi\left(\frac{-3n^2-9n-7}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right) = \pi\left(\frac{3n^2+9n+7}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right)$$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{v_n} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\pi(3n^2+9n+7)}{3(n+1)^3(n+2)^3}$ (2.53), де $\mathrm{v_n}$ – об'єми тіл обертання прямих $|\overline{l_n l_{n+1}}|$ навколо осі OX.

Задача 4. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{v_n}$, де $\mathrm{v_n}$ – об'єми тіл обертання прямих $|\overline{p_1\, e_{n+1}}|$ навколо осі OX

Використаємо формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Враховуючи координати точок одержуємо:

$$V_n = \pi \int_{\frac{n+3}{2(n+1)}}^{1} f^2(x)\,dx$$

Знайдемо підінтегральну функцію, це буде рівняння послідовності прямих, на яких розташовані дані нам точки.

$$V_n = \pi \int_{\frac{n+3}{2(n+1)}}^{1} \left(-\frac{n+1}{n-1}x - \frac{1}{2}\right) dx = -\pi \left(\frac{\frac{n+1}{n-1}x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{\frac{n+3}{2(n+1)}}^{1} =$$

$$= -\pi \left(\frac{n+1}{2(n-1)} + \frac{1}{2} - \frac{(n+1)\left(\frac{n+3}{2(n+1)}\right)^2}{2(n-1)} - \frac{\frac{n+3}{2(n+1)}}{2}\right) =$$

$$= -\pi \left(\frac{n+1-2n-2}{2(n-1)} - \frac{(n+1)(n+3)^2}{8(n-1)(n+1)^2} - \frac{n+3}{4(n+1)}\right) =$$

$$= -\pi \left(\frac{4(n+1)^2(-n-1) - (n+1)(n+3)^2 - 2(n+3)(n+1)(n-1)}{8(n-1)(n+1)^2}\right)$$

$$= \pi \left(\frac{4(n+1)^2 - (n+3)^2 - 2(n+3)(n-1)}{8(n-1)(n+1)}\right) = \pi \left(\frac{n^2-2n-11}{8(n-1)(n+1)}\right)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{n^2-2n-11}{8(n-1)(n+1)}\right)$ (2.54), де v_n – об’єми тіл обертання прямих $\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right|$ навколо осі OX.

2.5. Дослідження одержаних рядів на збіжність

Числові ряди, які були отримані в попередніх задачах дослідимо на збіжність.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. e_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{2} \cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}$ розбіжний.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. p_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \left[\frac{1}{2} \cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$ розбіжний.

Задача 3. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. f_n

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (2.1) $= \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}$ (2.3). Ряд виду (2.1) рівний ряду (2.3).

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2(n+1)}$ розбіжний.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. l_n [12].

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \ (*), \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \ (**)$$

Ряд виду (*) дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Використаємо граничну ознаку порівняння, за допомогою наступних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ (\text{I}) \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \ (\text{II})$$

Ряд виду (I) є гармонійним і він є розбіжним.

Розглянемо наступну границю: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (n+1) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Отже, оскільки ряд виду (I) є розбіжним, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (*), теж є розбіжним.

Ряд виду (**) дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (**) розбіжний.

<u>Задача 5.</u> Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. k_n

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. k_n по х відповідають координатам послідовності т. т. l_n по у, і навпаки. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\ (2.4,*) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ (2.5,*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\ (2.4,**) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\ (2.5,**)$$

Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (2.5,*) і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (2.5,**) є розбіжними.

<u>Задача 6.</u> Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. m_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\ (2.5,*) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\ (2.6)$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ розбіжний.

<u>Задача 7.</u> Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. h_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\ (*),\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\ (**)$$

Ряд виду (*) дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}$ (*) розбіжний.

Ряд виду (**) дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\left[\frac{1}{2}\cdot 2\right]=1\neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$ (**) розбіжний.

Задача 8. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. s_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}\ (*),\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (**)$$

Ряд виду (*) дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\left[\frac{1}{3}\cdot 3\right]=1\neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$ (*) розбіжний.

Ряд виду (**) дослідимо на збіжність.

Цей ряд є гармонічним, а тому він є розбіжним.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (**) теж розбіжний.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ [12].

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$

Використаємо радикальну ознаку Коші: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжний.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$

Використаємо граничну ознаку порівняння, за допомогою наступних рядів:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (II)

Ряд виду (I) є гармонійним і він є розбіжним. Розглянемо наступну границю:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

Отже, оскільки ряд виду (I) є розбіжним, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ теж є розбіжним.

<u>Задача 11.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ розбіжний.

<u>Задача 12.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$, де (x_n, y_n) – координати точок s_n

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}, \frac{1}{n}\right)$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$ (2.8,*) розбіжний і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (2.8**) теж розбіжний, розбіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}, \frac{1}{n}\right)$ (2.12).

<u>Задача 13.</u> Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n a_{n+1}}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n a_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Використаємо радикальну ознаку Коші: $\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ збіжний.

Задача 14. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{b_n b_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{b_n b_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+2)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+2)}$ розбіжний.

Задача 15. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right|$ [12].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (II)

Оскільки 2 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ теж є збіжним.

Задача 16. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_n e_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_n e_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Ряд виду (2.15) дорівнює ряду (2.16), тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_n e_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Тому ряд виду (2.16), а саме $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_n e_{n+1}}\right|$ теж буде збіжним.

Задача 17. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_n p_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{p_n p_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2n(n+1)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2n(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0\right] = 0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (I) і $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (II)

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

Отже, ряд виду (I) збігається, тому ряд $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ теж є збіжним.

<u>Задача 18.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Використовуючи <u>задачу 2.3</u>, можна сказати, що за аналогією ряд виду (2.18), а саме $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$ теж буде збіжним.

<u>Задача 19.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{m_n m_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{m_n m_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Використовуючи <u>задачу 2.3</u>, можна сказати, що за аналогією ряд виду (2.19), а саме $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{m_n m_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ теж буде збіжним.

<u>Задача 20.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{h_n m_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{h_n m_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$ розбіжний

Задача 21. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a'_n a_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a'_n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = [\sqrt{2}\cdot 0] = 0$

Використаємо радикальну ознаку Коші: $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ збіжний.

Задача 21. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{om_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{om_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{2(n+1)}$ розбіжний.

Задача 22. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{oh_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{oh_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{2(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

Задача 23. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 f_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 f_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$ розбіжний.

<u>Задача 24.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 e_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 f_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 e_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$$

Тому використовуючи <u>задачу 2.12</u>, можна сказати, що за аналогією ряд виду (2.25), а саме $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_1 e_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2}}{2(n+1)}$ теж буде не збіжним.

<u>Задача 25.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{f_n e_n}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{f_n e_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

Даний ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1} = \sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = [\sqrt{2}\cdot 0] = 0$

Використаємо граничну ознаку порівняння, за допомогою наступних рядів:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (I) і $\sqrt{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ (II)

Ряд виду (I) є гармонійним і він є розбіжним. Розглянемо наступну границю:

$\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(n+1) = \sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = \sqrt{2}$

Отже, оскільки ряд виду (I) є розбіжним, то і ряд $\sqrt{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ теж є розбіжним.

<u>Задача 26.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_{n+1} d_{n+1}}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_{n+1} d_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+2)}$$

Дослідимо на збіжність, використовуючи <u>задачу 2.</u>

Отже, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+2)}$ (14) є розбіжним, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_{n+1} d_{n+1}}| = \sqrt{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n+2)}$ (27) теж буде розбіжним.

<u>Задача 27.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n e_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{e_{n+1} d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sqrt{2}}{2(n+1)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\sqrt{2}}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sqrt{2}}{2(n+1)}$ розбіжний.

<u>Задача 28.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Дослідимо на збіжність, використовуючи <u>задачу 2.14.</u>

Отже, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{f_n e_n}\right| = \sqrt{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ є розбіжним, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ теж буде розбіжним.

<u>Задача 29.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Дослідимо на збіжність, використовуючи <u>задачу 2.17.</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{k_n d_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ є розбіжним.

<u>Задача 30.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n p_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{c_n p_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{2}}{2(n+1)}$ розбіжний.

Задача 31. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n s_n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n s_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)} = \frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{3}\cdot 3\right] = 1 \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{3\cdot(n+1)}$ розбіжний.

Задача 32. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{s_n s_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{s_n s_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{10}}{3\cdot(n+1)(n+2)}$$

Використовуючи задачу 2.3, можна сказати, що за аналогією ряд виду (2.33), а саме $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{s_n s_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{10}}{3\cdot(n+1)(n+2)}$ теж буде збіжним.

Задача 33. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} r_n'$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{n^2+4n+8}}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{n^2+4n+8}}{4(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2})}+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{\sqrt{2}}{n^2}-\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{8}{n^4}}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \left[\frac{1}{4}\cdot(1+\sqrt{2})\right] = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{n^2+4n+8}}{4(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

Задача 34. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} r_n''$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n'' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}-2}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}+(n^2+n-1)\cdot\sqrt{2}-2}{4(n+1)(n+2)}$$

$=$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} - \sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} + \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{\sqrt{2}}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \left[\frac{1}{4} \cdot (1-1-\sqrt{2})\right] = \frac{-\sqrt{2}}{4} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n^2+2n+5} - \sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)} + (n^2+n-1)\cdot\sqrt{2} - 2}{4(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

Задача 35. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta o a'_n a_n}$ [12].

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O a'_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Використаємо радикальну ознаку Коші: $\frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{8} < 1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ збіжний.

Задача 36. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = \frac{1}{4} \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

Задача 37. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O m_n m_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O m_n m_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = 0$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ рівний ряду задачі 2.3, а він є збіжним, тому збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$.

Задача 38. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_1 f_n e_n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_1 f_n e_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)^2}$$

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)^2}$ розбіжний.

Задача 39. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta m_n h_n m_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta m_n h_n m_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} = 0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ (II)

Оскільки 4 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \frac{1}{n^4}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ теж є збіжним.

Задача 40. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta \theta f_n e_n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta \theta f_n e_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}$ є збіжним.

Задача 41. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O h_n m_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O h_n m_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{8(n+1)^2(n+2)^2}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{8(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(n^2+n-1)\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+4n+5)}}{8(n+1)^2(n+2)^2}$ розбіжний.

<u>Задача 42.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta h_n m_n m_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta h_n m_n m_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ (II)

Оскільки 4 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\leq\frac{1}{n^4}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ теж є збіжним.

<u>Задача 43.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta p_1 e_n e_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова виконується: $\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (II)

Оскільки 2 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\leq\frac{1}{n^2}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)}$ теж є збіжним.

<u>Задача 44.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_n d_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_n d_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)^2(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{12(n+1)^2(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n})} = \frac{1}{12} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)^2(n+2)}$ розбіжний.

<u>Задача 45.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_{n+1} d_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_n s_{n+1} d_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)(n+2)^2}$$

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{12(n+1)(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{12} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12(n+1)(n+2)^2}$ розбіжний.

<u>Задача 46.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_1 e_{n+1} d_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$$

Необхідна умова не виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = \frac{1}{4} \neq 0$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

<u>Задача 47.</u> Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}}$

$$S_{d_n k_n k_{n+1} d_{n+1}} = \frac{2n+3}{2(n+1)^2(n+2)^2}$$

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = 0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (I) і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ (II)

Оскільки 4 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \frac{1}{n^4}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)^2(n+2)^2}$ теж є збіжним.

2.6. Дослідження характеру зростання частинних сум S_n одержаних рядів в залежності від значень $n \in N$

<u>Задача 1.</u> Дослідити характер зростання частинних сум S_n ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

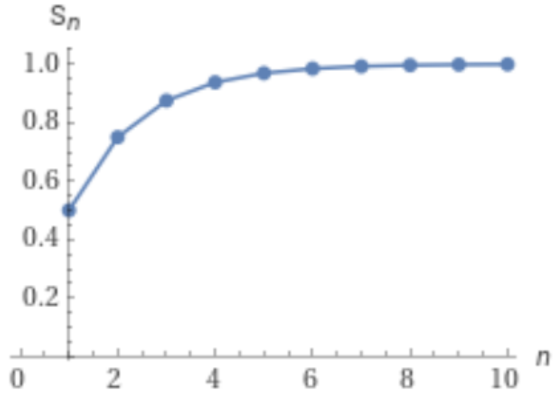
Знайдемо суму цього ряду за допомогою формули суми геометричної прогресії.

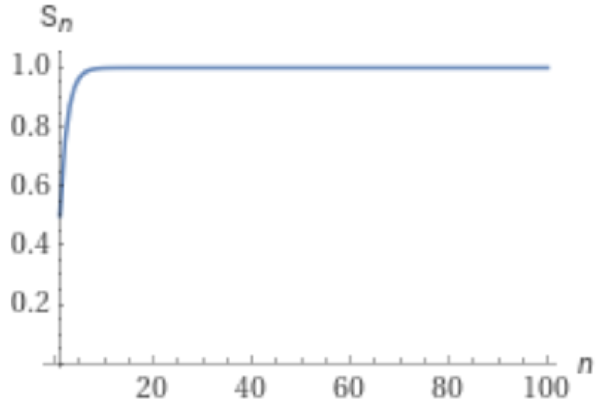
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \left[s_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\left((\frac{1}{2})^n - 1\right) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$$

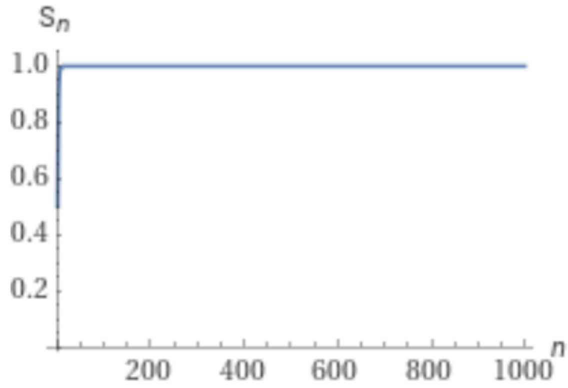
Отже, сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ дорівнює 1.

Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести загальний член ряду. Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:





а б



в

Рис. 2.6.1. Графіки частинних сум перших десяти, ста та тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

<u>**Задача 2.**</u> Дослідити характер зростання частинних сум S_n ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{a_n a_{n+1}}|$$

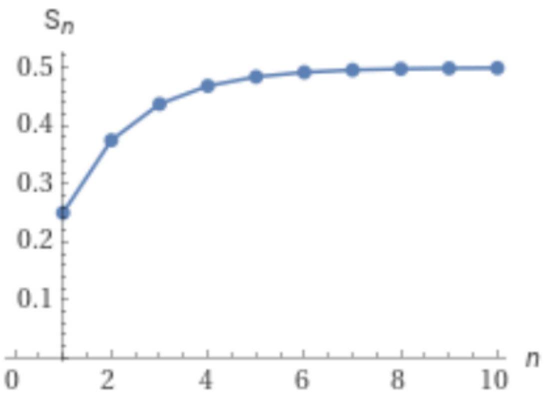
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{a_n a_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Знайдемо суму цього ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

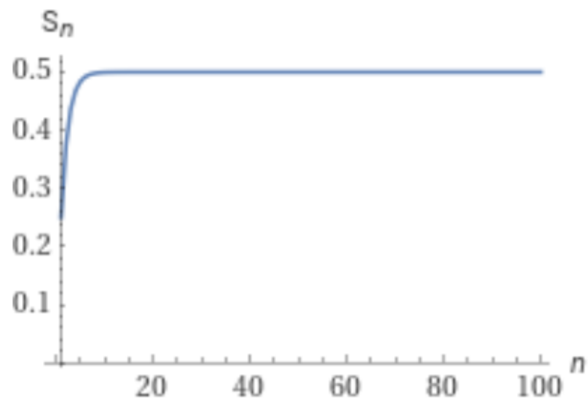
Використовуючи <u>задачу 2.9</u>, $S = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ збіжний до суми $S = \frac{1}{2}$

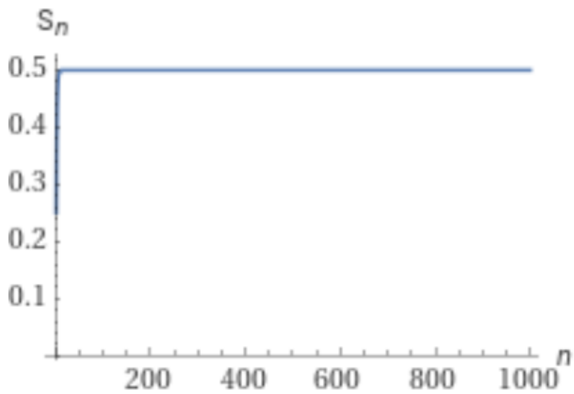
Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести загальний член ряду. Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:



а



б



в

Рис. 2.6.2. Графіки частинних сум перших десяти, ста та тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{a_n a_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$$

<u>Задача 3.</u> Дослідити характер зростання частинних сум S_n ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Знайдемо суму цього ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A+B}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ \begin{cases} 2A + B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}; \begin{cases} -2B + B = 1 \\ A = -B \end{cases}; \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}; \end{array}\right]$$

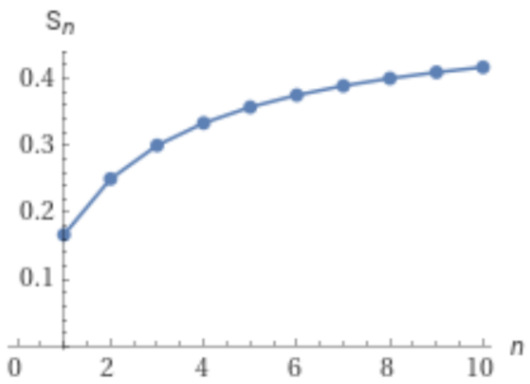
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

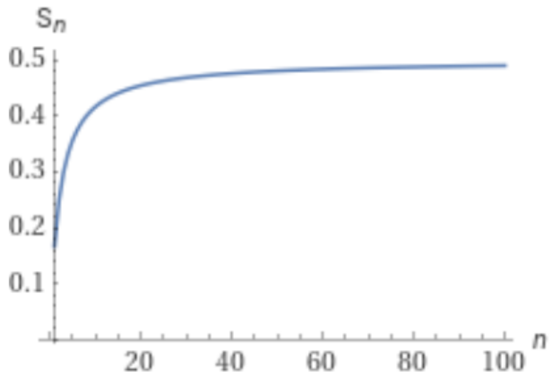
$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}$$

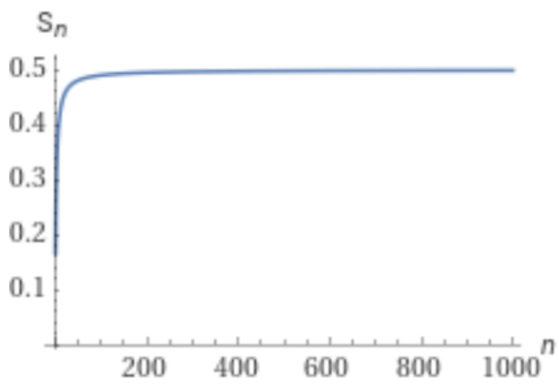
Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ збіжний до суми $S = \frac{1}{2}$

Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести загальний член ряду. Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:





а б



в

Рис. 2.6.3. Графіки частинних сум перших десяти, ста та тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n d_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

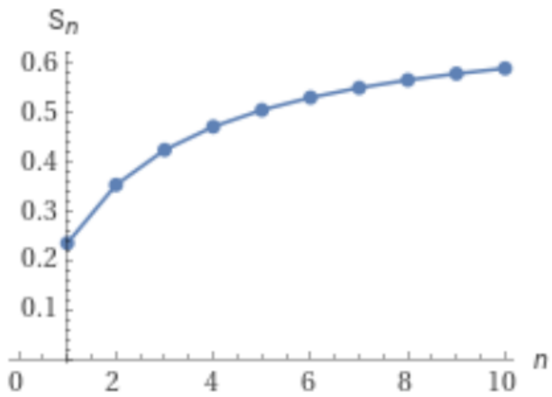
<u>Задача 4.</u> Дослідити характер зростання частинних сум S_n ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$$

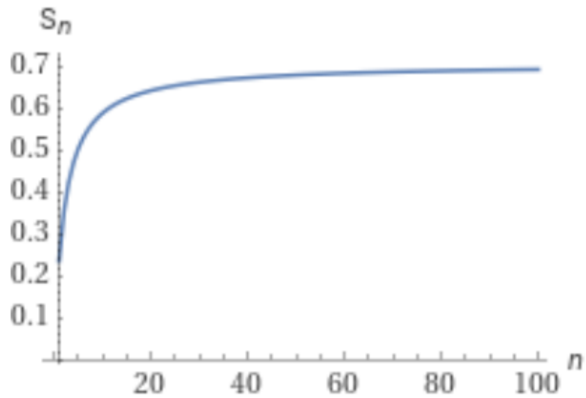
Знайдемо суму цього ряда використовуючи <u>задачу 2.3</u>.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$ буде збіжний до суми $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$

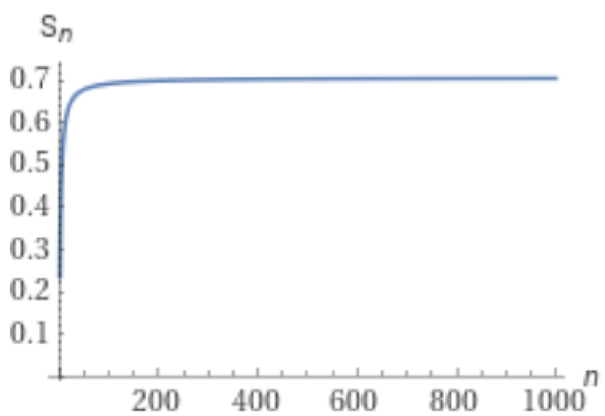
Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести загальний член ряду. Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:



а



б



в

Рис. 2.6.4. Графіки частинних сум перших десяти, ста та тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_n l_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$$

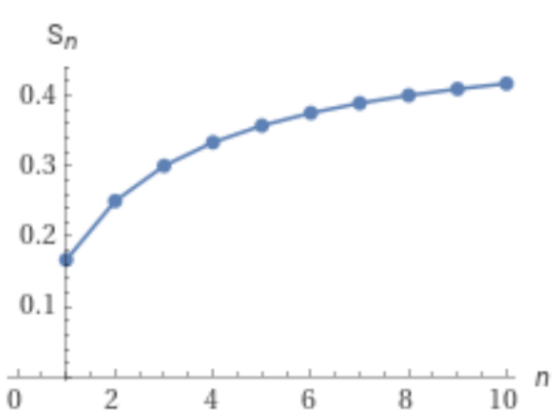
<u>Задача 5.</u> Дослідити характер зростання частинних сум S_n ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_n e_{n+1}}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{e_n e_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

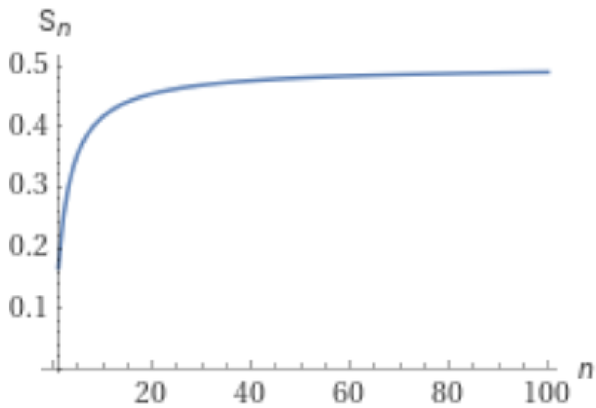
Знайдемо суму цього ряда використовуючи задачу 2.3.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ буде збіжний до суми $S = \frac{1}{2}$

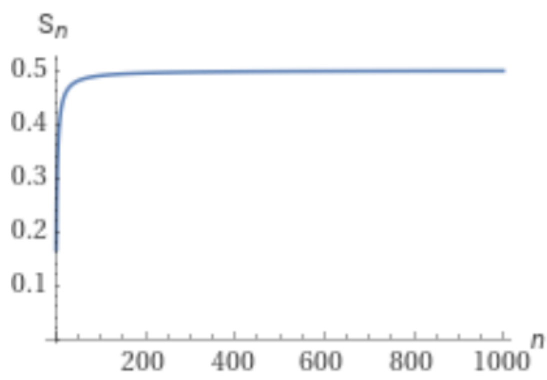
Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести загальний член ряду. Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:



а



б



в

Рис. 2.6.5. Графіки частинних сум перших десяти, ста та тисячі членів ряду

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |\overline{\mathrm{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{e}_{\mathrm{n}+1}}| = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМА ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМБІНАЦІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1. Задачі для використання на математичних олімпіадах для учнів ліцею

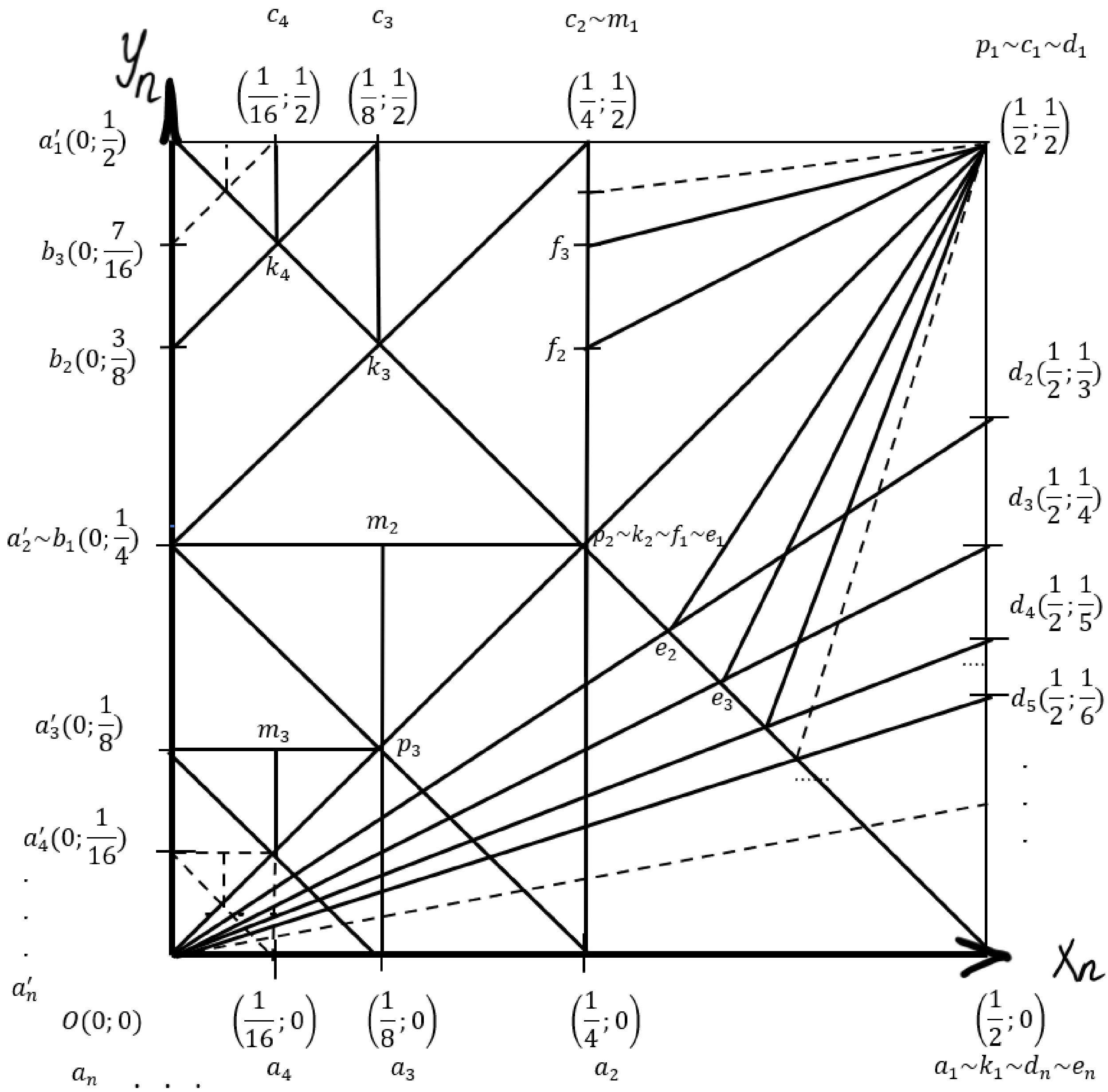


Рис. 3.1.1. Геометрична модель, побудована в квадраті зі стороною $a=\frac{1}{2}$ в системі координат Оху. Квадрат має вершини в т. т. (0;0), $(\frac{1}{2};0)$, $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $(0;\frac{1}{2})$

Задачі першого рівня складності

1. Знайти послідовність координат точки $d_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

2. Знайти послідовність координат точки $a_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

3. Знайти послідовність координат точки $p_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

4. Знайти послідовність координат точки $f_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

5. Знайти послідовність координат точки $m_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

6. Знайти послідовність координат точки $a'_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

7. Знайти послідовність координат точки $c_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

8. Знайти послідовність координат точки $k_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

Задачі другого рівня складності

1. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{d_n d_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

2. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{a_n a_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

3. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{a'_n a'_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

4. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{c_n c_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

5. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_n p_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

6. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{k_n k_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

7. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{m_1 f_n}$ та задати її формулою.

8. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_1 p_{n+1}}$ та задати її формулою.

9. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{o a_{n+1}}$ та задати її формулою.

10. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_{n+1} p_{n+2}}$, які є висотами трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

11. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{c_{n+1} k_{n+1}}$, які є середніми лініями трикутників $\overline{a'_1 c_n k_n}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

12. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{m_n p_{n+1}}$, які є медіанами трикутників $p_n p_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

Задачі третього рівня складності

1. Знайти послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

2. Знайти послідовність величин площ трикутників op_1e_{n+1} та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

3. Знайти послідовність величин площ трикутників $a'_nk_{n+1}c_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

4. Знайти послідовність величин площ трикутників $p_np_{n+1}a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

5. Знайти послідовність величин площ трикутників $c_1c_2f_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

6. Знайти послідовність величин площ квадратів $oa_{n+1}p_na'_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ квадратів і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

7. Знайти послідовність величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ квадратів і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

8. Знайти послідовність величин площ прямокутників $m_n p_n a_n a_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ прямокутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

9. Знайти послідовність величин площ прямокутників $o a_{n+1} m_n a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ прямокутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

10. Знайти послідовність величин площ трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трапецій і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розглянемо приклади розв’язання 1, 7, 10 задач. Всі інші спробуйте розв’язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче. Задачі третього рівня складності теж можна розв’язати декількома способами, які і будуть представленні у розв’язанні.

Розглянемо приклад розв’язання першої задачі третього рівня. Умови всіх задач і деякі розв’язки до них представлені у додатку А.

1. Знайти послідовність величин площ трикутників $\boldsymbol{p_1 p_2 e_{n+1}}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розв'язання

І спосіб.

Знайти послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ можна, використовуючи звичайні формули для знаходження площ трикутників.

Оскільки дані трикутники є прямокутними, кут при вершині p_1 дорівнює 90°, то можна використати формулу, де площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін помноженого на синус кута між ними. Складемо формулу для обчислення площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$.

$$S_{\Delta p_1p_2e_{n+1}} = \frac{1}{2}|\overline{p_1p_2}| \cdot |\overline{p_2e_{n+1}}|$$

Для знаходження послідовності величин площ даних трикутників, знайдемо послідовність довжин відрізків $\overline{p_2e_{n+1}}$.

Спочатку визначимо координати точок e_{n+1}. Ці точки утворені перетином прямих $\overline{a_1a_1'}$ і $\overline{od_{n+1}}$. Визначивши рівняння цих прямих, знайдемо точки їх перетину, а саме точки e_{n+1}.

$\overline{a_1a_1'}$ задається рівняння $y = -x + \frac{1}{2}$, а рівняння прямих $\overline{od_{n+1}}$ запишемо, скориставшись формулою рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Для довільних двох точок $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ формула має наступний вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$od_2: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow y = \frac{2}{3}x;$$

$$od_3: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow y = \frac{2}{4}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x;$$

$$od_4: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \Rightarrow 2x = 5y \Rightarrow y = \frac{2}{5}x;$$

……………………………………

$$od_{n+1}: y = \frac{2}{n+2}x;$$

Складемо системи рівнянь та розв’яжемо їх, для визначення координат точок e_{n+1}.

Для т. e_2: $\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$; (Від першого рівняння віднімемо друге)

$$y - y = -x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{10};$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{2}{10};$$

Отже, $e_2(\frac{3}{10}; \frac{2}{10})$

Знайдемо формулу координат точок e_{n+1}, за допомогою якої можна знайти $e_2, e_3, e_4, \dots$.

Для т. e_{n+1}: $\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{n+2}x \end{cases}$; (Від першого рівняння віднімемо друге)

$$y - y = -x - \frac{2}{n+2}x + \frac{1}{2};$$

$$\frac{n+4}{n+2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{n+2}{2(n+4)};$$

$$y = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{n+2}{2(n+4)} \Rightarrow y = \frac{1}{n+4};$$

Отже, $e_{n+1}(\frac{n+2}{2(n+4)}; \frac{1}{n+4})$

Тому послідовність координат точки e_{n+1} буде мати наступний вид:

$$e_2(\frac{3}{10}; \frac{1}{5}), e_3(\frac{4}{12}; \frac{1}{6}), e_4(\frac{5}{14}; \frac{1}{7}), e_5(\frac{6}{16}; \frac{1}{8}), \dots .$$

Далі знайдемо послідовність довжин відрізків $\overline{p_2e_{n+1}}$ та задамо її формулою.

$$|\overline{p_2e_2}| = \sqrt{\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$|\overline{p_2e_3}| = \sqrt{\left(\frac{4}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$|\overline{p_2e_4}| = \sqrt{\left(\frac{5}{14} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3}{28}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{28}$$

……………………………………………………

$$|\overline{p_2e_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{n+2}{2(n+4)} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\mathrm{n}}{4(\mathrm{n}+4)}\right)^2} = \frac{n\sqrt{2}}{4(\mathrm{n}+4)}$$

Тоді формула послідовності величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ буде виглядати наступним чином:

$$S_{\Delta p_1p_2e_{n+1}} = \frac{1}{2}|\overline{p_1p_2}| \cdot |\overline{p_2e_{n+1}}|;$$

$$S_{\Delta p_1p_2e_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{4(\mathrm{n}+4)} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)};$$

Отже, $S_{\Delta p_1p_2e_{n+1}} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$.

Запишемо послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$, вона буде мати такий вид:

$$S_{\Delta p_1p_2e_2} = \frac{1}{80}; S_{\Delta p_1p_2e_3} = \frac{2}{96}; S_{\Delta p_1p_2e_3} = \frac{3}{112}; S_{\Delta p_1p_2e_4} = \frac{4}{128}; \dots \blacksquare$$

II спосіб.

Знайдемо послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ за допомогою формули обчислення площі трикутника заданого координатами своїх вершин.

Для довільних трьох точок $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, які є вершинами трикутника, формула має наступний вид:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Визначимо формулу послідовності величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$. Координати вершин трикутників ми знаємо з попереднього способу розв'язання задачі, тобто $p_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), p_2\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right), e_{n+1}(\frac{n+2}{2(n+4)}; \frac{1}{n+4})$.

Тому $S_{p_1p_2e_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{2}\right) - (\frac{n+2}{2(n+4)} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{2-n-4}{2(n+4)}\right) - (\frac{n+2-n-4}{2(n+4)})(\frac{-1}{4})\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+2}{8(n+4)} - \frac{2}{8(n+4)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+2-2}{8(n+4)}\right| = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$

Отже, $S_{p_1p_2e_{n+1}} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$.

Формула виглядає аналогічно, як і в першому способі розв’язання, значить і послідовність буде такою ж. ■

Тепер дослідимо знайдену послідовність на збіжність, для того, щоб числова послідовність була збіжною, вона повинна мати наступну границю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, де a_n – формула n-го члену послідовності. Тому запишемо таку границю: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$. Якщо підставимо ∞ замість n, то отримаємо невизначеність, а саме $\frac{\infty}{\infty}$, тоді поділимо чисельник і знаменник на n: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{16\left(1+\frac{4}{n}\right)}$, далі підставляємо ∞ замість n і отримаємо, що дана границя буде дорівнювати $\frac{1}{16}$.

Отже, границя не дорівнює нулю, а тому послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ є розбіжною. Тому для цієї послідовності неможливо визначити конкретне число, до якого прямують члени послідовності при збільшенні номера члена. ■

3.2. Задачі, які пропонуються для використання при вивченні розділу «Числові ряди» студентами спеціальності «Математика»

Задачі, які представлені нижче були створені на основі геометричної моделі, яка зазначена на рисунку 3.1.1.

Задачі першого рівня складності

1. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. f_n та дослідити їх на збіжність.

2. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. m_n та дослідити їх на збіжність.

3. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. a'_n та дослідити їх на збіжність.

4. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. c_n та дослідити їх на збіжність.

5. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. k_n та дослідити їх на збіжність.

6. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. e_n та дослідити їх на збіжність.

7. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. b_n та дослідити їх на збіжність.

Задачі другого рівня складності

1. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\overline{p_n f_n}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

2. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{m_1 f_n}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

3. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_n p_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

4. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_1 d_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

5. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{b_n c_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

6. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a'_n k_{n+2}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

7. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_{n+1} p_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

8. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a'_n a_n}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n p_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

10. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_{\Delta O \mathrm{p}_{n+1} \mathrm{a}_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

11. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_{O \mathrm{a}'_n \mathrm{p}_n \mathrm{a}_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

12. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{p}_n \mathrm{a}_n \mathrm{a}_{n+1} m_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

13. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_{a_n a_{n+1} \mathrm{a}'_{n+1} \mathrm{a}'_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Задачі третього рівня складності

1. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

2. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_n \mathrm{k}_n a'_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

3. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{b}_n a'_n \mathrm{c}_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

4. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_n a_n p_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

5. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta p_{n+1} a_n a_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

6. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{Oa'_n p_n a_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

7. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{p_n a_n a_{n+1} m_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

8. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} S_{p_{n+1} a_n a_{n+1} p_{n+2}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де v_n – об’єми тіл обертання прямих $|\overline{od_n}|$ навколо осі OX, дослідити даний ряд на збіжність.

10. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де v_n – об’єми тіл обертання прямих $|\overline{m_n\, a_{n+1}}|$ навколо осі OY, дослідити даний ряд на збіжність.

Розглянемо приклад розв’язання першої задачі третього рівня. Умови всіх задач і деякі розв’язки до них представлені у додатку Б.

1. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Розв'язання

І спосіб.

Знайдемо ряд: $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}$, використовуючи звичайні формули для знаходження площ трикутників.

Оскільки дані трикутники є прямокутними, кути при вершинах a'_{n+1} дорівнюють 90°, то можна використати формулу, де площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін помноженого на синус кута між ними.

$$S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| \cdot \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}\right|$$

Знайдемо $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right|$ і $\left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}\right|$, але перед тим, як це зробити зазначимо, що загальні члени цих послідовностей рівні, оскільки дані трикутники $\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}$ будуть розміщені у квадратах $a'_n m_n \mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}$, тому $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}\right|$.

$$\left|\overline{a'_1 a'_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left|\overline{a'_2 a'_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}$$

$$\left|\overline{a'_3 a'_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{1}{16}$$

……………………………………

$$\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Отже, $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n+1}} a'_{n+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Тоді $S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1+n+1}} = \frac{1}{2^{2n+3}}$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$. ■

II спосіб.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

$$S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|0 \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1+n+1}} = \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$. ■

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^{2n+3}} = \left[\frac{3}{2^\infty} = \frac{3}{\infty} = 0\right] = 0$

Далі ще достатньо використати радикальну ознаку Коші: $\frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{32} < 1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ збіжний.

