МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_____________ Д. Є. Бобилєв

«___» _____________ 2023 р.

Реєстраційний № __________

«___» _____________ 2023 р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ» ЗА ПРОГРАМОЮ ПРОФІЛЬНОГО РІВНЯ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Горбатюк Валерії Вікторівни

Керівник: канд. пед. наук
Польгун К. В.

Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Горбатюк Валерія Вікторівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Як показує досвід педагогічної роботи, вивчення тригонометричних функцій, зокрема сприйняття теоретичного матеріалу та його практичне застосування, викликає чимало труднощів у здобувачів освіти. Це пов'язано з тим, що навчальні відомості з означеної теми характеризуються доволі високим рівнем абстрактності. Тому головною метою вчителя є підбір таких методів і засобів навчання, які забезпечили б наочність, образність, динамічність викладу і, відповідно, підвищили б ефективність освітнього процесу.

Виникає потреба в розробленні нових технологій щодо вивчення тригонометричних функцій учнями ліцеїв на профільному рівні підготовки, упровадження яких забезпечить продуктивну діяльність вчителя в класі, прискорить темп роботи учнів та сприятиме зростанню її результативності.

Крім того, застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) під час вивчення тригонометричних функцій у профільній школі сприяє створенню інтерактивного оточення для учнів, де вони можуть експериментувати з графіками функцій, візуалізувати та аналізувати залежності між кутами та значеннями тригонометричних функцій. Використання спеціалізованих програмних засобів дає змогу учням отримати конкретні практичні навички та розуміння прикладних аспектів тригонометрії у різних галузях, від фізики до інженерії.

Методичні особливості вивчення учнями тригонометричних функцій висвітлено в працях таких науковців як М. Бурда, Д. Васильєва, О. Вашуленко, В. Волошена, О. Глобін, А. Грохольська, В. Забранський, С. Лук'янова, Н. Мацько, Л. Панченко, З. Слєпкань, І. Соколовська, Т. Хмара та інші.

Отже, актуальність обраної проблеми спонукала нас до вибору **теми роботи:** «Методика навчання теми «Тригонометричні функції» за програмою профільного рівня».

Об'єкт дослідження: процес вивчення тригонометричних функцій у курсі алгебри і початків аналізу.

Предмет дослідження: методичні особливості вивчення тригонометричних функцій учнями ліцеїв на профільному рівні підготовки.

Мета дослідження: розробити комплекс дидактичних матеріалів для навчання учнів ліцеїв теми «Тригонометричні функції» на профільному рівні підготовки.

Відповідно до мети сформульовано такі **завдання дослідження:**

1. Охарактеризувати основні поняття теми дослідження.

2. Здійснити порівняльний аналіз викладення теми «Тригонометричні функції» у різних діючих підручниках з алгебри і початків аналізу для профільного рівня підготовки.

3. З'ясувати можливості використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення учнями тригонометричних функцій.

4. Дослідити сучасний стан вивчення тригонометричних функцій у практиці роботи ліцеїв.

5. Розробити систему завдань та плани-конспекти уроків з теми «Тригонометричні функції» для учнів ліцеїв на профільному рівні підготовки.

Досягненню мети й розв'язанню завдань сприяло використання комплексу **методів дослідження**: теоретичні – аналіз, синтез, порівняння, узагальнення науково-методичної літератури; практичні – розробка конспектів уроків.

Практичне значення дослідження. Розроблені дидактичні матеріали можуть бути використані вчителями під час проведення уроків алгебри та початків аналізу з учнями ліцеїв, а також викладачами закладів вищої та фахової передвищої освіти під час викладання математичних дисциплін.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 39 найменувань. Повний обсяг роботи становить 70 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ЛІЦЕЯХ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ

1.1. Характеристика основних понять теми дослідження

Основні поняття, пов’язані з дослідженням методичних особливостей вивчення тригонометричних функцій учнів ліцеїв на профільному рівні підготовки, включають такі терміни, як тригонометричні функції, профільний рівень підготовки, методичні особливості, індивідуальний та комплексний підходи, інтерактивне навчання, інформаційні технології.

Тригонометричні функції – математичні функції, які описують залежність між кутом і відношенням сторін прямокутного трикутника [6, с. 12].

Профільний рівень підготовки – рівень освіти, який спрямований на глибоке вивчення певних предметів і підготовку учнів до подальшого навчання в закладах вищої освіти [2, с. 5].

Методичні особливості – підходи та методи, що використовуються вчителем для підвищення результативності освітнього процесу та забезпечення ефективного засвоєння учнями навчального матеріалу [5].

Індивідуальний підхід – підхід до навчання, що передбачає врахування індивідуальних особливостей кожного учня, його потреб та можливостей. [16]

Комплексний підхід – підхід до навчання, що передбачає використання різноманітних методів та засобів навчання, налагодження сприятливого психологічного клімату та створення умов для практичного застосування знань [3, с. 8].

Інтерактивне навчання – підхід до навчання, що передбачає активну участь учнів у процесі навчання, співпрацю між вчителем та учнями, взаємодію та обмін інформацією між ними. [37]

Інформаційні технології – сукупність методів, інструментів, процесів та систем, що використовуються для збору, обробки, зберігання, передачі та використання інформації [38].

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) – це сукупність засобів, методів та систем, які використовуються для збору, обробки, зберігання, передачі та отримання інформації. Вони включають у себе комп'ютери, програмне забезпечення, мережі зв'язку, а також різноманітні електронні пристрої та ресурси, що дозволяють обмінюватися, зберігати та обробляти дані для розв'язання завдань у різних сферах людської діяльності [36].

Тригонометричні функції в математиці вивчаються у галузі аналізу, відомій як тригонометрія. Це галузь, яка досліджує взаємозв’язки між кутами та сторонами трикутників. Тригонометрія має широкі застосування в різних галузях науки, техніки і фізики, зокрема у геометрії, механіці, електротехніці, астрономії тощо [18, с. 109].

Важливими аспектами вивчення тригонометричних функцій є дослідницька діяльність учнів, їх активне залучення до освітнього процесу, розвиток критичного мислення та математичної культури, орієнтація на практичне застосування тригонометрії в різних сферах життя [4, с. 45].

Для успішного вивчення тригонометрії важливо забезпечити комплексний підхід до навчання, який передбачає не тільки теоретичну складову, але й виконання різноманітних практичних завдань та використання інтерактивних форм роботи з учнями. Важливим є застосування сучасних ІКТ в освітньому процесі, що сприяє підвищенню мотивації учнів до вивчення математики, і тригонометрії зокрема.

При вивченні тригонометричних функцій на профільному рівні важливо створити ситуацію, що дає змогу кожному учневі відчути власні успіхи та просуватися згідно зі своїми можливостями. Індивідуальний підхід передбачає адаптацію навчального процесу до особливостей кожного учня та його поточного рівня знань. Це може означати різні підходи у викладанні, використання різноманітних завдань з різним рівнем складності або навіть індивідуальні консультації з метою розбору певних складних аспектів матеріал. Це сприяє покращенню засвоєння матеріалу та створює комфортну атмосферу для навчання [5, с. 18].

Для успішного вивчення тригонометричних функцій учні повинні мати базові знання з алгебри та геометрії, зокрема знання про геометричні фігури та їх властивості, рівняння, системи рівнянь та нерівностей, алгебраїчні трансформації тощо. Вчителі мають використовувати ці знання як базу для подальшого вивчення тригонометрії [11, с. 200].

Загалом навчання учнів теми «Тригонометричні функції» потребує від учителів високої кваліфікації, творчого підходу до педагогічного процесу та використання різноманітних методів інтерактивного навчання.

На думку М. Ващенко [6, с. 81–82], вивчення тригонометричних функцій на профільному рівні підготовки має певні особливості, які відрізняють його від вивчення на рівні стандарту.

1. Глибша теоретична база. Більше уваги приділяється теоретичним питанням. Учні повинні мати ґрунтовні знання про тригонометричні функції та їх властивості, формули перетворення та застосування в задачах.

2. Розв'язування прикладних задач. У профільному курсі тригонометрії учні досліджують застосування тригонометрії в різних галузях науки та техніки (у навігації, геодезії, фізиці, інженерії, архітектурі та інших галузях). Це допомагає учням зрозуміти, як тригонометрія застосовується в реальному житті та сприяє розвитку їх зацікавленості математикою.

3. Використання додаткових формул. Учні вивчають додаткові формули, наприклад, формули половинного кута, формули потрійного кута, формули суми й різниці кутів тощо.

4. Застосування елементів математичного аналізу. Дослідження тригонометричних функцій здійснюється з використанням елементів математичного аналізу. Наприклад, здобувачі освіти вивчають поняття похідної та інтеграла тригонометричних функцій.

5. Розв’язування задач високого рівня складності. Учні навчаються розв’язувати більш складні задачі, що вимагають глибокого розуміння сутності тригонометричних функцій. Це можуть бути задачі на знаходження значень тригонометричних функцій при різних значеннях аргументу, розв’язування тригонометричних рівнянь, знаходження довжин сторін трикутника за даними кутами та сторонами тощо.

6. Використання ІКТ. Доцільним є використання різноманітних ІКТ, зокрема, графічних калькуляторів, комп’ютерних програм та інтерактивних матеріалів для вивчення тригонометрії. Це допомагає учням краще зрозуміти матеріал та розвивати їхні навички роботи з технологіями, які будуть корисні для їхньої майбутньої освіти та професійної діяльності.

7. Використання геометричних та алгебраїчних методів. У профільному курсі тригонометрії учні навчаються використовувати геометричні та алгебраїчні методи для розв’язування задач. Наприклад, вони можуть використовувати геометричні властивості трикутників для розв’язування задач на знаходження довжин сторін трикутника, кутів трикутника та інших параметрів. Також учні навчаються використовувати алгебраїчні методи для розв’язування тригонометричних рівнянь та інших задач [6, с. 83]

Отже, вивчення тригонометричних функцій на профільному рівні підготовки є більш глибоким та комплексним, охоплює теоретичні та прикладні аспекти, передбачає використання елементів математичного аналізу та ІКТ.

Коберник І. Т. виокремлює ряд педагогічних умов, що забезпечать ефективне вивчення тригонометричних функцій [16, с. 78]. Основними з них є:

1) Використання інтерактивних методів навчання. Для вивчення тригонометрії важливо використовувати різноманітні методи та прийоми навчання, такі як вправи на розвиток мислення, розв'язування задач, самостійна робота та дослідницька діяльність. Такі методи допомагають учням краще засвоївати матеріал та навчитися застосовувати його в реальних ситуаціях [8, с. 95].

2) Розвиток творчого мислення. Вивчення тригонометрії на профільному рівні підготовки сприяє розвитку творчого мислення учнів. Для цього вчителі мають стимулювати учнів до пошуку нетрадиційних рішень та використання тригонометричних функцій у життєвих ситуаціях.

3) Розвиток співпраці та комунікації. Доцільно залучати учнів до групових проектів, дискусій та використовувати інші методи, що сприяють співпраці та взаємодії між учнями [9, с. 33].

4) Розв'язування задач практичного змісту. Вивчення тригонометрії має здійснюватися в контексті практичних задач та реальних ситуацій. Вчителі мають допомагати учням розуміти, які задачі можна розв'язати за допомогою тригонометрії, і навчити їх застосовувати тригонометричні функції у різних сферах життя, наприклад, у будівництві, геодезії, фізиці та інших галузях.

5) Впровадження індивідуального підходу. Кожен учень має свій власний темп навчання та індивідуальні особливості. Вчителі мають застосовувати індивідуальний підхід до кожного учня, допомагати йому розуміти матеріал та навчити застосовувати тригонометричні функції з урахуванням його потреб та можливостей.

6) Підвищення мотивації. Доцільно створити творчу атмосферу для вивчення тригонометрії, що підвищуватиме мотивацію учнів. Для цього можна використовувати різноманітні методи, такі як ігри, конкурси, вікторини та інші прийоми, що підвищують рівень зацікавленості учнів у вивченні тригонометрії [10, с. 134].

Загалом вивчення тригонометричних функцій у старшій школі на профільному рівні підготовки має бути спрямоване на формування математичної компетентності учнів, яка включатиме знання, уміння та навички, необхідні для застосування тригонометрії в різних сферах життя.

Також важливою умовою вивчення тригонометричних функцій є наявність відповідного методичного забезпечення, яке містить навчальні матеріали, приклади та завдання для самостійної роботи учнів, методичні рекомендації для вчителів тощо. Вчителі мають ретельно підготуватися до кожного уроку, використовуючи сучасні ІКТ, комп'ютерні програми та інші засоби, що забезпечують більш ефективне засвоєння матеріалу учнями. Одним з ефективних методів вивчення тригонометричних функцій є інтерактивне навчання. Цей підхід полягає в тому, що учні активно беруть участь у процесі навчання, виконуючи різноманітні завдання, ігри та вправи. Інтерактивні методи дають змогу зробити навчання цікавішим та зрозумілішим для учнів [12, с. 61].

Крім того, вчителі мають оцінювати не тільки знання теоретичного матеріалу, але й уміння використовувати його для розв'язування різноманітних практичних завдань. Для цього можуть використовуватися тестові завдання, письмові контрольні роботи, практичні завдання та проекти.

Зокрема, важливим елементом успішного вивчення тригонометричних функцій є створення сприятливого психологічного клімату в класі. Вчителі мають створювати довірливі стосунки між учнями та вчителем, підтримувати взаєморозуміння та співпрацю, стимулювати активну участь учнів у процесі навчання. Також важливо враховувати індивідуальні особливості кожного учня та розробляти індивідуальний підхід до навчання для здобувачів освіти з особливими освітніми потребами [13, с.80].

Учителі можуть використовувати різноманітні підходи для створення сприятливого психологічного середовища.

Групові завдання. Створення групових завдань, де учні працюють разом над складними проблемами чи задачами з тригонометрії. Це може стимулювати взаєморозуміння, сприяти обміну знаннями та взаємній підтримці.

Інтерактивні методи навчання. Використання інтерактивних дошок, візуалізаційних матеріалів чи відеопрезентацій, що допомагають візуалізувати графіки функцій та залучають увагу учнів.

Індивідуальні консультації. Надання можливості учням звертатися до вчителя для індивідуальних консультацій або розбору складних тем, де кожен учень може отримати допомогу в розумінні матеріалу в особистій формі.

Адаптовані завдання. Розробка завдань чи матеріалів, які враховують особливості учнів, такі як використання конкретних прикладів з їхнього життя чи побуту для пояснення концепцій тригонометрії.

Інтерактивні онлайн-ресурси. Використання відкритих онлайн-платформ або програм, де учні можуть вивчати тригонометрію за допомогою візуальних матеріалів, анімацій та інтерактивних завдань.

Взаємодопомога. Створення партнерств або групової роботи, де учні з різними рівнями знань допомагають один одному засвоювати матеріал, що сприяє співпраці та взаєморозумінню.

Ці методи можуть бути адаптовані для врахування конкретних потреб учнів, зокрема для здобувачів освіти з особливими освітніми потребами. Наприклад, застосування візуальних засобів для навчання або індивідуального підходу до кожного учня залежно від їхніх потреб та можливостей.

Отже, вивчення тригонометричних функцій на профільному рівні підготовки вимагає від вчителів комплексного підходу та використання різноманітних методів та засобів навчання. Налагодження психологічного клімату дозволить зробити навчання більш ефективним та цікавим для учнів. Використання сучасних ІКТ також сприятиме покращенню якості навчання.

1.2. Порівняльний аналіз викладення теми «Тригонометричні функції» у різних підручниках з алгебри і початків аналізу

У вступі зазначено про необхідність вивчення тригонометричних функцій числового аргументу в шкільному курсі алгебри та математичного аналізу. З’ясуємо, що саме зумовлює цю необхідність. Основні моменти вивчення таких функцій включають:

1) познайомити здобувачів освіти з новим типом трансцендентної функції;

2) покращення обчислювальних навичок (робота з трансцендентними функціями вимагає складних обчислень);

3) наочно пояснити всі фундаментальні властивості функцій (зокрема, періодичність);

4) встановлення міждисциплінарних зв’язків з практикою (вивчення коливань маятника, електронного струму, хвильової теорії світла було б неможливим без знання тригонометричних функції);

5) розвиток логічного мислення (багатство формул вимагає перетворень неалгебраїчного характеру, що має дослідницький характер).

Вивчення тригонометричних функцій передбачає такі етапи:

І. Введення в тригонометричні функції кутових аргументів у геометрії (0°; 90°). Здобувачі освіти дізнаються, що синус, косинус, тангенс і котангенс кута залежить від його градусної шкали, знайомляться з табличними значеннями, основними тригонометричними тотожностями та деякими формулами відсікання.

ІІ. Узагальнення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса для кутів (0°; 180°). Розглядається взаємозв'язок тригонометричних функцій і координат точки на площині, доводяться теореми синусів і косинусів, вивчається питання розв’язання трикутників за допомогою тригонометричних співвідношень.

ІІІ. Введення поняття тригонометричних функції числових аргументів.

