

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри

_____ 20__ р.
«__» _____

Реєстраційний № _____
«__» _____ 20__

РОЗВИТОК ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ У НАВЧАННІ
АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Кваліфікаційна робота
студентки групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності: 014.04 Середня освіта
(Математика)

Щур Катерини Костянтинівни
Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент
Віхрова Олена Вікторівна

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Щур Катерина Костянтинівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.



ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ.....	8
1.1. Загальна характеристика обчислювальної культури людини	8
1.2. Логіко-дидактична характеристика числової лінії (послідовності) в ШКМ.....	13
1.3. Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри і початків аналізу з точки зору можливостей розвитку обчислювальної культури учнів	22
Висновки до 1 розділу	26
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ	27
2.1. Узагальнення та систематизація знань та умінь учнів при вивченні числових множин	27
2.2. Місце і роль усних обчислень в курсі алгебри і початків аналізу	33
2.3. Розробка дидактичних матеріалів, спрямованих на розвиток обчислювальних умінь учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування»	47
2.4 ІКТ як засіб розвитку обчислювальної культури учня	55
Висновки до 2 розділу	60
ВИСНОВКИ.....	61
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	63
ДОДАТКИ.....	67
Додаток А.....	67
Додаток Б	70
Додаток В.....	71

ВСТУП

Фундамент майбутніх досягнень людини, безперечно закладається у школі. Щоб дитина відбулася як особистість, мала змогу реалізувати себе в дорослому житті, школа має дати їй систему знань, розвинути інтелектуальні здібності та сформувати компетентності, які б забезпечили дієвість набутих знань. Одними із важливих складових математичних компетентностей учнів є обчислювальні навички та уміння, які водночас є основою їх обчислювальної культури.

Підвищення рівня обчислювальної культури учнів на уроках – шлях до їх позитивних результатів на ДПА, ЗНО (НМТ), а головне – у подальшому житті. Але проблема пов'язана не тільки з рівнем математичних знань, а й взагалі – зі змогою логічно мислити. І ця проблема є дуже серйозною, оскільки з кожним роком спостерігається зменшення рівня розвитку логічного мислення у випускників, це стає особливо помітно після перевірки відповідей учнів на ЗНО (НМТ). Загалом, часто зустрічаються такі проблеми, як нерозуміння як порахувати відсоток від числа, або незмога відрізнити градусну міру від радіанної.

Видатний математик Карл Фрідріх Гаусс зазначав, що математика – цариця наук, арифметика – цариця математики. А без початкових знань математики навіть неможливо існувати, кожен день нам доводиться щось рахувати: гроші в кишені перед касою; комунальні нарахування; кількість калорій та інше. Борис Володимирович Гнеденко, який в свій час був директором Інституту математики НАН України, сказав «...спробуємо на хвилину уявити собі, що ми всі втратили елементарні арифметичні знання. Адже це приведе до справжньої суспільної катастрофи, бо арифметичний розрахунок супроводжує нас на кожному кроці».

Для сучасної математичної освіти є актуальною проблема розвитку обчислювальної культури учнів. Обчислювальна культура є важливою частиною навчально-математичної діяльності. Вона спрямована на безпомилкове свідоме володіння обчислювальними вміннями та навичками.

Проте в наш час, багато вчителів відмічають що діти роблять багато помилок саме в обчисленні. Ці проблеми, які виникають у школярів на такому, здавалось би найлегшому рівні, продукують все більше прогалин, через що діти починають боятися уроку, і як кінцевий результат з'являється небажання вчитися.

Переважає більшість випускників школи неспроможна швидко рахувати в умі, без листка не можуть вирахувати відсоток від числа або просто тримати в пам'яті декілька чисел для обчислювальних дій. Одним із результатів даної проблеми є погані оцінки на ЗНО. За офіційними даними, в 2021 році на ЗНО понад 30% не подолали поріг, не набрали 10 балів з 67 можливих, ситуація з національним мультипредметним тестом (НМТ) в 2022 та 2023 роках теж невтішна – понад 10 тисяч учнів не впорались із завданнями.

Для успішного складання ЗНО потрібно приділити більше уваги розвитку обчислювальної культури учнів на уроках алгебри і початків аналізу. Знадобиться не тільки зацікавленість учнів, але й використання певних прийомів усного рахунку, відповідної системи завдань.

Головним елементом обчислювальної культури є свідомі та міцні обчислювальні навички, а їх формування це одне з основних завдань математики в школі. Формування таких навичок починається ще з початкової школи та продовжується всі 11 років, але на жаль, чим старше стають учні, тим частіше вони починають використовувати обчислювальні пристрої та технології, що веде до поступового зниження рівня обчислювальних навичок.

Володіння обчислювальними вміннями на високому рівні виховує відповідальне ставлення до роботи, вміння виправляти допущені помилки та акуратне виконання поставленої задачі.

Проблема формування у старшокласників обчислювальної культури вже багато років привертає увагу вчителів, методистів та дидактиків.

Відсутність чіткої методики проведення уроків-тренінгів для розвитку обчислювальної культури та наявні проблеми з усним рахунком у сучасних старшокласників обумовлюють **актуальність даної роботи**.

Мета дослідження: розробити методику розвитку обчислювальної культури учнів у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні.

Для досягнення мети необхідно виконати такі **завдання** дослідження:

1. Проаналізувати навчальні програми, державні стандарти та шкільні підручники з теми дослідження для розкриття методичних та теоретичних основ розвитку обчислювальної культури учнів.
2. Розробити термінологічний апарат дослідження, зокрема уточнити трактовки таких понять: математична культура, обчислювальна культура, обчислювальні уміння і навички та ін.
3. Обґрунтувати роль знань учнів з теорії чисел для формування їх обчислювальної культури.
4. Визначити місце і роль прийомів усних обчислень у навчанні алгебри і початків аналізу.
5. Скласти доцільні системи завдань, які спрямовані на підвищення рівня обчислювальних умінь учнів при вивченні окремих тем алгебри і початків аналізу на профільному рівні.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу на профільному рівні в закладах середньої освіти.

Предмет дослідження: методичні особливості розвитку обчислювальної культури учнів у навчанні алгебри і початків аналізу в класах з профільним рівнем викладання математики.

Методи дослідження: *теоретичні* – аналіз та узагальнення інформації з навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури щодо проблеми дослідження, історичний метод та порівняння підручників з точки зору можливостей для розвитку обчислювальної культури учнів; *емпіричні* – спостереження за діяльністю вчителя та процесом розвитку обчислювальної культури учнів у навчанні алгебри і початків аналізу, аналіз педагогічного досвіду та напрацювань вчителів математики для розвитку обчислювальної культури, проведення бесід з вчителями та учнями.

Практичне значення полягає в тому, що розроблені методичні рекомендації та система вправ для профільного рівня з розвитку обчислювальної культури можуть бути використані вчителями математики в їхній практичній професійній діяльності, учнями старшої школи для самостійного та подальшого розвитку обчислювальної культури, а також студентами у процесі виробничої практики у закладах середньої освіти.

Структура та обсяг роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 33 найменування та 3 додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ

1.1. Загальна характеристика обчислювальної культури людини

Як було зазначено, у наш час спостерігається тенденція зниження рівня обчислювальних навичок. Це виражається не тільки в постійному бажанні людей потягнутися до калькулятора та інших комп'ютерних пристроїв в усіх сферах свого життя, а й в припусканні великої кількості помилок при розв'язанні завдань саме в обчисленнях. І здебільшого це починається у шкільному віці.

Ряд науковців на сьогоднішній день вважають, що досягти якісних результатів при формуванні обчислювальних навичок можна, якщо вийти за рамки звичайного сприйняття цього питання і розглянути у контексті обчислювальної культури [25, с. 46].

Загальновідомо, що математика не лише сприяє розвитку логічного мислення людини, а і виступає надійним інструментарієм у багатьох галузях. Вона знаходить застосування не лише у вивченні інших шкільних дисциплін, а й стає неодмінною складовою професійної практики. Зокрема, математичне моделювання використовується для вирішення завдань у різних галузях науки, економіки та виробництва. Отже, обчислювальна культура людини заснована на математичних знаннях і має ключове значення в сучасному світі.

Справді, у сучасному світі математичні знання є життєво важливими для багатьох професій та повсякденних ситуацій. Без них неможливо побудувати будинок, правильно розрахувати фінанси, виміряти відстань та здійснити безліч інших дій. Знання математики лежать в основі винаходів, таких як літаки, автомобілі, комп'ютери та інших технологій. Математика є фундаментальною для технічного прогресу та інновацій, які формують сучасний світ. Кожна людина стикається з потребою виконувати досить складні розрахунки користуючись обчислювальною технікою. Однак важливо розуміти як користуватись цією технікою, а це також означає що людина повинна розуміти як виконуються обчислення, інакше можуть виникнути проблеми в розрахунках.

Вже тривалий час науковці зазначають, що значне поширення обчислювальних пристроїв та технічних засобів призвело до того, що іноді ставлять під сумнів актуальність проблеми відпрацювання обчислювальних умінь та навичок. Наприклад, обчислюючи значення такого виразу

$$(-3,7 + 2,5 - 4,3 + 7,5) \cdot 2,3 + (-14,9 + 15,2 - 3,3) \cdot 2,3,$$

дуже багато учнів використовують калькулятор, а при потребі порахувати усно велика кількість учнів починають рахувати «за діями» або взагалі не можуть розв'язати цей приклад, що свідчить про низький рівень обчислювальних навичок. І тільки незначна частина учнів застосовує логіку для спрощення обчислень [14, с. 50].

Проблема використання обчислювальної техніки, або використання обчислювальних можливостей деяких програм, стає ще більш значущою коли ці програми не в змозі коректно виконати певне обчислення. Наприклад, програма Excel при обчисленні складних завдань може видати не вірне значення, оскільки в Excel кожне число представлене у дійсному форматі і для обчислень ця програма використовує різні типи алгоритмів та округлень, що призводить до накопичення похибок. Тому результат отриманий за допомогою програми відрізняється від ручних обчислень [3, с. 21].

Також важливим критерієм визначення рівня обчислювальної культури є певний рівень володіння математичною мовою. Термін «математична мова» застосовується для опису всіх основних засобів, які використовуються для передачі математичних думок в усній та письмовій формі, також в цей термін включаються логіко-математичні символи, графічні схеми, креслення і наукові терміни. У сучасних учнів можна помітити низький рівень володіння математичною мовою, що прямо свідчить про низький рівень обчислювальної культури у більшості випускників.

Вміння усно рахувати, знаходити та застосовувати потрібні формули, володіти прийомами геометричних вимірів, читати інформацію, подану у вигляді таблиць, діаграм, графіків, складати нескладні алгоритми є дуже важливими вміннями для будь-якої людини.

У дослідженнях з методики математики науковці використовують такі поняття: «математична культура», «математична компетентність», «обчислювальні навички», «обчислювальні вміння» для уточнення та розуміння категорії «обчислювальна культура». Розглянемо всі ці поняття.

«Математична культура» – набір визначених математичних знань, умінь і навичок, математичні цінності, володіння математичною мовою, вміння застосовувати математику у професійній діяльності та ін. Вона складається з таких компонентів, як обчислювальна культура, алгоритмічна культура, графічна культура, логічна культура та мовна культура. Принципи розвитку математичної культури в учнів школи:

1. Використання комбінованих, нестандартних завдань для повторення вже вивченого та закріплення нового матеріалу.
2. Різноманітність форм організації навчального процесу.
3. Постійне вдосконалення обчислювальних умінь учнів протягом всього періоду навчання.
4. Підтримка міжпредметних зв'язків на уроках математики.
5. Систематизація та узагальнення знань учнів [9, с. 47].

«Математична компетентність» – вміння аналізувати та застосовувати математичний досвід в практичних, навчальних та життєвих ситуаціях. До її складових відносяться обчислювальна, інформаційно-графічна, логічна та геометрична компетентності [24, с. 7].

«Обчислювальні навички» – це здатність, на високому рівні, швидко виконувати обчислювальні прийоми в відповідному порядку [30, с. 9].

«Обчислювальні вміння» – це розгорнуте здійснення дії, в якій кожна операція розуміється та контролюється [30, с. 11]. Ми погоджуємося з думкою психологів та дидактиків, які говорять, що після багаточисельного повторення дій прийом перетворюється на навичку, яка в свою чергу стає компонентом вміння [27, с. 56].

Отже, зрозуміло що обчислювальна культура учнів не зводиться лише до високого рівня володіння обчислювальними вміннями та навичками.

Ще до років незалежності України, багато провідних педагогів новаторів зазначали, що обчислювальна культура є суттєвим елементом загальної культури людини. І цю думку вітчизняних педагогів поділяють зарубіжні науковці. Наприклад:

- «Обчислювальна культура» – це навчальна обчислювальна діяльність, яка орієнтована на розвиток особистості учнів, що характеризується вмінням правильно рахувати, безпомилково володіти обчислювальними вміннями та навичками, обґрунтованим вибором раціонального виконання дій, котрі призводять до швидких та вірних розв'язків [6, с. 9].
- Обчислювальна культура – це здатність використовувати обчислювальні методи та технології для розв'язання математичних проблем, розуміння взаємозв'язку між математичними концепціями та обчислювальними процедурами, а також критичне оцінювання результатів обчислювальних методів [1].

Також часто розглядають обчислювальну культуру учнів, у педагогічній літературі, як навчальну обчислювальну діяльність, яка орієнтується на розвиток особистості учня, як процес осмисленого володіння знаннями та вміннями як математичного так і загальнокультурного рівня (з урахуванням характеристик суспільної культури).

Отже, обчислювальна культура сучасної освіченої людини є важливою складовою її загальної культури, а рівень сформованості обчислювальної культури учнів можна оцінювати на основі їх умінь виконувати усні та письмові обчислення, раціонально організовувати хід обчислень, використовувати обчислювальну техніку та перевіряти правильність отриманих результатів [29, с. 213-215].

В енциклопедії сучасної України представлено культуру, як «прояв життя людини, що виражається у моделях поведінки, засобах і продуктах діяльності, зокрема ідеях, ідеалах, нормах та цінностях....» [23].

