МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико – математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
____________Бобилєв Д.Є.
«___»____________2023 р.

Реєстраційний №_________
«____»___________2023 р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВЕДЕННЮ ТЕОРЕМ ТЕМИ «ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ» НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ В 7 КЛАСІ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм – 22
ступеня вищої освіти «Магістр»
спеціальності
«014 Середня освіти (Математика)»
Литвиненко Анастасії Русланівни

Науковий керівник:
доктор педагогічних наук, професор
Лов'янова І. В.

Оцінка:
Національна шкала ________________
Шкала ECTS____Кількість балів____
Голова ЕК__________________________
Члени ЕК_________ ________________
_________ __________________
_________ __________________
_________ __________________

Кривий Ріг – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. На сучасному етапі стрімкої інформатизації всіх сфер суспільного життя, у тому числі галузі освіти, на порядок денний вітчизняної сфери освіти поставлена проблема оновлення та вдосконалення методики навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Так, у шкільній математичній освіті особливе місце посідає геометрія, яка відіграє важливу роль у процесі формування в учнів знань про фігури та їхні властивості, у застосовуванні цих знань під час вирішення задач, у розвитку просторової уяви. Вивчення геометрії здійснює вагомий вклад у розвиток логічного мислення, у формування поняття доказування, оволодінням дедуктивним методом тощо, оскільки геометрія майже не містить готових алгоритмів, прийомів та методів розв'язання задач, оскільки майже всі теореми геометрії мають нестандартний характер, вимагають для свого доведення та розв'язання індивідуального підходу.

Геометрія - це один з основних розділів математики, який має значення для розвитку логічного та просторового мислення учнів. Доведення теорем є важливою складовою геометрії, яка дозволяє учням розвивати абстрактне мислення, логічні здібності та креативність [8, с.140].

Так, вивчення теорем та методики їх доведення починається у 7-му класі. Наприклад, лише в курсі геометрії 7 класу, за підручниками різних авторів, нараховано від 23 до 29 теорем [3, 7, 11, 20].

Навчання доведенню теорем геометрії – це одне з ключових завдань шкільного курсу геометрії, яке традиційно пов'язане з формуванням умінь доводити істинність тверджень та правильність рішень, що приймаються за допомогою логічних висновків дедуктивного характеру. Ця традиція виникла у період розвитку математики, коли лише міркування, що спиралися на правила логічного висновку, слід було вважати переконливими та суворими. Натепер ставлення математиків до логічного доведення поступово змінюється під впливом багатьох факторів, зокрема обумовлених цифровізацією та діджиталізацією освіти [12, с.133].

Так, аналізуючи завдання НМТ 2022 року виявлено, що тест не містить жодного завдання з доведення теорем [22]. В завданнях контрольних робіт та ДПА лише незначна частина завдань – це завдання на доведення теорем, тому формуванню в учнів уміння доведення теорем та методики доведення теорем не приділяється достатньо уваги.

Однак, проведений нами аналіз ЗНО для вчителів математики, що проходять сертифікацію у 2023 році показав, що з 90 запропонованих завдань – 4 завдання стосуються саме методики доведення теорем. Тому вміння навчити доводити теореми є одним із показників професійності сучасного вчителя [23].

На сьогодні ефективність навчання учнів доведенню теорем залежить, перш за все, від умінь школярів проводити деталізований розбір та аналіз конкретних ситуацій, про які йде мова в теоремі; вміння правильно виконувати побудову; аналізувати те, яким чином змінюються одні елементи креслення у випадку зміни інших; висувати гіпотези, підтверджувати та спростовувати їх тощо [25, с.22].

Вчені переконані, що доведення теорем має великий потенціал для розвитку критичного мислення, логічного мислення, просторових уявлень та інших когнітивних навичок учнів. Проте, навчання доведення теорем може бути складним і часом нудним для учнів, які не мають достатньої підготовки та навичок [26, с.18].

З цієї причини, вчені займаються дослідженнями в галузі методики навчання доведення теорем з геометрії з метою розробки ефективних та інноваційних підходів до цього процесу. Зокрема, вчені досліджують різні педагогічні технології та методи, які можуть бути застосовані для підвищення якості навчання доведення теорем. До цих підходів відносяться, зокрема, інтерактивні методи, групова робота, використання комп'ютерних програм та інших засобів візуалізації. Серед відомих зарубіжних вчених, які працювали в даній галузі, можна відзначити Ріхарда Дедекінда, Емму Нойтер та Девіда

Гілберта. Вони стали авторами одних з найвідоміших робіт з геометрії, де розвинули та систематизували поняття доведення теорем [28, с.17].

В працях українських математиків також було проведено багато досліджень з методики навчання доведення теорем з геометрії. Зазвичай, українські науковці зосереджуються на вивченні ефективних педагогічних технологій, які допомагають залучити учнів до активної участі у навчальному процесі та збільшити їх мотивацію до вивчення геометрії. Крім того, вони також досліджують можливості використання інтерактивних технологій для навчання доведення теорем з геометрії [13, с.6].

Так, цікавими, на наш погляд є роботи В. Кобзаря, що працював над створенням програм та методики для навчання доведення теорем з геометрії, зокрема, у проекті "Геометрія на комп'ютері", що є основою для вивчення методики доведення теорем під час дистанційного навчання [1, с.3].

Питання особливостей доведення теорем стала предметом досліджень багатьох вітчизняних учених-математиків у сфері теорії математики, прикладної математики, серед яких можна відзначити Г. Бевза, С. Бондаря, І. Волощук, А. Мерзляка, М. Шабанова, З.Слєпкань та ін [10, с.26].

Актуальність проблеми навчання учнів доведенню теорем з геометрії з теми: «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» полягає у тому, що геометрія є однією з основних складових математичної освіти, а вивчення трикутників та їх властивостей є важливим етапом у навчанні геометрії [2, с.6].

Ознаки рівності трикутників є основними поняттями геометрії. Ці ознаки мають практичне застосування, наприклад, у розв'язанні задач на побудову трикутників за даними довжинами сторін або кутами.

Однак, навчання трикутникам та їх ознакам рівності є складним процесом для багатьох учнів, і потребує від вчителів високого рівня професійної майстерності та вміння застосовувати різноманітні методики та підходи до навчання.

Зазначена актуальність зумовлює вибір теми дослідження: «Методика навчання учнів доведенню теорем з геометрії з теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» на уроках геометрії в 7 класі».

Мета кваліфікаційної роботи: розробити методичні прийоми навчання учнів доведенню теорем теми: «Трикутники. Ознаки рівності трикутників». Реалізація поставленої мети передбачає вирішення таких **завдань**:

1) Провести аналіз сучасної психолого-педагогічної та методичної літератури із проблеми дослідження.

2) Дослідити теоретичне підґрунтя доведення теорем шкільного курсу математики.

3) Проаналізувати навчальні програми та підручники геометрії 7 класу щодо навчання учнів доведенню теорем теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників».

4) Визначити методичні особливості доведення теорем теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників».

5) Розробити методичні прийоми навчання доведення теорем в умовах дистанційного навчання.

Об'єкт дослідження: процес навчання учнів доведення теорем у навчанні геометрії.

Предмет дослідження: навчання учнів доведенню теорем теми: «Трикутники. Ознаки рівності трикутників».

Методи дослідження обрані з урахуванням поставленої мети і завдань дослідження, його об'єкта та предмета.

У науковій роботі використовувалися: 1) *теоретичні методи*: аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія використовувалися при розгляді сутності та змісту поняття «теорема», вивченні видів теорем та методики їх доведення у шкільному курсі геометрії); порівняльний метод (використовувався під час аналізу різних навчальних програм та підручників геометрії 7 класу щодо навчання учнів доведенню теорем); метод аналізу наукової літератури з математики;

2) *емпіричні методи*: вивчення педагогічного досвіду; спостереження; анкетування; опитування.

Практичне значення роботи. Сукупність представлених у даному магістерському дослідженні теоретичних та практичних положень, висновків та результатів можна використовувати під час подальших досліджень особливостей навчання учнів доведенню теорем теми: «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», а також у практиці роботи вчителів математики, викладачів закладів вищої освіти, студентами-практикантами, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Структура роботи обумовлена метою, завданнями, об’єктом і предметом дослідження та логікою викладення матеріалу. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, що містять дев’ять підрозділів, висновків до розділів, загальних висновків та списку використаних джерел (32 найменування), 19 таблиць, 50 рисунків, 6 додатків. Загальний обсяг роботи складає – 133 сторінки, з них 80 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНЕ ПІДГРУНТЯ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

1.1. Теореми в шкільному курсі математики. Види теорем

У Типових освітніх програмах для загальноосвітніх навчальних закладів для 5 – 9 та 10 – 11 класів для різних рівнів та профілів навчання визначені вимоги до математичних знань та очікуваних результатів учнів. Так, однією з загальних цілей шкільної математичної освіти є розвиток здатності учнів логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, а також використовувати математичні методи під час розв'язування навчальних і практичних завдань. До специфічних завдань на етапі навчання математики у 5-9 класах входить завдання з ознайомлення з різними методами та прийомами для розв'язування математичних задач, а також здатність доводити математичні твердження та навички їх практичного використання [21].

Провідну роль у виконанні даного завдання займає процес доведення теорем на уроках геометрії [9].

Існують різні точки зору на зміст поняття «*теорема*». Відомо, що форма мислення, в якій стверджується або заперечується що-небудь відносно предметів, їх властивостей та взаємовідношень і, яка має властивість виражати істину або брехню, називається твердженням. Твердження, в якому мова йде про математичні об’єкти називається теоремою.

Отже, поняття "*теорема*" у математиці визначається різними підходами, але загальною ідеєю є твердження, яке може бути доведене з використанням логічних аргументів на основі певних припущень або аксіом [25, с.23].

Теореми відіграють важливу роль в навчанні учнів математики та інших наукових дисциплін. Можна виділити таке значення теорем [27, с.80]:

1. **Розвиток логічного мислення**. Вивчення теорем вимагає від учнів логічного мислення та розуміння послідовності доведень. Вони навчають учнів розрізняти між причину та наслідок, а також логічно обґрунтовувати свої власні висновки.

2. **Застосування математичних методів**. Теореми вивчаються разом із методами їх доведення. Це допомагає учням розвивати навички застосування математичних методів для розв'язування завдань та задач.

3. **Збагачення знань**. Теореми розширюють знання учнів про математичні концепції та відкривають нові шляхи для дослідження. Вони допомагають учням глибше розуміти математику та поглиблювати свої знання.

4. **Розвиток аналітичного мислення**. Вивчення теорем сприяє розвитку аналітичного мислення учнів. Вони навчаються розглядати проблеми та завдання з точки зору математичного аналізу та логіки.

5. **Підготовка до наукової діяльності**. Вивчення теорем допомагає учням розуміти, як будуються математичні докази та аргументи, що є важливим для подальшої наукової діяльності.

6. **Розвиток навичок вирішення проблем**. Вивчення теорем вимагає від учнів розв'язування складних математичних завдань, що розвиває їх навички вирішення проблем та критичного мислення.

Теореми є важливим елементом математичної освіти, які допомагають учням розвивати широкий спектр навичок та знань, необхідних для різних галузей науки та практичної діяльності.

Згідно із підходом до розвивальної освіти, прописаній у типовій освітній програмі учні засвоюють теореми завдяки структурованій навчально-математичній діяльності, спрямованій на вирішення чотирьох взаємопов'язаних завдань:

- Вивчення процесу розумової діяльності, який включає пошук нових ідей, способів формулювання теорем і створення загальних правил для подальших дій.
- Навчання навичкам самостійного пошуку доказів та розробці стратегій пошуку (формулювання рекомендацій щодо пошуку).
- Вивчення різних методів доведення теорем і розробка навчальних моделей для їхнього використання (створення правил-орієнтирів).

- Розвиток вміння застосовувати теореми під час вирішення задач і подальшого розвитку математичної теорії.

Поняття «теорема» найчастіше зустрічається саме в геометрії, однак часто використовується й в інших розділах математики. На основі аналізу літератури нами виконана наступна класифікація теорем за областю дослідження в математиці (рис.1.1.):

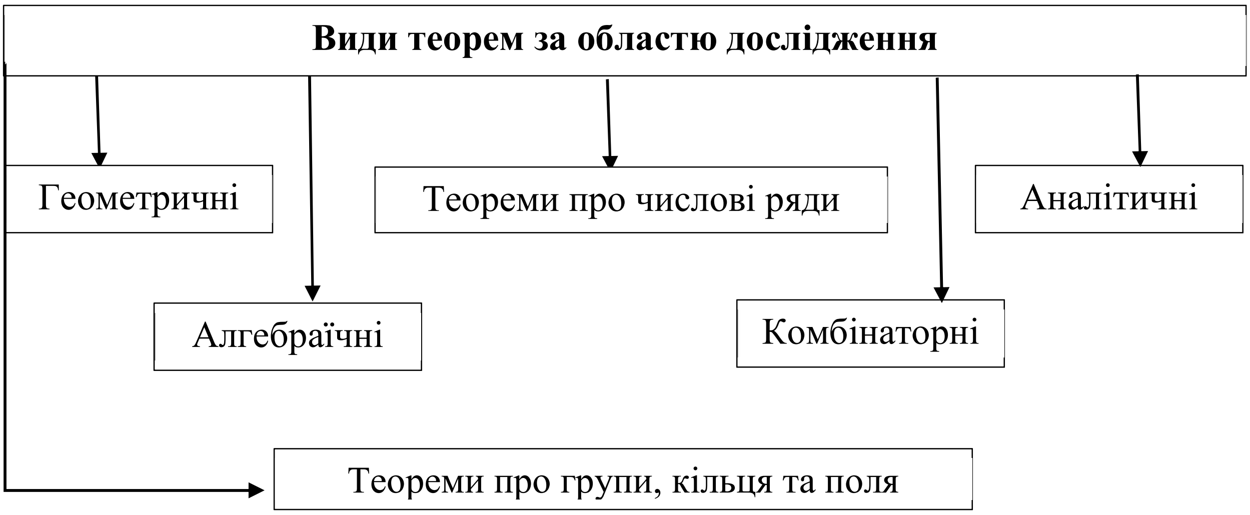


Рис.1.1. Види теорем за областю дослідження

Геометричні теореми – це теореми, що стосуються властивостей та співвідношень у геометричних фігурах, тілах та площинах.

Алгебраїчні теореми – це теореми, що стосуються властивостей чисел, операцій та алгебраїчних структур. Приклади включають факторизаційні теореми, теорему Безу та інші.

Аналітичні теореми – це теореми, що базуються на методах аналізу, включаючи диференціальний та інтегральний аналіз. Приклади включають теорему Ролля, теорему Лагранжа та інші.

Комбінаторні теореми - це теореми, що стосуються властивостей комбінаторних структур, таких як перестановки, комбінації та інші.

Теореми про групи, кільця та поля. Ці теореми стосуються абстрактних алгебраїчних структур. Приклади включають теорему Лагранжа для груп, теорему про кільця та інші.

Теореми про числові ряди. Ці теореми стосуються властивостей та збіжності числових рядів. Приклади включають теорему Вейєрштрасса, теорему Рімана і т. д.

Структура формулювання теорем має символьну форму, що розкривається в логіко-математичній моделі [17, с.19]:

$$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)), \tag{1.1}$$

В даній логічній структурі предикат p(x) виступає у ролі умови (або припущення) даної теореми, то q(x) є висновком даної теореми.

Коли з (1) розглядаються твердження:

$$\forall x(q(x) \Rightarrow p(x)), \tag{1.2}$$

чи

$$\forall x(\neg p(x) \Rightarrow \neg q(x)), \tag{1.3}$$

чи

$$\forall x(\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)), \tag{1.4}$$

чи

$$\forall x(p(x) \Rightarrow \neg q(x)), \tag{1.5}$$

то маємо наступні *види теорем за структурою*:

(1.1) пряму теорему;

(1.2) обернену до прямої теорему;

(1.3) протилежну теорему до прямої теореми;

(1.4) протилежну до оберненої або обернену до протилежної теореми;

(1.5) теорему суперечливу до прямої. [17, с.20]

Тобто, якщо говорити про взаємозв’язок між видами теорем, бачимо що:

1. в оберненій теоремі висновок є умовою, а висновком виступає умова прямої теореми;

2. умовою протилежної теореми є заперечення умови прямої теореми, а висновком виступає заперечення висновку прямої теореми;

3. умовою протилежної до оберненої теореми є заперечення даного висновку, а висновком – заперечення умови прямої.

Види тверджень пов'язані так, що значення істинності (1.1) і (1.4), а також (1.2) і (1.3) – співпадають. Значення істинності тверджень (1) і (5) завжди протилежні [17, с.20].

Проаналізувавши шкільний підручник «Геометрія» 7 класу автор Істер О.С., бачимо, що у даному курсі планіметрії передбачено вивчення лише деяких видів теорем (Таблиця 1.1):

Таблиця 1.1

Розподіл теорем підручника «Геометрія» 7 клас, автора Істер О.С. [11] за структурою

Теорема	Вид теореми
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.	Пряма
Вертикальні кути рівні.	Пряма
Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.	Пряма
Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.	Пряма
Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні.	Пряма
Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні.	Обернена
Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.	Обернена
Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	Пряма
Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	Пряма
У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.	Пряма
У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.	Обернена
Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.	Пряма
У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.	Пряма
Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	Пряма
Сума кутів трикутника дорівнює 180°.	Пряма
Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.	Пряма
У трикутнику: 1) проти більшої сторони лежить більший кут; 2) проти більшого кута лежить більша сторона.	Пряма
З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.	Пряма
Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.	Пряма
Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.	Пряма

Продовж.табл.1.1

Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.	Пряма
Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до даного кола.	Обернена
Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.	Пряма
Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.	Пряма
У будь-який трикутник можна вписати коло.	Пряма
Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.	Пряма
Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.	Пряма

Бачимо, що в 7 класі представлені лише два види теорем за структурою: прямі та обернені, причому прямих теорем набагато більше (рис.1.2.):

Рис.1.2. Розподіл теорем за структурою в курсі планіметрії 7 класу

Крім структури, можемо класифікувати *теореми за змістом* (Таблиця1.2) [18, с.6]

Таблиця 1.2

Види теорем за змістом

Вид теореми	Визначення	Приклад
Теореми - існування	Твердження, яке встановлює, за яких умов існує розв'язання математичного завдання чи математичний об'єкт.	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Продовж.табл.1.2

Теорема про єдиність	Математичне твердження, яке стверджує, що певний об'єкт або розв'язок єдиний у визначеному контексті.	З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.
Теорема-ознака	Математичне твердження, яке допомагає визначити певну ознаку чи властивість для певних об'єктів чи розв'язків. Такі теореми надають опис певних умов, які повинні бути виконані для того, щоб певна ознака була задоволеною.	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
Теорема-властивість	Математичне твердження, яке описує певну властивість чи відношення між математичними об'єктами.	У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
Лема	Теорема з порівняно коротким доведенням, яка є цікавою для доведення важливішої теореми.	Площа квадрата зі стороною 1/n од (n – натуральне число) дорівнює $1/n^2$ од^2.
Теорема-наслідок	Безпосередньо слідує з аксіом або інших відомих теорем.	Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.
Необхідні та достатні умови	Це теорема, що об'єднує в одному формулюванні з використанням слів, необхідно і досить пряму і зворотну теорему.	Для того щоб дві прямі були паралельні необхідно і достатньо, щоб різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною були рівні.

Крім запропонованих видів теорем та поданих класифікацій теореми можна класифікувати за різними ознаками, наприклад: класифікація за типом доведення, за обсягом, складністю та іншими ознаками.

1.2. Методи доведення теорем

Важливим етапом доведення є вибір правильного та найбільш оптимального методу для доведення теореми.

