МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_____________ Д. Є. Бобилєв
«___» _____________ 2023 р.

Реєстраційний № __________
«___» _____________ 2023 р.

Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування» (профільний рівень)

Кваліфікаційна робота студента
фізико-математичного факультету
групи МІм-22
ступінь вищої освіти *магістр*
спеціальності: 014.04 Середня освіта (Математика)
Конобріцького Владислава Сергійовича
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович

Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Тема «Похідна та її застосування» на профільному рівні у ліцеях стає ключовою у формуванні математичних компетенцій учнів. Актуальність цієї теми визначається її важливістю для подальшого вивчення математики на вищому рівні та її застосування в різних галузях науки та технологій. Похідна, як ключовий елемент математичного аналізу, є не лише теоретичним концептом, але й має широкі практичні застосування у фізиці, економіці, інженерії та інших галузях. Таке вивчення сприяє розвитку критичного мислення учнів та їхніх аналітичних здібностей.

Досягнення навичок застосування похідних у різних сферах дозволяє учням не лише зрозуміти математичні концепції, але й вміти застосовувати їх на практиці. Це розвиває їхні здібності аналізувати складні ситуації, розв’язувати реальні проблеми та використовувати математику як інструмент для розуміння навколишнього світу. Похідна і її застосування вивчаються як інструмент у моделюванні реальних процесів, що створює можливості для учнів досліджувати та розуміти фізичні явища через математичні моделі.

У контексті сучасного розвитку технологій і наукових досягнень, вивчення похідної та її застосувань набуває ще більшої важливості. Інтеграція цих знань дозволяє учням впевненіше користуватися сучасними інструментами для обчислень та моделювання, що є необхідним у низці сучасних професій. Таке навчання стимулює інтерес до математики, адже демонструє її практичне значення та важливість в різних сферах життя.

Об’єктом дослідження є процес навчання алгебри і початків аналізу в профільній школі.

Предметом дослідження є методика узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Мета роботи: теоретично обґрунтувати і розробити технології узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Мета конкретизується у таких ***завданнях:***

1. Обґрунтувати психолого-педагогічні та методичні вимоги щодо узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування».
2. Провести логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування»
3. Розробити технологію узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування».
4. Розробити систему задач для узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Методи дослідження: спостереження, бесіди з учнями та вчителями, тестування та анкетні опитування. Крім того, використання контрольних робіт сприяло збору об’єктивних даних щодо рівня розуміння та успішності учнів у даній темі. В ході аналізу методики навчання використовувалися такі методи, як пошуковий та навчальний педагогічний експеримент, а також експертна оцінка дидактичних матеріалів. Ці підходи дозволили систематично дослідити ефективність різних методів викладання та їх вплив на розуміння та успішність учнів у вивченні геометричних величин.

Практична значущість роботи полягає у розгляді основних методичних особливостей вивчення похідної на уроках алгебри і початків аналізу.

Структура роботи. Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів та загальних висновків, списку використаних джерел, додатків.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВІ ОСНОВИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ

1.1. Аналіз психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження

На сьогодні головною метою шкільної освіти є створення сприятливих умов для розвитку творчих, талановитих та конкурентоспроможних учнів. Це в значній мірі залежить від вміння вчителя правильно організовувати та скеровувати евристичний навчальний процес. Але без знань психолого-педагогічних закономірностей навчання, що включають у себе досягнення психології, дидактики та методики навчання математики, важко уявити гарного вчителя.

Питанням зв’язку психології і евристики займались Е.Н. Кабанова-Меллер, С.І. Шапіро, Л.С. Рубінштейн, Я.О. Понамарьов, Є.П. Ільїн. Рубінштейн в умовах боротьби з формалізмом у навчальній роботі школи обґрунтував ідею необхідності розвитку внутрішнього психологічного змісту діяльності дитини та у зв'язку з цим, цінну ідею творчого навчання.

Учні 11-го класу за віковою періодизацією відносяться до старшого шкільного віку. Характерним для інтелекту старшокласника є розвиток творчих здібностей, що виявляється в інтелектуальній ініціативі та створенні чогось нового. Складний навчальний матеріал вимагає від старшокласників досконалішої репродуктивної уяви, і водночас, у них розвивається і творча уява, що виявляється *у* різноманітних видах творчої діяльності.

Я.О. Пономарьов [41, с. 158] відмітив, що психологія творчого мислення вивчає способи розв’язання творчих завдань, які вимагають не тільки знань і вмінь, але й здогадки та уяви, та іноді навіть інтуїції. На думку Є. П. Ільїна під інтуїцією слід розуміти евристичний процес, що полягає в знаходженні розв’язання завдань на основі орієнтирів пошуку, не пов’язаних логічно або недостатніх для отримання логічного висновку [14, с. 69]. Здогадка є наслідком процесу інтуїції, що відігріє важливу роль для того типу мислення, яке є основою винахідницької діяльності і взагалі творчості у будь-якій сфері життя. У зв'язку з цим Д. Пойа наголошує на навчанні вмінню здогадуватись, чому сприяє використання евристичних прийомів [40, с. 200].

Дослідження розвитку компонентів структури математичного мислення були описані у працях С.І. Шапіро, який стверджував, що у старшому шкільному віці учень намагається провести глибоку самооцінку своєї особистості, своїх здібностей [50, с. 95]. Зростає та розвивається пізнавальний інтерес до філософських проблем, рефлексія. На уроках математики учні проявляють особливий інтерес до її методологічних проблем, цікавляться історією математики. С.І. Шапіро визначив існування трьох ступенів у розвитку узагальненого математичного мислення в цьому віці [50, с. 102]. Про здібності учня до математики говорять його здібності до узагальнення, особливо коли узагальнення стає його внутрішньою потребою. Ці учні відрізняються тим, що не тільки мають узагальненні уявлення, але й можуть сприймати конкретну задачу у світлі цих узагальнених уявлень.

З математичними здібностями учнів тісно пов'язані такі психологічні процеси, як мислення й пам'ять, вибірковість та міцність запам'ятовування матеріалу. Дослідження О. Скафи показали, що учні, які навчаються поглибленому вивченню математики, володіють узагальненою математичною пам'яттю, розвиненим творчим мисленням, здатністю до абстрагування [59, с. 137]. Вони зберігають інформацію узагальнено, незалежно від конкретних властивостей. Не пам'ятаючи формулювання теорем, конкретних формул, учні знають їх функціональні образи, що забезпечує ефективне відтворення конкретних форм.

Учні, що навчаються у класах з поглибленим вивченням математики, вміють самостійно встановлювати закономірності, виділяючи особливі риси певного процесу. С.І. Шапіро відмітив, що цей вид діяльності здібні до математики старшокласники здатні здійснити при мінімальній кількості вправ [50, с. 95]. Процес згортання умовиводів є дуже важливим для розвитку творчих здібностей учнів. Він дає можливість прогнозувати результат, забезпечує орієнтовні узагальнення.

Одним з показників творчого мислення учнів є швидкість і ефективність зміни мислення в зворотному напрямку. Поява формального мислення означає узагальнення їх як суб'єктів пізнання, новий підхід до розв'язання задач, який полягає у спрямованості на організацію фактів (комбінаторний аналіз), на виділення й контроль змінних величин, формування гіпотез та їх логічне обґрунтування й доведення.

На базі психологічних закономірностей формуються основні закони дидактики. Одним зі способів розкриття творчих здібностей учнів, їхньої самостійності та активності є евристичне навчання.

Основоположником ідеї евристичного навчання у середній школі є Джордж Пойа. У своїх працях він [40], [39], [38] використовує поняття «правдоподібного міркування», під яким розуміє набір евристик. Пойа виділив два взаємодоповнюючих елемента математичного дослідження - вдалу здогадку і універсальний метод. Він показав, що рішення всякої математичної задачі зосереджено навколо одного ключового моменту - осяяння, що настає часом після довгих безплідних роздумів. Разом з тим можна розробити методичні прийоми, що сприяють відкриттю. Їх використання хоча і не гарантує вдалої здогадки, однак підвищує шанс прийти до неї.

Проблемі реалізації евристичних ідей, діалектиці евристичної діяльності в навчанні математики на сьогодні приділяли увагу такі математики та методисти, як Г.П.Бевз, М.І.Бурда, Ю.М.Колягін, Ю.М.Кулюткін, Л.Ларсон, Т.М.Міракова, В.М.Осинська, Ю.О.Палант, Д.Пойа, Г.І.Саранцев, Є.Є.Семенов, О.І.Скафа, З.І.Слєпкань, Н.А.Тарасенкова, Л.М.Фрідман, С.І.Шапіро, П.М.Ерднієв та інші. Аналіз робіт вище вказаних авторів підтверджує, що в основі евристичного підходу лежить психологія творчого мислення, процедура пошуку нового, спроба формалізації творчої діяльності.

“Евристика”, у перекладі з грецького слова «heurisko», означає “відшукую”, “знаходжу”, “відкриваю” [65].

Педагогічну позицію щодо розуміння смислу евристики пов’язують з системою словесного вчення Сократа (469 – 399 р. до н.е.). Його метод навчання базувався на системі запитань, які спонукають учнів до роздумів. Вилучення прихованих в людині знань може бути не тільки методом навчання, але і методологією всієї освіти. Учень вибудовує траєкторію своєї освіти в кожному з досліджуваних курсів, створюючи не тільки знання, а й особистісні цілі занять, програми свого навчання, способи освоєння досліджуваних тем, форми подання та оцінки освітніх результатів [59, с. 9].

В сучасній дидактиці вперше було надане чітке визначення евристичного навчання А.В. Хуторським. Під ним він розуміє тип навчання учнів пошуку і створенню нового в їх знаннях, вміннях, способах діяльності, особистісних якостях, матеріалізованих продуктах освіти [64, с. 27].

Ми під ***евристичним навчанням*** будемо розуміти навчання, яке ставить за мету конструювання учнем власного сенсу, цілей і змісту освіти, а також процесу його організації, діагностики та усвідомлення. [65]

Основною характеристикою евристичного навчання є створення учнями освітніх продуктів і моделювання індивідуальних освітніх траєкторій. Під освітніми продуктами розуміють матеріальні здобутки учнів (судження, гіпотези, тексти, рисунки) та зміна особистісних якостей, що розвиваються в процесі навчання.

Деякі методисти ототожнюють проблемне навчання з евристичним. Проте вони суттєво відрізняються. Мета проблемного навчання – засвоєння учнями заданого предметного матеріалу шляхом висунення вчителем пізнавальних завдань-проблем. Методика проблемного навчання побудована так, що учні «наводяться» учителем на відоме рішення або напрямок вирішення завдання. Евристичний же підхід до навчання дозволяє розширити можливості проблемного навчання, оскільки орієнтує вчителя і учня на досягнення невідомого їм заздалегідь результату.

Евристична діяльність не передбачає від школярів попередніх вмінь роботи за зразком. Навпаки, такий вид репродуктивної діяльності негативно впливає на можливі прояви творчості, створюючи у дітей шаблонні уявлення про предмет, що вивчається.

Принципи евристичного навчання були сформульовані А.В.Хуторським [64, с. 153-160].:

1. Принцип особистісного цілепокладання учня: освіта кожного учня відбувається на основі і з урахуванням його особистих навчальних цілей. Слід навчати школяра, пізнавши його можливості і здібності на основі спостереження прогресивних психолого-педагогічних методів. Педагогічною вимогою до діяльності вчителя є створення умов щодо осмислення й застосування цих цілей.

2. Принцип вибору індивідуальної освітньої траєкторії: учень має право на усвідомлений і погоджений з педагогом вибір основних компонентів своєї освіти.

3. Принцип продуктивності навчання: головним орієнтиром навчання є особистісне освітнє прирощення учня, що складається з його внутрішніх і зовнішніх освітніх продуктів навчальної діяльності.

4. Принцип ситуативності навчання: освітній процес будується на ситуаціях, які передбачають самовизначення учнів та евристичний пошук їх вирішення. Учитель супроводжує учня в його освітньому русі.

5. Принцип освітньої рефлексії: освітній процес супроводжується його рефлексивним усвідомленням суб'єктами освіти.

Евристичне навчання передбачає здійснення творчої діяльності, як учнями, так і вчителями. При цьому творча діяльність може розглядатися «як створення якісно нового, що ніколи раніше не існувало» [65, с. 46].

Під ***евристикою*** Скафа О.І. розуміє процес пошуку нового продукту діяльності [59, с. 23].

Розрізняють шість основних загальних видів евристичних прийомів:

- аналіз і синтез;
- порівняння;
- абстрагування;
- узагальнення та систематизація;
- класифікація;

- аналогія.

Аналіз і синтез розглядаються в психології як складові елементи розумової діяльності. Аналіз − це розумова дія, при якій від наслідку переходять до причини, яка його; синтез − розумова дія, при якій від причини переходять до наслідку, породженому цією причиною [59, с. 31]. Взагалі, як виявляється на практиці, аналіз і синтез тісно взаємопов'язані між собою і навіть досвідченому вчителю іноді важко відділити один від одного їх на уроці.

Рубінштейн виділяє важливу форму аналізу – аналіз через синтез − це пізнання нових сторін, якостей і властивостей досліджуваних об'єктів шляхом включення цих об'єктів в систему зв'язків і відносин, в яких ці нові властивості можуть бути виявлені.

Порівняння − це розумова дія, за допомогою якої встановлюються риси подібності та відмінностей між визначеними предметами і явищами. Воно проявляється у двох формах: протиставлення та зіставлення, які важко розрізнити. Основною відмінністю є те, що протиставлення направлене на виділення відмінностей предметів з виділених істотних властивостей, а зіставлення – на виділення цих властивостей предметів та явищ [59, с. 32]. У розумовій діяльності порівняння виступає як форма аналізу та синтезу.

Порівняння ефективно використовувати як засіб зв'язку нових знань з раніше вивченим матеріалом, навчального матеріалу та особистим досвідом учнів. При вивченні математики предметом порівняння можуть бути об'єкти навколишньої дійсності, поняття, теореми і їх доведення, структури задач і методи їх вирішення, алгоритми, способи навчальної роботи, а також факти, процеси, етапи роботи.

Абстрагування – це розумова дія, спрямована на виявлення в предметах та об'єктах істотних для даного дослідження властивостей і уявне відвернення від неістотних в них [15, с. 36].

Е.Н.Кабановою-Меллер введено три види абстракції: ізолююча (виділення якоїсь властивості і зневага іншими), підкреслююча (вичленення істотних властивостей при сприйнятті інших як фону), протиставна (вичленення істотних ознак і усвідомлене сприйняття інших як несуттєвих).

Узагальнення − це розумова дія виявлення істотної загальної властивості, що належить безлічі об'єктів і об'єднує ці об'єкти воєдино [59, с.41]. Під істотними розуміють такі загальні властивості, які не можна відокремити від певного класу предметів.

Психологи розглядають різні види узагальнень. Так, В. В. Давидов вводить два основних види узагальнення: емпіричне, що відбувається в результаті порівняння і теоретичне, сформоване через аналіз.

Систематизація − прийом розумової діяльності, в процесі якого досліджувані об'єкти упорядковуються в визначену систему на основі обраного принципу [59, с.45].

Продуктом систематизації, як і узагальнення, є наукова теорія, яка включає поняття, принципи і закони. Засвоєння теорії − тривалий процес, на проміжних етапах якого результатом систематизації є поняття і судження.

Продовжує ієрархію основних прийомів евристичного мислення ***класифікація*** − прийом розумової діяльності віднесення одиничних об'єктів або явищ до відповідного роду або класу. Цей прийом називають ще завданням на застосування понять, класифікаційних схем.

Широко використовується в навчальному процесі евристичний прийом ***аналогія*** − розумова дія, спрямована на отримання нових знань про властивості, ознаки, відносини предметів і явищ, які вивчаються, на підставі знань про їх часткової схожості з іншими предметами або явищами [59, с.46-47].

Аналогія має велике значення для формування творчого мислення учня. У навчальному процесі аналогію розглядають як прийом розумової діяльності і як результат певних міркувань.

В шкільній практиці досить часто використовують і такі специфічні евристики, як ***підведення під поняття*** та ***виведення наслідку***. Оперативна складова «підведення під поняття» залежить від способу означення поняття:

родовидове або конструктивне. Формуванню цього прийому сприяє вдалий підбір учителем питань (завдань) як для колективного, так і для самостійного рішення. Перевагу слід надавати питанням (завданням) на дослідження, встановлення закономірностей, а також завданням, які вимагають не стільки знань теорії, скільки нешаблонного, оригінального, евристичного мислення. У складі математичних умінь важливе значення має отримання наслідків з умови задачі. Цей прийом отримав назву "виведення наслідків" і він є зворотним до прийому "підведення під поняття" [59, с.51-53].

Розглянуті евристичні прийоми мислення широко використовуються під час формування та розвитку творчості учнів. Але постійне навчання евристикою не є ефективним, оскільки необхідно в учнів розвивати й інші психологічні процеси, з якими евристичне навчання не може впоратися.

Окрім вище зазначених евристичних прийомів виділяють також наступні різновиди евристик, як евристичні правила-орієнтири, евристичні приписи, евристико-дидактичні конструкції тощо.

На нашу думку, найбільш доцільно використовувати наступні евристики для розвитку учнів старшого шкільного віку:

- досліджуй по частинам, перебери можливі варіанти;
- сформулюй еквівалентну проблему;
- модифікуй (змінюй, перетворюй з появою нових властивостей);
- обертай дію;
- міркуй від супротивного;
- розглянь граничні випадки;
- створи математичну модель ситуації;
- введи додаткові елементи;
- перетвори вимоги задачі.

Обрані нами евристики дають змогу побудувати ефективну систему евристичних задач, що сприяють процесу управління формуванням евристичної діяльності учнів. Метою даних евристик є створення сприятливих дидактичних умов для самоорганізації учнів під час «відкриття» і засвоєння нових знань, умінь та навичок.

Ефективність використання евристичних прийомів на уроці полягає в тому, що:

- ✓ істотно посилюється роль самостійної освіти, ініціативність учнів;
- ✓ формується позитивна внутрішня мотивація в результаті вирішення евристичних завдань;
- ✓ формуються навички творчого підходу до вирішення завдань, використання отриманих знань і умінь у нових, нетипових ситуаціях;
- ✓ підвищується рівень засвоєння навчального матеріалу;
- ✓ групова організація роботи учнів у процесі евристичного навчання приводить до зміцнення міжособистісних відносин, розвиває взаємодію в колективі;
- ✓ евристичне навчання забезпечує можливість самореалізації учнів у процесі навчання;
- ✓ підвищується самооцінка учнів.

Таким чином, до структури евристичного навчання математики відносять наступні компоненти [56]:

1) діагностику творчого потенціалу школярів засобами математики, представлену у вигляді тесту первинної діагностики творчого потенціалу, тесту на визначення рівня розвитку творчих здібностей і тесту на визначення рівня сформованості творчої особистості на даному етапі навчання;

2) систему корекційних евристичних вправ, що сприяють формуванню певних властивостей творчої особистості;

3) методичну систему актуалізації евристичних ситуацій на уроках геометрії;

4) систему навчальних евристичних задач з алгебри;

5) евристикою-дидактичні конструкції, у вигляді евристичних навчальних комп'ютерних програм, програм актуалізації знань, програм

"Завдання-метод", "завдання-софізм", програм автоматизованого рецензування вирішення математичних завдань.

В роботі ми притримуємося думки, що задача може бути віднесена до типу евристичних задач, якщо в процесі взаємодії з нею, учень встановлює, що [59, с.65]:

- нові знання, закономірності, відносини, властивості, необхідні для обґрунтування рішення задачі, відомі або невідомі;
- алгоритм або послідовність заданих алгоритмів вирішення завдання невідомі;
- теоретична і практична основа (базис) рішення задачі, що містить функціональне відношення, невідома.

Ми виходимо з того, що під час вирішення «евристичної задачі» у кожного учня формуються, так звані, правила переважного пошуку рішення задачі. Ці правила закладені у кожного школяра на підсвідомому рівні, дозволяючи тим самим саморегулювати свою діяльність. Вони допомагають учневі усвідомлювати етапи евристичної діяльності і лежать в її основі.

Отже, правильна організація навчального процесу по пропонованих системам евристичних завдань з математики відповідає основній меті евристичного навчання математики - створення учнями особистого досвіду в вивченні математики та отримання основного продукту діяльності у вигляді придбаних прийомів навчально-пізнавальної евристичної діяльності, а це сприяє формуванню самоорганізації особистості.

Евристичні прийоми слід розглядати в контексті евристичної діяльності, яка є невід'ємною складовою навчальної і професійно-орієнтованої діяльності.

1.2. Технології навчання на уроках математики в школі

Навчання являє собою процес, спрямований на формування знань, умінь та навичок учнів. Навчальна ж діяльність є більш широким поняттям, оскільки вона включає в себе окрім вище згаданого мотиваційний, оціночний та інші аспекти навчання. Протягом навчального процесу вчитель має формувати в учнів вміння здійснювати діяльність.

Дослідженням зв’язку особистості та діяльності займався А.Н. Лєонтьєв. Діяльність, на його думку, це одиниця життя, опосередкованого психічним відображенням, реальна функція якого полягає в тому, що воно орієнтує суб'єкта в предметному світі. [20, с. 87]

У психології під діяльністю розуміють людську форму ставлення до світу, змістом якої є доцільні зміни і перетворення речей і явищ залежно від потреб. Навчальна ж діяльність є видом діяльності, продуктом якої є знання, уміння і навички.

У сучасній педагогіці є актуальним діяльнісний підхід до навчання, який передбачає відбір змісту навчальних предметів з опорою на врахування специфіки майбутньої професійної діяльності. Метою такого навчання є діяльність або дії та операції, за допомогою яких вона реалізується і які спрямовані на розв’язання специфічних для навчання задач.

На думку Слєпкань З.І., головна теза діяльнісного підходу в розвитку особистості полягає в тому, що людина виявляє властивості та зв’язки елементів реального світу лише в процесі й на основі різних видів діяльності (предметної, розумової, індивідуальної, колективної та ін.) [60, с. 36].

Діяльнісна теорія учіння по праву домінує в сучасній дидактиці й методиках навчання. Проте, коли постає питання про джерела і механізми творчості, внеску окремого суб’єкта в науку і культуру, при їх описанні і поясненні апарат теорії діяльності виявляє свою принципову обмеженість. Унікальність і неповторність особистості, провідна роль несвідомого, інтуїції в творчих діях не можуть бути розкрити за допомогою понять теорії діяльності. Саме тут виникає необхідність у запровадженні евристичних форм та методів навчання.