Проаналізувавши існуючі підходи до визначення поняття «обчислювальна культура», у своїй роботі будемо виходити із такого визначення:

Обчислювальна культура – це частина багатогранної культури людини, яка характеризується безпомилковим володінням обчислювальними вміннями та навичками, обґрунтованим та свідомим вибором раціональних дій та операцій, що ведуть до правильної відповіді. Також обчислювальна культура передбачає адекватну кількісну оцінку сукупності об'єктів навколишнього світу та процесів, що відбуваються в ньому, а також формування точного, лаконічного, аргументованого, бездоганно логічно побудованого мовного та письмового супроводу обчислень.

Формування обчислювальної культури розпочинається, з початкових класів, в одній з основних змістових ліній курсу математики – «Числа. Дії з числами» і продовжується до закінчення учнями ліцею. Проте, на практиці часто цей процес має ряд недоліків, через які діти не в змозі «підняти» обчислювальні вміння та навички до рівня обчислювальної культури людини.

Тому проаналізуємо вивчення змістової лінії «Числа. Дії з числами» з метою виявлення цих недоліків та їх подальшого подолання.

1.2. Логіко дидактична характеристика числової лінії (послідовності) в ШКМ

У шкільному курсі математики використовується історична схема розгортання числової лінії [29, с. 213], тому методична схема розгортання поняття «числа» відповідає історичній схемі. З історії розвитку математики відомо, що спочатку людство використовувало натуральні числа, згодом стали використовувати дробові числа, що було обумовлено, передусім, практичними потребами, потім, з розвитком торгівлі, з'явилися від'ємні числа. Так поняття цілого числа, раціонального дроби, та інші, сформувалися ще в VI-V ст. до нашої ери [12]. Пізніше, на певному етапі з'явилися ірраціональні числа. Але, як відомо, історична схема і логічна схема розвитку поняття числа не збігаються.

Змістовою лінією початкового курсу математики є – «Числа. Дії з числами». Вона охоплює вивчення нумерації цілих невід'ємних чисел (в межах мільйона) та формування навичок основних арифметичних дій (додавання, віднімання, множення та ділення), також вивчаються вимірювання та оперування величинами, що виражаються звичайними дробами.

У початковій школі поняття натурального числа висвітлюється через лічбу. Лічба це встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами заданої скінченної множини і скінченної підмножини $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ натуральних чисел [33, с. 165]. Тобто, учні поступово усвідомлюють, що натуральні числа є тим поняттям, яке характеризує клас скінченних еквівалентних множин.

З опорою на наочно-дійове мислення учнів, розглядаючи разом декілька послідовних чисел, на першому етапі «утворення числа як кількісної характеристики класу скінченних еквівалентних множин» дітям пояснюються кількісні і порядкові відношення та утворення чисел (шляхом додавання одиниці до числа).

Учні поступово знайомляться з основними властивості натурального ряду чисел через завдання з числовим променем або сходинками:

1. у натуральному ряді всі числа розташовані в певному порядку;
2. кожне наступне число більше від попереднього на одиницю;
3. кожне попереднє число менше на одиницю від наступного;
4. існує найменше натуральне число - одиниця.

При вивченні формується знання і про спосіб утворення назв чисел – усна нумерація, і про спосіб запису – письмова нумерація. У першому класі вивчаються розряди десятків та сотень, у другому більш поглиблюються знання про сотні, у третьому класі – тисячі, в четвертому учні знайомляться з розрядом мільйонів.

Раніше навчальною програмою передбачалося розподіляти вивчення нумерації в межах сотні на 2 етапи: 11-20 та 21-100, так відбувалося через те, що для чисел 11-19 порядок запису числа не збігається з порядком назви розрядних чисел. Але з 2011 року ці два етапи, в навчальній програмі не відділяють, проте автори підручників Нової української школи все ще продовжують розглядати ці етапи окремо [33, с. 165].

За програмою 2018 року початкового курсу математики перша інформація про дроби з'являється в третьому класі, але від учнів ще не вимагають застосовувати термін «дріб», замінюючи його на більш зрозумілий для них – «частина». Діти знайомляться з частинами та їх записом, формують уявлення про процес створення та засвоюють правила для знаходження частини від цілого. Всі ці питання розглядаються за допомогою наочності.

У четвертому класі уявлення про дроби продовжує розвиватися. Зазвичай, навчання здійснюється наступним чином:

1. учні набувають навичок розподілу конкретних предметів на однакові частини, що можуть бути виражені дробами;
2. використовуються наочні засоби, такі як малюнки та креслення, які сприяють кращому засвоєнню матеріалу;

3. учні переходять до рівня оперування уявними дробами без опори на наочні засоби [33, с. 165-166].

Таким чином, випускники початкової школи уміють відтворювати послідовність чисел (до мільйона), виконувати арифметичні дії; читати, записувати та розуміють спосіб одержання дробу.

У п'ятому класі учні знайомляться з означенням натурального числа, у підручниках, зазначається, що не всі відомі дітям числа є натуральними, наприклад виключенням із них є число 0. З додаткових рубрик «Коли зроблено уроки» (Мерзляк, Полонський, Якір, 2018) учні можуть дізнатися звідки з'явилася назва «натуральні числа», цікаві факти про десяткову систему числення та про інші системи числення [33, с. 166]. Такі рубрики є в більшості підручників.

Після цього учні переходять до вивчення основних властивостей дій над числами, такі властивості як переставна властивість (комутативність), сполучна властивість (асоціативність) додавання/множення; розподільний закон (дистрибутивність) множення відносно додавання і віднімання. Також, вводять обернені операції, до додавання – віднімання (але розглядають обмежено, тільки коли різниця є натуральним числом) і до множення – ділення (ділення націло). Окремо розглядається ділення з остачею.

Далі вводять поняття дробового числа як відношення натуральних чисел та записують їх у вигляді $\frac{a}{b}$: число b називають знаменником, воно показує на скільки частин було розділено ціле (одиницю); число a називають чисельником, воно показує скільки частин цілого (одиниці) обрано. На практиці діти часто плутають ці назви, тому вчителі роблять аналогію, для запам'ятовування, звертаючи увагу учнів, що число a – чисельник починається на букву «ч», як і слово «частина». Вводять поняття правильного і неправильного дробів, мішаного числа та правила додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками. На цьому етапі всі дроби додатні. З додаткових рубрик в підручниках учні дізнаються, що дробові виникли з практичних потреб людства.

У п'ятому класі розпочинають вивчення скінченних десяткових дробів (як звичайних дробів, зі знаменником кратним десяти). Запроваджують дії додавання, віднімання, множення та ділення скінченних десяткових дробів (виконуються у стовпчик).

На початку шостого класу продовжується вивчення звичайних дробів: порівняння дробів з різними знаменниками; додавання та віднімання дробів з різними знаменниками та мішаних чисел, множення та ділення дробів.

Далі пояснюється що не кожний звичайний дріб можна перетворити на скінченний десятковий, оскільки при діленні можна отримати нескінченний десятковий дріб. Учні вчаться перетворювати звичайні дробу в нескінченні, читати їх та порівнювати. Опановується поняття наближення з остачею/надлишком.

Потім переходять до вивчення від'ємних чисел - і цілих, і дробових. Тема, зазвичай, розглядається на практичних задачах, наприклад – задачі про термометри. Учні добре знайомі з цим пристроєм тому поява від'ємних чисел сприймається досить легко. Також увагу учнів звертають на той факт, що число 0 не є ні додатнім, ні від'ємним. Вводять означення протилежного числа.

Після опанування цілих чисел переходять до раціональних. На координатній прямій пояснюється, що при додаванні додатного числа на координатній прямій точка переміщується праворуч, а при додаванні від'ємного числа – ліворуч. Правила виконання дій множення та ділення, чисел з однаковими або різними знаками, подаються як порядок їх виконання.

Вводять загальноприйняті позначення множин: натуральних (N), цілих (Z) та раціональних (Q) чисел, часто за допомогою кругів Ейлера-Венна ілюструють для унаочнення їх співвідношення.

Згідно з навчальною програмою, у курсі п'ятого та шостого класів передбачено поглиблення знань учнів про числа та операції з ними. Це досягається через поступове розширення натуральних чисел, поетапне введення дробів та від'ємних чисел. Крім того, навчання також спрямоване на формування культури усних, письмових та інструментальних обчислень [33, с. 167].

Більшість підручників завершують розвиток числової лінії переходом до дійсних чисел у восьмому класі. При вивченні арифметичного квадратного кореня (у третій четверті), вводять поняття раціонального числа – числа, яке можна записати, як $\frac{a}{b}$, де a – ціле число, а b – натуральне. Числа, які не можна записати в такому вигляді, називають ірраціональними. Необхідність розширення множини раціональних чисел пояснюється, в підручниках, різними аргументами:

- існування чисел, що не належать до множини раціональних чисел;
- неможливість виконання операції добування квадратного кореня у множині раціональних чисел (наприклад $\sqrt{2}$);
- необхідність представлення чисел у формі нескінченних десяткових дробів;
- існування несумірних величин.

Потім учні дізнаються що раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину дійсних чисел (R). Розглянемо як це відбувається на прикладі підручника алгебри з поглибленим вивченням, з авторським колективом: А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір, 2021 року.

Після ознайомлення з добуванням квадратного кореня, автор задає логічне запитання «чи завжди квадратний корінь є раціональним числом», та розглядає рівняння $x^2 = 2$, після розгляду зрозуміло – не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Тоді автор називає числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ ірраціональними і наголошує що жодне ірраціональне число не може бути подане у вигляді дробу $\frac{a}{b}$, де $a \in Z$, а $b \in N$, а тільки у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів, так $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, як і число π . Далі автор розповідає що $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ і число π це не єдині ірраціональні числа, таке число можна створити самим і називає об'єднання раціональних та ірраціональних чисел множиною дійсних чисел [19, с. 236-240].

Серед основних дидактичних принципів навчання математики є принцип наступності, що обґрунтовується високим абстрактним рівнем та логікою побудови навчального матеріалу [29, с. 213]. У зв'язку з цим поява теми «комплексні числа» в шкільній програмі з математики є закономірним явищем, оскільки її вивчення завершує розширення числової лінії. Однак, за чинною програмою, вивчення теми «Комплексні числа» передбачене тільки в класах профільного рівня з початком вивчення на поглибленому рівні з восьмого класу. На вивчення цієї теми, разом з темою многочлени, в одинадцятому класі виділено 34 години [20]. Інші класи мають можливість вивчати цю тему тільки самостійно або в математичних гуртках.

Узагальнивши досвід учнів про те, що не всі рівняння можна розв'язати на множині дійсних чисел (наприклад, квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом), наприкінці одинадцятого класу вводиться поняття уявної одиниці $-i$, квадрат якого дорівнює -1 та означення комплексного числа. Також учні вчаться виконувати арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі.

Потім переходять до виконання арифметичних дій в тригонометричній формі: спочатку розглядаючи додавання та віднімання, разом з переходом від алгебраїчною до тригонометричною форми представлення комплексних чисел, пізніше вивчають множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній формі, та добування кореня n -го степеня з комплексного числа.

Крім цього, тема «Комплексні числа» закріплюється в наступній темі – розв'язування рівнянь.

Вивчення комплексних чисел в курсі вищої школи дозволяє підняти обчислювальну культуру особистості на новий рівень [29, с. 214]. Також, вивчення цієї теми, сприяє узагальненню та систематизації знань школярів. Глибше розуміння розгортання числової лінії дасть перевагу учням профільних математичних класів у вищих навчальних закладах на спеціальностях математичного спрямування.

Якщо звернути більше уваги саме на методи викладання числової лінії в різних підручниках, то варто зазначити, що шлях її розширення йде однаково: натуральні, невід'ємні дробові, цілі, раціональні, дійсні числа, що відрізняється від логічної схеми числової лінії: натуральні, цілі, раціональні, дійсні числа. Тільки на етапі введення дійсних чисел методика починає відрізнятися. Так автори одних підручників дотримуються теорії дійсного числа Ріхарда Дедекіна і визначають дійсне число, як об'єднання множини раціональних і ірраціональних чисел, автори інших – теорії Карла Вейерштрасса – як множину скінченних періодичних десяткових дробів і множину нескінченних неперіодичних десяткових дробів [33, с. 168].

Варто зазначити, що програма шостого класу стикається з перевантаженістю у вивченні нових числових множин, їх властивостей та операцій над ними. Протягом року учні повинні освоїти додатні дробові, цілі та раціональні числа, а також подання раціональних чисел у вигляді десяткових дробів.

Також варто звернути увагу на недоліки навчальної програми. У п'ятому класі на вивчення натуральних чисел та їх властивостей виділяється приблизно 40 годин, в шостому класі на – цілі числа – приблизно 40 годин, в шостому та восьмому класах на – раціональні числа – приблизно 50 годин, але у восьмому класі на ознайомлення учнів з ірраціональними і дійсними числами та, відповідно, їх властивостями виділяється лише 1 година. Цей факт можна помилково вважати менш важливим, якщо згадати що пізніше вивчаються дії з коренями n -го степеня, показниковими, тригонометричними та логарифмічними виразами. На ці теми виділено багато часу, але всі ці числа є тільки прикладами дійсних чисел. Тому ця проблема є важливою.

Результатом цих проблем є те, що учні при розв'язанні завдань можуть механічно дійти до відповіді, але, наприклад, питання «Скільки раціональних коренів має рівняння? А скільки дійсних?» часто ставлять учнів в глухий кут [33, с. 168]. Також учні часто не можуть дати означення, не розуміють відмінності між раціональними та ірраціональними числами, неправильно використовують знаки рівності, коли порівнюють ірраціональні числа з їх раціональними наближеннями; не розуміють зв'язку між звичайними дробами та десятковими дробами; не знають, яким чином раціональні та ірраціональні числа представляються у вигляді десяткових дробів та мають інші подібні концептуальні труднощі.

Тому дуже важливою потребою є підвищення рівня обчислювальної культури, щоб учні не тільки виконували дії з числами механічно, а й розуміли, що вони роблять.

Для подолання цих проблем, треба на певному етапі вивчення (в дев'ятому та десятому класах) провести узагальнення та систематизацію поняття числа, та висвітлити відмінність між історичною лінією (рис. 1.1) та логічною лінією розгортання поняття числа – $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (рис. 1.2).