IV. Систематизація та розширення знань про тригонометричні функції числових значень, включно з використанням графіків і похідних функцій.

Також є кілька способів визначення тригонометричних функцій: аналітичні та геометричні. У шкільному курсі надається перевага геометричним способам через їх простоту та наочність.

Вивчення тригонометричних функцій у школі має деякі особливості: учні знайомляться з функціями, де кут відповідає числу, що може бути дещо незвичним. Крім того, раніше всі функції визначалися формулами з чітко вказаними діями над значеннями аргументу для отримання значень функції, а тут учні мають справу з табличними значеннями.

Таким чином, вивчаючи тригонометричні функції, учні краще розуміють сутність поняття функції. Вони починають усвідомлювати, що функцією може бути залежність між будь-якими множинами об’єктів, навіть якщо вони мають різну природу, головне – щоб кожному значенню аргументу відповідало єдине значення функції.

Наразі питання тригонометрії вивчаються у 10-11 класах у межах курсу «Алгебра і початки аналізу». Основні цілі зазвичай такі:

1) введення понять синуса, косинуса, тангенса та котангенса для довільного кута;

2) систематизація, узагальнення та розширення наявних знань учнів про тригонометричні функції кутового аргументу;

3) вивчення властивостей тригонометричних функцій;

4) навчання учнів будувати графіки тригонометричних функцій та виконувати деякі перетворення цих графіків.

Розглянемо, як ці цілі реалізуються у найпоширеніших підручниках, зокрема в підручниках [2], [7], [13], [23].

Загалом ці підручники надають повне уявлення про шкільний курс алгебри та початків аналізу, відповідають вимогам обов’язкового мінімуму освітнього змісту. Але кожен з них має свої особливості. Наприклад, підручник [2] має більш доступне для школярів викладення теоретичного матеріалу, доволі детальне, об’ємне, з великою кількістю прикладів і докладних розв’язків. Побудова всього курсу ґрунтується на пріоритетності функціонально-графічної лінії. Підручник [7] має прикладну спрямованість, вміст відрізняється більшою науковістю та близькістю до математичного аналізу, мова викладу більше наукова, ніж доступна. Теоретичний матеріал викладено досить стисло та лаконічно. Підручник [13] також має прикладну спрямованість, але, на відміну від [23], орієнтований на фізичні застосування математичних знань та навичок. У кінці підручника увесь вивчений матеріал представлений у вигляді схем та таблиць, що зручно не лише для учня під час підготовки до контрольного заходу, а й для вчителя при підготовці до уроку чи системи уроків. Також серед переваг цього підручника варто відзначити той факт, що кожна глава починається зі вступної бесіди, що є базою для введення нових основних понять, та закінчується заключною бесідою, яка містить корисну інформацію для учнів, які цікавляться математикою.

Розглянемо докладніше подання теми «Тригонометричні функції» у згаданих підручниках. Нагадаємо, що в шкільному курсі математики у різні роки використовувалися різні способи введення тригонометричних функцій: за допомогою тригонометричного кола, за допомогою проекції та інші. У сучасних навчальних посібниках віддається перевага визначенню за допомогою одиничного кола. При цьому тільки в [2] приділяється достатньо уваги роботі з числовим колом як самостійним об’єктом вивчення, і це одна із його переваг.

У підручнику [2] на вивчення одиничного кола відводиться 5 годин, що становить майже 20 % від 28 запланованих годин на вивчення всієї теми «Тригонометричні функції». Загалом тут розглядаються дві математичні моделі: «Одиничне коло» та «Одинична коло на координатній площині». Іншими словами, учні навчаються працювати одночасно у двох системах координат:

прямокутній декартовій та криволінійній. Це допоможе їм у подальшому, коли поняття синуса та косинуса кута будуть введені через координати. Тут не лише чітко виділяється алгоритм побудови точки на одиничному колі, а й проводиться аналогія з числовою прямою, де вказуються основні спільні та відмінні риси в побудові точки на колі та прямій. У підручнику [13] також непогано обґрунтовується саме введення одиничного кола: «У реальному житті доводиться рухатися не лише по прямій, а й по колу. Припустимо, що бігова доріжка стадіону є колом...». Крім того, навіть на етапі вивчення одиничного кола здобувач освіти неявно готується до розв’язання простих тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Наприклад, розглядаються завдання типу: «Знайти на одиничному колі точки з ординатою $y = 1/2$ та записати, яким числам t вони відповідають», «Знайти на одиничному колі точки з абсцисою $x < 1/2$ та записати, яким числам t вони відповідають». Отже, у підручнику [13], на відміну від інших підручників, проводиться досить ефективна попередня робота для введення тригонометричних функцій.

У підручнику [2] також є елементи роботи з одиничним колом, але не в такому обсязі, як у [13]. Особливу увагу привертає розділ «Обертальний рух та його властивості», де розглядаються питання побудови точки за заданою мірою кута та властивості обертального руху.

У підручнику [2], як підготовча робота до введення тригонометричних функцій, використовується повторення таких питань:

– радіанна міра кута (вимірювання кутів в радіанах, таблиця значень тригонометричних функцій – розглядається з геометричних міркувань);

– основні формули тригонометрії (основна тригонометрична тотожність, формули суми та різниці двох аргументів, формули зведення, формули суми та різниці синусів і косинусів, формули подвійного та половинного аргументів).

Загалом питання тригонометрії у цьому підручнику розглядаються в такій послідовності: тригонометричні перетворення – тригонометричні функції – тригонометричні рівняння та нерівності, на відміну від підручника [13], де спочатку вивчаються функції, потім рівняння та нерівності, а тільки потім перетворення (як властивості функцій).

Навчання за підручниками [2] та [13] передбачає вивчення тригонометричних функцій не на початку 10 класу (як це запропоновано в підручниках [7] та [23]), а в кінці. Автори підручника [2] пропонують розпочати вивчення тригонометрії після вивчення показникової та логарифмічної функцій. При цьому спочатку вивчаються тригонометричні перетворення, потім – тригонометричні рівняння, і лише після цього – тригонометричні функції. Таке розташування теми має кілька особливостей.

1. Вивчення тригонометричних рівнянь передбачає вивчення обернених тригонометричних функцій. Отже, спочатку учні детально опрацьовують поняття арксинуса, арккосинуса і арктангенса, а потім лише приступають до роботи з синусом, косинусом і тангенсом, хоча з логічної точки зору цілком доцільніше зробити навпаки.

2. Вивчення тригонометричних функцій після тригонометричних рівнянь виключає один із важливих методів розв’язування тригонометричних рівнянь – графічний метод (до того часу учні ще не вміють будувати графіки тригонометричних функцій).

Автори підручника [13] пропонують вивчати тригонометрію вже після вивчення похідної. Це дає змогу обчислювати приблизні значення тригонометричних функцій в точках, тим самим полегшуючи їх вивчення, допомагаючи при побудові графіків та розв’язанні тригонометричних рівнянь.

Щодо введення саме тригонометричних функцій, то тут кожен із підручників має свої особливості. Почнемо з визначення синуса та косинуса. У підручнику [2] наведено таке визначення: «$\cos x$ – це абсциса точки одиничного кола, отриманої обертанням точки P (1; 0) навколо початку координат на кут x, а $\sin x$ – її ордината». У [13]: «Якщо точка M одиничного кола відповідає числу t, то абсцису точки M називають косинусом числа t, а ординату точки M – синусом числа t». Ці два визначення принципово не відрізняються, за винятком лише того, що в підручнику [2] тригонометричні функції визначаються як функції кутового аргументу, а у [16] як функції числового аргументу. Ще є відмінності в позначенні змінної (варто зауважити, що при роботі з одиничним колом краще використовувати символи $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, зважаючи на те, що знак x в свідомості учнів асоціюється з абсцисою у декартовій прямокутній системі координат, а не з довжиною пройденого по одиничному колу шляху).

У підручнику [11] відсутні такі визначення синусу та косинусу, а замість них є фраза «… легко зрозуміти, що ордината точки P – це синус кута, а абсциса цієї точки – косинус кута», після чого наведено геометричне підтвердження цього факту. Це допомагає учням уникнути нерозуміння щодо того, чому раніше синусом називали відношення довжини катета і гіпотенузи, а зараз раптово з’явилися якісь абсциси та ординати. У підручнику [16] цей факт також досить добре пояснюється, але з затримкою на 3 параграфи, а в [3] пояснення зовсім відсутнє.

Тангенс же в усіх підручниках, за винятком [2], визначається як відношення синуса до косинуса. У підручнику [2] знову не дається чіткого визначення тангенсу, а наводиться лише геометрична інтерпретація: «ордината точки перетину прямої OP (P – точка на одиничному колі) і дотичної до кола в точці (1; 0) дорівнює тангенсу кута».

Автори дають визначення котангенса аналогічно визначенню тангенса за винятком підручника [2], де котангенс якось ігнорується і не розглядається як функція.

Детальніше зупинимося на питаннях дослідження та побудови графіків тригонометричних функцій. У підручнику [13] процес побудови графіка та дослідження функції відбувається наступним чином: відомі факти узагальнюються та формулюються як властивості функцій. Спочатку розглядаються такі властивості функції $y = \sin x$: область визначення, множина значень, непарність, зростання на відрізку $[0; \pi/2]$ та спадання на відрізку $[\pi/2; 3\pi/2]$, обмеженість зверху та знизу, найбільше та найменше значення. Потім складається таблиця основних значень функції на відрізку $[0; \pi]$, будуються відповідні точки та плавно їх з'єднують.

Користуючись властивістю непарності синуса, отриманий графік відображається відносно початку координат на відрізок $[-\pi; 0]$, застосовуючи властивість періодичності, графік функції продовжується на інших відрізках довжиною 2π. З використанням побудованого графіка виділяється властивість неперервності функції синус та область її значень. Дослідження функції $\cos x$ та побудова її графіка, як і в усіх інших підручниках, базується на факті, що $\cos x = \sin (x + \pi/2)$.

У підручнику [13] побудова синусоїди відбувається за допомогою одиничного кола, переміщення значення синуса до відповідних точок осі OX. Після побудови графіка знову звертаються до властивостей та їх відображення на графіку. У підручнику [2] синусоїда будується подібно до того, як це відбувається в [23], але всі властивості функцій, крім області визначення та множини значень, розглядаються в наступній темі «Основні властивості функцій», а потім лише переносяться на тригонометричні.

Варто відзначити, що в підручниках [2] та [7] не пояснюється той факт, що областю визначення функцій $\sin x$ та $\cos x$ є множина всіх дійсних чисел. Звичайно, цей факт досить очевидний, але підручник призначений передусім не для вчителя, а для учнів, і «міра очевидності», як відомо, у всіх різна. Тому не варто забувати про обґрунтування навіть очевидних фактів, оскільки це навчає дітей такої важливої для вивчення математики логічної точності та уважності в мисленні.

Щодо області значень тригонометричних функцій, то жодний з підручників не має чіткого обґрунтування цієї властивості. Усі «спроби» обґрунтування цієї властивості зводяться до розгляду подвійних нерівностей: $-1 \leq \sin x \leq 1$ та $-1 \leq \cos x \leq 1$, які виконуються для всіх значень *x*. Однак звідси зовсім не випливає те, що до області значень цих функцій входять всі точки відрізка [–1; 1].

Під час обґрунтування властивостей парності та непарності тригонометричних функцій, доказ тотожності $\sin(-x) = -\sin(x)$ переважно зводиться до симетрії точок *x* та *–x*, яка також чітко не обґрунтована ні в одному з підручників.

Монотонність тригонометричних функцій у всіх підручниках, крім [13], ілюструється за допомогою числової окружності. У підручнику [7], через те що тригонометричні перетворення вивчаються перед тригонометричними функціями, монотонність функції y = sin(x) обґрунтована більш детально, але все ж мають місце певні недоліки.

Під час вивчення властивостей періодичності автори підручників [2], [7] та [23] дають наступне визначення періодичності: «Функція *f*(x) називається періодичною, якщо існує таке число T_0, що для будь-якого *x* з області визначення даної функції виконується рівність $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число *T* називається періодом функції $f(x)$». У підручнику [13], рівність $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ замінюється менш сильною рівністю $f(x) = f(x + T)$, але знімаються обмеження на *x*. Тут x може бути будь-яким, а не тільки з області визначення. Зауважимо, що для функцій, областю визначення яких є усе множина *R*, ці два визначення будуть не лише еквівалентними, але й однаково виправданими. Але якщо застосовувати друге означення до функції $y = \sin x$, це може викликати у учнів труднощі у порівнянні значень цієї функції в точках, наприклад, -π і π. Тому більш доцільним є використання першого означення.

Тепер проаналізуємо системи завдань, спрямованих на закріплення вмінь та навичок, які передбачені програмою за темою «Тригонометричні функції».

Система завдань у підручнику [3] включає завдання з переведення від градусної міри до радіанної та навпаки, побудову кутів на одиничному колі, рух точки по колу, визначення тригонометричних функцій, дослідження та побудову графіків комбінацій тригонометричних функцій, знаходження значень тригонометричних функцій в деяких точках та їх знаків на деяких проміжках, знаходження похідних комбінацій тригонометричних функцій та обчислення приблизних значень тригонометричних функцій.

У підручниках [2] і [13] більше уваги приділяється властивостям комбінацій тригонометричних функцій, ніж у підручнику [3]. Тут зустрічаються завдання теоретичного характеру, наприклад, «Доведіть, що якщо функція $y = f(x)$ є періодичною, то і $y = k*f(x) + b$ також є періодичною», які піддавалися практичній вправі разом з гармонічними коливаннями. У підручнику [7] є ще одна особливість: тут велика кількість завдань обмежена змінною x, що допомагає учням усвідомити той факт, що «не всі властивості функції, розглянутої на множині всіх дійсних чисел, зберігаються при накладанні обмежень на область визначення цієї функції».

Найбільш повною серед усіх є система завдань у підручнику [23]. Тут, крім усього вищезазначеного, велика увага приділяється вмінням працювати з одиничним колом, наявні завдання для роботи з тригонометричними функціями як числового, так і кутового аргументів, використовуються функції, задані частинами, узагальнюються вміння розв’язувати рівняння, що містять тригонометричні функції, за допомогою графічного методу.

Загалом, говорячи про систему завдань у цих підручниках, варто відзначити певні недоліки у підручнику [3]. В ідеалі, розв’язання кожного наступного завдання повинно не лише базуватися на попередньому, але й містити додаткові ідеї. Тут же система не завжди чітко простежується, і рівень складності завдань не такий різноманітний.

Зате наявність окремого збірника завдань до підручника [23] дала змогу забезпечити його повноцінною системою вправ, достатньою для роботи в класі, для домашніх завдань та повторення. Усі завдання диференційовані за блоками, окремо виділені навіть усні та напівусні завдання, що надає можливість більш раціонального використання навчального часу.

1.3. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання учнів теми «Тригометричні функції»

Використання ІКТ є невід'ємною частиною сучасного навчання, зокрема під вивчення тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки. ІКТ можуть допомогти учням краще зрозуміти матеріал, забезпечити більш активну участь у процесі навчання та надати доступ до різноманітних ресурсів та інструментів [20, с. 76].

Деякі способи використання ІКТ при вивченні тригонометричних функцій подано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Способи використання ІКТ при навчанні теми «Тригонометричні функції»

№	Спосіб	Характеристика
1	Використання комп'ютерних програм та онлайн ресурсів	Існує багато комп'ютерних програм та веб-сайтів, які дозволяють візуалізувати та досліджувати тригонометричні функції. Наприклад, веб-сайти Graphing Calculator та Desmos дають змогу будувати графіки тригонометричних функцій у режимі реального часу, що допомагає учням

		краще розуміти їх властивості та залежності [21, с. 87].
2	Використання інтерактивних планшетів або дошок	Вчителі можуть використовувати інтерактивні планшети або дошки для демонстрації різних аспектів тригонометрії, подубови графіків, виконання обчислень та ілюстрації властивостей тригонометричних функцій у режимі реального часу.
3	Відеоуроки та онлайн-курси	Інтернет надає доступ до великої кількості відеоуроків та онлайн-курсів з тригонометрії. Вчитель може рекомендувати відеоуроки для самостійного вивчення, або використовувати їх у класі як додатковий матеріал для уточнення концепцій та розв’язування задач. Учні також можуть самостійно шукати відеоуроки та матеріали онлайн для додаткового вивчення тригонометрії [22, с. 28].
4	Симуляції та віртуальні лабораторії	ІКТ дозволяють створювати симуляції та віртуальні лабораторії, де учні можуть експериментувати зі змінними параметрами, спостерігати за впливом змін на графіки тригонометричних функцій та розв’язувати віртуальні задачі.

5	Математичні програми	Існують різні математичні програми, які дають змогу виконувати обчислення та розв'язувати тригонометричні рівняння. Наприклад, програми Mathematica, Maple або Matlab забезпечують можливість виконувати складні обчислення та дослідження тригонометричних функцій.
6	Використання веб-квестів та інтерактивних вправ	Вчителі можуть створювати веб-квести та інтерактивні вправи, під час виконання яких учні можуть перевіряти свої знання та розв'язувати завдання, пов'язані з тригонометрією. Це сприяє активному залученню здобувачів освіти до навчання та дає можливість отримувати миттєвий зворотний зв'язок [23, с. 8].