Вибір певного методу доведення теореми залежить від багатьох факторів. Нами виділено наступні фактори, що дозволяють вчителеві обрати той чи інший спосіб доведення певної теореми [24, с.80]:

- психологічні передумови – вікові та індивідуальні психологічні особливості учнів;

- дидактичні передумови – сформованість загальних та специфічних розумових дій, що є складовими уміннями доводити. Важливим є рівень засвоєння попередньо розглянутого теоретичного матеріалу, на основі якого будується доведення.
- рівень оволодіння учнями алгоритмами або правилами – орієнтирами для виконання доведення [24, с.80].

На основі аналізу даних факторів педагог може обрати той чи інший метод доведення теореми.

Так, З. Слєпкань виділяє дві групи методів доведення теореми [18, с.6]:

I. ***Методи доведення за напрямком міркувань*** (рис.1.3.):

Рис.1.3. Методи доведення за напрямком міркувань

Проаналізуємо кожен з методів за наступною схемою [18, с.7]:

А) зміст методу;

Б) схематичне позначення методу;

В) переваги методу;

Г) недоліки методу;

Д) методичні прийоми компенсації недоліків;

Є) область застосування обраного методу.

Результати досліджень методів подано в таблиці (Таблиця 1.3):

Таблиця 1.3

Характеристика основних методів доведення теорем за напрямком міркувань [18, с.7]

Метод	Зміст методу	Схема	Переваги	Недоліки	Прийоми компенсації	Область застосування
Синтетичний (Додаток А)	Суть методу полягає в тому, що з умови доведеного твердження виводять наслідок $Н_1$, із наслідку $Н_1$ доводять наслідок $Н_2$, і так далі, доки наслідком не виявиться висновок твердження.	$У \Rightarrow Н_1 \Rightarrow Н_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow В$, У- умова Н- наслідок В - висновок	1)вичерпна повнота, стислість	1) невизначеність; 2) неясність перших кроків; 3)відсутні аргументації добудови; 4)пасивне сприйняття учнями, незрозуміло як рухатись далі.	1.Прийом формулювання загальної ідеї доведення; 2.Прийом мотивування додаткової побудови; 3.Введення плану доведення.	Даний метод використовують для доведення теорем, поданих в підручнику.
Аналітичний (Додаток Б)	***Висхідний аналіз***. При доказі шляхом висхідного аналізу відштовхуються від висновку теореми і підбирають йому достатні умови. ***Нисхідний аналіз***. При низхідному аналізі міркування також починають із висновку теореми, проте не підбирають достатні умови.	$У \Rightarrow Н_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow Н_2 \Rightarrow Н_1 \Rightarrow В$ У- умова Н- наслідок В - висновок	1)чітко вказаний алгоритм дій; 2) є більш зрозумілим учням.	2) менш переконливий, базується на досконалому знанні аксіом та попередньо – розглянутих теорем.	1. прийом постійної актуалізації знань; 2. чітка аргументація кожного виконаного кроку.	У ході доведення теорем

Продовж.табл.1.3

Доведення від супротивного (Додаток В)	Якщо припустити, що певне твердження або припущення невірне, то це призведе до суперечності або неможливості.	$\overline{(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))} \equiv$ $\equiv (\exists x)(A(x) \wedge \overline{B(x)})$	1)широкий спектр застосування; 2)логічність викладу та зручність у використанні.	1)невідома причина помилковості; 2) може бути менш ефективним або більш складним, ніж інші методи доведення; 3)Неможливість використовувати в практичних задачах; 4) вимагає від автора доказу високого рівня логічного мислення та аналітичних навичок.	1) Використовувати метод від супротивного як додатковий інструмент для доведення істинності тверджень, а не єдиний метод; 2) Переконатися, що робоче припущення відображає суть твердження і використовується правильно; 3)Деталізація доведення.	Теореми про взаємне розміщення прямих на площині; Розміщення площин у просторі.
Метод математичної індукції (Додаток Г)	Це послідовність логічно обґрунтованих кроків, що підтверджує справедливість твердження для всіх натуральних чисел на основі базового кроку та кроку індукції (принципматематичної індукції).	Із справедливості твердження при n = 1 і припущення його правильності при n = k випливає його справедливість для n = k + 1 [лк]	1)універсальність 2) дозволяє значно спростити доведення складних тверджень; 3) дозволяє "розгорнути" або "розширити" твердження.	1) застосовний тільки до тверджень, які залежать від натуральних чисел; 2) може бути складним і вимагати багато кроків при доведенні.	1) ретельний вибір початкового значення; 2)дотримуватись логічної структури доведення; 3) перевірка помилок на кожному кроці доведення	Застосовується для доведення тверджень, які охоплюють нескінчену кількість часткових випадків

Іноді для доведення теорем використовують синтез декількох методів. Одним із таких поєднань є аналітико – синтетичний метод .

Аналітико-синтетичний метод доведення - це метод математичного доведення, який включає два основних підходи: аналітичний та синтетичний. Цей метод використовується для доведення математичних тверджень та теорем [27, с.48]. Аналітико-синтетичний метод доведення є потужним і загальноприйнятим методом у математиці. Він дозволяє математикам доводити складні та важливі теореми, розбиваючи їх на менші частини та згодом синтезуючи ці частини для отримання повного доведення [25, с.24].

Крім зазначених методів, які умовно можна віднести до загальних методів доведення теорем, виокремлюють наступну групу спеціальних методів – методи доведення в залежності від використаних математичних теорій.

II. Методи доведення залежно від використаних математичних теорій (рис.1.4) [18, с.8]:

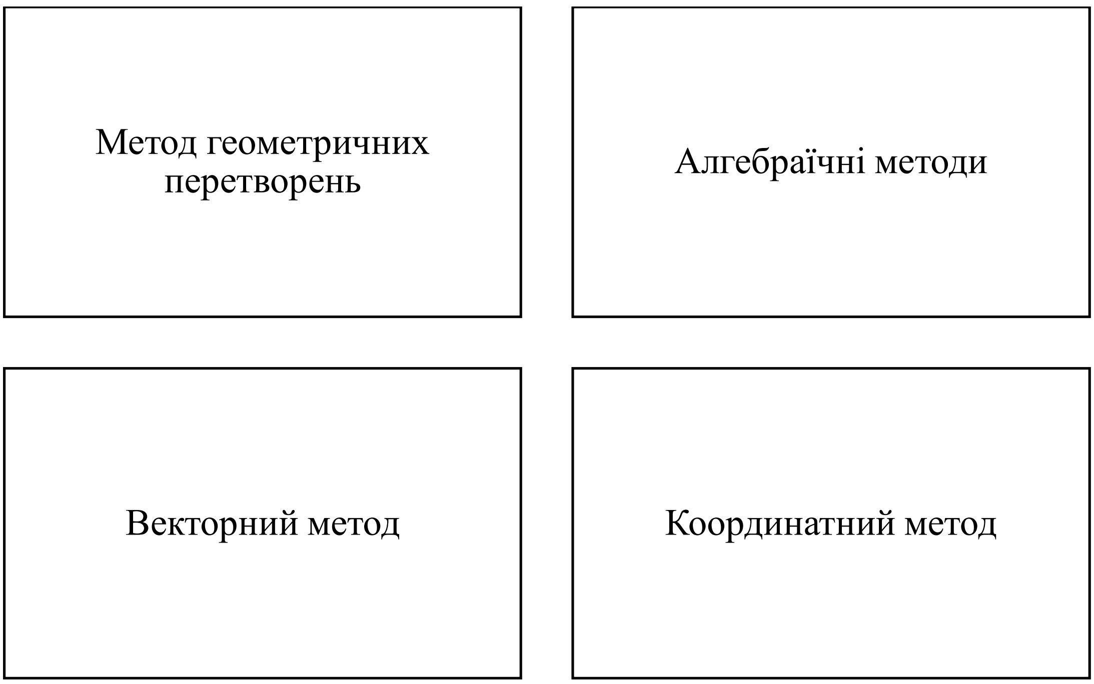


Рис.1.4. Методи доведення в залежності від використаних математичних теорій

А) Метод геометричних перетворень

Використання даного методу в шкільному курсі геометрії має велике методичне значення. Сучасна програма з геометрії не визначає даний метод як основний при доведенні теорем, хоча передбачає знайомство з деякими видами рухів (осьової симетрії, центральної симетрії, поворот навколо точки, паралельне перенесення). Однак, аналіз профільних підручників з геометрії показав, що метод геометричних перетворень займає чільне місце в профільному та поглибленому вивченні математики, а також факультативних занять [19, с.5-90].

До методів геометричних перетворень відносять: поворот, симетрія, паралельне перенесення, гомотетія, подібність [18, с.8].

Розглянемо деякі види геометричних перетворень:

- Осьова симетрія - симетрія, проведена щодо прямої. При осьовій симетрії будь-якій точці, розташованій по один бік прямої, завжди відповідає інша точка на другій стороні цієї прямої (рис.1.5). Осьова симетрія дозволяє спрощувати доведення властивостей симетричних фігур, оскільки властивості однієї половини фігури можуть бути відображені на іншу половину за допомогою симетрії. Крім того, допомагає в доведенні теорем про рівність і подібність геометричних фігур. Вона дозволяє встановлювати відповідність між відповідними елементами симетричних фігур [27, с.120].

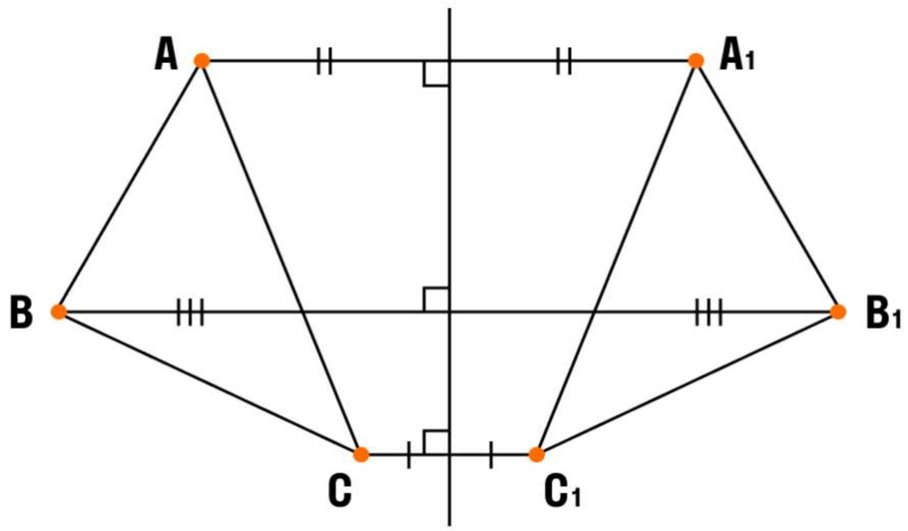


Рис.1.5. Приклад побудови симетричного трикутника відносно осі

Застосування даного методу можливе при доведенні наступних теорем:

- Теорема про довільний кут, що спирається на дугу кола. Осьова симетрія допомагає довести, що кут, що спирається на дугу кола, розташовану відносно осі симетрії, є вдвічі більшим за кут, що спирається на відповідну частину дуги [27, с.121].

- Теорема про рівність та подібність фігур. Осьова симетрія допомагає довести теореми про рівність та подібність симетричних фігур, які можуть бути корисними в геометричних розв'язаннях [18, с.9].

- Теорема про рівність бісектрис у рівнобедрених трикутниках. Осьова симетрія може використовуватися для доведення теорем про рівність бісектрис у рівнобедрених трикутниках, де бісектриси проходять через вершину та середину відповідного основи [27, с.121].

➢ Центральна симетрія – симетрія відносно точки (центру симетрії). Фігуру можна називати симетричною щодо центру симетрії, якщо для кожної точки фігури симетрична їй точка також належить цій фігурі (рис.1.6) [27, с.122].

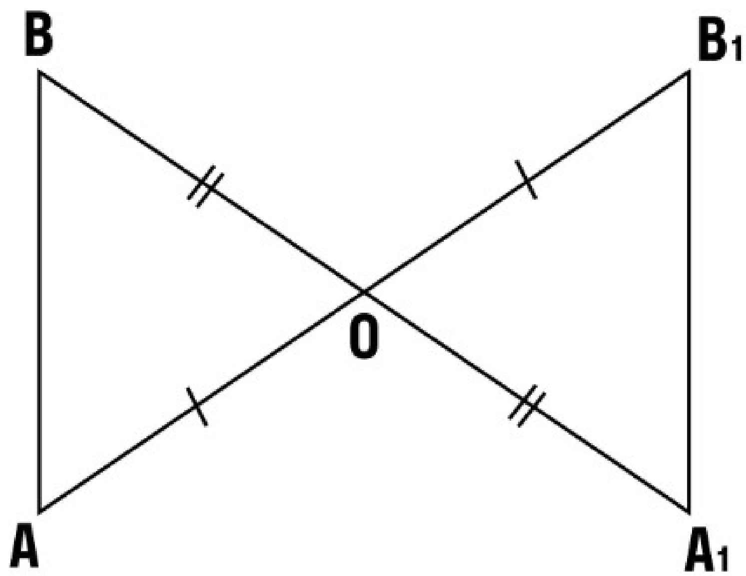


Рис.1.6. Приклад центральної симетрії відносно точки О

Використання методу центральної симетрії можливе при доведенні наступних теорем:

- Теорема про властивості діагоналей паралелограма. Центральна симетрія допомагає довести, що діагоналі паралелограма рівні за довжиною і перетинаються в точці, яка ділить кожну діагональ на дві рівні частини.

- Теорема про властивості висот та медіан трикутника. Центральна симетрія може використовуватися для доведення різних властивостей висот та медіан трикутника, наприклад, їх перетину в одній точці (центр тяжіння).

- Теорема про рівність кутів між хордами в колі. За допомогою центральної симетрії можна довести, що кути, утворені хордами в колі та що охоплюють одну і ту ж дугу, рівні один одному [27, с.130].

➢ Поворот геометричної фігури. Якщо одна фігура отримана з іншої фігури шляхом повороту всіх її точок відносно центру О на один і той самий кут в одному і тому ж напрямку, то таке геометричне перетворення називається поворотом (рис.1.7.) [18, с.8].

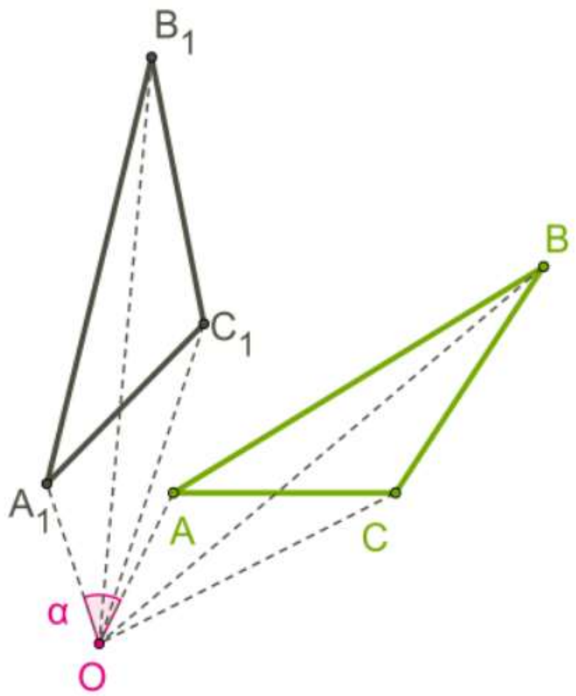


Рис.1.7. Приклад повороту фігури навколо точки О

Найбільш доцільним, на нашу думку є використання даного методу при доведенні рівності та подібності трикутників.

➢ Паралельне перенесення – перенесення всіх точок площини у заданому напрямку (рис.1.8.). Це перетворення передбачає зсув фігури або об'єкта вздовж певної лінії, так щоб відстані та відношення між точками залишалися незмінними [18, с.11].

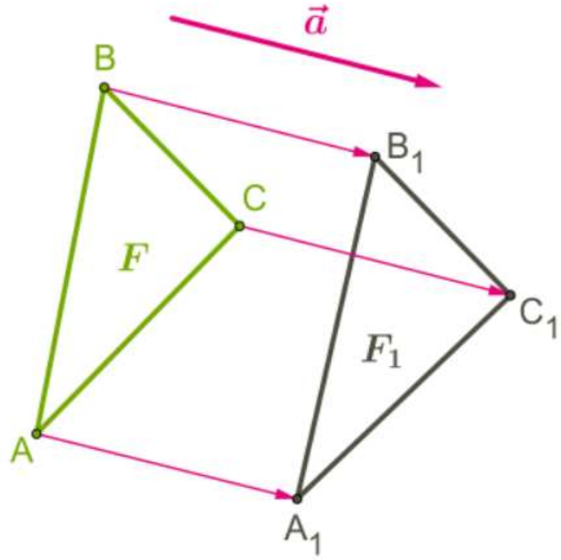


Рис.1.8. Приклад паралельного перенесення трикутника у заданому напрямку

Паралельне перенесення може бути використане для доведення теорем про рівність та подібність трикутників. Зсування одного трикутника вздовж лінії може допомогти встановити відповідність між сторонами та кутами трикутників.

Крім того, дане перетворення може бути використане для доведення теорем у 8 класі: допомагає довести теореми про властивості паралелограма, рівність діагоналей ромба, властивості сторін та кутів прямокутника [25, с.42].

➢ Гомотетія – перетворення подібності. Це перетворення, в результаті якого отримуємо подібні фігури (фігури, у яких відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні) (рис.1.9.). Гомотетія може бути використана для доведення теорем про подібність трикутників. При цьому фігура збільшується або зменшується відносно іншої фігури з однаковим коефіцієнтом масштабування [18, с.11].

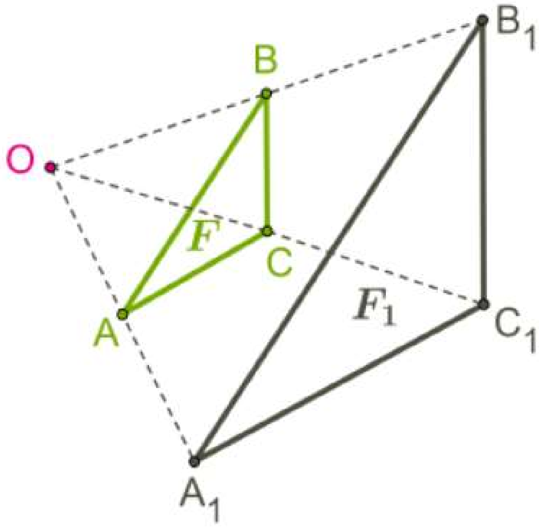


Рис.1.9. Приклад гомотетії трикутника ABC, гомотетія (O,2)

Використання геометричних методів перетворення вимагає від учня наступних вмінь та знань:

1. Вміння будувати фігури, в які переходять дані фігури при симетрії, паралельному перенесенні, повороту чи гомотетії;

2. Бачити відповідні точки та сторони при виконанні вказаних перетворень;

3. Виділяти елементи, визначальні при даному типу перетворень: виділять вісь симетрії, центр симетрії, точку повороту, визначати кут повороту даної фігури, знаходити центр та коефіцієнт гомотетії;

4. Використовувати специфічні методи перетворень.

Б) Алгебраїчний метод доведення теорем

Алгебраїчний метод доведення теорем використовує алгебраїчні концепції та вирази для розв'язання геометричних задач і доведення геометричних тверджень. Цей метод дозволяє використовувати алгебраїчні рівняння, нерівності, системи лінійних або квадратичних рівнянь та інші алгебраїчні інструменти для аналізу та доведення геометричних властивостей [18, с.12].

Використання даного методу передбачає що учні володіють наступними знаннями та вміннями:

- знають визначення понять «рівняння» та «нерівності», «корені рівняння»;
- розуміють що означає «розв'язати рівняння»;
- ознайомлені та використовують властивості рівнянь та нерівностей;
- оперують та використовують у своїй діяльності системи рівнянь та нерівностей;
- ознайомлені з різними методами та алгоритмами розв'язання систем рівнянь та нерівностей;
- вміють подати словесний вид твердження або задачі у вигляді математичної моделі;
- уміють інтерпретувати результат обчислень математичної моделі у відповідності до умови поставленої задачі [18, с.12].