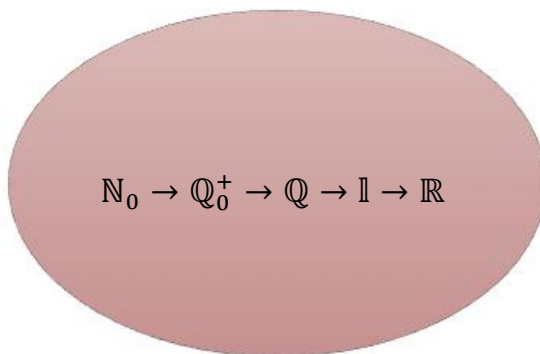


Рис. 1.1.

Історична лінія розгортання числа.

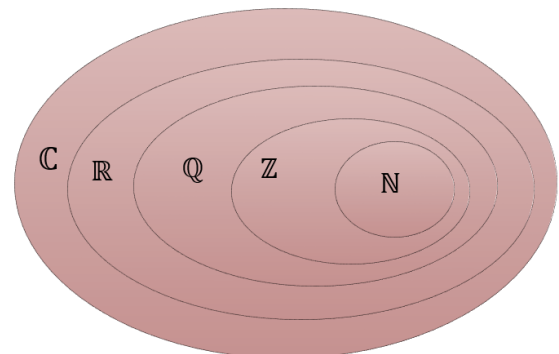


Рис. 1.2.

Логічна лінія розгортання числа

Треба, щоб учні усвідомили логічну послідовність розгортання числової лінії та залежність між основними числовими множинами: натуральними, цілими, раціональними, дійсними та комплексними. Саме на цьому етапі ми будемо уточнювати такі поняття як: цифра і число; дріб і дробове число.

Також варто систематично включати в процес навчання тести, які містять завдання для перевірки рівня засвоєння термінів числової лінії та основних властивостей алгебраїчних операцій. У тесті можуть бути такі завдання:

1. Яке найменше число належить ряду натуральних чисел?
2. Яка відмінність між раціональними та ірраціональними числами?
3. Як називається закон, який формулюють так «при перестановці множників, результат добутку не змінюється.»?
4. Числа $e, \pi, \sqrt{2}$ відносяться до множини раціональних чисел? а дійсних?
5. Число $-\frac{10}{2}$ належить до множини натуральних чисел? а цілих? а ірраціональних?
6. Множина ірраціональних чисел містить множину раціональних чисел?
7. Які множини чисел містить в собі множина дійсних чисел?
8. Чи вірно що число 0 є першим елементом множини цілих чисел?
9. Чи виконується операція віднімання на множині натуральних чисел?
10. Який закон відображено такою формулою: $a + b = b + a$?

Важливо розуміти, що обчислювальна культура людини не зводиться лише до вміння виконувати обчислення (усно, письмово, за допомогою обчислювальної техніки). Слід забезпечити усвідомлення теоретичних основ виконуваних дій та навчити застосовувати відповідні уміння та навички в практичній діяльності. Зокрема, вивчення числової лінії шкільного курсу математики передбачає свідоме володіння такими поняттями, як «число» і «цифра», «дріб» і «дробове число», та розуміння залежності між основними числовими множинами. Важливо сформувати в учнів розуміння того, що більшість прийомів раціональних обчислень ґрунтуються на властивостях додавання і множення дійсних чисел (переставний, сполучний, розподільний) [2, с. 212].

1.3. Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри і початків аналізу з точки зору можливостей розвитку обчислювальної культури учнів

Курс алгебри і початків аналізу має дуже широкі можливості для розвитку обчислювальних умінь та навиків, що дає змогу підвищувати рівень обчислювальної культури учнів. Вивчення функцій та їх властивостей (степеневих, показникових, логарифмічних, тригонометричних), побудова відповідних графіків при розв'язанні рівнянь та нерівностей, вивчення елементів диференціального та інтегрального числення, а також комбінаторики з елементами теорії ймовірностей – все це сприяє підвищенню рівня обчислювальної культури учнів.

Проведемо логіко-математичний аналіз однієї з важливих тем курсу алгебри і початків аналізу – «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл». Для цього використаємо матеріали з підручника одинадцятого класу – «Алгебра і початки аналізу: профільний рівень», з авторським колективом: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. [18, с. 99-112].

Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень

11 клас

Усього — 210 годин

6 годин на тиждень, у I семестрі - 96 годин, у II семестрі – 114 годин [26].

Таблиця 1

Витяг з програми

Тема 3. Інтеграл та його застосування (17 годин)
Учень (учениця): Формулює визначення первісної та невизначеного інтеграла, розуміє їх основні властивості; Знаходить первісні та визначений інтеграл, користуючись перетвореннями та правилами знаходження первісних; Вміє застосовувати інтеграл для розв'язання практичних задач;

Таблиця 2

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Криволінійна трапеція; визначений інтеграл	Теорема про площу криволінійної трапеції	Обчислення площі криволінійної трапеції
Базові	Первісна функція; невизначений інтеграл	Правила диференціювання; Основна властивість первісної; Три правила знаходження первісних	Знаходження первісної; побудова графіка первісної функції

Таблиця 3

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристична властивість
Криволінійна трапеція	Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають криволінійною трапецією.	Описове, істотні властивості
Визначений інтеграл	Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b , де $a < b$, належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.	Описове, істотні властивості

Таблиця 4

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ / Поняття	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення
Криволінійна трапеція	11.1; 11.2	11.5; 11.6; 11.7	11.10; 11.11	11.13; 11.14; 11.15; 11.16	11.21; 11.22; 11.23; 11.24	
Визначений інтеграл	11.3; 11.4	8,9		11.12	11.17; 11.18; 11.19; 11.20; 11.25; 11.26; 11.27; 11.28	11.29; 11.30

Таблиця 5

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури
формулювання математичного твердження

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F – будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$
2. Встановлення виду твердження	Категоричне
3. Виділення роз'яснювальної частини	Якою б не була криволінійна трапеція
4. Виділення умови	Площу S криволінійної трапеції обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F – будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$
5. Виділення вимоги	Криволінійна трапеція обмежена графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якою б не була криволінійна трапеція, якщо вона обмежена графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), то її площу можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F – будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$

Таблиця 6

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні факти теми
Схематичне представлення фактів теми (опорний конспект)

Визначений інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$ позначають (формула Ньютона—Лейбніца)	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
Якщо функція f має первісну F на відрізку $[a; b]$ і $c \in (a; b)$, то з формули Ньютона—Лейбніца випливає така властивість визначеного інтеграла:	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
Геометричний зміст визначеного інтеграла	$S = \int_a^b f(x) dx$
Якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою	$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Таблиця 7

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника спрямованих на
формування способу діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують способи діяльності	Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Обчислення площі криволінійної трапеції	11.1; 11.2; 11.5; 11.6; 11.10; 11.11	11.3; 11.4; 11.7; 11.8; 11.9; 11.12; 11.17; 11.18; 11.19; 11.20; 11.29; 11.30	11.13; 11.14; 11.15; 11.16; 11.21; 11.22; 11.23; 11.24; 11.25; 11.26; 11.27; 11.28

Зрозуміло, що при вивченні теми «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл», учні мають можливості для підвищення рівня обчислювальної культури:

- набуття навичок у розв’язанні складних задач: застосування визначеного інтеграла вимагає від учнів точного та систематичного підходу до розв’язування задач. Вивчення цієї теми допомагає учням навчитися розбиратися в складних математичних ситуаціях та використовувати логічні методи для отримання правильних відповідей;
- використання обчислювальних навиків: при розв’язанні задач на знаходження інтегралів та площ криволінійних фігур, учні часто зіштовхуються з необхідністю в обчисленні. Це дозволяє учням вдосконалити свої навички;
- вироблення алгоритмічного мислення: Вивчення теми з інтегралами вимагає від учнів розвинути алгоритмічне мислення для послідовного виконання різних операцій та дій. Це допомагає учням стати більш систематичними, організованими та ефективними у своїх розрахунках.

Всі ці можливості сприяють збагаченню обчислювальної культури учнів та розвитку їх математичних здібностей, що готує їх до впевненого володіння математикою та успішного використання її у різних галузях знання та життєдіяльності.

Висновки до 1 розділу

У першому розділі розглянуто питання розвитку обчислювальної культури учнів в одній з основних змістових ліній курсу математики – «Числа. Дії з числами» та висвітлено широкі можливості розвитку обчислювальної культури в курсі алгебри та початків аналізу. Під обчислювальною культурою будемо розуміти частину багатогранної культури людини, яка характеризується безпомилковим володінням обчислювальними вміннями та навичками, обґрунтованим та свідомим вибором раціональних дій та операцій, що ведуть до безпомилкової відповіді.

Обчислювальна культура людини є важливою складовою в сучасному світі, однак, в наш час, спостерігається тенденція зниження рівня обчислювальних навичок, особливо серед учнів шкільного віку. Для досягнення якісних результатів у формуванні обчислювальних навичок необхідно розглядати проблему саме в контексті обчислювальної культури, яка включає не лише відпрацювання навиків, а й теоретичні знання.

Під час аналізу методичної лінії розгортання поняття числа виявлено потребу в узагальненні та систематизації теоретичних основ. Треба, щоб учні усвідомили логічну послідовність розгортання числової лінії та залежність між основними числовими множинами.

Вивчення математичних дисциплін, зокрема алгебри і початків аналізу, має багато можливостей для підвищення рівня обчислювальної культури серед учнів. Впевнене володіння обчислювальними вміннями та навичками є важливим фактором для успішної адаптації у сучасному світі.

Продовжувати дане дослідження будемо розробляючи дидактичні матеріали, спрямовані на розвиток обчислювальної культури учнів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

2.1. Узагальнення та систематизація знань та умінь учнів при вивченні числових множин

Грунтовне та безпомилкове засвоєння теоретичних знань, на певному етапі навчання, сприяє суттєвому полегшенню вивчення нового матеріалу та підвищує методичну підготовку майбутніх фахівців. Використання методу узагальнення і систематизації у навчанні математики надає змогу учням розглядати математику як систему чітких та логічних понять, що перебувають у чітких відносинах між собою. Практична робота на основі узагальнення і систематизації не лише поглиблює їхні знання в математиці, але також має значний вплив на формування їхнього мислення.

В десятих та одинадцятих класах рівень розумового розвитку учнів є сприятливим для здійснення узагальнення та систематизації знань у навчальному процесі, оскільки мислення учнів старшої школи характеризується високим рівнем абстракції та здатністю встановлювати складні причинно-наслідкові зв'язки.

Брак практики та недостатній розвиток навичок у роботі з числами та числовими множинами може призвести до проблем в практичних уміннях і подальших труднощів у вивченні математики [16, с. 234-235].

Про катастрофічну потребу узагальнити та систематизувати знання учнів з даної теми свідчать проведенні тестування під час виробничої педагогічної практики. Головним висновком, отриманим у результаті дослідження, є те, що учні зазвичай розглядають властивості операцій на певних множинах як окремі елементи, відокремлені від загального контексту. Це свідчить про формальне набуття знань та відсутність глибокого і цілісного розуміння матеріалу.

Часто діти стикаються з проблемами в обчисленнях саме через нерозуміння числових множин і пов'язаних з ними концепцій. Вчителі математики часто відмічають такі проблеми:

- Нерозуміння концепції чисел і числових множин: плутають поняття числа та числових множин. Наприклад, вони можуть не розуміти, що число π , в одному випадку це 180° – належить множині кутів, а в іншому це 3,1415926... – належить множині ірраціональних чисел.
- Різниця між числами і цифрами: не розуміють різниці між числами (математичними об'єктами) та цифрами (символами, які використовують для позначення чисел), і при потребі назвати найбільшу цифру називають, наприклад – гугол (десятковий запис цього числа містить одиницю та сто нулів).
- Операції з дробами: для багатьох учнів операції з дробами, особливо змішаними дробами або десятковими дробами, можуть викликати труднощі. Наприклад можуть виникнути деякі проблеми при потребі $77,5625$ розділити на $4\frac{18}{32}$.
- Ускладнення собі завдання: часто буває що діти забувають, наприклад, використовувати властивості подільності при обчисленні великих прикладів, тим самим ускладнюючі собі завдання.
- Не розуміння форми запису: більшість учнів класифікують число $\frac{4}{2}$ виключно як раціональне, хоча це просто форма запису числа 2.

Особливо критичної шкоди набуває питання систематизації знань та умінь про числові множини коли учні не в змозі виконати деякі завдання на ЗНО або НМТ. Наприклад:

- Визначте найменше ціле значення a за якого один із коренів рівняння $\log_2^2 x - (a - 1)\log_2 x - a = 0$ належить проміжку (30; 100);
- Укажіть кількість ірраціональних коренів рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на відріжку $[0; 3\pi]$.

Узагальнення та систематизація знань та умінь учнів при вивченні числових множин мають надзвичайну важливість з кількох причин:

- Покращення розуміння: після цього процесу учні глибше розбираються в матеріалі. Вони не тільки більш глибоко запам'ятовують фактичні дані, але і краще розуміють властивості та зв'язки між числовими множинами.
- Збереження знань: узагальнення знань робить їх більш стійкими та довготривалими. Учні, які систематизують свої знання, легше сприймають новий матеріал та можуть більш впевнено використовувати його у майбутньому.
- Застосування в практиці: знання числових множин є фундаментом для розв'язування різних математичних задач в професійній діяльності. Чим глибше учні розуміють цей матеріал, тим ефективніше вони зможуть використати його для вирішення завдань.
- Підготовка до подальших тем: знання числових множин є фундаментальним для більш складних математичних концепцій, наприклад, таких як функції.
- Розвиток критичного мислення: процес узагальнення та систематизації знань спонукає учнів до пошуку логічних зв'язків.
- Розвиток аналітичних навичок: учні вчаться аналізувати та порівнювати різні числові множини та їх властивості. Цей процес розвиває їх аналітичне мислення та здатність виділяти важливу інформацію.
- Підвищення впевненості: узагальнення та систематизація знань допомагають учням відчувати себе більш впевнено в математичних завданнях. Це позитивно впливає на їх самооцінку та мотивацію до навчання.

У цілому узагальнення та систематизація знань і умінь учнів при вивченні числових множин є кроком до формування міцної математичної основи та розвитку в них важливих навичок для життя.