Формування – це діяльність або експериментатора-дослідника, або вчителя, пов'язана з організацією засвоєння певного елемента соціального досвіду (поняття, дії) учнем [59, с. 194]. І формування, і навчання пов'язані з діяльністю вчителя, але їх зміст не збігається. По-перше, поняття навчання більш широке, ніж поняття формування. По-друге, коли говорять про навчання, то мають на увазі або те, чому вчить викладач (наприклад, математики), або те, кого вчить - учнів.

У нашому випадку досліджуються питання формування евристичної діяльності учнів у процесі навчання математики. Тому в рамках формування такої діяльності ми розуміємо придбані учнем нові освітні продукти, які виробляють у нього уміння осмислено діяти в ситуації вибору, грамотно ставити і досягати власних цілей, діяти продуктивно як у процесі вивчення математики так і надалі в його професійних і життєвих областях.

Спираючись на О.І. Скафу [59, с. 129], ми будемо розуміти під навчально-пізнавальною евристичною діяльністю учнів – діяльність, яка організується вчителем з використанням різноманітних евристичних засобів та спрямована на створення нової системи дій за пошуком невідомих раніше закономірностей, на формування процесів, які забезпечують пізнавальну та творчу діяльність, у результаті якої учні активно оволодівають знаннями та розвивають свої евристичні навички та уміння, формують пізнавальні мотиви та організаційні якості.

Характерними ознаками навчально-пізнавальної евристичної діяльності є:

1) обумовленість змісту евристичної діяльності особистісними мотивами, цілями та особливостями учня;

2) наявність ситуації суб’єктивного утруднення або проблеми, подолання якої обумовлює внутрішній приріст суб’єкта діяльності;

3) створення учнем власного освітнього продукту.

Це дає можливість зробити висновок, що включення учнів в цей вид навчальної діяльності найбільш сприятиме формуванню їх професійно-орієнтованої евристичної діяльності.

Професійна діяльність сучасної особистості є багатофункціональною системою, що репрезентує різні види діяльності. Тому є важливим навчати учнів різним моделям та ситуаціям, які їм знадобляться на практиці. Ефективною діяльністю, в якій розвиваються продуктивні способи мислення, уміння досягати мети та отримувати результат є евристична діяльність. Найкраще вона виявляється під час розв'язання евристичних задач, які формують професійно-орієнтовані евристичні вміння.

Професійно-орієнтовані евристичні вміння – це вміння, які сприятимуть розв'язанню учнями у їх майбутній професійній діяльності нетипових задач, убаченню нових проблем та їх творчому розв'язанню, що, як правило, приводить до інновацій. Формування таких умінь означатиме формування досвіду евристичної діяльності на "професійному рівні" (з точки зору створення нової системи професійно важливих дій) – професійно-орієнтованої евристичної діяльності – набування досвіду професійної діяльності під час навчання [22, с. 105].

У зв'язку з цим, за Максименко Т.С., професійно-орієнтована евристична діяльність розглядається як цілісна система, що складається з таких компонентів: мотиваційний, змістовий, операційно-процесуальний, організаційний та методологічний з одного боку та цілі, продукти, способи та задачі з іншого боку [22, с. 112].

Характеризуючи ***мотиваційну сторону професійно-орієнтованої евристичної діяльності***, важливо враховувати, що мотивація є не тільки передумовою евристичної діяльності, але її результатом, її новоутворенням. Для успішного навчання є важливим формування домінуючого у учня навчально-пізнавального мотиву.

Змістова сторона професійно-орієнтованої евристичної діяльності визначає предмет діяльності, те на що ця діяльність спрямована. Тому до змісту професійно-орієнтованої евристичної діяльності відноситься задана система дій, які забезпечуватимуть виконання майбутнім математикам професійних функцій та ті знання, які забезпечать реалізацію цієї системи у майбутній професійній діяльності.

Операційно-процесуальна сторона професійно-орієнтованої евристичної діяльності пов’язана з тим, що ця діяльність складається із визначеної системи дій. Формування евристичних умінь в учнів фактично означає оволодіння цими діями, формування здатності відшукувати нову систему професійних дій у залежності від конкретних умов, удосконалювати її у процесі розв’язування професійних задач. При цьому процес розв’язування навчальних задач, під час якого відбувається формування евристичних умінь повинен адекватно відображати процес розв’язування задач у майбутній професійній діяльності – важливим є формування досвіду професійної діяльності вже в процесі навчання.

Методологічний компонент професійно-орієнтованої евристичної діяльності включає формування знань про наукові методи пізнання, які мають загальний характер та використовуються в різних галузях наук.

Організаційний аспект полягає в формуванні на уроках математики організаційних якостей майбутніх математиків, які забезпечуватимуть самостійне проходження майбутніми спеціалістами всіх етапів розв’язання професійних проблем.

У контексті сучасної освіти професійно-орієнтоване навчання здійснюється за допомогою створення у старшій школі профільних програм з основних дисциплін. Профільне навчання є одним із ключових напрямів модернізації та удосконалення системи освіти держави й передбачає реальне й планомірне оновлення школи старшого ступеня і має найбільшою мірою враховувати інтереси, нахили і здібності, можливості кожного учня, у тому числі з особливими освітніми потребами, у контексті соціального та професійного самовизначення і відповідності вимогам сучасного ринку праці. Такий підхід до організації освіти старшокласників не лише найповніше реалізує принцип особистісно-орієнтованого навчання, а й дає змогу створити найоптимальніші умови для їхнього професійного самовизначення та подальшої самореалізації.

Згідно з постановою Кабінету Міністрів України від 21.10.2013 № 1456 [42], ***профільне навчання*** – вид диференціації й індивідуалізації навчання, що дає змогу за рахунок змін у структурі, змісті й організації освітнього процесу повніше враховувати інтереси, нахили і здібності учнів, їх можливості, створювати умови для навчання старшокласників відповідно до їхніх освітніх і професійних інтересів і намірів щодо соціального і професійного самовизначення.

Профільне навчання у старшій школі здійснюється за напрямами:

- суспільно-гуманітарним (навчальні профілі: правовий, історико-правовий, економічний, філософський, педагогічний тощо);
- філологічним (українська чи іноземна філологія);
- природничо-математичним (математичний, фізико-математичний, хіміко-біологічний, хіміко-фізичний, біолого-географічний, еколого-географічний тощо);
- технологічним (виробничі технології, комп’ютерні технології);
- художньо-естетичним (хореографічний, музичний, театральний, мистецтвознавство тощо);
- спортивним (гімнастика, плавання, легка атлетика, туризм, спортивні ігри тощо).

В подальшому в нашій роботі будемо орієнтуватись на математичний профіль, метою якого є навчання майбутнього спеціаліста-математика.

Вибір математичного профілю навчання передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов’язаної з нею. Незважаючи на це, мотиваційний етап навчального процесу в таких класах не можна ігнорувати. Одним зі способів мотивації, які доцільно використовувати у математичних та фізико-математичних класах, є створення проблемної ситуації. Така ситуація може бути досить складною, вимагати серйозних математичних знань та значних зусиль для її розв’язування. При спробі знайти спосіб розв’язування проблеми учні стикаються з недостатністю наявних у них математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією.

Розвитку стійких пізнавальних математичних інтересів сприяють дібрані в системі різноманітні складні задачі з достатнім евристичним навантаженням, пов'язаний з темою історичний матеріал. Ефективним мотиваційним засобом є використання багатопрофільного подання предметного змісту математики: навчання, наприклад, математичному моделюванню може здійснюватися не тільки на уроках математики, а й у процесі навчання усім природничим предметам.

Згідно освітньо-кваліфікаційної характеристики напряму підготовки «Математика» учні мають володіти наступними ***евристичними вміннями*** [7, с.77]:

1. Вміти з'ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв'язки між ними.
2. Вміти бачити логічні прогалини в обґрунтуванні математичних фактів, побудові математичних теорій.
3. Вміти будувати приклади і контрприклади.
4. Вміти оцінювати перспективність розв'язування математичної задачі.
5. Вміти аналізувати до якої галузі математичних знань належить досліджуваний об'єкт і проблема, з ним пов'язана.
6. Вміти аналізувати взаємозв'язки досліджуваного математичного об'єкта з відомими об'єктами, а математичної проблеми – з науковими фактами.
7. Вміти встановлювати ізоморфність математичних об'єктів.
8. Вміти добирати ефективні методи чисельного аналізу математичних моделей різних задач.
9. Вміти інтерпретувати, аналізувати та узагальнювати результати розрахунків чисельного експерименту.
10. Вміти конструювати математичні об'єкти із заданими властивостями.

11. Вміти аналізувати відомі методи, способи, прийоми, засоби на їх придатність до розв'язування проблеми.
12. Вміти використовувати індукцію і дедукцію до розв'язування математичної проблеми.
13. Вміти використовувати аналітичний, синтетичний, аналітико-синтетичний методи розв'язування математичної проблеми.
14. Вміти використовувати методи пізнання (моделювання, аналіз, синтез, узагальнення, конкретизація, порівняння, аналогія тощо) для постановки математичної задачі.
15. Вміти знайти зв'язки і відношення між елементами системи і записати їх у математичній формі.
16. Вміти виділити системоутворюючі зв'язки в досліджуваній системі, запис яких у математичній формі і є шуканою математичною моделлю.
17. Вміти конструювати моделі проблемної (задачної) ситуації (предметні, схематичні, графічні, імітаційні та ін.).

На формування наведених евристичних вмінь необхідно спиратись сучасному вчителеві, який готовить учнів до майбутньої математичної діяльності. В нашій роботі ми розглянемо, як їх формувати через систему евристичних задач.

1.3. Стан навчання початкам аналізу в профільних класах

Традиційний шкільний курс математики, який склався до середини XVII ст., тобто в «долейбнівські» часи включав матеріал геометрії Евкліда у спрощеному і зменшеному обсязі, арифметику, алгебру, тригонометрію.

Уже в XIX ст. відомі математики і педагоги світу звертали увагу те, що шкільні програми не відповідають вимогам часу, і пропонували реформувати шкільну математичку освіту. Зокрема, М. В. Остроградський, П. Л. Чебишев, В. П. Шереметевський, А. Блюм закликали до введення в шкільний курс ідей математичного аналізу. Наприкінці XIX ст. розпочався міжнародний рух за реформу шкільної математичної освіти.

Вже у 1924 р. у Києві К. Ф. Лебединцев виступив перед учителями з циклом лекцій про вивчення початків математичного аналізу в школі. У написаний ним підручник з алгебри було включено відомості про границю і похідну. Проте зусилля країни були спрямовані на ліквідацію неписьменності, підготовку вчительських кадрів, а ідеї реформи так і не було реалізовано.

В Україні перебудова освіти почалася в 1962-1963 рр., коли було ліквідовано тригонометрію і введено курс «Алгебра і елементарні функції», куди входили теми «Границя функції», «Похідна». Проте з'ясувалось, що таке доповнення до традиційного курсу не вирішує проблеми його модернізації. Тому вже з 1964 р. почалась розробка нових програм [60, 402].

Комісію з питань визначення змісту шкільної математичної освіти очолили А. М. Колмогоров і О. І. Маркушевич, які дотримувались більш поміркованих поглядів на реформу. У 1968 р. для широкого обговорення проектів було опубліковано нову програму з математики для середньої школи.

Починаючи з 1968 р., нові програми, створені підручники неодноразово уточнювались і вдосконалювались.

На сьогодні учні 11-х класів навчаються за програмами наступних рівнів вивчення математики:

- рівень стандарту;
- академічний рівень;
- профільний рівень;
- поглиблений рівень.

Метою навчання математики на профільному рівні є «забезпечення загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для успішного вивчення природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, безпосередньо пов’язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів» [30, с.1].

За програмою профільного рівня навчання на розгляд теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» приділяється 50 академічних годин. Дана тема є великою за обсягом та має містити дві контрольні роботи, тому розділимо її на дві підтеми: «Похідна функції» і «Похідна та її застосування».

Вивчення учнями похідної базується на фундаментальному понятті математичного аналізу – «границя функції в точці». При вивченні теми на профільному рівні на розгляд цього поняття приділяється 15 академічних годин.

Нами було проаналізовано наступні методичні посібники [35], [5], [60], [29], в яких подано методичні рекомендації щодо викладання теми «Похідна та її застосування».

Кожен з авторів пропонує різні підходи щодо введення поняття похідної. Так, Парно І.К. перед вивченням похідної пропонує узагальнити та систематизувати знання учнів з теми «Функція», оскільки це поняття є базовим у математичному аналізі. Інші методисти пропонують спочатку розглянути поняття приросту аргументу і приросту функції, які є базовими у визначенні похідної.

Більшість авторів починають тему з задач, які приводять до поняття похідної. Парно розглядає лише одну з таких задач – це задача про миттєву швидкість при прямолінійному русі [35, с. 34]. До того ж пояснення даної задачі ним є нераціональним та займає багато часу, який можна було б приділити дослідженню інших важливих задач на похідну. Не виділяючи алгоритму знаходження похідної, Парно вводить наступне означення:

Похідною функції називають швидкість її зміни або границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли це останнє прямує до нуля [35, с. 43]. Дане означення є не досить коректним.

На відміну від Н.І. Парно, З.І. Слєпкань відмічає, що в курсі алгебри та початків аналізу слід вивчати обидві основні задачі, які приводять до поняття похідної: задачу про миттєву швидкість, до якої прийшов Ньютон, та про знаходження положення дотичної до графіка функції у певній точці,до якої прийшов Лейбніц. Проте, через обмеженість часу, частіше за все на уроці встигають розібрати одну з задач. Автор вважає, що перевагу необхідно надати дослідженню саме фізичного змісту похідної, оскільки учні вже знайомі з даною задачею ще з курсу фізики. При цьому в процесі розв'язування необхідно чітко виділити чотири кроки, які розкривають зміст похідної та наголосити, що дані кроки допоможуть знайти похідну будь-якої функції.

Розглядаючи задачу про миттєву швидкість необхідно зробити наголос на тому, що середня швидкість нерівномірного прямолінійного руху певною мірою характеризує його, проте не дає повної уяви про рух у певний момент часу. Щоб учні неформально сприймали означення миттєвої швидкості слід на конкретному прикладі з числовими даними показати, що значення середньої швидкості прямує до певної границі, яка і буде миттєвою швидкість в даний момент часу. На думку Мордкович О.Г., після цього варто зазначити, що аналогічно до знаходження миттєвої швидкості, можна досліджувати швидкість зміни будь-якого явища у хімії, фізиці. Наприклад, у хімії досліджують швидкість розчинення деякої речовини в іншій, у фізиці – швидкість зміни теплоємності певної речовини. З цього можна зробити висновок: різноманітні задачі з різних сфер знань зводяться до однієї й тієї самої моделі – похідної.

Слєпкань З.І. відмічає, що поняття похідної є узагальненням розв'язань усіх вище зазначених задач та пропонує наступне означення:

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту Δy функції до приросту Δx аргументу за умови, що приріст Δx аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Як стверджує у свої працях Слєпкань З.І., після введення означення необхідно на його основі знайти похідні основних функцій: $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = c$, де c – це стала. Однак перед цим важливо зазначити, що коли шукається похідна в певній точці, то вона як границя є певним числом. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну у кожній точці x з проміжку *(a;b)*, то ця похідна є також функцією.

На думку Слєпкань З.І., для глибшого усвідомлення учнями означення похідної доцільно відразу з'ясувати її механічний та геометричний зміст [60, с. 406]. Механічний зміст похідної випливає із задачі про миттєву швидкість, тому учні самостійно можуть дійти висновку, що миттєва швидкість є похідною від функції відстані в певний момент часу. Геометричний зміст похідної учні з'ясовують при дослідженні положення дотичної до графіку функції у певній точці.

На відміну від інших методистів, Бевз Г.П. вважає, що в шкільному курсі математики недоцільно розглядати одразу дві задачі фізичного та геометричного змісту, які приводять до поняття похідної. За один урок не можна розглянути у повному обсязі ці дві задачі, а розтягувати підготовчу роботу до введення похідної є нераціональним. Тому в школі варто спочатку розглянути детально одну задачу, на її основі ввести і закріпити поняття похідної, а вже потім розглядати її застосування до другої задачі.

Бевз Г.П. пропонує вводити поняття похідної через поняття дотичної до графіка функції: «пряму, з відрізком якої практично зливається графік функції f у деякому околі точки x_0 називають дотичною до графіка f в точці $(x_0; f(x_0))$. А кутовий коефіцієнт цієї дотичної називають похідною функції f в точці x_0»[5, с. 259]. Вже потім поняття похідної уточнюється: «***Похідною функції f в точці $\boldsymbol{x_0}$ називається число, до якого прямує відношення*** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ***при*** $\Delta x \to 0$». Дане означення не розкриває повного змісту похідної. На основі означення визначається алгоритм знаходження похідної будь-якої функції. Проте Бевз Г.П. наголошує, що необхідно пояснити учням, коли похідна функції є числом, а коли – функцією.

У програмі профільного рівня навчання зазначено, що поняття похідної доцільно вводити як узагальнення результатів відповідних прикладних задач. Виділивши головний прикладний зміст цього поняття ми його робимо більш доступним для сприймання учнів. До того ж, при формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює швидкість зміни будь-якого процесу з часом.

Найдоцільніше, на думку Г.П. Бевза, для відпрацювання алгоритму знаходження похідної розглянути похідну основних найчастіше вживаних функцій на основі означення. До таких він відносить наступні: $(x^m)'$, $(sinx)'$, $(cosx)'$, $(e^x)'$, $(lnx)'$, $(a^x)'$, $(\log_a x)'$.

Проте, на нашу думку, даних формул недостатньо для розв'язання завдань, особливо на профільному рівні навчання математиці.

Основні теореми, які вивчаються в темі «Похідна»:

- про неперервність диференційованої функції в точці;
- про похідну суми функцій;
- про похідну добутку функцій;
- про похідну частки двох функцій;
- про похідну степеневої функції;
- про похідну складеної функції.

Остання теорема дає можливість розширити системи вправ на обчислення похідних і застосування похідної до різноманітних задач.

Щодо вивчення зазначених теорем Слєпкань З.І. стверджує: «Важливо зауважити, що умова диференційованості функції f у точці x_0 є достатньою умовою неперервності функції в зазначеній точці. Проте неперервність функції f в точці x_0 є лише необхідною, але недостатньою умовою диференційованості функції в цій точці» [60, с. 407].

Для цього на уроці необхідно показати учням випадок, коли функція, наприклад $f(x) = |x|$, не має похідної в точці.

Доведення теорем про похідну суми, добутку та частки функцій краще проводити за алгоритмом знаходження похідної. За допомогою даного алгоритму можна одну з теорем надати для самостійного доведення учням. Перш ніж вивчати теорему про похідну складеної функції, необхідно на конкретному прикладі розглянути поняття складеної функції.

Строге доведення теореми про похідну складеної функції розглядається у курсі математики вищої школи, для учнів краще пропонувати доведення з певними обмеженнями.

У методичному посібнику [60, с. 406] відзначено, що на рівні обов'язкових вмінь застосування похідної у курсі алгебри і математичного аналізу є дослідження і побудова графіків функцій та розв'язування прикладних задач фізичного змісту. Але на факультативних заняттях, гуртках, у класах профільного рівня навчання математики слід ознайомити учнів з іншими важливими застосуваннями похідної функції. Зокрема, необхідно навчити учнів використовувати похідну до наближених обчислень, ввівши попередньо поняття диференціала, до доведення формули бінома Ньютона та виведення його коефіцієнтів. Цікавим є застосування похідної для дослідження коренів кубічного рівняння та наближеного розв'язування рівнянь (метод дотичних, метод ітерацій, тощо).

Слєпкань З.І. стверджує, що похідну функції здебільшого у курсі математики вищої школи застосовують для дослідження її на:

- монотонність;
- екстремум;
- досягнення найбільших та найменших значень;
- опуклість, угнутість та знаходження точок перегину.

Проте не менш важливим є дослідження функції на наявність асимптот за допомогою апарату похідної.

Перш ніж досліджувати функцію за допомогою похідної, на думку Бевза Г.П., варто спочатку уточнити означення дотичної до графіка диференційованої функції. У більшості підручників надається таке означення:

«Дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1, коли точка M_1, рухаючись по кривій, необмежено наближаються до точки M_0». Однак необхідно зауважити, що точка M_1 може наближатися до точки M_0 то з одного, то з другого боку. Якщо точка M_1, наближаючись по кривій до M_0 з одного боку, визначає одне граничне положення січної, а з другого – інше, то вважають, що в точці M_0 дана крива не має дотичної [5, с. 264].

Дослідження функцій на монотонність варто розпочинати з наочних прикладів, які б підводили під поняття монотонно зростаючої або монотонно спадаючої функції. Вчителеві варто наголосити, що функція може зростати або спадати не лише на всій області визначення, але й на певних проміжках. Яскравими прикладами слугують наступні функції: $y = x^2$ та $y = x^3$.

Монотонність даних функцій була доведена раніше за допомогою означень зростаючої та спадної функцій. Проте варто запропонувати учням задачу, коли необхідно порівняти кутові коефіцієнти дотичних в симетричних точках (що є відповідно похідною) на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$. Так, наприклад, кутовий коефіцієнт дотичної функції $y = x^2$ в точці $x = -2$ є від'ємним (оскільки дотична утворює з додатною віссю абсцис тупий кут), а в точці $x = 2$ є додатнім. Причому функція в даних точках відповідно спадає і зростає.

Аналогічно учні можуть самостійно провести дослідження критеріїв зростання та спадання функції $y = x^3$ за допомогою апарату похідної.

Вчитель перед учнями може поставити запитання: «Як за допомогою похідної встановити, чи є функція зростаючою або спадною без побудови графіка функції? Як відшукати проміжки зростання та спадання функції?». Тоді разом з учнями вчитель може сформулювати відповідні достатні умови, наголошуючи на тому, що вони є оберненими до тих висновків, які учні зробили під час дослідження графіків функцій $y = x^2$ та $y = x^3$.

Щодо доведення умов зростання і спадання функції є декілька методичних підходів. Зокрема, за допомогою означення функції за Коші, механічного тлумачення похідної як швидкості руху матеріальної точки, за допомогою формули Лагранжа тощо. Проте більш важливим сформувати в учнів вміння застосовувати дані положення на практиці аніж їх доведення.