B) Векторний метод

Векторний метод доведення теорем дає можливість досліджувати та розв'язувати геометричні задачі, використовуючи алгебраїчний підхід та властивості векторів для аналізу геометричних об'єктів.

Аналіз джерел дав змогу виділити наступні етапи використання векторного методу:

1) Представлення об'єктів векторами. Початкове завдання полягає в тому, щоб представити геометричні об'єкти (точки, відрізки, відрізки, площини тощо) векторами. Для цього визначаються початкова та кінцева точки, і вектор сполучає ці точки.

2) Властивості векторів. Використовуючи властивості векторів (наприклад, додавання векторів, множення вектора на число), проводяться

різні операції з векторами, які відображають взаємозв'язки між геометричними об'єктами.

3) Векторні операції. Здійснюються різні векторні операції, такі як скалярний добуток, векторний добуток та інші. Ці операції використовуються для дослідження взаємозв'язків між векторами та геометричними фігурами.

4) Використання векторів для доведення теорем. Вектори використовуються для аналізу та доведення геометричних тверджень. Наприклад, для доведення теореми про середину відрізка можна використовувати рівність векторів, що представляють кінці відрізка.

5) Відновлення геометричних висновків. Отримані векторні результати переводяться на геометричну мову та відповідають на геометричні запитання. Наприклад, якщо вектори вказують на рівність довжин відрізків, то це може довести твердження про рівність відрізків [18, с.13].

Векторний метод є одним з найголовніших методів доведення геометричних теорем. Особливо ефективний при:

1. доведенні паралельності прямих та відрізків;
2. обгрунтуванні твердження про поділ відрізка точкою у заданому відношенні;
3. з’ясуванні належності трьох точок одній прямій;
4. доведенні перпендикулярності прямих та відрізків;
5. знаходження величини кута.

Г) Координатний метод

Координатний метод доведення теорем в математиці та геометрії використовує координати точок на площині або в просторі для аналізу та доведення геометричних властивостей. Основний зміст координатного методу включає наступні етапи [18, с.13]:

1) Вибір системи координат. Обирається система координат, яка найкраще відповідає геометричній ситуації. Для двовимірної геометрії це може бути декартова система координат (площинна), а для тривимірної геометрії - просторова система координат.

2) Представлення об'єктів у вигляді координат. Геометричні об'єкти (точки, відрізки, площини тощо) представляються за допомогою координат відповідних точок. Наприклад, точка в двовимірному просторі може бути представлена парою координат (x, y), де x - абсциса, а y - ордината.

3) Використання алгебраїчних виразів. Вираження та рівняння, які описують геометричні властивості об'єктів, виражаються у вигляді алгебраїчних виразів, що включають координати точок. Наприклад, рівняння кола може бути виражено у вигляді $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, де (a, b) - координати центру, а r - радіус.

4) Використання алгебраїчних методів. За допомогою алгебраїчних методів, таких як розв'язання рівнянь, обчислення відстаней, використання геометричних властивостей, проводяться дії для аналізу та доведення геометричних тверджень.

5) Відновлення геометричних висновків. Отримані алгебраїчні результати перекладаються на геометричну мову та відповідають на геометричні запитання. Наприклад, розв'язок рівняння може вказати на точку перетину відрізків або на геометричну властивість фігури [25, с.130].

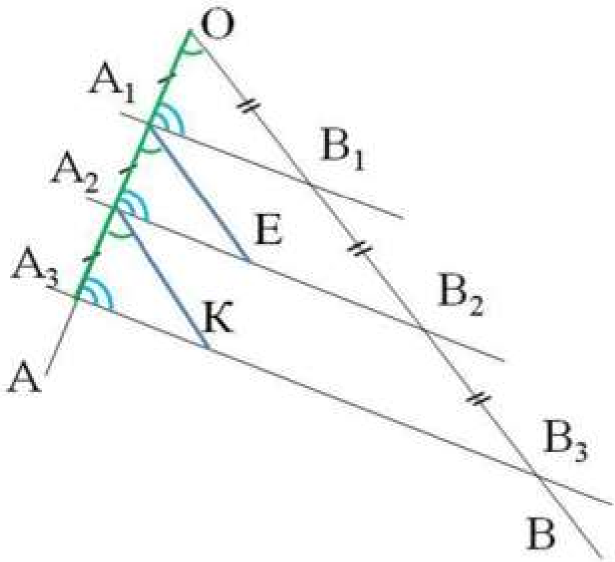
Координатний метод може застосовуватися до різних геометричних задач, включаючи дослідження трикутників, кола, площин, взаємозв'язків між геометричними об'єктами та багато інших геометричних властивостей.

Кожну теорему можна розглядати під різним кутом зору, опираючись на власні знання та вміння. Так, наприклад при доведенні теореми про рівність медіан, проведених до бічних сторін у рівнобедреному трикутнику можемо скористатись аналітико – синтетичним методом, що запропонований у підручнику. Однак, цю ж саму теорему в 10 класі ми можемо довести скориставшись векторним методом або методом координат [32].

Розглянемо різні методи доведення однієї ж і тієї самої теореми.

Теорема. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій стороні кута (теорема Фалеса).

Розглянемо приклад опорної схеми доведення теореми Фалеса аналітико – синтетичним методом (рис.1.10):



Проведемо $A_1E||OB$, $A_2K||OB$

↓

$\Delta A_1OB_1 = \Delta A_2A_1E$

↓

$OB_1 = A_1E$

↓

$EA_1B_1B_2$ – паралелограм

$EA_1 = B_1B_2$

↓

$B_1O = B_1B_2$

Аналогічно $\Delta A_1A_2E = \Delta A_2A_3K$, $B_1B_2 = B_2B_3$

Рис.1.10 Опорна схема доведення теореми Фалеса аналітико – синтетичним методом

При поглибленому вивченні математики доречно розглядати як типовий метод доведення (синтетичний чи аналітико – синтетичний), так і нетиповий, наприклад, метод доведення від супротивного. Це дозволить переглянути унікальні аспекти кожного методу в доказах, а також порівняти їх. Учням буде надана можливість вибору того методу доведення, який найкраще відповідає їхнім здібностям та інтересам [30, с.2].

При доведенні даної теореми методом від супротивного, на нашу думку, доцільно застосувати у цьому випадку опорну таблицю доведення, яка містить і завдання для перевірки засвоєння даного методу (Таблиця 1.4).

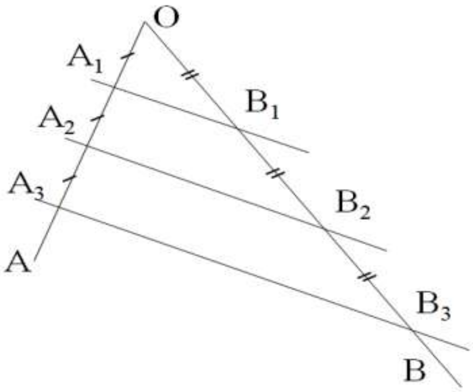
Таблиця 1.4

Доведення теореми Фалеса методом від супротивного

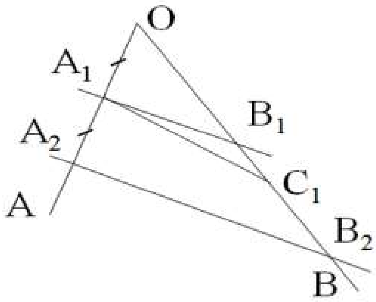
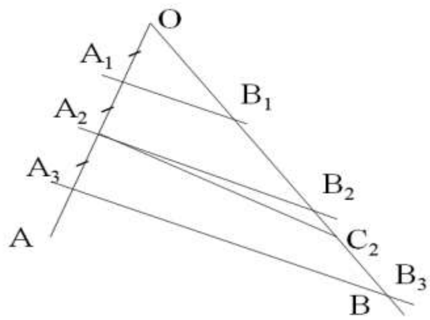
Теорема Фалеса

Дано: $OA_1= A_1A_2= A_2A_3$.

Довести: $OB_1=B_1B_2= B_2B_3$.



1. Записати доведення теореми Фалеса з використанням заданої таблиці для двох випадків, якщо $OB_1=B_1B_2$ (випадок І) і якщо $B_1B_2= B_2B_3$ (випадок ІІ).

$OB_1=B_1B_2$(т.B_1 –середина OB_2)$-$?	$B_1B_2= B_2B_3$ - ?
	
1) Припустимo т. C_1 – середина OB_2	т. C_2 – середина B_1B_3
2)A_1C_1 – середня лінія ΔA_2B_2O, то $A_1C_1 \| A_2B_2$	2)A_2C_2- середня лінія трапеції $A_3B_1B_3B_1$, то $A_2C_2\|A_3B_3$

Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні третій (протиріччя)!!!

Отже, $OB_1=B_1B_2= B_2B_3$

Щодо доцільності використання 2-х способів доведення теореми на базовому рівні навчання, то тут треба враховувати рівень математичної підготовки більшості учнів [30, с.6].

Якщо рівень цієї підготовки достатній, то, на нашу думку, корисно ознайомити учнів з двома способами.

Можемо зробити висновок, що вибір певного методу доведення залежить від багатьох факторів. Вчитель, аналізуючи дані фактори самостійно обирає метод доведення теореми.

Для аналізу педагогічного досвіду різних вчителів та визначення рівня учнів вміння доводити теореми нами було проведено анкетування серед вчителів математики. В анкетуванні взяло участь 40 педагогів з різних куточків країни. Опитування проводилось за допомогою поширення посилання в соціальних мережах.

Так, на основі проведеного анкетування серед вчителів українських шкіл (Додаток Д), можемо зробити висновок, що найбільш доцільним для використання педагоги вважають аналітичний метод (рис.1.11):

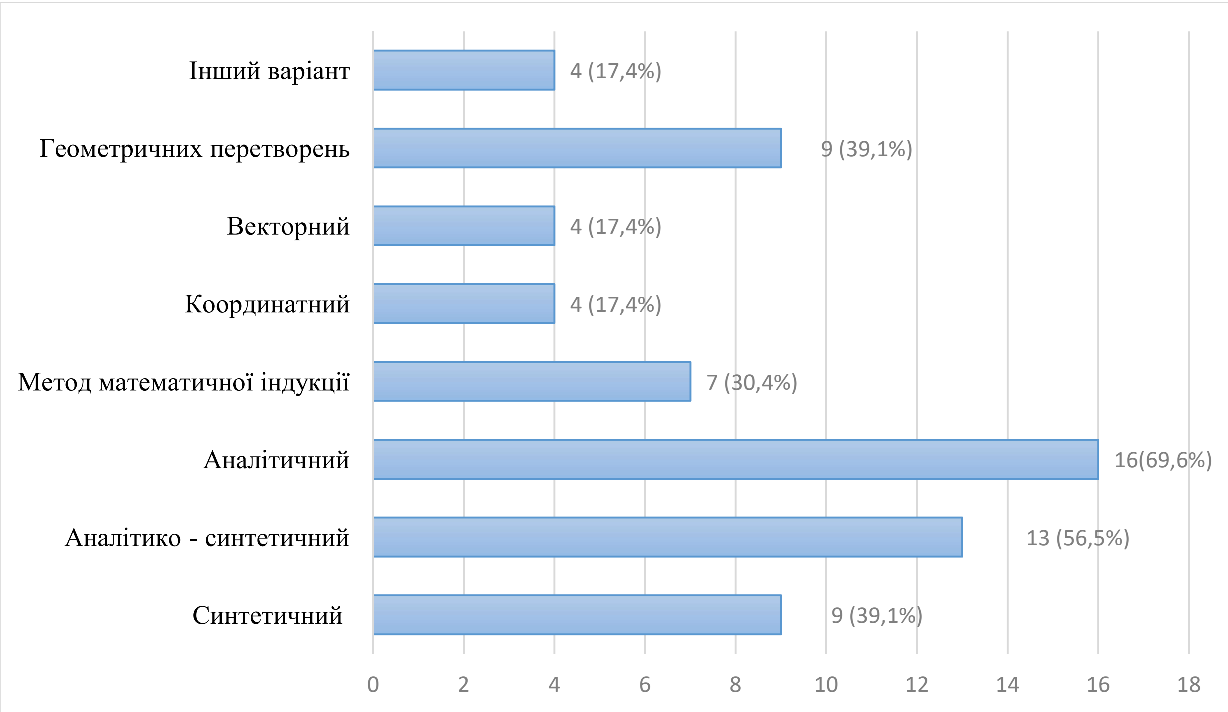


Рис.1.11. Результат опитування вчителів на тему: «Яким методом доведення теорем Ви користуєтесь найчастіше»

Аналізуючи опитування, бачимо, що досить часто вчителі використовують аналітико – синтетичний метод, синтетичний метод та метод геометричних перетворень. Найменше вчителі використовують координатний метод та векторний. На думку вчителів, ці методи є досить складними для розуміння середньостатистичного учня та займають досить значний проміжок часу під час використання його на уроці.

1.3. Методика навчання учнів доведенню теорем

Витоки такого поняття як «навчання доведенню» сягають часів Евкліда. В його математичному трактаті «Начала» був систематизований і узагальнений весь геометричний матеріал, що був накопичений до того часу. Доведення за Евклідом складаються з декількох частин: логічні операції (процес встановлення істинності твердження) та словесна форма та креслення (твердження, осмислення, побудова, висновок) [31].

Праці Евкліда та інших математиків, таких як Арістотель та Д.Гільберт значною мірою визначили напрям навчання доведення, зводячи його до формування уявлення про логічну форму, що, по суті, є роботою з уже готовим доведенням.

Важливу роль у становленні погляду на навчання доведенню, в якому важливе місце займає самостійний пошук теорем та їх доведення зіграли роботи Д. Пойа. Роботи математика значно стимулювали дослідження проблеми методики навчання розв’язку задач та доведенню теорем, формування евристичних прийомів. Однак, не дивлячись на значні успіхи в розвитку методики навчання, таких успіхів в розвитку вмінь учнів доводити теореми не відбулось [31].

Не можна не погодитись з поглядом З. Слєпкань: «…при належній постановці навчання готовим доведенням можна формувати в учнів необхідні компоненти самостійного пошуку і побудови доведень як більш високого рівня розв’язку цієї дидактичної задачі. Готові доведення мають виступати як моделі, на яких школярі навчаються прийомам розумової діяльності, що лежать в основі вміння доводити, використовувати різні методи доведень, самостійно доводити твердження по аналогії» [27, с.84] .

Отже, будемо вважати, що *навчання доведенню* – це навчання аналізу готових доведень, їх відтворення, самостійному відкриттю факту, пошуку та конструювання доведення, а також спростування запропонованих тверджень [27, с.86].

Потреба в логічних доведеннях повинна формуватись в учнів ще під час пропедевтичного курсу вивчення геометрії в 5-6 класах. Важливо, ще до вивчення систематичного курсу геометрії сформувати в учнів навички дедуктивних висновків і розуміння ними того факту, що з одних тверджень шляхом дедуктивного мислення можливо вивести нове твердження [27, с.86].

Етапи роботи з теоремами та їх доведенням в більшій мірі залежать від вікових та психолого – пізнавальних можливостей учнів на різних етапах навчання.

Однією з основних особливостей учнів у віці від 10 до 15 років є те, що вони виходять на новий рівень інтелектуального та психічного розвитку. Зокрема це проявляється у поступовому переході від конкретного до абстрактного мислення. В учнів окреслюються уміння і навички аналізувати, систематизувати та групувати складні явища, виявляти спільне й відмінне. У зв’язку з цим зміст навчальних предметів основної школи вибудовується систематично, чітко простежується тематична спрямованість, уводяться нові поняття тощо [5, с.103]. Учні надбають нові мотивації до навчання: бажання бути освіченими, мета здобуття освіти для подальшого розвитку (навчання та кар'єра), прагнення до самовизначення і вдосконалення, а також потребу відповідати очікуванням своїх батьків [6, с.184]. Крім цього, у цьому віці спостерігається розширення обсягу пам'яті завдяки розвитку логічного мислення. Пам'ять стає більш керованою, формується смислова логічна пам'ять, і збільшується кількість методів для ефективного запам'ятовування. Розвивається абстрактне і формується понятійне мислення. З'являються гіпотетично-дедуктивні судження. Розвивається здібність до розумових експериментів, оперування гіпотезами. Формується активне, самостійне, творче мислення. Тому вже на етапі раннього підліткового віку можемо говорити про доцільність введення в обіг такого поняття як «доведення твердження» [15, с.30].

За підлітковим віком слідує рання юність. У цьому віці продовжується розвиток абстрактно-логічного мислення. В учнів 10-11 класів, що навчаються, удосконалюється володіння складними інтелектуальними операціями аналізу та синтезу, теоретичного узагальнення та абстрагування, аргументування та докази. Для них стає характерними встановлення причинно-наслідкових зв'язків, систематичність, стійкість та критичність мислення [15, с.60].

Поряд із зазначеними особливостями пізнавальної сфери учнів, що навчаються, необхідно відзначити і ті особливості, які властиві їм як представникам нового покоління – покоління «цифрових» дітей [12, с.133].

На сьогоднішній день дослідники виділяють важливу і відмінну особливість мислення сучасних учнів – це «кліповість» мислення, тобто здатність сприймати світ через короткі яскраві образи та послання, наприклад, через стрічку теленовин, невеликих статей або коротких відеокліпів. У зв'язку з цим, існує така тенденція - нездатність багатьох учнів системно сприймати інформацію, системно мислити і, відповідно, викладати свої думки [31].

При плануванні уроку, вчитель повинен враховувати всі перечислені вікові особливості пізнавальної сфери учнів [5, с.103] .

На основі зазначеної інформації нами було складено схему ієрархії рівнів навчанню доведень (Таблиця 1.5):

Таблиця 1.5

Ієрархія рівнів навчання доведенню тверджень

5 – 6 кл	Пропедевтичний курс вивчення геометрії Формування потреби в логічних обгрунтуваннях	Формується вміння робити дедуктивні висновки

Продовж.табл.1.5

6 – 7 кл	Навчання евристичним прийомам та їх періодичне використання	Формування поняття логічних кроків, визначення порядку логічних кроків
7 кл	Аналіз запропонованого доведення, співставлення умови та висновку доведення	Вміння виділити головне в доведенні
7 – 8 кл	Самостійний аналіз доведення. Опрацювання нових методів та прийомів доведення	Продовження формування вміння доводити у супроводі вчителя, перші спроби самостійного доведення твердження
9 – 11 кл	Уміння самостійно доводити або спростовувати твердження	

Отже, на основі вище викладеного матеріалу та аналізом, запропонованої методики навчання доведенню теорем З. І. Слєпкань виділено декілька видів роботи з теоремами (рис.1.12) [27, с.87]:

Рис.1.12 Методика роботи з теоремами

- Робота з готовим доведенням має велике значення при подальшому вивчення математичних тверджень та самостійному їх доведенню. При умові належної організації процесу навчання готових доведень можна сформувати в учнів навички самостійного пошуку доведення твердження чи його спростування. Даний етап використовується вчителем на початкових етапах вивчення планіметрії у 7 класі при вивчення теорем про властивості найпростіших геометричних фігур.

- Самостійне доведення теорем за поданим зразком можливе при достатньому оволодінню учнями теоретичного матеріалу (поняття та їх означення, аксіоми, попередньо доведені теореми, уміння виконувати основні побудови тощо). Використання такого виду роботи можливе вже при вивченні теми «Ознаки паралельності прямих» у 7 класі.
- Самостійне доведення теорем за поданим методом потребує від учнів досконалого знання всіх тонкощів доведення певним методом.
- В 10-11 класі учні вже мають самостійно доводити теореми. При цьому лише глибоких теоретичних знань вже недостатньо. Так, на основі проведеного експерименту заслуженого вчителя України В. М. Осинської в процесі навчання учні, що мали високий та достатній рівень знань розвивали та вчилися застосовувати елементи логіки та критичного мислення, що допомагали в доведенні або в спростуванні математичних тверджень. Здобувачі освіти, що мають початковий та середній рівень знань та недостатньо розвинені пізнавальні здібності, як і раніше, погано міркували та розв’язували задачі [27, с.87].