Впровадження нових числових множин у базовому курсі математики середньої школи має своєю передумовою розгляд розширення числових алгебраїчних систем. Цей процес включає в себе перехід від напівкільця натуральних чисел з нулем до кільця цілих чисел, а потім від поля раціональних чисел до поля дійсних чисел [33, с. 168]. І одним з найважливіших етапів є узагальнення і систематизація цих знань, оскільки в більшості підручників практично не приділяють уваги: незамкненості множини ірраціональних чисел відносно операцій додавання і множення (чим ця множина істотно відрізняється від попередніх числових множин), та властивостям множини дійсних чисел [33, с. 168].

Особливістю системи математичних понять яку розглядаємо в даній змістовій лінії є те, що кожне наступне поняття виводиться з попередніх на основі виявлення нових взаємозв'язків та відношень. Важливо, щоб досліджуючи еволюцію поняття числа, учні усвідомили, що математичні теорії, узагальнюючись, не втрачають раніше досліджених об'єктів. При цьому розширення відомої множини здійснюється за принципом постійності, який включає наступні умови:

- відома числова множина A стає частиною розширеної множини B , як окремий випадок нової природи;
- операції, які виконуються в A , також визначаються в B , і вони дають ті самі результати, за тими ж правилами та властивостями, для елементів B , що і для елементів множини A ;
- в множині B є виконувана операція, яка відсутня в множині A ;
- розширення B повинно бути мінімальним та визначатися однозначно з точністю до ізоморфізму.

Вивчення комплексних чисел завершує лінію розширення числових множин. Вивчення теми «Комплексні числа», в курсі алгебри та початків аналізу для класів з поглибленим вивченням математики, сприяє узагальненню та систематизації знань учнів, покращує їх розуміння внутрішніх зв'язків у математичному курсі середньої школи і створює підґрунтя для подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Під час узагальнення та систематизації знань та умінь учнів при вивченні числових множин, для підвищення рівня обчислювальної культури, слід не тільки повторити властивості числових множин та висвітлити різницю між методичною і логічною лініями розгортання поняття числа (пункт 1.2), але і приділити час для подолання проблем пов'язаних з цією лінією:

- повторити ознаки подільності.
- нагадали як працювати з процентами та пропорціями;
- розкрити роль нуля та одиниці як чисел. Наприклад:
 - 1 – це число, яке задає єдине ціле, що є одиницею підрахунку;
 - 1 – це число, яке при множенні саме на себе не змінюється;
 - 1 – це число, яке завжди отримується при відніманні двох послідовних чисел (від більшого – менше);
 - 1 – це число, яке ми отримуємо при діленні двох однакових чисел;
 - 1 – це число, яке характеризує площу квадрата із стороною 1 [7, с. 44];
- нагадати коли правильно вживати поняття «число», а коли – «цифра»;
- висвітлити концепцію позначення одного й того самого числа різними способами ($2, \frac{32}{16}, \sqrt{4} \dots$);
- нагадати поняття однозначних, двозначних, ..., n – значних чисел;
- відпрацювати операції порівняння (що більше $2\sqrt{3}$ чи $3\sqrt{2}$);
- нагадати концепції модулю числа, протилежного числа, оберненого числа, та нейтрального елемента;
- зазначити що між множиною дійсних чисел і точками координатної прямої існує взаємно-однозначна відповідність (кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки);
- нагадати поняття, які діти часто плутають, зменшуване та від'ємник, ділене та дільник ...;
- нагадати різницю між поняттями «збільшити/зменшити в» та «збільшити/зменшити на»;

- нагадати про зручність використання в практичних завданнях найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного;
- повторити основні теореми;
- нагадати поняття неправильного, правильного та змішаного дробів;
- потрібно звернути увагу учнів на принципи розширення множини та не замкненість деяких алгебраїчних операцій;
- також необхідно показати учням круги Ейлера-Венна та їх застосування для ілюстрації залежності між числовими множинами;
- розширити кругозір через історичні факти виникнення, тобто як в результаті багатовікового розвитку людського суспільства була створена впорядкована числова множина і звернути їх увагу що методичне розгортання числової лінії відповідає історичному розвитку;
- ознайомити учнів з різними підходи до побудови теорії дійсних чисел: Дедекінда (побудова перерізу на множині раціональних чисел); Вейерштрасса (представлення дійсного числа у вигляді нескінченного десяткового дробу); Кантора (побудова фундаментальної послідовності раціональних чисел), які взаємно збагачують одна одну.

Приклад завдань для узагальнення та систематизації знань та умінь учнів при вивченні числових множин, для підвищення рівня обчислювальної культури знаходяться в додатку В.

Отже, узагальнення та систематизація числової лінії є необхідним етапом в математичній підготовці учнів, який сприяє розвитку їх обчислювальної культури та готовності до подальшого вивчення математики на більш високому рівні.

2.2. Місце і роль усних обчислень в курсі алгебри і початків аналізу

В сучасних умовах широкого використання комп'ютерної техніки в різних сферах життя відбувається погіршення обчислювальних навичок серед учнів. Ця проблема набуває все більш актуального значення в контексті підготовки до ЗНО або НМТ, оскільки діти часто допускають помилки саме під час обчислення. Так, наприклад, завдання на відповідність, яке перевіряло вміння учнів виконувати дії над звичайними дробами, повністю виконали тільки 32,4% учасників НМТ [5]. Найефективніша, на наш погляд, форма боротьби з цією проблемою – систематичне виконання усних вправ на уроках математики.

Ключовим фактором для підвищення обчислювальної культури учнів, у контексті раціональних усних обчислень, є цілеспрямована діяльність вчителя. Ця діяльність спрямована на створення комплексної системи умов, яка сприяє, по-перше, усвідомленню учнями необхідності формування відповідних обчислювальних навичок, а по-друге, формуванню та розвитку швидких, точних та раціональних обчислювальних здібностей [17, с. 88].

Усна лічба – це основний прийом формування і розвитку обчислювальних навичок учнів [13, с. 39].

Якщо на початку ХХ століття в навчальних програмах з математики був передбачений час на виконання усних обчислень, то в сучасних програмах цьому аспекту надається недостатня увага [21, с. 175]. Тоді кожен урок математики починався з інтенсивних усних розрахунків, часто вчителі, враховуючи здібності учнів, підбирали окремі завдання для кожного [22, с. 30]. Важливість цього підходу полягала в тому, що учні навчалися знаходити рішення на основі своєї логіки та обчислювальних навичок, без залучення зовнішніх засобів. А в наш час більшість учнів сучасних шкіл навряд чи зможуть розв'язати ті завдання без використання калькулятора, оскільки на уроках майже не приділяється увага прийомам усної лічби.

Результати різноманітних наукових досліджень підтверджують те, що вплив широкого застосування калькуляторів та комп'ютерної техніки в різних сферах життя впливає на зниження рівня обчислювальних навичок серед учнів [11, с. 74].

На формуванні обчислювальної культури учнів акцентують увагу переважно тільки в початковій школі та на початку основної, а на підтримку та розширення цих навичок, у більш старших класах, відводиться недостатньо часу [21, с. 175]. Більшість вчителів математики вважають це неправильним підходом, оскільки отримані вміння та навички слід постійно підтримувати та розвивати. За спостереженнями вчителів, нерідко на уроці спостерігається дефіцит часу для проведення таких вправ, саме через великий обсяг матеріалу.

Водночас і діючі підручники з математики, алгебри та геометрії обмежені кількістю завдань для усного рахунку та не відзначаються різноманітністю форм та змісту.

Тому вчителі математики вже тривалий час помічають що в учнів досить низький рівень обчислювальної культури, зокрема недостатній рівень, або взагалі відсутність компетенції раціональних обчислень [32, с. 2-3]. Опитані вчителі та власний досвід педагогічної практики, свідчать що основними причинами є:

- обмежений час, обумовлений великим обсягом навчального матеріалу, через що майже немає можливості розвивати обчислювальні навички учнів.
- недостатнє бажання учнів до саморозвитку, оскільки більшість з них занадто розраховують на обчислювальну техніку, через що в результаті втрачають вже здобуті навички.

Ці аспекти не тільки спричиняють погані результати на ЗНО та НМТ, але й в подальшому можуть вплинути на можливість учнів отримати вищу освіту та на їх професійну майстерність.

В останні часи все більше батьків висловлюють сумніви щодо методики оцінювання на НМТ, вся ця критика обґрунтована лише тим що в завданнях оцінюється виключно остаточна відповідь, без розв'язання. Це пов'язано з тим що багато учасників НМТ, які добре знають матеріал припускаються механічних помилок в обчисленнях або перетвореннях, в результаті отримуючи нуль балів за завдання. Однак, колись, міністр освіти і науки України на одній з нарад з проблем фізико-математичної освіти наголошував: «Україні потрібні такі майбутні фахівці, які не лише знають як виконувати завдання, а й можуть їх виконати на рівні отримання правильного результату» [17, с. 85-86].

Для стимулювання інтересу до вивчення математики велике значення має особистість вчителя, а зокрема, його особистісний підхід. Однак, серед усіх цінних рис викладача, ключове значення мають його власна захопленість предметом та процесом навчання, глибоке бажання підтримати віру учнів у свої можливості, а також готовність надати їм допомогу.

Але якщо опитати студентів фізико-математичного факультету, то виявляється що тільки 14% ніколи не використовували калькулятор в школі; 28% почали користуватися калькулятором в середній школі; 40% – в старшій школі; а 18% користувалися калькулятором скільки себе пам'ятають. Тобто більшість учнів припиняють користуватись прийомами усних обчислень ще під час навчання в школі. Це веде до ситуації, коли понад половини дорослих людей зіштовхуються з труднощами під час усних обчислень. Таким чином, ми маємо чітко виражену проблему, яка потребує уваги та рішення.

Завдання вчителя математики полягає у впровадженні ефективної програми і таких методичних прийомів, щоб учні прагнули виконувати дії над числами усно. Безумовно, що при цьому сам вчитель має на досить високому рівні володіти прийомами раціональних усних обчислень [17, с. 88].

Вміння виконувати обчислення усно на високому рівні сприяє формуванню обчислювальної культури. Науковий аналіз демонструє, що систематичне виконання учнями усних обчислень сприяє не лише формуванню обчислювальних навичок, але й позитивно впливає на розвиток уваги, пам'яті, логічного мислення, кмітливості, прагнення до раціональної організації діяльності та на інші якості, що впливають на розвиток особистості. Водночас формує якість мовлення, генеруючи логічні висловлювання під час розмови з використанням усталених фразових структур [22, с. 30]. А найголовніше має надзвичайно велике практичне значення, що в подальшому сприятиме більш результативній діяльності учнів у різних предметних сферах. Все це і є роллю усних обчислень.

Учень, який швидко рахує, починає швидше мислити. Тому необхідно навчити учнів розумно застосовувати обчислювальну техніку – лише в тих випадках, коли це дійсно необхідно.

Використання усних обчислень дозволяє відразу здійснити зворотний зв'язок, що є ефективним інструментом контролю навчальної діяльності учнів. Такі завдання допомагають швидко оцінити, наскільки учні засвоїли матеріал, виявити прогалини в їх знаннях та діагностувати готовність учнів до засвоєння нових знань [32, с. 3]. В процесі таких вправ учні не лише механічно застосовують формули, а й усвідомлюють їх зміст [11, с. 74].

У пояснювальній записці до програми з математики старшої школи відзначається важливість розвитку умінь усного обчислення, поряд з іншими аспектами математичної підготовки [20]. У підручниках повинна витримуватись конкретна стратегія формулювання завдань і вправ для розвитку обчислювальних навичок, включаючи завдання, що зводяться до них [11, с. 74]. Зрозуміло, що відсутність таких завдань на математичних уроках призводить до виникнення труднощів в учнів у виконанні, навіть найпростіших, усних обчислень практичного характеру [21, с. 175].

Досягнення успіху у розвитку обчислювальної культури учнів залежить від використання системи вправ, які є ефективним інструментом для її формування.

Вибір вправ для проведення усних обчислень обумовлюється темою уроку і цілями, спрямованими на закріплення матеріалу. Ці вправи можна ефективно використовувати на різних етапах уроку, в залежності від поставленої мети: на початку уроку вони можуть служити інструментом для повторення пройденого матеріалу, перевірки домашнього завдання та активізації пізнавальної діяльності учнів перед роботою; протягом уроку вони допоможуть учням відпочити між вирішенням більш складних завдань; на завершенні уроку вони сприяють закріпленню та повторенню вивченого матеріалу [21, с. 175-176].

Варто відзначити, що робота з усними обчисленнями вимагає від учнів значних зусиль, а від вчителя постійної практики і глибокого розуміння основних методів усного рахунку. Складання завдань передбачає їх простоту для сприймання на слух, щоб уникнути можливості різних тлумачень, це можливо забезпечити їх чіткістю, лаконічністю, ясністю і виразністю. Якщо завдання виявляються занадто важкими для розуміння на слух, можна здійснити записи або зробити ілюстрації на дошці.

Також необхідно сприяти розвитку учнівського бажання самостійно розв'язувати вправи, розробляти власні творчі обчислювальні проекти, використовуючи можливості комп'ютерної підтримки, якщо це можливо.

Найважливішою рисою пізнавального інтересу є те, що його центром є завдання, яке вимагає активного пошукового або творчого підходу, а не лише простого виявлення новизни або несподіваності.

Для ефективного впровадження усних вправ, на уроках математики, вчителю потрібно враховувати конкретні настанови:

- Практичні завдання з усних обчислень мають пронизувати весь урок.
- Важливо відбирати вправи для усного рахунку, не стихійно, а систематично та обдуманно.
- При плануванні системи завдань та організації усної роботи вчитель має враховувати особисту підготовку учнів та їх здібності до усних обчислень.
- Варто уникати застосування одноманітних завдань, які можуть виснажити інтерес учнів.
- Завдання, відібрані вчителем, мають розширювати кругозір учнів та збагачувати їх знання, враховуючи їхні інтереси та особистий життєвий досвід.
- Використовуючи усні вправи, не слід обмежуватися запитаннями лише до тих учнів, які впевнено справляються з математикою. Це може зменшити ініціативу та активність тих учнів, кому математика дається складніше. Щоб всі мали можливість взяти участь, можна запропонувати роль «вчителя» сильнішим учням, які будуть ставити запитання та перевіряти відповіді.
- Під час усної лічби ефективно використовувати швидкий темп для відпрацювання навичок. Однак, якщо метою є закріплення недавно вивченого матеріалу, варто уникати швидкого темпу. Глибше та міцніше засвоєння відбудеться, якщо на початковому етапі формування навичок учні діятимуть ретельно та свідомо.
- Під час проведення опитування необхідно звернути увагу на відповіді не лише одного учня, а і тих хто не згоден з його відповіддю, щоб почути всі варіанти розв'язання вправи та вибрати правильну відповідь.