Використання ІКТ при вивченні тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки допомагає зробити навчання більш цікавим, доступним та ефективним. ІКТ підтримує активну участь учнів, розвиває їхні комп'ютерні навички, а також дозволяє зрозуміти та застосовувати тригонометрію в реальних ситуаціях. ІКТ допомагають візуалізувати складні поняття, виконувати швидкі обчислення та аналізувати дані. Крім того, використання ІКТ стимулює самостійну роботу учнів, надаючи їм змогу навчатися в зручний для них час та в довільному темпі.

Важливо пам'ятати, що використання ІКТ повинно сприяти розв'язуванню завдань навчання і досягненню основної мети вивчення тригонометричних функцій. ІКТ не повинні замінювати традиційні методи навчання, але можуть слугувати як додатковий інструмент для поліпшення якості освіти [24, с. 34].

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) стало важливою складовою навчального процесу у вивченні тригонометричних функцій. Перш за все, ці технології надають можливість інтерактивного спілкування та доступу до широкого спектру матеріалів для підтримки уроків. З використанням спеціалізованих програм та онлайн-ресурсів, учні мають змогу вивчати тригонометрію в більш доступний, інтерактивний спосіб, що полегшує їх розуміння цієї складної теми.

Додатково ІКТ робить можливим моделювання графіків тригонометричних функцій у реальному часі. Використання спеціалізованих програмних засобів дозволяє учням відобразити зміну графіків при зміні параметрів функцій, що сприяє кращому розумінню залежностей між аргументами та значеннями функцій.

Інтерактивні вправи та ігри, розроблені для вивчення тригонометрії за допомогою ІКТ, забезпечують веселе та цікаве заняття для учнів. Це може включати в себе використання візуальних симуляцій, які демонструють геометричні властивості тригонометричних функцій, що робить навчання більш привабливим та ефективним.

Також, завдяки ІКТ, можливе використання онлайн-ресурсів для додаткового самостійного вивчення теми. Відеоуроки, вебінари, електронні посібники та форуми для обговорення питань дозволяють учням вивчати тригонометрію власним темпом, удосконалюючи свої знання за допомогою різноманітних джерел.

Нарешті, використання ІКТ дає змогу вчителям індивідуалізувати навчання, створюючи завдання та матеріали, які враховують потреби кожного учня. Це робить процес навчання більш гнучким та персоналізованим, допомагаючи кожному учневі засвоїти тему на належному рівні.

Отже, використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні теми «Тригонометричні функції» учнів ліцеїв на профільному рівні підготовки має великий потенціал для поліпшення їх розуміння матеріалу та розвитку комп'ютерних навичок. Це може бути досягнуто за допомогою комп'ютерних програм, відеоуроків, симуляцій, веб-квестів та інших інтерактивних інструментів. Використання ІКТ підтримує сучасний підхід до навчання та сприяє розвитку компетентностей, які будуть корисні учням в майбутньому.

Висновки до розділу 1

У першому розділі магістерської роботи проаналізовано основні поняття теми «Тригонометричні функції», їхні властивості та взаємозв'язки. Проведено порівняльний аналіз викладення теми «Тригонометричні функції» у різних діючих підручниках з алгебри і початків аналізу для профільного рівня підготовки. Розглянуто концепції та взаємозв'язки між ними, що є важливим для успішного подальшого вивчення математики на зазначеному рівні. Крім того, аналіз теми «Тригонометричні функції» у ліцеях на профільному рівні вивчення показав важливі аспекти впровадження індивідуального підходу до навчання. Розглянуті методики навчання, що базуються на різноманітних підходах до розвитку математичних здібностей учнів, сприяють зростанню їхнього інтересу до предмета.

Акцентуємо увагу на необхідності системного вивчення тригонометричних функцій та їх властивостей, розвитку умінь застосовувати теоретичні знання під час розв'язування практичних завдань. Важливим аспектом навчання на сучасному етапі розвитку освіти є використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема під час навчання учнів тригонометричних функцій. ІКТ можуть слугувати ефективними інструментом для візуалізації та пояснення складних понять тригонометрії, сприяти кращому розумінню матеріалу учнями. Використання відеоуроків, онлайн-курсів, симуляцій та віртуальних лабораторій дає змогу учням експериментувати, спостерігати за змінами графіків тригонометричних функцій та розв'язувати віртуальні задачі.

Математичні програми, такі як Mathematica, Maple або Matlab, надають учням можливість виконувати складні обчислення, символьні обчислення та розв'язувати тригонометричні рівняння. Веб-квести та інтерактивні вправи сприяють активній участі учнів у навчанні, створюють умови для перевірки їхніх знань та надання негайноно зворотного зв'язку. Використання ІКТ під час вивчення тригонометричних функцій сприяє розвитку комп'ютерних навичок учнів, що є важливим у сучасному світі.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ЛІЦЕЯХ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ

2.1. Дослідження сучасного стану проблеми в практиці роботи ліцеїв

Нами було проведено діагностичну контрольну роботу для учнів 10-х класів Криворізького ліцею № 129 та Криворізького ліцею № 127. З метою виконання дослідження нами була розроблена діагностична контрольна робота, яка складалася з наступних задач. Наведемо завдання одного із варіантів:

Варіант 1.

1. *Спростити вираз (1 — 2):*

а) $\cos^2 8° + \sin^2 8°$; **б)** $\cos^2 8° - \sin^2 8°$;

в) $\dfrac{\text{tg } 8° + \text{tg } 2°}{1 - \text{tg } 8° \text{tg } 2°}$; **г)** $\sin 50° + \sin 40°$.

2. **а)** $\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta$; **б)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha)$.

3. Дано $\sin\alpha = -0{,}6$; $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$. Обчислити: $\text{tg }\alpha$, $\sin 2\alpha$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $2\sin x - 1 = 0$; б) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.

в) $\cos 3x + \cos 5x = 0$; г) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

5. Розв'язати нерівності:

А) $\text{tg } 2x > 1$; б) $\cos^2 4x - \sin^2 4x \le \dfrac{1}{2}$.

6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \text{ctg } x \text{ ctg } y = 1. \end{cases}$

Наводимо узагальнені результати дослідження, що оформлені у вигляді таблиць (табл. 2.1., табл. 2.2.).

Таблиця 2.1

Результати контрольної роботи, проведеної серед учнів 10–х класів КЛ № 129 та КЛ № 127

№	Учні 10 класу КЛ № 129, %			Учні 10 класу КЛ № 127, %		
	Правильна відповідь	Неповна відповідь	Неправильна відповідь	Правильна відповідь	Неповна відповідь	Неправильна відповідь
1.а	15,2	41,5	43,3	15	31,5	53,5
1.б	38,4	27,2	34,4	25,2	28,2	46,6
1.в	42,7	20,8	36,5	30,5	20,8	48,7
1.г	29	31,5	39,5	28,8	29,5	41,7
2.а	30,5	23	46,5	22,3	29	48,7
2.б	27,5	34,3	38,2	27,3	32,3	40,4
3	17,4	36,8	45,8	22,2	29,8	48
4.а	33,3	26	40,7	34,1	14	51,9
4.б	33,6	21,9	44,5	34,4	19,9	45,7
4.в	38,2	25,5	36,3	30	22,5	47,5
4.г	43,5	26,5	30	33,3	14,5	52,2
5.а	29,5	26,5	44	24,3	19,5	56,2
5.б	32,8	35	32,2	25,6	31	43,4
6	33	30,5	36,5	31,8	19,5	48,7

Таблиця 2.2

Результати контрольної роботи, проведеної серед учнів 10–х класів КЛ № 129 та КЛ № 127

Клас	Усього осіб	Рівень		
		Високий, %	Середній, %	Низький, %
10 клас КЛ № 129	16	20	30	50
10 клас КЛ № 127	16	14	34	52

Аналізуючи результати контрольної роботи, можна виділити такі типові помилки, які роблять учні ліцеїв при виконанні контрольних робіт з теми «Тригонометричні функції» (на профільному рівні підготовки):

– помилки у знаходженні значень тригонометричних функцій: зокрема, помилки у використанні таблиць, неправильне врахування знаків у різних квадрантах;

– помилки у виконанні операцій з тригонометричними функціями: неправильне скорочення виразів, неправильне застосування формул зведення тригонометричних функцій;

– помилки у тотожностях та формулах: неправильне застосування основних тригонометричних тотожностей, наприклад, помилки у формулах для синуса та косинуса подвійного кута;

– неправильне використання тригонометричних функцій для розв’язуванні задач: забували про відповідність тригонометричних функцій геометричним об’єктам у задачах;

– помилки у визначенні періодичності функцій: неправильне визначення періоду та періодичності тригонометричних функцій;

– недостатнє використання геометричних властивостей тригонометричних функцій: забуття про зв’язок між тригонометричними функціями та геометричними об’єктами;

– помилки у виконанні перетворень тригонометричних виразів: неправильне скорочення, розкладання або спрощення тригонометричних виразів;

– неправильне використання кутів в радіанах та градусах: помилки між вимірами кутів у виразах;

– помилки у виконанні операцій з тригонометричними функціями у складних виразах: недостатня уважність при застосуванні правил операцій з тригонометричними функціями у складних виразах;

– недостатнє розуміння функцій та їх графіків: забуття про зміщення, масштабування та властивості графіків тригонометричних функцій;

– помилки у виконанні тригонометричних операцій з різними кутами: наприклад, неправильне застосування формул для тригонометричних функцій зі різними кутами;

– недостатнє розуміння побудови тригонометричних таблиць та їх використання: наприклад, неправильне зчитування значень тригонометричних функцій у таблицях.

Все це вказує на наявність потреби в розвитку математичних здібностей учнів різноманітними методами навчання.

2.2. Розробки конспектів уроків з теми «Тригонометричні функції» за програмою профільного рівня

У вивченні тригонометричних функцій у закладі середньої освіти можна виділити два основні етапи:

- початкове знайомство з тригонометричними функціями з кутовими аргументами в курсах геометрії (8-9 класи);
- систематизація та розширення знань про тригонометричні функції в курсах елементарної алгебри та аналізу (10-11 класи).

На першому етапі не доводиться і не уточнюється, що вивчені залежності є функціями. Зміна синуса та косинуса при зміні кута доводиться на основі властивостей нахилу. Ці поняття є досить абстрактними для курсу геометрії, тому їх засвоєння відбувається досить погано. Проте ще більші труднощі викликає перехід до аргументу, більшому за 90°. Адже ми визначали тригонометричні функції через відношення сторін прямокутного трикутника, а, як відомо, в прямокутному трикутнику не може бути кута, більшого за 90°. Для пояснення цього факту вже на цьому етапі доводиться розглядати коло, що є своєрідною пропедевтичною роботою для введення тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою кола в курсі алгебри та початку аналізу.

На другому етапі відбувається перехід від кутового аргументу до числового. З самого початку курсу ми повинні розглядати тригонометричні функції кутів будь-якої величини – це означає, що передбачено попереднє ознайомлення учнів з кутом як величиною, яка може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$. У курсі геометрії таке поняття не фігурувало, отже, це необхідно відшкодувати на другому етапі. Таким чином, виникає необхідність введення числового кола, роботу з яким доцільно провести також на другому етапі.

При пропедевтичній роботі для вивчення моделі числового кола бажано розглянути геометричні завдання на знаходження довжини дуг чверті кола заданого радіуса, її третини та половини. Узагальнюючи отримані результати, важливо зробити висновок для учнів, що для подальшої роботи вигідніше вибирати саме кола з одиничним, а не довільним радіусом.

Під час роботи з числовими лініями здобувачам освіти необхідно розвивати такі вміння:

– знаходити точки на числовій прямій, що відповідають числам, представленим π частиною, і числам, не представленим π частиною;

– записувати аналітичні вирази для дуг числової прямої;

– визначати належність точки до тієї чи іншої системи координат;

– працювати одночасно у двох системах координат – криволінійній та декартовій, здійснювати перехід від однієї системи координат до іншої;

– знаходити координати точки на числовій прямій і використовувати задані координати для знаходження точки на числовій прямій.

Для цього доцільно розглядати завдання наступних типів:

– знайти на числовому колі точки $\pi/2, 9\pi, 26\pi/3, -5\pi/4, -7\pi/6 \ldots.$

– знайти на числовому колі точки 1, 2, –7, 4.5, -31 ….

– визначити, якій чверті належать точки $21\pi/4, -37\pi/6, 10,$ –95.

– позначте на числовому колі точки t, що задовольняють нерівності:

а) $\pi/6 + 2\pi k \le t \le 2\pi/3 + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\pi/3 + 2\pi k \le t \le 3\pi/4 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

– знайдіть декартові координати точок, що відповідають числам $\pi/4, 3\pi/2, 23\pi/6, -13\pi/3 \ldots$

– знайдіть позитивні та від'ємні числа, яким відповідають точки з координатами $(1/2;\ \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2});\ (\frac{\sqrt{3}}{2};\ -1/2), (-1{,}0)$ ....

– Знайдіть на числовому колі точки з ординатами (абсцисами), рівними $-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -1,$ абсциси (ординати) яких від’ємні, та запишіть, яким числам вони відповідають.

– Знайдіть на числовому колі точки з ординатою (абсцисою) > $\frac{\sqrt{2}}{2}$ та запишіть, яким числам вони відповідають.

Під час роботи з числовим колом слід звернути увагу на наступні моменти.

У вчителя повинно бути принаймні два макети з числовими колами. На першому з них показуються відлік в додатному напрямку з вказанням розташування точок $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3 \ldots.$ на другому – у від з зазначенням точок $0, -1/6, -1/4, -1/3, -1/2, -2/3 \ldots.$, причому другий макет доцільно показати після того, як учні відповідатимуть або спробують відповісти на запитання: «Що буде, якщо точка рухатиметься не в додатному, а в протилежному напрямку?»

Більшість проблем, пов’язаних із неоднозначністю відповідності між точками та числами на колі, виникають під час розв’язання завдань такого типу: «Знайти на числовому колі точки з ординатою (абсцисою) більше $\frac{\sqrt{3}}{2}$ та записати, яким числам вони відповідають».

Рекомендується на початковому етапі формування таких нерівностей, що характеризують дугу, виконувати за два кроки. Перший крок – скласти так зване «ядро» аналітичного запису $\pi/3 < t < 2\pi/3$, і лише на другому кроці – скласти загальний запис $\pi/3+2\pi k < t < 2\pi/3+2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Маю сміливість не погодитися з твердженням у статті [10], де автор пише, що уточнення «де $k \in \mathbb{Z}$» можна пропускати, записуючи його лише в парадних випадках - на контрольних або іспитових роботах. У більшості випадків це можна робити абсолютно безболісно, але що буде, якщо при відборі коренів рівняння чи нерівності, або при накладанні певних обмежень на функцію, параметр k може приймати не всі, наприклад, лише позитивні або лише парні значення?

Учні, звиклі записувати $+2\pi k$, не задумуючись про те, які значення може приймати параметр k, в такому випадку напишуть $+2\pi k$, що автоматично зробить їх рішення неправильним.

Це може призвести і до непорозуміння того факту, що, наприклад, множини «$4\pi k$, де к $\in \mathbb{Z}$» и «$2\pi k$, де к $\in \mathbb{Z}$» співпадають. Це, у свою чергу, може викликати труднощі при розгляді функцій з періодом, рівним 4π. Таким функціям приділяється чимало часу під час вивчення теми «Тригонометричні функції».

Розглянемо декілька прикладів завдань щодо вивчення тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки.

1. *Завдання з обчислення значень тригонометричних функцій:*

1) Обчислити значення синуса, косинуса та тангенса для кутів 30°, 45° та 60°.

2) Знайти значення синуса, косинуса та тангенса для кута 150°, якщо сума синуса і косинуса цього кута дорівнює 1.

2. *Завдання на побудову графіків тригонометричних функцій:*

1) Побудувати графік функції синуса на інтервалі від 0 до 360°.

2) Порівняти графіки функцій синуса та косинуса та з’ясувати, які зміни відбуваються при збільшенні або зменшенні кута.

3. Завдання на розв’язування тригонометричних рівнянь:

1) Розв’язати рівняння sin$x$ = 1/2 на проміжку [0, 2π].

2) Знайти всі значення кута x, для яких cos$x$ = 0.

4. Завдання на застосування тригонометрії у задачах:

1) За допомогою тригонометрії обчислити відстань між двома кораблями, якщо відомо, що кут між напрямками їхнього руху дорівнює 60°, а один корабель віддалений від берега на 5 км, а інший – на 8 км.

2) Знайти висоту вежі, якщо відстань від точки спостереження до основи вежі дорівнює 100 м, а кут нахилу до лінії горизонту дорівнює 30°.

Ці завдання дають змогу учням використовувати тригонометрію для розв’язання реальних задач, розвивають їхні навички об числення, аналітичне мислення та графічну інтерпретацію тригонометричних функцій. Крім того, ці завдання сприяють розвитку критичного мислення та уміння застосовувати знання тригонометрії у практичних ситуаціях.