Підтвердженням даного експерименту стало анкетування вчителів (Додаток Г): більше 50% вчителів вказали, що учні 10-11 класів не спроможні самі доводити теореми (рис.1.13):

Рис. 1.13. Результати анкетування вчителів математики за питанням: «Чи здатні учні 10-11 класів самостійно доводити теореми?»

Методика навчання доведенню теорем є складним процесом, що включає досить значний об’єм роботи як для вчителя так і для учня.

Так, З. Слєпкань зазначає, що навчання доведенню передбачає [27, с.86]:

1. Розгляд та повторення готових доведень, наданих вчителем або зазначених у підручнику, і їх реплікація.

2. «Самостійне відкриття» математичних фактів, яке здійснюється, безумовно, після підготовчої роботи, організованої вчителем, та ґрунтується на теоретичних положеннях, таких як властивості, ознаки та формули.

3. Розроблення і реалізація плану для доведення нового математичного факту.

4. Критичний аналіз власного доведення з метою виявлення та виправлення можливих неточностей і помилок.

Тобто, можемо зробити висновок, що навчання учнів доведенню теорем відбувається поступово.

В методиці навчання математики існують різні підходи до структурування процесу вивчення теорем. У відповідності до методики, розробленої З. І. Слєпкань, можна виділити такі фази або стадії:

1) актуалізація опорних знань та умінь учнів;

2) мотивація вивчення теореми;

3) введення назви (за можливістю) і формулювання;

4) скорочений запис;

5) пошук, проведення і запис доведення;

6) закріплення (повторне формулювання теореми; визначення її виду; домовленість про скорочену назву; зв’язування до яких об’єктів можна застосувати цю теорему; з’ясування плану доведення теореми);

7) використання теореми [27, с.88].

К. В. Нєдялкова розрізняє наступні етапи взаємодії з учнями при опрацюванні твердження:

1. Підготовча фаза (включає у себе перегляд основних знань, створення ситуації, що вимагає вирішення, мотивацію вивчення поняття або терміну, проведення експерименту, формулювання гіпотези та інше).

2. Формулювання теореми (аналіз умов, складання схеми або малюнка)

3. Проведення доведення теореми.

4. Закріплення матеріалу доведення.

5. Застосування та узагальнення теореми [24, с.90].

Ми рекомендуємо вчителям під час підготовки уроків із вивчення теорем використовувати таку систему етапів роботи над темою (Таблиця 1.6) [16, с.46]:

Таблиця 1.6

Етапи роботи над теоремою

№	Назва етапу	Короткий зміст етапу
1.	Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми	На даному етапі передбачається повторення основних матеріалів, включаючи визначення понять, математичні факти, концепції та процеси використовувані при формулюванні та доведенні теореми. Рекомендується під час попереднього уроку повторити концепцію і послідовність застосування даного методу або сутність цього прийому та включити в домашнє завдання завдання, яке передбачає використання цього методу або прийому для його вирішення.
2.	Мотивація для вивчення теореми	На даному етапі Тут доцільно використовувати: цікаві історичні відомості, пов'язані з даною теоремою; наочність (моделі, креслення, комп'ютерну графіку), проведення експерименту.
3.	Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми	При представленні формулювання теореми можна використовувати або конкретно-індуктивні, або абстрактно-дедуктивні методи. У випадку конкретно-індуктивного методу, вчитель може створити ситуацію, де учні здійснюють різні побудови, проводять вимірювання або розв'язують завдання, що допомагає їм самостійно або за допомогою вчителя прийти до розуміння та формулювання теореми. Вважається, що використання конкретно-індуктивного підходу сприяє більш осмисленому засвоєнню теореми та глибшому розумінню її суті. Тому, при навчанні геометрії у 7–9 класах рекомендується віддавати перевагу цьому методу.

Продовж.табл.1.6

4.	Побудова рисунка, написання умови	Головним завданням даного етапу є побудова вірного рисунка. Це можливо при обговоренні всіх проблемних моментів з вчителем.
5.	Робота з доведення теореми	Головне на даному етапі – виділення головного: виділити умову в теоремі, висновок. Обрати необхідний метод для доведення. Поетапно виконати доведення. І, на закріплення ще раз усно довести теорему.
6.	Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач	На цьомуетапі можна запропонувати учням довести дану теорему за зміненим рисунком (пропорції, розташування, розміри геометричної фігури та позначення її елементів).
7.	Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач	Розв'язування вправ, що входять до системи більш складних задач.
8.	Закріплення теореми	На даному етапі вчитель проводить опитування, використовуючи різні методи та прийоми для розуміння усвідомлення учнями теореми.

Дані етапи кожен вчитель може змінювати, враховуючи певні особливості освітньої діяльності класу чи певних учнів.

При навчанні учнів самостійному доведенню теорем розглянемо окремі методичні прийоми навчання школярів сприймати і відтворювати доведення, направлені на формування вмінь шукати, проводити, оформляти доведення теореми, до яких ми відносимо:

1. Навчання учнів методам доведення математичних тверджень за допомогою правил-орієнтирів.

2. Поетапне навчання аксіоматичному методу:

- аналіз тексту твердження;
- розгортання умови;
- послідовний аналіз висновку і умови твердження;
- розкриття змісту прямого і непрямого методів доведення (шляхом розкриття операційного складу кожного етапу).

3. Засвоєння специфічних прийомів пошуку і проведення доведення твердження.

4. Вивчення готових доведень за підручником (методичні прийоми):

- навчити учнів сутності доведення вважаємо за необхідне доведення кожної теореми представляти як ланцюжок суджень;
- оформлення доведень робити у вигляді таблиці, де скінчена послідовність речень та їх обґрунтування сприяють виділити структуру доведення.

Нажаль, доведення теорем , незважаючи на широкий вибір літератури з методики доведення, розвитку цифрових технологій, зміни траєкторії навчання на більш практичний напрям – залишається найбільш проблемним для вчителів. Так, проведене опитування, свідчить, що більше 60% вчителів обирають роботу уже з готовим доведенням, а не навчати дітей самостійному доведенню (рис.1.14):

Рис. 1.14. Результати анкетування вчителів математики за питанням: «Чи необхідно учнів вчити самостійному доведенню теорем чи раціональніше давати вже готові доведення?»

Основними проблемами для навчання учнів доведенню теорем вчителі вбачають:

- брак часу на вивчення необхідного матеріалу;
- великі освітні втрати, на подолання яких йде значний відрізок часу;

- недоцільність вивчення доведень, так як в завданнях ЗНО та НМТ не передбачені завдання з доведення теорем;
- низький рівень обізнаності вчителів з методики доведення теорем.

Висновки до розділу 1

У першому розділі нами було розглянуто теоретичне підґрунтя доведення теорем шкільного курсу математики. У ході аналізу науково – методичної літератури встановлено зміст поняття «теорема» та виділено структурні елементи теорем.

У результаті дослідження проаналізовано наступні класифікації теорем:

- за областю дослідження;
- за структурою;
- за змістом.

Крім запропонованих видів теорем та поданих у першому розділі класифікацій теореми можна класифікувати за різними ознаками, наприклад: класифікація за типом доведення, за обсягом, складністю та іншими ознаками.

Важливим етапом доведення є вибір правильного та найбільш оптимального методу для доведення теореми.

Нами виділено наступні фактори, що дозволяють вчителеві обрати той чи інший спосіб доведення певної теореми:

- психологічні передумови;
- дидактичні передумови;
- рівень оволодіння учнями алгоритмами або правилами – орієнтирами для виконання доведення.

На основі аналізу даних факторів педагог може обрати той чи інший метод доведення теореми.

Так, на основі аналізу методичної літератури, визначено, що З. Слєпкань виділяє дві групи методів доведення теореми:

I. Методи доведення за напрямком міркувань:

- синтетичний метод;
- аналітичний метод;
- аналітико-синтетичний;
- метод математичної індукції;
- метод доведення від супротивного.

У роботі досліджено зміст кожного із перелічених методів, визначено переваги та недоліки застосування, а також прийоми компенсації, що допоможуть педагогам у використанні певного методу.

II. Методи доведення в залежності від використаних математичних теорій, що включають:

- метод геометричних перетворень: поворот, симетрія, паралельне перенесення, гомотетія, подібність;
- алгебраїчні методи доведення теорем;
- векторний метод;
- координатний метод.

Для аналізу педагогічного досвіду різних вчителів та визначення рівня учнів вміння доводити теореми нами було проведено анкетування серед вчителів математики. В анкетуванні взяло участь 40 педагогів з різних куточків країни. Визначено, що найбільш широко-використовуваним методом є аналітичний та аналітико-синтетичний метод.

Завданням даного розділу було провести аналіз сучасної психолого-педагогічної та методичної літератури із проблеми дослідження. У ході аналізу, визначено, що етапи роботи з теоремами та їх доведенням в більшій мірі залежать від вікових та психолого – пізнавальних можливостей учнів на різних етапах навчання.

На основі зазначеної інформації нами було складено схему ієрархію рівнів навчанню доведень. Так, початковим етапом роботи з теоремами можна вважати пропедевтичний курс вивчення геометрії у 5-6 класі, де учні отримують початкові знання що до властивостей та ознак геометричних фігур. У 7-8 класі учні починають працювати з готовими доведеннями та доводити однотипні теореми за поданим зразком, а в 9-11 в учнів сформовано вміння самостійно доводити або спростовувати твердження.

Для подальшої роботи над проблемою дослідження нами розроблено схему етапності роботи над теоремами, що включає наступні етапи:

1. Етап актуалізації опорних знань;
2. Етап мотивації;
3. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми;
4. Побудова рисунка, написання умови;
5. Робота з доведення теореми;
6. Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач;
7. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач;
8. Закріплення теореми.

Проведене опитування серед вчителів математики, показало, що навчання доведенню теорем залишається одним з найбільш проблемних питань сучасної освіти, незважаючи на широкий вибір методичної та психолого-педагогічної літератури, розвитку цифрових технологій, зміни траєкторії навчання.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ТЕМИ «ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ» В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

2.1. Аналіз навчальної програми та підручників геометрії 7 класу з точки зору навчання учнів доведенню теорем теми

Один із етапів роботи вчителя у процесі підготовки до конкретної навчальної теми полягає в аналізі навчальної програми. Під час цього етапу педагог визначає свою стратегію для вивчення матеріалу, розробляє план навчальної теми, який включає як перспективний, так і поурочний плани. Вчителі відбирають систему вправ і завдань, які сприятимуть досягненню очікуваних результатів учнів, визначених в навчальній програмі, затвердженій Міністерством освіти і науки.

Згідно з вимогами до обов'язкових навчальних результатів у галузі математики, які визначені в Додатку 4 Державного стандарту базової середньої освіти, передбачено, що учні повинні «… обґрунтовано пояснювати хід своїх міркувань, аналізувати доказовість аргументів у своїх твердженнях і судженнях інших; формулювати припущення і досліджувати їх істинність». Отже, серед конкретних завдань на етапі навчання математики в 5-9 класах включають завдання, пов'язані з "ознайомленням із методами і прийомами вирішення математичних задач, доведення математичних тверджень, та розвитком навичок їх практичного застосування..." [9].

У Таблиці 2.1. представлено фрагмент навчальної програми з математики, рівень стандарту, для учнів 5 - 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» [21].

У сучасній школі для вивчення математики за рекомендаціями МОН були обрані підручники математики видані під керівництвом таких авторів: Істер О. С. [11], Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. [20], Бевз Г. П., Бевз В. Г. [3], Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. [7].

Таблиця 2.1.

Витяг з навчальної програми з математики

для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів

рівень стандарту [21]

Геометрія 7 клас І семестр 2 год на тиждень Тема 1. Трикутники. Ознаки рівності трикутників (22 год)		
Зміст навчального матеріалу	Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Коментар
Трикутник і його елементи. Висота, бісектриса і медіана трикутника. Рівність геометричних фігур. Ознаки рівності трикутників. Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивості та ознаки. Нерівність трикутника. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника та його властивості. Властивості прямокутних трикутників	**Учень/учениця:** **наводить приклади:** геометричних фігур, указаних у змісті; рівних фігур; **пояснює**, що таке рівні фігури; **формулює:** · *означення:* зовнішнього кута трикутника; різних видів трикутників; бісектриси, висоти, медіани трикутника; · *властивості:* рівнобедреного і прямокутного трикутників; *ознаки:* рівності трикутників, рівнобедреного трикутника; **класифікує** трикутники за сторонами і за кутами; **зображує та знаходить на малюнках:** рівносторонні, рівнобедрені, прямокутні трикутники та їх елементи; зовнішній кут трикутника; рівні трикутники; **обґрунтовує:** належність трикутника до певного виду; рівність трикутників; **доводить:** властивості й ознаки рівнобедреного трикутника.	На вивчення даної теми відводиться 22 год. Основні питання, що розглядаються – трикутник, елементи трикутника, властивості трикутника, ознаки рівності трикутників. За програмою учень має доводити властивості й ознаки рівнобедреного трикутника.

Нами проведено аналіз теорем планіметрії, які пропонуються у діючих і рекомендованих МОН підручниках шкільного курсу планіметрії різних авторів (Таблиця 2.2):

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимирова Н.Г. «Геометрія» 7 кл. для загальноосвітніх шкіл, 2015 р. (1)
2. Істер О.С. «Геометрія» 7 кл., для загальноосвітніх шкіл, 2015 р. (2)
3. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А «Геометрія» 7 кл., для загальноосвітніх шкіл, 2015 р. (3)

Теореми розподілялися за підручником, типом теореми та способом доведення.

Таблиця 2.2

Розподіл теорем шкільного курсу планіметрії у підручниках різних авторів

№	Теорема	Підручник	Вид теореми	Спосіб довед.
1.	Сума суміжних кутів дорівнює 180°.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
2.	Вертикальні кути рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
3.	Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну	(3)	Пряма	Аналітико – синтетичний
4.	Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.	(2)	Пряма	Від супротивного
5.	Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.	(1), (2)	Пряма	Від супротивного
6.	Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні.	(2)	Обернена	Синтетичний
7.	Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні.	(1), (2), (3)	Обернена	Синтетичний
8.	Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.	(1)	Обернена	Від супротивного
		(2)	Обернена	Аналітичний
9.	Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
10.	Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
11.	У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
12.	У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
13.	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.	(1), (2), (3)	Обернена	Синтетичний

Продовж. табл. 2.2

14.	У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
15.	Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	(1), (2), (3)	Пряма	Синтетичний
16.	Сума кутів трикутника дорівнює 180°.	(1), (2), (3)	Пряма	Аналітичний
17.	Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.	(1), (2), (3)	Пряма	Аналітичний
18.	У трикутнику: 1) проти більшої сторони лежить більший кут; 2) проти більшого кута лежить більша сторона.	(1), (2)	Пряма	Аналітичний
19.	З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.	(1),(2), (3)	Пряма	Аналітико – синтетичний
20.	Діаметр є найбільшою з хорд.	(2)	Пряма	Аналітико – синтетичний
21.	Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.	(1), (2)	Пряма	Аналітико – синтетичний
22.	Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.	(2)	Пряма	Аналітичний
23.	Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.	(2)	Пряма	Аналітико – синтетичний
24.	Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до даного кола.	(2)	Обернена	Аналітико – синтетичний
25.	Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.	(2)	Пряма	Аналітичний
26.	Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.	(2)	Пряма	Аналітичний
27.	У будь-який трикутник можна вписати коло.	(1), (2)	Пряма	Синтетичний
28.	Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.	(1), (2)	Пряма	Синтетичний
29.	Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.	(1), (2)	Пряма	Синтетичний

Аналіз даних шкільних підручників, показав, що в шкільному курсі планіметрії 7 класу представлено від 23 до 29 теорем та наслідків з них (за різними авторами).

У розділі планіметрії 7 класу в підручниках відзначається, що прямі та обернені теореми представлені у співвідношенні 6:1 (рис.2.1).

Рис.2.1. Розподіл теорем за структурою в курсі планіметрії 7 класу

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються та використовують у своїй практиці такі основні методи доведень: синтетичний, аналітичний, аналітико-синтетичний, метод доведення від супротивного, математичної індукції, метод геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія та подібність), алгебраїчний методом, окремими випадками якого є векторний і координатний.

На основі аналізу зазначених підручників бачимо, що в 7 класі використовують аналітичний, синтетичний, аналітико – синтетичний та метод від супротивного (рис.2.2.).

Для подальшої роботи над проблемою було обрано підручник Істер О. «Геометрія»: 7 кл. підручник для загальноосвітніх шкіл [11]. Виділено такі переваги даного підручника що до доведення теорем:

- теоретичний матеріал (теореми) виділено, що спрощує пошук необхідної теорії;
- кожна теорема подана з доведенням;

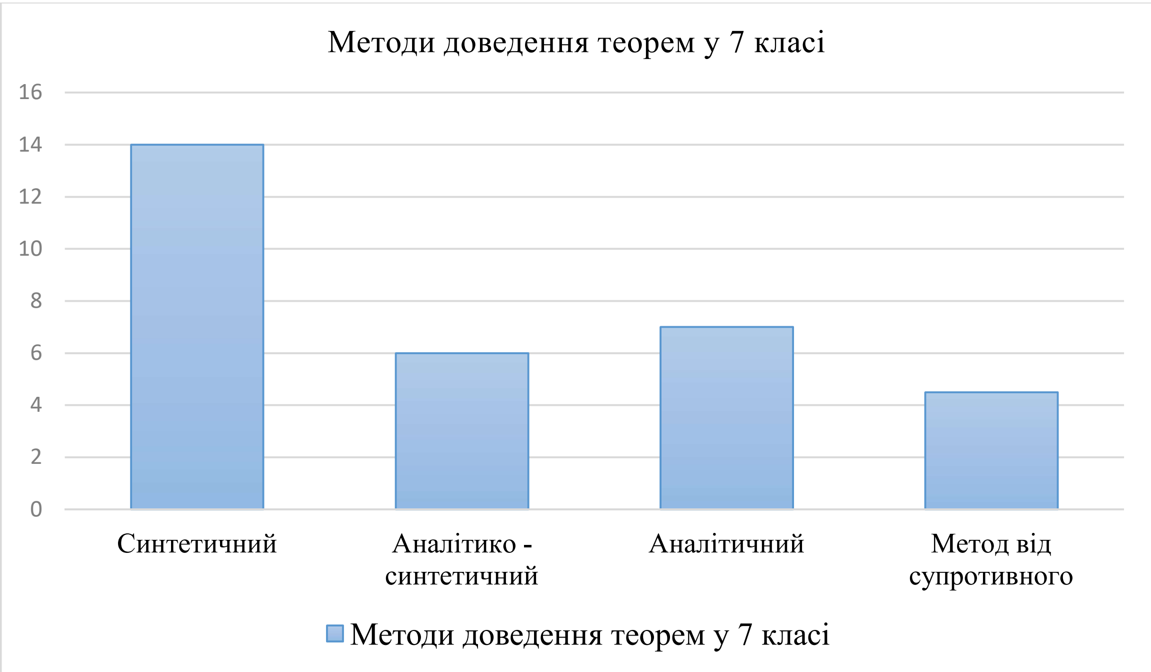


Рис.2.2. Методи доведення теорем у курсі планіметрії 7 класу

- теореми супроводжуються необхідними рисунками;
- запропоновані ключові задачі, направлені на відпрацювання навчальної інформації;
- запропоновані задачі практичного змісту на закріплення теоретичного матеріалу;
- в підручнику подані різні методи доведення теорем.

В даному підручнику розділ «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», представлений наступними параграфами [11]:

Параграф 11. Трикутник і його елементи.