- Кількість завдань має бути належним чином збалансованою, щоб їх виконання не призводило до перевтоми учнів і відповідало відведеному на уроці часу.
- Під час вибору завдань слід враховувати, що підготовчі та початкові вправи, як правило, мають бути послідовними – від простих до більш складних. А завдання для відпрацювання навичок мають бути більш різноманітними.
- Для проведення усних обчислень на уроці зазвичай рекомендується виділяти період тривалістю до десяти хвилин. Однак у більшості ситуацій конкретну тривалість усних обчислень визначає вчитель, оскільки цей час залежить від рівня активності та підготовленості учнів, складності матеріалу тощо [32, с. 4-5].

Досвід вчителів підтверджує, що важливо не навантажувати дітей великою кількістю різних прийомів усного рахунку, а варто зосередити увагу на якісному освоєнні та зміцненні загальних типових методів усного рахунку, які базуються на основних арифметичних законах [21, с. 176].

Існують різноманітні підходи, які сприяють розвитку навичок швидкого усного рахунку. Дослідники відмічають що для опанування вміннями швидкого усного рахунку потрібно мати такі основні складові:

- Здібності: вміння логічно мислити, фокусувати увагу та здатність одночасно утримувати декілька елементів в пам'яті.
- Знання алгоритмів та вміння обирати оптимальний підхід для конкретної ситуації.
- Регулярні тренування та поступове ускладнення вправ і завдань допомагають покращити швидкість та точність усного рахунку. Слід підкреслити, що цей компонент має вирішальне значення [7, с. 46].

Усні обчислення для багатьох учнів можуть бути «викликом», особливо коли вони відчувають сумніви у власних здібностях. Так спостерігаючи за швидкими й точними обчисленнями вчителя, учні можуть відчути сумнів у своїх здібностях – вміння вчителя можуть здатися недосяжними та незрозумілими для них. Розв'язанням цієї проблеми може бути створення ситуації успіху, яка допоможе учням повірити у власні можливості та дасть мотивацію до розвитку обчислювальних умінь [17, с. 88].

В структурі розвитку обчислювальних умінь та навичок зазвичай виділяють такі складові:

- Освоєння умінь. На етапі освоєння умінь перші вправи, пов'язані з застосуванням нового обчислювального прийому, виконуються з докладними записами та поясненням кожної дії.
- Автоматизації умінь. Процес автоматизації умінь передбачає пропускання окремих проміжних операцій. Наприклад, якщо послідовність виконання умінь має вигляд $A \rightarrow B \rightarrow C$, де B – проміжний крок, то відповідна навичка перетвориться на $A \rightarrow C$. Під час розвитку обчислювальних навичок, перед тим як переходити до усних розрахунків, ефективним методом є початкове використання письмових обчислень з проміжними усними результатами [13, с. 39].

Критерії оцінки сформованості в здобувачів освіти навичок усних обчислень включають такі складові:

- рівень володіння методиками усної лічби, їх розуміння, стійкість навичок;
- здатність до використання здобутих навичок при вирішенні різних завдань;
- темп (швидкість) виконання обчислень [32, с 5-6].

У методичній літературі зазвичай виділяють такі види вправ для розвитку умінь та навичок усних обчислень:

- усні обчислення без використання записів, з акцентом на швидкість та групову взаємодію;
- усні обчислення з відповіддю від учнів (у формі запитання – відповідь);
- завдання, які передбачають усне обчислення після попереднього запису умови, такі завдання сприяють посиленню аудіального сприйняття за допомогою візуального запам'ятовування чисел. Хоч це значно полегшує процес обчислення, проте важливим етапом усного рахунку є саме запам'ятовування чисел, над якими виконуються операції.
- усні обчислення з записом проміжних результатів (комбінована форма обчислень);
- математична естафета;
- математичні диктанти (до 5 хвилин, із записом лише відповіді) – такі роботи допомагають вчителю визначити середній темп роботи та вказують на які навички слід звертати більше уваги на уроці;
- індивідуальні творчі завдання [21, с. 176].

Спосіб ведення усних обчислень, при яких немає жодних записів складніший, але він є ефективнішим, якщо ним вдається захопити всіх учнів. Це має велике значення, особливо враховуючи складність контролю за кожним учнем під час усних обчислень [22, с. 30-31].

Для корекції помилок учнів в обчисленнях необхідно навчити їх проводити ретельний та детальний аналіз виявлених недоліків; осмислювати фактори, які призвели до помилок; розуміти причини їх виникнення; а також допомогти володіти методами особистого контролю, які дозволять запобігати подібним ситуаціям у майбутньому [17, с. 88].

Додатково вчитель може користуватися різними комп'ютерними програмами, що допомагають організувати швидку роботу з усними обчисленнями.

На етапі засвоєння навичок та умінь запропоновані вчителем завдання для усного обчислення можуть відрізнятися різноманітністю форм та змісту: можуть бути числові вирази, буквені вирази тощо. Іноді перед розв'язанням складної задачі вчитель може запропонувати кілька аналогічних простих усних задач, щоб пояснити кроки розв'язання складної задачі, або навести конкретний приклад для з'ясування принципів, що лежать в основі цієї задачі.

Для формування навичок швидких усних обчислень вчитель може використовувати картки із завданнями, особливо це корисно на уроках геометрії. За цим методом, упродовж уроку, учні голосно читають завдання з карток із рисунками та озвучують хід розв'язання з остаточною відповіддю. Зазвичай на картках до десяти завдань, які поступово ускладнюються. Для успішного виконання таких завдань учням важливо знати властивості операцій над числами, основні геометричні теореми та вміти застосовувати знання на практиці [22, с. 31-33].

Використання карток із завданнями для усного розв'язання на уроках геометрії є ефективним методом підвищення активності учнів. Цей підхід дозволяє створити динамічну та цікаву атмосферу на уроці, акцентуючи увагу учнів на практичних завданнях.

За допомогою усних геометричних вправ, проведених на підготовлених кресленнях, досягаються такі основні цілі:

- закріплення теоретичних знань пов'язаних з поточним матеріалом;
- розвиток уміння швидко застосовувати теоретичні знання для вирішення практичних завдань;
- вдосконалення навичок організації самостійної роботи під час розв'язання завдань.
- розвинення учнівської математичної мови під час навчання та чітко висловлювання отриманих результатів.

Такий підхід дає можливість вчителю спостерігати за прогресом кожного учня, виявляти труднощі та адаптувати навчальний процес до потреби класу. Картки із готовими кресленнями можуть вміщати різноманітні підказки або варіанти розв'язання, що стимулює самостійний дослідницький підхід учнів.

Картки із завданнями також можна використовувати і для самостійної роботи, або роботи в групах. Такі уроки допомагають активній пізнавальній діяльності, стимулюють аналітичне мислення та розвивають практичні уміння.

Загалом, використання карток із завданнями на уроках геометрії забезпечує практичну спрямованість навчання, сприяє засвоєнню матеріалу та розвитку ключових навичок учнів у роботі з геометричними завданнями.

Приклади карток із завданнями для усного обчислення на уроках геометрії в 11 класі представлені в додатку Б.

Багато видатних особистостей визнають важливість навичок усних обчислень. Наприклад:

- Герт Мітрінг, починаючи з 2004 року, щорічно брав участь у змаганнях з ментальних обчислень MSO, і лише чотири рази йому не вдалося виграти золоту медаль. Він встановив безліч світових рекордів з обчислень та у своїх інтерв'ю зазначав, що – через невміння швидко рахувати в голові люди сьогодні втрачають здатність критично оцінювати результат обчислень, так елементарні знання математики дозволяють захистити себе і не стати жертвою різних махінацій.
- Яков Трахтенберг, який народився в Одесі, але через тривалий час потрапив в концтабір Освенців, розробив і удосконалив свою власну математичну систему усного рахунку, яка пізніше вийшла в його книзі.

З 2010 року, за ініціативи Фонду розвитку інтелектуальних здібностей Молодіжної громадської організації «Галактика», в Київському університеті імені Бориса Грінченка проводиться учнівський конкурс з усної лічби серед учнів 2 – 11 класів. Метою конкурсу є «розвиток творчого потенціалу учнівської молоді з інтелектуальних видів спорту, звернення уваги суспільства на необхідність підвищення рівня усної лічби, підвищення якості освіти» [22, с. 34].

Головними завданнями цього конкурсу є:

- зміцнення й концентрація уваги учнів загальноосвітніх шкіл;
- розвиток оперативної пам'яті та мислення серед дітей, підлітків, юнаків та дівчат;
- підвищення якості мовлення шляхом миттєвого формування логічних конструкцій, речень та фраз з використанням наявних стереотипів під час усних відповідей та спілкування у повсякденному житті [22, с. 34].

Цей конкурс проводиться в три етапи: шкільний, районний та міський. Завдання для змагань надавав Інститут післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка, спільно з фондом розвитку інтелектуальних здібностей Молодіжної громадської організації «Галактика».

Поетапно учасники, які успішно впоралися з завданнями з додавання, отримують завдання на віднімання, після чого переходять до завдань з множення та ділення. Переможці кожного етапу конкурсу визначаються окремо для трьох вікових категорій: початкової (1-4 класи), основної (5-9 класи) та старшої школи (10-11 класи). Учасників та переможців конкурсу нагороджують грамотами та призами.

Для досягнення найкращих результатів в обчислювальних навичках важливо систематично вдосконалювати свої вміння. Тому автор завдань, Валерій Іванович Арістов, створив рекомендації, які успішно випробував на практиці та довів їх ефективність для тренування швидкої усної лічби. Відповідно до його основних рекомендацій:

1. На тренування треба виділяти щоденно не більше 20-30 хвилин.
2. Завдання повинні бути розроблені так, щоб кожен приклад повторювався декілька разів. Це допомагає поглиблювати та прискорювати процес лічби, при кожному повторенні, а також зміцнює пам'ять та робить канали пам'яті більш надійними.
3. Варто починати, з легких прикладів, наприклад з розв'язування вправ на додавання двоцифрових та одноцифрових чисел.
4. Потім, бажано, поступово переходити до завдань на віднімання одноцифрових чисел від двоцифрових.
5. Далі – вправи, де потрібно додати трійку двоцифрових чисел, що спонукає мозок працювати на повну потужність та розвиває пам'ять, образне мислення і зосередженість.
6. Потім – множення двоцифрових чисел на одноцифрові, що зазвичай дається досить легко. Швидкість вирішення завдань учнями, на цьому етапі, залежить від вміння учня використовувати таблицю множення.
7. І на останок – ділення двоцифрових чисел на одноцифрові, що вимагає від учнів більше уваги та регулярної практики [22, с. 34].

Такий підхід сприяє розвитку оперативної пам'яті, образного мислення та зосередженості учнів, що також допомагає поліпшити їх швидкість та якість усної лічби.

Формування стійких глибоких знань це довготривалий наполегливий процес, який є одним із актуальних завдань нашого часу. Використання усних обчислень, на уроках математики дозволяє досягти значних результатів в обчислювальній культурі, не збільшуючи навчальні години та не змінюючи календарне планування. Важливо підкреслити, що обчислювальні навички досягають рівня обчислювальної культури лише в результаті тривалого процесу цілеспрямованого їх формування.

Тому після з'ясування особистого рівня кожної дитини, необхідно розробити систему вправ та довести усні обчислення до рівня підсвідомих навичок, оскільки без цього здобувачі освіти можуть «втонутися» в обчисленнях на ЗНО або НМТ. Наша рекомендація використовувати усні обчислення на кожному уроці математики.

В десятому та одинадцятому класах є безліч тем які мають значний потенціал для розвитку обчислювальної культури. Такі теми, як тригонометричні формули, тригонометричні рівняння та нерівності, показникові рівняння та нерівності, логарифми, логарифмічні рівняння та нерівності, задачі на площі та об'єми фігур, та інші теми, можуть вагомо сприяти розвитку обчислювальної культури.

Важливо додатково підштовхувати учнів до самостійного навчання та розвитку, що також є значущим аспектом обчислювальної культури, який не повинен залишатися без уваги. Особливо важливо підтримувати акцент на систематичному підході та вдосконаленні методики навчання, щоб підготувати учнів до успішного подолання завдань ЗНО або НМТ та подальшого навчання в майбутньому.

Необхідно раціонально використовувати усну роботу для засвоєння знань, розвитку вмінь та навичок, однак не допускати її надмірного зловживання. Важливо забезпечити органічне поєднання та баланс між усною та письмовою роботою на уроці, оскільки усна робота є лише інструментом навчання математики, а не самоціллю.

2.3. Розробка дидактичних матеріалів, спрямованих на розвиток обчислювальних умінь учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування»

Сприйняття математики учнями є важливим критерієм навчання. Невміння обчислювати затьмарює тему уроку та може призвести, до психологічного бар'єра або, навіть, до негативного відношення до математики. Нерідко психологічний аспект залежить від розробки належної методики навчання.

Якщо завдання є занадто складними для рівня обчислювальних навичок учнів це може викликати в них відчуття нездатності досягти успіху, оскільки багато психологів зазначають, що психологічно не доведена до кінця робота не сприймається як виконана.

Тому, формування позитивного відношення до математики вимагає комплексного підходу, включаючи розробку ефективної методики, підтримку вчителя та створення стимулюючого середовища, де учні можуть розвивати свої загальноосвітні навички та долати труднощі з позитивним настроєм.