Як стверджує Мордкович О.Г., під час вивчення початків математичного аналізу вчителеві важко викладати матеріал зі строгим логічним доведенням, оскільки багато необхідних понять з цієї області математики учням невідомі [29, с. 46]. Тому вчителеві варто замінити строгі доведення деяких тверджень на правдоподібні міркування, що базуються на фізичному або геометричному смислі похідної та підкріплюються наочними ілюстраціями.

Після вивчення теоретичних положень вчитель має надати учням алгоритм знаходження проміжків зростання та спадання функції за допомогою похідної, адже алгоритмічна діяльність є основою для розв’язання і творчих завдань. Не знаючи загального алгоритму учні не зможуть його видозмінювати відповідно до певних умов.

Пояснення дослідження функції на максимуми, мінімуми, найбільші та найменші значення вчитель має сформувати в учнів такі основні поняття як критична точка, екстремум, точка максимуму функції (мається на увазі її аргумент), максимум функції (значення функції), точка мінімуму функції, мінімум функції. Проте він має продемонструвати учням різні випадки поводження функції та зауважити, коли функція має максимум менший за мінімум. Навчання має відбуватися не лише за найбільш вживаними ситуаціями, але й за окремими випадками, які повністю характеризують зміст поняття. Так, наприклад, під час знаходження критичної точки функції вчитель має запропонувати учням ситуацію, коли похідна в цих точках не існує. Краще за все це надати у вигляді евристичної задачі.

Для дослідження функції на екстремуми учні мають засвоїти основні необхідну (теорема Ферма) і достатні умови існування екстремуму функції в точці. На думку Слєпкань З.І., доведення цих умов має відбуватися на основі механічного тлумачення функції $y = f(x)$ як закону руху матеріальної точки та похідної $y = f'(x)$ як швидкості її руху.

Для кращого усвідомлення учнями навчального матеріалу необхідно знову використати алгоритмічний підхід.

Слєпкань З.І. також виділяє інший спосіб дослідження функції на екстремум, який можна розглядати з учнями на факультативних заняттях. Він полягає у наступному: якщо $f'(x)$ неперервна і має скінченну кількість коренів, то їх корені заносять до таблиці. У кожному проміжку між цими коренями вибирають контрольну точку $x = c$ і обчислюють значення $f'(\text{c})$ в цій точці. Цей знак збігається зі знаком $f'(x)$ на всьому досліджуваному проміжку. Якщо функція $f'(x)$ має точки розриву або не визначена в деяких точках, то її також наводять у вигляді таблиці [60, с.414].

Оскільки задачі на знаходження проміжків зростання (спадання) й екстремумів функцій пов'язані між собою, то можна сформулювати алгоритм одночасного розв'язування цих обох задач, який зручно використовувати під час загального дослідження функцій і побудови їх графіків.

Узагальнюючи знання учнів з властивостей функцій та вивчених способів їх дослідження за допомогою апарату похідної, необхідно скласти загальний алгоритм дослідження графіку функції.

Обчислюючи найбільші та найменші значення в практичних задачах, слід навести учням правило-орієнтир розв'язування таких задач:

1) проаналізувати формулювання задачі; з'ясувати, найбільше (найменше) значення якої величини потрібно знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент) x і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію;

2) знайти найбільше та найменше значення цієї функції.

Часто в таких задачах може виявитися, що досліджувана величина залежить від двох змінних, наприклад x і t. У такому разі шукають співвідношення, яким пов'язані між собою ці змінні, і виражають одну змінну через іншу.

Слід звернути увагу учнів також на те, що в багатьох задачах уже за умовою можна визначити характер критичної точки, не досліджуючи знака похідної ліворуч і праворуч від неї. Проте в деяких задачах без такого дослідження обійтися неможливо. На думку Слєпкань З.І., доцільно розглянути задачі обох видів.

Щоб учні краще усвідомили значну роль поняття похідної, слід розв'язати з ними декілька задач про перебіг процесів, відмінних від механічних: теплових, хімічних, економічних і т. п.

Розглянемо, які методичні прийоми використовуються при викладенні матеріалу у навчальних підручниках [1], [32], [28], [59], [6].

У підручнику [1] навчальний матеріал виокремлюється за програмними рівнями: академічний та профільний. Введення до математичного аналізу відбувається через поняття границі, яке є базовим для поняття похідної.

Перш ніж розглядати задачі, що призводять до похідної, автори пропонують сформувати в учнів поняття приросту аргументу функції та приросту функції за допомогою наочних прикладів економічного змісту.

Підведення до поняття похідної базується на двох класичних задачах: про миттєву швидкість та про дотичну до графіка функції.

В задачі про миттєву швидкість, на відміну від методичних рекомендацій Слєпкань З.І., в якості вихідної формули приймається закон рівноприскореного руху: $s(t) = s_0 + v_0 + \frac{at_2}{2}$, де S_0 – координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 – початкова швидкість, a – прискорення. Окремо вводиться поняття миттєвої швидкості.

В підручнику [1] автори наводять наступне означення похідної: «Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля» [1, с. 53].

На нашу думку, таке означення є найбільш точним та повним, тому в подальшому будемо його використовувати на власних розроблених уроках. Проте воно характеризує похідну лише у певній точці та не звертає увагу учнів на те, що похідна від деякої функції також може бути функцією. Тому учням варто продемонструвати різноманітні приклади похідних.

На думку авторів підручника учням на профільному рівні навчання, окрім загальних положень похідної, треба розглянути приклади, коли функція є недиференційованою. Важливим є доведення теореми про зв'язок диференційованості та неперервності функції точки. Для глибшого усвідомлення змісту теореми, автори підручника розглядають обсяги даних понять за допомогою кругів Ейлера:

Рис. 1.1. Співвідношення понять «диференційовані функції» та «неперервні функції»

На першому етапі застосування знань учні відпрацьовують алгоритм знаходження похідної для найбільш загальних функцій, таких як $(kx+b)'$, x', b', $(x^n)'$, $\left(\frac{1}{x}\right)'$, $(x^r)'$ при $r \in Q$, $(\sqrt{x})'$, $(\sqrt[n]{x})'$, $(\sin x)'$, $(\cos x)'$. В подальшому використовуються виведенні значення похідних наведених функцій.

Досить повно розрита тема «Правила обчислення похідних», до яких автори віднесли наступні:

- похідна суми двох функцій (як наслідок, і скінченної кількості функцій);
- похідна добутку двох функцій;
- правило винесення сталої за знак похідної;
- похідна різниці двох функцій (як наслідок теореми про похідну суми двох функцій та про винесення сталої за знак похідної);
- похідна частки двох функцій;
- похідна складеної функції.

За допомогою правила похідної частки учні можуть самостійно обчислити похідні $(tg\ x)'$, $(ctg\ x)'$, представивши їх у вигляді:

$$(tg\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$(ctg\ x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

Завдання профільного рівня складності передбачають знаходження похідних функцій з модулем, розв’язання елементарних диференціальних рівнянь штучним способом, доведення властивостей функції (періодичність, парність) за допомогою апарату похідної, що вимагають від учнів високого рівня евристичної діяльності.

Для учнів профільних класів автори підручника пропонують для обов’язкового розгляду теореми Ферма, Ролля, Лагранжа та їх застосування для доведення нерівностей. Теоретичний матеріал підкріплюється нестандартними задачами з використанням різноманітних евристичних прийомів. Проте у програмі профільного рівня навчання не зазначено вивчення наведених вище теорем, оскільки вони вимагають від учнів високого рівня абстракції та знання основ математичного аналізу. Тому і використовувати ці теореми для доведення ознак зростання і спадання функцій не є раціональним.

Означення екстремуму функції наводиться за допомогою поняття «окіл точки», яке подається учням у дещо спрощеному варіанті: «Інтервал (a, b), який містить точку x_0 називається ***околом*** точки x_0» [1, с.108].

Автори підручника вводять наступну важливу теорему: «Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0». Майбутні математики можуть самостійно довести цю теорему, використовуючи теорему Ферма. Проте наведена теорема дає необхідну, але не достатню умову існування екстремуму в даній точці.

У підручнику зауважено, що точка екстремуму не обов’язково є внутрішньою точкою області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує. Саме тому виникає потреба у розширенні поняття «екстремум», яке реалізується у понятті «критична точка». Кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму. На основі наведених тверджень формулюються теореми-ознаки точки максимуму функції та точки мінімуму функцій. Доведення цих теорем учні мають проводити, користуючись теоремою Лагранжа.

Мерзляк А.Г. постійно акцентує увагу учнів на практичному використанні похідної. Так, наприклад, під час вивчення теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку» він звертається до учнів: «Як добитися найменшої маси конструкції? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару на торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими?» [1, с. 121]. Саме тут пропонується значна кількість текстових задач, розв’язання яких приводить до використання похідної.

Поняття другої похідної вводиться на основі закону руху матеріальної точки. Якщо раніше розглядалась миттєва швидкість як похідна закону руху, то тепер – прискорення руху як похідна миттєвої швидкості. Таким чином, $a(t) = v'(t) = \left(s'(t)\right)' = s''(t)$. Узагальнюючи вище сказане, вводять означення другої похідної функції $y = f(x)$. Поняття другої похідної функції є фундаментальним для визначення опуклості функції. В зв’язку з цим формулюються теореми-ознаки опуклості функції вниз і вгору. Доведення даних теорем вивчають з учнями профільних класів навчання математики, причому одну з них можна дати для самостійного опрацювання. Розглядаючи конкретні приклади, учні можуть прийти до висновку, що деякі такі функції мають особливу точку – точку перегину.

Узагальнюючи всі відомі властивості функцій та шляхи їх дослідження за допомогою похідної, вчитель разом з учнями може скласти відповідний алгоритм. План дослідження може змінюватись в залежності від складності функції. Важливо при дослідженні функції виявити такі її властивості, які дозволяють коректно побудувати графік.

В даному підручнику майже не розглядаються асимптоти графіка функції, не має означення асимптоти та достатньої кількості вправ для відпрацювання цього поняття, що є недоліком, особливо у класах профільного рівня вивчення математики.

У підручнику [32] поняття похідної вводиться за такою план-схемою:

1. Поняття приросту аргументу і приросту функції в точці x_0.
2. Запис неперервності функції через прирости аргументу і функції.
3. Задачі, які приводять до поняття похідної.
   3.1. Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої.
   3.2. Дотична до графіка функції.
4. Означення похідної.
5. Похідні деяких елементарних функцій.
6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$.
7. Механічний зміст похідної.
8. Зв’язок між диференційовністю й неперервністю функції.

На нашу думку, даний план повністю відповідає темі та розкриває зміст поняття похідної. Означення похідної, запропоноване Неліним Є.П.: «Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля» [32, с. 21]. Такий підхід не дає точного уявлення про похідну, оскільки не визначає її граничного відношення.

Для доведення похідних елементарних функцій автор пропонує не користуватися властивостями границі функції (оскільки вони ще ним не введені), а використовувати лише поняття приросту аргументу і приросту функції. На нашу думку це є недоцільним, адже спочатку необхідно сформувати в учнів поняття границі та всі пов’язані з ним теоретичні відомості, які знадобляться для дослідження похідної. Таким чином автор порушує логіку викладу матеріалу.

При розкритті питання «Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції» автор доцільно зауважив, що кут дотичної відлічують від додатного напрямку осі *Ox* проти годинникової стрілки. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямком осі *Ox* гострий кут φ, то $f'(x_0) > 0$, якщо тупий кут - $f'(x_0) < 0$, а якщо дотична паралельна вісі *Ox* або збігається з нею, то $f'(x_0) = 0$. Дане твердження є пропедевтикою до теми «Ознаки зростання і спадання функції».

Система вправ до кожної з тем не відповідає вимогам профільного рівня та містить недостатню кількість завдань. Проте існують деякі завдання, які вимагають евристичного підходу до їх розв’язання.

На відміну від підручника [1], у підручнику Неліна Є.П. наведено значно менше теорем та їх доведень. Так, наприклад, відсутнє правило знаходження похідної різниці двох функцій, хоча воно й є інтуїтивно зрозумілим для учнів. Також, на думку автора, учнів не варто знайомити з теоремами Ферма, Ролля. Формула Лагранжа вводиться без строгого доведення, а тільки використовують її геометричну ілюстрацію, оскільки в подальшому довести ознаки зростання і спадання функції без неї є досить складним.

План-схема дослідження властивостей функції та побудови її графіка подана у вигляді таблиці, проте перед темою «Найбільше і найменше значення функції на відрізку». Це порушує логіку викладу матеріалу, оскільки побудова графіка функції має бути узагальненням всього вивченого про функцію та її похідну, тому, на нашу думку, таке планування є не досить коректним.

Окремо автор акцентує увагу на розв’язуванні різноманітних прикладних задач. Розв’язування практичних задач методами математики, як правило, містить основних три етапи:

1) формалізацію, тобто створення математичної моделі задачі (переклад умови задачі на мову математики);
2) розв’язування складеної математичної задачі;
3) інтерпретацію знайденого розв’язку.

На відміну від підручника Мерзляка А.Г., Нелін Є.П.детально розробив тему «Асимптоти графіка функції», виокремивши три їх види: вертикальна, горизонтальна та похила; ввів похідні обернених тригонометричних функцій; розширив похідні вищих порядків, ніж третій; розробив окрему тему «Застосування похідної до розв’язування рівнянь і нерівностей».

Проаналізувавши підручники [28], [69], [6], ми прийшли до висновку, що вони не розширюють теоретичного матеріалу підручників [1] і [32], проте містять багато нестандартних задач.

1.4. Методичні вимоги щодо узагальнення і систематизації знань

Для евристичного навчання характерним є завдання цілей через навчальну діяльність учнів. Так як професійно-орієнтована евристична діяльність, як і навчальна діяльність, характеризується виконанням визначених дій, то трансформація цілей у дії дозволяє здійснити діагностику та управління процесом засвоєння знань і умінь учнів, їхнім розвитком.

Оскільки знання неможливі без дій, тому необхідно щоб цілі фіксували не тільки суму знань, необхідних для оволодіння змістом, а й описували уміння, якими повинен оволодіти учень у процесі вивчення конкретної теми. Тому поряд з уміннями, відповідними кожній темі уроку математики, необхідно формувати також і виділені нами евристичні уміння.

Доповнення опису умінь системою конкретних завдань, які відображають ці уміння, надасть можливість визначити рівень сформованості евристичних умінь – низький, середній, високий – кожного учня та здійснити розвиток професійно-орієнтованої евристичної діяльності для кожного учня до більш високого рівня, що сприятиме реалізації диференційованого підходу до навчання.

У зв’язку з цим у зміст навчання вищої математики на практичних заняттях ми включаємо різні евристичні задачі та системи евристично-орієнтованих задач.

Система евристично-орієнтованих задач повинна задовольняти наступним вимогам [57, с.45]:

1) повноті представлення евристик;

2) доцільного співвідношення між евристичними та логічними компонентами на кожному етапі навчання;

3) можливого усвідомлення головних математичних ідей шляхом виведення інтуїтивних міркувань на рівень усвідомлених логічних процесів за схемою “Передзнання – Формалізація – Післязнання”, забезпечення мотивації цього переходу;

4) забезпечення широти орієнтовної діяльності;

5) спрямованість на “відкриття”.

Крім того, формування в учнів евристичної діяльності вимагає наявності вчителя, який [22, с. 58]:

- спонукає учнів до формулювання ідей та уявлень, висловлювання їх у явному вигляді;
- створює проблемні ситуації, які породжують протиріччя з уявленнями учнів;
- спонукає учнів висувати альтернативні пояснення, припущення, здогадки;
- забезпечує можливість досліджувати припущення у вільній та ненапруженій обстановці шляхом обговорення в невеликих групах;
- дає можливість застосовувати нові уявлення до широкого кола явищ, ситуацій;
- передчасно не повідомляє “правильні уявлення”, оскільки учні можуть виявити нездатність застосувати ці уявлення, працювати з ними.

В подальшому будемо спиратися на класифікацію методів навчання, запропоновану І.Я.Лернером та М.Н.Скаткіним [21, с.11-17], з метою виділення серед них тих, які більшою, ніж інші, мірою сприяють формуванню професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів.

Пояснювально-ілюстративний метод полягає в тому, що вчитель повідомляє готову інформацію різними способами, а учні її сприймають, усвідомлюють та фіксують у пам'яті.

Також учні залишаються в рамках репродуктивного мислення під час використання вчителем *репродуктивного методу*. До нього відносять застосування вивченого на основі зразка чи правила. Тому під час використання даного методу необхідною є наявність систем вправ, які б забезпечували виконання дій учнями за інструкціями, правилами у аналогічних, подібних з вказаним зразком ситуаціях, а також тих, які забезпечують контроль та самоконтроль діяльності учнів. Цей метод формує операційний фундамент для виконання учнями у майбутньому евристичної діяльності.

Проблемні ситуації, які створюються на уроках під час формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності, повинні сприяти більш глибокому розумінню та кращому запам'ятанню теорії, викорененню формалізму в засвоєнні знань, викликати великий емоціональний ефект. Самостійна реалізація учнями деякої частини розв'язання проблеми, що відбувається після пояснення вчителя, сприятиме опануванню учнями новими способами діяльності, в тому числі евристичної.

У навчанні учнів самостійно здійснювати окремі кроки розв'язання найбільш ефективним є *частково-пошуковий метод*. Він повинен передбачати активне включення учнів до пошуку розв'язання поставленої задачі або під керівництвом вчителя, або на основі використання евристичних програм та вказівок. Процес мислення при цьому набуває продуктивного характеру, але поетапно спрямовується та контролюється або вчителем, або учнями.

Евристична бесіда, як один з різновидів даного методу, передбачає цілу низку запитань, які може ставити вчитель, учні, комп'ютерна програма. При цьому важливо, щоб питання стимулювали думку, а не підказувати ідею розв'язання. Крім того, в процесі постановки серії запитань необхідно поступово знижувати рівень проблемності задач, щоб вони були логічно пов’язані, стимулювали як логічні так і інтуїтивні процедури мислення, сприяли постановці допоміжних задач, кожне нове запитання приводило до нового, несподіваного погляду на задачу.

Ініціатива, самостійність, творчий пошук у повній мірі розкриваються під час використання *дослідницького методу*. Дослідницький метод полягає в організації пошукової евристичної діяльності учнів під час розв’язання нових для них проблем.

У процесі виконання дослідницьких завдань учні можуть отримувати усний чи письмовий інструктаж перед виконанням завдання. Але найбільшою мірою самостійність учнів буде досягатися під час виконання ними індивідуальних завдань дослідницького характеру, які передбачають роботу з літературою, комп’ютерною програмою та іншими засобами.

Крім традиційних методів навчання, виокремлюють евристичні методи: методи суттєвого, символьного та образного бачення; метод евристичних питань; метод фактів, метод евристичного дослідження; метод конструювання понять; метод гіпотез; метод прогнозування; метод випадковостей помилок та асоціацій; метод конструювання теорій; метод “мозкового штурму”; метод синектики; морфологічного ящика. Розглянемо деякі з тих, які забезпечать формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів.

Метод багатомірних матриць (морфологічного ящика) заснований на тому, що нове дуже часто являє собою іншу комбінацію відомих елементів з невідомими [22, с. 72]. Цей метод дозволяє складати такі комбінації цілеспрямовано та системно. Від учнів необхідно вимагати повного переліку ознак (характеристик, ідей, процесів) з метою їх системного аналізу; глибокого, різностороннього аналізу отриманих комбінацій елементів. Наприклад, під час дослідження функції учнями з’ясовуються такі елементи поведінки як область визначеність, множина значень, обмеженість, монотонність, диференційованість та ін. Утворення комбінацій з деяких з цих елементів може привести до постановки питань. Чи вірно, що: функція визначена на інтервалі та диференційована на ньому є обмеженою?

Основна задача методу колективної ***“мозкової атаки”*** або ***“мозкового штурму”*** – зібрати як найбільше різних ідей. Основними правилами методу є абсолютна заборона критики ідей, запропонованих учасниками, схвалення всіх можливих реплік, ідей, аналіз виниклих ситуацій й оцінка ідей, генерація контрідей. Доцільним є використання письмового “мозкового штурму” (задача формулюється письмово; відсутність взаємного впливу учасників) [34, с. 221].

Метод синектики базується на методі „Мозкового штурму”, різного виду аналогіях, інверсіях, асоціаціях. Спочатку обговорюються загальні ознаки проблеми, відсіюються перші розв’язання, генеруються та розвиваються аналогії, використовуються аналогії для розуміння проблеми, обираються альтернативи, шукаються нові аналогії, потім відбувається „повернення” до проблеми [34, 250].

Активізації професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів сприятиме дотримання вчителем при організації уроків таких методичних вимог:

1) заняття повинні відповідати загальним ідеям і спрямованості змісту теми;

2) на заняттях учні повинні постійно відчувати зростання складності завдань (від алгоритмічних до евристичних задач);

3) необхідно, щоб учні постійно були зайняті напруженим (самостійним, або груповим, або колективним) пошуком розв’язання проблем, мали можливість виявити свої творчість, активність, самостійність, здібність реалізувати евристичні уміння;

4) повторення матеріалу повинно відбуватися варіантно, під новим кутом зору, з точки зору вже вивченого, виключати нудне повторення у вигляді декларування теоретичних фактів з конспекту, підручника;

5) вчитель повинен стимулювати творчість та ініціативу, виступаючи в ролі консультанта для тих, кому потрібна допомога, використовуючи активні методи, різноманітні засоби навчання;

6) врахування вчителем індивідуальних особливостей, інтересів кожного учня, професійних інтересів тощо [59, с. 198].

Сформульовані нами вимоги щодо використання вчителем евристичних методів, засобів і форм навчання дозволяють покращити якість освіти учнів 11-х класів, спрямувавши її у творчу течію, розвинути не тільки творчі здібності, але і здатність до відкриття нових знань.

Висновки до розділу I

Нами було створено необхідне підґрунтя для вирішення головного завдання – розробки окремих компонентів методичної системи формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів 11-х класів. Виявлено, що це є необхідним, оскільки:

- професійно-орієнтована евристична діяльність відіграє значну роль у підготовці майбутнього фахівця та його математичній підготовці;
- творче мислення характеризується наявністю в учнів евристичних умінь, формуванню та розвитку яких найбільш сприяють заняття з математики;
- навчально-пізнавальна евристична діяльність є найбільш оптимальним видом діяльності для формування евристичних умінь, професійно-орієнтованої евристичної діяльності заняттях з математики;
- найбільш раціональною методичною системою для формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності є евристичне навчання.