Параграф 12. Рівність геометричних фігур.

Параграф 13. Перша та друга ознаки рівності трикутників.

Параграф 14. Рівнобедрений трикутник.

Параграф 15. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси трикутника.

Параграф 16. Третя ознака рівності трикутників.

Параграф 17. Сума кутів трикутника.

Параграф 18. Зовнішній кут трикутника та його властивості. Співвідношення між сторонами та кутами трикутника

Параграф 19. Прямокутні трикутники. Ознаки рівності прямокутних трикутників.

Параграф 20. Нерівність трикутника.

На першому етапі роботи з розділом вчитель опрацьовує поняття наведені в підручнику. Наприклад, за підручником Істер О. С. сформульовано означення, які зазначені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3.

Основні поняття, факти і способи діяльності теми

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Рівні геометричні фігури, медіана, бісектриса трикутника, висота трикутника,	Теорема (перша ознака рівності трикутників); Теорема (друга ознака рівності трикутників); Теорема (властивість кутів рівнобедреного трикутника); Наслідок про кути рівностороннього трикутника; Теорема (ознаки рівнобедреного трикутника); Наслідок про кути рівнобедреного трикутника; Теорема про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника; Наслідок (медіана рівнобедреного трикутника); Наслідок (висота рівнобедреного трикутника); Теорема (третя ознака рівності трикутників); Теорема про суму кутів трикутника; Наслідок з теореми про суму кутів трикутника; Теорема про властивість зовнішнього кута трикутника; Теорема про співвідношення кутів та сторін трикутника; Теорема про нерівність трикутника.	Побудова зображень основних плоских геометричних фігур та їх елементів.

Продовж.табл.2.3

Базові	Трикутник, вершини трикутника, кути трикутника, рівнобедрений трикутник, різносторонній трикутник, рівносторонній трикутник, прямокутний трикутник, катет, гіпотенуза		Побудова зображень основних плоских геометричних фігур.

Отже, аналізуючи факти, що вводяться в даному розділі, бачимо, що при вивченні теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» розглянуто 10 теорем та 7 наслідків з них. Кожна теорема представлена з наслідком та схематичним рисунком до поданого твердження.

Більшість теорем даного розділу доводять за допомогою синтетичного та аналітико – синтетичного методу.

Крім того, даний розділ включає ключові задачі, при розв’язуванні яких отримуємо теоретичний матеріал, що знадобиться при подальшому розв’язуванні прикладних задач.

Детальний ЛМА до теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» подано в Додатку Е.

2.2. Методичні особливості доведення теорем теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників»

2.2.1. Методика доведення властивостей і ознак рівнобедренного трикутника

При вивченні теорем в 7 класу курсу планіметрії учні використовують готові доведення та виконують доведення за зразком.

Розглянемо поетапність доведення властивостей і ознак рівнобедреного трикутника використовуючи саме таку методику.

В даній теми розглядаються наступні теореми:

- теорема про властивість кутів рівнобедреного трикутника;
- теорема про ознаки рівнобедреного трикутника;
- наслідок з теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника;
- наслідок з теореми про ознаки рівнобедреного трикутника;
- теорема про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника;
- наслідок з теореми про властивість бісектриси.

Розглянемо роботу з теоремами за наступною схемою (рис.2.3).

Рис.2.3. Етапи роботи над теоремою

Теорема. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

І етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Пригадаємо складові елементи рівнобедреного трикутника (назви вершин та сторін рівнобедреного трикутника) (рис.2.4).

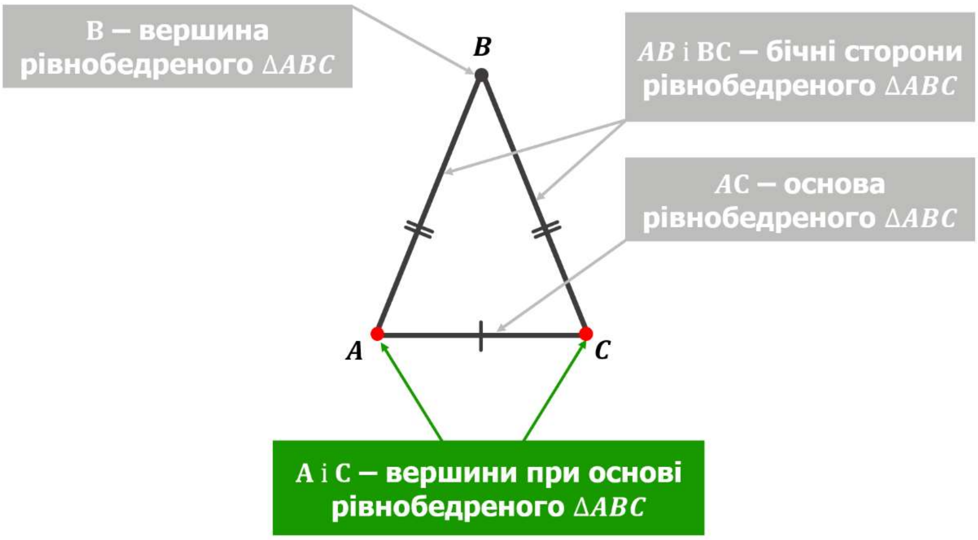


Рис.2.4

ІІ етап. Мотивація для вивчення теореми

Перед доведенням теореми про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника учням пропонується розв’язати завдання:

У рівнобедреному трикутнику АВС (АВ=ВС) вершина кута В сполучена з серединою К сторони АС відрізком. Доведіть, що трикутники АВК і СВК рівні. Чи достатньо цих даних, щоб встановити рівність названих трикутників?

Оскільки учні ще не знайомі з третьою ознакою рівності трикутників (яка базується на рівності трьох сторін), то вони не можуть вирішити це завдання. Створена проблемна ситуація стимулює учнів вивчати три нові теореми: теорему про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, теорему про властивість медіани рівнобедреного трикутника, яка проводиться до його основи, і третю ознаку рівності трикутників [4, с.3].

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

Щоб учні самостійно «відкрили» зміст теореми і сформулювали її, проводиться така практична робота.

В зошиті учні креслять три довільні рівнобедрені трикутники. За допомогою транспортиру визначають градусні міри кутів трикутника та роблять відповідні записи до зошита.

На основі зроблених записів виявляють закономірність та намагаються самостійно сформулювати визначене математичне твердження.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.5)

Дано:

ΔABC і ΔCBA

$AB = BC$

Довести:

$\angle A = \angle C$

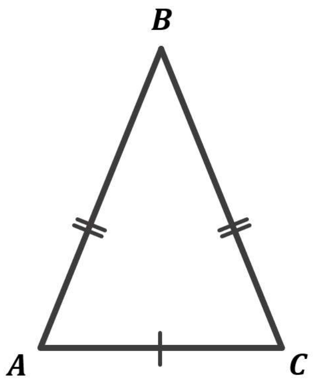


Рис.2.5

V етап. Робота з доведення теореми

Розглянемо трикутники ABC і CBA:

$$\left.\begin{array}{r} AB = CB \\ CB = BA \\ \angle B - \text{спільний} \end{array}\right| \rightarrow \quad \Delta ABC = \Delta CBA$$

(за першою ознакою рівності трикутників)

- Який можемо зробити висновок?

(Учні висловлюють власну думку)

$\Delta ABC = \Delta CBA \rightarrow \angle A = \angle C$ *(як відповідні кути рівних трикутників)*

Відповідь: теорему доведено.

VI етап. Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач [29, с.29]

На даному етапі доцільно запропонувати учням розв'язування простих задач, на застосування властивості кутів рівнобедреного трикутника.

Задача 1

Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $26°$. Знайдіть другий кут при основі цього трикутника.

Відповідь: За властивістю кутів рівнобедреного трикутника – інший кути при основі також дорівнює $26°$.

Задача 2

Чи може бути рівнобедреним трикутник, усі кути якого різні? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: Ні, так як за властивістю кутів рівнобедреного трикутника – його кути при основі є рівними.

Задача 3

ΔABC – рівнобедрений з основою AC (рис.2.6). Доведіть, що $\angle MAB = \angle NCB$

Дано:

ΔABC – рівнобедрений;

AC – основа;

Довести:

$\angle MAB = \angle NCB$

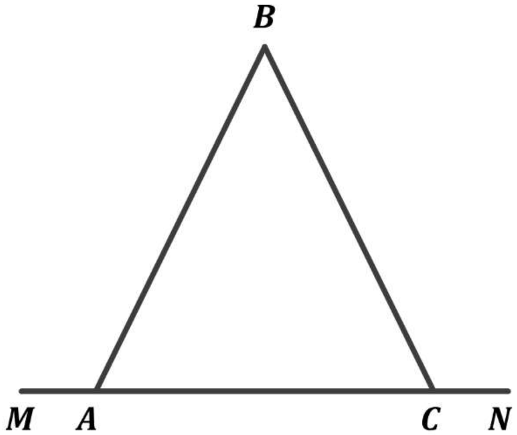


Рис.2.6

$$\left.\begin{array}{l} \angle MAB = 180° - \angle BAC \\ \angle NCB = 180° - \angle BCA \end{array}\right. \text{(за теоремою про суміжні кути)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAC = \angle BCA \ \text{(за властивістю кутів рівнобедреного трикутника)} \end{array}\right| \rightarrow \angle MAB = \angle NCB$$

Відповідь: доведено.

VII етап. Застосування теореми при розв’язуванні більш складних задач [14, с.120**]**

Задача 1.

Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами іншого рівнобедреного трикутника.

Задача 2.

На бічних сторонах MA і AT рівнобедреного трикутника MAT позначено точки N і V так, що MN=TV. Доведіть, що MV=NT.

Задача 3.

Так, як учні вже знайомі з поняттям «рівносторонній трикутник» запропонувати самостійно довести наслідок з теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

Для доведення необхідно пригадати наступні поняття та властивості:

1) Що таке рівносторонній трикутник?
2) Сформулюйте теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

VIII етап. Закріплення теореми

На етапі закріплення можна провести бліц – опитування:

- Які трикутники називаються рівнобедреними?
- Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
- Сформулюйте ознаку рівнобедреного трикутника
- Чому у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні?

Теорема 2. **Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.**

І етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Провести у вигляді прийому «Доповни речення»**:**

1) Якщо в квадраті провести діагональ, отримуємо геометричні фігури…
2) Рівносторонній трикутник є підвидом….
3) У рівнобедреному трикутнику кути … рівні.
4) Бічні сторони є в … трикутнику.
5) При проведенні діагоналі в прямокутнику отримуємо… трикутники.

ІІ етап. Мотивація для вивчення теореми

Візьміть аркуш паперу, за допомогою транспортиру та лінійки накресліть трикутник з двома рівними кутами по 45° (рис.2.7).

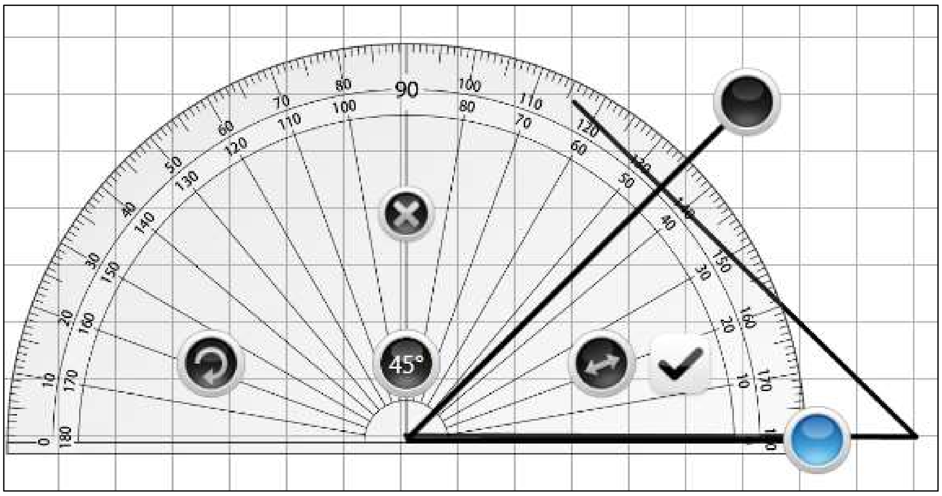


Рис.2.7

В отриманому трикутнику виміряйте довжини всіх трьох сторін. Яку закономірність ви бачите? Спробуйте сформулювати математичне твердження, що відповідає проведеному дослідженню.

ІІІ етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

На даному етапі доцільно пригадати що таке ознака та властивість геометричної фігури.

Властивості ми використовуємо тоді, коли знаємо, що певна геометрична фігура належить до того чи іншого класу (наприклад, ми знаємо, що прямі паралельні – тоді можемо скористатися їх властивостями).

Ознаки використовуємо тоді, коли нам треба з’ясувати, до якого саме класу належить та чи інша геометрична фігура (наприклад, нам треба з’ясувати, чи паралельні дані дві прямі – тоді використовуємо ознаки паралельності прямих.

Визначаємо чи дана теорема описує властивості чи є ознакою.

Визначаємо структуру даної теореми (Таблиця 2.4).

Таблиця 2.4

Структура теореми «Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений»

Умова	Висновок
Якщо в трикутнику два кути рівні	Трикутник є рівнобедреним

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.8).

Дано:

ΔABC

$\angle A = \angle C$

Довести:

ΔABC – рівнобедрений

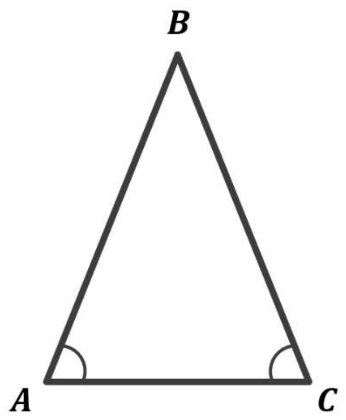


Рис.2.8

V етап. Робота з доведення теореми

Складемо структурну схему доведення теореми:

Розглянемо трикутники ABC і CBA:

$$\left.\begin{array}{r} \angle A = \angle C \\ \angle C = \angle A \\ AC - \text{спільна сторона} \end{array}\right| \rightarrow \quad \Delta ABC = \Delta CBA$$

(за другою ознакою рівності трикутників)

- Який можемо зробити висновок?

(Учні висловлюють власну думку)

$\Delta ABC = \Delta CBA \rightarrow AB = CB$*, отже* ΔABC *– рівнобедрений*

Відповідь: доведено.

VI етап. Застосування теореми у розв’язуванні найпростіших задач

Запропонувати довести наслідок з теореми – ознаки, використовуючи роздаткові матеріали (картки або інтерактивну дошку) (Таблиця 2.5).

Наслідок.

Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

Таблиця 2.5

Роздатковий матеріал для доведення теореми

Твердження	Доведення
$\angle A = \angle B = \angle C$	……
……	то, $AB = BC$
……	то, $AB = AC$
Якщо, існує доведення 2 і 3, то	……

VII етап. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач [14, с.122]

Задача 1.

Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AM, BN і CV. Доведіть, що трикутник MNV – рівносторонній.

(*Тема «Рівнобедрений трикутник» вивчається після вивчення теми «Перша ознака рівності трикутників», тому при розв'язуванні даної задачі можемо користуватись першою ознакою рівності*).

Дано:

ΔABC – рівносторонній;

$AM = BN = CV$;

Довести:

ΔMNV – рівносторонній

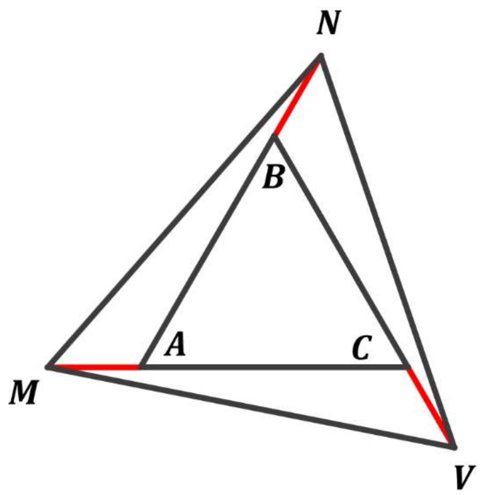


Рис.2.9

Доведення:

Розглянемо сторони AN і BV за допомогою побудови схеми:

$$\left.\begin{array}{r} AN = AB + BN \\ BV = BC + CV \\ BN = CV \\ AB = BC \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} AN = BV \\ \textit{(До рівних сторін додаємо рівні відрізки)} \end{array}$$

Розглянемо кути MAN і NBV:

$$\left.\begin{array}{l} \angle MAN = 180° - \angle BAC \ \textit{(за теоремою про} \\ \angle NBV = 180° - \angle ABC \quad \textit{суміжні кути)} \\ \angle ABC = \angle BAC \quad \textit{(як рівні кути рівностороннього трикутника)} \end{array}\right| \rightarrow \angle MAN = \angle NBV$$

Розглянемо трикутники MAN і NBV:

$$\left.\begin{array}{r} AN = BV \\ AM = BN \\ \angle MA \quad = \angle NBV \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \Delta MAN = \Delta NBV \\ \textit{(за першою ознакою рівності трикутників)} \end{array}$$

$$\Delta MAN = \Delta NBV \ \rightarrow \boldsymbol{MN = NV} \ \begin{array}{c} \textit{(як відповідні сторони} \\ \textit{рівних трикутників)} \end{array}$$

*Далі можна просто сказати, що рівність іншої сторони доводиться аналогічно.

VIII етап. Закріплення теореми

- В процесі бесіди з учнями ще раз виділити основну ідею теореми, метод і кроки доказу;

- Запропонувати пояснити окремі кроки докази;

- Перерахувати всі аксіоми, теореми і визначення, які використовуються в доказі.

Теорема. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

І етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Виконаємо побудову, так званих «чудових ліній» трикутника.

1) Побудуємо всі медіани трикутника АВС (рис.2.10):

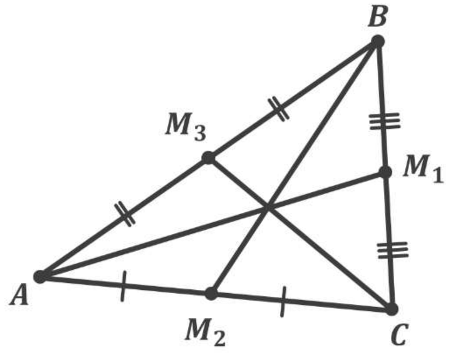


Рис.2.10

2) Побудуємо всі висоти трикутника ABC (рис.2.11):

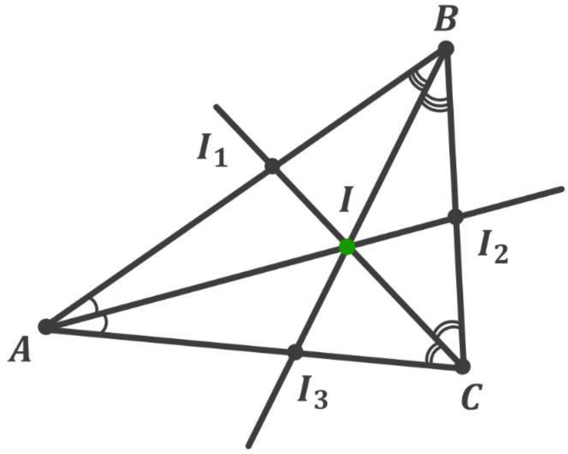


Рис.2.11

3) Побудуємо всі висоти даного трикутника (рис.2.12):

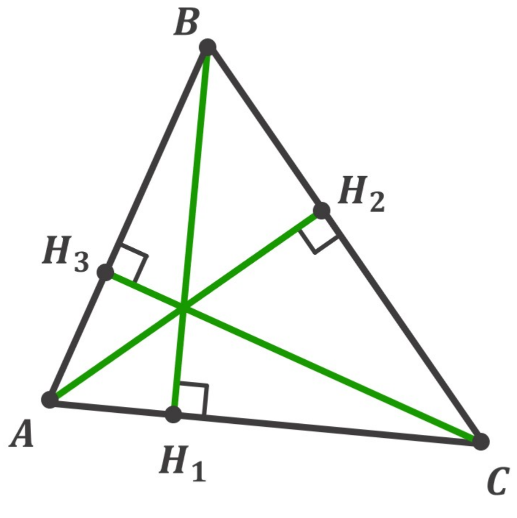


Рис.2.12

II етап. Мотивація для вивчення теореми

Щоб виробити мотиваційний момент для вивчення теореми пропонуємо учням розглянути прикладну задачу.