Існує безліч різноманітних прийомів, які допомагають полегшити процес обчислення і зробити його більш ефективним та швидким:

- Переставний закон. Цей закон використовується з молодшої школи, але, на жаль, діти часто починають рахувати ланцюжком, не обдумуючи, як полегшити собі роботу. Наприклад:

$$34 + 29 + 16 = (34 + 16) + 29;$$

$$37 - 28 - 17 = (37 - 17) - 28;$$

$$25 \cdot 12 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 12;$$

$$5 \cdot 16 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot 16$$

- Сполучний закон:

$$16 + (24 + 15) = (16 + 24) + 15;$$

$$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5).$$

- Розподільний закон:

$$(25 + 6) \cdot 8 = 25 \cdot 8 + 6 \cdot 8;$$

$$(12 + 5) \cdot 5 = 12 \cdot 5 + 5 \cdot 5.$$

- Для прискорення усного рахунку часто можна «розірвати» числа на частини. Наприклад:

$$46 + 15 = (46 + 4) + 11; \quad 96 - 49 = (96 - 46) - 3.$$

- Для швидкого усного рахунку можна округлити числа. Наприклад:

$$18 \cdot 39 = 18 \cdot (40 - 1) = 18 \cdot 40 - 18 \cdot 1.$$

- Діти люблять виконувати множення на 10, 100 і т. д. Це можна використати при множенні парних чисел на 5, 50 і т. п. [7, с. 45].

Наприклад:

$$52 \cdot 5 = 52 \cdot (10 : 2) = (52 \cdot 10) : 2; \quad 340 \cdot 50 = (340 : 2) \cdot 100.$$

Такий прийом можна використати і з непарними числами:

$$19 \cdot 50 = (18 + 1) \cdot 50 = 18 \cdot 50 + 1 \cdot 50 = 9 \cdot 100 + 50.$$

- При діленні на 5, 50 і т. д., попередній прийом треба використовувати у зворотному порядку [7, с. 45]. Наприклад:

$$125 : 5 = (125 \cdot 2) : 10; \quad 785 : 5 = (785 \cdot 2) : 10.$$

- Для того, щоб помножити число на 1,5, достатньо до числа додати його половину. Наприклад:

$$184 \cdot 1,5 = 184 + (184 : 2); \quad 68 \cdot 1,5 = 68 + (68 : 2).$$

- Для того, щоб розділити число на 1,5 – достатньо помножити число на 2, а потім розділити на 3. Наприклад:

$$54 : 1,5 = (54 \cdot 2) : 3; \quad 39 : 1,5 = (39 \cdot 2) : 3.$$

- Для того, щоб швидко помножити число на $\frac{3}{4}$ – множимо число на 1,5 і ділимо на 2. Наприклад:

$$84 \cdot \frac{3}{4} = 84 \cdot 1,5 : 2 = (84 + (84 : 2)) : 2.$$

- Скорочене множення на 11, можна використати додавши цифри двоцифрового числа, між першою та другою цифрою [7, с. 45].

Наприклад:

$$13 \cdot 11 = 1\overline{(1 + 3)}3 = 143; \quad 26 \cdot 11 = 2\overline{(2 + 6)}6 = 286.$$

Якщо сума цифр двозначного числа більша за 10, то попереднє збільшуємо на 1. Наприклад:

$$74 \cdot 11 = 7\overline{(7 + 4)}4 = 8\overline{(1)}4$$

- Скорочене множення на 111 [7, с. 45]. Наприклад:

$$36 \cdot 111 = 3\overline{(3 + 6)}\overline{(3 + 6)}6 = 3996.$$

- Скорочене множення трицифрових чисел на 11, відбувається аналогічно [7, с. 45]. Наприклад:

$$324 \cdot 11 = 3\overline{(3+2)}\overline{(2+4)}4 = 3564.$$

- Скорочене множення на 9, 99 і т. д. До першого множника дописують стільки нулів, скільки дев'яток у другому множнику, і від результату віднімають перший множник.

$$36 \cdot 99 = 3600 - 36 = 3564.$$

- Скорочене множення на 101, або 1001 зручно проводити таким чином: $\overline{ab} \cdot 101 = \overline{abab}$, $\overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abcabc}$ [7, с. 45].

Наприклад:

$$34 \cdot 101 = 3434;$$

$$456 \cdot 1001 = 456456.$$

- Скорочене множення на двоцифрові числа, записані однаковими цифрами, можна виконати так [7, с. 45]:

$$14 \cdot 77 = (14 \cdot 11) \cdot 7.$$

- Скорочене множення двоцифрових чисел, які закінчуються одиницями [7, с. 45] – $\overline{a1} \cdot \overline{b1} = \overline{(ab)(a+b)1}$. Наприклад:

$$41 \cdot 51 = \overline{(4 \cdot 5)(4+5)1} = 2091.$$

- Формули скороченого множення зручно використовувати, при зведенні числа до квадрата або при множенні чисел. Наприклад:

$$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2;$$

$$197 \cdot 203 = (200 - 3)(200 + 3) = 200^2 - 3^2.$$

- Також важливо щоб діти пам'ятали не тільки теорему Вієта, а і її властивості:

- Коли сума коефіцієнтів квадратного рівняння дорівнює нулю, то один із коренів рівняння дорівнює 1, а другий – $x = \frac{c}{a}$;
- Коли сума першого та третього коефіцієнтів дорівнює другому, то один із коренів рівняння дорівнює 1, а другий – $x = -\frac{c}{a}$.

- Скорочене множення двоцифрових чисел, кількість десятків яких однакова, а кількість одиниць в сумі дає 10. Помножимо числа 53 і 57: для цього спочатку помножимо 5 на 6 (на 1 більше ніж 5), отримуємо 30 – стільки сотень у добутку; 3 множимо на 7, отримуємо 21 – стільки одиниць у добутку [13, с. 40-41]. Пояснення:

$$\begin{aligned}(50 + 3) \cdot 57 &= 50 \cdot 57 + 3 \cdot 57 = 50 \cdot (50 + 7) + 3 \cdot (50 + 7) = \\ &= 50 \cdot 50 + 50 \cdot 7 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 7 = 2500 + 50 \cdot (3 + 7) + 3 \cdot 7 = \\ &= 2500 + 50 \cdot 10 + 21 = 25\text{сот.} + 5\text{сот.} + 21 = 30\text{сот.} + 21 = \\ &= 5 \cdot 6\text{сот.} + 21 = 3021.\end{aligned}$$

- Добування квадратного кореня із багатоцифрового числа. Спочатку уявно розбиваємо число справа наліво по дві цифри (в кінці може залишитись одна цифра). Для першої групи цифр (27), підбираємо таке число, щоб його квадрат був найбільшим, але не перевищував числа (27) – таким число є 5, записуємо його, як першу цифру відповіді. Далі від першої групи цифр (27) віднімаємо квадрат першої цифри (25), та до остачі дописуємо наступну групу цифр (35). Потім подвоюємо записане у відповіді число 5 (10) та приписуємо справа таку цифру, щоб добуток отриманого в результаті числа на цю цифру був найбільшим, але не перевищував числа 235; такою цифрою буде 2 (оскільки $102 \cdot 2 = 204 \leq 235$), і віднімаємо знайдений добуток (204) від числа (235) і т. д. [28, с. 18-19].

$$\begin{array}{r} \sqrt{273529} = 523 \\ \underline{25} \\ -235 \\ \underline{204} \\ -3129 \\ \underline{3129} \\ 0 \end{array}$$

Проведені дослідження, під час педагогічної практики, засвідчили те, що вивчення розглянутих вище способів усного рахунку забезпечує активізацію розумової діяльності переважної більшості учнів, сприяє систематизації відповідних знань і дозволяє суттєво інтенсифікувати навчальний процес по вивченню багатьох тем шкільного курсу математики.

Як показав аналіз (пункти 1.3 та 2.2) – курс алгебри і початків аналізу має досить широкі можливості для внесення коректив у формування усних прийомів та для розвитку обчислювальної культури, зокрема.

Розробка дидактичних матеріалів є ключовим етапом в покращенні процесу навчання та розвитку обчислювальних умінь учнів, особливо при вивченні такої складної теми, як «Похідна та її застосування». Ця тема, в математиці, вимагає глибокого розуміння та відмінних обчислювальних навичок, оскільки вона має велике практичне значення в різних галузях науки та інженерії.

Розробка дидактичних матеріалів для цієї теми повинна бути насамперед доступною та зрозумілою для учнів. Важливо створити таку послідовність завдань та прикладів, яка допоможе учням, крок за кроком, засвоювати методи обчислень та складні концепції, пов'язані з похідними.

Крім того, дидактичні матеріали повинні містити різноманітні завдання та приклади, що відображають практичне застосування похідних. Це може включати задачі з фізики, економіки, біології та інших наук, які демонструють, як похідні використовуються для моделювання та аналізу реальних ситуацій.

Важливо також враховувати рівень підготовки учнів та створювати матеріали, які відповідають їхнім потребам та можливостям. Дидактичні матеріали можуть бути представлені в різних формах, включаючи підручники, відеоуроки, інтерактивні завдання або звичайні вправи.

Загалом, розробка дидактичних матеріалів для розвитку обчислювальних умінь учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» є важливим завданням, яке сприяє покращенню якості навчання та підготовки молодого покоління до вирішення реальних завдань у майбутньому.

Проілюструємо приклади таких завдань:

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot x^2 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot x$.

Відповідь: $f'(x) = 2x \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. Знайдіть похідну функції $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot x^2 + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot x$.

Відповідь: $f'(x) = -2x + 1$;

3. Дана функція $f(x) = \sqrt{x}$. Знайдіть $f'(16)$.

Відповідь: $f'(16) = \frac{1}{8}$;

4. Знайдіть похідну функції $f(x) = \left(2x \cos \frac{\pi}{3} + 1\right)^2$.

Відповідь: $f'(x) = 2x + 2$;

5. Знайдіть похідну функції $f(x) = (x^2 \cos 0 + \sin \pi)^3$.

Відповідь: $f'(x) = 6x^5$;

6. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sin(3 - 2x)$.

Відповідь: $f'(x) = -2 \cos(3 - 2x)$;

7. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$.

Відповідь: $f'(x) = 4 \cos 4x$;

8. Знайдіть похідну функції $f(x) = \cos 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x$.

Відповідь: $f'(x) = -3 \sin 3x$;

9. Порівняйте значення виразів: а) $f'(0)$ і $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

якщо $f(x) = \operatorname{tg} x$ і $g(x) = \operatorname{ctg} x$.

Відповідь: а) $f'(0) > g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) > g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

10. Дани функції $f(x) = \cos x + 5$ і $g(x) = -2x - 1$. Визначте при яких значеннях змінної x виконується нерівність $f'(x) < g'(x)$.

Відповідь: таких значень немає.

11. Знайдіть значення змінної x , при яких є вірною рівність $\sin'x = (x - 5)'$

Відповідь: $x = 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

12. При яких значеннях змінної x є вірною рівність $f'(x) = g'(x)$, якщо $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = 2x + 3$?
Відповідь: $x = \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.
13. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = x^2 + 2$ в точці $x = -1$.
Чому дорівнює тангенс кута α нахила дотичної до графіка даної функції в точці з абсцисою $x_0 = -1$?
Відповідь: $f'(x) = -2$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$.
14. Відомо що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 дорівнює 0,72. Чому дорівнює значення похідної в цій точці?
Відповідь: 0,72.
15. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіку функції в точці з абсцисою x_0 : а) $y = x^2$, $x_0 = 1$; б) $y = x^3$, $x_0 = 1$; в) $\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
Відповідь: а) 2; б) 3; в) 0.
16. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t у секундах. Знайдіть значення t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 75 м/с.
Відповідь: $t = 18$.
17. Знайдіть найменше значення функції $y = x^3 - 12x$ на відрізку $[0; 3]$.
Відповідь: найменше значення -16 .
18. Знайдіть найбільше значення функції $y = 12x - x^3$ на відрізку $[0; 3]$.
Відповідь: найбільше значення 16.
19. Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення похідної функції $f(x) \cdot x = g(x)$ в точці x_0 , якщо $f(5) = 3$.
Відповідь: $g'(5) = -2$
20. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ у точці $x_0 = -2$.
Відповідь: $f'(-2) = -0.375$.
21. Якщо $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 10$, то $f''' =$
Відповідь: $f''' = 24$.

22. Який кут (гострий чи тупий) створює з додатним напрямом осі x дотичною до графіку функції:

а) $f(x) = x^4 - 2$, в точках $1, 2, -1$;

б) $f(x) = x^3 - x^2$, в точках $1, -1, 0$;

в) $f(x) = x^2 - x^3$, в точках $0, 1, -1$.

Відповідь: а) гострий, гострий, тупий; б) гострий, гострий, 0° ; в) 0° , тупий, тупий.

23. Відомо, що тіло масою $m = 5$ кг рухається прямолінійно по закону $s(t) = t^2 + 2$ (s – шлях в метрах, t – час в секундах). Знайдіть кінетичну енергію тіла через 2 секунди після початку руху.

Відповідь: 40 Дж.

В кінці обчислень вчитель додатково може поставити провокаційні запитання: «чи немає більш раціонального шляху розв’язання? які властивості, закони ви використали під час розв’язання завдання?». Змушуючи учнів задуматися і шукати більш ефективні методи обчислення, можна підвищити їхню розумову активність. Сприйняття математики учнями відіграє важливу роль у навчанні.

Курс алгебри і початків аналізу надає багато можливостей для розвитку обчислювальних навичок. Важливо створювати різноманітні завдання та приклади, які ілюструють практичне застосування математичних концепцій та поглиблювати знання учнів для розвитку обчислювальної культури.

Отже, вивчення математики та розвиток обчислювальної культури вимагають уваги до психологічних аспектів, які впливають на сприйняття та розуміння предмету. Розробка належних методик навчання, підтримка вчителя та створення стимулюючого навчального середовища сприяють підвищенню інтересу до математики та покращенню якості освіти.

2.4 ІКТ як засіб розвитку обчислювальної культури учня

Однією з основних рис інформаційного суспільства є широкомасштабне використання інформаційно-комунікаційних технологій у всіх сферах життя. На сучасному етапі розвитку суспільства навчання стає все більше неперервним, індивідуально-орієнтованим, гнучким та динамічним процесом. Ці зміни обумовлені різними факторами, серед яких важливе місце займає примусове поширення цифрових технологій, в освіті, викликане пандемією та воєнним станом в Україні.