Знайдемо суму цього ряду за допомогою формули суми геометричної прогресії.

$$S_n = \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{24} = 0{,}042$$

Отже, сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ дорівнює 0,042. ■

Тепер побудуємо графіки зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

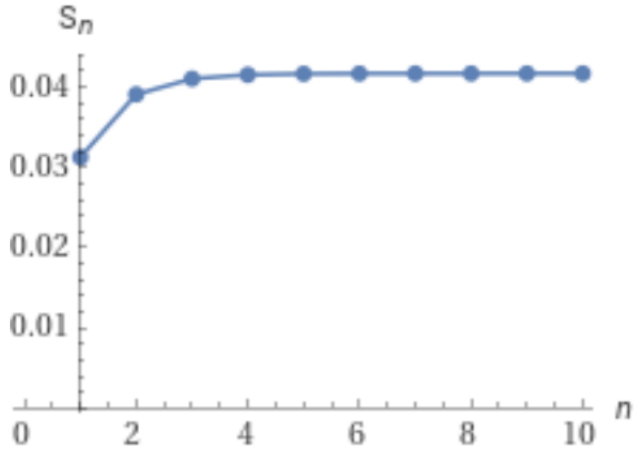


Рис. 3.2.1. Графік частинних сум перших десяти членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Далі побудуємо графік зміни частинних сум для перших ста і тисячі членів ряду, вони будуть мати наступний вид:

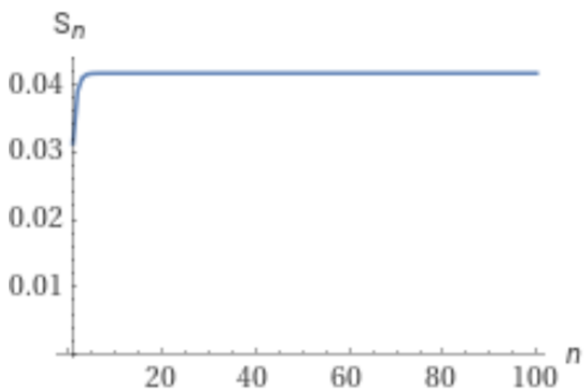


Рис. 3.2.2. Графік частинних сум перших ста членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

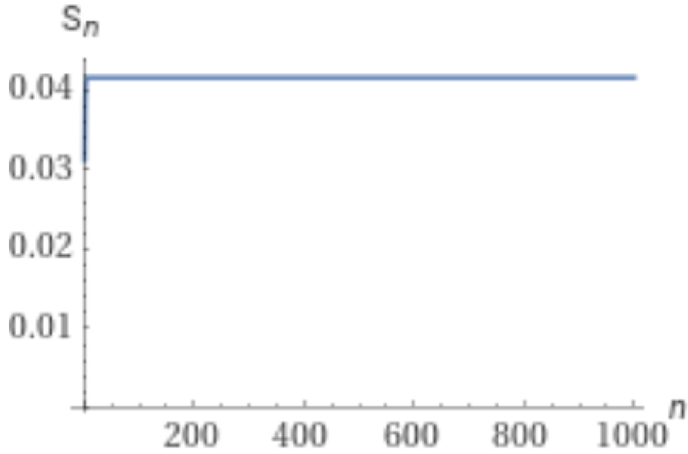


Рис. 3.2.3. Графік частинних сум перших тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Отже, графіки на рисунках 3.2.1., 3.2.2. і 3.2.3. зростають швидко та набувають постійну швидкість, з графіків видно, що послідовність збігається до значення суми 0,042.■

ВИСНОВКИ

Аналізуючи підручник алгебри 9 класу з поглибленим вивченням математики автора Мерзляка А. Г. 2017 року визначили певні особливості представлення числових рядів в шкільному курсі математики: числові ряди представлені, але не в повному обсязі, зазначені тільки основні поняття; учнів знайомлять з числовими рядами, вводячи поняття числової послідовності; задачі з графічним представленням числових послідовностей присутні, але невелика кількість.

Важливою складовою у навчальному процесі та використанні систем задач з математики є методичні підходи, які мають комплексний характер та вміють охопити всі організаційні питання з приводу якісної подачі матеріалу. Одним із таких є метод математичного моделювання, який на сучасному етапі є інструментом для створення все більш прикладних та наочних задач.

Використовуючи задану геометричну модель одержано і досліджено на збіжність числові ряди: з точковою геометричною інтерпретацією членів ряда; з лінійною геометричною інтерпретацією членів ряда; з квадратурною геометричною інтерпретацією; з кубатурною геометричною інтерпретацією. Загалом отримано 55 числових рядів та здійснено дослідження на збіжність цих числових рядів.

У випадках збіжності даних рядів було розглянуто знаходження їх сум та виконано дослідження щодо характеру зростання частинних сум S_n одержаних рядів в залежності від зміни значень $n \in N$. Були побудовані графіки зміни частинних сум в залежності від кількості членів ряду, зазвичай будували графіки для перших десяти, сто та тисячі членів рядів.

За результатами досліджень було запропоновано систему різного рівня задач з повними їх розв’язками для проведення математичних олімпіад серед учнів ліцеїв. А також було складено систему задач для використання студентами при вивченні розділу «Числові ряди» в процесі опрацювання курсу «Математичний аналіз».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Ряди: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 124 с.

2. Бобирь В. Д., Корольський В. В. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. Молоді вчені 2019 – від теорії до практики: Х Міжнародна конференція молодих вчених (Дніпро, 7 березня 2019 р.): матер. тез. Дніпро, 2019. С. 249-252.

3. Бобирь В. Д., Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів: матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси, 2019. 280 с.

4. Beauregard, R., & Dobrushkin, V. (2016). Multisection of series. The Mathematical Gazette, 100(549), 460-470. doi:10.1017/mag.2016.111.

5. Габ С. С., Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол.: С. О. Семеріков [та ін.], Том XVI. Кривий Ріг, 2018. С. 67-73.

6. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В. Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничоматематичної освіти» Випуск 22. Суми, 2023.

7. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.

8. Корольський В.В. Лінійна, квадратурна та кубаторна геометрична інтерпритація числових рядів засобами моделювання / В.В. Корольський, С.С. Габ. // Новітні комп’ютерні технології: наук.-метод. зб/ редкол. : С.О. Семеріков та ін. . – Кривий Ріг, 2018. Том XVI. – с. 67 – 73.

9. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.

10. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. Теоретично-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 4 (18). С. 81-89.

11. Korolskyi V., Mykhailova Y. Creating a selection of tasks based on a geometric model and a combination of numerical series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ /IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity». – May 25-26, 2023, Vinnytsia, Ukraine, с. 107.

12. Корольський В. В., Михайлова Я. А. Побудова і дослідження числових рядів з використанням заданої геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}$ і $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{n}-1}}$. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничоматематичної освіти» Випуск 22. Суми, 2023.

13. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013, - No6, - с. 117- 120.

14. Ламтюгова С. М.. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях: навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання) / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.

15. Lucas, S., Nimbran, A. (2022). Monotonic series for fractions near π and their convergents. The Mathematical Gazette, 106(566), 300-309. doi:10.1017/mag.2022.70.

16. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів в поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів /

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х. : Гімназія, 2017. - 416 с.: іл. ISBN 978-966-474-294-5.

17. Про повну загальну середню освіту. Офіційний вебпортал парламенту України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text (дата звернення: 11.11.2023).

18. Plaza, Á. (2016). 100.38 Proof without words: Sum of a numerical series by telescoping. The Mathematical Gazette, 100(549), 523-523. doi:10.1017/mag.2016.125.

19. Сачанюк – Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник. / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б. Ковальчук – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 138 с.

20. Сливка-Тилищак Г. Вивчення числових послідовностей в шкількому курсі математики. ДВНЗ «УжНУ», 2023: Підсумк. студент. наук. конф., м. Ужгород, 17 трав. 2023 р.

21. Scott, J. (2011). 95.06 The harmonic series revisited. *The Mathematical Gazette*, *95*(532), 77-78. doi:10.1017/S0025557200002382.

22. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. – 404с.

23. Щоголєв С. А. Теорія рядів: навчально – методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

24. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсуматематики / В.О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.

ДОДАТКИ

Додаток А

Задачі для використання на математичних олімпіадах для учнів ліцею

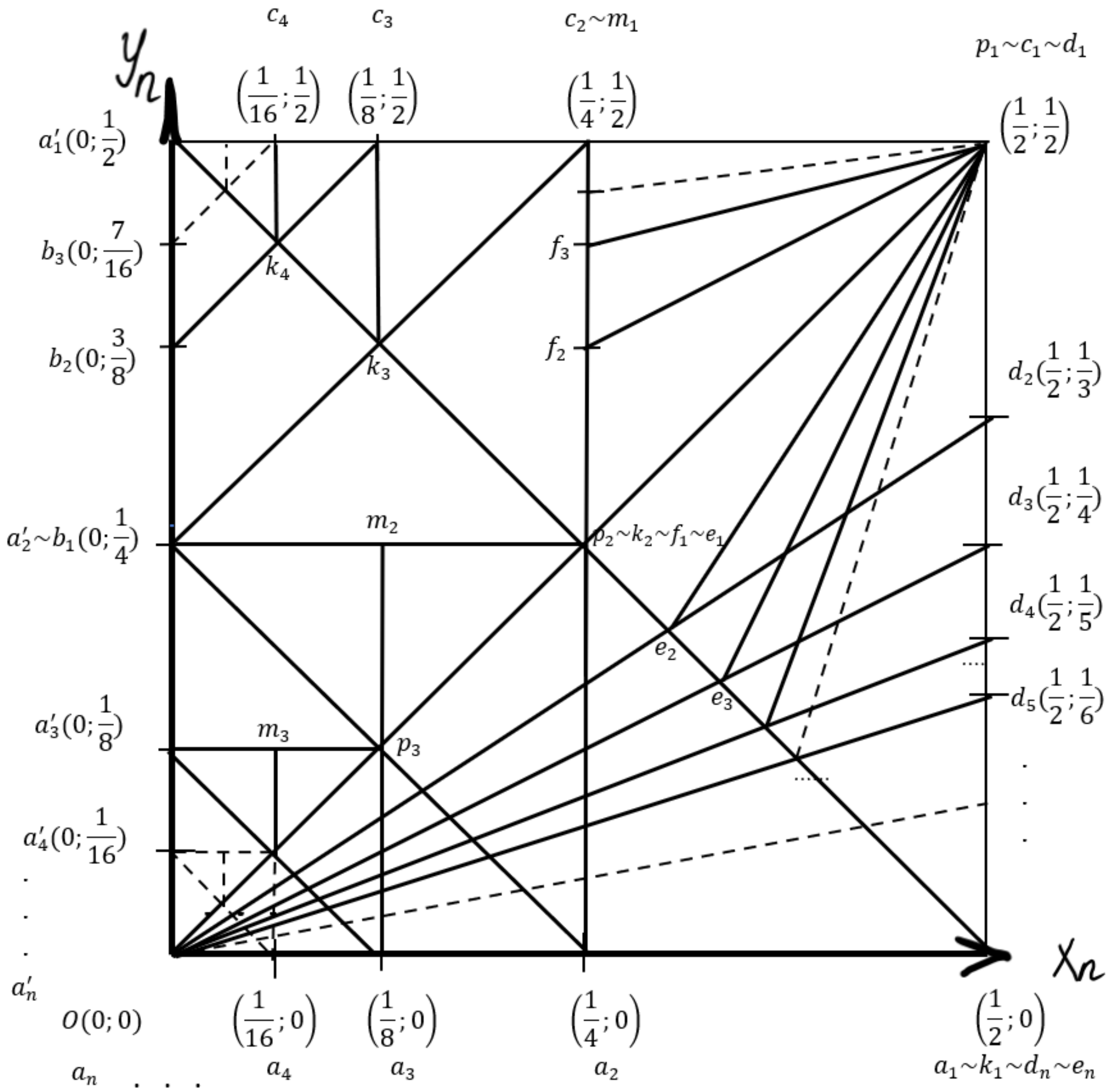


Рис. А.1. Геометрична модель, побудована в квадраті зі староною $a=\frac{1}{2}$ в системі координат Оху. Квадрат має вершини в т. т. (0;0), $(\frac{1}{2};0)$, $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $(0;\frac{1}{2})$

Задачі першого рівня складності

1. Знайти послідовність координат точки $d_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

2. Знайти послідовність координат точки $a_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

3. Знайти послідовність координат точки $p_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

4. Знайти послідовність координат точки $f_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

5. Знайти послідовність координат точки $m_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

6. Знайти послідовність координат точки $a'_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

7. Знайти послідовність координат точки $c_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

8. Знайти послідовність координат точки $k_n(x_n; y_n)$ та задати формулою її координати.

Розглянемо приклади розв'язання 3, 4, 5 задач. Всі інші спробуйте розв'язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче.

3. Знайти послідовність координат точки $\mathbf{p_n(x_n; y_n)}$ та задати формулою її координати.

Розв'язання

Для того, щоб визначити послідовність координат даної точки та задати формулою її координати спочатку проаналізуємо те, що нам дано за рисунком. Нам видно, що точки $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ рухаються в напрямку прямої $y = x$, яка є діагоналлю квадрата.

Тоді послідовності координат, $\mathrm{x_n}$ і $\mathrm{y_n}$, точки p_n будуть однакові, точки можна представити у наступному виді: $p_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), p_2(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}), p_3(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}), p_4(\frac{1}{16}; \frac{1}{16}), \dots$.

Далі складемо і задамо формулу послідовності координат точки $p_n(x_n; y_n)$. З'ясувавши закономірність координат точки, формула буде мати такий вид: $x_n = y_n = \frac{1}{2^n}$. Отже, $p_n\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n}\right)$. ■

4. Знайти послідовність координат точки $\mathbf{f_n(x_n; y_n)}$ та задати формулою її координати.

Розв'язання

В даному випадку вже не очевидно задана послідовність координат точки $f_n(x_n; y_n)$. Для того, щоб її визначити необхідно виявити певну закономірність. Координати по вісі x вже відомі, тому $x_n = \frac{1}{4}$. Знайдемо деякі координати по вісі y.

$$y_1 = \frac{1}{4};\ y_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8};\ y_2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16};\ y_3 = \frac{7}{16} + \frac{1}{32} = \frac{15}{32}$$

Тоді послідовність координат точки f_n можна представити у наступному виді: $f_1(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}), f_2(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}), f_3(\frac{1}{4}; \frac{7}{16}), f_4(\frac{1}{4}; \frac{15}{32}), \dots$.

Складемо і задамо формулу послідовності координат точки $f_n(x_n; y_n)$. З'ясувавши закономірність координат точки, формула буде мати такий вид: $f_n\left(\frac{1}{4}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$. ■

5. Знайти послідовність координат точки $\mathbf{m_n(x_n; y_n)}$ та задати формулою її координати.

Розв'язання

Послідовність координат точки $m_n(x_n; y_n)$ можна визначити за рисунком. Спочатку визначимо координати точки по вісі x. Вони будуть мати наступний вид.

$$x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = \frac{1}{8};\ x_3 = \frac{1}{16};\ x_4 = \frac{1}{32}$$

Координати точки m_n по вісі y мають такий вид.

$$y_1 = \frac{1}{2};\ y_2 = \frac{1}{4};\ y_3 = \frac{1}{8};\ y_4 = \frac{1}{16}$$

Також можна помітити, що точки $\mathrm{m_n}$ є серединами відрізків $\overline{\mathrm{p_n a'_n}}$, тому координати $\mathrm{m_n}$ можна знайти, використовуючи цей факт.