Прикладна задача [17, с.13]

Щоб провести за допомогою мотузки перпендикуляр до даної прямої MN із даної на ній точці O роблять так: відкладають від цієї точки O рівні відстані OB і OA. Закріпляють в точках A і B мотузку, і взявши за її середину точку C натягуємо мотузку. Провішена з пряма CO і буде шуканим перпендикуляром (рис.2.13). Чому?

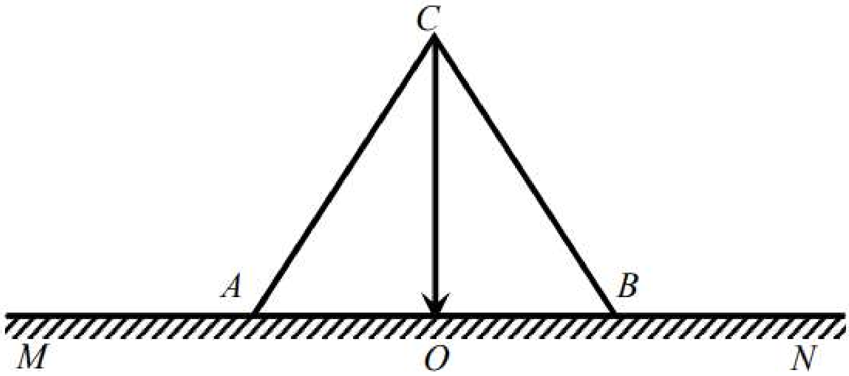


Рис.2.13

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

На уроці пропонується провести медіану висоту до основи і бісектрису кута, утвореного бічними сторонами. Для закріплення матеріалу та точності висновків робимо креслення трьох різних рівнобедрених трикутників (рис.2.14).

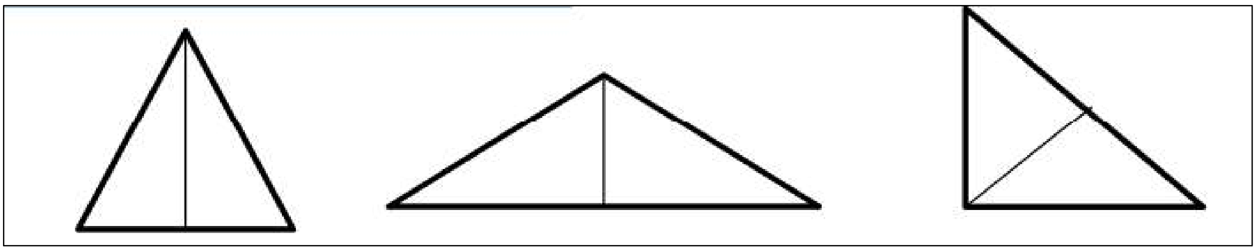


Рис.2.14

Тепер побудуємо різносторонній трикутник і побудуємо в ньому висоту, медіану та бісектрису (рис.2.15).

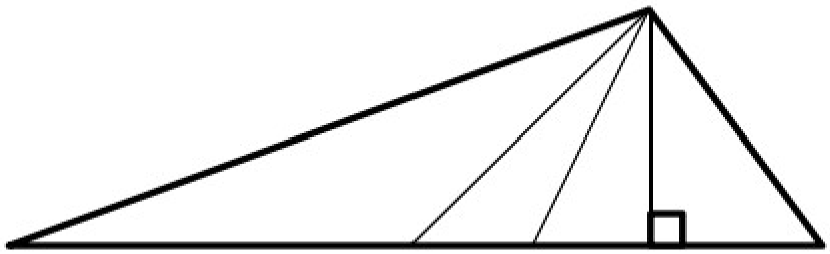


Рис.2.15

На основі виконаних побудов пропонуємо учням самостійно визначити особливість у побудові зазначених елементів.

Визначаємо структуру даної теореми (Таблиця 2.6).

Таблиця 2.6

Структура теореми: «У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою»

Умова	Висновок
Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника	Бісектриса є медіаною і висотою.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.16).

Дано:

ΔABC – рівнобедрений;

AC – основа;

BI – бісектриса;

Довести:

BI – медіана і висота.

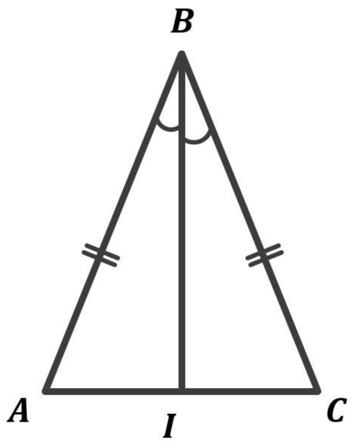


Рис.2.16

V етап. Робота з доведення теореми

Розглянемо трикутники ABI і CBI:

$$\left.\begin{array}{r} AB = BC \text{ (бічні сторони } \Delta ABC) \\ \angle ABI = \angle CBI \text{ (} BI - \text{бісектриса)} \\ BI - \text{ спільна сторона} \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \Delta ABI = \Delta CBI \\ \text{(за першою ознакою} \\ \text{рівності трикутників)} \end{array}$$

- Який можемо зробити висновок?

(Учні висловлюють власну думку відносно того, як можна скористатися рівністю трикутників ABI і CBI).

$\Delta ABI = \Delta CBI \to AI = CI$ як відповідні сторони рівних трикутників, отже BI – медіана.

- Що ще випливає з рівності трикутників ABI і CBI?

(Учні висловлюють власну думку)

$\Delta ABI = \Delta CBI \to \angle BIA = \angle BIC$, як відповідні кути рівних трикутників

- Що ще можемо сказати про кути BIA та BIC?

(Ці кути є суміжними)

$\left.\begin{array}{l} \angle BIA = \angle BIC \\ \text{Кути } BIA \text{ і } BIC - \text{суміжні} \end{array}\right| \to \begin{array}{l} \angle BIA = \angle BIC = 90° \\ \text{отже } BI - \text{висота } \Delta ABC \end{array}$

Відповідь: доведено.

VI етап. Застосування теореми у розв’язуванні найпростіших задач

Задача 1

На рисунку зображені бісектриса, висота і медіана трикутника MNV. Знайдіть ці відрізки (рис.2.17).

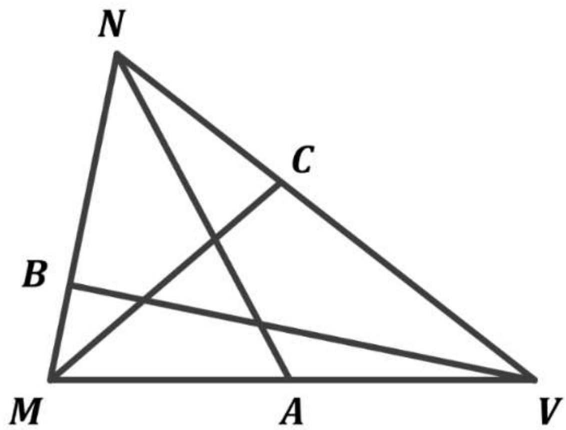


Рис.2.17

Задача 2

На рисунку LH – висота рівнобедреного ΔMLK з основою MK. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому рисунку (рис.2.18).

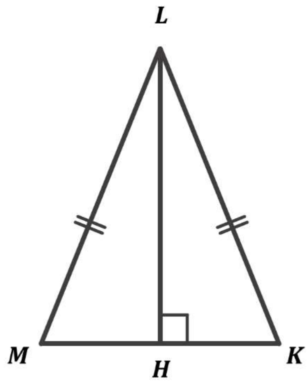


Рис.2.18

Задача 3

AI і MS - відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і MNV. Доведіть, що ΔAIC=ΔMSV (рис.2.19).

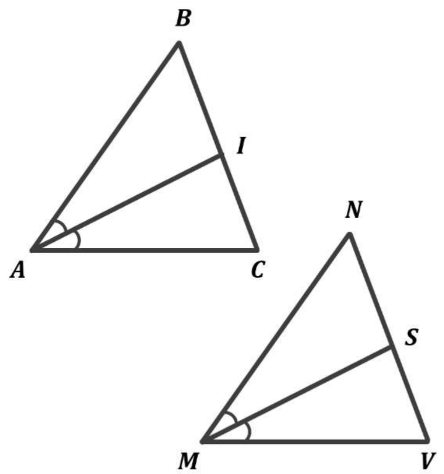


Рис.2.19

VII етап. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач [14, с.125]

Задача 1

Знайдіть висоту трикутника з периметром, що дорівнює 36 см, якщо вона розбиває його на два трикутники з периметрами 18 см і 24 см.

Задача 2

У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BH. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо BH=10 см, а периметр трикутника ABH дорівнює 40 см.

Задача 3

В трикутнику ABC побудовані медіани CM, AN і BV. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо AM+BN+CV=22 дм.

Задача 4

В трикутнику ∆ABC з периметром 30 см, CM – його медіана. Периметр трикутника BCM дорівнює 18 см, периметр трикутника ACM - 24 см. Знайдіть довжину медіани CM.

VIII етап. Закріплення теореми

1. Чи вірно сформульована теорема: «Медіана, проведена до основи є бісектрисою і висотою». Чому?

2. Вставте пропущені слова: «В … трикутнику медіана, проведена … є … і …».

3. Сформулюйте теорему зі словами «Якщо …, то …».

2.2.2. Методика доведення властивості кутів трикутника і властивості зовнішнього кута трикутника

В даній теми розглядаються наступні теореми:

- Сума кутів трикутника дорівнює 180°.
- Наслідок з теореми про суму кутів трикутника.
- Теорема про властивість зовнішнього кута трикутника.
- Наслідок з теореми про властивість зовнішнього кута трикутника.
- Теорема про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Теорема. Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

I етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Відомо, що a||b, c – січна. Поясніть, чому ∠1=∠2 і ∠3=∠4 (рис.2.20)

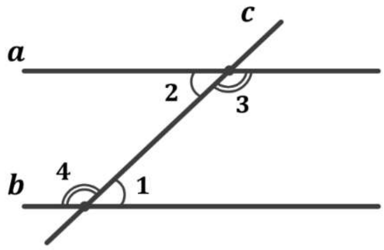


Рис.2.20

Поясніть, чому ∠1+∠3=180° і ∠2+∠4=180°?

II етап. Мотивація для вивчення теореми

Накресліть довільний трикутник і виміряйте за допомогою транспортира суму градусних мір всіх його кутів.

Які висновки ви можете зробити?

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

Визначаємо умову та висновок теореми (Таблиця 2.7).

Таблиця 2.7

Структура теореми про суму кутів трикутника

Умова	Висновок
У будь-якому трикутнику	Сума кутів становить 180°.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.21)**.**

Дано:

ABC – трикутник;

Довести:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

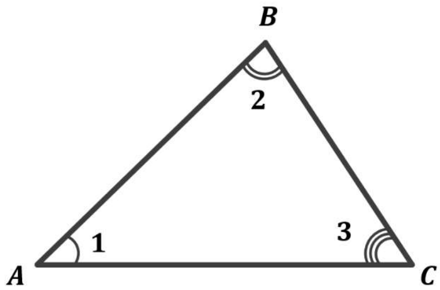


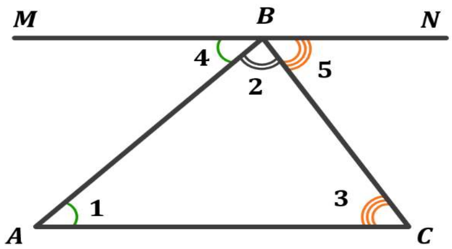
Рис.2.21

V етап. Робота з доведення теореми

Доведення оформлюємо у вигляді таблиці (Таблиця 2.8).

Таблиця 2.8

Доведення теореми про суму кутів трикутника у вигляді таблиці

Твердження	Обгрунтування
$MN \parallel AC$	Виконуємо добудову даного рисунку 
$\angle 1 = \angle 4$	внутрішні різносторонні при MN‖AC і січній AB
$\angle 3 = \angle 5$	внутрішні різносторонні при MN‖AC і січній BC
$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$	Так як ∠MBN розгорнутий
З рядка 2 та 3 випливає рівність кутів	Отже, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$
Що і треба було довести	

Використовуючи доведення даної теореми можемо запропонувати учням довести наслідок: у будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут. Можна дійти до протиріччя наведеними вище міркуваннями.

VI етап. Застосування теореми у розв’язуванні найпростіших задач

Задача 1

Чи існує трикутник з кутами:

1) 40°, 40°, 50° 2)25°, 45°, 100°

Задача 2

Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

1) 40°, 40°; 2) 25°, 45°; 3) 4°, 44°.

Задача 3

Доведіть, що кожен з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

Задача 4

Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 30° більший за кут при вершині.

VII етап. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач [14, с.128]

1. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих січною перетинаються під прямим кутом.
2. Знайдіть кути трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3:4:5.
3. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них на 24° більший за інший. Скільки розв'язків має задача?
4. Бісектриса кутів E і F трикутника DEF перетинаються в точці O. Знайдіть кут EDF, якщо кут EOF становить 115°.
5. Висота CH і бісектриса BK прямокутного трикутника ABC (∠C = 90°), перетинаються в точці D. Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо $\angle BDC$ = 118°.

Теорема. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних кутів.

I етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Пригадуємо означення понять:

1) Суміжні кути; вертикальні кути;
2) Властивості кутів при перетині паралельних прямих січною.

II етап. Мотивація для вивчення теореми

Для мотивації та ознайомлення з новою темою пропонуємо дітям побудувати трикутник та побудувати до кожної вершини зовнішні кути (рис.2.22).

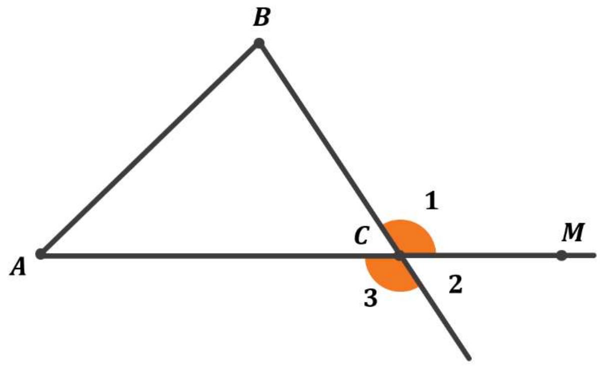


Рис.2.22

Визначити скільки зовнішніх кутів всього можна побудувати в трикутнику.

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

Виділяємо умову та висновок теорії (Таблиця 2.9).

Таблиця 2.9

Структура теореми про зовнішній кут трикутника

Умова	Висновок
Існує зовнішній кут трикутника	Цей зовнішній кут дорівнює сумі внутрішніх, що є не суміжними з ним.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.23).

Дано:

$\angle MAB$ – зовнішній кут ΔABC;

Довести:

$\angle MAB = \angle B + \angle C.$

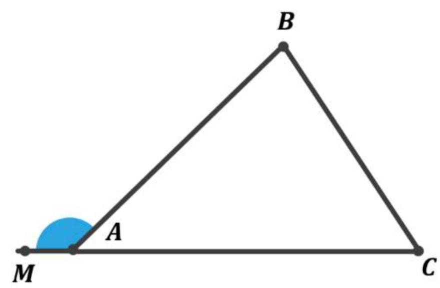


Рис.2.23

V етап. Робота з доведення теореми

Оформлюємо доведення у вигляді таблиці (Таблиця 2.10).

Таблиця 2.10

Доведення теореми про зовнішній кут трикутника у вигляді таблиці

Твердження	Доведення
$\angle MAB = 180° - \angle BAC$	За теоремою про суміжні кути (сума суміжних кутів становить 180°), отже $\angle MAB + \angle BAC = 180°$
$\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$	За теоремою про суму кутів трикутника. $\angle B + \angle C + \angle A = 180°$ $\angle A = \angle MAB$
$\angle MAB = \angle B + \angle C.$	За допомогою підстановки виводимо правильне твердження.
Теорему доведено	

Після доведення даної теореми доцільно одразу розглянути теорему про співвідношення кутів та сторін у трикутнику (наслідок з даної теореми). При доведенні даної теореми доцільно нагадати дітям про методику доведення від супротивного (Таблиця 2.11).

Доведемо твердження *1) Проти більшої сторони лежить більший кут* (рис.2.24).

Дано:

ΔABC;

$AB > BC$;

Довести:

$\angle C > \angle A$

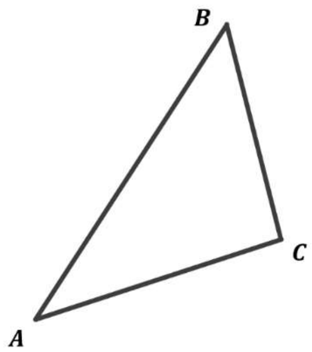
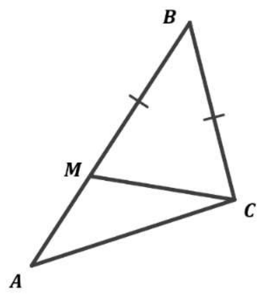


Рис.2.24

Таблиця 2.11

Доведення теореми про співвідношення кутів та сторін у трикутнику

Етап доведення	Доведення
Відкладемо на стороні BA відрізок BM, що дорівнює BC. 	$BM = BC \rightarrow \Delta MBC -$ рівнобедрений $\Delta MBC -$ рівнобедрений
$\angle BMC = \angle BCM$	Як кути при основі рівнобедреного трикутника ΔMBC
$\angle BMC$ – зовнішній кут ΔAMC	За побудовою
$\angle BMC > \angle A$	Так як $\angle BMC = \angle BCM$, $\angle C > \angle A$ (за умовою).
$\angle BCM > \angle A \rightarrow \angle C > \angle A$	$\angle BMC = \angle BCM$ $\angle BMC > \angle A$

Доведемо твердження 2) Проти більшого кута лежить більша сторона.

Дану теорему учні доводять методом від супротивного. Даний метод учні вже використовували при доведенні паралельності прямих та визначенні властивостей паралельних прямих перетнутих січною.

Учням пропонуємо спробувати самостійно довести наслідок.

Орієнтовна схема доведення:

Нехай $AB = BC \rightarrow \Delta ABC -$ рівнобедрений $\rightarrow \angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{C}$ ***(що суперечить умові)***

Нехай $AB < BC \rightarrow \angle \boldsymbol{C} < \angle \boldsymbol{A}$ *(за першою частиною теореми)* ***(що суперечить умові)***

Отже, наші припущення не правильні $\rightarrow AB > BC$.

VI етап. Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач

1. Накресліть ΔMNV та його зовнішній кут при вершині N.

2. Зовнішній кут при вершині B трикутника ABC дорівнює 65°. Знайдіть суму внутрішніх кутів A і C цього трикутника.

3. У ΔMNV MN < NV порівняйте кути M і V цього трикутника.

VII етап. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач [14, с.130]

1. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо:

1) Один з них на 38° більший за другий;

2) Один з них у 3 рази більший за другий;

2. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 102°. Знайдіть кут при основі трикутника.

3. У трикутнику MNV, ∠M=40°, ∠V=60°, MA=MN, VN=VB. Знайдіть кут ANB (рис.2.25).