Сучасний підхід до навчання, зосереджений на розвитку особистості учня та передбачає застосування особистісно-зорієнтованої системи з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. Ця система базується на принципах гуманізації та індивідуалізації, враховуючи характерні особливості кожного учня. Використання вчителем підходу STEM-освіти, який включає в себе інтеграцію, дозволяє модернізувати методи навчання, розширити зміст, розвивати нові компетентності використовуючи сучасні технології під час навчання.

Сучасний урок математики вже складно уявити без використання інформаційно-комунікаційних технологій. Завдяки широким можливостям мультимедійних технологій, навчальний матеріал стає більш доступним, захопливим та зрозумілим для учнів. Крім того, це розвиває навички самоконтролю, оскільки учні можуть аналізувати та коригувати свою роботу та самостійно організовувати навчальну діяльність. Зокрема, з ускладненням навчального матеріалу, у старших класах, можливостей використання комп'ютерного моделювання стає набагато більше.

До сучасних технічних засобів навчання, які використовуються на уроках математики, відносяться комп'ютери, мультимедійні проектори та інтерактивні дошки. Використання цих засобів сприяє розвитку обчислювальних навичок учнів.

Інформаційні технології – це сукупність методів, засобів та прийомів, що використовуються для збирання, зберігання, опрацювання, розповсюдження, відображення та використання даних задля забезпечення потреб і інтересів користувачів [15, с. 4]

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ), в освіті, охоплюють сукупність програмних, технічних, комп'ютерних та комунікаційних засобів, а також способи та методи їх застосування для забезпечення високої ефективності та інформатизації освітнього процесу [10, с. 2]. ІКТ допомагають ефективно реалізовувати такі дидактичні принципи педагогічної освіти, як науковість, доступність, наочність та автономність.

Хоч вже тривалий час пріоритетним напрямом є інформатизація освіти, як процес забезпечення, сфери освіти, методологією, практичними розробками та оптимальним використанням сучасних інформаційних технологій навчання, орієнтованих на реалізацію психолого-педагогічних цілей навчання і виховання [31, с. 202], але надмірне застосування ІКТ на уроках призводить до втрати інтересу та невмінню мислити самостійно. Тому інформаційні технології не мають замінювати традиційні засоби навчання, такі як дошка, крейда, зошит тощо.

Використання інтерактивних методів навчання, дозволяє навчальний процес організувати таким чином, що всі учні активно залучаються до навчальної діяльності та можуть діяти відповідно до свого рівня знань та здібностей. Такий метод надає змогу учням здобути значно більший обсяг знань, допомагає розвивати критичне мислення, навички розв'язання складних завдань на основі об'єктивного аналізу, приймати обдумані рішення, брати участь в дискусіях та взаємодіяти з іншими учасниками навчального процесу [8, с. 17]. А також, сприяє розвитку обчислювальної культури через ефективне використання технологічних засобів для розв'язання різноманітних обчислювальних завдань.

Насамперед, слід зазначити, що використання ІКТ може слугувати потужним та корисним інструментом для освіти, зокрема для розвитку обчислювальної культури, тільки якщо вони грамотно вбудовані в навчальний процес:

- комп'ютерна графіка дозволяє учням непомітно засвоювати навчальний матеріал, маніпулюючи різними об'єктами на екрані дисплея;
- завдяки ІКТ можна більш наочно демонструвати як змінюються значення (наприклад графіків функцій) при збільшенні або зменшенні параметрів, що добре відображається на обчислювальній культурі учнів;
- використання програмних засобів надає змогу провести досліди, ігрові завдання, комп'ютерні тести, демонструвати презентації, що суттєво дозволяє урізноманітнити навчальний процес математики, зробивши його більш доступним і наочним;
- використання ІКТ обумовлює формування більш алгоритмічного та раціонального мислення учнів, а також, розвивають логічні здібності, вміння планувати свою діяльність, здійснювати самоконтроль та вчать моделюванню різноманітних явищ та процесів;
- застосування ІКТ допомагає зняти тривогу, психологічні бар'єри, які виникають під час особистого спілкування;
- ІКТ мають майже необмежені можливості в доступності отримання необхідної інформації, як для більш глибокого розуміння, так і для повторення.

ІКТ може використовуватися на всіх етапах процесу навчання: при поясненні нового матеріалу, закріпленні, повторенні, контролі, але використання ІКТ в освіті не повинно стати самоціллю, вони мають бути педагогічно доцільними і виправданими.

Як засвідчує досвід, використання ІКТ на уроках математики збільшує інтерес учнів до предмету, особливо під час вивчення нового матеріалу, що також сприяє розвитку просторової уяви та покращує їх аналітичні здібності.

Використання інтерактивних дошок вже давно визнається високоефективним технічним засобом навчання та широко використовуються в 75 країнах світу [15, с. 9]. Мультимедійне середовище слід організувати таким чином, щоб підкреслити важливість спостережень, експериментів та математичного моделювання.

За допомогою слайдів презентації можна ефективно організувати математичні розминки та самоперевірку, продемонструвати приклади, ланцюжки для усного рахунку, розв'язання задач за готовими рисунками, що корисно вплине на розвиток обчислювальної культури. Також перегляд старих презентацій учнями (повторний перегляд візуальних образів) сприяє швидкому відновленню в пам'яті інформації з уроку.

Багатьом учням подобається брати участь у підготовці до уроку, тому їм можна запропонувати завдання, додатково до домашньої роботи, на створення вправ для усного рахунку відповідно до теми уроку. Крім того, вони можуть придумувати кросворди, ребуси та загадки для подальшого використання на уроках. Інформаційно-комунікаційні технології можна використовувати і для організації цікавих вправ на обчислення (в тому числі усних), які будуть сприйматися учнями як гра.

ІКТ корисно використовувати і як складову методу проєктів через висунення гіпотез, залучаючи учнів до науково-дослідницької діяльності. Обов'язковим етапом роботи над проєктом має бути не тільки створення власних електронних продуктів, але і проведення розрахунків без автоматичних обчислень.

У зв'язку з тим що високий рівень обчислювальної культури вимагає не тільки швидких обчислювальних навиків, але і глибокого розуміння матеріалу, не можна забувати про програмні засоби, які можуть допомогти значно поглибити розуміння теми уроку. Наприклад:

- Khan Academy – інтерактивна платформа з відеоуроками, вправами та тестами, яка надає безкоштовний доступ до великої кількості матеріалів з математики;
- Wolfram Alpha – потужний обчислювальний двигун, який можна використовувати для перевірки;
- Geogebra або Desmos – потужні математичні пакети, які об'єднують геометрію, алгебру, графіки та статистику. Ці інструменти допоможуть учням розробити геометричні та алгебраїчні концепції;
- GOOGLE форми, Quizlet, Kahoot!, Naurok, Classmarker, Plickers, Easy Test Maker, Schoolhouse Test, Indigo, MyTestX – інтерактивні платформи для створення та проведення тестувань, індивідуальної та самостійної роботи, за їх допомогою зручно виявляти прогалини в знаннях.

Завдання на цих ресурсах допоможуть учням покращити розуміння математики та розвивати свої обчислювальні навички. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії.

Таким чином, використання різноманітних сучасних засобів навчання дозволяє вчителю цілеспрямовано й ефективно керувати процесом самостійної діяльності учнів, а для учнів – сприяє підвищенню рівня самостійності в опануванні нових знань, формує рівень обчислювальної культури і, разом з тим, стимулює інтерес до вивчення математики. Такий методичний підхід при викладанні математики дозволяє: оптимізувати навчальний процес, використовуючи час більш раціонально на різних етапах уроку.

Висновки до 2 розділу

У дослідженні було детально проаналізовано методи розвитку обчислювальної культури учнів під час вивчення математики, та висвітлено що курс алгебри і початків аналізу має досить широкі можливості для внесення корективів у формування усних навиків обчислення, що є шляхом для розвитку обчислювальної культури.

Найкращим методом підтримки рівня обчислювальної культури учнів є, на наш погляд, систематичне використання усних справ на уроках математики. Усні обчислення можуть бути присутні на всіх етапах уроку та можуть відрізнятися різноманітністю форм і змісту, а за підтримки ІКТ урок може стати ефективнішим.

Формування стійких глибоких знань це довготривалий наполегливий процес, який є одним із актуальних завдань нашого часу, використання усних обчислень, на уроках математики дозволяє досягти значних результатів в обчислювальній культурі, не збільшуючи навчальні години.

Розробка дидактичних матеріалів та систематизація знань та умінь учнів при вивченні числових множин є ключовими етапами в покращенні процесу навчання та розвитку обчислювальних умінь учнів, що є кроком до формування міцної математичної основи та розвитку в них важливих навичок для життя.

А використання різноманітних сучасних засобів навчання дозволяє вчителю цілеспрямовано та ефективно керувати процесом самостійної діяльності учнів, що сприяє підвищенню рівня самостійності учнів в опануванні нових знань, формує, в них, рівень обчислювальної культури і, разом з тим, стимулює інтерес до вивчення математики.

ВИСНОВКИ

Під час написання роботи був проведений детальний аналіз психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми розвитку обчислювальної культури учнів на уроках математики в старших класах. Виявлені результати говорять про те, що проблема є досить актуальною, адже велика кількість учнів мають низький рівень обчислювальної культури що впливає на їх результати ЗНО (НМТ), а головне – на подальше життя.

В процесі дослідження методичної схеми розгортання числової лінії ми встановили доцільність проведення узагальнення та систематизації знань, включаючи ознайомлення учнів з логічною залежністю між числовими множинами, що дозволить їм створити міцний фундамент математичних знань.

Після тривалого аналізу психолого-педагогічної та науково-методичної літератури, ми дійшли висновку що найефективнішою формою боротьби з низьким рівнем обчислювальної культури серед учнів є систематичне використання усних вправ на уроках математики, оскільки науковий аналіз демонструє, що систематичне виконання учнями усних обчислень сприяє не лише формуванню обчислювальних навичок, але й позитивно впливає на розвиток уваги, пам'яті, логічного мислення, кмітливості, прагнення до раціональної організації діяльності, а найголовніше має надзвичайно велике практичне значення.

Обчислювальні навички досягають рівня обчислювальної культури лише в результаті тривалого процесу цілеспрямованого їх формування.

Також ми розробили дидактичні матеріали, спрямовані на розвиток обчислювальних умінь учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» та розглянули обчислювальні прийоми, які допоможуть дітям полегшити обчислення.

Удосконалити традиційну методику розвитку обчислювальної культури можна використовуючи комп'ютерні засоби. Як засвідчує досвід, використання ІКТ на уроках математики збільшує інтерес учнів до предмету, особливо під час вивчення нового матеріалу, що також сприяє розвитку просторової уяви та покращує їх аналітичні здібності. А головне надає безліч можливостей для розвитку, зокрема для розвитку обчислювальної культури.

Враховуючи вище сказане, маємо зазначити, що підвищення рівня обчислювальної культури учнів є невід'ємним етапом процесу навчання.

Зважаючи на отримані результати, можна зробити висновок, що в процесі дослідження були вирішені всі поставлені завдання і мета даної роботи досягнута, а результати, доцільними до обговорення та використання, задля покращення методики розвитку обчислювальної культури учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bokhove, C., et al. (2019). *Computational Thinking in Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-17978-1.
2. Shchur K. K. Chernykh L. O. Analysis of the problem of the development of students' computing culture. IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity». Vinnytsia, 2023. S. 211-213.
3. Валько Н. В., Кузьмич Л. В. Формування обчислювальної культури студентів у контексті інформатизації освіти. Науковий вісник Ужгородського університету : Серія: Педагогіка. Соціальна робота. Ужгород, 2013. С. 19–22.
4. Власюк Ю. В. Цитати та афоризми. URL: <https://yuliya-vlasyuk.webnode.com.ua/tsikava-matematika/tsitati-i-aforizmi/> (дата звернення: 01.11.2023).
5. Волошин М. НМТ з математики: аналіз найчастіших помилок учасників тесту 2022 року 24 освіта. URL: https://24tv.ua/education/nmt-2023-matematika-analiz-naychastishih-pomilok-uchasnikiv-testu_n2323564 (дата звернення: 01.11.2023).
6. Гебель А. В. Розвиток обчислювальної культури учнів на прикладі вивчення теми «показникова та логіфмічна функції». Кривий Ріг, 2022. С. 1-10.
7. Гордєєва Л. В., Амброзяк О. М. Усний рахунок як базова складова математичної культури та інтелектуального благополуччя учнів. Актуальні питання природничо-математичної освіти збірник наукових праць. Вип. 5-6. Суми, 2015. С. 42-48.
8. Дмитрієва Д. С. Методика організації дидактичних ігор на уроках математики засобами інформаційно-комунікаційних технологій (Кваліфікаційна робота). Кривий Ріг, 2019. С. 1-122.
9. Донченко Я. А. Розвиток математичної культури учнів на уроках алгебри: збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Евристика і дидактика математики. Донецьк, 2013. С. 46-47.

10. Зубаль Н. Г., Ковальчук О. О., Луцюк Н. С., Собчук О. М. Інформаційно-комунікаційні технології як засіб реалізації особистісно–орієнтованого навчання. Луцьк. С. 1-10.
11. Ільченко Г. О. Про значення усних вправ у процесі вивчення шкільного курсу математики. Збірник наукових праць. Полтава, 2014. С. 74-75.
12. Історія математики. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8 (дата звернення: 01.11.2023).
13. Криворучко Г.І. Палій Л. О. Традиційні та сучасні прийоми формування та розвитку обчислювальних навичок учнів. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Вип. 24. Вінниця, 2010. С. 38-43.
14. Кузьменко Т. І. Обчислювальна культура як компонент математичної грамотності учнів основної школи. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2015»: матеріали II Міжнародної науково-методичної конференції. Суми, 2015. С. 50-51.
15. Литвинова С. Г. Організаційно-освітні проблеми впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в загальноосвітніх навчальних закладах. С. 1-20.
16. Маслова К.І. До питання про узагальнення та систематизацію математичних знань учнів з числової змістової лінії шкільного курсу математики. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Том 1. Кривий Ріг, 2002. С. 234-245.
17. Матяш О. І. Палій Л. О. Компетенція раціональних обчислень як необхідна передумова математичної компетентності вчителя та учня. Вінниця. С. 85-90.