Тоді послідовність координат точки $\mathrm{m_n}$ можна представити у наступному виді: $m_1(\frac{1}{4};\frac{1}{2}), m_2(\frac{1}{8};\frac{1}{4}), m_3(\frac{1}{16};\frac{1}{8}), m_4(\frac{1}{32};\frac{1}{16}), \dots$.

Складемо і задамо формулу послідовності координат точки $m_{\mathrm{n}}(\mathrm{x_n};\mathrm{y_n})$. З'ясувавши закономірність координат точки, формула буде мати такий вид: $m_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{2^{n+1}};\frac{1}{2^n}\right)$. ■

Задачі другого рівня складності

1. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{d_n d_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

2. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{a_n a_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

3. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{a'_n a'_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

4. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{c_n c_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

5. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_n p_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

6. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{k_n k_{n+1}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

7. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{m_1 f_n}$ та задати її формулою.

8. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_1 p_{n+1}}$ та задати її формулою.

9. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{o a_{n+1}}$ та задати її формулою.

10. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_{n+1} p_{n+2}}$, які є висотами трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

11. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{c_{n+1} k_{n+1}}$, які є середніми лініями трикутників $\overline{a'_1 c_n k_n}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

12. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{m_n p_{n+1}}$, які є медіанами трикутників $p_n p_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

Розглянемо приклади розв'язання 5, 8, 11 задач. Всі інші спробуйте розв'язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче. Зверніть увагу, що в задачах 7, 8, 9 не доцільно знаходити суму всіх довжин відрізків, оскільки ці послідовності треба додатково досліджувати на збіжність. Задачі другого рівня складності можна розв'язати декількома способами, які і будуть представленні у розв'язанні.

5. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

Розв'язання

І спосіб.

Аналізуючи рисунок видно, що перший відрізок $\overline{\mathrm{p_1 p_2}}$ дорівнює половині діагоналі квадрата зі староною $\frac{1}{2}$. Діагональ квадрата $\mathrm{op_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тому $\overline{\mathrm{p_1 p_2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Аналогічним чином визначаємо наступні довжини відрізків. $\overline{p_2p_3}$ дорівнює половині діагоналі квадрата зі стороною $\frac{1}{4}$, тому $\overline{p_2p_3} = \frac{\sqrt{2}}{4} : 2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

$\overline{p_3p_4}$ дорівнює половині діагоналі квадрата зі стороною $\frac{1}{8}$, значить $\overline{p_3p_4} = \frac{\sqrt{2}}{8} : 2 = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Виявивши певну закономірність, можна записати послідовність довжин відрізків $\overline{p_np_{n+1}}$, вона буде мати наступний вид: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{64} \dots$

Складемо і задамо формулу послідовності довжин відрізків $\overline{p_np_{n+1}}$. Врахувавши попередні розрахунки, $\overline{p_np_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ ■

II спосіб.

Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{p_np_{n+1}}$ також можна за допомогою формули обчислення відстані між двома точками. Для довільних двох точок $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ формула має наступний вид:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Використовуючи формулу, подану вище, знайдемо перші три довжини відрізків. Послідовність координат точки p_n ми вже знаємо (див. задачу 3, першого рівня), їх можна представити у наступному виді:

$$p_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), p_2(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}), p_3(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}), p_4(\frac{1}{16}; \frac{1}{16}), \dots$$

Тоді складемо послідовність довжин відрізків $\overline{p_np_{n+1}}$.

$$|\overline{p_1p_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{p_2p_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$|\overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{256}+\frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

……………………………………………………

$$|\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(\frac{-1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{(2^{n+1})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$, яка зазначена вище має такий самий вид, як і в першому способі розв'язання. Формула послідовності довжин відрізків абсолютно така сама, тобто $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ ■

Після того, як знайшли послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$ та задали її формулою, знайдемо суму всіх довжин даних відрізків. Для цього переконаємось, що ми можемо її знайти, використовуючи геометричну модель. З рисунку видно, що якщо будемо поступово додавати члени послідовності, то ця сума буде прямувати до значення $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тобто сума всіх довжин $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$ відрізків буде дорівнювати значенню $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності. Нагадаємо, що послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$, має наступний вид: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{64} \dots$ Тоді послідовність частинних сум буде наступною:

$$S_1 = |\overline{p_1p_2}| = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}35;$$

$$S_2 = S_1 + |\overline{p_2p_3}| = |\overline{p_1p_2}| + |\overline{p_2p_3}| = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}53;$$

$$S_3 = S_2 + |\overline{p_3p_4}| = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{16} \approx 0{,}62;$$

$$S_4 = S_3 + |\overline{p_4p_5}| = \frac{7\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{32} = \frac{15\sqrt{2}}{32} \approx 0{,}66;$$

$$S_5 = S_4 + |\overline{p_5p_6}| = \frac{15\sqrt{2}}{32} + \frac{\sqrt{2}}{64} = \frac{31\sqrt{2}}{64} \approx 0{,}685;$$

$$S_6 = S_5 + |\overline{p_6p_7}| = \frac{31\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{128} = \frac{63\sqrt{2}}{128} \approx 0{,}696;$$

$$S_7 = S_6 + |\overline{p_6p_7}| = \frac{63\sqrt{2}}{128} + \frac{\sqrt{2}}{256} = \frac{127\sqrt{2}}{256} \approx 0{,}701;$$

$$S_8 = S_7 + |\overline{p_7p_8}| = \frac{127\sqrt{2}}{256} + \frac{\sqrt{2}}{512} = \frac{255\sqrt{2}}{512} \approx 0{,}704;$$

$$S_9 = S_8 + |\overline{p_8p_9}| = \frac{255\sqrt{2}}{512} + \frac{\sqrt{2}}{1024} = \frac{511\sqrt{2}}{1024} \approx 0{,}705;$$

$$S_{10} = S_9 + |\overline{p_9p_{10}}| = \frac{511\sqrt{2}}{1024} + \frac{\sqrt{2}}{2048} = \frac{1023\sqrt{2}}{2048} \approx 0{,}706;$$

Далі побудуємо графік зміни цих частинних сум, він буде мати наступний вид.

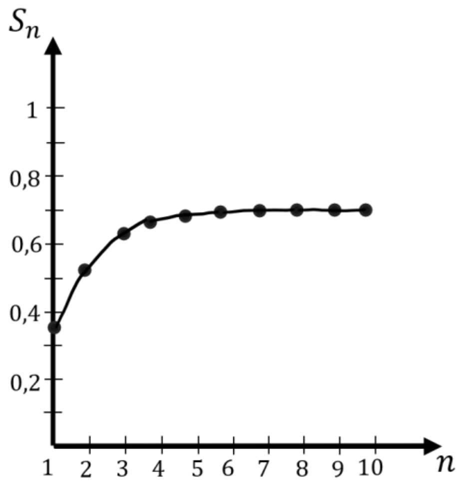


Рис. А.2. Графік частинних сум перших десяти членів послідовності $\overline{\mathrm{p_n p_{n+1}}}$

Отже, завдяки графікам можна вивчати швидкість зміни частинних сум послідовностей, що залежать від кількості доданків, утворюючи дану числову послідовність. Графік на рисунку 2 поступово досягає постійної швидкості і дуже близько підходить до значення суми $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

8. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1 p_{n+1}}}$ та задати її формулою.

Розв’язання

І спосіб.

Довжину першого відрізка ми вже знаємо з п'ятої задачі. $\overline{\mathrm{p_1p_2}}$ дорівнює половині діагоналі квадрата зі стороною $\frac{1}{2}$, тому $\overline{\mathrm{p_1p_2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Визначимо наступні довжини відрізків, використовуючи вже знайдені певні відрізки із задачі 5.

$$\overline{\mathrm{p_1p_3}} = \overline{\mathrm{p_1p_2}} + \overline{\mathrm{p_2p_3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\overline{\mathrm{p_1p_4}} = \overline{\mathrm{p_1p_3}} + \overline{\mathrm{p_3p_4}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{16}$$

……………………………………

Виявивши певну закономірність, можна записати послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}$, вона буде мати наступний вид: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{7\sqrt{2}}{16}, \frac{15\sqrt{2}}{32}$ ...

Складемо і задамо формулу послідовності довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}$. Врахувавши попередні розрахунки, $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}} = \frac{(2^n-1)\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ ■

II спосіб.

Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}$ також можна за допомогою формули обчислення відстані між двома точками.

Використовуючи формулу, подану вище, знайдемо перші три довжини відрізків. Складемо послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}$, за допомогою послідовності координат точки p_n.

$$|\overline{\mathrm{p_1p_2}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|\overline{\mathrm{p_1p_3}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{9}{64}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$|\overline{\mathrm{p_1p_4}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{256} + \frac{49}{256}} = \frac{7\sqrt{2}}{16}$$

………………………………………………………….

$$|\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1-2^n}{2^{n+1}}\right)^2} = \frac{(2^n-1)\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}}$, яка зазначена вище має такий самий вид, як і в першому способі розв’язання. Формула послідовності довжин відрізків абсолютно така сама, тобто $\overline{\mathrm{p_1p_{n+1}}} = \frac{(2^n-1)\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ ■

11. Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{\mathbf{c_{n+1}k_{n+1}}}$, які є середніми лініями трикутників $\overline{\mathbf{a_1'c_nk_n}}$ та задати її формулою. Знайти суму всіх довжин відрізків. Побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності.

Розв’язання

І спосіб.

Аналізуючи рисунок видно, що перший відрізок $\overline{\mathrm{c_2k_2}}$ дорівнює половині відрізка $\overline{\mathrm{c_2}a_2}$, тобто $\overline{\mathrm{c_2}a_2} = \frac{1}{2}$, тому $\overline{\mathrm{c_2k_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Аналогічним чином визначаємо наступні довжини відрізків.

$$\overline{\mathrm{c_3k_3}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{c_3m_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$\overline{\mathrm{c_4k_4}}$ дорівнює половині стороні квадрата, яка дорівнює $\frac{1}{8}$, значить $\overline{\mathrm{c_4}k_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

І так далі.

Виявивши певну закономірність, можна записати послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c_{n+1}k_{n+1}}}$, вона буде мати наступний вид: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$

Складемо і задамо формулу послідовності довжин відрізків $\overline{\mathrm{c_{n+1}k_{n+1}}}$. Врахувавши попередні розрахунки, $\overline{\mathrm{c_{n+1}k_{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ■

II спосіб.

Знайти послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$ також можна за допомогою формули обчислення відстані між двома точками.

Використовуючи формулу, подану вище, знайдемо перші три довжини відрізків. Складемо послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$, за допомогою послідовностей координат точок c_n і k_n.

Останнє можна представити у наступному виді:

$$\mathrm{c}_1(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}),\mathrm{c}_2(\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{2}),\mathrm{c}_3(\tfrac{1}{8};\tfrac{1}{2}),\mathrm{c}_4(\tfrac{1}{16};\tfrac{1}{2}),\dots;k_1(\tfrac{1}{2};0),k_2(\tfrac{1}{4};\tfrac{1}{4}),k_3(\tfrac{1}{8};\tfrac{3}{8}),k_4(\tfrac{1}{16};\tfrac{7}{16}),\dots$$

Тоді складемо послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$ та задамо її формулою.

$$|\overline{c_2\mathrm{k}_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$|\overline{c_3\mathrm{k}_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

$$|\overline{\mathrm{c}_4\mathrm{k}_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)^2+\left(\frac{7}{16}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{256}} = \frac{1}{16}$$

……………………………………………

$$|\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^n-1-2^n}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2^{n+1}})^2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$, яка зазначена вище має такий самий вид, як і в першому способі розв’язання. Формула послідовності довжин відрізків абсолютно така сама, тобто $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ■

Також дану задачу можна розв’язати, використовуючи ту умову, що довжини відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$ є середніми лініями трикутників $\overline{\mathrm{a}'_1\mathrm{c}_n\mathrm{k}_n}$.

Тобто $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{c}_n\mathrm{k}_n}$. Аналізуючи рисунок можна визначити, що $\overline{\mathrm{c}_n\mathrm{k}_n} = \frac{1}{2^n}$, тому $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$, ця формула збігається із тою, яку ми щойно знайшли в першому і другому способах розв'язання.

Отже, дану задачу можна розв'язати навіть трьома способами.