5. Завдання на розуміння співвідношень між тригонометричними функціями:

1) Знайти значення косеканса та котангенса, знаючи, що синус кута дорівнює 3/5.

2) Встановити відношення між синусом, косинусом та тангенсом кута, використовуючи відповідні тригонометричні ідентичності.

6. Завдання на застосування формул тригонометрії:

1) Знайти довжину сторони трикутника, використовуючи теорему синусів або теорему косинусів.

2) Знайти площу трикутника, використовуючи формулу площі трикутника на основі півпериметра та радіуса вписаного кола.

7. Завдання на дослідження тригонометричних функцій:

1) Дослідити періодичність та період функції тангенса.

2) Знайти нулі та точки максимуму та мінімуму функції синуса.

Ці завдання розвивають навички розв’язування різних типів тригонометричних задач і дають учням можливість більш глибоко зрозуміти та застосувати концепції тригонометрії у різних контекстах. Вони сприяють розвитку математичної обізнаності та підготовки учнів на профільному рівні підготовки.

Розглянемо доцільні матеріали для комп'ютерного супроводу уроків з теми «Тригонометричні функції» в програмі Geogebra:

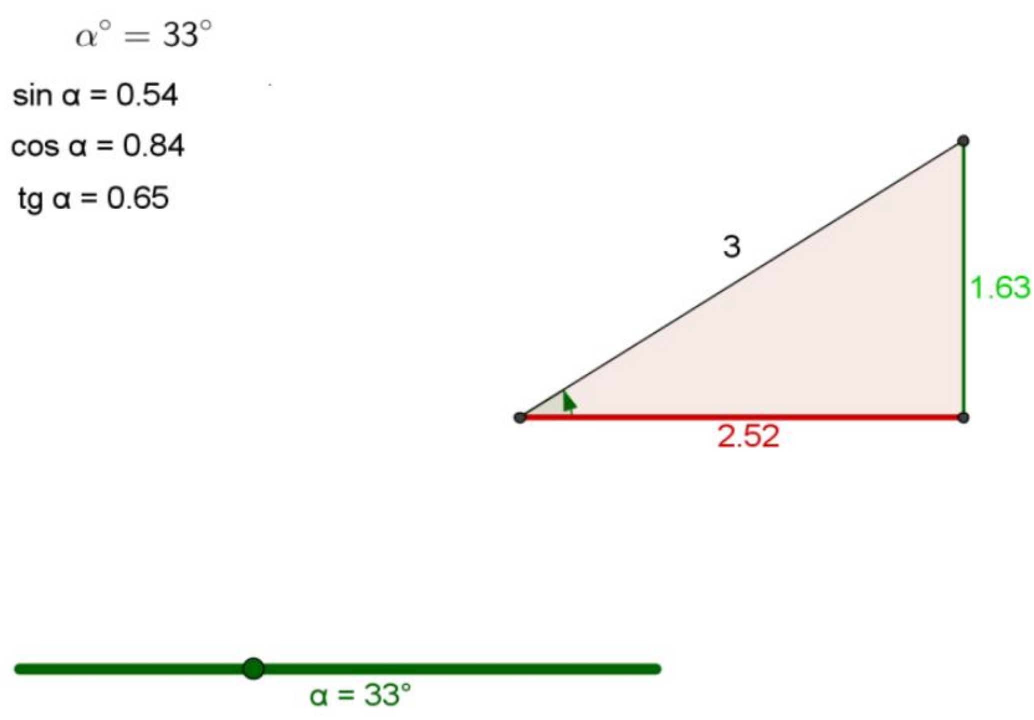


Рис. 2.1. Зв’язок тригонометричних функцій
з прямокутним трикутником

На перших заняттях доцільно нагадати про зв'язок тригонометричних функцій з прямокутним трикутником (Рис. 2.1). За допомогою цієї програми учні встановлюють зв'язок між визначеннями тригонометричних функцій для кутів, заданих у прямокутному трикутнику (означення, наведені в 8-му класі), та для довільних кутів (визначення, наведені у старших класах). Мета використання цієї програми полягає в закріпленні теми визначення тригонометричних функцій з використанням прямокутного трикутника.

Також важливо згадати одиниці вимірювання кутів у градусах і радіанах і їх зв'язок між собою.

Визначення тригонометричних функцій для довільних кутів (Рис. 2.2 і Рис. 2.3).

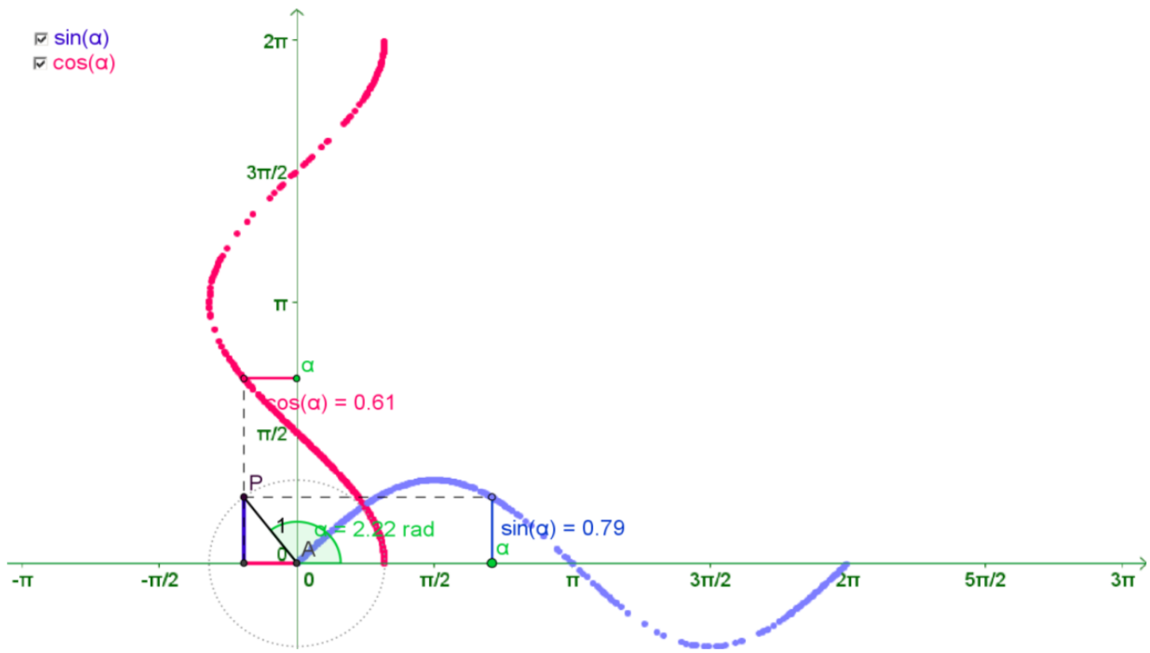


Рис. 2.2. Визначення тригонометричних функцій для довільних кутів (Спосіб 2)

Вивчення властивостей тригонометричних функцій на прикладі $A \cdot \sin(w \cdot x + \varphi) + B$. Опис програми: досліджує графік функції за різних значень параметрів (Рис. 2.4).

Ілюстрація осі тангенсів. Опис програми: змінюючи кут, отримуємо значення тангенса на осі, а також числове значення цієї функції (Рис. 2.5).

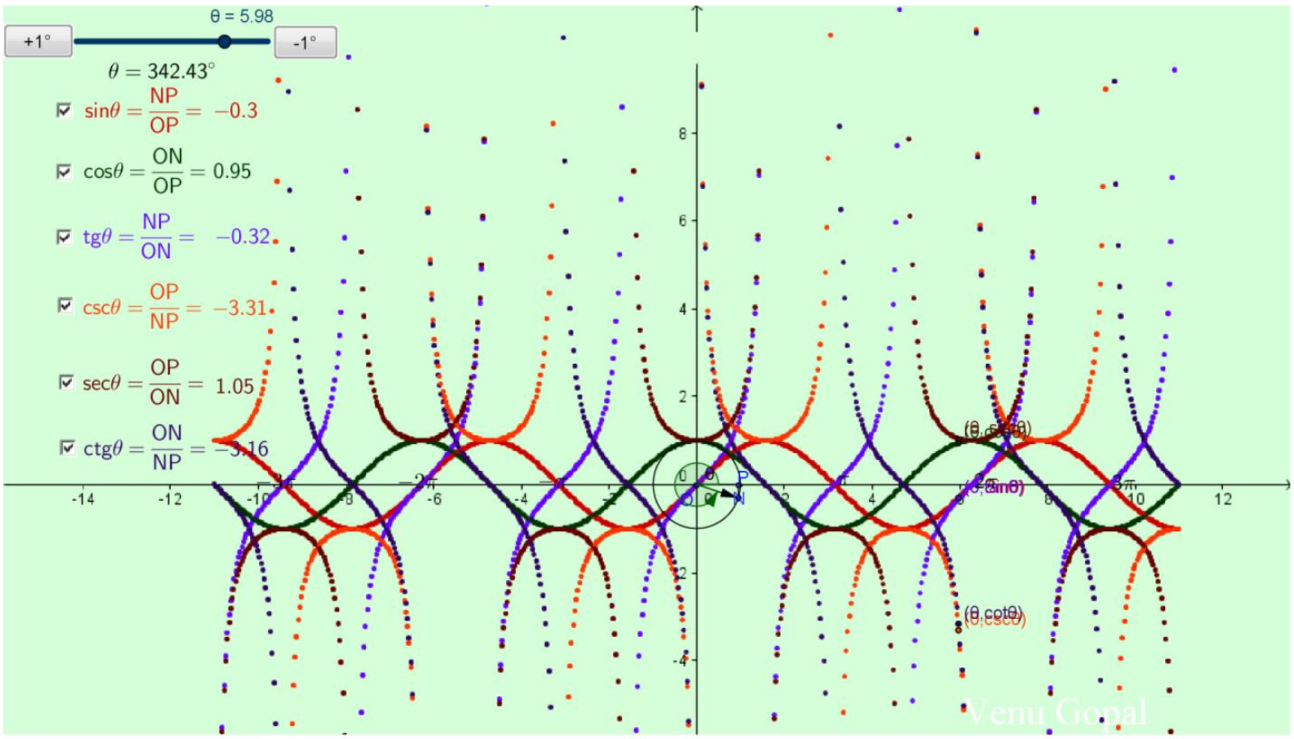


Рис. 2.3. Визначення тригонометричних функцій для довільних кутів (спосіб 1)

Ми створили систему тестів для учнів 10 класу за темою «Тригонометричні функції, їх властивості та графіки», використовуючи попередньо визначені типи завдань. Завдання із вибором однієї правильної відповіді включають умову (запитання або незавершене твердження) та чотири або п’ять варіантів відповіді, з одним правильним та рештою – дистракторами (правдоподібні, але неправильні відповіді). Ці дистрактори відображають типові помилки, які можуть допускати учні, що дозволяє вчителю вчасно коригувати знання та навички учнів.

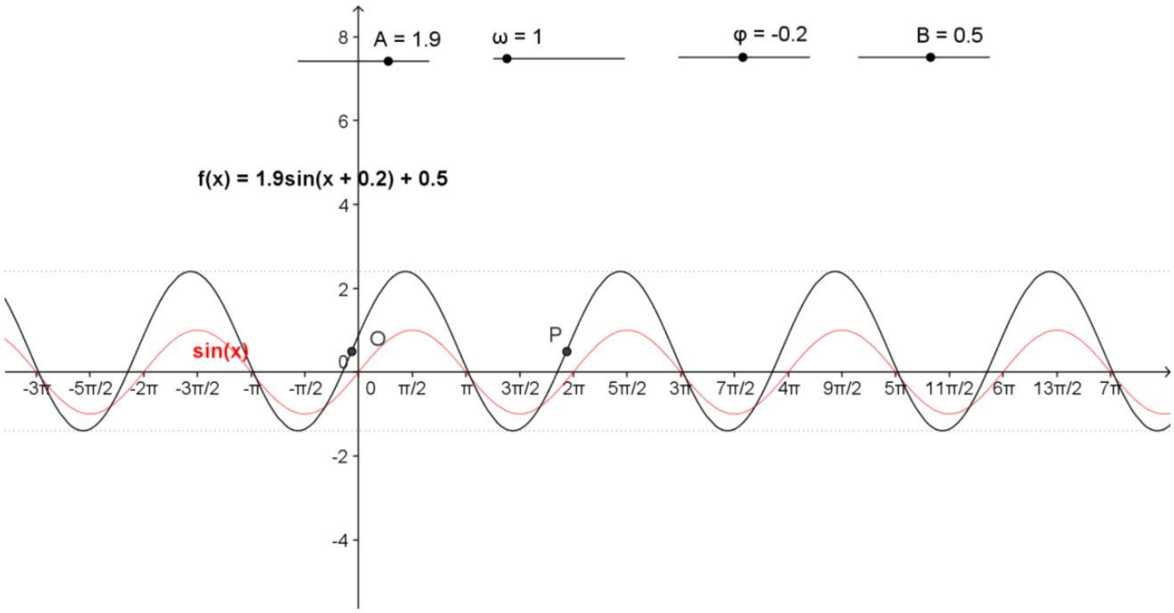


Рис. 2.4. $A \cdot \sin(w \cdot x + \varphi) + B$

Завдання із вибором однієї правильної відповіді є найбільш поширеними у практиці тестування через їх зручність для автоматизації контролю навчальних досягнень. Учні звикли до цих завдань, оскільки вони легше знаходять правильну відповідь серед неправильних, ніж самостійно її формулюють.

Щодо завдань із вибором декількох правильних відповідей, вони схожі за формою на попередні, але дозволяють вибрати кілька вірних із запропонованих варіантів. У таких тестах кожен варіант має бути абсолютно правильним, або абсолютно неправильним, щоб уникнути двозначності (Рис. 2.6). Запитання з кількома варіантами відповідей містять умову (запитання або неповне твердження) та список альтернатив (Рис. 2.7).

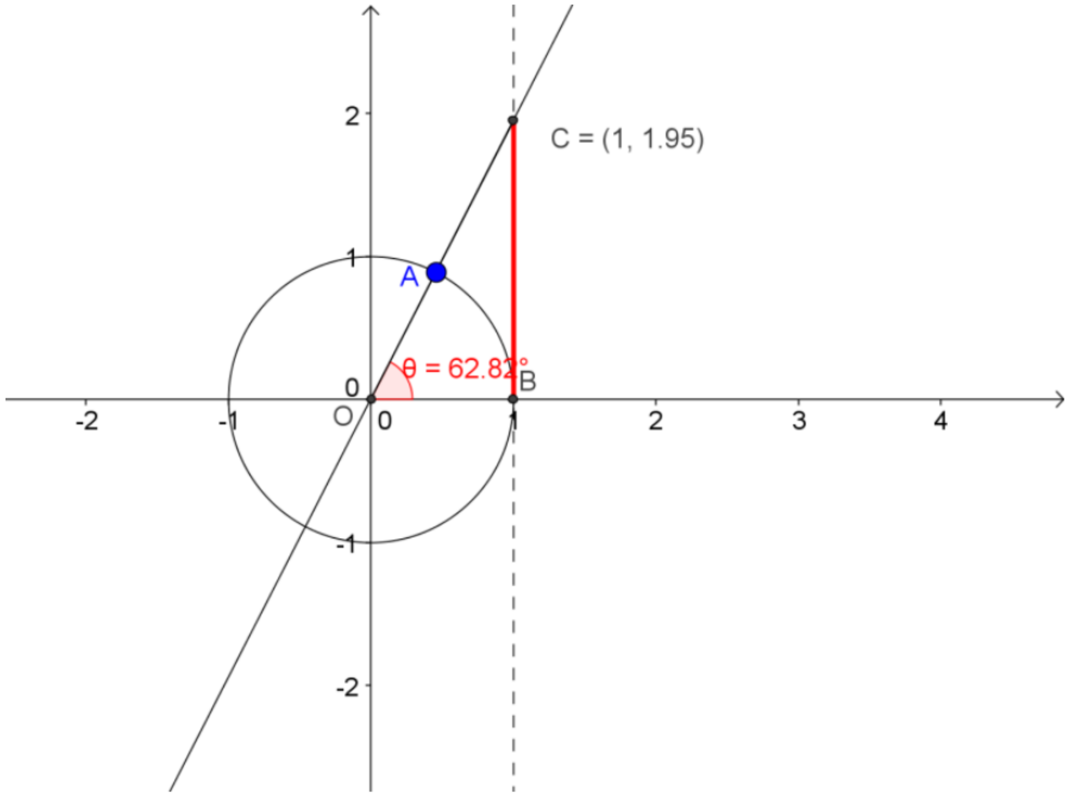


Рис. 2.5. Вісь тангенсів

Завдання на встановлення відповідності, часто відомі як логічні пари, складаються з питань та варіантів відповідей, які потрібно збігати між собою. Зазвичай, ці завдання містять 4 основи та 5-6 варіантів відповідей, один або два з яких є дистракторами – правдоподібними, але неправильними відповідями (Рис. 2.7-2.8). Під час їх виконання учні розвивають навички порівняння та співставлення об’єктів, що робить ці завдання цікавими для учнів і заповненими змістом для вчителів. Такі завдання також сприяють психологічній підготовці учнів до державної підсумкової атестації чи зовнішнього незалежного оцінювання.