18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків, 2019. С. 1-351.
19. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М. Алгебра підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти: 2-ге видання. Харків, 2021. С. 236-240.
20. Міністерство освіти України. навчальні програми для 10-11 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 01.11.2023).
21. Носаченко Л.В. Формування та розвиток обчислювальних обчислювальної культури учнів. Збірник матеріалів студентської науково – практичної конференції фізико-математичного факультету. Вип. 4. Суми, 2010. С. 175-178.
22. Олексюк О. Усна лічба як один із засобів розвитку логічного мислення дитини. Математика в сучасній школі. Вип. 10. 2012. С. 30-36.
23. Попович М. В. Культура. Енциклопедія Сучасної України. Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2016. URL: <https://esu.com.ua/article-51449> (дата звернення: 01.11.2023).
24. Придорожко В. В. Актуальність розвитку обчислювальних навичок у початкових класах. Київ, 2021. С. 1-39.
25. Романишин Р. Я. Обчислювальна культура молодших школярів як складова математичної культури. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III(22), Issue: 45, 2015. С. 46-49.
26. Собко Н. В. Календарне планування з алгебри та початків аналізу 11 клас, профільний рівень. На Урок. URL: <https://naurok.com.ua/kalendarne-planuvannya-z-algebri-ta-rochatkiv-analizu-11-klas-profilniy-riven-305855.html> (дата звернення: 01.11.2023).
27. Сухіна Л. А. Теоретичні основи формування обчислювальних навичок. Didactics of mathematics: Problems and Investigations, Issue 25. 2006. С. 55-59.
28. Фокіна Л.О. Способи усного рахунку. Держинівка, 2011. С. 1-22.

29. Черних Л. О., Віріч М. В. Розвиток обчислювальної культури учнів і студентів при вивченні комплексних чисел. Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи: збірник наукових праць за матеріалами всеукраїнської науково-практичної конференції. Харків, 2016. С. 213-216.
30. Шахова А. О. Формування обчислювальної компетентності молодших школярів. Кваліфікаційна робота (проєкт). Херсон, 2021. С. 1-32.
31. Швецова Г. А. ІКТ у навчальному процесі – проблеми та перспективи впровадження. Наукові записки кафедри педагогіки. Вип. 26. Харків, 2011. С. 201-206.
32. Щур К. К. Місце і роль усних обчислень у підвищенні рівня обчислювальної культури учнів старших класів. Наукові записки молодих учених. Вип. 12. С. 1-8. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/2046> (дата звернення: 24.11.2023).
33. Яковлєва О. М., Гаєвець Я. С., Каплун В. М. Розвиток числової лінії в курсі математики закладів загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. Суми, 2020. Випуск 1(23). С. 164-170.

ДОДАТКИ

Додаток А

Розробка фрагментів уроку для 11 класу (профільний рівень)

1. Легкі завдання, які можна розв'язувати усно на початку уроку для актуалізації опорних знань:

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; б) $\frac{8}{\sqrt{4x+5}} = 1$; в) $\frac{x^2}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$; г) $x^7 = -2$.

2. При яких значення змінної вираз має зміст:

а) $\frac{1}{\sqrt{x+8}}$; б) $\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x}$; в) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

3. Обчисліть:

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-16,4)^0 - 5^{-2}$; б) $\frac{1}{6}(\sqrt{18})^2 - \left(\frac{2}{4}\sqrt{24}\right)^2$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{0,04} - 2$;

г) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; д) $0,3\sqrt[3]{1000} - 10\sqrt[8]{256}$; е) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; і) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$;

і) $100\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[5]{-0,00032}$; ж) $\sqrt[7]{15^7} + (-2\sqrt{10})^2 - \sqrt[7]{-128}$.

4. Розв'яжіть систему:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ 10 - 3x - x^2 > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + y + z = 16 \\ y + z = 17 \\ xy = 1 \end{cases}$.

5. Розкладіть на множники вираз:

а) $x^3 + 8$; б) $2x^4 + 9x^2 - 18$; в) $64 - x^4$; г) $x^3 - 27$.

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; \infty)$; в) $[-2; 1]$; г) $[2; 3]$.

7. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt[3]{3x+1} < 4$; б) $\sqrt[20]{x+2} > 1$; в) $\sqrt[4]{x^2-8} > \sqrt[4]{2x}$; г) $x^3 > x+1$.

8. Спростіть вираз:

а) $\sqrt[4]{x^4 \sqrt{x^3 \sqrt{x}}}$; б) $\sqrt[8]{a^3 \sqrt[3]{a^7}}$; в) x ; г) x ; д) x .

2. Усні завдання, які можна використати для узагальнення та систематизації знань з розділу «Показникова та логарифмічна функції»:

1. Подайте числа $1; 4; 8; 16; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \sqrt{2}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: а) 2 ; б) $\frac{1}{2}$.

2. Спростіть вираз:

а) $7^{x+1} + 7^x$; б) $2^{x+1} + 2^{x-4}$; в) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$; г) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x = 64$; б) $3^x = \frac{1}{81}$; в) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$; г) $10^{-x} = 0,001$;

д) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}$; е) $0,7^x = 2\frac{2}{49}$.

4. Обчисліть значення виразу:

а) $\lg 8 + \lg 12,5$; б) $3 \log_6 2 + \frac{3}{4} \log_6 81$; в) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$; г) $5^{\frac{1}{2} \log_5 49}$.

5. Порівняйте:

а) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$; б) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$; в) $\lg \frac{\pi}{4}$ і $\lg \frac{\pi}{3}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; б) $\log_6(6^{-x} - 5) = x + 1$ [18].

3. Усні завдання, які можна використати для узагальнення та систематизації знань з розділу «Інтеграл і його застосування»:

1. Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $f(x) = \left(6x + \frac{1}{2}\right)^3$; в) $f(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Для функції f на проміжку $I = (-\infty; \infty)$ знайдіть первісну F , графік якої проходить через дану точку:

а) $f(x) = 3 - 6x, A(-1; 0)$; б) $f(x) = e^{2x+1}, B\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$.

3. Обчисліть визначений інтеграл:

а) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int_{-4}^{-2} (2x + 4) dx$; г) $\int_{-1}^1 (1 - 5x^4) dx$;

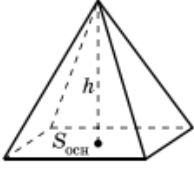

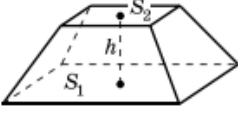
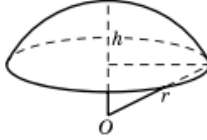
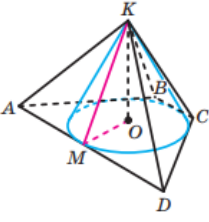
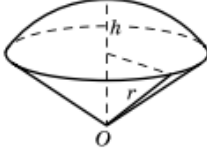
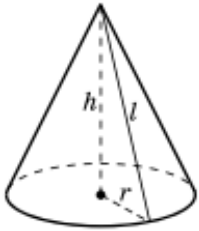
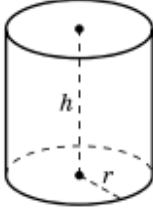
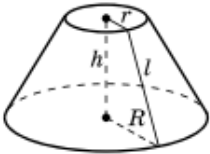
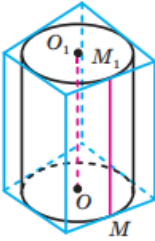
д) $\int_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2} dx$; е) $\int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right) dx$; і) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x} dx$.

4. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^2, y = 4$; б) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$; в) $y = [18]$.

4. Усні завдання, які можна використати для узагальнення та систематизації знань з розділу «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики»:
1. Кафе пропонує в меню 3 перші страви, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки існує способів вибрати обід із трьох страв (по одній страві кожного виду)?
 2. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?
 3. Для підготовки до іспиту запропоновано 80 запитань. Учень знає відповіді лише на 15 із них. Екзаменаційний білет містить 6 різних запитань. Скільки різних екзаменаційних білетів можна скласти так, щоб учень міг відповісти принаймні на одне запитання білета?
 4. Учні 10-х і 11-х класів вирішили зіграти між собою матч у футбол та матч у баскетбол. Ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє у команди 11-х класів тільки у футбол, дорівнює 33%, тільки в баскетбол — 18%. Яка ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє рівно один із двох зіграних матчів?
 5. Після подорожі до Європи в мандрівника залишилися світлини – 10 пейзажів і 15 портретів із Франції та 6 пейзажів і 14 портретів з Італії. Мандрівник вибирає навмання 2 світлини. Яка ймовірність того, що вони обидві будуть пейзажами, якщо відомо, що він не вибрав жодного портрета, зробленого у Франції?
 6. Серед лотерейних білетів 10% виграшних. Гравець придбав 3 білети. Яка ймовірність того, що серед куплених білетів:
 - а) не буде виграшних;
 - б) будуть усі виграшні?
 7. Монету підкидають один раз. Випадкова величина x дорівнює 1, якщо випав герб, і 0, якщо випало число. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини x .
 8. Дано вибірку: 6, 5, 8, 6, 12, 7, 8, 11, 8. Знайдіть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки [18].

**Приклади карток із завданнями для усного обчислення на уроках
геометрії в 11 класі**

Піраміда		Куля	
	<p>Дано:</p> $S_{\text{осн}}=12\text{см}^2; h=9\text{см};$ $S_{\text{біч}}=15\text{см}^2.$ Знайти: $S_{\text{п.п}} -? V-?$		<p>Дано:</p> $r=10\text{см}.$ Знайти: $S -? V-?$
	<p>Дано:</p> $S_{\text{біч}}=15\text{см}^2; S_1=10\text{см}^2;$ $S_2=5\text{см}^2.$ Знайти: $S_{\text{п.п}} -? V-?$		<p>Дано:</p> $r=14\text{см}; h=8\text{см}.$ Знайти: $V-?$
	<p>Дано:</p> $OM=3\text{см}; AD//BC;$ $KM=5\text{см}; AB=10\text{см}.$ Знайти: $S_{\text{біч. пірам.}} -?$		<p>Дано:</p> $r=17\text{см}; h=13\text{см}.$ Знайти: $V-?$
Конус		Циліндр	
	<p>Дано:</p> $h=12\text{см}; r=10\text{см}; l=8\text{см}.$ Знайти: $S_{\text{п.п}} -? S_{\text{осн}} -? S_{\text{біч}} -? V-?$		<p>Дано:</p> $h=10\text{см}; r=8\text{см}.$ Знайти: $S_{\text{п.п}} -? S_{\text{осн}} -?$ $S_{\text{біч}} -? V-?$
	<p>Дано:</p> $r=13\text{см}; h=12\text{см}.$ Знайти: $S_{\text{п.п}} -? S_{\text{осн}} -? S_{\text{біч}} -? V-?$		<p>Дано:</p> $MM_1=18\text{см}; r=10\text{см}$ Знайти: $S_{\text{п.п. паралел.}} -?$

**Приклад завдань для узагальнення та систематизації знань та умінь
учнів при вивченні числових множин, для підвищення рівня
обчислювальної культури**

1. Напишіть число, яке складається з 8 тисяч, 6 десятків і однієї одиниці.
2. Напишіть правильну відповідь
 - а) 4 - це тільки число; б) 4 - це тільки цифра; в) 4 - це число й цифра;
 - г) 4 - це буква
3. Знайдіть найбільшу цифру в результаті ділення чисел 86543 і 76.
4. Чому число 17 просте?
5. НСК НСД(56, 12, 18).
6. Укажіть правильне твердження:
 - а) «Добуток протилежних чисел завжди дорівнює нулю»;
 - б) «Добуток протилежних чисел завжди дорівнює одиниці»;
 - в) «Добуток протилежних чисел завжди від'ємне число»;
 - г) «Добуток протилежних чисел завжди додатне число».
7. Укажіть правильне твердження:
 - а) «Сума протилежних чисел завжди дорівнює нулю»;
 - б) «Сума протилежних чисел завжди дорівнює одиниці»;
 - в) «Сума протилежних чисел може бути будь-яким числом»;
 - г) «Сума протилежних чисел завжди рівна натуральному числу».
8. Напишіть період дробу: $878,34534567$.
9. Обчисліть добуток дробів: три цілі, п'ять сотих і дві цілі, три десяті.
10. Знайдіть результат відношення числа a до числа b , якщо: $a=725$, $b=5$
11. Результат відношення числа a до числа b дорівнює c . Знайдіть відношення a , якщо: $c=12$, $b=7$.

12. Знайдіть 7% від числа 5677.
13. Знайдіть число, якщо 0,18% його рівні 0,456.
14. 18. Знайдіть процентне відношення чисел: 456456 до 18.
15. Якому значенню дорівнює π .
16. Обчисліть: $77,5625 : 4 \frac{18}{32}$.
17. Число $\frac{4}{2}$ раціональне?
18. Напишіть ознаку подільності на 9.
19. Чи рівносильні $\frac{32}{16}$ і $\sqrt{4}$.
20. Напишіть 8 значне число.
21. Напишіть модуль, протилежне число, обернене число до 189.
22. Позначте число $-\sqrt{0,45}$ на координатній прямій.
23. Збільшити число 16 в 19 разів.
24. Напишіть змішаний дріб.
25. Які операції виконуються на множенні дійсних чисел, але не виконуються на множенні натуральних чисел?
26. Позначте відношення між множинами раціональних чисел та напишіть їх назви.
27. Обчисліть усно:
- а) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{4}{15} - \left(1 - \frac{3}{5}\right)$; б) $(-0,07 + 0,145 + 0,56 - 0,135) : \frac{14}{28}$.
28. Спростіть усно:
- а) $\frac{8^{0,5} \sqrt[3]{9}}{\frac{5}{3^3 \sqrt{2}}}$; б) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}-1}}{a^{\sqrt[3]{3}-1}} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}+1}}{a^{\sqrt[3]{3}+1}}$.
29. Розв'яжіть пропорцію:
- а) $\frac{31}{10} : \frac{93}{10} = x : \frac{7}{9}$; б) $\frac{342}{63} : \frac{973}{63} = x : \frac{139}{9}$.
30. Розв'яжіть рівняння:
- а) $\frac{\left(6 - \frac{9}{2}\right) : 0,003}{\left(\frac{61}{20} - 2,65\right) \cdot 4 : \frac{1}{5}} = \frac{x}{2}$; б) $100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0$.