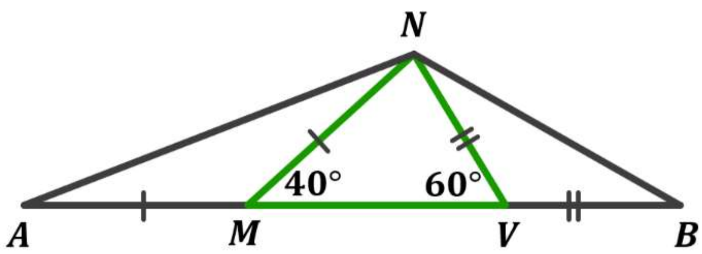


Рис.2.25

4. Доведіть, що бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні між собою.

2.2.3. Методика навчання ознак рівності трикутників

Вивчення ознак рівності трикутників розділено при вивченні теми «Трикутнику». Так, за підручником Істер О.С. спершу вивчається пункт «Перша та друга ознаки рівності трикутників», далі за програмою вивчається тема «рівнобедрений трикутник». Після вивчення підпункту «Зовнішній кут трикутника» вже вивчається третя ознаки рівності трикутників.

Окремо, без доведення вивчаються ознаки рівності прямокутних трикутників. В підручнику дані математичні твердження подані у вигляді властивостей та ключових задач. Тобто, учні 7 класів при вивченні ознак рівності трикутників розглядають доведення та доводять самостійно за зразком наступні теореми:

1) Перша ознака рівності трикутників;
2) Друга ознака рівності трикутників;
3) Третя ознака рівності трикутників.

Теорема. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

І етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

Актуалізуємо знання за допомогою опитування:

- Які трикутники називаються рівними?
- Як називаються ті пари сторін і кутів трикутників, що суміщаються накладанням?
- Який знак використовуємо для позначення рівності трикутників?
- Поясніть, чому записуючи рівність трикутників потрібно враховувати послідовність запису вершин трикутника?
- Сформулюйте означення трикутника

- Кінці сторін трикутника – це його…

II етап. Мотивація для вивчення теореми

На аркуші паперу два трикутники, як нам перевірити, чи рівні ці геометричні фігури (рис.2.26)?

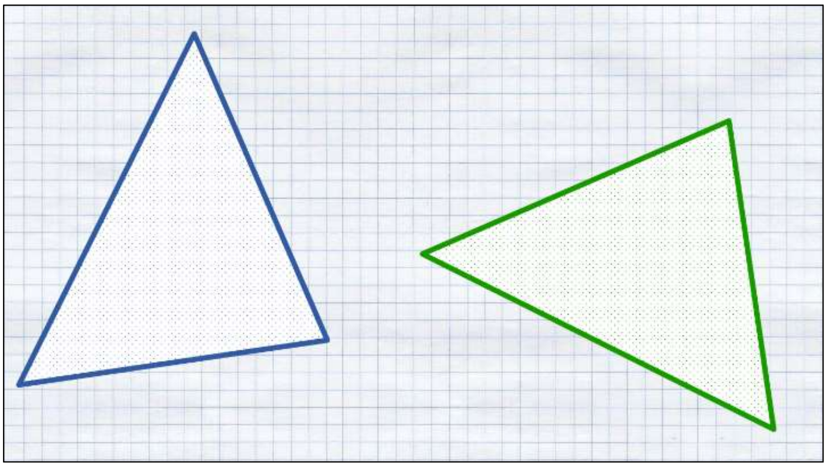


Рис.2.26

Якщо ми виріжемо їх ножицями та сумістимо накладанням, то переконаємося, що вони є рівними (рис.2.27).

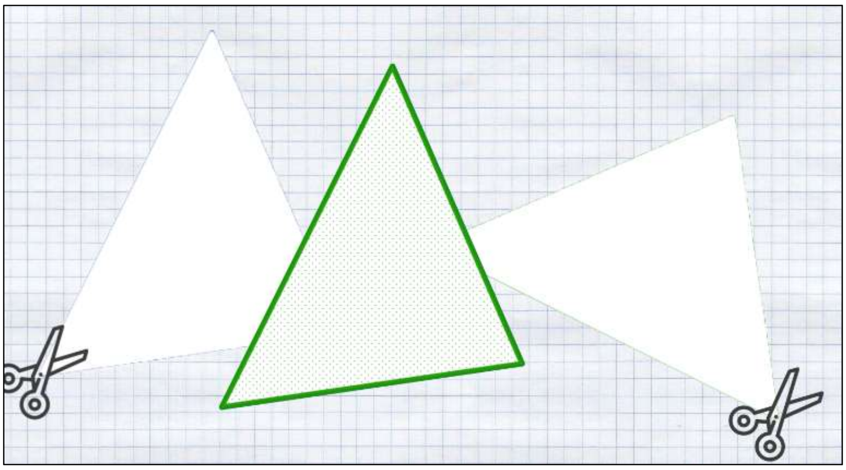


Рис.2.27

Скажіть, чи завжди зручно користуватись таким методом порівняння фігур?

Для доведення рівності певних фігур достатньо порівняти складові елементи, в даному випадку трикутників: кути, та сторони.

Однак, для доведення рівності нам не обов’язково знати всі елементи трикутника.

Для доведення рівності ми можемо скористатись ознаками рівності трикутників.

Ознаки рівності трикутників дозволять нам не перевіряти рівність 6-ти елементів (три вершини і три кути) двох трикутників.

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Учні самостійно визначають що нам дано в теоремі, а що необхідно довести.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови (рис.2.28).

Дано:

ΔAB і $\Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$AC = A_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$

Довести:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

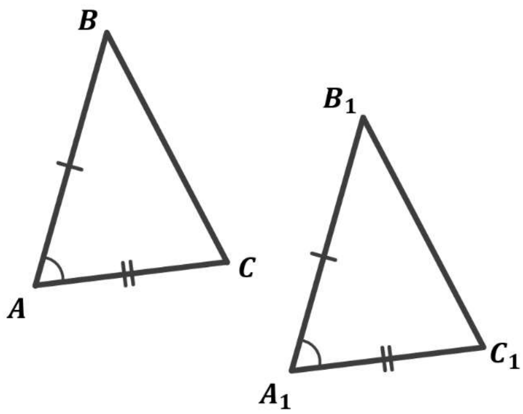


Рис.2.28

V етап. Робота з доведення теореми (рис.2.29)

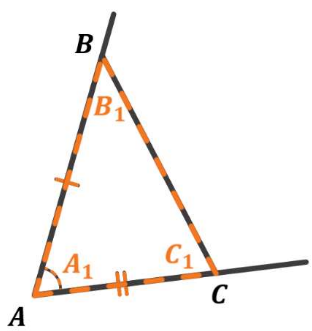


Рис.2.29

Поясніть, чому $\Delta A_1B_1C_1$ можна накласти на ΔABC так, щоб сторона A_1B_1 наклалася на промінь AB, а сторона A_1C_1 наклалася на промінь AC?

(Учні висловлюють власну думку)

Так як $\angle A = \angle A_1$, то трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC можна сумістити накладанням так, що вершина A_1 суміститься з вершиною A, а сторони A_1B_1 і A_1C_1 накладуться на промені AB і AC.

Поясніть, чому сумістяться всі вершини трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC?

(Учні висловлюють власну думку)

Так як кінці сторін трикутників – це їх вершини і AB=A_1B_1, AC=, то вершини B_1 *і* C_1 сумістяться з вершинами B і C.

Складемо схему доведення теореми.

$$\left.\begin{array}{r} \angle A = \angle A_1 \\ AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \end{array}\right| \rightarrow$$

Вершини $\Delta A_1B_1C_1$ сумістяться з відповідними вершинами ΔABC, отже дані трикутники є рівними, тобто $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Запропонуємо учням закріплення даної теореми виконання практичної задачі.

Практична задача

Фермер задумав велике будівництво дороги від його поля до ферми, але на шляху в нього є гора каміння, яка заважає виміряти довжину між точками A і B. Якщо Ви зараз поясните, як за допомогою першої ознаки рівності трикутників виміряти довжину між точками A і B – фермер попросить, щоб вам поставили 12 балів за роботу на уроці (рис.2.30) [14, с.120].

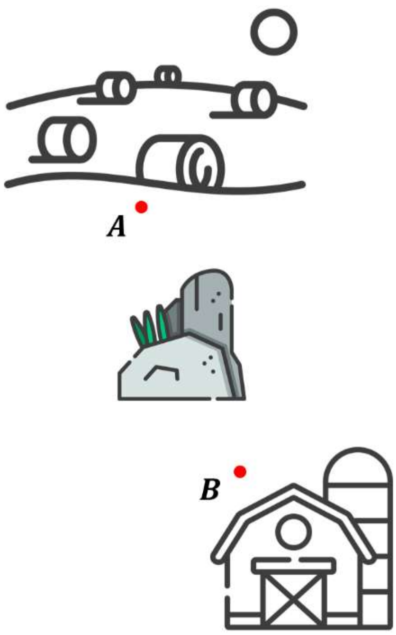


Рис.2.30

Так, як за календарним планування та підручником з геометрії 7 класу автора Істера О.С. вивчається на одному уроці, доцільно учням запропонувати доведення другої ознаки рівності трикутників самостійно, на основі прикладу доведення першої ознаки рівності трикутників.

Дане доведення може виконуватись у малих групах методом заповнення роздаткового матеріалу (Таблиця 2.11):

Таблиця 2.11

Роздатковий матеріал для доведення теореми

Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.	
Твердження	Доведення

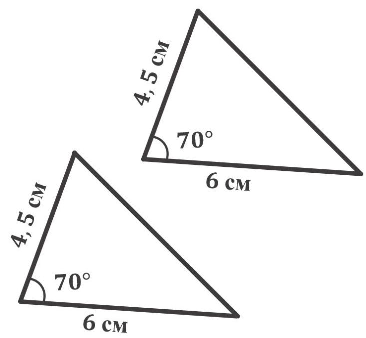
Продовження таблиці 2.11

Рисунок:	
Сторони, що накладаються	
Кути, що накладаються	
Висновок	

VI етап. Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач

Задача 1

На рисунку трикутники рівні між собою (рис.2.31). За якою ознакою?

1) 

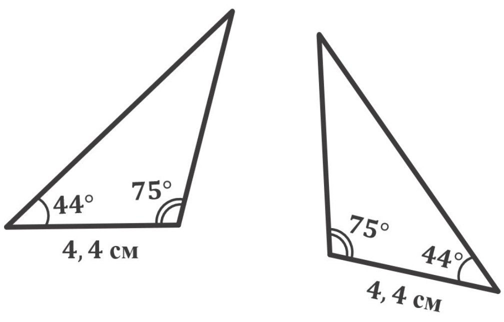
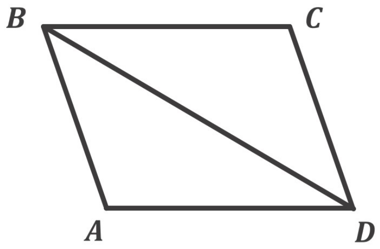
2) 

Рис.2.31

Задача 2

Назвіть спільний елемент трикутників DAB і BCD та SVN і RMN (рис.2.32).



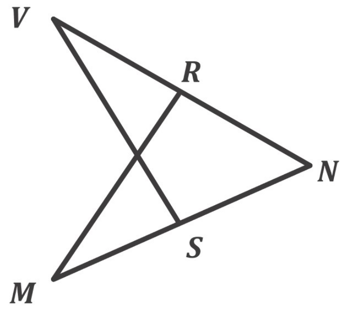


Рис.2.32

Задача 3

Відомо, що $AC = CN, \angle A = \angle N, BN \perp AN$. Доведіть, що $\Delta ACB = \Delta NCM$.

VII етап. Застосування теореми при розв'язуванні більш складних задач

1. Серединний перепендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D. Знайдіть периметр трикутника ADC, якщо AB = 10 см, AC = 8 см.

2. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O — є серединою кожного з них. Довести, що трикутник AOC дорівнює трикутнику BOD.

3. Від віконного скла трикутної форми відколовся один з його кутів. Чи можна за частиною, що збереглася, замовити скло тієї самої форми? Які розміри слід зняти?

Теорема. Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

I етап. Актуалізація опорних знань і умінь, що необхідні при подальшому опрацюванні теореми

На етапі актуалізації достатньо перевірити знання учнів що до знання першої та другої ознак рівності трикутників.

II етап. Мотивація для вивчення теореми

Спробувати за допомогою трьох відрізків скласти 2 різні трикутники. В кого вийде скласти трикутники, використовуючи ці відрізки той отримає 12 балів за урок. Учні отримують стимул для логічного та критичного мислення.

Звісно, в учнів не вийде виконати це завдання. Так ми підходимо до визначення третьої ознаки рівності трикутників.

III етап. Процес ознайомлення та усвідомлення тексту теореми

Учні самостійно виділяють умову та висновок теореми.

IV етап. Побудова рисунка, написання умови

Прикладемо трикутники один до одного більшою стороною так, щоб вершини B і B_1 опинилися по різні сторони відносно прямої AC (рис.2.33).

Дано:

$\Delta ABC\ i\ \Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1$

$AC = A_1C_1$

Довести:

ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$

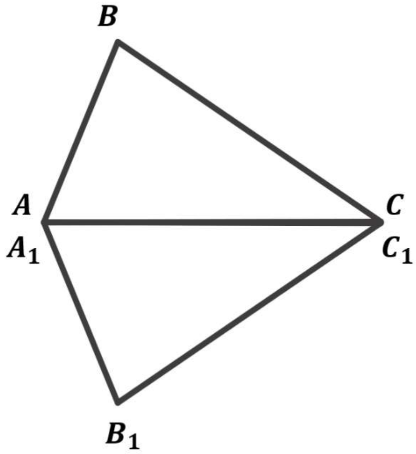


Рис.2.33

V етап. Робота з доведення теореми

Для доведення даної теореми пропонуємо учням виконати побудову. Учні самостійно висловлюють думки що потрібно добудувати в даному малюнку.

Виконуємо добудову (рис.2.34).

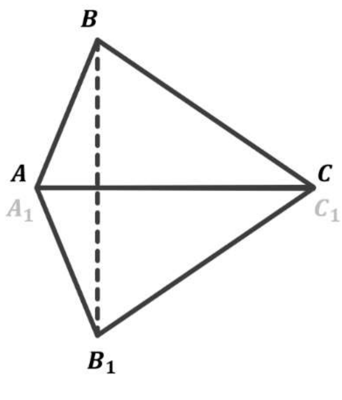


Рис.2.34

Пропонуємо учням заповнити чек-лист з доведення теореми (Таблиця 2.12).

Таблиця 2.12

Чек-лист з доведення теореми

Твердження	Доведення
$AB = A_1B_1$	…..
$BC = B_1C_1$	…..
…..	рівнобедрений
$\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$	……
$\angle ABC = \angle AB_1C$	……
$\angle ABC = \angle AB_1C$	

VI етап. Застосування теореми у розв'язуванні найпростіших задач

1. Який кут трикутника MNV дорівнює куту B трикутника ABC? Відповідь поясніть (рис.2.35).

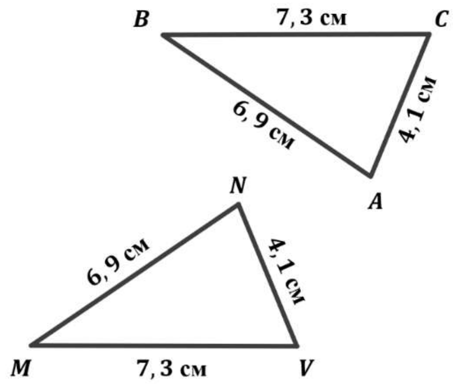


Рис.2.35

2. Доведіть рівність трикутників на кожному з рисунків (рис.2.36).

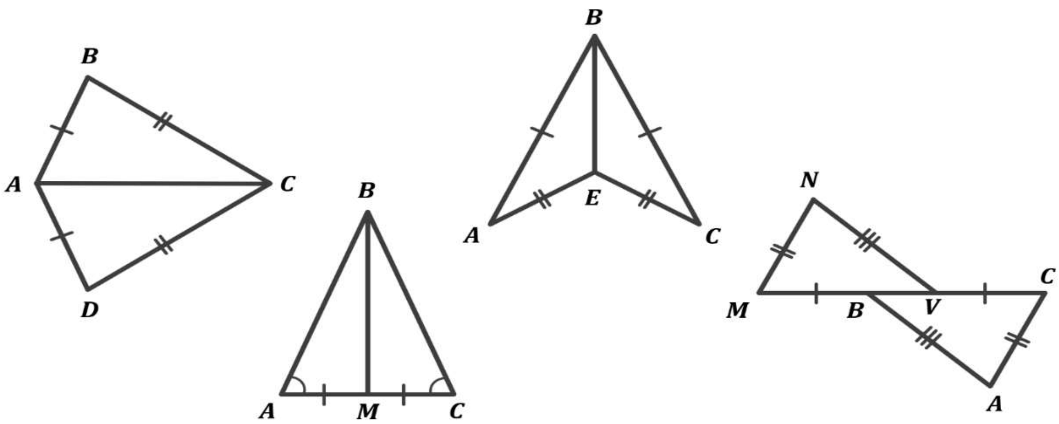


Рис.2.36

VII етап. Застосування теореми у розв’язуванні складніших задач

1. В чотирикутнику ATHM MA=TH, AT=MH, ∠AMH+∠ATH=128°. Знайдіть кут ATH.

2. Усередині рівнобедреного трикутника ABC (AB=BC) взято точку M так, що AM=MC. Доведіть, що пряма BM перпендикулярна до AC.

3. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ - рівнобедрені із спільною основою AC, а точки B і B_1 лежать по різні сторони від прямої AC і $AB \neq AB_1$. Доведіть, що $BB_1 \perp AC$.

При вивченні теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» вчитель може самостійно обирати методику та способи доведення теорем. Однак, головним залишається врахування вікових та психологічних особливостей кожного учня.

2.3. Методичні особливості роботи з теоремами в умовах дистанційного навчання

Останні декілька років більшість навчальних закладів України використовує дистанційний формат навчання або змішану форму. Така ситуація зумовлена спочатку епідеміологічною ситуацією в країні у зв’язку з поширенням коронавірусу, а з 24 лютого 2022 року повномасштабним вторгненням країни – агресора.

Під час проведення дистанційного навчання навчальні заклади мають чітко дотримуватись крім існуючих нормативних документів, так і Санітарним регламентом, де прописані вимоги до дистанційного навчання [12, с.133].

У регламенті чітко сформульовані вимоги до тривалості онлайн – уроків у синхронному режимі (Таблиця 2.13.):

Безперервна тривалість навчальної діяльності з ТЗН протягом навчального заняття для учнів:

- 1-х класів становить не більше 10 хв;
- 2-4-х класів — не більше 15 хв;
- 5-7 класів — не більше 20 хв;

- 8-9 класів — 20-25 хв.;
- 10-11-х(12-х) класів — на 1-й годині занять до 30 хв., на 2-й годині занять — 20 хв.

Таблиця 2.13

Вимоги до тривалості уроку під час синхронного навчання

Кількість навчальних занять на день	Тривалість навчальних онлайн-занять				
	1-2 класи	**3-4 класи**	**5-6 класи**	**7-9 класи**	**10-11 класи**
2	30 хв.	45 хв.	45 хв.	45 хв.	–
3	20 хв.	30 хв.	35 хв.	40 хв.	45 хв.
4	-	20 хв.	25 хв.	30 хв.	35 хв.
5	–	–	–	25 хв.	30 хв.
6	–	–	–	–	25 хв.

Тобто, аналізуючи дані Санітарного регламенту бачимо, що тривалість уроку в онлайн – форматі синхронного режиму не може тривати більше 20-25 хв.

Онлайн – опитування вчителів, що до необхідності у навчанні здобувачів освіти визначили, що навчати дітей доведенню теорем в умовах дистанційного навчання просто неможливо.