Після того, як знайшли послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$ та задали її формулою, знайдемо суму всіх довжин даних відрізків. Для цього переконаємось, що ми можемо її знайти, використовуючи геометричну модель. З рисунку видно, що якщо ці довжини відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$, які є середніми лініями трикутників $\overline{\mathrm{a}'_1\mathrm{c}_n\mathrm{k}_n}$ вистроїмо послідовно один за одним, то ми поступово будемо наближатись до відрізка $\overline{\mathrm{c}_2 a_2}$, довжина якого дорівнює значенню $\frac{1}{2}$. І якщо будемо по порядку додавати члени даної послідовності, то ця сума буде прямувати до $\frac{1}{2}$. Тобто сума всіх довжин $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$ відрізків буде дорівнювати значенню $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти членів послідовності. Нагадаємо, що послідовність довжин відрізків $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$, має наступний вид: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ ... Тоді послідовність частинних сум буде наступною:

$$S_1 = \left|\overline{\mathrm{c}_2\mathrm{k}_2}\right| = \frac{1}{4} \approx 0{,}25;$$

$$S_2 = S_1 + \left|\overline{\mathrm{c}_3\mathrm{k}_3}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \approx 0{,}38;$$

$$S_3 = S_2 + \left|\overline{\mathrm{c}_4\mathrm{k}_4}\right| = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \approx 0{,}44;$$

$$S_4 = S_3 + \left|\overline{\mathrm{c}_5\mathrm{k}_5}\right| = \frac{7}{16} + \frac{1}{32} = \frac{15}{32} \approx 0{,}47;$$

$$S_5 = S_4 + \left|\overline{\mathrm{c}_6\mathrm{k}_6}\right| = \frac{15}{32} + \frac{1}{64} = \frac{31}{64} \approx 0{,}48;$$

$$S_6 = S_5 + \left|\overline{\mathrm{c}_7\mathrm{k}_7}\right| = \frac{31}{64} + \frac{1}{128} = \frac{63}{128} \approx 0{,}49;$$

$$S_7 = S_6 + \left|\overline{\mathrm{c}_8\mathrm{k}_8}\right| = \frac{63}{128} + \frac{1}{256} = \frac{127}{256} \approx 0{,}496;$$

$$S_8 = S_7 + |\overline{\mathrm{c}_9\mathrm{k}_9}| = \frac{127}{256} + \frac{1}{512} = \frac{255}{512} \approx 0{,}498;$$

$$S_9 = S_8 + |\overline{\mathrm{c}_{10}\mathrm{k}_{10}}| = \frac{255}{512} + \frac{1}{1024} = \frac{511}{1024} \approx 0{,}499;$$

$$S_{10} = S_9 + |\overline{\mathrm{c}_{11}\mathrm{k}_{11}}| = \frac{511}{1024} + \frac{1}{2048} = \frac{1023}{2048} \approx 0{,}499;$$

Далі побудуємо графік зміни цих частинних сум, він буде мати наступний вид.

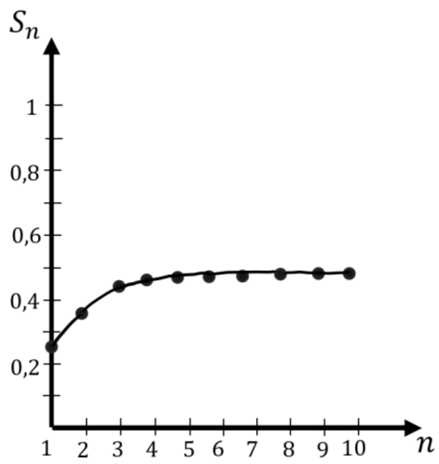


Рис. А.3. Графік частинних сум перших десяти членів послідовності $\overline{\mathrm{c}_{n+1}\mathrm{k}_{n+1}}$

Отже, завдяки графікам можна вивчати швидкість зміни частинних сум послідовностей, що залежать від кількості доданків, утворюючи дану числову послідовність. Графік на рисунку 3 зростає з постійною швидкістю і підходить до значення суми $\frac{1}{2}$. ■

Задачі третього рівня складності

1. Знайти послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

2. Знайти послідовність величин площ трикутників op_1e_{n+1} та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності

знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

3. Знайти послідовність величин площ трикутників $a'_n k_{n+1} c_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

4. Знайти послідовність величин площ трикутників $p_n p_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

5. Знайти послідовність величин площ трикутників $c_1 c_2 f_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

6. Знайти послідовність величин площ квадратів $o a_{n+1} p_n a'_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ квадратів і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

7. Знайти послідовність величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ квадратів і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

8. Знайти послідовність величин площ прямокутників $m_n p_n a_n a_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ прямокутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

9. Знайти послідовність величин площ прямокутників $oa_{n+1}m_na'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ прямокутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

10. Знайти послідовність величин площ трапецій $a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трапецій і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розглянемо приклади розв'язання 1, 7, 10 задач. Всі інші спробуйте розв'язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче. Задачі третього рівня складності теж можна розв'язати декількома способами, які і будуть представленні у розв'язанні.

Також для більш здібних учнів можна у якості додаткового завдання задати розв'язати задачу і ще якимось способом, наприклад, якщо це учні 11 класів, то їх можна підштовхнути до думки, що площу трикутників можна обчислити за допомогою інтегралу.

1. Знайти послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трикутників і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розв'язання

I спосіб.

Знайти послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ можна, використовуючи звичайні формули для знаходження площ трикутників.

Оскільки дані трикутники є прямокутними, кут при вершині p_1 дорівнює 90°, то можна використати формулу, де площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін помноженого на синус кута між ними. Складемо формулу для обчислення площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$.

$$S_{\Delta p_1p_2e_{n+1}} = \frac{1}{2}|\overline{p_1p_2}| \cdot |\overline{p_2e_{n+1}}|$$

Для знаходження послідовності величин площ даних трикутників, знайдемо послідовність довжин відрізків $\overline{p_2e_{n+1}}$.

Спочатку визначимо координати точок e_{n+1}. Ці точки утворені перетином прямих $\overline{a_1a_1'}$ і $\overline{od_{n+1}}$. Визначивши рівняння цих прямих, знайдемо точки їх перетину, а саме точки e_{n+1}.

$\overline{a_1a_1'}$ задається рівняння $y = -x + \frac{1}{2}$, а рівняння прямих $\overline{od_{n+1}}$ запишемо, скориставшись формулою рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Для довільних двох точок $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ формула має наступний вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$od_2: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x};$$

$$od_3: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow y = \frac{2}{4}x \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x};$$

$$od_4: \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \Rightarrow 2x = 5y \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{5}x;}$$

……………………………………

$$od_{n+1}: \boldsymbol{y = \frac{2}{n+2}x;}$$

Складемо системи рівнянь та розв’яжемо їх, для визначення координат точок e_{n+1}.

Для т. e_2: $\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$; (Від першого рівняння віднімемо друге)

$$y - y = -x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}};$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}};$$

Отже, $e_2(\frac{3}{10}; \frac{2}{10})$

Знайдемо формулу координат точок e_{n+1}, за допомогою якої можна знайти $e_2, e_3, e_4, \dots$.

Для т. e_{n+1}: $\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{n+2}x \end{cases}$; (Від першого рівняння віднімемо друге)

$$y - y = -x - \frac{2}{n+2}x + \frac{1}{2};$$

$$\frac{n+4}{n+2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{n+2}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{n+4})};$$

$$y = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{n+2}{2(n+4)} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+4}};$$

Отже, $e_{n+1}(\frac{n+2}{2(n+4)}; \frac{1}{n+4})$

Тому послідовність координат точки e_{n+1} буде мати наступний вид:

$$e_2(\frac{3}{10}; \frac{1}{5}), e_3(\frac{4}{12}; \frac{1}{6}), e_4(\frac{5}{14}; \frac{1}{7}), e_5(\frac{6}{16}; \frac{1}{8}), \dots .$$

Далі знайдемо послідовність довжин відрізків $\overline{p_2e_{n+1}}$ та задамо її формулою.

$$|\overline{p_2e_2}| = \sqrt{\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$|\overline{p_2e_3}| = \sqrt{\left(\frac{4}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$|\overline{p_2e_4}| = \sqrt{\left(\frac{5}{14} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3}{28}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{28}$$

……………………………………………………

$$|\overline{p_2 e_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{n+2}{2(n+4)} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\mathrm{n}}{4(\mathrm{n}+4)}\right)^2} = \frac{n\sqrt{2}}{4(\mathrm{n}+4)}$$

Тоді формула послідовності величин площ трикутників $p_1 p_2 e_{n+1}$ буде виглядати наступним чином:

$$S_{\Delta p_1 p_2 e_{n+1}} = \frac{1}{2} |\overline{p_1 p_2}| \cdot |\overline{p_2 e_{n+1}}|$$

$$S_{\Delta p_1 p_2 e_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{4(\mathrm{n}+4)} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$$

Отже, $S_{\Delta p_1 p_2 e_{n+1}} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$.

І запишемо послідовність величин площ трикутників $p_1 p_2 e_{n+1}$, вона буде мати такий вид:

$$S_{\Delta p_1 p_2 e_2} = \frac{1}{80}; S_{\Delta p_1 p_2 e_3} = \frac{2}{96}; S_{\Delta p_1 p_2 e_3} = \frac{3}{112}; S_{\Delta p_1 p_2 e_4} = \frac{4}{128}; \ldots \blacksquare$$

ІІ спосіб.

Знайдемо послідовність величин площ трикутників $p_1 p_2 e_{n+1}$ за допомогою формули обчислення площі трикутника заданого координатами своїх вершин.

Для довільних трьох точок $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, які є вершинами трикутника, формула має наступний вид:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Визначимо формулу послідовності величин площ трикутників $p_1 p_2 e_{n+1}$. Координати вершин трикутників ми знаємо з попереднього способу розв'язання задачі, тобто $p_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), p_2\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right), e_{n+1}(\frac{n+2}{2(n+4)}; \frac{1}{n+4})$.

Тому $S_{p_1 p_2 e_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{2}\right) - (\frac{n+2}{2(n+4)} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\right| =$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{2-n-4}{2(n+4)}\right) - \left(\frac{n+2-n-4}{2(n+4)}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+2}{8(n+4)} - \frac{2}{8(n+4)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+2-2}{8(n+4)}\right| = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$$

Отже, $S_{p_1p_2e_{n+1}} = \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$.

Формула виглядає аналогічно, як і в першому способі розв'язання, значить і послідовність буде такою ж. ■

Тепер дослідимо знайдену послідовність на збіжність, для того, щоб числова послідовність була збіжною, вона повинна мати наступну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, де a_n – формула n-го члену послідовності. Тому запишемо таку границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{16(\mathrm{n}+4)}$. Якщо підставимо ∞ замість n, то отримаємо невизначеність, а саме $\frac{\infty}{\infty}$, тоді поділимо чисельник і знаменник на n: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{16\left(1+\frac{4}{n}\right)}$, далі підставляємо ∞ замість n і отримаємо, що дана границя буде дорівнювати $\frac{1}{16}$.

Отже, границя не дорівнює нулю, а тому послідовність величин площ трикутників $p_1p_2e_{n+1}$ є розбіжною. Тому для цієї послідовності неможливо визначити конкретне число, до якого прямують члени послідовності при збільшенні номера члена.

7. Знайти послідовність величин площ квадратів $m_np_{n+1}a'_{n+1}a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ квадратів і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розв'язання

Знайти послідовність величин площ квадратів $m_np_{n+1}a'_{n+1}a'_n$ можна, використовуючи звичайну формулу для знаходження площі квадрата, а саме $S_{\text{кв.}} = a^2$, де a – старона даного квадрата.

Складемо формулу для обчислення площ квадратів $m_np_{n+1}a'_{n+1}a'_n$.

$$S_{m_np_{n+1}a'_{n+1}a'_n} = (\overline{m_np_{n+1}})^2$$

Для знаходження послідовності величин площ даних квадратів, знайдемо послідовність довжин відрізків $\overline{m_n p_{n+1}}$.

З рисунку видно, що послідовність довжин відрізків $\overline{m_n p_{n+1}}$ буде такою: $\overline{m_1 p_2} = \frac{1}{4}, \overline{m_2 p_3} = \frac{1}{8}, \overline{m_3 p_4} = \frac{1}{16}, \overline{m_4 p_5} = \frac{1}{32}, \dots$. Тоді $\overline{m_n p_{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Складемо формулу послідовності величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$, вона буде виглядати наступним чином:

$$S_{m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n} = (\overline{m_n p_{n+1}})^2 = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$$

Отже, $S_{m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n} = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$.

І запишемо послідовність величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$, вона буде відображатись таким чином:

$$S_{m_1 p_2 a'_2 a'_1} = \frac{1}{16}; S_{m_2 p_3 a'_3 a'_2} = \frac{1}{64}; S_{m_3 p_4 a'_4 a'_3} = \frac{1}{256}; S_{m_4 p_5 a'_5 a'_4} = \frac{1}{1024}; \dots \blacksquare$$

Тепер дослідимо знайдену послідовність на збіжність, запишемо таку границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$. Якщо підставимо ∞ замість n, то отримаємо наступне: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \left[\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0$, тобто границя дорівнює нулю, а тому послідовність величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ є збіжною.

Отже, ми можемо знайти суму всіх площ квадратів. З рисунку видно, що всі дані квадрати можна скласти одне в одного та якщо звернемо увагу на послідовність чисел, то можна зазначити, що вона буде геометричною прогресією зі знаменником $\frac{1}{4} < 1$, тому суму можна обчислити за формулою: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

$$S_n = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{12} = 0{,}08(3)$$

Тобто сума всіх величин площ квадратів $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ буде дорівнювати значенню $0{,}08(3)$. Тепер побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності. На минулому прикладі ми показали, як обчислювати частинні суми вручну, але зараз не доцільно проводити такі розрахунки, оскільки бачимо як змінюються члени послідовності.

Графіки для перших десяти та ста членів послідовності будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести слово sum та в дужках зазначити формулу n-го члена послідовності і вказати кількість членів, це повинно виглядати наступним чином: sum(1/((2^(n+1))^2),1,10). Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даної послідовності та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:

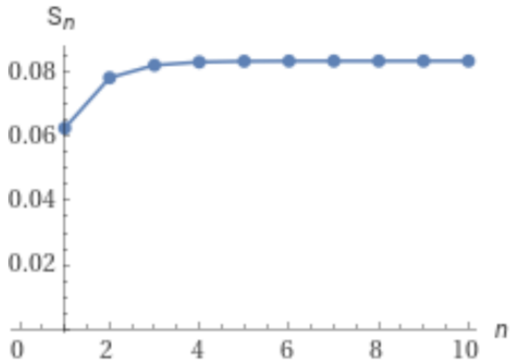


Рис. А.4. Графік частинних сум перших десяти членів послідовності $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$

Далі побудуємо графік зміни частинних сум для перших ста членів послідовності, він буде мати наступний вид:

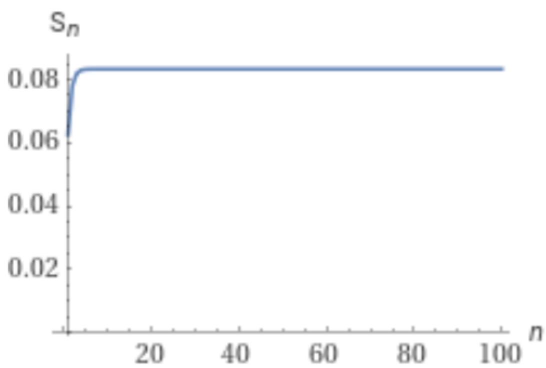


Рис. А.5. Графік частинних сум перших ста членів послідовності $m_n p_{n+1} a'_{n+1} a'_n$

Отже, графіки на рисунках А.4. і А.5. зростають швидше та набувають постійну швидкість, з графіків видно, що послідовність збігається до значення суми $0{,}08(3)$. ■

10. Знайти послідовність величин площ трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ та задати її формулою. Дослідити знайдену послідовність на збіжність, у випадку збіжності знайти суму всіх площ трапецій і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Розв'язання

Знайти послідовність величин площ трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ можна, використовуючи звичайну формулу для знаходження площі трапеції, а саме $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a, b – основи даної трапеції.