Рис. 2.6. Одна правильна відповідь

Завдання на встановлення правильної послідовності (Рис. 2.9) містять дії, які потрібно впорядкувати у правильній послідовності, де кожна дія відповідає певній цифрі. При розробці матеріалів для тестового контролю з математики важливо дотримуватись деяких правил, зокрема, уникати неправильних відповідей, які учень не може обґрунтувати на момент тестування, а також створювати правдоподібні, але неправильні відповіді на основі типових помилок. Такий підхід допомагає оптимізувати навчальний процес в цілому. Використання комп'ютерної техніки зробить заняття математики більш насиченими та цікавими, сприяючи розвитку активної роботи учнів та їхньої пізнавальної активності.

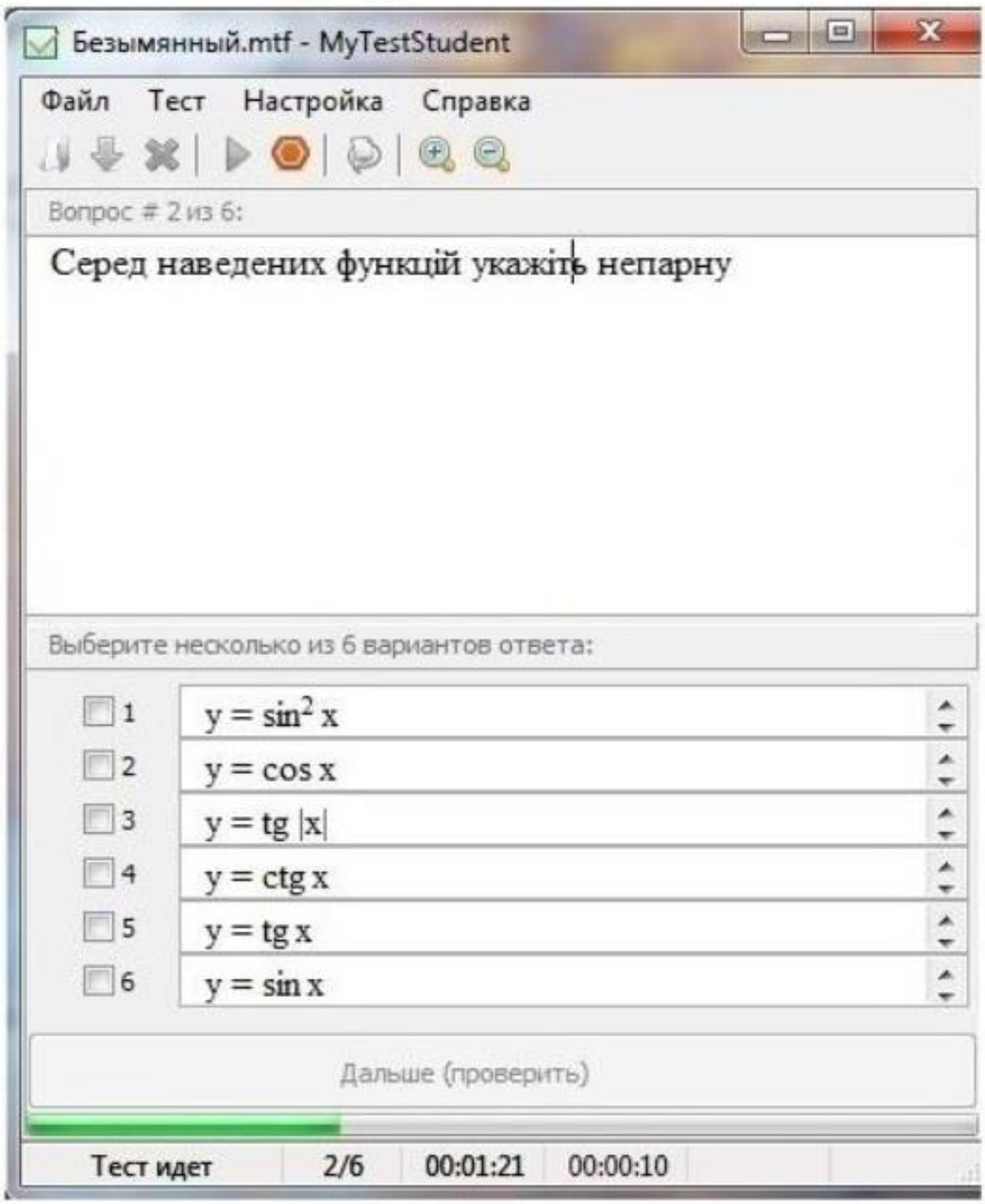


Рис. 2.7. Декілька правильних відповідей

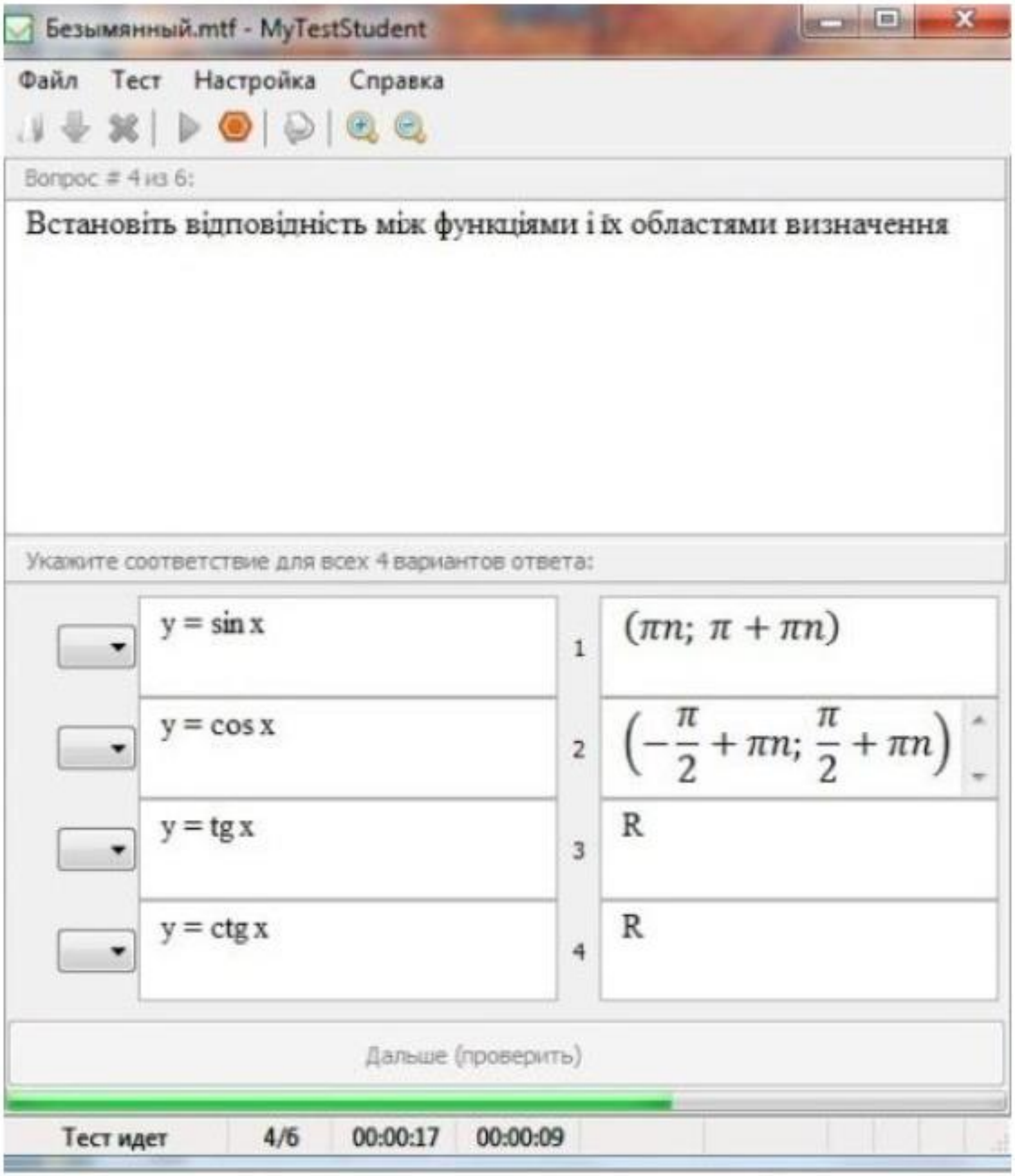


Рис. 2.8. Завдання на встановлення відповідності

Завдання на встановлення відповідності у темі тригонометричні функції часто вимагають порівняння між значеннями кутів та відповідними значеннями тригонометричних функцій. Учням дають завдання співставити геометричні конфігурації з виразами тригонометричних функцій, використовуючи їх властивості та графіки. Це сприяє кращому розумінню співвідношення між кутами та значеннями тригонометричних функцій через їх геометричне походження.

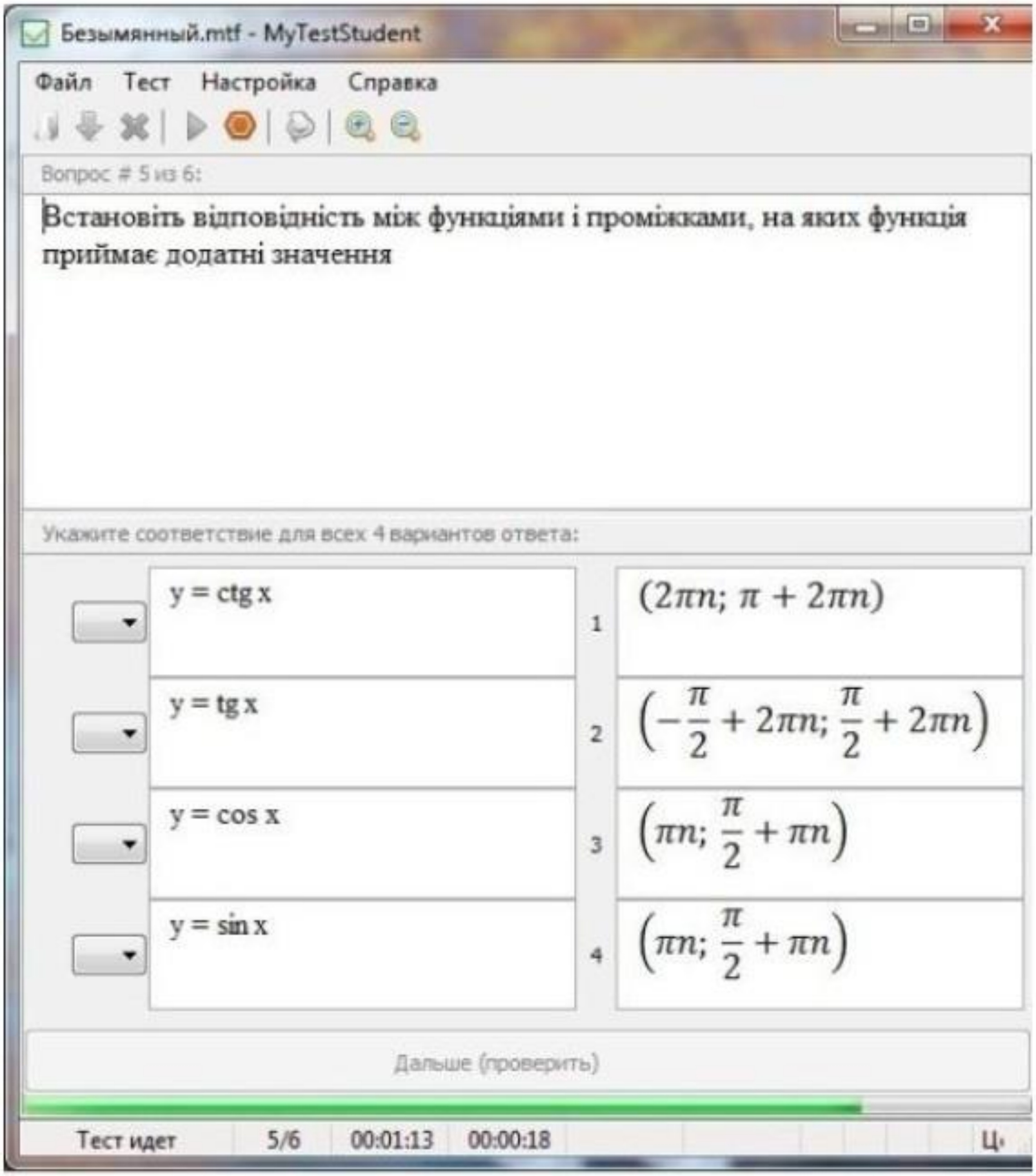


Рис. 2.9. Завдання на встановлення відповідностей

Завдання на встановлення відповідності в темі тригонометричні функції сприяють розвитку в учнів навичок аналізу та вміння розпізнавати геометричні зв'язки між кутами та значеннями тригонометричних функцій. Вони допомагають уявляти графіки та властивості функцій, що дозволяє легше виконувати обчислення та розв'язувати тригонометричні задачі. Через такі завдання студенти можуть краще зрозуміти, як кутові значення впливають на значення тригонометричних функцій, що є ключовим у вивченні тригонометрії.

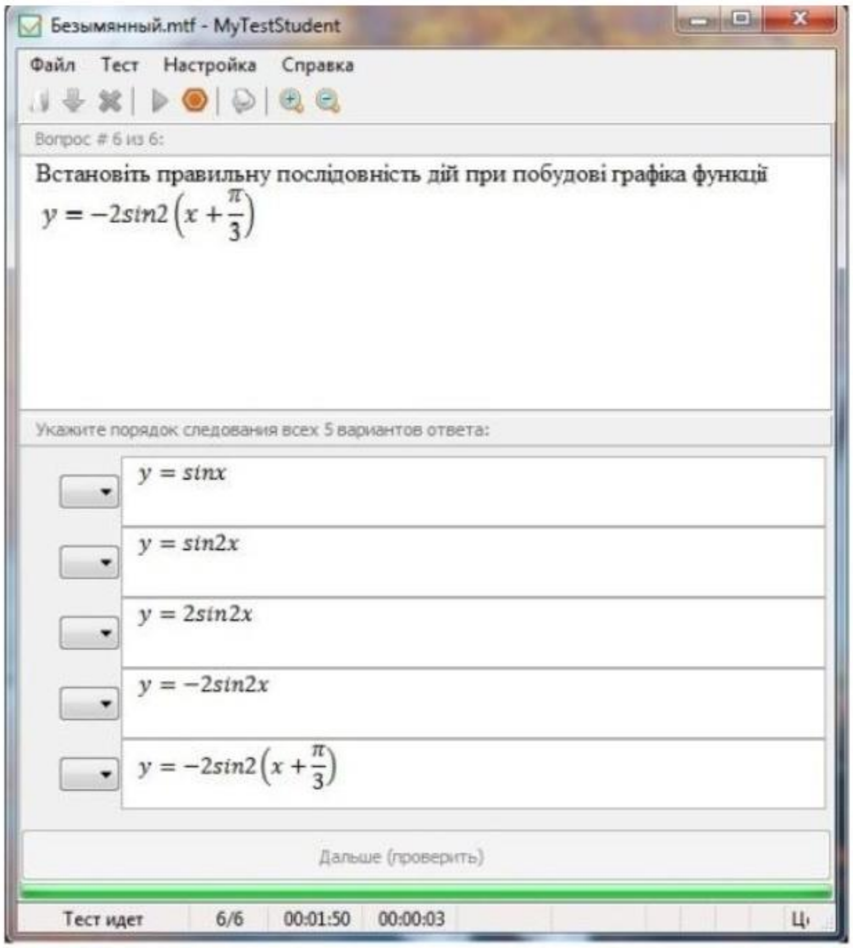


Рис. 2.10. Завдання на встановлення послідовності дій

Завдання на встановлення послідовності дій у темі тригонометричні функції часто вимагають від учнів послідовного застосування формул та властивостей тригонометричних функцій для отримання кінцевого результату. Вони сприяють розвитку логічного мислення та уміння використовувати правила та тотожності тригонометрії для складних обчислень. Ці завдання допомагають усвідомити важливість правильної послідовності дій у вирішенні тригонометричних завдань.

Розробка конспекту уроку щодо вивчення тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки

Тема: Періодичність тригонометричних функцій. Графіки тригонометричних функцій та їх властивості.

Мета: сформувати в учнів поняття «періодичність тригонометричних функцій», вміння будувати графіки тригонометричних функцій, знаходження найменших додатних періодів тригонометричних функцій, закріпити знання, здобуті на попередніх заняттях,; сформувати в учнів умінь знаходити періоди функцій $y = \sin(kx + b)$, $y = \cos(kx + b)$, $y = \mathrm{tg}(kx + b)$, $y = \mathrm{ctg}(kx + b)$.