В процесі дослідження нами було виокремлено та означено основні поняття, на яких будується евристичне навчання: евристика, евристична діяльність, професійно-орієнтовна евристична діяльність, продуктом якої є евристичні вміння.

Під професійно-орієнтованими евристичними вміння ми розуміємо такі вміння, які сприятимуть розв’язанню учнями у їх майбутній професійній діяльності нетипових задач, пошуку нових проблем та їх творчому розв’язанню, що, як правило, приводить до інновацій.

У зв'язку з цим нами було виокремлено основні евристичні вміння, якими має володіти майбутній математик.

Також нами були встановлені методичні вимоги до формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

2.1. Логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування»

Покажемо практичну реалізацію формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Введення поняття похідної проводиться на основі евристичного прийому «підведення під поняття» за допомогою класичних задач: про миттєву швидкість та про дотичну до графіка кривої.

Задачі, що приводять до поняття похідної.

Задача 1. Знайти швидкість тіла, яке вільно падає, в момент часу $t_0 = 4c$, що минув від початку руху.

Вчитель. Вам з курсу фізики відомо, за якою формулою знаходять швидкість вільного падіння?

Учні. Швидкість знаходять за формулою $v = gt$.

Вчитель. Щоб розкрити математичний зміст цієї формули, підійдемо до цієї задачі так.

Запишіть закон руху вільно падаючого тіла.

Учні. Закон руху вільно падаючого тіла виражається формулою

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

Вчитель.

1. Надамо аргументу $t_0 = 4c$ приросту $\Delta t = 1$с і визначимо шлях, який пройшло тіло за час $t_0 + \Delta t = (4+1)c = 5c$.

Щоб спростити розрахунки, покладемо $\frac{g}{2} \approx 5м/c^2$:

$$S(t_0 + \Delta t) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} = 5 \cdot 5^2 = 125(м)$$
.

2. Визначимо шлях, який пройшло тіло за проміжок часу $\Delta t = 1c$, тобто за проміжок часу від $t_0 = 4c$ до $t_1 = t_0 + \Delta t = 5c$. Цей шлях становитиме приріст $\Delta S(t_0)$ функції $S(t) = \frac{gt^2}{2} = 5t^2$.

$$\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - \Delta S(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 - 5t^2 = 5t_0 + 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2 = 5\Delta t(2t_0 + \Delta t) =$$
$$= 125 - 80 = 45(м)$$

3. Знайдемо середню швидкість за проміжок часу $\Delta t = 1c$.

$$v_{сер} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \frac{5\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = 5(2t_0 + \Delta t) = 45(м/c)$$

4. Нехай Δt прямує до нуля. Обчислимо середню швидкість за проміжки часу Δt (в секундах), що дорівнюють відповідно 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …, використовуючи при цьому знайдену в третьому кроці формулу середньої швидкості $v_{сер} = 5(2t_0 + \Delta t)$.

Очевидно, чим менший проміжок часу Δt, тим менше середня швидкість відрізнятиметься від швидкості вільно падаючого тіла в момент часу $t_0 = 4c$.

Результат обчислень зручно подати у вигляді такої заздалегідь заготованої таблиці:

Таблиця 2.1

t_0	$S(t_0)$	Δt	$t_0 + \Delta t$	$S(t_0 + \Delta t)$	$\Delta S(t_0)$	$v_{сер} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$
4	80	1	5	125	45	45
4	80	0,1	4,1	84,05	4,05	40,5
4	80	0,01	4,01	80,4005	0,4005	40,05
4	80	0,001	4,001	80,40005	0,040005	40,005
4	80	0,0001	4,0001	80,00400005	0,00400005	40,0005

Отже, середня швидкість $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ є функцією приросту аргументу Δt. Коли $\Delta t \to 0$ і $\Delta S(t_0) \to 0$, то границею значення середньої швидкості є число 40, яке й природно взяти за шукане значення швидкості в момент часу $t_0 = 4c$.

Вчитель. Хочу звернути вашу увагу на те, що, розв'язуючи цю задачу, ми виконували такі чотири кроки:

1. Надати значенню аргументу t_0 приросту Δt і знайти значення функції, що відповідає новому значенню аргументу $t_0 + \Delta t$:

$$S(t_0 + \Delta t) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2}.$$

2. Знайти приріст $\Delta S(t_0)$ функції $S(t) = \frac{gt^2}{2}$:

$$\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - \Delta S(t_0) = \frac{g \cdot \Delta t(2t_0 + \Delta t)}{2}.$$

3. Знайти відношення $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$, яке дорівнює середній швидкості зміни функції, що відповідає зміні аргументу за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$:

$$\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \frac{g\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{g(2t_0 + \Delta t)}{2}.$$

4. Знайти границю відношення $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, тобто обчислити

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(2t_0 + \Delta t)}{2} = gt_0.$$

Учні за вчителем записують алгоритм знаходження миттєвої швидкості.

Отже, $v = gt_0$. Дістали відому з курсу фізики формулу миттєвої швидкості вільно падаючого тіла в момент часу t_0.

Слід зауважити, що для вибраного значення t_0 при виконанні граничного переходу на четвертому кроці змінною є лише Δt. Проте, значення границі залежить від вибору t_0. Справді, коли $t_0 = 4c$, то $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = gt_0 = 40 м/с$, а коли $t_1 = 5{,}2c$, то $v = 52 м/с$, де $g \approx 10 м/с^2$.

Після вивчення даної теми учні повинні чітко розуміти розв'язок задачі про миттєву швидкість, вміти виділяти чотири кроки задачі.

Аналогічно вводиться до розгляду задача про дотичну до графіка функції.

Вчитель. Чи ви знаєте, що таке дотична до графіка функції?

Учні. Так, це пряма, що має с графіком функції одну спільну точку.

Вчитель. Тоді у параболи $y = x^2$ вісь ординат є також дотичною до графіка функції (рис. 2.1)?

Учні. Ні. Вона його перетинає.

Вчитель. Отже, знайоме раніше з курсу геометрії означення дотичної до кола не можна застосовувати до графіка функції.

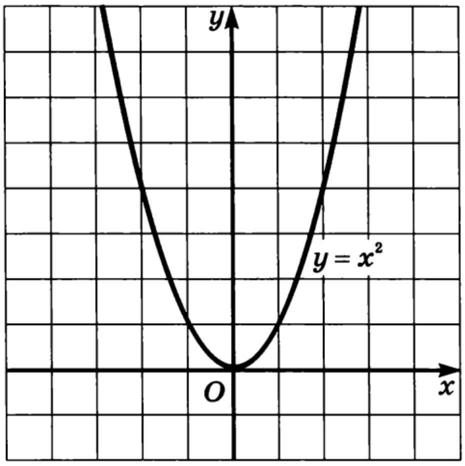


Рис. 2.1

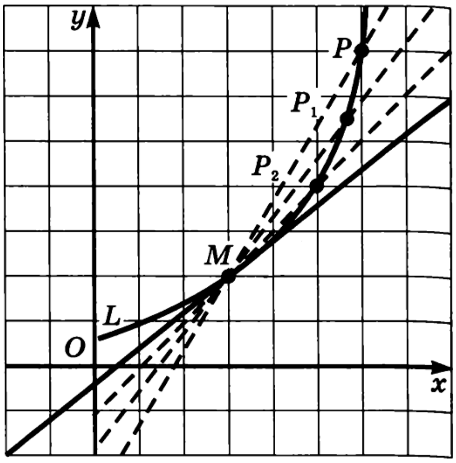


Рис. 2.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M і P – деякі не співпадаючі точки, які лежать на кривій L. Проведемо пряму MP, яку назвемо січною (рис. 2.2). Наблизимо точку P до точки M по кривій L. Тоді січна MP буде наближатись до свого граничного положення.

Дотичною до графіка функції в точці М називається граничне положення січної MP, коли точка P, рухаючись по кривій, наближається до точки M.

Вчитель. Означення дотичної до кривої зовсім не означає, що дотична повинна мати з кривою єдину спільну точку (як, наприклад, у випадку кола). Їх може бути кілька або нескінчене число.

Задача 2. Дано графік функції $y = f(x)$. На ньому обрана точка $M(a; f(a))$, в якій проведена дотична до графіка функції (припустимо, що вона існує). Знайти кутовий коефіцієнт дотичної.

Вчитель. Дотична до графіка функції є прямою. Як можна задати пряму у системі координат?

Учні. Пряму можна задати за допомогою координат двох точок, що їй належать, за допомогою кутового коефіцієнта тощо.

Вчитель. Так, спробуємо визначити дотичну до графіка функції за допомогою кутового коефіцієнта: $y = kx + b$.

Як нам відомо з курсу алгебри, кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута нахилу прямої. Яким чином ми його можемо знайти за допомогою приростів аргументу і функції?

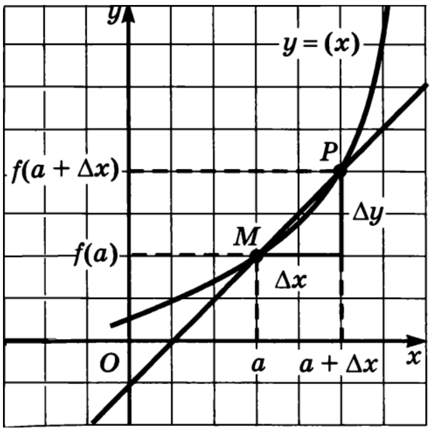


Рис. 2.3

Вчитель. Надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку (рис. 2.3) точку P з абсцисою $a + \Delta x$. Тоді ордината точки дорівнює $f(a + \Delta x)$, а приріст функції $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Як визначити кутовий коефіцієнт січної *MP*?

Учні. Кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута нахилу та визначається за формулою:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Вчитель. Проте на даному етапі ми знайшли кутовий коефіцієнт січної. Як же знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці *M*?

Учні. Необхідно наблизити точку *P* до точки *M*, спрямувавши приріст аргументу Δx до нуля. Щоб обчислити точне значення кутового коефіцієнту, необхідно знайти його граничне значення.

Вчитель. Дійсно, отримаємо формулу обчислення кутового коефіцієнту дотичної до графіка функції:

$$k_{\text{дот}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Отже, для розв’язання задачі ми виконали наступні кроки:

1. Надати значенню аргументу приросту Δx і знайти значення функції, що відповідає новому значенню аргументу $f(a + \Delta x)$.

2. Знайти приріст функції Δy.

3. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до вісі абсцис.

4. Знайти границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто обчислити $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Корисно звернути увагу учнів на те, що аналогічно розв’язують численні задачі фізики, хімії, математики та інших наук.

Поняття похідної. Похідні елементарних функцій.

Вчитель. У всіх таких задачах доводиться визначати швидкість зміни значень певних функцій в залежності від зміни аргументу. В зв’язку з потребою узагальнити способи розв’язування подібних задач і було введене в математику поняття похідної функції $y = f(x)$ як швидкості зміни значень залежно від зміни аргументу x.

Означення похідної формулюється на основі підручника [1]. На основі розглянутих задач, що приводять до поняття похідної, учні можуть самостійно скласти алгоритм знаходження похідної функції в точці x_0:

1) надати в точці x_0 аргументу приріст Δx;
2) знайти відповідний приріст Δf функції: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
3) знайти відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
4) з’ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Примітка. При обчисленнях похідної перший пункт алгоритму іноді опускається.

Коли функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці x проміжку $[a;b]$, то кожному значенню x відповідатиме певне значення похідної. Доцільно нагадати учням, що в задачі про миттєву швидкість двом різним значенням часу $t_0 = 4\ c$ і $t_1 = 5{,}2\ c$ відповідали різні значення миттєвої швидкості $v_0 = 40$ м$/c$ і $v_0 = 52$ м$/c$, де миттєва швидкість є похідною функції $S(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Отже, похідна функція $y = f(x)$ у такому разі є теж функцією аргументу x на відрізку $[a;b]$, яку позначають символами f' або $y' = f(x)'$. Коли функцію задано формулою, наприклад $y = x^2$, то її похідну позначають символом $(x^2)'$. Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають ***диференційовною*** в точці x_0.

Учні профільного рівня навчання мають розуміти, що існують функції, які не мають похідної в деякій точці. Вчителеві необхідно створити евристичну ситуацію, в ході розв'язання якої учні б самостійно прийшли до такого висновку.

Задача 3. За означенням знайти похідну функції $f(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$.

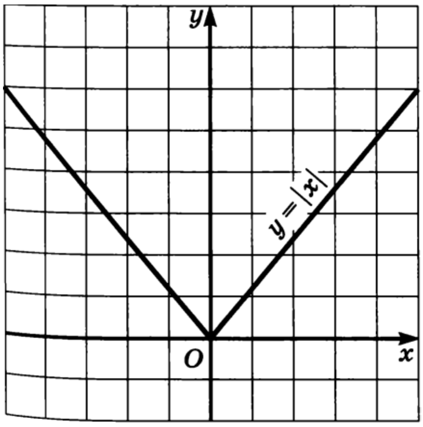


Рис. 2.4

Розв'язання:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - x_0;$

$\Delta f = |0 + \Delta x| - 0 = |\Delta x|;$

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x};$

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Учні. З раніше вивченого про границю функції в точці нам відомо, що отримана границя не існує. Отже, за означенням, функція $f(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$ похідної не має.

Вчитель. Виникає питання про зв'язок неперервності і диференційовності функції. Чи завжди диференційовна функція є неперервною і навпаки?

Учні. З розглянутого прикладу можна зробити висновок, що не завжди неперервна функція є диференційованою.

Вчитель. В курсі математичного аналізу виокремлюють теорему: «Якщо функція f є диференційованою в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці».

Доведення теореми варто запропонувати учням для самостійної роботи.

Далі роботу можна організувати так, щоб один учень біля дошки, а решта самостійно в зошитах, провівши всі кроки міркувань, знайшли похідну функції $f(x) = 5x^2 - 2x$.

Наступний урок треба присвятити розв'язанню прикладів на обчислення похідних за означенням. Ми пропонуємо знайти похідні основних елементарних функцій та по групувати їх у таблицю. На профільному рівні вивчення математики обов'язково необхідно розглянути з учнями доведення похідних функцій $\sin x$ і $\cos x$ (використовуючи першу чудову границю).

Розглянемо створення евристичної ситуації під час виведення формули похідної степеневої функції, яка формує в учнів професійно-орієнтоване евристичне вміння «вміти знайти зв'язки і відношення між елементами системи і записати їх у математичній формі».

Вчитель. Нам відомо, що $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, а як знайти похідні функції $y = x^5$, $y = x^{20}$ тощо?

Обчислення похідної степеневої функції безпосередньо за означенням вимагає багато часу. Як же можна обчислити ці похідні простішим способом, чи помітили ви якусь закономірність при знаходженні похідної функцій $y = x^2$ та $y = x^3$

Учні висувають свої гіпотези: при обчисленні похідної функції $y = x^2$ використовувалась формула квадрата суми двох виразів $(a+b)^2$, а при обчисленні похідної функції $y = x^3$ – куб суми двох виразів $(a+b)^3$. А формул суми двох виразів з показником більшим від 3 нам невідомо.

Вчитель. Спочатку розглянемо степеневу функцію з натуральним показником.

Маємо функцію $y = u^n$, де $u = f(x)$, а n – натуральне число. Функцію $y = u^n$ можна подати у вигляді добутку п співмножників:

$$y = \overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n \quad раз}.$$

Застосувавши правило похідної добутку отримаємо:

$$y = u^n = \overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n \quad раз};\ y' = \left(\overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n \quad раз}\right)' = u' \cdot \overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n-1 \quad раз} + u \cdot u' \cdot \overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n-2 \quad раз} + \ldots + \overbrace{u \cdot u \ldots u}^{n-1 \quad раз} \cdot u' =$$
$$= u'u^{n-1} + u' \cdot u^{n-1} + \ldots + u'u^{n-1} = nu^{n-1} \cdot u'.$$

Отже, $y = (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$. Треба звернути увагу учнів на окремий випадок формули попередньої формули, коли, $u = x$, тобто, коли основою степеня є аргумент x. У цьому випадку дістанемо формулу $y = (x^n)' = nx^{n-1}$.

Для значень $n = 1, 2, 3$ цю формулу ми вже виводили безпосереднім диференціюванням.

Вчитель. Чи справедлива ця формула також для степеневої функції з будь-яким дійсним показником (дробовим, від'ємним, ірраціональним)?

Виникає проблемна ситуація, учні висувають свої гіпотези, вчитель підкреслює, що доведення цього твердження не вимагається програмою і пропонує учням перевірити справедливість формули $y = (x^n)' = nx^{n-1}$ для значень $n = \frac{1}{2}; -2$, які часто зустрічаються при обчисленнях. Учні перевіряють результати користуючись означенням похідної і за формулою.

а) Нехай $n = \frac{1}{2}$. Маємо функцію $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

За формулою знайдемо: $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Перевіримо цей результат, застосовуючи до даної функції означення похідної.

Маємо:

1) $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$;

2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

4) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Дістали той самий результат.

б) Нехай $n = -2$, тобто дано функцію $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Застосовуючи правило диференціювання степеня, дістанемо такий результат: $y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Можна запропонувати учням перевірити цей результат за означенням похідної функції.

Маємо:

1) $y + \Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^2}$;

2) $\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{x^2(x + \Delta x)^2}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{2}{x^3}$.

Як бачимо результати збіглися.

Механічний та геометричний зміст похідної.

Вчитель. Задачі, які приводять до поняття похідної, відображають її механічний та геометричний зміст. Як ви вважаєте, в чому він полягає?

Учні. Фізичний зміст похідної полягає у знаходженні миттєвої швидкості у момент часу t_0, що виражається у формулі: $v(t_0) = S'(t_0)$.

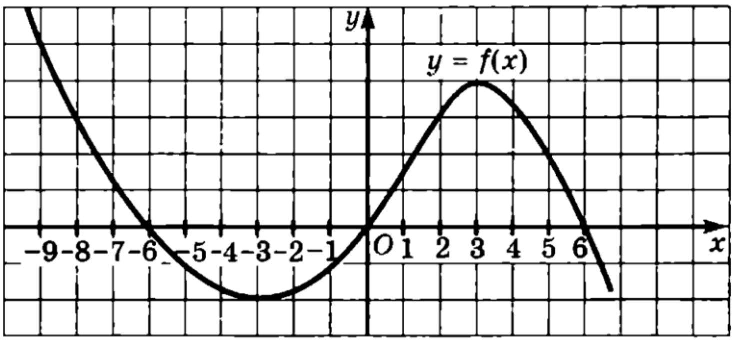
Геометричний зміст похідної полягає у знаходженні кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0: $k(x_0) = f'(x_0)$.

Для формування професійно-орієнтованих евристичних вмінь майбутніх математиків з даної теми ми пропонуємо наступні задачі.

1. Функція $y = f(x)$ задана графіком. Порівняйте значення похідної у вказаних точках:

   а) $f'(-7)$ та $f'(-2)$; б) $f'(-9)$ та $f'(0)$;

   в) $f'(-4)$ та $f'(2)$; г) $f'(-1)$ та $f'(5)$.



2. Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

   а) $f(x) = x^3$, $k = 3$; в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;

   б) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$; г) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

3. Рух двох матеріальних точок вздовж прямої задано рівняннями $S_1 = 4t^2 + 2$, $S_2 = 3t^2 + 4t - 1$ (S_1, S_2 – в метрах, t – в секундах). Знайти швидкість руху точок у ті моменти, коли відстані, які вони пройшли, однакові.

4. Тіло, випущене вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 5t^2 + 4$ (h – в метрах, t – в секундах). Знайти швидкість тіла в момент зіткнення з землею.

5. Парашутист летить по частині параболи $y = x^2 - 4$ відносно орієнтира, який розміщений у початку координат. Під яким кутом він приземлиться?

Правила обчислення похідних

У класах профільного навчання за програмою вивчають правила похідних суми, добутку, частки двох функцій та похідну складеної функції. З учнями на уроці достатньо розглянути лише одне з них, а інші дати для самостійного доведення використовуючи евристичний прийом – аналогію.

Теорема [похідна суми]. У тих точках, у яких є диференційовними функції $f(x)$ і $g(x)$, також є диференційовною функція $f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$.

Доведення.

Доведення теореми відбувається аналітичним методом на основі означення похідної.

Нехай x_0 – довільна точка , у якій функції *f* і g є диференційовними.

1. Задамо приріст аргументу функції Δx.

2. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0. Маємо: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) + {}$ $+\big(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)\big) = \Delta f + \Delta g$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

4. Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Що і треба було довести.

Після вивчення правила знаходження похідної частки двох функцій доцільно продемонструвати учням її застосування під час виведення формул $(tg\ x)'$ та $(ctg\ x)'$.

Вчитель. Як за допомогою правила похідної частки вивести формулу $(tg\ x)'$?

Учні. Необхідно представити $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$ та застосувати правило похідної частки.

$$(tg\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x\ )'\cos x - (\cos x)'\sin x}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-sinx)sinx}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Аналогічно учні доводять формулу для $(ctg\ x)'$.

Після вивчення правил обчислення похідних вчитель має поставити запитання: «Чи можуть дві різні функції мати рівні похідні?».

Учні. Так, наприклад, функції $y = 3x + 5$ та $y = 3x - 2$. Обидві функції мають однакову похідну $y' = 3$. Отже, рівні похідні мають ті функції, які відрізняються на сталу.

Завдання для формування професійно-орієнтованого евристичного вміння «бачити логічні прогалини в обґрунтуванні математичних фактів, побудові математичних теорій»:

Задача 4. Василь Заплутайко знаходить похідну функції $y = sin2x$ так:

1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = sint$;
2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(sin2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка Василя?

В учнів необхідно формувати вміння встановлювати ізоморфність математичних об’єктів, в основі якого лежить абстрактно-логічне мислення. Для цього під час вивчення теми «Похідна та її застосування» доцільно розв’язувати наступну задачу.

Задача 5. Розв’яжіть рівняння:

а) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$;

б) $f'(x) \cdot g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - 6x$, $g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{3}$.

Розв’язання.

Наведена задача встановлює ізоморфність алгебраїчних рівнянь та диференціальних рівнянь. Учні 11-х класів не вміють розв’язувати диференціальні рівняння, проте в даних прикладах можна використати штучний спосіб розв’язання.

а) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ – дробово-раціональне рівняння, розв’язання якого полягає у наступній системі:

$$\begin{cases} f'(x) = 0; \\ g'(x) \neq 0. \end{cases}$$

1. $f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 - 18x\right)' = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 18 = 2x^2 - 18.$

2. $g'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

3. $\begin{cases} 2x^2 - 18 = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 9; \\ x \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \text{ або } x = -3; \\ x \neq 0. \end{cases}$

Відповідь: –3, 3.

б) $f'(x) \cdot g'(x) = 0$. Добуток двох множників дорівнює нулеві, якщо хоча б один з них дорівнює нулеві. Тоді:

$f'(x) = 0$ або $g'(x) = 0$.

1. $f'(x) = (x^3 - 6x)' = 3x^2 - 6.$

$3x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}.$

2. $g'(x) = \left(\frac{\sqrt{-x}}{3}\right)' = -\frac{1}{6\sqrt{x}}$

$-\frac{1}{6\sqrt{x}} = 0;$

$1 \neq 0$ – не має розв'язків.

Відповідь: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Одним з основних вмінь майбутнього фахівця математики є вміння конструювати моделі проблемної (задачної) ситуації (предметні, схематичні, графічні, імітаційні та ін.). Формуванню такого вміння сприяє наступна задача.

Задача 6. Будують міст параболічної форми, що з'єднує пункти *A* і *B*, відстань між якими дорівнює 200 м. В'їзд на міст і з'їзд з мосту повинні бути прямолінійними ділянками шляху. Ці ділянки спрямовані до горизонту під кутом 30°. Вказані прямі мають бути дотичними до параболи. Складіть рівняння профілю моста в заданій системі координат.

Розв'язання

Вчитель. Складемо модель задачі. Зобразимо дані задачі на рисунку. Яким чином необхідно розташувати міст на декартовій системі координат і чому?

Учні. Міст необхідно розташувати таким чином, щоб вісь ординат перетинала його і в точці перетину ділила навпіл. Такий вибір зумовлено тим, що зручно шукати координати кінців мосту.

Отже, зобразимо описане в наступному рисунку.

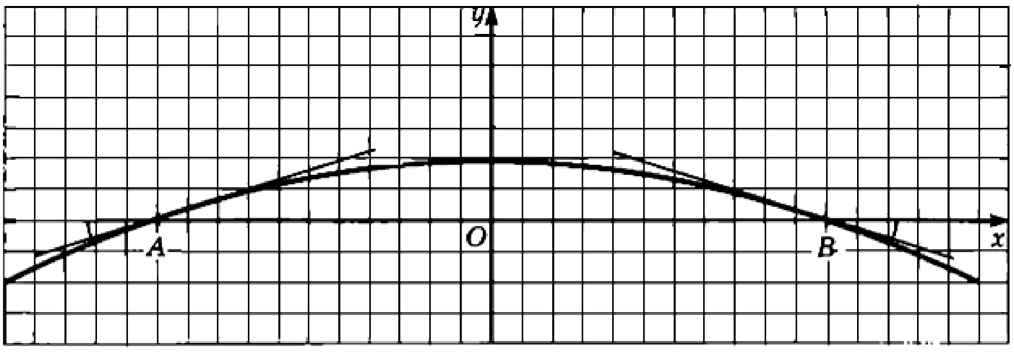


Рис. 2.5. Схема моста

Вчитель. Складаємо модель: «Міст має форму параболи (рис. 2.5), пункти А і В мають координати А(-100;0) і В(100;0). Прямі *AK* і *PB* дотикаються параболи в точках A і B, їх кутові коефіцієнти дорівнюють, відповідно, $tg30°$ та $tg150°$».

Постановка задачі. Будемо шукати рівняння параболи у вигляді $y = ax^2 + b$, де $a < 0, b > 0$.

Учні. Для розв'язання поставленої задачі необхідно застосувати геометричний зміст похідної. Знаходимо похідну шуканої функції:

$y' = 2ax$, та враховуємо $y'(-100) = tg30°$. Отже, $2a \cdot (-100) = tg15°$

$$a = -\frac{tg30°}{200} = -\frac{\sqrt{3}}{600}.$$

За побудовою $y(-100) = 0$. Підставивши в шукане рівняння відомі параметри отримаємо:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{600} \cdot 10000 + b;$$

$$b = \frac{50\sqrt{3}}{3}.$$

Отже, рівняння моста має вигляд:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{600}x^2 + \frac{50\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $y = -\frac{\sqrt{3}}{600}x^2 + \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

На даному етапі доцільно ввести до розгляду пропедевтичні задачі до розділу «Інтеграл», які вимагають відшукування учнями первісних до заданих похідних функцій. Важливим є те, що учні ще не мають готового алгоритму дій, тому таке завдання розвиває абстрактно-логічне мислення учнів та уяву, а найголовніше, вміння використовувати індукції і дедукцію для розв'язання математичної задачі.

Задача 7. Відома похідна функції $f'(x)$. Вкажіть, якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$:

1) $f'(x) = 6(2x-1)^2$;

2) $f'(x) = \frac{2}{(2x+3)^2}$;

3) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$;

4) $f'(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Наведені завдання на даному рівні засвоєння учні можуть розв'язувати лише методом підбору або іншими логічними прийомами. Вчителеві варто зазначити, що обов'язково в заданих функціях буде присутня константа, оскільки похідна її обертає в нуль.

Після вивчення теми «Рівняння дотичної до кривої» варто з учнями розглянути задачу, яка дозволить сформувати професійно-орієнтоване евристичне вміння «встановлювати ізоморфність математичних об'єктів», тобто застосовувати об'єкти однієї математичної теорії до іншої.

Задача 8. Під яким кутом перетинаються криві $y = \frac{1}{x}$ та $y = \sqrt{x}$?

У шкільному курсі математики учні не розглядають кути між кривими лініями, тому вчителеві необхідно створити ситуацію, в якій учні самостійно прийдуть до цього поняття.

Вчитель. Отже, що в геометрії розуміється під кутом?

Учні. Два промені зі спільним початком і частину площини, обмежену ними називають кутом.

Вчитель. А як знайти кут між кривими лініями?

(Учні висловлюють свої пропозиції)

Учні. Необхідно знайти кут між дотичними цих кривих, які проходять через їх точку перетину.

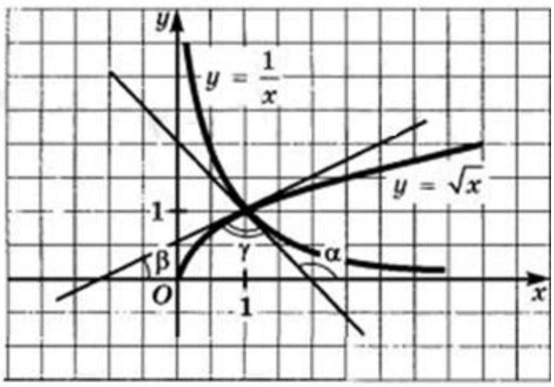


Рис. 2.6

Очевидно, що криві $y = \frac{1}{x}$ та $y = \sqrt{x}$ перетинаються у точці (1;1). В цій точці для першої функції $y' = -1$, а для другої – $y = \frac{1}{2}$. На рис. 2.6 шуканий кут позначено γ. Маємо:

$$tg\alpha = -1, tg\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \beta + \gamma.$$

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Отже, $\gamma = \pi - arctg3$.

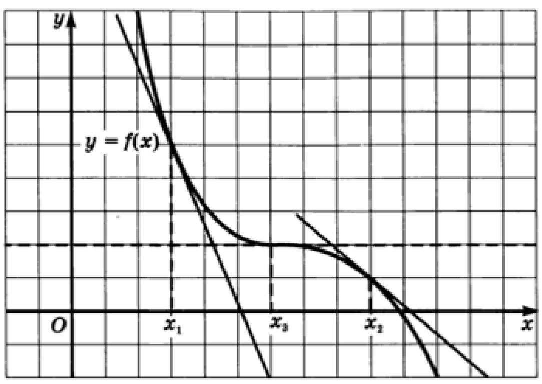
Відповідь: $\pi - arctg3$.

Отже, при введені теми «Похідна» в школах і класах з профільним вивченням математики доцільно використовувати евристичний метод навчання. Слід підводити учнів до нових знань шляхом правильно підібраних питань, які ставить вчитель. Крім того, необов'язково застосовувати евристичний метод на кожному уроці.

2.2. Технології узагальнення і систематизації знань під час вивчення теми «Похідна та її застосування»

Перш ніж розглядати з учнями застосування похідної до дослідження графіків функцій, необхідно систематизувати і узагальнити їх знання з таких понять як «зростаюча функція» і «спадна функція», оскільки в подальшому цей матеріал буде розширюватись.

Для підведення учнів до теорем-ознак спадання (зростання) функції вчителеві варто продемонструвати учням наступні рисунки.



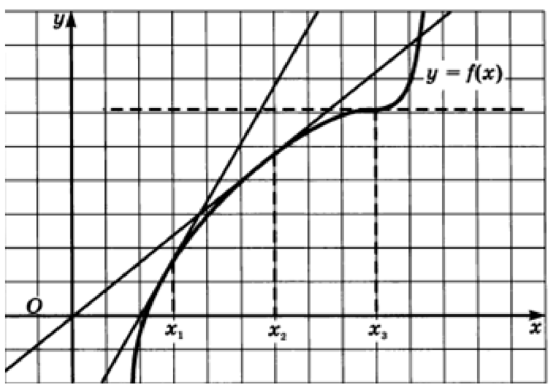


Рис. 2.7. Спадна функція Рис. 2.8. Зростаюча функція

Вчитель. Проаналізуйте та порівняйте похідні заданих функцій у кожній точці. Які ви можете зробити висновки?

Учні. У випадку спадної функції її похідна завжди від’ємна, а у випадку зростаючої – додатна.

Після даних висновків учні під керівництвом вчителя можуть самостійно сформулювати та довести відповідні теореми, що є обов’язковим на профільному рівні навчання. Поняття максимуму та мінімуму функції учні повторюють і уточнюють за графіком функції.

Зазначають, що точки максимуму і мінімуму функції називають ще екстремальними точками, а максимуму і мінімум називають екстремумом функції. Важливо, щоб учні усвідомили, що поняття максимуму та мінімуму мають місцевий характер; це найбільше і найменше значення функції порівняно з сусідніми її значеннями; учні тоді не ототожнюють поняття максимуму та мінімуму з поняттями найбільшого і найменшого значення функції.

Треба учням роз’яснити, що функція *f(x)* може мати кілька максимумів і кілька мінімумів. Може бути, що мінімум функції більший від якого-небудь її максимуму або максимум менший від якого-небудь її мінімуму. Проте максимум (мінімум) іноді може бути найбільшим (найменшим) значенням функції на всій її області означення. Все це треба проілюструвати учням на графіках відповідних функцій.

Важливо звернути увагу учнів на те, що максимум і мінімум функції в точці характеризують поведінку функції лише в як завгодно малому околі цієї точки. Максимум і мінімум функції не обов’язково є її найбільшим або найменшим значенням на всій області визначення чи на деякій її підмножині.

Далі зазначають, що при дослідженні функції елементарними засобами інтервалами монотонності визначались або за допомогою графіка, або аналітичним способом, в основу якого покладено означення зростаючої і спадної функції. Останній спосіб часто зв’язаний з громіздкими перетвореннями. Ознайомимося ще зі способом визначення інтервалів монотонності за допомогою похідної.

Для функції, яка має похідну, існують прості достатні ознаки зростання (спадання) її в точці.

Проте алгоритм знаходження проміжків зростання і спадання функції можна застосовувати не тільки для звичайних функцій, але й для будь-якої функціональної залежності, яка описує певний процес. Для цього варто розглянути з учнями задачі, які формують у них професійно-орієнтоване евристичне вміння конструювати моделі за дачної ситуації.

Задача 1. Автомобіль подолав відстань від пункту *A* до пункту *B* за одну годину. Його рух можна описати рівнянням $S(t) = \frac{1}{6}t^6 + \frac{4}{5}t^5 + t^4 + 3$. Визначте, який проміжок часу автомобіль їхав вгору, а який вниз.

З умови задачі учням вже представлена готова модель, проте її треба сформулювати математичною мовою: «Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$ на відрізку [0;1]».

На конкретному прикладі слід пояснити учням, що, починаючи розв'язувати практичного змісту, насамперед з'ясовують найбільше (найменше) значення величини, яку треба знайти. Потім цю величину виражають через деяку незалежну змінну *x*. Якщо величина *y* залежить від двох змінних *x* і *t*, то, знайшовши співвідношення, яким пов'язані між собою змінні *x* і *t*, виражають одну змінну через іншу. Отже, *y* можна подати лише за допомогою однієї змінної, наприклад *x*. Нехай *y* = *f*(*x*), знайдемо тепер найбільше (найменше) значення функції *f(x)* на даному в умові задачі проміжку.

Зауважимо, що розглядувана задача зводиться, як правило, не до відшукання найбільших (найменших) значень функції, а лише до визначених значень аргументу *x*, при яких функція *f(x)* набуває цього значення.

Слід звернути також увагу учнів на те, що в багатьох задачах лише за умовою можна вказати характер критичної точки, не досліджуючи знака похідної зліва і справа від неї. Проте, в деяких задачах без такого дослідження обійтися не можна. Доцільно розглянути задачі обох видів.

Деякі практичні евристичні задачі можуть формувати в учнів сукупність професійно-орієнтованих евристичних вмінь:

- вміння аналізувати до якої галузі математичних знань належить досліджуваний об'єкт і проблема, з ним пов'язана;
- вміння конструювати математичні об'єкти із заданими властивостями;
- вміння знайти зв'язки і відношення між елементами системи і записати їх у математичній формі;
- вміння конструювати графічні моделі задачної ситуації.

Задача 2. Пункти A, B і C розміщені у вершинах прямокутного трикутника ($\angle ACB = 90°$), $BC = 3$ км, $AC = 5$ км. З пункту A до пункту C веде шосейна дорога. Турист починає рухатись з пункту A по шосе. На якій відстані від пункту A турист має звернути із шосе, щоб за найменший час дійти з пункту A до пункту B, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км/год, а поза шосе – 4 км/год?

Розв'язання.

Вчитель. В умові задачі описано рух туриста, який дозволяє йому найшвидше подолати шлях між пунктами A і B. Складіть графічну модель маршруту туриста.

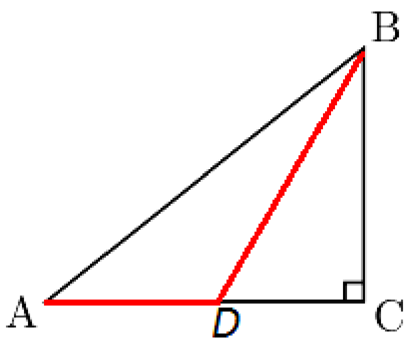


Рис. 2.9. Маршрут туриста

Вчитель. Чи відомо за умовою задачі, де саме повернув турист?

Учні. Ні, тому $AD = x$ км. Тоді:

$DC = (5 - x)$ км,$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(5 - x)^2 + 9}$.

Тоді час, за який турист подолає шлях, дорівнює $\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$.

Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти найменше значення функції $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданої на відрізку [0;5]. Це і є математичною моделлю задачі.

Маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{5 - x}{4\sqrt{(5 - x)^2 + 9}}.$$

Розв'язавши рівняння, установлюємо, що число $x = 1$ є його єдиним коренем. Порівнюючи числа $f(0) = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1) = \frac{29}{20}$, $f(5) = \frac{7}{4}$, установлюємо, що $f(1) = \frac{29}{20}$ - найменше значення функції *f* на відрізку [0;5].

Відповідь: турист має звернути через 1 км.

Вчитель має розглянути з учнями інші можливі моделі вибору та проаналізувати їх на перспективність. Наприклад, в якості невідомої можна було б взяти кут *BDC*. Проте використана нами модель є легшою для усвідомлення.

Задача 3. Пам'ятник складається з статуї та постаменту. До пам'ятника підійшов чоловік. Верхня точка пам'ятника знаходиться вище рівня його очей на a м, а верхня точка постаменту – b м. На якій відстані від пам'ятника повинен стояти чоловік, щоб бачити статую під найбільшим кутом?

Розв'язання.

На початковому етапі учні мають скласти графічну модель задачі. На рис. 1 *OF* – постамент, *FP* – статуя, *O* – основа постаменту, *M* – місце знаходження чоловіка, *AM* – зріст чоловіка (до рівня очей), $PK = a$, $FK = b$, $PF = a - b$, $\angle KAF = \alpha$.

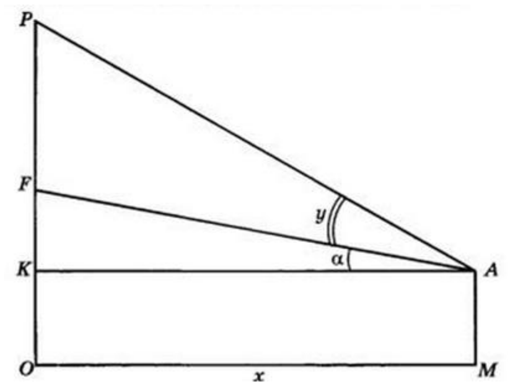


Рис. 2.10. Графічна модель до задачі

Вчитель. Яку величину за умовою задачі необхідно оптимізувати?

Учні. Статую видно під кутом PAF, тому позначимо його y. За незалежну змінну візьмемо відстань $OM = x$ (оскільки саме це питається в задачі), при цьому $0 < x < +\infty$.

Вчитель. Як будемо знаходити шуканий кут?

Учні. Оскільки трикутники APK і AFK є прямокутними, то для них виконуються тригонометричні співвідношення кутів. Отже, маємо:

$tg\alpha = \frac{FK}{AK} = \frac{b}{x}$; $tg(\alpha + y) = \frac{PK}{AK} = \frac{a}{x}$. З іншого боку,

$tg(\alpha + y) = \frac{tg\alpha + tgy}{1 - tg\alpha tgy} = \frac{\frac{b}{x} + z}{1 - \frac{b}{x}z} = \frac{b + zx}{x - bz}$, $(z = tgy)$.

Отже, $\frac{b+zx}{x-bz} = \frac{a}{x}$. Звідси:

$$z = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}.$$

Оскільки в задачі шукають y найбільше, то і тангенс цього кута буде найбільшим, тобто z.

Вчитель. Отже, математична модель має наступний вигляд: знайти найбільше значення функції $z = \frac{(a-b)x}{x^2+ab}$, $x > 0$.

Учні. $z' = \frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+ab)^2}$; $z' = 0$ при $x = \sqrt{ab}$ – це єдина точка екстремуму, до того ж точка максимуму. Отже, $z_{\text{найб}}$ досягається саме в цій точці.

Відповідь: на відстані $\sqrt{ab}$ м.

Навчання математики на профільному рівні передбачає засвоєння учнями тем «Похідні вищих порядків» та «Поняття опуклості функції».

Поняття похідної другого порядку є інтуїтивно зрозумілим учням, проте слід визначити її фізичний зміст, який полягає у знаходження прискорення руху, тобто «швидкості зміни швидкості зміни функції».

Вводити означення опуклості функцій доцільно за допомогою поняття дотичної. За відповідними рисунками учні самостійно можуть визначити функцію, опуклу до низу, та функцію, опуклу до гори. Також, за допомогою дотичної (а саме кута її нахилу), учні можуть відкрити ознаки опуклості функції.

Вивчивши всі властивості функцій, учні можуть самостійно скласти алгоритм їх дослідження та побудови, узагальнюючи і систематизуючи отримані знання:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти область значень функції.
3. З'ясувати, чи є функція парною або непарною.
4. З'ясувати, чи є функція періодичною.
5. Знайти точки перетину функції з осями координат.
6. Знайти критичні точки.
7. Визначити проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).
8. Дослідити функцію на асимптоти (вертикальні, горизонтальні, похилі).
9. Дослідити функцію на опуклість та точки перегину (та значення функції в цих точках).
10. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Окрім дослідження функції, цікавим є застосування похідної до розв'язування нестандартних рівнянь та нерівностей. Такі завдання формують в учнів вміння встановлювати взаємозв'язки досліджуваного математичного об'єкта з відомими об'єктами та вимагають високого рівня абстракції.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

Розв'язання.

Перш за все необхідно оцінити ліву і праву частини рівності:

$g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2$, $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Дослідимо функцію $f(x)$ на найбільше та найменше значення за допомогою похідної.

$D(f)$: $\begin{cases} x - 1 \geq 0; \\ 3 - x \geq 0. \end{cases}$ Тобто $1 \leq x \leq 3$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Похідна не існує в точках 1 і 3 з області визначення функції $f(x)$, але ці точки не є внутрішніми для $D(f)$, отже, вони не є критичними.

Якщо $f'(x) = 0$, то $x = 2$ – критична точка ($f'(2) = 0$).

Неперервна функція $f(x)$ задана на відрізку [1;3], тому вона набуває найбільшого та найменшого значень або на кінцях відрізка, або в критичній точці з цього відрізка. Оскільки $f(1) = f(3) = \sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то

$\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 2$, тобто $f(x) \leq 2$. При цьому, $g(x) \geq 2$, отже задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x = 2}, \\ x^2 - 4x + 6 = 2 \end{cases} \leftrightarrow x = 2$.

Відповідь: 2.

Запропоновані нами евристичні задачі допоможуть учням 11-х класів опанувати тему «Похідна та її застосування» та розкриють їх творчі здібності, нахили до математики та здатність відкривати нові знання.

2.3. Узагальнення і систематизація знань з теми «Похідна та її застосування» на факультативах

Факультативи з математики не є формою позакласної роботи. Це одна з форм диференційованого навчання математики, мета якого – поглиблення і розширення знань учнів, розвиток їхніх математичних здібностей і стійкого зацікавлення математикою, прищеплення школярам інтересу і смаку до самостійних занять математикою, виховання і розвиток їх ініціативи та творчості.

Нині факультативне навчання математики в 7-11 класах має поглиблювати знання учнів, здобуті ними під час вивчення основного курсу, а також розвивати логічне мислення, цікавість до математики, творчі здібності.

На даний момент Міністерство освіти і науки України пропонує наступну програму факультативного курсу «Застосування похідної до розв’язування задач», яка передбачає 35 академічних годин.