Складемо формулу для обчислення площ трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$.

$$S_{a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n} = \frac{\overline{a_{n+1} a'_{n+1}} + \overline{a_n a'_n}}{2} \cdot \overline{p_{n+1} p_{n+2}}$$

Для знаходження послідовності величин площ даних трапецій, знайдемо послідовності довжин відрізків $\overline{a_{n+1} a'_{n+1}}$, $\overline{a_n a'_n}$, $\overline{p_{n+1} p_{n+2}}$.

З рисунку видно, що послідовність довжин відрізків $\overline{a_n a'_n}$ буде такою:

$$\overline{a_1 a'_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{a_2 a'_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \overline{a_3 a'_3} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \overline{a_4 a'_4} = \frac{\sqrt{2}}{16}, \ldots.$$

Отже, $\overline{a_n a'_n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$.

Тоді послідовність довжин відрізків $\overline{a_{n+1} a'_{n+1}}$ буде мати наступний вид:

$$\overline{a_2 a'_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \overline{a_3 a'_3} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \overline{a_4 a'_4} = \frac{\sqrt{2}}{16}, \overline{a_4 a'_4} = \frac{\sqrt{2}}{32} \ldots.$$

Отже, $\overline{a_{n+1} a'_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$.

Послідовність довжин відрізків $\overline{p_{n+1}p_{n+2}}$ можемо знайти опираючись на задачу 5, другого рівня складності, тому вона буде мати такий вигляд: $\overline{p_2p_3} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \overline{p_3p_4} = \frac{\sqrt{2}}{16}, \overline{p_4p_5} = \frac{\sqrt{2}}{32}, \overline{p_5p_6} = \frac{\sqrt{2}}{64}, \dots$. Тоді $\overline{p_{n+1}p_{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}$.

Складемо формулу послідовності величин площ трапецій $a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n$, вона буде виглядати наступним чином:

$$S_{a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{2^n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{2n+3}}$$

Отже, $S_{a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n} = \frac{3}{2^{2n+3}}$.

Запишемо послідовність величин площ трапецій $a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n$, вона буде відображатись таким чином:

$$S_{a_1a_2a'_2a'_1} = \frac{3}{32}; S_{a_2a_3a'_3a'_2} = \frac{3}{128}; S_{a_3a_4a'_4a'_3} = \frac{3}{512}; S_{a_4a_5a'_5a'_4} = \frac{3}{2048}; \dots \blacksquare$$

Тепер дослідимо знайдену послідовність на збіжність, запишемо таку границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2^{2n+3}}$. Якщо підставимо ∞ замість n, то отримаємо наступне: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2^{2n+3}} = \left[\frac{3}{2^\infty} = \frac{3}{\infty} = 0\right] = 0$, тобто границя дорівнює нулю, а тому послідовність величин площ трапецій $a_na_{n+1}a'_{n+1}a'_n$ є збіжною.

Отже, ми можемо знайти суму всіх площ трапецій. З рисунку видно, що всі дані трапеції можна скласти одна в одну та якщо звернемо увагу на послідовність чисел, то можна зазначити, що вона буде геометричною прогресією зі знаменником теж $\frac{1}{4} < 1$, тому суму можна обчислити за формулою: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

$$S_n = \frac{\frac{3}{32}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{32} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Тобто сума всіх величин площ трапецій $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$ буде дорівнювати значенню 0,125. Тепер побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти та ста членів послідовності.

Графіки для перших десяти та ста членів послідовності будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести наступний вираз: sum(3/(2^(2n+3)),1,10). Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даної послідовності та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:

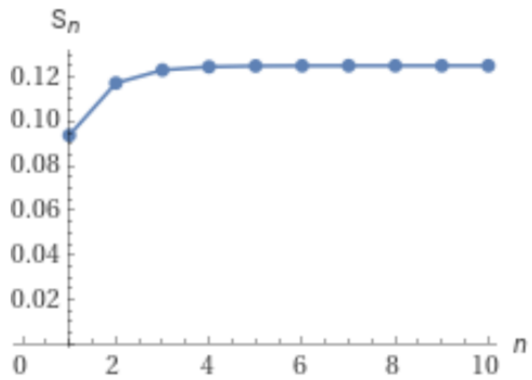


Рис. А.6. Графік частинних сум перших десяти членів послідовності $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$

Далі побудуємо графік зміни частинних сум для перших ста членів послідовності, він буде мати наступний вид:

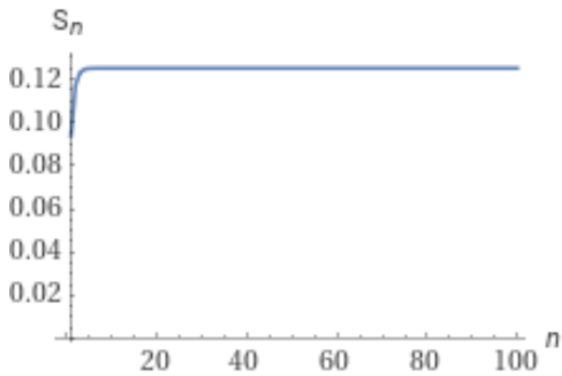


Рис. А.7. Графік частинних сум перших ста членів послідовності $a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n$

Отже, графіки на рисунках 6 і 7 зростають швидше та набувають постійну швидкість, з графіків видно, що послідовність збігається до значення суми $0{,}125$.■

Ми розглянули декілька способів розв’язання задач, які пов’язані із величинами площ трикутників, і виявили, що другий спосіб, як ви можете бачити, значно швидший, але при цьому треба знати координати вершин даних трикутників. Іноді координати вершин трикутників навіть важче знайти ніж послідовність довжин відрізків. Тому і було представлено декілька підходів до розв’язання задач.

У якості додаткових завдань учням можна запропонувати:

1) Самим відшукати на рисунку послідовність величин площ різних планіметричних фігур та спробувати задати їх формулами.

2) Знайти на рисунку та спробувати побудувати послідовність величин, наприклад, об’ємів, різних стереометричних фігур, в даному випадку це можуть бути конус і циліндр.

На основі цієї геометричної моделі можна задати більше ніж 40 задач, тому учні ліцеїв зможуть удосконалювати свої навички побудови різних послідовностей та задання їх формулами.

Додаток Б

Задачі для використання при вивченні розділу «Числові ряди» студентами спеціальності «Математика»

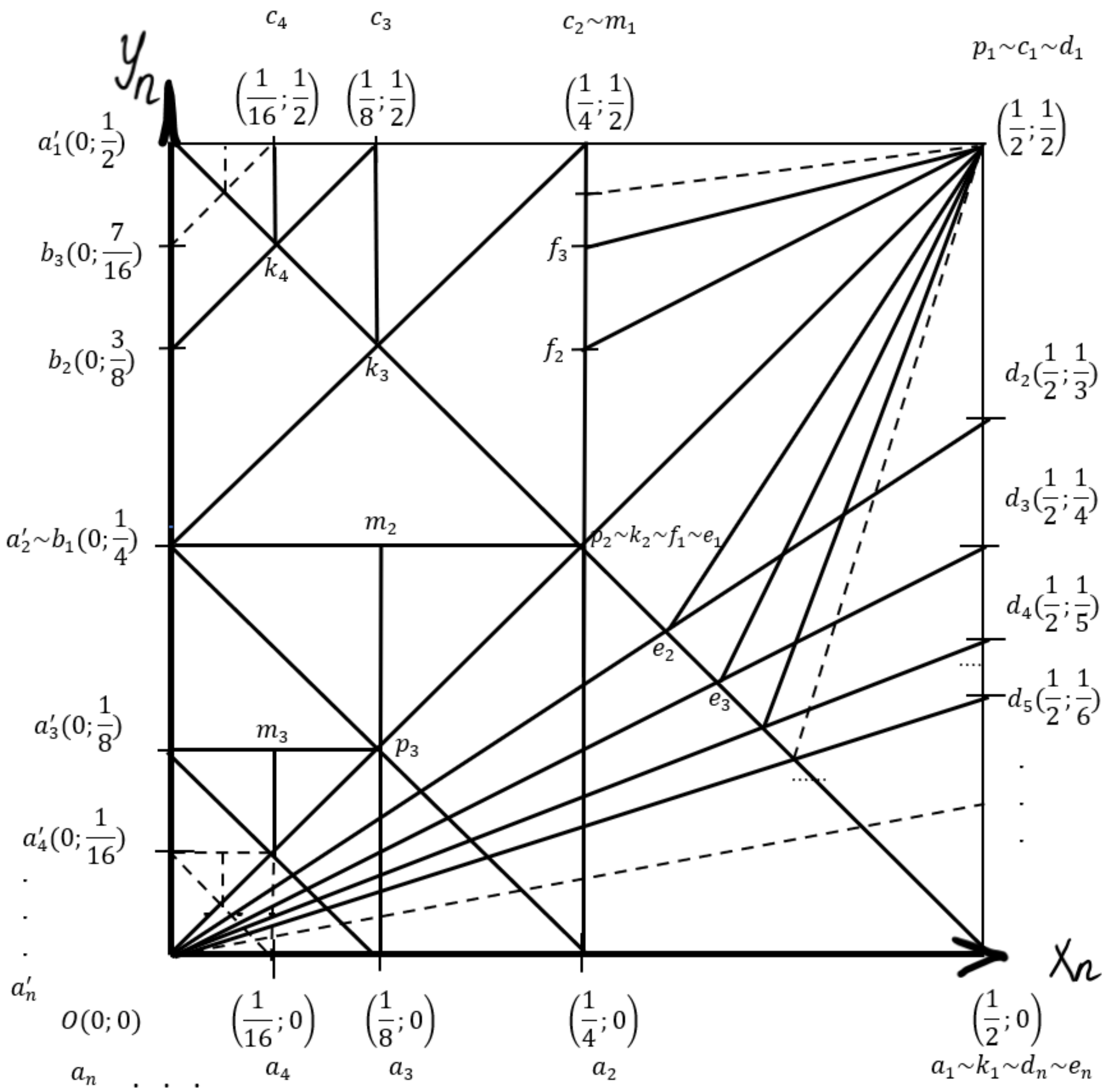


Рис. Б.1. Геометрична модель, побудована в квадраті зі стороною a=$\frac{1}{2}$ в системі координат Oxy. Квадрат має вершини в т. т. (0;0), ($\frac{1}{2}$;0), ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), (0; $\frac{1}{2}$)

Задачі першого рівня складності

1. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т. т. f_n та дослідити їх на збіжність.

2. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. m_n та дослідити їх на збіжність.

3. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. a_n' та дослідити їх на збіжність.

4. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. c_n та дослідити їх на збіжність.

5. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. k_n та дослідити їх на збіжність.

6. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. e_n та дослідити їх на збіжність.

7. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. b_n та дослідити їх на збіжність.

Розглянемо приклади розв’язання 1 та 2 задач. Всі інші спробуйте розв’язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче.

1. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{y_n}$, де $(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$ – координати послідовності т. т. f_n та дослідити їх на збіжність.

Розв’язання

З рисунку видно, що координати послідовності т. т. f_{n} по x не змінюються, тому $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x_n}=\frac{1}{4}$. Знайдемо послідовність координат точки f_{n} по y, її можна представити у наступному виді:

$$f_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right), f_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right), f_3\left(\frac{1}{4};\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\right), f_4\left(\frac{1}{4};\frac{7}{16}+\frac{1}{32}\right), \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(\frac{1}{4};\frac{1}{4}), f_2(\frac{1}{4};\frac{3}{8}), f_3(\frac{1}{4};\frac{7}{16}), f_4(\frac{1}{4};\frac{15}{32}), \dots$$

З'ясувавши закономірність координат точки по y, загальний член ряду буде мати такий вид: $\mathrm{y_n} = \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$. Тому $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\mathrm{n}\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$ розбіжний. ■

2. Знайти ряди: $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathbf{x_n}$, $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathbf{y_n}$, де $(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$ – координати послідовності т. т. $\boldsymbol{m_n}$ та дослідити їх на збіжність.

Послідовність координат точки $\mathrm{m_n(x_n; y_n)}$ можна визначити за рисунком, вона буде мати наступний вид: $m_1(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}), m_2(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}), m_3(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}), m_4(\frac{1}{32}; \frac{1}{16}), \dots$.

З'ясувавши закономірність координат, загальні члени ряду будуть мати такий вид: $\mathrm{x_n} = \frac{1}{2^{n+1}}, \mathrm{y_n} = \frac{1}{2^n}$. Тому $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Отже, ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{x_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ збіжний.