Тип уроку: засвоєння нових знань

ХІД ЗАНЯТТЯ

1. **Організаційна частина.**
2. **Перевірка домашнього завдання, перевірка раніше засвоєних знань**

Проведення самостійної роботи.

І в. **ІІ в.**

1. Побудуйте на одиничному колі точку P_α, на яку відображаються початкова точка P_0 (1; 0) при повороті на α рад навколо центра, якщо:

І в.	ІІ в.
1. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. *(3 бали)*	1. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. *(3 бали)*
2. Знайдіть	2. Знайдіть
$\sin\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $tg\frac{3\pi}{4}$, $ctg\frac{3\pi}{4}$. *(4 бали)*	$\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3}$, $tg\frac{2\pi}{3}$, $tg\frac{2\pi}{3}$. *(4 бали)*
3. Визначте знак добутку	3. Визначте знак добутку
sin 1 · cos 2 · tg 3. *(5 балів)*	cos 1 · sin 2 · ctg 3. *(5 балів)*

Відповідь:

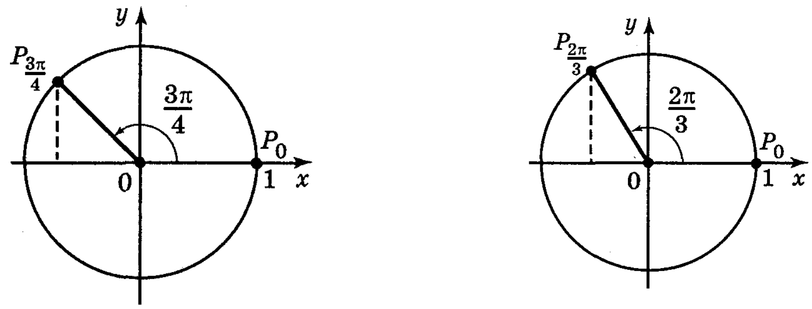


Рис. 2.11. Розв’язок до задачі 1(варіант1 і 2, відповідно)

<u>**І в.**</u>: **1.** Рис. 55. **2.** $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\,\frac{3\pi}{4}=-1$, $ctg\,\frac{3\pi}{4}=-1$. **3.** Плюс.

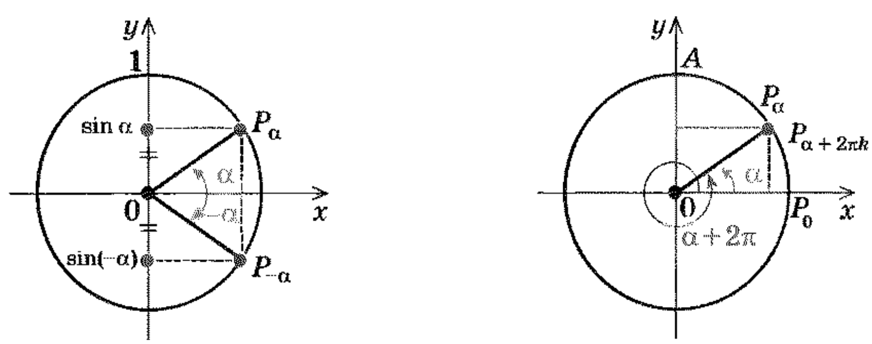
<u>**ІІ в.**</u>: **1.** Рис. 56. **2.** $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $tg\,\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$, $ctg\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.**3.**Мінус.

3. Мотивація навчальної роботи. Повідомлення теми і мети завдань.

Сьогодні на занятті ми з вами продовжимо розширювати наші знання про тригонометричні функції

4. Сприймання і первинне усвідомлення нового матеріалу, осмислення зв’язків і відношень в об’єктах вивчення.

1. Періодичність тригонометричних функцій доцільно демонструвати на рисунках (Рис. 2.12).



.

Рис. 2.12. Демонстрація періодичності функцій

2. Робота з презентаціями.

3. Робота з підручником (Істер О. С., ст.. 65–74).

Розглянемо, як розв'язані вправи в вашому підручнику.

4. Побудувати графік тригонометричних функцій.

Достатньо побудувати графік тригонометричної функції на відрізку, що дорівнює найменшому додатному періоду, який потім можна поширити на всю область визначення. Під час побудови графіка по точках використовуватимемо геометричну інтерпретацію кожної тригонометричної функції на одиничному колі.

Графік функції $y = \sin x$ (Рис. 2.13) побудуємо на відрізку $[0;2\pi]$. Оскільки синус числа α – це ордината точки одиничного кола, в яку переходить точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра на а рад, то побудуємо систему координат. Позначимо на осі *Ox* відрізок $[0;2\pi]$, довжина якого наближено дорівнює $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}14 \approx 6{,}28$.

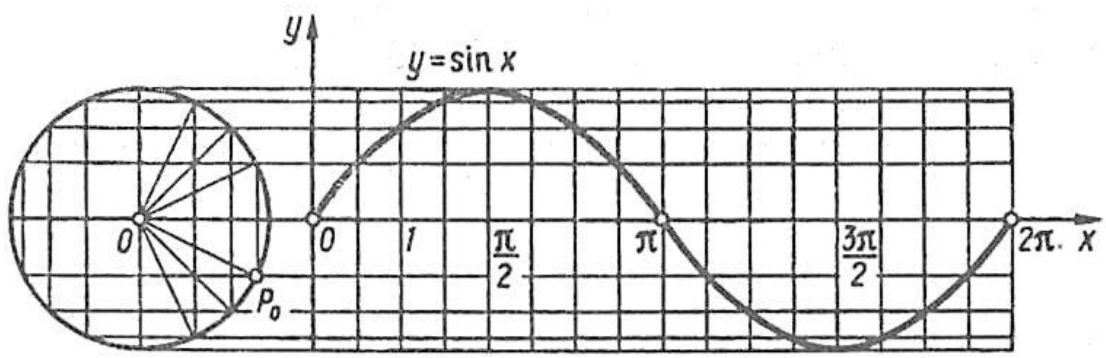


Рис. 2.13. Графік функції $y = \sin x$

Поза цим відрізком побудуємо коло з центром на осі *Ox* і радіусом, що дорівнює 1. Довжина кола також наближено дорівнює $2\pi \approx 6{,}28$. Розіб'ємо відрізок $[0;2\pi]$ і коло, починаючи від точки P_0, на 16 рівних частин. Через кожну точку поділу проведемо прямі, паралельні осі *Ox*. З кожної точки поділу кола проведемо перпендикуляри до осі *Ox*, довжини яких дорівнюють ординаті, а отже, синусу кута, утвореного радіусом OP_0 з віссю *Ox* і виміряного у радіанах. Кожна з цих ординат відповідає абсцисам α, позначеним точками поділу відрізка

[*0; 2π*] на осі *Ох*. Провівши прямі, паралельні осі *Оу* в кожній точці поділу цього відрізка, до перетину з відповідною паралельною прямою, одержимо у перетині точки графіка функції $y = \sin x$. Проведена через ці точки суцільна крива називається ***синусоїдою.***

Оскільки функція $y = \sin x$ періодична з періодом $\boldsymbol{2n\pi}$ (Рис 2.14)**,** де $n \in Z$, тобто $y = \sin(x + 2n\pi)$, то для продовження графіка за межі відрізка [*0;2π*] досить виконати побудову графіка функцій виду $y = \sin(x + 2\pi)$, $y = \sin(x - 2\pi)$, $y = \sin(x + 4\pi)$, $y = \sin(x - 4\pi)$, $y = \sin(x + 6\pi)$, $y = \sin(x - 6\pi)$, ... паралельно переносячи графік функції $y = \sin x$ на *2π, 4π, 6π*, ... одиниць ліворуч і праворуч.

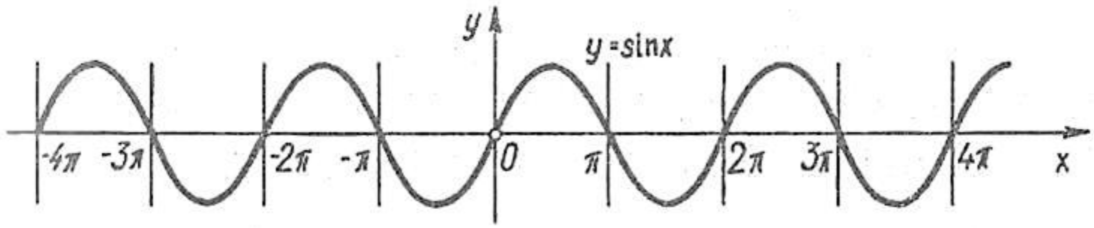


Рис. 2.14. Періодичність функції $y = \sin x$

Графік функції $y = \cos x$ (Рис. 2.14) побудуємо, скориставшись формулою зведення $cos\,\mathrm{x} = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і геометричним перетворенням відомого графіка. Отже, $y = \cos x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, тобто графік функції $y = \cos x$ можна одержати з графіка функції $y = \sin x$ паралельним перенесенням його ліворуч уздовж осі *Ох* на $\frac{\pi}{2}$ одиниць.

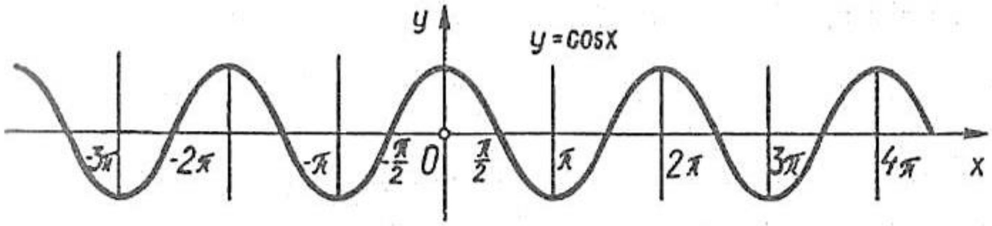


Рис. 2.15. Графік функції $y = \cos x$

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (Рис. 2.16) побудуємо за допомогою лінії тангенсів на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ довжина якого дорівнює періоду π цієї функції. Побудувавши систему координат і виділивши на осі *Ox* проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ поза ним побудуємо одиничне коло з центром на осі *Ox* і лінію тангенсів. Поділимо проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і праве півколо на вісім рівних частин. Через центр кола і точки поділу його проведемо прямі до перетину з лінією тангенсів. Утворені точки перетину визначають відрізки на лінії тангенсів з довжиною, що дорівнює тангенсу відповідного кута повороту, виміряною в радіанах. Числові значення цих кутів, позначені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ осі дорівнюють $-\frac{\pi}{8}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{8}; 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8}$.

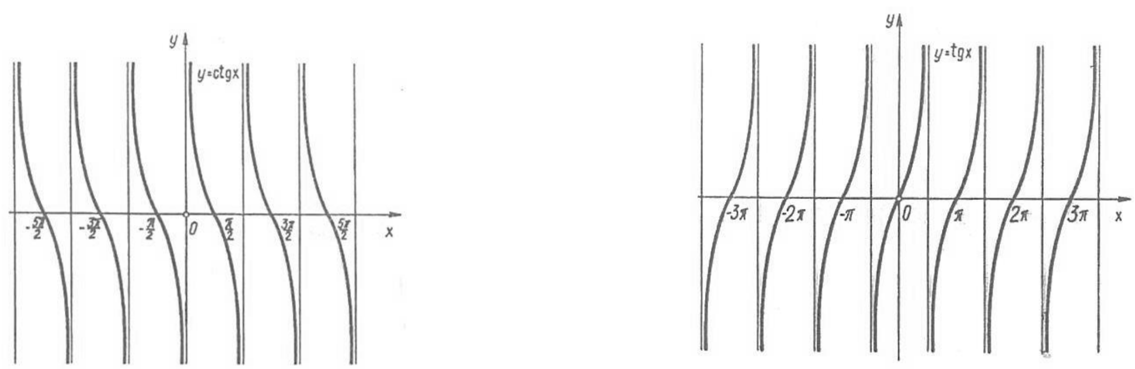


Рис. 2.16. Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = ctg\ x$

Через точки T_α на лінії тангенсів проведемо прямі, паралельні осі *Ox*, а через точки поділу проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ паралельні осі *Oy* . Перетини цих паралельних прямих визначають точки, що належать графіку функції $y = tg\ x$. Провівши плавну крину через ці точки, одержимо графік функції $y = tg\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ його межами, досить скористатися періодичністю функції тангенс, тобто тотожністю $tg(x + \pi n) = tg\ x$. Отже, треба виконати побудову функцій виду $y = tg(x + \pi)$, $y = tg(x - \pi)$, $y = tg(x + 2\pi)$, $y = tg(x - 2\pi)$, $y = tg(x + 3\pi)$, паралельним перенесенням графіка функції $y = tg\,x$ на *π, 2π, 3π,* ... одиниць ліворуч і праворуч. Графік функції $y = tg\,x$ називають ***тангенсоїдою.***

Графік функції $y = ctg\,x$ (Рис. 2.16) легко одержати, скориставшись формулою зведення $tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\,x$, $ctg\,x = -tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і двома геометричними перетвореннями – паралельним перенесенням тангенсоїди на $\frac{\pi}{2}$ одиниць ліворуч і перетворенням симетрії утвореного графіка відносно осі *Ox*.

5. Узагальнення і систематизація знань.

1. Виконання вправ

с. 49 № 24 (1–5)

с. 49. № 27(1–2)

2. Доведіть твердження: якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом Т, то функція $y = Af(kx + b)$ також періодична з періодом $\frac{T}{|k|}$ $(A, k, b -$ деякі числа і $k \neq 0)$.

3. Побудувати графіки функцій $y = sin\,2x$, $y = sin\frac{1}{2}x$ (Рис. 2.17).

Розв'язання. Використаємо геометричне перетворення відомого графіка функції $y = sin\,x$. Якщо $sin\,x = f(x)$, то $sin\,2x = f(kx)$. Відомо, що графік функції $y = f(kx)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ стисненням його до осі Oy при $k > 1$ і розтягуванням від осі *Oy* при $0 < k < 1$.

Отже, графік функції $y = sin\,2x$ можна одержати стисненням відомого графіка функції $y = sin\,x$ у два рази (Рис. 2.17.а), а графік функції $y = sin\frac{1}{2}x$ – розтягуванням його у два рази (Рис. 2.17.б).

4. Побудувати графік $y = 3cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Перетворимо вираз даної функції так, щоб перед аргументом у дужках залишився коефіцієнт, що дорівнює 1, тобто подамо у вигляді $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Це дасть змогу пізніше використати побудову графіка функції $y = f(x - a)$**,** де $a > 0$, паралельним перенесенням у напрямі осі *Ox* уже відомого графіка функції.

Послідовність побудови шуканого графіка може бути такою:

1) будуємо відомий графік функції $y = cos\, x$;

2) будуємо графік функції $y = cos\, 2x$, стискаючи графік функції $y = cos\, x$ у два рази до осі Oy*;*

3) будуємо графік функції $y = 3\, cos\, 2x$_y = 3cos2x, розтягуючи у три рази від осі *Ox* графік функції $y = cos\, 2x$;

4) будуємо шуканий графік $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, паралельно переносячи раніше побудований графік $y = 3\, cos\, 2x$ праворуч уздовж осі *Ox* на $\frac{\pi}{4}$ одиниць.