Таблиця 2.2

№	Тема	Кількість годин
1.	Похідна функції (границя, неперервність, похідна)	10
2.	Застосування похідної до розв’язування задач (екстремуми, задачі геометрії, економіки, фізики)	10
3.	Застосування похідної до розв’язування задач (рівняння, нерівності, спрощення і порівняння виразів).	12
4.	Резервний час	3
	Разом	35

Методика організації та проведення факультативів.

Факультативні курси розраховані для тих учнів, які мають достатню підготовку з математики, однак, як виняток, можна дозволити відвідувати факультатив і тим, хто ще не досяг високих оцінок, але має потенціальні можливості для цього. Залучати до факультативів і гуртків доцільно, розв’язуючи на звичайних уроках цікаві задачі і вирішуючи проблеми, що потребують розширення знань і умінь. Учням пропонують розширити їх на факультативних заняттях.

Не можна механічно переносити методи, прийоми, організаційні форми і засоби навчання математики в звичайних класах на факультативне навчання. Враховуючи, що учні на факультативних заняттях мають більші можливості для навчання та стійку цікавість до математики, тут мають переважати методи евристичного навчання. Більше часу слід присвятити самостійній роботі.

Окремі вчителі поділяють виконання завдань дослідницького характеру на кілька етапів. Спочатку учні вивчають потрібну літературу, потім шукають алгоритм розв’язування задачі або проблеми, а на заняттях звітують про результати своїх пошуків. Проте даний підхід вимагає від вчителя особливого контролю та керівництва навчальною діяльністю учнів.

На факультативних заняттях є можливість для прискореного вивчення частини теоретичного матеріалу завдяки самостійній роботі. Ефективним є застосування лекційно-практичної системи навчання, в якій належне місце відводиться семінарам.

Важливою проблемою є взаємозв'язок факультативних занять з вивченням обов'язкового курсу, погодженість у часі та змісті вивчення тих чи інших питань.

Досвід свідчить, що більшу частку запланованого до вивчення матеріалу потрібно перенести безпосередньо на заняття в класі, а домашні завдання звести до мінімуму і пропонувати лише для того, щоб учні були підготовленими до наступного заняття. Творчі завдання, які потребують значного часу, не є обов'язковими для всіх учнів факультативу, однак виконання їх слід всіляко схвалювати.

Система оцінювання має бути досить гнучкою, не копіювати застосованої в обов'язковому курсі. Заохочуючи учнів, які працюють у факультативі, в жодному разі не можна залякувати їх негативними оцінками і відштовхувати від роботи, яку вони обрали за власним бажанням.

Факультативні заняття в 10-11 класах є важливим засобом профільного навчання і допомагають учням визначитися щодо вибору майбутньої професійної діяльності.

Розглянемо систему евристичних задач для факультативного курсу «Застосування похідної до розв’язування задач».

Система евристичних задач для факультативного заняття «Розв’язування оптимізаційних задач за допомогою похідної»

<u>Задача №1.</u> *(Польові дороги).* Поля сівозміни звичайно проектують у формі прямокутників, що забезпечує найбільш продуктивне і правильне виконання механізованих робіт. Відповідно до цього польові дороги також доцільно проектувати у вигляді сітки прямокутників, поєднуючи їх сторони зі сторонами полів сівозміни. Розглянемо одну з задач, що виникають при визначенні раціонального співвідношення сторін прямокутників, які є основою мережі польових доріг.

Якщо прямокутне поле облямоване польовою дорогою, то врожай з будь-якої точки поля транспортується спочатку по найкоротшому шляху до дороги, а потім по дорозі до фіксованої вершини прямокутника. Відомо, що вантажна робота з перевезення врожаю з поля у такому випадку обчислюється за формулою $A = k(9a^2b + 6ab^2 - a^3)$, де a – ширина, b – довжина поля, k – деякий коефіцієнт, що залежить від врожайності. З усіх прямокутників даної площі S потрібно вибрати такий, для якого вантажна робота A буде найменшою.

Розв’язання.

Вчитель. Для знаходження найменшої роботи необхідно деяку величину прийняти за змінну. Оскільки вихідною величиною є площа поля, то що необхідно позначити за невідому?

Учні. Нехай x - ширина поля (будемо вважати, що $0 < x \leq \sqrt{5}$). Тоді його довжина $\frac{S}{x}$, а вантажна робота

$$A = k(9Sx + \frac{6S^2}{x} - x^3).$$

Вчитель. Необхідно знайти найменше значення функції $A(x)$ на проміжку $I =]0; \sqrt{5}]$.

Учні. Знайдемо похідну

$$A'(x) = -\frac{3k(x^2 - S)(x^2 - 2S)}{x^2}$$

Вчитель. Щоб дослідити, яких значень може приймати робота, необхідно проаналізувати кожну можливу змінну.

Учні. Так як $A'(x) < 0$ на проміжку $]0; \sqrt{5}]$, то функція A на проміжку спадає. Тому вона досягає найменшого значення при $x = \sqrt{5}$, тобто тоді, коли прямокутник є квадратом. ■

Задача №2. Бджолиний сот складається з двох рядів комірок зі спільною перегородкою, утвореною їх денцями. Кожна комірка є відкритою зверху шестикутною призмою з хитро влаштованим дном. Таку конструкцію можна отримати за допомогою наступної геометричної побудови.

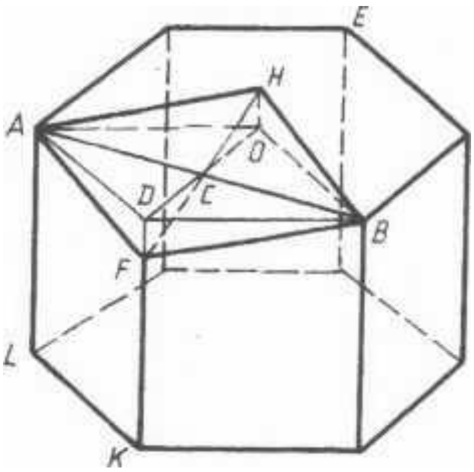


Рис. 2.11

Розглянемо (рис. 2.11) правильну шестикутну призму. Виберемо на її осі симетрії точку H і проведемо площину через точки A, H і B. Відкинемо від призми, що відтинається цією площиною, піраміду $FABD$ і додамо до призми піраміду $HABO$. Так як в правильному шестикутнику $OD \perp AB$ і $DC = CO$, то розглянуті піраміди симетричні відносно прямої AB, і значить, вони рівні.

Якщо через точку H провести ще площини HBE і HAE та виконати операції, аналогічні описаним вище, то отримаємо многогранник, дуже схожий на бджолину комірку, поставлену дном догори. Об'єм одержаного многогранника такий ж (в силу рівності добудованих і відкинутих пірамід), як і у вихідній призми. Але площа поверхні у нього інша. При якому значенні OH площа побудованого многогранника буде найменшою?

Розв'язання.

Вчитель. Нехай $KL = a$, $AK = b$ $(a < b)$. Який елемент необхідно взяти за змінну?

Учні. Доцільно обрати $OH = x$. Тоді площа трапеції $AFKL$ рівна $\frac{1}{2}a(2b - x)$, тому площа всієї бічної поверхні комірки дорівнює $3a(2b - x)$.

Фігура $ABPH$ – ромб. Так як $AB = a\sqrt{3}$, $CF = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$, то площа дна комірки (площа трьох ромбів) дорівнює $3a\sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}$. Площа поверхні всієї комірки $S = 3a(2b - x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4x^2 + a^2})$ $(0 \le x \le b)$.

Вчитель. Тепер знайдемо, при якому значенні x функція S приймає найменше значення.

Учні. Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 3a\left(\frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 + a^2}}\right) = 3a\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \frac{a^2}{x^2}}}\right)$$

Зазначимо, що на проміжку $[0; b]$ є єдина критична точка $x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ причому $S'(x) < 0$ при $0 < x < x_0$ і $S'(x) > 0$ при $x > x_0$. Отже, функція S досягає в точці x_0 найменшого значення.

Вчитель. Знайдемо, чому дорівнює при $x = x_0$ тупий кут α ромба $AFBH$. Маємо $AB = a\sqrt{3}$, $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Тому $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$, $\alpha \approx 110°$. Це значення несуттєво відрізняється від даних, отриманих при вимірюванні реальних бджолиних сот (найчастіше $\alpha \approx 117°$, a = 3,5 мм, b = 12 мм). Бджоли - напрочуд грамотні архітектори! ■

Задача №3. Знайдіть, за яких умов витрати жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданого об’єму будуть найменшими.

Розв’язання.

Вчитель. Складемо математичну модель до задачі. Суттєвим є те, що банка повинна мати заданий об’єм. Важливою є вимога, що витрати жерсті повинні бути найменшими. Ця вимога означає, що площа повної поверхні банки, яка має форму циліндра, повинна бути найменшою. Суттєвими є розміри банки. Несуттєвими є конкретна місткість банки і вид консервів (м’ясних, рибних, овочевих, фруктових), для яких вона призначена.

Позначимо місткість банки через V см і сформулюємо математичну задачу: «Знайдіть такі розміри циліндра з об’ємом V см^3, щоб площа його повної поверхні була найменшою». Який елемент необхідно обрати за змінну?

Учні. Позначимо діаметр основи циліндра через x см, а його висоту через h см. Тоді об’єм циліндра: $V = \frac{1}{4}\pi x^2 h$. Звідси $h = \frac{4V}{\pi x^2}$.

Повна поверхня циліндра:

$$S_п = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi x^2 + \pi x h = \frac{1}{2}\pi x^2 + \pi x \cdot \frac{4V}{\pi x^2} = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{4V}{x} = \frac{\pi x^3 + 8V}{2x}$$

Маємо:

$$S_п = \frac{\pi x^3 + 8V}{2x}, x > 0.$$

Знаходимо похідну:

$$S_п' = \frac{3\pi x^2 \cdot 2x - (\pi x^3 + 8V) \cdot 2}{4x^2} = \frac{\pi x^3 - 4V}{x^2}$$

Знаходимо критичні точки з умови:

$S_п' = 0, \frac{\pi x^3 - 4V}{x^2} = 0.$

Звідси $x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

При $x \in \left(0; \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)$ $S_п' < 0$, в при $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}; +\infty\right)$ $S_п' > 0$. Отже, у точці $x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ функція $S(x)$ має мінімум. Оскільки рівняння не має інших коренів, то цей мінімум збігається з найменшим значенням функції на проміжку $(0; \infty)$. Знайдемо h:

$$h = \frac{4V}{\pi x^2}; h = \frac{4V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{64V^3}{16\pi V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Отже, площа повної поверхні циліндра з об’ємом V буде найменшою, якщо циліндр рівносторонній.

Таким чином, найменші витрати жерсті на виготовлення консервної банки циліндричної форми будуть за умови, що діаметр основи дорівнюватиме висоті банки. ■

<u>Задача №4.</u> З круглої колоди, діаметр перерізу якої дорівнює d, потрібно витесати балку найбільшої міцності. Міцність балки пропорційна xy^2, де x – довжина основи прямокутника, який є перерізом балки, а y – його висота.

Розв'язання.

Вчитель. На міцність балки впливають діаметр колоди, форма і розміри перерізу, вид деревини, з якої виготовлену балку. Розв'яжемо задачу, не враховуючи вид деревини, що призведе до деякої похибки обчислень.

Позначимо міцність балки через M, а коефіцієнт пропорційності через k $(k > 0)$. За умовою задачі $M = kxy^2$. Який вигляд буде мати математична модель?

Учні. Сформулюємо математичну задачу: «При яких значеннях змінних x і y функція M набуде найбільшого значення?»

$$y^2 = d^2 - x^2$$

тоді

$M(x) = kx(d^2 - x^2)$, $M(x) = kd^2x - kx^3$, $x \in (0; d)$;.

Знаходимо похідну по х поданої функції:

$M'(x) = kd^2 - 3kx^2 = k(d^2 - 3x^2)$.

Знаходимо критичні точки:

$k(d^2 - 3x^2) = 0$; $d^2 = 3x^2$;

$x^2 = \frac{d^2}{3}$;

$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ або $x = -\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Другий корінь не належить області визначення функції. Корінь $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ розбиває її на два проміжки:

$\left(0; \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ і $\left(\frac{d}{\sqrt{3}}; d\right)$.

При $x \in \left(0; \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ $M'(x) > 0$. Отже, функція $M(x)$ зростає в кожній точці цього проміжку.

При $x \in \left(\frac{d}{\sqrt{3}}; d\right)$ $M'(x) < 0$, а отже, на цьому проміжку функція спадає.

Таким чином, у точці $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ функція має максимум, який у нашому випадку збігається з її найбільшим значенням.

Знаходимо y:

$y^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3}$;

$y = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$

Отже, функція M набуває найбільшого значення при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ і $y = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$ Міцність балки при цих розмірах буде найбільшою і становитиме:

$M = k\frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}d^2 = \frac{2kd^3}{3\sqrt{3}}.$

Розглянемо трикутник ACB ($\angle C = 90°$). У ньому $AC^2 = AB \cdot AP$, $BC^2 = AB \cdot PB$.

Маємо:

$x^2 = d \cdot AP; \frac{d^2}{3} = d \cdot AP; AP = \frac{1}{3}d;$

$y^2 = d \cdot PB; \frac{2d^2}{3} = d \cdot PB; PB = \frac{2}{3}d.$

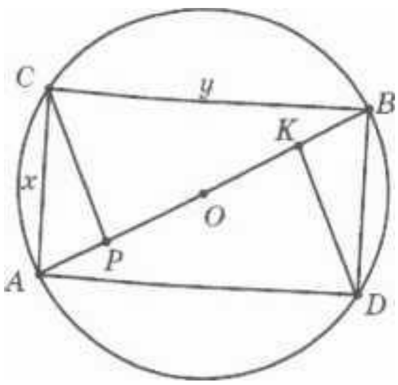


Рис. 2.12. Правило для розмітки найміцнішого перерізу балки

Звідси пропонуємо таке правило для розмітки найміцнішого перерізу балки: довільний діаметр колоди ділимо на три рівні частини і в точках поділу

РІК проводимо до нього перпендикуляри. Тоді знаходимо вершини C і D перерізу. Інші його вершини є кінцями взятого діаметра. ■

Задача №5. Розчинення лікарської речовини з таблетки описують рівнянням $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 – початкова маса на момент часу $t = 0$; m – нерозчинена маса на момент часу t; k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначити швидкість розчинення.

Розв'язання.

Вчитель. Яким виразом можна описати масу лікарської речовини, що розчинилась?

Учні. Масу лікарської речовини, що розчинилась на момент часу, записують у вигляді:

$M = m_0 - m = m_0(1 - e^{-kt})$.

Вчитель. Яким чином можна виміряти швидкість зміни цієї функції, тобто розчинення лікарської речовини?

Учні. Швидкість розчинення визначають за похідною:

$$M' = -m_0 e^{-kt}(-k) = k m_o e^{-kt} = km.$$

Вчитель. Яким чином можна узагальнити одержаний результат?

Учні. Швидкість розчинення пропорційна масі нерозчиненої частини таблетки. ■

Висновки до розділу II

У другому розділі нами було розроблено елементи методичної системи навчання алгебри і початків аналізу в 11му класі, які орієнтовані на формування професійних вмінь учнів, а саме:

- систему евристичних задач, яку необхідно покроково впроваджувати під час вивчення теми «Похідна»;
- факультативне заняття з теми «Розв'язання оптимізаційних задач за допомогою похідної».

Евристичні задачі, підібрані нами, спрямовані на формування виділених у першому розділі професійно-орієнтованих евристичних вмінь майбутніх математиків.

На наш погляд використовувати евристичні прийоми необхідно комплексно як на уроках, так і на факультативах. Більшої уваги потребує саме практична значущість похідної, тому факультативні заняття мають бути спрямовані на розв’язання практичних задач.

Важливим є використання евристичних прийомів на уроках засвоєння нових знань, тому що такі уроки дають можливість учням самостійно відкривати нові знання. Вчителеві необхідно корегувати думки учнів за допомогою допоміжних запитань.

Нажаль обмеженість часу шкільної програми не дозволяє повністю розкрити сутність евристичного навчання, оскільки виконання відповідних завдань потребує великої кількості навчальних годин.

ВИСНОВКИ

Дослідження проблеми реалізації професійно-орієнтованого евристичного навчання дозволило зробити наступні висновки.

1. Нами було досягнуто мети, постановленої на початку дослідження, визначено і науково обґрунтовано оптимальні педагогічні умови професійно-орієнтованого евристичного навчання.

2. Ми вирішили поставлені завдання:

♦ обґрунтували психолого-педагогічні та методичні вимоги щодо формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності учнів.

♦ виділили основні професійно-орієнтовані евристичні вміння, яких старшокласники повинні набути в процесі вивчення теми «Похідна»

♦ розробили окремі компоненти методичної системи формування у старшокласників професійно-орієнтованої евристичної діяльності.

♦ розробили систему евристичних задач для факультативного заняття.

3. *Теоретичне значення* полягає в тому, що:

- проаналізувавши стан проблеми формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності при вивчені алгебри і початків аналізу в старшій школі, можна стверджувати, що даній проблемі приділено досить мало уваги.

Евристичне навчання – це таке навчання, яке ставить за мету конструювання учнем власного сенсу, цілей і змісту освіти, а також процесу його організації, діагностики та усвідомлення.

Основною характеристикою евристичного навчання є створення учнями освітніх продуктів і моделювання індивідуальних освітніх траєкторій. Під освітніми продуктами розуміють матеріальні здобутки учнів (судження, гіпотези, тексти, рисунки) та зміна особистісних якостей, що розвиваються в процесі навчання.

Були розглянуті загальні евристичні прийоми:

- аналіз і синтез;

- порівняння;

- абстрагування;
- узагальнення та систематизація;
- класифікація;
- аналогія.

У роботі ми виділили основні професійно-орієнтовані евристичні вміння майбутніх математиків, серед яких є вміння бачити логічні прогалини в обґрунтуванні математичних фактів, побудові математичних теорій; вміння будувати приклади і контрприклади; вміння оцінювати перспективність розв'язування математичної задачі; вміння встановлювати ізоморфність математичних об'єктів; вміння конструювати моделі проблемної (задачної) ситуації (предметні, схематичні, графічні, імітаційні та ін.) тощо.

4. Практичне значення виконаного дослідження полягає в тому, що:

• в курсі математики провідна роль належить не тільки поясненню теоретичного матеріалу, а й розв'язуванню задач, тому нами було розроблено систему евристичних задач з використанням похідної, орієнтованих на формування професійно-орієнтованих евристичних вмінь, використання яких, на нашу думку, сприятиме розвитку в учнів математичної творчості. Саме застосування зазначених систем завдань дає можливість учням в повній мірі сформувати нестандартне мислення, уяву;

• нами розробленні конспекти уроків , які відображають основні аспекти формування про професійно-орієнтованої евристичної діяльності в процесі навчання, та надані рекомендації для вчителів.

На закінчення зазначимо, що проведення уроків алгебри спрямованих на формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності в значній мірі підвищить гнучкість знань учнів, вони зможуть застосовувати отримані знання не тільки в суміжних алгебрі навчальних предметів, а й в практичній діяльності. Учні будуть не механічно запам'ятовувати теорію, а свідомо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2011. – 431 с.

2. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. − 369 с.

3. Бевз Г.П. Алгебра (Алгебра і початки аналізу): підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Освіта, 2011. – 400 с.

4. Бобилєв Д.Є. Місце евристичних умінь в структурно-логічній схемі пропедевтичного курсу функціонального аналізу / Д.Є. Бобилєв // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2013. – Вип. 40. – С. 73-79.

5. Бобонець З.М. Похідна функції / З.М. Бобонець // Все для вчителя. – 2007. – №1. – С. 31-33.

6. Бурда М.І. Теорія шкільного підручника з математики / М.І. Бурда // Математика в школі. – 1999. – № 2. – С. 4-12.

7. Бурда М.О. Структура і зміст профільного навчання математики / М.О. Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 3-6.

8. Волянська О. Є. Задачі на дослідження в курсі алгебри і початків аналізу в умовах профільного навчання / О.Є. Волянська // Математика в школі. – 2011. – №7-8. – С. 45-47.

9. Давидова К.Й. Основні теореми диференціального числення. Алгебра і початки аналізу. 11 клас / К.Й. Давидова // Математика. – 2011. – №6. – С. 16-21.

10. Козаченко О.В. Розвиток творчої особистості в умовах профільного навчання / О.В. Козаченко // Математика. – 2012. – № 41-42. – С. 3-7.

11. Крилова І. В. Формування елементів дослідницької діяльності у учнів старших класів [Електронний ресурс] / І. В. Крилова, Б. Б. Беседін. – Режим доступу : http://www.slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/2011/132-137.pdf.

12. Кугай Н. В. Розвиток умінь старшокласників доводити математичні твердження у процесі вивчення теми «Похідна» / Н.В. Кугай // Математика в школі. – 2004. – №5. – С. 24-32.

13. Максимова Т.С. Методика формування професійно-орієнтованої евристичної діяльності студентів вищих технічних навчальних закладів на практичних заняттях з вищої математики : дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 / Тетяна Сергіївна Максимова. – Донецьк, 2006. – 285 с.

14. Мойсеєнко Л.А. Творче математичне мислення : психологічна сутність / Л.А. Мойсеєнко // Обдарована дитина. – 2007. – №7. – С. 20-30.

15. Мойсеєнко Л.А. Психологія розуміння творчих математичних задач на різних етапах їхнього розв’язування / Л.А. Мойсеєнко // Освіта Донбасу. – 2002. – №3. – С. 117-124.

16. Навчальна для загальноосвітніх навчальних закладів 10 – 11 класів. Математика. Рівень стандарту. Академічний рівень. Профільний рівень. / К.: Міністерство освіти і науки України, 2017. – 103 с.

17. Нелін Є.П. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Харків : Гімназія, 2011. – 448 с.

18. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі : Постанова Кабінету Міністрів України від 21.10.2013 № 1456.

19. Про затвердження плану заходів щодо реалізації Концепції профільного навчання у старшій школі : Постанова Кабінету Міністрів України від 4.11.2013 № 1550.