Далі ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова теж виконується: $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{2^n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Отже, ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збіжний. ■

Задачі другого рівня складності

1. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{p}_n f_n}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

2. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{m}_1 f_n}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

3. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{p}_n p_{n+1}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

4. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{d}_1 d_{n+1}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

5. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{b}_n c_{n+1}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

6. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{a}'_n k_{n+2}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

7. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{a}_{n+1} p_{n+1}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

8. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a'_n a_n}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{a_n p_{n+1}}|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

10. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P_{\Delta O p_{n+1} a_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

11. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P_{O a'_n p_n a_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

12. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P_{p_n a_n a_{n+1} m_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

13. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P_{a_n a_{n+1} a'_{n+1} a'_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Розглянемо приклади розв’язання 4 та 11 задач. Раніше ми розглядали 2 способи розв’язання даного типу задач, але зараз перший спосіб не доцільно пропонувати, оскільки він призначений більше для розуміння суті задач через геометричну модель. А дані задачі будуть використовуватись студентами вищого навчального закладу і вони вже розуміють весь процес побудови послідовностей та рядів. Тому для розгляду будемо подавати розв’язання задач другим способом.

4. Знайти ряд: $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\left|\overline{\mathbf{d_1}\boldsymbol{d_{n+1}}}\right|$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Розв'язання

Знайдемо загальний член даного ряду за допомогою формули обчислення відстані між двома точками.

$$\left|\overline{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$$

$$\left|\overline{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\left|\overline{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

……………………………………………

$$\left|\overline{\mathrm{d}_1 d_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{n}+2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{n}+2-2}{2(n+2)}\right)^2} = \frac{\mathrm{n}}{2(n+2)}$$

$$\text{Отже, } \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{d}_1 d_{n+1}}\right| = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{n}}{2(n+2)}$$

Ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{n}}{2(n+2)}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова не виконується:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{n}}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{\mathrm{n}}} = \left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{n}}{2(n+2)}$ розбіжний. ■

11. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P_{Oa'_n p_n a_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Розв’язання

Знайдемо загальний член даного ряду, використовуючи звичайну формулу для знаходження периметра квадратів.

$$P_{Oa'_n p_n a_n} = 4 \cdot |\overline{oa_n}|$$

Знайдемо послідовність довжин відрізків $|\overline{oa_n}|$ та задамо її формулою.

$$|\overline{oa_1}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$|\overline{oa_2}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$|\overline{oa_3}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

....

$$|\overline{oa_n}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2^n}\right)^2} = \frac{1}{2^n}$$

Отже, $|\overline{oa_n}| = \frac{1}{2^n}$.

Тоді $P_{Oa'_n p_n a_n} = 4 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{Oa'_n p_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Далі ще достатньо використати радикальну ознаку Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

Отже, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжний, то збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}$.

Знайдемо суму цього ряду за допомогою формули суми геометричної прогресії.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \left[s_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\left((\tfrac{1}{2})^n - 1\right) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n}) = 1$$

Отже, сума ряду $4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ дорівнює 4. ■

Тепер побудуємо графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Графіки для перших десяти, ста та тисячі членів ряду будемо будувати за допомогою сервісу WolframAlpha, для цього достатньо в рядку ввести наступний вираз: sum(4/(2^(n)),1,10). Після того, як ми ввели ці дані нам одразу виводиться на екран сума даного ряду та графік зміни цих частинних сум, який має такий вид:

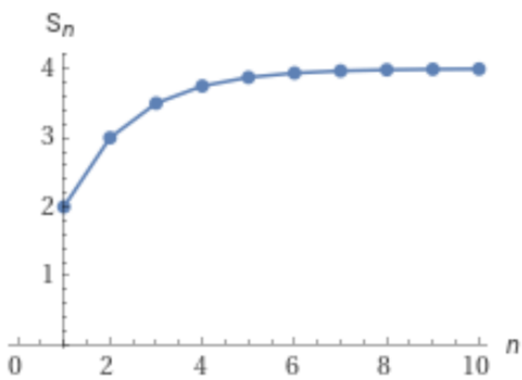


Рис. Б.2. Графік частинних сум перших десяти членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{Oa'_n p_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}$$

Далі побудуємо графік зміни частинних сум для перших ста членів ряду, він буде мати наступний вид:

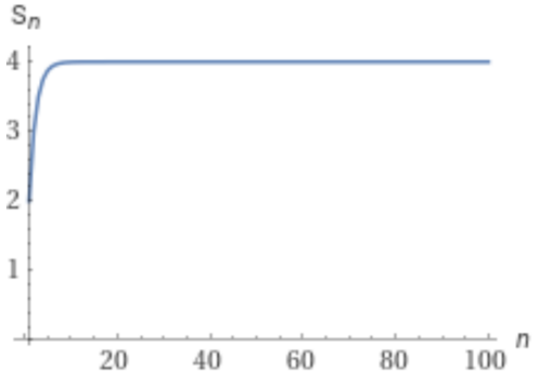


Рис. Б.3. Графік частинних сум перших ста членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{Oa'_n p_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}$$

А графік зміни частинних сум для перших тисячі членів ряду буде мати такий вид:

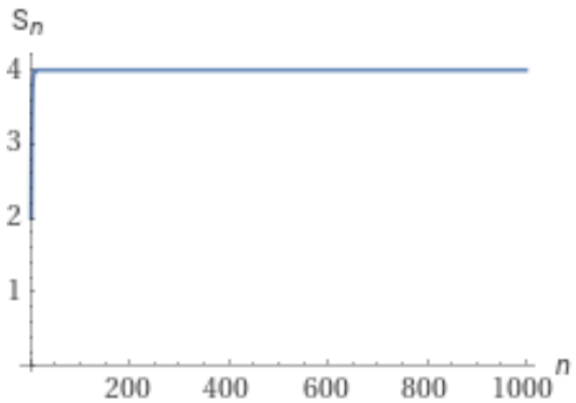


Рис. Б.4. Графік частинних сум перших тисячі членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{Oa'_n p_n a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}$$

Отже, графіки на рисунках 2, 3, 4 зростають швидко та набувають постійну швидкість, з графіків видно, що ряд збіжний до значення суми 4.■

Задачі третього рівня складності

1. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

2. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_{\mathrm{n}} \mathrm{k}_{\mathrm{n}} a'_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

3. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{b}_{\mathrm{n}} a'_n \mathrm{c}_{\mathrm{n}+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

4. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_{\mathrm{n}} a_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

5. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a_n a_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

6. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{O a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}} a_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

7. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{p_n} a_n a_{n+1} m_n}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

8. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{p_{n+1}} a_n a_{n+1} p_{n+2}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

9. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{v_n}$, де $\mathrm{v_n}$ – об’єми тіл обертання прямих $\left|\overline{od_n}\right|$ навколо осі OX, дослідити даний ряд на збіжність.

10. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{v_n}$, де $\mathrm{v_n}$ – об’єми тіл обертання прямих $\left|\overline{m_n\, a_{n+1}}\right|$ навколо осі OY, дослідити даний ряд на збіжність.

Розглянемо приклади розв’язання 1 і 9 задач. Всі інші спробуйте розв’язати самостійно, опираючись на приклади, які подані нижче. Деякі задачі третього рівня складності теж можна розв’язати декількома способами, які і будуть представленні у розв’язанні.

1. Знайти ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p_{n+1}} a'_{n+1}}$, дослідити його на збіжність. У випадку його збіжності знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

Розв’язання

І спосіб.

Знайдемо ряд: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p_{n+1}} a'_{n+1}}$, використовуючи звичайні формули для знаходження площ трикутників.

Оскільки дані трикутники є прямокутними, кути при вершинах a'_{n+1} дорівнюють 90°, то можна використати формулу, де площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін помноженого на синус кута між ними.

$$S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| \cdot \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}}\right|$$

Знайдемо $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right|$ і $\left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}}\right|$, але перед тим, як це зробити зазначимо, що загальні члени цих послідовностей рівні, оскільки дані трикутники $\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}$ будуть розміщені у квадратах $a'_n m_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}$, тому $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}}\right|$.

$$\left|\overline{a'_1 a'_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left|\overline{a'_2 a'_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}$$

$$\left|\overline{a'_3 a'_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{1}{16}$$

……………………………………

$$\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Отже, $\left|\overline{a'_n a'_{n+1}}\right| = \left|\overline{\mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Тоді $S_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1+n+1}} = \frac{1}{2^{2n+3}}$

Отже, $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$. ■

II спосіб.

Використаємо формулу з аналітичної геометрії через відомі координати вершин трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

$$\mathrm{S}_{\Delta a'_n \mathrm{p}_{\mathrm{n}+1} a'_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|0 \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1+n+1}} = \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$. ■

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^{2n+3}} = \left[\frac{3}{2^{\infty}} = \frac{3}{\infty} = 0\right] = 0$

Далі ще достатньо використати радикальну ознаку Коші: $\frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{32} < 1$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ збіжний.

Знайдемо суму цього ряду за допомогою формули суми геометричної прогресії.

$$S_n = \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{24} = 0{,}042$$

Отже, сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$ дорівнює 0,042. ■

Тепер побудуємо графіки зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду.

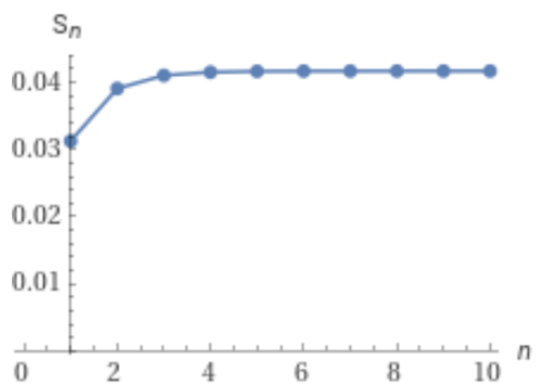


Рис. Б.5. Графік частинних сум перших десяти членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Далі побудуємо графік зміни частинних сум для перших ста і тисячі членів ряду, вони будуть мати наступний вид:

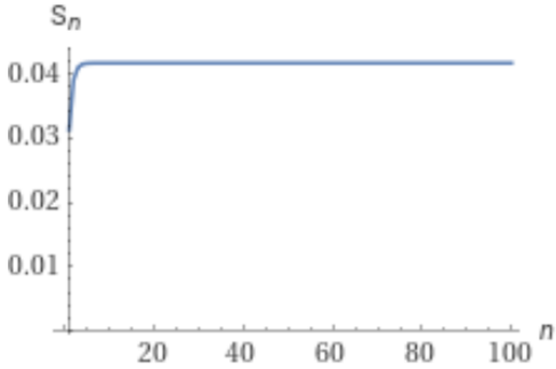


Рис. Б.6. Графік частинних сум перших ста членів ряду

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

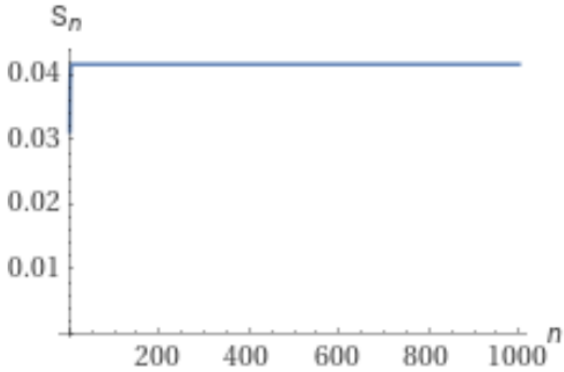


Рис. Б.7. Графік частинних сум перших тисячі членів ряду

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} S_{\Delta a'_n p_{n+1} a'_{n+1}} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Отже, графіки на рисунках 5, 6 і 7 зростають швидко та набувають постійну швидкість, з графіків видно, що послідовність збігається до значення суми 0,042.■

9. Знайти ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, де v_n – об'єми тіл обертання прямих $\left|\overline{od_n}\right|$ навколо осі ОХ, дослідити даний ряд на збіжність.

Розв'язання

Для знаходження даного ряду використаємо наступну формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Враховуючи координати точок $o(0;0), d_n\left(\frac{1}{2};\frac{1}{n+1}\right)$ одержуємо:

$$V_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,dx$$

Знайдемо підінтегральну функцію, використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Це буде рівняння послідовності прямих, на яких розташовані точки 0, d_n.

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{n+1}}$$

Спрощуючи даний вираз, отримаємо: $y = \frac{2x}{n+1}$

$$V_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{n+1}\right)^2 dx = \frac{4\pi}{(n+1)^2} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{4\pi}{(n+1)^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}\cdot\frac{4\pi}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{6(n+1)^2}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6(n+1)^2}$, де v_n – об'єми тіл обертання прямих $\left|\overline{o\,d_n}\right|$ навколо осі OX. Отриманий ряд дослідимо на збіжність.

Необхідна умова виконується: $\frac{\pi}{6}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \left[\frac{\pi}{6}\cdot 0\right] = 0$

Використаємо ознаку порівняння:

Порівняємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (I) і $\frac{\pi}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ (II)

Оскільки 2 > 1, то ряд виду (I) збігається.

При порівнянні отримали, що $\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n^2}$

Отже, ряд $\frac{\pi}{6} \cdot \sum_{\text{n}=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ теж є збіжним. ■

Ми розглянули декілька розв'язків різного типу задач, які посильні для студентів вищих навчальних закладів. Для більш сумлінних студентів доцільно запропонувати додаткові завдання наступного виду:

1) Задачі третього рівня (1-5), де треба визначити ряд, загальний член якого виражений формулою послідовностей площ трикутників, спробувати розв'язати ще одним способом – за допомогою інтегралу.

2) У задачах третього рівня (9-10), в яких потрібно знайти ряд, загальний член якого виражений формулою послідовностей об'ємів тіл обертання, у випадках збіжності заданих рядів спробувати знайти суму даного ряду і побудувати графік зміни частинних сум для перших десяти, ста та тисячі членів ряду. Такі задачі будуть підвищеної складності, оскільки знайдені загальні члени рядів будуть представлені трохи інакше і треба прикласти певних зусиль для розв'язання таких завдань.

3) Спробувати знайти ряди, загальні члени яких виражені формулами послідовностей площ бічних поверхонь тіл обертання та площ їх повних поверхонь.