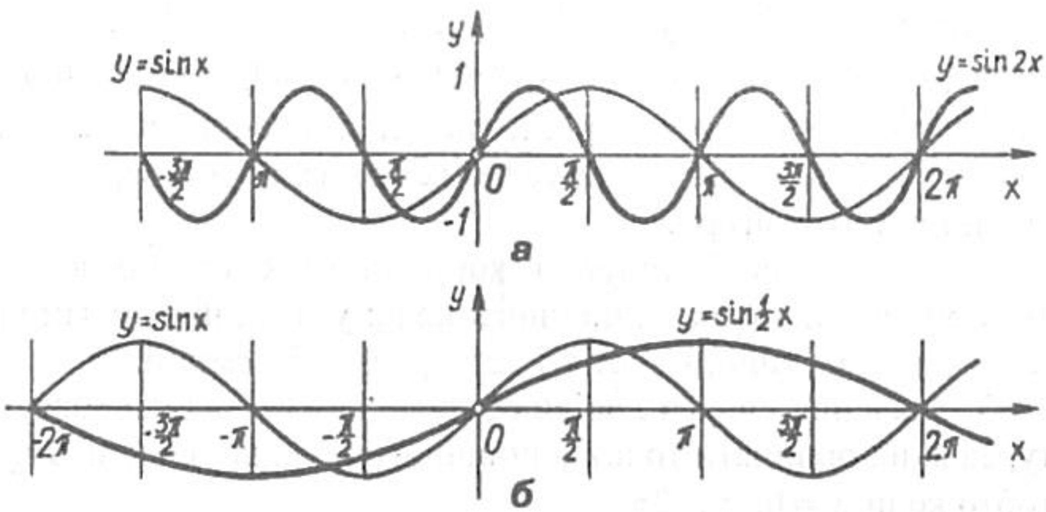


Рис. 2.17. Графік функції $y = sin\frac{1}{2}x$

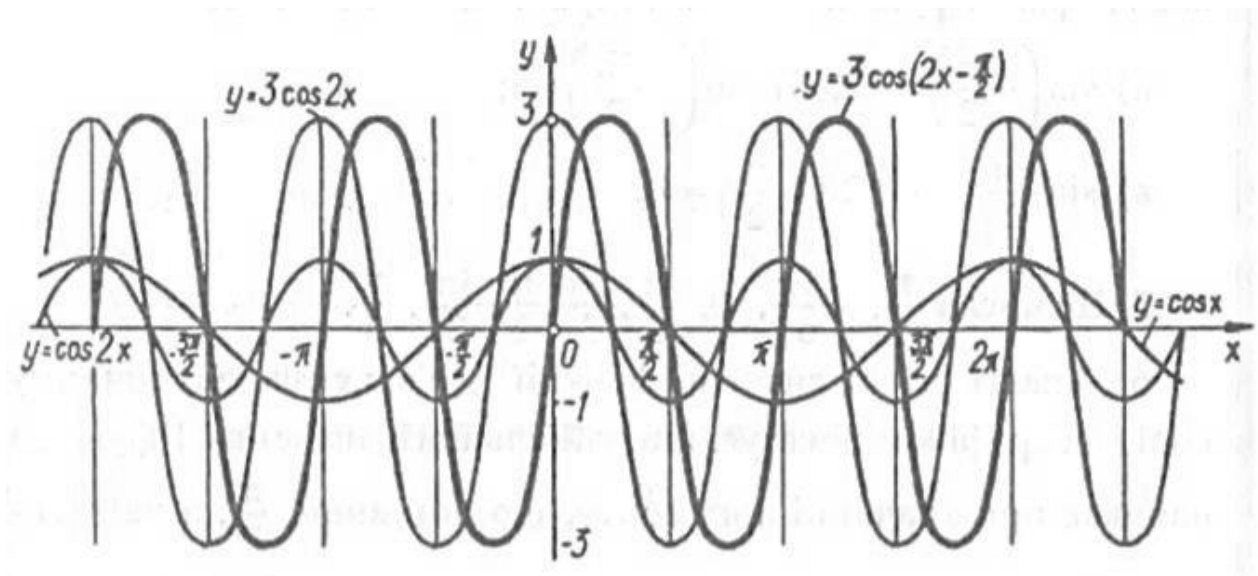


Рис. 2.17. Графік функції $y = 3cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

6. Домашнє завдання.

7. Підсумки заняття.

Оцінювання роботи, підсумки. Вправа «Мікрофон»

Розробка конспекту уроку щодо вивчення тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки

Тема: Властивості тригонометричної функції.

Мета: Вивчення властивостей тригонометричної функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (область визначення; множина значень; парність (непарність); симетрія графіка; періодичність; нулі; інтервали спадання (зростання); знакозмінні інтервали; максимальне і мінімальне значення).

Обладнання: інтерактивна дошка.

I. Перевірка домашнього завдання.

Вправа № 28. Перевірте правильність побудови графіків функцій (а–г), використовуючи малюнок, намальований перед заняттям.

II. Вивчення властивостей тригонометричних функцій.

Властивості вивчених тригонометричних функцій зручно записати в

Таблицю 2.1. При заповненні таблиці можливі такі коментарі:

1. Вирази sin x і cos x визначені для будь–яких x. Рівняння sin x і cos x визначені для будь–якого числа x, тому що для будь-якого числа x можна знайти координати точки P_α, одиничного кола.

Вираз tg x має сенс для будь–якого x, крім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Вираз ctg x має сенс для будь–якого x, крім чисел виду $x = \pi n$, $n \in Z$.

2. Оскільки sin x і cos x — ордината й абсциса точки P_α на одиничному колі, тому множиною значень синуса і косинуса є проміжок [–1; 1].

Оскільки tg α — вертикальна координата точки P_α на дотичній лінії, то область дотичної лінії R.

Оскільки ctg α — є абсциса точки Q_α косинуса, то область косинуса дорівнює R (Рис. 2.17).

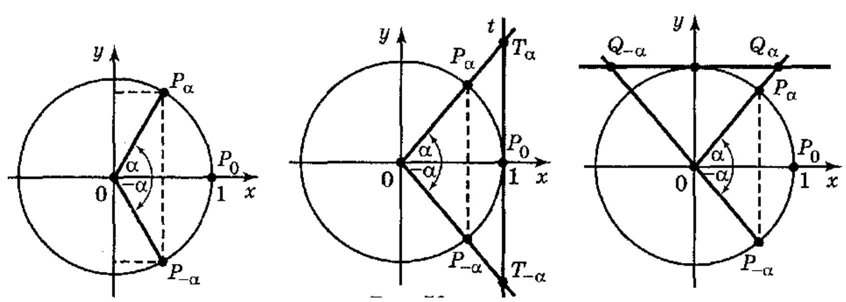


Рис. 2.17. Знаходження значень тригонометричних функцій

3. Оскільки точки P_α і $P_{-\alpha}$ розташовані осі OX, вони мають одну й ту саму абсцису та протилежні ординати, тобто sin (–α) = –sin α; cos (–α) = cos α.

Таблиця 2.1.

Властивості тригонометричних функцій

Функція / Властивість	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{ctg}\, x$
1.Область визначення	$D(y) \in R$	$D(y) \in R$	$D(y) \in R$, $x \neq \pi/2 + \pi \cdot n$	$D(y) \in R$, $x \neq \pi \cdot n$
2.Область значень	$E(y) \in [-1; 1]$	$E(y) \in [-1; 1]$	$E(y) \in R$	$E(y) \in R$
3.Парність (непарність)	Непарна	Парна	Непарна	Непарна
4.Періодичність	$T = 2\pi n,\ n \in Z$	$T = 2\pi n,\ n \in Z$	$T = \pi n,\ n \in Z$	$T = \pi n,\ n \in Z$
5.Набуває нульових значень	$\sin x = 0$, при $x = \pi n,\ n \in Z$	$\cos x = 0$, при $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{tg}\, x = 0$, при $x = \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{ctg}\, x = 0$, при $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$
6.Проміжки зростання	$[-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n]$	$[-\pi + 2\pi n;\ 0 + 2\pi n]$	$[-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n]$	Немає
7.Проміжки спадання	$[\pi/2 + 2\pi n;\ 3\pi/2 + 2\pi n]$	$[0 + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$	Немає	$[0 + \pi n;\ \pi + 2\pi n]$
8.Набуває додатних значень	$\sin x > 0$, $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$	$\cos x > 0$, $(-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n)$	$\mathrm{tg}\, x > 0$, $(0 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$	$\mathrm{ctg}\, x > 0$, $(0 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$
9.Набуває від'ємних значень	$\sin x < 0$, $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$	$\cos x < 0$, $(\pi/2 + 2\pi n;\ 3\pi/2 + 2\pi n)$	$\mathrm{tg}\, x < 0$, $(-\pi/2 + \pi n;\ 0 + \pi n)$	$\mathrm{ctg}\, x < 0$, $(-\pi/2 + \pi n;\ 0 + \pi n)$
10.Найбільше значення	$\sin x = 1$, при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$	$\cos x = 1$, при $x = 2\pi n,\ n \in Z$	Немає	Немає
11.Найменше значення	$\sin x = -1$, при $x = 3\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$	$\cos x = -1$, при $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	Немає	Немає

III. Застосування властивостей тригонометричних функцій до розв'язування вправ.

Виконання вправ

1. Використовувати властивості функції $y = \sin x$, для порівняння чисел:

а) $\sin\frac{13\pi}{7}$ і $\sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ і $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; в) sin 3 і sin 4; г) sin 1° і sin 1.

Відповідь: а) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

в) sin 3 > sin 4; г) sin 1° < sin 1.

2. Розташувати числа в порядку зростання:

а) sin 20°; sin 85°; sin 30°; б) sin 0,2; sin 0,3; sin 0,1; в) sin 2; sin (–2); sin (–1); sin 1.

Відповідь: а) sin 20°; sin 30°; sin 85°;

б) sin 0,1; sin 0,2; sin 0,3; в) sin (–2); sin (–1); sin 1; sin 2.

3. Використовувати властивості функції $y = \cos x$, для порівняня чисел:

а) cos 2,52 і cos 2,53; б) cos (–4,1) і cos (–4); в) cos 1 і cos 3; г) cos 4 і cos 5.

Відповідь: а) cos 2,52 > cos 2,53; б) cos (–4,1) > cos (–4);

в) cos 1 > cos 3; г) cos 4 < cos 5.

4. Розташувати числа в порядку зростання:

а) cos 13°; cos 53°; cos 23°; б) cos 0,3; cos 0,6; cos 0,9; в) cos 2; cos 4; cos 6.

Відповідь: а) *cos* 53°; cos 23°; cos 13°; б) cos 0,9; cos 0,6; cos 0,3;

в) cos 4; cos 2; cos 6.

5. Використовувати властивості функції $y = \operatorname{tg} x$, для порівняня чисел:

а) tg (–2,6π) і tg (–2,61π); б) tg 2,7π і tg 2,75π; в) tg 2 і tg 3; г) tg 1 і tg 1,5.

Відповідь: а) tg (–2,6π) > tg (–2,61π); б) tg 2,7π < .tg 2,75π;

в) tg 2 < tg 3; г) tg 1 < tg 1,5.

6. Розташувати числа в порядку зростання:

а) tg 25°; tg 65°; tg 15°; б) tg (–1); tg (–2); tg (–3); в) tg (–5); tg (–3); tg 3.

Відповідь: а) tg 15°; tg 25°; tg 65°; б) tg (–1); tg (–3); tg (–2);

в) tg 3; tg (–3); tg (–5).

IV. Підсумок уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ I § 7. Запитання і завдання для повторення до розділу I № 52-56, Вправи № 18 (а-г), № 35 (1-4). Повторити розділ I §1-6.

Розробка конспекту уроку щодо вивчення тригонометричних функцій у ліцеях на профільному рівні підготовки

Тема: Тригонометричні функції. Властивості функції y=sin x.
Побудова її графіка. Дослідження властивостей синусоїди на основі динамічної програми.

Мета: Формування знань учнів про поняття синуса, співвідношеннями між кутами, утвореними радіусами кола та ординатами точок кола, дослідження властивостей синуса для довільного значення кута на основі авторської програми Prot2.exe. Вироблення навичок та вмінь самостійного застосування властивостей синуса при розв’язуванні задач і вправ. Виховання логічного мислення, розвиток абстракції, творчості, інтелектуального потенціалу.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Оголошення теми, мети та завдань уроку. Розміщення учнів для найкращого сприйняття відеоматеріалів, виконання творчих завдань.

II. Актуалізація опорних знань учнів.

Фронтальна бесіда на повторення. Виконання письмових завдань, індивідуальних завдань. Завдання творчим групам:

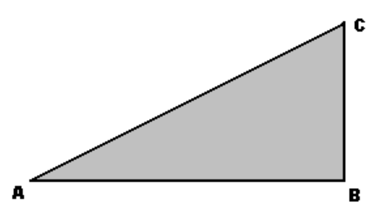


Рис. 2.18. Рисунок до індивідуального завдання

В прямокутному ΔABC(рис. 2.18) катети а). AB = 8см, BC = 6см;

б). AB=10дм, BC=7,5дм;

в). AB=12м, BC=9м.

Знайти гіпотенузу AC, sin A.

Порівнюємо результати. Очікувані відповіді: 10 см, 12,5 дм, 15м, sin A=0,8. Питання: чому для різних трикутників значення синуса те ж саме? що потрібно змінити, щоб змінилося значення синуса? чи можливо з цього завдання дати поняття синуса від'ємного кута, кута більшого за 180°?

Очікувані відповіді: ці трикутники подібні, тому мають рівні кути, значення синуса не залежить від розмірів трикутника, а залежить від величини кута A; значення синуса зміниться, якщо збільшити або зменшити кут A; ні, тому що згідно аксіом планіметрії градусна міра кута – величина додатна, сума кутів трикутника – 180°. Яка геометрична фігура чи її частина дозволяє розширити поняття синуса чи косинуса для кутів від 0° до 180°? Очікувана відповідь: Нехай $\boldsymbol{\alpha}$ – гострий кут, якому відповідає точка M(x,y) дуги AC (рис.2.19) З прямокутного трикутника OMN маємо: $cos\alpha = \frac{ON}{OM}, sin\alpha = \frac{MN}{OM}$, оскільки $OM = 1, ON = x,$

$$MN = y, \text{то } cos\alpha = x, sin\alpha = y$$

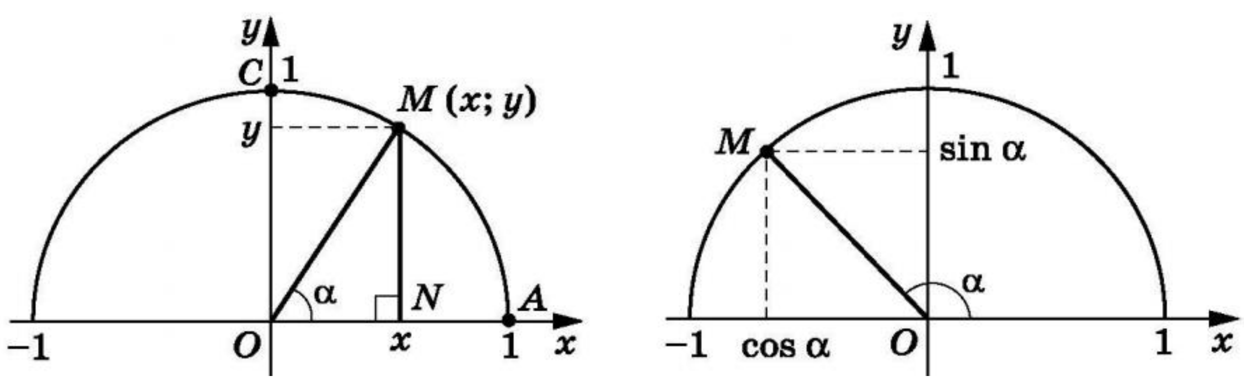


Рис. 2.19. Розв'язок індивідуального завдання

Означення: Косинусом і синусом кута $\boldsymbol{\alpha}$ ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) називають відповідно абсцису x та ординату y точки M одиничного півкола, яка відповідає куту $\boldsymbol{\alpha}$ (рис.3)

Отже, виявляється можливо ввести означення як синуса, так і косинуса для кутів від 0° до 180°.

Обчислити: а). sinα, якщо α=0°; 30°; 90°; 150°; 180°;

б). cosα ,якщо α=0°; 60°; 90°; 120°; 180°.

Очікувані відповіді: а). 0; 0,5; 1; 0,5; 0;

б). 1; 0,5; 0; 0,5; –1.

Завдання на індивідуальних картках:

1. Знайти катет, якщо гіпотенуза 10см, інший катет – 6см (8см).
2. Знайти діагональ прямокутника, сторони якого 12см і 5 см (13см).
3. Знайти периметр квадрата з діагоналлю 5√2 м (20м).
4. α – кут трикутника, sinα=0,8; радіус кола, описаного навколо цього трикутника 5дм. Який периметр даного прямокутного трикутника?(2,4м).
5. Заповнити таблицю

α	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin\alpha$								

III. Формування знань учнів.

Зосереджуємо увагу учнів на спостереженні динамічної програми Prot2.exe.

Учні поділяються за певним правилом на 2–3 творчі групи, які отримують завдання:

– який радіус кола, по якому зображено рух точки кола?

– в якому напрямі здійснюється рух точки (за чи проти годинникової стрілки)?

– який знак приписуємо кутам, що відкладаються за, – проти годинникової стрілки?

– чи може синус приймати значення > 1?, $1 <$?, $=1$?, $=0$?, <-1?, >-1?

– які найбільші значення може приймати синус довільного аргументу?

– які найменші значення може приймати синус довільного аргументу?

– як на вашу думку, скільки разів синус приймає значення 1, –1?

– для яких значень аргументу в градусній мірі значення синуса перетворюється в 0?

– для яких значень аргументу синус додатний?

– для яких значень аргументу синус від'ємний?

– через скільки градусів повторюються значення синуса (окремі відповіді для $\sin\alpha = 1$, $\sin\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0.5$, $\sin\alpha = -0.5$);

– чи існують обмеження для значень аргументу?

– чи існують обмеження для значень функції?

– що можна сказати про область визначення функції $y = \sin x$?

– яка область значень функції $y = \sin x$?

– на яких проміжках функція $y = \sin x$ зростаюча?

– на яких проміжках функція $y = \sin x$ спадна?

– що можна сказати про монотонність даної функції на всій області визначення?

– який період функції $y = \sin x$?

– чи спостерігається симетрія графіка цієї функції на проміжку $[-90°; +90°]$?

– чи відповідає такий графік властивостям парної (непарної) функції?

– перевірити за допомогою одиничного кола рівність $\sin(-30°) = -\sin(30°)$;

– який висновок про відношення до парності можна зробити?