20. Профільне навчання в старшій школі: шляхи розвитку: Наук.-доп. бібліогр. покажч. Вип. 1 / АПН України. ДНПБ України ім. В.О. Сухомлинського; Уклад.: Л.О. Пономаренко, Л.І. Ніколюк, Л.І. Самчук, І.М. Каневська; Наук. консультант і автор вступ. ст. В.І. Кизенко, канд. пед. наук.; Наук. ред. і відп. за вип. Т.Ф. Бушкина; Бібліогр. ред. Є.К. Бабич; Рецензент Н.М. Бібік, д-р пед. наук. – К., 2004. – 163 с.

21. Рафальська М.В. Застосування похідної при розв'язування рівнянь / М.В. Рафальська // У світі математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 32-40.

22. Саломатнікова О.М. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач / О.М. Саломатнікова // Математика в школах України. – 2005. – № 30. – С. 27-32.

23. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників до ВНЗ / М.І. Сканаві. – К. : Арій, 2011. – 608 с.

24. Скафа О. І. Методичні вимоги щодо організації евристичного навчання математики / О.І. Скафа // Рідна школа. – 2004. – №4. – С.32-35.

25. Скафа О.І. Навчання доведенням та евристики / О.І. Скафа // Математика в школі. – 2004. – №5. – С. 14-19.

26. Скафа О. І. Сучасні технології евристичного навчання математики / О. І. Скафа // Математика. – 2006. − №10 (березень). − С. 1-2.

27. Скафа О.І. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О.І. Скафа // Рідна школа. – 2003. – №7. – С. 43-47.

28. Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у евристичному навчанні математики / О.І. Скафа // Математика в школі. – 2004. – №1. – С. 35-38.

29. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.

30. Слєпкань З.І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З.І. Слепкань // Математика в школі. – 2003. – №1. – С. 6-9.

31. Чашечникова О.С. Використання систем підказок з метою розвитку математичних здібностей учнів / О.С. Чашечникова // Математика в школі. – 1998. – №1. – С. 44-48.

32. Чашечникова О.С. Шляхи розвитку творчого мислення учнів в умовах профільного навчання математики / О.С. Чашечникова // Математика в школі. – 2010. – №11. – С.33-38.

33. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 класів загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – 2-ге вид. – К. : Зодіак-ЕКО, 2001. – 608 с.
34. Шунда Н.М. Застосування похідної до розв'язання задач: Посібник / Н.М. Шунда. – К. : Техніка, 1999. – 240 с.
35. Яцкова Т.С. Про розвиток евристичного мислення у школярів / Т.С. Яцкова // Математика в школі. – 2001. – №4. – С.53-54.

ДОДАТОК А

Урок №1

Тема. Задачі, які приводять до поняття похідної.

Тип уроку: засвоєння нових знань і вмінь.

Мета уроку:

Навчальна: розглянути задачі про миттєву швидкість, про дотичну до графіка функції, ввести поняття похідної, розробити алгоритм знаходження похідної функції.

Розвивальна: розвивати творче мислення, уяву, довільну увагу, пам’ять, професійно-орієнтовані евристичні вміння.

Виховна: виховувати математичну культуру, самостійність учнів.

ХІД УРОКУ.

ПІДГОТОВЧО-МОТИВАЦІЙНИЙ ЕТАП

І. Організація початку уроку. (1 хв.)

Доброго дня. Відкриваємо свої зошити, записуємо число, класна робота. Тема заняття: «Задачі, які приводять до поняття похідної». (*Вчитель разом з учнями записує на дошці число, класну роботу і тему заняття)*

ІІ. Актуалізація опорних знань. (5 хв.)

Самостійна робота.

І варіант

1) Розв’яжіть рівняння $|2x — 3| = 9 – x$. *(3 бали)*
2) Розв’яжіть нерівність $|2x – 3| < 2 – x$. *(3 бали)*
3) Знайдіть границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$. *(6 балів)*

ІІ варіант

1) Розв’яжіть рівняння $|1 – 3x| = 4 – x$. *(3 бали)*

2) Розв'яжіть нерівність $|3x + 2| > 2x + 3$. (3 *бали)*

3) Знайдіть границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{sin3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$. *(6 балів)*

Відповіді: І варіант. 1) -6; 4; 2) $\left(1; 1\frac{2}{3}\right)$; 3) а) 2; б) -6.

ІІ варіант. 1) -1,5; 1,25; 2) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 3) а) $\frac{1}{3}$; б) 4.

ІІІ. Мотивація навчального процесу. (2 хв.)

Метод: спонукальний.

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної. Отже, наша найближча мета — познайомитися з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ, до вивчення геометричних понять.

ПІЗНАВАЛЬНО-ОРІЄНТУВАЛЬНИЙ ЕТАП

IV. Вивчення нового матеріалу. (25 хв.)

Метод: підведення під поняття

Задача 1. Знайти швидкість тіла, яке вільно падає, в момент часу $t_0 = 4c$, що минув від початку руху.

Вчитель. Вам з курсу фізики відомо, за якою формулою знаходять швидкість вільного падіння?

Учні. Швидкість знаходять за формулою $v = gt$.

Вчитель. Щоб розкрити математичний зміст цієї формули, підійдемо до цієї задачі так.

Запишіть закон руху вільно падаючого тіла.

Учні. Закон руху вільно падаючого тіла виражається формулою

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

Вчитель.

1. Надамо аргументу $t_0 = 4c$ приросту $\Delta t = 1$с і визначимо шлях, який пройшло тіло за час $t_0 + \Delta t = (4+1)c = 5c$.

Щоб спростити розрахунки, покладемо $\frac{g}{2} \approx 5 м/c^2$:

$$S(t_0 + \Delta t) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} = 5 \cdot 5^2 = 125(м).$$

2. Визначимо шлях, який пройшло тіло за проміжок часу $\Delta t = 1c$, тобто за проміжок часу від $t_0 = 4c$ до $t_1 = t_0 + \Delta t = 5c$. Цей шлях становитиме приріст $\Delta S(t_0)$ функції $S(t) = \frac{gt^2}{2} = 5t^2$.

$$\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - \Delta S(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 - 5t^2 = 5t_0 + 10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2 = 5\Delta t(2t_0 + \Delta t) =$$
$$= 125 - 80 = 45(м)$$

3. Знайдемо середню швидкість за проміжок часу $\Delta t = 1c$.

$$v_{сер} = \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \frac{5\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = 5(2t_0 + \Delta t) = 45(м/c).$$

4. Нехай Δt прямує до нуля. Обчислимо середню швидкість за проміжки часу Δt (в секундах), що дорівнюють відповідно 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …, використовуючи при цьому знайдену в третьому кроці формулу середньої швидкості $v_{сер} = 5(2t_0 + \Delta t)$.

Очевидно, чим менший проміжок часу Δt, тим менше середня швидкість відрізнятиметься від швидкості вільно падаючого тіла в момент часу $t_0 = 4c$.

Результат обчислень зручно подати у вигляді такої заздалегідь заготованої таблиці:

t_0	$S(t_0)$	Δt	$t_0+\Delta t$	$S(t_0+\Delta t)$	$\Delta S(t_0)$	$v_{сер}=\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$
4	80	1	5	125	45	45
4	80	0,1	4,1	84,05	4,05	40,5
4	80	0,01	4,01	80,4005	0,4005	40,05
4	80	0,001	4,001	80,40005	0,040005	40,005
4	80	0,0001	4,0001	80,00400005	0,00400005	40,0005

Отже, середня швидкість $\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ є функцією приросту аргументу Δt. Коли $\Delta t \to 0$ і $\Delta S(t_0) \to 0$, то границею значення середньої швидкості є число 40, яке й природно взяти за шукане значення швидкості в момент часу $t_0 = 4c$.

Вчитель. Хочу звернути вашу увагу на те, що, розв'язуючи цю задачу, ми виконували такі чотири кроки:

1. Надати значенню аргументу t_0 приросту Δt і знайти значення функції, що відповідає новому значенню аргументу $t_0+\Delta t$:

$$S(t_0+\Delta t) = \frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}.$$

2. Знайти приріст $\Delta S(t_0)$ функції $S(t) = \dfrac{gt^2}{2}$:

$$\Delta S(t_0) = S(t_0+\Delta t) - \Delta S(t_0) = \frac{g\cdot\Delta t(2t_0+\Delta t)}{2}.$$

3. Знайти відношення $\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$, яке дорівнює середній швидкості зміни функції, що відповідає зміні аргументу за проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$:

$$\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \frac{g\Delta t(2t_0+\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{g(2t_0+\Delta t)}{2}.$$

4. Знайти границю відношення $\dfrac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, тобто обчислити

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(2t_0+\Delta t)}{2} = gt_0.$$

Отже, $\nu = gt_0$. Дістали відому з курсу фізики формулу миттєвої швидкості вільно падаючого тіла в момент часу t_0.

Слід зауважити, що для вибраного значення t_0 при виконанні граничного переходу на четвертому кроці змінною є лише Δt. Проте, значення границі залежить від вибору t_0. Справді, коли $t_0 = 4c$, то $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = gt_0 = 40 м/с$, а коли $t_1 = 5{,}2c$, то $v = 52 м/с$, де $g \approx 10 м/с^2$.

Вчитель. Чи ви знаєте, що таке дотична до графіка функції?

Учні. Так, це пряма, що має с графіком функції одну спільну точку.

Вчитель. Тоді у параболи $y = x^2$ вісь ординат є також дотичною до графіка функції (Рис.1)?

Учні. Ні. Вона його перетинає.

Вчитель. Отже, знайоме раніше з курсу геометрії означення дотичної до кола не можна застосовувати до графіка функції.

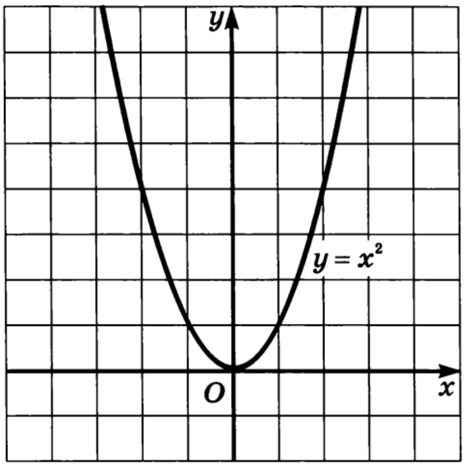


Рис. 2.1

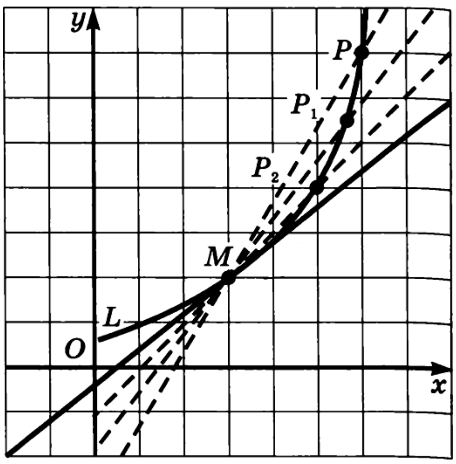


Рис. 2.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай *M* і *P* – деякі не співпадаючі точки, які лежать на кривій *L*. Проведемо пряму *MP*, яку назвемо січною (рис. 2.2). Наблизимо точку *P* до точки *M* по кривій *L*. Тоді січна *MP* буде наближатись до свого граничного положення.

Дотичною до графіка функції в точці М називається граничне положення січної *MP*, коли точка *P*, рухаючись по кривій, наближається до точки *M*.

Вчитель. Означення дотичної до кривої зовсім не означає, що дотична повинна мати з кривою єдину спільну точку (як, наприклад, у випадку кола). Їх може бути кілька або нескінчене число.

Задача 2. Дано графік функції $y = f(x)$. На ньому обрана точка $M(a; f(a))$, в якій проведена дотична до графіка функції (припустимо, що вона існує). Знайти кутовий коефіцієнт дотичної.

Вчитель. Дотична до графіка функції є прямою. Як можна задати пряму у системі координат?

Учні. Пряму можна задати за допомогою координат двох точок, що їй належать, за допомогою кутового коефіцієнта тощо.

Вчитель. Так, спробуємо визначити дотичну до графіка функції за допомогою кутового коефіцієнта: $y = kx + b$.

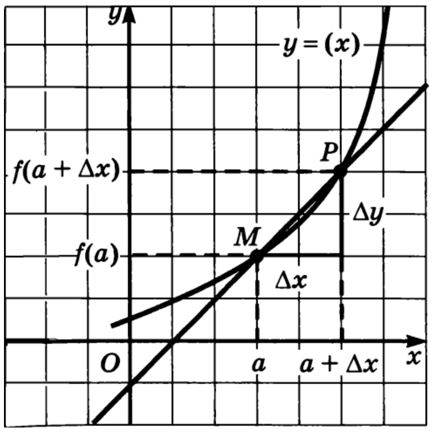


Рис. 2.3

Вчитель. Надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку (рис. 2.3) точку P з абсцисою $a + \Delta x$. Тоді ордината точки дорівнює $f(a + \Delta x)$, а приріст функції $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Як визначити кутовий коефіцієнт січної MP?

Учні. Кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута нахилу та визначається за формулою:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вчитель. Проте на даному етапі ми знайшли кутовий коефіцієнт січної. Як же знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці M?

Учні. Необхідно наблизити точку P до точки M, спрямувавши приріст аргументу Δx до нуля. Щоб обчислити точне значення кутового коефіцієнту, необхідно знайти його граничне значення.

Вчитель. Дійсно, отримаємо формулу обчислення кутового коефіцієнту дотичної до графіка функції:

$$k_{\text{дот}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Отже, для розв'язання задачі ми виконали наступні кроки:

1. Надати значенню аргументу приросту Δx і знайти значення функції, що відповідає новому значенню аргументу $f(a + \Delta x)$.

2. Знайти приріст функції Δy.

3. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до вісі абсцис.

4. Знайти границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто обчислити $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Поняття похідної. Похідні елементарних функцій.

Вчитель. У всіх таких задачах доводиться визначати швидкість зміни значень певних функцій в залежності від зміни аргументу. В зв'язку з потребою узагальнити способи розв'язування подібних задач і було введене в математику поняття похідної функції $y = f(x)$ як швидкості зміни значень залежно від зміни аргументу x.

Означення похідної формулюється на основі підручника [1]. На основі розглянутих задач, що приводять до поняття похідної, учні можуть самостійно скласти алгоритм знаходження похідної функції в точці x_0:

5) надати в точці x_0 аргументу приріст Δx;
6) знайти відповідний приріст Δf функції: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
7) знайти відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
8) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

ВИКОНАВЧО-ДІЯЛЬНІСНИЙ ЕТАП

V. Первинне застосування отриманих знань. (6 хв.)

Метод пробних вправ

1. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_o утворює з додатним напрямом осі OX кут 45°. Знайдіть $f'(x_o)$. *Відповідь:* 1.

2. Відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x_o = -1$ дорівнює 3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції в цій точці, якщо $f(x_o) = 2$.

Відповідь: $y = 3x + 5$.

3. Який кут (гострий чи тупий) утворює з додатним напрямом осі OX дотична до графіка функції: а) $y = x^2 + 2x$ в точці $x = 1$; б) $y = x^2 + 2x$ в точці $x = -2$.

Відповідь: а) гострий; б) тупий.

4. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюється в метрах, час в секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

ПІДСУМКОВО-РЕФЛЕКСИВНИЙ ЕТАП

VI. Закріплення, узагальнення і систематизація отриманих знань. (2 хв.)

Фронтальне опитування:

1. Які задачі приводять до поняття похідної?
2. В чому різниця між середньою та миттєвою швидкістю?
3. Яким чином знаходиться кутовий коефіцієнт дотичної?
4. Стосовно будь-якої функціональної залежності чим є похідна?
5. В чому полягає алгоритм знаходження похідної?

VIII. Домашнє завдання (4 хв.).

1. Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюється в метрах, час – в секундах). Знайдіть:
   1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;
   2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 2$ с.
2. Знайдіть кутовий коефіцієнт:
   1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1{,}6$;
   2) дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $x_0 = 1$.

ДОДАТОК Б

Урок №2

Тема. Дотична до графіка функції.

Тип уроку: формування знань і вмінь.

Мета уроку:

Навчальна: узагальнити знання щодо геометричного змісту похідної, навчити розв'язувати задачі на знаходження дотичних до графіка функції.

Розвивальна: розвивати творче мислення, уяву, довільну увагу, пам'ять, професійно-орієнтовані евристичні вміння.

Виховна: виховувати математичну культуру, самостійність учнів.

ХІД УРОКУ.

Підготовчо-мотиваційний етап

І. Організація початку уроку. (1 хв.)

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку та наявність домашнього завдання.

ІІ. Актуалізація опорних знань. (5 хв.)

Математичний диктант

1. Записати в загальному вигляді рівняння дотичної до графіка функції.
2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = 3x^3 + 5$ в точці $x_0 = \frac{1}{2}$.
3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x_0 = \frac{1}{2}$.
4. Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці перетину його з віссю ординат:
   $f(x) = x^2 - 3x - 3.$

ІІІ. Мотивація навчального процесу. (1 хв.)

Поняття дотичної до кривої лінії є дуже важливим у математиці, оскільки на основі нього можна не тільки розв'язувати задачі, але й доводити певні твердження, чим ми і займемось на сьогоднішньому уроці.

ВИКОНАВЧО-ДІЯЛЬНІСНИЙ ЕТАП

IV. Вправи за зразком і в подібних умовах. (15 хв.)

Задача 1. Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції $f(x) = \frac{5-x}{x-3}$ утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Розв'язання.

1. Знайдемо тангенс кута нахилу:

$tg\alpha = f'(x) = \left(\frac{5-x}{x-3}\right)' = \frac{-(x-3)-(5-x)}{(x-3)^2} = \frac{-x+3-5+x}{(x-3)^2} = -\frac{2}{(x-3)^2} < 0.$

2. Оскільки тангенс кута при будь-якому значенні x, окрім $x = 3$, від'ємний, то будь-яка дотична до графіка функції утворює тупий кут з додатним напрямом вісі абсцис. Що і треба було довести.

Задача 2. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = \sqrt{2x-1}$, у якій проведена до нього дотична утворює з додатним напрямом вісі абсцис кут 45°.

Розв'язання.

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. Оскільки дотична утворює кут 45° з додатним напрямом осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює $tg\ 45°$, тобто $k = 1$.

Нехай x_0 – абсциса точки дотику. Тоді $f'(x_0) = 1$.

3. Отримуємо $\frac{1}{\sqrt{2x_0-1}} = 1$.

Звідси $\sqrt{2x_0 - 1} = 1$;

$2x_0 - 1 = 1$;

$x_0 = 1$.

Відповідь: 1.

Задача 3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, яка проходить через точку $M(-1; -1)$.

Розв'язання.

1. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. З цього випливає, що точка $M(-1; -1)$ не належить графіку функції *f*.

Нехай $A\big(x_0; f(x_0)\big)$ – точка дотику шуканої прямої до графіка функції *f*. Оскільки $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$; $f'(x) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд

$y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6)$.

2. Урахувавши, що координати точки $M(-1; -1)$ задовольняють отримане рівняння, маємо:

$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6)$.

Звідси, розкривши дужки і розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$.

Таким чином, через точку $M(-1; -1)$ проходять дві дотичні до графіка функції *f*: $y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$.

Відповідь: $y = -5x - 6$, $y = -x - 2$.

Задача 4. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -7x + 3$.

Розв'язання.

1. $f'(x) = 6x + 5$.

2. Оскільки дотична паралельна прямій $y = -7x + 3$, то у них однаковий кутовий коефіцієнт, тобто

$f'(x) = -7$.

$6x + 5 = -7$.

$x = -2$ – точка дотику.

3. $f(-2) = 12 - 10 + 3 = 5$.

4. Отже, рівняння дотичної:

$y = -7(x + 2) + 5$

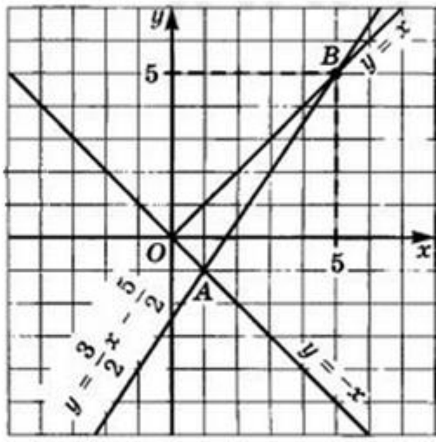
$y = -7x - 9$

Відповідь: $y = -7x - 9$.

V. Вправи з перенесенням знань у нові умови (10 хв.).

Задача 5. Знайдіть площу трикутника, що утворений бісектрисами координатних кутів і дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точці $x = 3$.

Розв'язання.



1. Нехай $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, тоді $f(3) = 2$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$, $f'(3) = \frac{3}{2}$.

Складемо рівняння дотичної:

$y = f(3) + f'(3)(x - 3)$

$y = 2 + \frac{3}{2}(x - 3)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

2. Необхідно знайти площу прямокутного трикутника *AOB*. Знайдемо координати точок *A* і *B*.

   З рівняння $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = -x$ знаходимо $x = 1$. Отже, $A(1; -1)$.

   З рівняння $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = x$ знаходимо $x = 5$. Отже, $B(5; 5)$.

3. Тоді $OA = \sqrt{2}$, $OB = 5\sqrt{2}$, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 5$ (кв. од.)

Відповідь: 5 кв. од.

Задача 6. Під яким кутом перетинаються криві $y = \frac{1}{x}$ та $y = \sqrt{x}$?

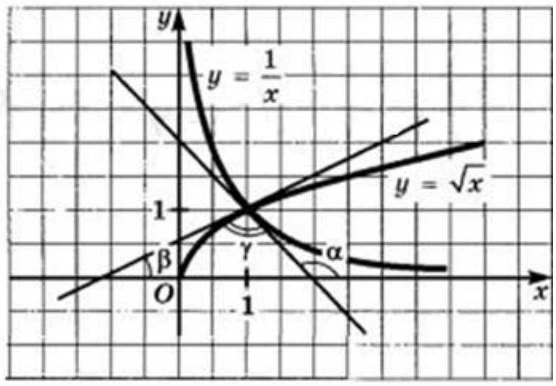
Вчитель. Отже, що в геометрії розуміється під кутом?

Учні. Два промені зі спільним початком і частину площини, обмежену ними називають кутом.

Вчитель. А як знайти кут між кривими лініями?

(Учні висловлюють свої пропозиції)

Учні. Необхідно знайти кут між дотичними цих кривих, які проходять через їх точку перетину.



Очевидно, що криві $y = \frac{1}{x}$ та $y = \sqrt{x}$ перетинаються у точці (1;1). В цій точці для першої функції $y' = -1$, а для другої – $y = \frac{1}{2}$. На рисунку шуканий кут позначено γ. Маємо:

$$tg\alpha = -1, tg\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \beta + \gamma.$$

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Отже, $\gamma = \pi - arctg3.$

Відповідь: $\pi - arctg3.$

ПІДСУМКОВО-РЕФЛЕКСИВНИЙ ЕТАП

VI. Закріплення, узагальнення і систематизація отриманих знань. (10 хв.)

Самостійна робота

I варіант

1. Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції $f(x) = x^5 + 2x - 8$ утворює гострий кут з додатним напрямом вісі абсцис.

2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x$.

Відповідь: $y = 3x - 3$.

II варіант

1. Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції $f(x) = \frac{4}{1-x}$ утворює гострий кут з додатним напрямом вісі абсцис.
2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.

Відповідь: $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$.

VII. Домашнє завдання (3 хв.).

1. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

   Відповідь: 8.
2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$, якщо ця дотична проходить через точку $M(2; -1)$.

   Відповідь: $y = 2x - 5$, $y = 6x - 13$.
3. Чи існують дотичні до графіка функції $f(x) = x^3 + 2x - 1$, які перпендикулярні до прямої $y = -x$.

   Відповідь: ні.

ДОДАТОК В

Урок №3

Тема. Критичні точки функції. Точки екстремуму.

Тип уроку: формування знань і вмінь.

Мета уроку:

Навчальна: формувати вміння і навички знаходити екстремуми функції, застосовувати знання у нестандартних ситуаціях;

Розвивальна: розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, критичність, професійно-орієнтовані евристичні вміння.

Виховна: виховувати працьовитість, культуру особистості, вміння вислухати приймати рішення, долати невизначеності і труднощі.

ХІД УРОКУ.

Підготовчо-мотиваційний етап

І. Організація початку уроку. (1 хв.)

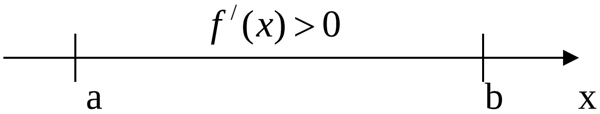
Учитель перевіряє готовність учнів до уроку та наявність домашнього завдання.

ІІ. Актуалізація опорних знань. (5 хв.)

Самостійна робота

1. Функція $f(x)$… на даному інтервалі

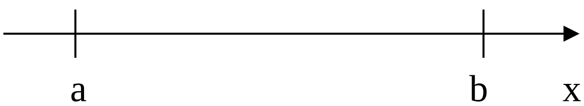
$f^{/}(x) > 0$



а) зростає б) спадає в) інше

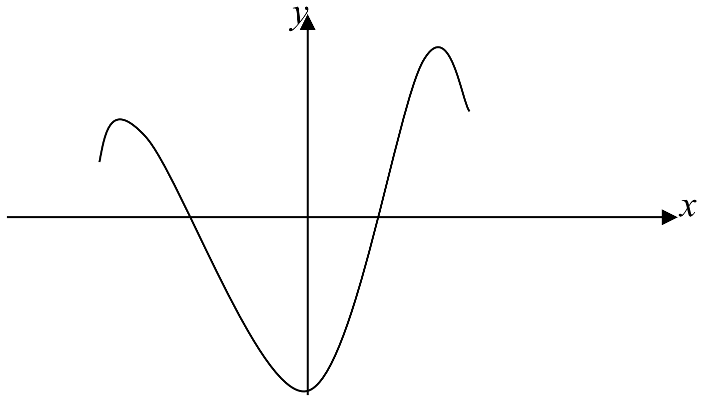
2. Функція $f(x)$… на даному інтервалі

$f^{/}(x) < 0$



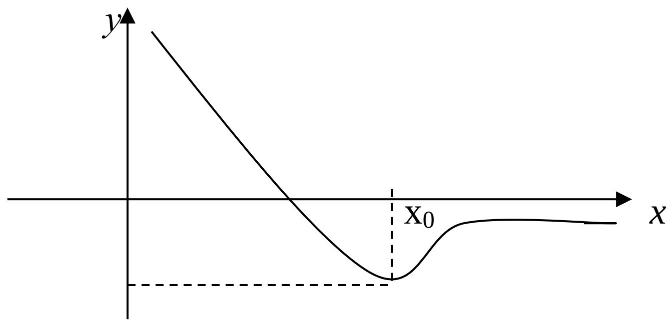
а) зростає б) спадає в) інше

3. Функція f(x) має … екстремуми



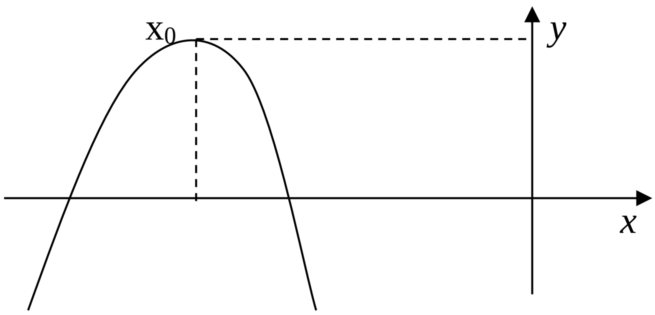
а) два б)жодного в) інше

4. x_0 – точка…



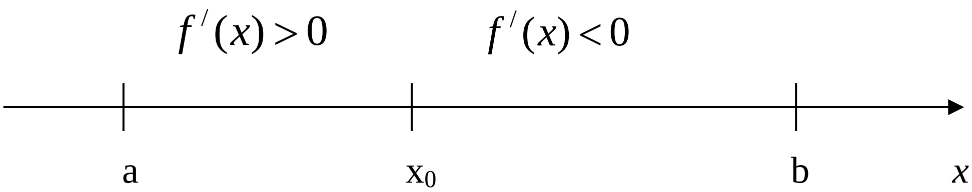
а) максимуму б) мінімуму в) інше

5. x_0– точка…



а) максимуму б) мінімуму в) інше

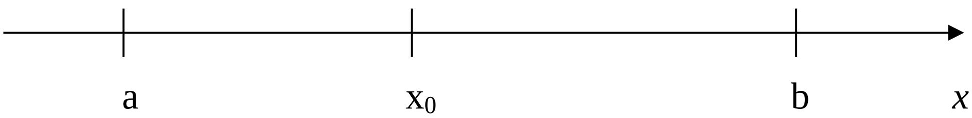
6. x_0 – точка…



а) мінімуму б) максимуму в) інше

7. x_0– точка…

$f^{/}(x) < 0$ $\qquad$ $f^{/}(x) > 0$



а) мінімуму $\qquad$ б) максимуму $\qquad$ в) інше

8. Точки мінімуму і максимуму називають…

а) особливими $\qquad$ б) екстремумами $\qquad$ в) інше

9. … критичні точки є точками екстремуму функції

а) усі $\qquad$ б) деякі $\qquad$ в) інше

ІІІ. Мотивація навчального процесу. (1 хв.)

У кожного з нас у житті є моменти злету, тобто точки підняття і падіння. Такі ситуації називаються екстремальними. У функції теж є такі точки і вони називаються … (точками екстремуму).

Сьогодні на уроці ми удосконалимо вміння знаходити екстремуми функції, а також застосуємо ці знання у нестандартних ситуаціях.

ВИКОНАВЧО-ДІЯЛЬНІСНИЙ ЕТАП

IV. Вправи за зразком і в подібних умовах. (23 хв.)

Задача 1. Чи є правильним твердження:

1) значення функції в точці максимуму може бути меншим від значення функції в точці мінімуму *(Так)*;
2) функція в точці екстремуму може бути недиференційовною *(Так)*;
3) якщо похідна в деякій точці дорівнює нулю, то ця точка є точкою екстремуму функції *(Ні, не завжди)*?

Задача 2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$;

2) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$; 5) $f(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$; 6) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

Відповідь:

1) зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає $(0; 2]$, $x_{min} = 2$;
2) зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає $[1; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{min} = 3$, $x_{max} = 1$;
3) зростає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, спадає $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, $x_{max} = 0$;
4) зростає на $[-\sqrt{6}; 0)$ і $[\sqrt{6}; +\infty)$, спадає $(-\infty; -\sqrt{6}]$ і $(0; \sqrt{6}]$, $x_{min} = -\sqrt{6}$, $x_{max} = \sqrt{6}$;
5) зростає на $(0; 2]$, спадає $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, $x_{max} = 2$;
6) зростає на $[0; 1]$, спадає $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$.

Задача 3. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x}{2} - sinx$; 2) $f(x) = cos2x - x\sqrt{3}$.

Відповідь:

1) спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $x_{max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

2) спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $x_{max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_{min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Задача 4. При яких значеннях a функція $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ має тільки одну критичну точку?

Відповідь: -3;3.

V. Вправи з перенесенням знань у нові умови (10 хв.).

Задача 5. Знайдіть точки екстремуму функції $y = |x^3 - 8| + |x^3 - 1| - x^2$ та визначте їх характер.

Розв'язання.

Якщо $x \geq 2$, то $x^3 \geq 8$, $|x^3 - 8| = x^3 - 8$, $|x^3 - 1| = x^3 - 1$. Отже, $y = 2x^3 - x^2 - 9$.

Якщо $1 \leq x < 2$, то $x^3 < 8$, $|x^3 - 8| = -(x^3 - 8)$, $x^3 \geq 1$, $|x^3 - 1| = x^3 - 1$. Отже, $y = 7 - x^2$.

Якщо $x < 1$, то $x^3 < 8$, $|x^3 - 8| = -(x^3 - 8)$, $x^3 < 1$, $|x^3 - 1| = -(x^3 - 1)$. Отже, $y = -2x^3 - x^2 + 9$.

Таким чином, мова йде про дослідження на екстремум кускової функції

$$y = \begin{cases} 2x^3 - x^2 - 9, \text{якщо } x \geq 2, \\ 7 - x^2, \text{якщо } 1 \leq x < 2, \\ -2x^3 - x^2 + 9, \text{якщо } x < 1. \end{cases}$$

Знайдемо похідну функції

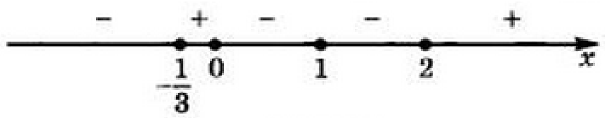
$$y' = \begin{cases} 6x^2 - 2x, \text{якщо } x > 2, \\ -2x, \text{якщо } 1 < x < 2, \\ -6x^2 - 2x, \text{якщо } x < 1. \end{cases}$$

Знайдемо стаціонарні точки. З рівняння $6x^2 - 2x = 0$ знаходимо: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Жодна з цих точок не задовольняє умови $x > 2$.

З рівняння $-2x = 0$ знаходимо: $x = 0$. Це значення задовольняє умову $1 < x < 2$.

З рівняння $-6x^2 - 2x = 0$ знаходимо: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Обидва значення задовольняють умові $x < 1$.

Отже, мажмо стаціонарні точки $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ і критичні точки $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.



Відмітивши їх на числовій прямій та поставивши відповідні знаки приходимо до висновку:

$x = -\frac{1}{3}$ – точка мінімуму, $x = 0$ – точка максимуму, $x = 2$ – точка мінімуму.

Відповідь: $x_{min} = -\frac{1}{3}, 2; x_{max} = 0.$

ПІДСУМКОВО-РЕФЛЕКСИВНИЙ ЕТАП

VI. Закріплення, узагальнення і систематизація отриманих знань. (3 хв.)

Повторення алгоритму дослідження функції на екстремуми та проміжки монотонності.

Схема
1. Знайти область визначення функції $\boldsymbol{f(x)}$
2. Знайти похідну $\boldsymbol{f'(x)}$
3. Знайти критичні точки, тобто внутрішні точки області визначення, у яких $\boldsymbol{f'(x)}$ дорівнює нулю або не існує
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму
6. Записати результат дослідження (проміжки монотонності і екстремуми)

VII. Домашнє завдання (2 хв.).

Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 12;$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 72x - 4;$

3) $f(x) = \frac{3x+5}{x-4};$

4) $f(x) = (x+2)^4(x-5)^3;$

5) $f(x) = \frac{x^2+5}{2-x};$

6) $f(x) = \sqrt{8x - x^2};$

7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2};$

8) $f(x) = \frac{16}{9-x^2}.$

ДОДАТОК Г

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

Задача № 1. *Об'єм колоди.* Круглим лісом називають колоди правильної форми без дефектів деревини з відносно невеликою різницею $\left(\frac{D}{d} < 2\right)$ діаметрів товстого (D) і тонкого (d) кінців. При визначенні об'ємів круглого лісу зазвичай застосовують спрощену формулу $V = lS$, де l - довжина колоди, S − площа його серединного перетину. З'ясуйте, завищується або знижується при цьому реальний об'єм; оцініть відносну похибку.

Розв'язання. Форма круглого лісу близька до зрізаного конусу. Нехай $R-$ радіус більшого, r − меншого кінця колоди. Тоді його майже точний об'єм (об'єм зрізаного конуса) можна, як відомо, знайти за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi l(r^2 + R^2 + rR).$$

Нехай V_1 − значення об'єму, обчислене за спрощеною формулою. Тоді $V_1 = \pi l\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$; $\Delta V = V - V_1 = \frac{\pi l}{12}(R-r)^2 > 0$, тобто $V > V_1$.

Отже, спрощена формула дає заниження величини обсягу. Припустимо тепер $\frac{R}{r} = x$. Тоді $f(x) = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$. Звідси бачимо, що відносна похибка не залежить від довжини колоди, а визначається відношенням $\frac{R}{r}$. Оскільки $f'(x) > 0$ при $x > 1$, то функція f зростає на проміжку]1; 2]. Тому $\frac{\Delta V}{V_1} < f(2) = \frac{1}{27}$, отже, відносна похибка не перевершує 3,7%

У практиці лісознавства така похибка вважається цілком допустимою. З більшою точністю практично неможливо виміряти ні діаметри торців (адже вони дещо відрізняються від кіл), ні довжину колоди, оскільки вимірюють не висоту, а твірну конуса (довжина колоди в десятки разів більше діаметру, і це не призводить до великих похибок). Таким чином, на перший погляд неправильна, але більш проста формула для об'єму зрізаного конуса в реальній ситуації виявляється цілком правомірною. ■

<u>Задача № 2.</u> При визначенні об'ємів ям, траншей, відер та інших ємностей, що мають форму зрізаного конуса, в сільськогосподарській практиці іноді користуються спрощеною формулою

$$V = \frac{1}{2}h(s + S),$$

де h − висота, s і S − площі основ конуса. З'ясуйте, завишається або занижується при цьому реальний об'єм, оцініть відносну похибку за природних для практики умов: $\frac{R}{r} < 2$ (R та r - радіуси основ, $R < r$).

Розв'язання. Позначивши через V дійсне значення об'єму зрізаного конуса, а через V_1 значення, обчислене за спрощеною формулою, одержимо:

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi h(r^2 + R^2);$$

$$\Delta V = V_1 - V = \frac{\pi h}{6}(R - r)^2$$

тобто $V_1 < V$. Отже, спрощена формула дає завищення величини об'єму.

Повторюючи далі розв'язання попередньої задачі, знайдемо, що відносна похибка буде не більше 6,7%. Ймовірно, така точність припустима при нормуванні землекопальних робіт − адже ями не будуть ідеальними конусами, та й відповідні параметри в реальних умовах заміряють вельми грубо. ■

ДОДАТОК Д

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ У ЗАДАЧАХ НА ОПТИМІЗАЦІЮ

Деревообробка. Очищений від сучків стовбур спиляного дерева (хлист) лісозаготівники ділять по довжині на частини (крижі або колоди). Ця операція називається *розкряжуванням* хлистів. Надалі з якісних колод на лісопильних рамах за допомогою подовжнього пиляння (розпилювання) отримують бруси і дошки. Від того, наскільки раціонально проводиться розкрій (розкряжування і розпилювання), залежить економічність використання деревини. Оптимальний розкрій деревини − досить складне завдання, що залежить не тільки від якості сировини, але також і від вимог замовників пиломатеріалів і встановлених стандартів.

Задача №1. На лісопильних рамах (вони призначені для подовжнього розпилу) колоди часто розпилюють на квадратний брус і чотири дошки (рис. 1) з максимально можливою площею поперечного перерізу. Якої товщини дошки вийдуть при такому розпилюванні з колоди діаметром d?

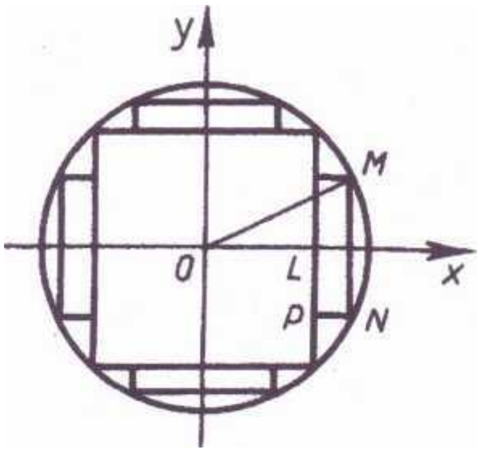


Рис. 1

Розв'язання. Виберемо систему координат так, як показано на рисунку. Нехай точка M визначає ребро дошки. Якщо $\angle\ MOL = \alpha$, то у точки M такі координати: $x = rcos\alpha,\ y = rsin\alpha,$ де $r = \frac{d}{2}$ Ширина дошки $MN = 2y$, її товщина $PN = x - OL = x - \frac{r}{\sqrt{2}}$, отже, площа поперечного перерізу дошки

$$S(\alpha) = 2r^2 sin\alpha\left(cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}\right).$$

Знайдемо похідну:

$$S'(a) = 2r^2\left(2cos^2\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha - 1\right).$$

Похідна обертається на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ у нуль тільки в такій точці α_0, де $cos\alpha_0 = 0{,}906$, причому $S(\alpha_0) > 0$, $S(0) = S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Отже, функція S досягає найбільшого значення в точці α_0, а тому товщина дощок при даному розкроюванні

$$PN = r\left(cos\alpha_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}1d.$$

Знайдене співвідношення важливо для практики. Воно дозволяє до розпилювання визначити, чи будуть отримані дошки відповідати встановленим стандартам, тобто чи прийнятний для даної колоди такий розкрій. При позитивній відповіді на перше питання попереднє знання товщини дощок ще необхідно і для відповідної установки пил. ■

Меліорація. Площа *F* поперечного перерізу каналу (ми розглядаємо для простоти канали, повністю заповнені водою) називають його живим перерізом, а довжину P границі такого перерізу називають змоченим периметром каналу. За допомогою теоретичних розрахунків і експерименту встановлено, що з усіх каналів із заданим живим перерізом найбільшою пропускною здатністю і одночасно найменшою фільтрацією відрізняються канали з найменшим змоченими периметром. Про такі канали говорять, що вони мають гідравлічно найвигідніший профіль.

У меліоративній практиці часто споруджуються канали або лотки з поперечним перерізом у формі прямокутника, трикутника і сегмента кола. Тому цікавить розрахунок гідравлічно найвигіднішого профілю для каналів такої форми.

Задача №2. При якому відношенні глибини до ширини канал прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль?

Розв'язання. Нехай x − ширина каналу, F − його живий переріз. Тоді глибина каналу $\frac{F}{x}$ а його змочений периметр $P(x) = x + \frac{2F}{x}$.

Необхідно знайти найменше значення функції P на проміжку $]0; +\infty[$. Знайдемо похідну:

$P'(x) = \frac{x^2 - 2F}{x^2}$.

Так як $P'(\sqrt{2F}) = 0$, $P'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{2F}$ і $P'(x) > 0$ при $x > \sqrt{2F}$, то функція P у точці $\sqrt{2F}$ досягає найменшого значення.

Отже, ширина каналу в розглянутому випадку повинна бути $\sqrt{2F}$, глибина $\frac{F}{\sqrt{2F}}$, а шукане відношення дорівнює $\frac{1}{2}$.■

Транспорт. *Примикання під'їзних шляхів.* Під час проектування доріг сільськогосподарського району часто виникає необхідність з'єднати під'їзним шляхом той чи інший об'єкт з автомагістраллю. Різні економічні міркування у таких випадках зазвичай показують, що під'їзний шлях повинен йти не перпендикулярно до магістралі, а під деяким гострим кутом, так званим кутом примикання під'їзного шляху до магістралі.

Задача №4. Центральна садиба радгоспу C (рис. 2) розташована у 50 км від райцентру A і в 30 км від магістралі, що проходить через райцентр. Під яким кутом до магістралі слід провести під'їзної шлях із C, щоб вартість перевезень вантажу із C в A та із A в C була найменшою, якщо відомо, що перевезення по магістралі буде обходитися радгоспу у 2 рази дешевше, ніж по під'їзному шляху?

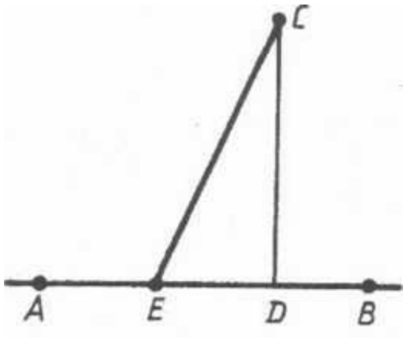


Рис. 2

Розв'язання. Нехай $DE = x$. Тоді $CE = \sqrt{900 + x^2}$, $AE = AD - x$ $=$ $= 40 - x$. Позначивши вартість перевезення 1т вантажу на 1 км по магістралі через p, знайдемо вартість перевезення 1т вантажу від *A* до *C* (або у зворотному напрямку):

$$T(x) = p(40 - x) + 2p\sqrt{900 + x^2} \quad (0 \leq x \leq 40).$$

Необхідно знайти найменше значення функції *T* на відрізку [0; 40]. Знайдемо похідну:

$$T'(x) = -p + \frac{2px}{\sqrt{900 + x^2}}.$$

Зауважуємо, що на розглянутому відрізку у функції *T* одна критична точка $x_0 = 10\sqrt{3}$, причому $T(x_0) = (40 + 30\sqrt{3})p$, у той час як $T(0) = T(40) = 100p$. Отже, у точці x_0 функція приймає найменше значення. Тепер легко знайти кут примикання:

$tg\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$. ■