IV. Первинне усвідомлення навчального матеріалу.

Заповнити таблицю властивостей функції $y = \sin x$.

Область визначення	$(-\infty;\infty)$	Множина дійсних чисел
Область значень	$[-1; 1]$	Замкнений інтервал від –1 до +1
Періодичність	Періодична $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$	Найменший додатний період T=360°, в радіанній мірі $T=2\pi$
Парність	Непарна	$\sin(-x) = -\sin x$
Проміжки зростання	(–90°; 90°) $(-\pi/2; \pi/2)$	Враховуючи періодичність (–90°+360°n; 90°+360°n), $n \in \mathbb{Z}$ $(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки спадання	(90°; 270°) $(\pi/2; 3\pi/2)$	Враховуючи періодичність (90°+360°n;270°+360°n), $n \in \mathbb{Z}$ $(\pi/2+2\pi n; 3\pi/2+2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки додатних значень функції	(0°; 180°) $(0; \pi)$	Враховуючи періодичність (0°+360°n; 180°+360°n), $n \in \mathbb{Z}$ $(0+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки від'ємних значень функції	(180°; 360°) $(\pi; 2\pi)$	Враховуючи періодичність (180°+360°n; 360°+360°n), $n \in \mathbb{Z}$ $(\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Точки, в яких функція приймає значення 1	90° $\pi/2$	Враховуючи періодичність 90°+360°n, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi/2+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Точки, в яких функція приймає значення – 1	–90° $-\pi/2$	Враховуючи періодичність –90°+360°n, $n \in \mathbb{Z}$; $-\pi/2+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Точки, в яких функція приймає значення 0	0° 0	Враховуючи властивості 180°n, $n \in \mathbb{Z}$; πn, $n \in \mathbb{Z}$

V. Осмислення основних ідей уроку.

Виконати завдання:

– які з даних рівнянь не мають розв'язків а) sin x = 0.5; б) sin x = –0.5; в) sin x = 1; г) sin x = –1; д) sin x = 1.5; ж) sin x = –1.5; чому?

– знайти найменше додатне число, яке є розв'язком рівнянь: а) sin x = – 1;

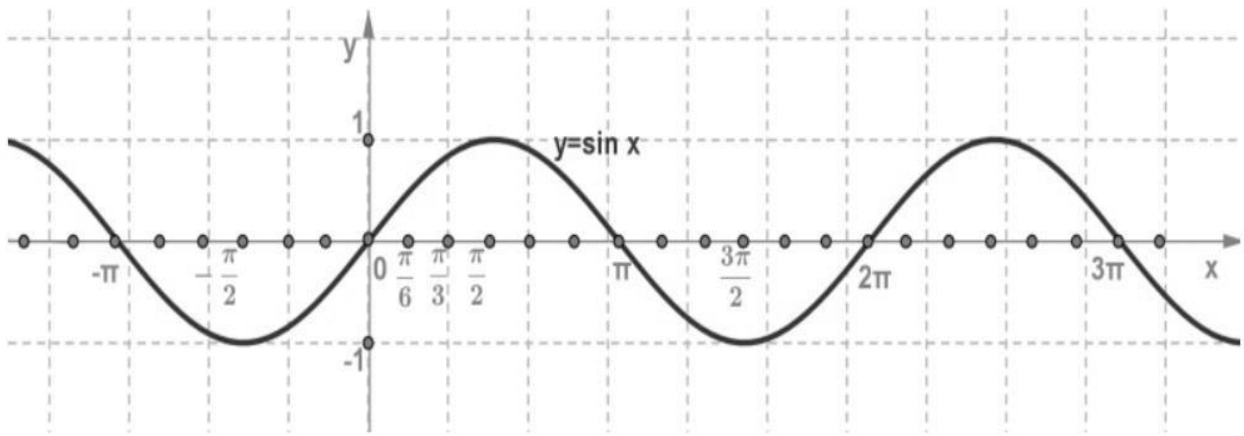


Рис. 2.20. Графік функції *y* = sin *x*

б) sin x = 0.5; в) sin x = – 0.5; г) sin x = 1;

– знайти найбільше від'ємне число, яке є розв'язком рівнянь: а) sin x = – 1; б) sin x = 0.5; в) sin x = – 0.5; г) sin x = 1;

– скільки коренів має рівняння: а) sin x = 0; б) sin x = 1; в) sin x = – 1?

– записати загальну формулу коренів цих рівнянь;

– чи є функція y= sin x зростаючою на проміжку: а) [–90°; +90°]? б) [0°; +90°]? в) [–90°; 0°]? г) [–180°; 0°]? д) [0°; +180°]?

– на основі яких властивостей синусоїди ґрунтується розв'язування нерівностей: а) sin x < 1.2; б) sin x >–1.3; в) sin x < – 1.4; г) sin x >1.5?

– яким двом значенням кутів I та II чвертей відповідає рівність: а) sin x =0.5; б) sin x = √2/2; в) sin x = √3/2? запишіть їх в радіанній мірі;

– яким двом значенням кутів III та IV чвертей відповідає рівність: а) sin x = – 0.5; б) sin x = – √2/2; в) sin x = – √3/2? запишіть їх в радіанній мірі.

Очікувані відповіді:

– д) і ж) так як синус як ордината одиничного кола не приймає значень, модуль яких перевищує 1; (або оскільки ОЗ { y= sin x }= [– 1;1]);

– а) 3π/2; б) π/6; в) 7π/6; г) π/2;

– а) – π/2; б) – 11π/6; в) – π/6; г) –3π/2;

– а), б), в) – безліч;

– а) x= πn, nϵZ; б) x= π/2+2πn, nϵZ; в) x= – π/2+2πn, nϵZ;

– а) так (по графіку); б) так (згідно а)); в) так (згідно а)) г) і д) ні (по графіку);

– на основі області значень y= sin x;

– а) 30° і 150°, π/6 і 5π/6; б) 45° і 135°, π/4 і 3π/4; в) 60° і 120°, π/3 і 2π/3;

– а) 210° і 330°, 7π/6 і 11π/6; б) 225° і 315°, 5π/4 і 7π/4;

в) 240° і 300°, 4π/3 і 5π/3.

VI. Домашнє завдання.

Вправи на закріплення.

Висновки до розділу 2

У другому розділі розглянуто можливості використання ІКТ під час навчання учнів ліцеїв теми «Тригонометричні функції» за програмою профільного рівня підготовки. Засновуючись на аналізі цієї теми, можна зробити такі висновки:

1. Аналізуючи проведену контрольну роботу з теми «Тригонометричні функції» для профільного рівня підготовки, ми виділили кілька типових помилок, які часто роблять учні. Перш за все, це недоліки у знаходженні значень тригонометричних функцій, що передбачає помилки використання таблиць та неправильне врахування знаків у різних квадрантах. Також часті помилки виникають під час виконання операцій з цими функціями, такі як неправильне скорочення виразів або неправильне застосування формул зведення тригонометричних функцій. Також поширеними є помилки у використанні тригонометричних функцій для розв’язання задач. Учні часто забувають про відповідність між тригонометричними функціями та геометричними об’єктами, що ускладнює їх правильне застосування. Можна виокремити помилки у

визначенні періодичності функцій та недостатнє використання геометричних властивостей тригонометричних функцій, що призводить до неправильного розуміння зв’язку між ними.

2. Використання ІКТ під час навчання теми «Тригонометричні функції» за програмою профільного рівня підготовки збагачує навчальний процес, сприяє кращому усвідомленню учнями навчального матеріалу, активізує учнів та надає їм можливість самостійно вивчати та вдосконалювати свої знання. Додаткові матеріали, відеоуроки, інтерактивні завдання та ігри допомагають зробити процес навчання більш доступним, цікавим і зрозумілим для учнів.

Упровадження ІКТ сприяє індивідуалізації навчання, оскільки учні можуть працювати з матеріалом у власному темпі, повторювати складні моменти та отримувати індивідуальний зворотний зв’язок. Це дає змогу кожному учневі розвиватися у математичній галузі відповідно до своїх особистих потреб та здібностей.

Отже, використання ІКТ під час вивчення тригонометричних функцій учнями ліцеїв на профільному рівні підготовки має багато переваг і позитивний вплив на якість навчання здобувачів освіти.

ВИСНОВКИ

У процесі роботи над дослідженням виконані всі посталені завдання.

1. Визначено й охарактеризовано основні поняття теми дослідження, зокрема «тригонометричні функції», «профільний рівень підготовки», «індивідуальний підхід», «комплексний підхід», «інтерактивне навчання», «інформаційно-комунікаційні технології».

2. Здійснено порівняльний аналіз викладення теми «Тригонометричні функції» у діючих підручниках з алгебри і початків аналізу для профільного рівня підготовки. Можна констатувати різноманітність підходів до вивчення окресленої теми. Способи визначення тригонометричних функцій (аналітичні та геометричні) в різних підручниках відрізняються. Перевага надається геометричним способам у шкільному курсі через їх простоту та наочність.

Кожен підручник має свої особливості. В одних навчальний матеріал викладено більш детально та доступно, в інших – більш науково, з акцентом на прикладній спрямованості та практичному застосуванні. Усі підручники передбачають різні форми роботи на уроці, допомагають при підготовці до контрольних заходів. Під час вивчення тригонометричних функцій учні знайомляться з їх визначеннями та основними властивостями, а також з їх графіками.

3. З'ясовано можливості використання ІКТ під час навчання учнів теми «Тригонометричні функції». ІКТ здійснюють значний позитивний вплив на освітній процес і мають численні переваги порівняно з традиційними методами навчання, зокрема під час вивчення тригонометричних функцій.

ІКТ дають змогу збагатити навчальний матеріал за допомогою різноманітних візуальних, аудіо та інтерактивних елементів. Відеоуроки, анімація, демонстраційні додатки, інтерактивні завдання та ігри допомагають учням краще усвідомити і запам'ятати непрості абстрактні математичні відомості.

Завдяки ІКТ здобувачі освіти краще усвідомлюють геометричні зв'язки, на яких базується поняття тригонометричної функції. За допомогою ІКТ можна створити інтерактивні навчальні матеріали, що сприяє активному залученню учнів до процесу навчання, стимулює їхню увагу та мотивацію, а також розвиває навички самостійного розв'язування задач.

4. Досліджено сучасний стан вивчення тригонометричних функцій в практиці роботи сучасних ліцеїв. Аналіз контрольної роботи з теми «Тригонометричні функції» за програмою профільного рівня підготовки, проведеної для учнів 10-х класів Криворізьких ліцеїв № 127 і № 129, дав змогу виокремити низку типових помилок, що стосуються знаходження значень тригонометричних функцій, виконання операцій з цими функціями, визначення періоду тригонометричної функції, використання тригонометричних функцій для розв'язання задач тощо. Такі результати вказали на наявність потреби в удосконаленні шляхів розвитку математичних здібностей учнів під час навчання теми «Тригонометричні функції».

5. Розроблено систему завдань та плани-конспекти уроків з теми «Тригонометричні функції» для учнів ліцеїв на профільному рівні підготовки. Дидактичні матеріали можуть бути використані вчителями під час проведення уроків алгебри та початків аналізу з учнями ліцеїв, а також викладачами закладів вищої та фахової передвищої освіти під час викладання математичних дисциплін.

Отже, аналіз наукової, науково-методичної літератури засвідчує багатогранність підходів до навчання теми «Тригонометричні функції», яка для здобувачів освіти є доволі складною. Водночас усі вони передбачають системність, поетапність, застосування сучасних засобів навчання, зокрема ІКТ. У процесі дослідження розроблено комплекс дидактичних матеріалів для навчання учнів ліцеїв теми «Тригонометричні функції» на профільному рівні підготовки – мети роботи досягнуто.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрусенко О. І. Тригонометрія та геометрія: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Видавництво ВПЦ «Київський університет», 2017. 225 с.

2. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початок аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

3. Бендюк А. А. Тригонометрія: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Генеза, 2017. 189 с.

4. Бондаренко Т. М. Методика викладання тригонометрії: особливості підходів та стратегій навчання. Київ : Видавничий центр Київського університету, 2016. 208 с.

5. Борисова Н. О., Шаповалова В. В. Методика вивчення тригонометрії у старшій школі. Київ : Видавництво «Ранок», 2015. 195 с.

6. Ващенко М. О. Технології викладання математики: підручник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів. Київ : Київський університет, 2015. 228 с.

7. Вороніна М. Г. Тригонометрія: навчальний посібник для учнів старших класів. Харків : Освіта, 2016. 167 с.

8. Галкіна І. В., Мороз О. В. Методика викладання тригонометрії у середній школі. Київ : Видавництво «Педагогічна думка», 2016. 198 с.

9. Гончаренко І. П., Рижко Т. М. Методика навчання тригонометрії в умовах реформування шкільної освіти: навчально-методичний посібник. Київ : Видавництво «Педагогічна думка», 2019. 187 с.

10. Дімова І. В., Мазур Л. А. Методика навчання тригонометрії: навчально-методичний посібник. Київ : Видавництво «Ранок», 2018. 271 с.

11. Єршов В. С. Тригонометрія та її застосування: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Видавництво «Академвидав», 2016. 166 с.

12. Іванченко Г. М., Шишка В. В. Методика вивчення тригонометрії у вищій школі. Київ : Видавничий дім «Основа», 2019. 178 с.

13. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початок аналізу: (профіл.рівень): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с.

14. Карпенко О. М. Інноваційні методи викладання математики в старшій школі: практичний посібник для вчителів. ТОВ «Видавництво Світ», 2018. 287 с.

15. Карпенко Л. В.Тригонометрія: навчальний посібник для учнів 10-11 класів. Харків : Основа, 2016. 367 с.

16. Коберник В. П. Методика навчання тригонометрії в профільній школі: навчально-методичний посібник. Київ : Видавничий центр Київського університету, 2015. 191 с.

17. Кондрашов В. І. Теорія тригонометричних функцій: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Видавництво «Ліра», 2018. 233 с.

18. Кравчук В. О., Мухіна Н. О. Методика викладання тригонометрії в початкових класах. Київ : Видавничий дім «Основа», 2017. 277 с.

19. Кузьменко В. В. Тригонометрія: практикум з розв'язування задач. Харків : Освіта, 2016. 234 с.

20. Лисенко Т. В. Методика навчання тригонометрії в системі підготовки здобувачів вищої освіти: навчально-методичний посібник. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. 205 с.

21. Математика: підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Ред. Н. М. Бурда та ін. Видавництво «Генеза», 2018. 183 с.

22. Математика. Тригонометрія: конспект лекцій О. М. Гавриленко та ін. Видавництво «Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова», 2016. 334 с.

23. Марковська О. М. Методика викладання тригонометрії у вищих навчальних закладах. Київ : Видавничий центр КНУ, 2012. 294 с.

24. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.

25. Методичні рекомендації до вивчення тригонометричних функцій у старшій школі. МОН України. Київ : Академія, 2016. 235 с.

26. Михальченко І. О., Толкачова О. М. Методика навчання тригонометрії в старшій школі: навчальний посібник. Київ : Видавничий дім «Основа», 2017. 186 с.

27. Пішак О. В. Розвиток пізнавальної діяльності учнів у процесі вивчення математики: теорія і практика. Київ : Видавництво «Махаон-Україна», 2015. 191 с.

28. Пішак О. В. Сучасні підходи до навчання математики: збірник наукових праць. Київ : Видавництво «Дидактика», 2019. 190 с.

29. Рибалко О. М. Підвищення якості навчання математики в середній школі: досвід, проблеми, перспективи. Київ : ІПП Видавництво «Політехніка», 2019. 187 с.

30. Роговський В. П. Методика викладання тригонометрії у профільній школі. Київ : Освіта, 2008. 233 с.

31. Сергієнко О. В., Климчук В. П. Методика викладання тригонометрії в середній школі. Київ : Видавничий дім «Слово», 2014. 183 с.

32. Смолярчук О. В. Методика навчання тригонометрії в середній школі: посібник для вчителів. Київ : Видавництво «Освіта», 2013. 225 с.

33. Софієнко І. В. Комп'ютерне моделювання математичних об'єктів: підручник для старшої школи. Освіта, 2015. 226 с.

34. Тригонометрія. Підготовка до ЗНО М. М. Богач та ін. Видавництво «Основа», 2018. 129 с.

35. Фельдман Л. В., Лобовиков В. В., Мороз В. В. Методика викладання тригонометрії. Київ : Освіта, 2010. 285 с.

36. Хміль А. І. Інтерактивні технології в навчанні математики: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Київський університет, 2015. 298 с.

37. Shadrikov, V. D., & Aleksandrova, E. V. (2016). Features of Teaching Trigonometry Functions in the Russian Schools. Journal of Education and Practice, 7(23), 32-38.

38. Haciomeroglu, E. S. (2014). Comparison of different teaching methods for trigonometry functions. Journal of Education and Practice, 5(12), 97-103.

39. Kiziltepe, M. K. (2017). The Use of History of Mathematics in Teaching Trigonometry. Journal of Education and Training Studies, 5(2), 101-108.