Крім того, опитування вказало на наступні проблеми:

1. Відсутність мотивації у навчанні доведенню теорем як в учнів так і вчителів;
2. Відсутність зрозумілого для учнів доведення у підручнику;
3. Катастрофічні освітні втрати за період дистанційного навчання, що передбачають надолуження під час уроку.
4. Відсутність необхідної теоретичної бази в учнів;
5. Відсутність теоретичної бази методики доведення теорем у вчителів;

6. Такий вид роботи розрахований на учнів з високим рівнем знань;
7. Відсутність завдань на доведення в завданнях ЗНО та НМТ;

Більшість вчителів вважають недоцільним витрачати час на дистанційному уроці для навчання учнів доведенню теорем.

На наш погляд, навчити дитину доводити теореми під час дистанційного навчання можливо, але такий вид роботи потребує значної підготовки та методичної бази не лише з математики, а й значний рівень цифрової компетентності вчителя.

Навчання теореми дистанційно може бути ефективним, якщо використовувати правильну методику. Нами виділено кілька кроків для навчання теореми дистанційно:

- Організація віртуального класу: використання платформ для відеоконференцій, онлайн-дошки, чати, інші інструменти для створення віртуального класу, де учні можуть взаємодіяти з вчителем та одне з одним.
- Чіткі інструкції: давати інструкції чітко з повним поясненням.
- Відеоуроки: записати короткі відеоуроки, в яких вчитель пояснює матеріал з доведення даної теореми. Учні можуть переглядати їх в зручний для них час.
- Запропонувати інтерактивні завдання для закріплення вже опрацьованої теми..
- Віддалена підтримка: визначити час, коли учні можуть звертатися до вчителя з питаннями або запитами на допомогу. Використовувати електронну пошту, чати або відеоконференції для спілкування.
- Доступ до ресурсів: забезпечити учням доступ до необхідних навчальних ресурсів, включаючи підручники, статті, відео та інше.

Висновки до розділу 2

У другому розділі здійснено логіко-математичний аналіз теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», проведено аналіз типової освітньої програми з геометрії 7 класу. Досліджено методику введення нових понять та способів діяльності з теми дослідження.

Нами проведено аналіз теорем планіметрії, які пропонуються у діючих і рекомендованих МОН підручниках шкільного курсу планіметрії різних авторів:

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимирова Н.Г. «Геометрія» 7 кл. для загальноосвітніх шкіл, 2015 р.
2. Істер О.С. «Геометрія» 7 кл., для загальноосвітніх шкіл, 2015 р.
3. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. «Геометрія» 7 кл., для загальноосвітніх шкіл, 2015 р.

На основі порівняльного аналізу, визначено, що кожен підручник відрізняється кількістю поданих теорем та методикою доведення. За структурою, теореми що представлені у підручниках поділяються на прямі та обернені. Найбільш використовуваними методами доведення є синтетичний, аналітичний, аналітико-синтетичний та метод доведення від супротивного.

Для подальшого дослідження у роботі обрано підручник автора Істер О.С.

У ході дослідження визначено методичні особливості доведення теорем теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників».

Для визначення особливостей доведення теорем під час дистанційного навчання, опрацьовано вимоги Санітарного регламенту що до тривалості уроку в онлайн форматі у 7 класі. Проведене опитування вчителів показало, що 60% вчителів вважають недоцільним проведення етапу доведення під час дистанційного навчання, адже за тривалістю цей етап роботи у 7 класі займає 10-20 хв, тоді як урок синхронному режимі триває 20-25 хв.

В другому розділі виділено методичні прийоми, що дозволять вчителям використовувати етап доведення в асинхронному режимі.

ВИСНОВКИ

Навчання доведенню теорем геометрії – це одне з ключових завдань шкільного курсу геометрії, яке традиційно пов’язане з формуванням умінь доводити істинність тверджень та правильність рішень, що приймаються за допомогою логічних висновків дедуктивного характеру. Доведення теорем розвиває критичне та логічне мислення учнів, активізує процеси розумової діяльності, розвиває вміння робити висновки.

Завданням даної роботи було провести аналіз сучасної науково-методичної літератури та дослідити теоретичне підґрунтя доведення теорем шкільного курсу геометрії. У ході дослідження визначено зміст поняття «теорема», визначено структурні елементи теорем, опрацьовано наступні класифікації теорем: за областю дослідження в математиці; за структурою; за змістом.

Для ефективного процесу доведення теореми одним з головних завдань є вибір найоптимальнішого методу доведення. В роботі досліджено різні методи доведення, визначено їх переваги та недоліки та процеси компенсації недоліків, що допоможуть педагогам на етапі роботи з теоремою. Для наочності проведено опитування серед вчителів, що до найбільш оптимального методу, який найчастіше застосовують у педагогічній практиці. За результатами опитування найбільш часто використовуваними є аналітичний та аналітико-синтатичний метод.

У другому завданні було проаналізовано психолого-педагогічну літературу з проблеми дослідження. Визначено, що етапи роботи з теоремами та їх доведенням в більшій мірі залежать від вікових та психолого – пізнавальних можливостей учнів на різних етапах навчання. Визначено особливості пізнавальної діяльності у підлітковому віці, адже саме в даний період відбувається знайомство учнів з поняттям «теорема», та юнацтва, коли учні мають самостійно проводити дослідження твердження, спростовувати або доводити його.

У ході виконання третього завдання проведено дослідження освітньої програми з геометрії 7 класу на введення нових понять та способів діяльності; проведено порівняльний аналіз підручників геометрії різних авторів; проведено логіко-математичний аналіз теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», визначено кількість теорем та наслідків з них.

Для виконання четвертого завдання кваліфікаційної роботи обрано підручник авторства Істер О.С. Визначено основні методичні особливості доведення теорем теми. Розроблено та опрацьовано прийоми для роботи з теоремами теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників».

У межах п’ятого завдання нами проаналізовано Санітарний регламент, де чітко сформульовані вимоги до тривалості онлайн-уроків у синхронному режимі. Так, проведене опитування показало, що тривалість етапу доведення у 7 класі триває 10-20 хв, тоді як урок в синхронному режимі не повинен перевищувати 25 хв. Дані часові обмеження роблять процес доведення теорем неможливим та обтяжливим для педагогів. Тому нами було розроблено основні правила-прийоми роботи з теоремами під час дистанційного навчання.

Таким чином, поставлені завдання виконані в повному обсязі, мета дослідження досягнута.

Результати даного кваліфікаційного дослідження можуть бути використані вчителями для підготовки до уроків, що включають етап доведення теорем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амброзяк О. В. Деякі аспекти формування математичних понять. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. пр. Кривий Ріг, 2012. Т1. С. 3-8

2. Бевз Г.П. Геометрія трикутника : навч.-метод. посіб. для загально-освіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2005. 120 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 191 с.

4. Беседін Б. Б., Смоляков О. В. Використання наочності на уроках математики. Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ. 2017. №7. С. 103–109.

5. Богатинська Н. В., Голубєва С. Ф. Узагальнення й систематизація − джерело знань учнів. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103−107.

6. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184–189.

7. Бурда М.І, Тарасенкова Н.А. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

8. Гірлін С. К. Наочні методи доведення теорем. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. 2007. № 28. С. 140–145.

9. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: https://nus.org.ua/wpcontent/uploads/2019/06/standart-1206.pdf (Дата звернення: 04.04.2023)

10. Іванова С. В., Іванова О. В. Методичні особливості навчання учнів загальноосвітніх шкіл доведенню геометричних тверджень з урахуванням вимог ЗНО. Актуальні проблеми методики навчання математики : матеріали регіон. наук.-практ. конф. Одеса, 14-15 травня 2021р. Одеса : Наука і техніка, 2021. С. 26–31.

11. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Київ: Генеза. 2015.180 с.

12. Колчук Т.В. Стан та проблеми впровадження дистанційного навчання в школах України. Тетяна Колчук: теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. пр. Кривий Ріг. Випуск X. 2012. с.133-139.

13. Крамаренко Т. Г., Корольський В. В., Семеріков С. О., Шокалюк С. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. с.87 - 93.

14. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. Книга для вчителя. К.: Абрис, 1994. 464 с.

15. Лебедєва Н. Г., Джурелюк О. Т., Самойленко Д. О. Основи психології і педагогіки: Консп. лекц. Алчевськ : ДонДТУ, 2009. 174 с.

16. Лов’янова І. В. Дидактичні основи навчання математики. – Кривий Ріг: КДПУ – 2009. 185 с

17. Лов’янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до державної атестації. – Кривий Ріг: ДВНЗ «Криворізький державний педагогічний університет». 2016. 124 с.

18. Лов’янова І.В., Вибрані методи і прийоми розв’язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 10 клас / І. В. Лов’янова; за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. – 2014. – 64 с.

19. Мерзляк А.Г. Геометрія : підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної серед. Освіти. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге видання, перероблене. Х. : Гімназія, 2021. 224 с.

20. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2015. 208 с

21. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni programi/navchalni-programi-5-9-klas (Дата звернення: 10.10.2023)

22. Національний мультипредметний тест ЗНО онлайн 2022 року. URL: https://zno.osvita.ua/multitest/507/ (Дата звернення: 06.07.2023)

23. Національний мультипредметний тест ЗНО онлайн для вчителів математики 2023 року. URL: https://zno.osvita.ua/for_teachers/565/ (Дата звернення: 08.11.2023)

24. Нєдялкова К. В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.

25. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. 293с.

26. Раков С.А. Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп’ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії/ С.А.Раков В. П. Горох, К. О. Осенков: науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова - 2012. – Вип. 12 (19). С. 16-29.

27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів : підручник. Київ : Зодіак - ЕКО, 2006. 512 с.

28. Фокіна В.І. Розвиток в учнів пізнавального інтересу під час вивчення геометрії *Математика в школах України*. – 2014. –№13. – С. 17.

29. Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. В.О. Швець, А.В. Прус. – Житомир: Рута, 2011. 388 с.

30. Іванова С.В. Шляхи вдосконалення методики навчання учнів доводити математичні твердження. 2021р . URL:

http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/11693/1/Ivanova%2C%20Svitlana%20Volodymyrivna%202021.pdf (Дата звернення: 10.10.2023)

31. T. Buzan. Mind map mastery: The complete guide to learning and using the most powerful thinking tool in the universe. Watkins Media Limited, 2018.

32. S. Ivanova, L. Dimitrov, V. Ivanov and G. Naleva, "An Experiment on the Joint use of the Heuristic and Project Methods at the University," 2019 II International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech), Sofia, Bulgaria, 2019, pp. 1–5

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда

1. Припустимо, що висновок теореми істинний.

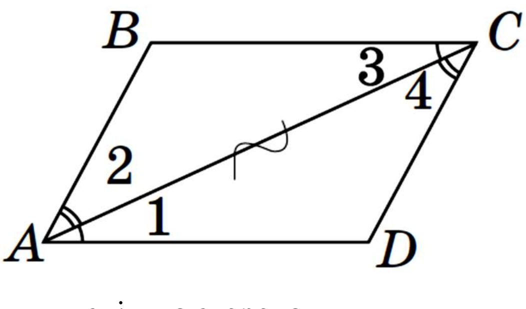
2. Виведемо з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Впевнимося, що отримані висновки є або очевидною, або раніше встановленою істинною.

4. Обравши отриманий істинний висновок за початкове твердження, проводимо міркування у зворотному напрямку і переходимо, якщо це можливо до висновку про істинність вимоги теореми.

Таблиця А.1.1

Приклад доведення теореми синтетичним методом

Теорема	Якщо в чотирикутнику дві сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник – паралелограм.
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Синтетичний метод
Основна ідея доведення	Властивість сторін паралелограма
Етапи доведення	Нехай в чотирикутнику АВСД АВ = СД і АВ∥ СД. 1) Проведемо діагональ АС, що розділить чотирикутник на два трикутники АСД і АВС.  2) Якщо АВ∥ СД, АС – січна, то $\angle 1 = \angle 3$, (як внутрішні різносторонні). 3) Розглянемо утворені трикутники $ABC\ і\ CDA$: $AC -$ спільна сторона. Якщо $\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$, АВ = СД (за умовою). 4) Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за 2-ю ознакою рівності трикутників. То, $\angle 2 = \angle 4$ (в рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути). 5) Так як $\angle 2 = \angle 4$, АС – січна, то АД∥ ВС. 6) В даному чотирикутнику протилежні сторони попарно паралельні, отже АВСД – паралелограм.

ДОДАТОК Б

Правило-орієнтир аналітичного методу доведення

1. Задати запитання: із якого раніше відомого речення необхідно слідує заключення твердження, яке необхідно довести? Іншими словами знайти доведене раніше твердження (або аксіому), якої достатньо, щоб вивести заключення твердження, що доводиться.

2. Якщо такого відомого твердження знайти не вдається, то шукати інше твердження, поки ще не доведене, із якого необхідно слідує заключення твердження, яке необхідно довести.

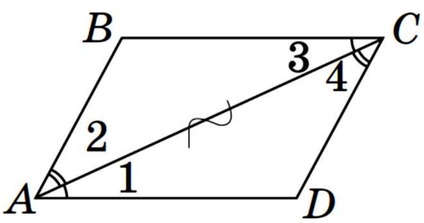
3. Потім шукаємо наступне твердження, із якого б необхідно слідувало попереднє, і так до тих пір поки не знайдемо таке твердження, яке безпосередньо слідує із умови теореми.

4. Робимо висновок, що дане твердження доведене, оскільки весь ланцюжок достатніх умов для виконання заключення задовольняється в силу його умови.

Таблиця Б.1.1

Приклад доведення теореми аналітичним методом

<table>
<tr><td>Теорема</td><td>Якщо в чотирикутнику дві сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник – паралелограм.</td></tr>
<tr><td>Форма доведення</td><td>Дедуктивний умовивід</td></tr>
<tr><td>Вид доведення</td><td>Пряме доведення</td></tr>
<tr><td>Метод доведення</td><td>Аналітичний метод</td></tr>
<tr><td>Основна ідея доведення</td><td>Властивість сторін паралелограма</td></tr>
<tr><td>Етапи доведення</td><td>Щоб довести, що ABCD – паралелограм, достатньо довести, що АД∥ ВС та АВ∥ СД.



1) Так, як AB∥ СД паралельні за умовою, доведемо паралельність сторін AD і BC. Щоб довести, що $\angle 2 = \angle 4$. Достатньо довести, що $\Delta ABC = \Delta CDA.$

2) Щоб довести що $\Delta ABC = \Delta CDA,$ треба довести що $\angle 1 = \angle 3$ і AB=CD (а це дано за умовою).
$\angle 1 = \angle 3$, якщо АД∥ ВС (а це дано за умовою).</td></tr>
</table>

ДОДАТОК В

Правило-орієнтир методу доведення від супротивного

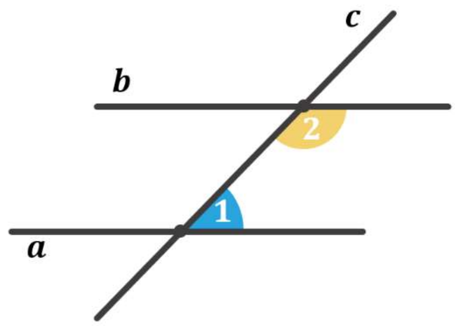
1. Припустимо протилежне тому, що треба довести.

2. Користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше теоремами, шляхом міркувань приводимо до висновку, який суперечить або умові, або доведеному раніше, або припущенню.

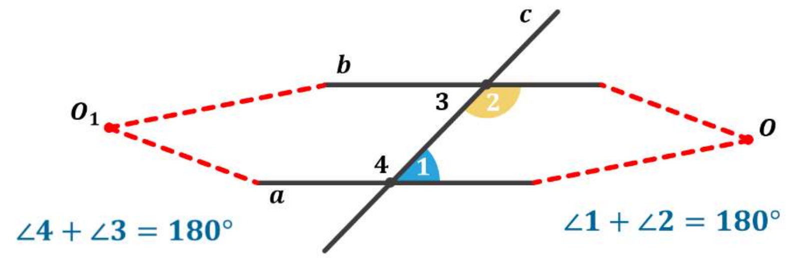
3. Робимо висновок, що припущення не вірне, а значить вірним є висновок твердження, що доводиться.

Таблиця В.1.1

Доведення теореми методом від супротивного

Теорема	Якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Метод від супротивного
Основна ідея доведення	Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.
Етапи доведення	1) a і b – прямі; c – січна; $\angle 1$ і $\angle 2$ – внутрішні односторонні; $\angle 1+\angle 2=180°$  2)Припустимо, що дані прямі перетинаються з того боку, де сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Продовж. табл.В.1.1

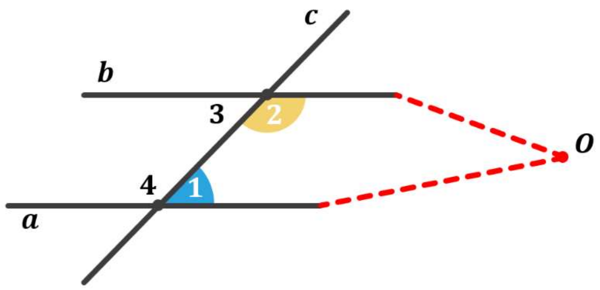


3) $\angle 1$ і $\angle 4$ та $\angle 2$ і $\angle 3$ – суміжні, отже:

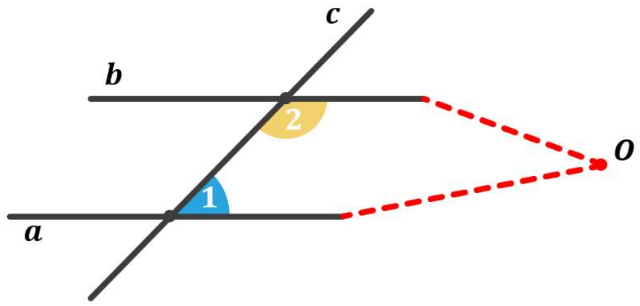
$$\angle 1 + 4 = 180° \text{ і } \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

$$\left.\begin{array}{r} \angle 1 + 4 + \angle 2 + \angle 3 = 180° + 180° \\ \angle 1 + \angle 2 = 180° \textit{ (за умовою)} \end{array}\right| \rightarrow \boldsymbol{\angle 4 + \angle 3 = 180°}$$

Ми



припустили, що прямі перетинаються з того боку, де сума внутрішніх



односторонніх кутів дорівнює 180°. Так як сума кутів 3 і 4 також 180° то прямі перетинаються і з цього боку також.

Отримали, що прямі a і b перетинаються у двох точках – O і O_1.

Припущення суперечить аксіомі: через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Дійшли суперечності, отже припущення неправильне і a∥b.

ДОДАТОК Г

Правило-орієнтир методу математичної індукції

1. Перевірити істинність твердження A(n) для n = n_0(часто n_0 = 1).

2. Припустити, що речення A(n) істинне для n = k, k≥ n_0 і довести, його істинність для n = k + 1, тобто показати, що з A(k) слідує A(k + 1).

3. Зробити висновок, що на основі принципу математичної індукції речення A(n) істинне для будь-якого натурального числа n> n_0.

Приклад доведення теореми методом математичної індукції

Умова. Якщо n – натуральне число, число то $n^2 - n$ – парне.

Доведення.

(1) Перевіримо істинність при n=1

$1^2 - 1 = 0 -$ парне число, твердження істинно правильне.

(2) Припустимо, що $n = k$ – парне, а $k^2 - k$ – парне.

Виконується:

(k+1)²- (k+1)-$(k^2 - k) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 - k^2 + k$ = 2k, а 2k – парне число, отже (k+1)²- (k+1) – також парне.

Отже, парність $n^2 - n$ доведена при n=1, з парності $k^2 - k$ доведена парність (k+1)²- (k+1).

Отже, $n^2 - n$ – парне, при будь-якому натуральному n.

ДОДАТОК Д

Результат опитування вчителів математики

1. Чи знайомі Ваші учні з поняттям "теорема" (рис. Д.1.1)?

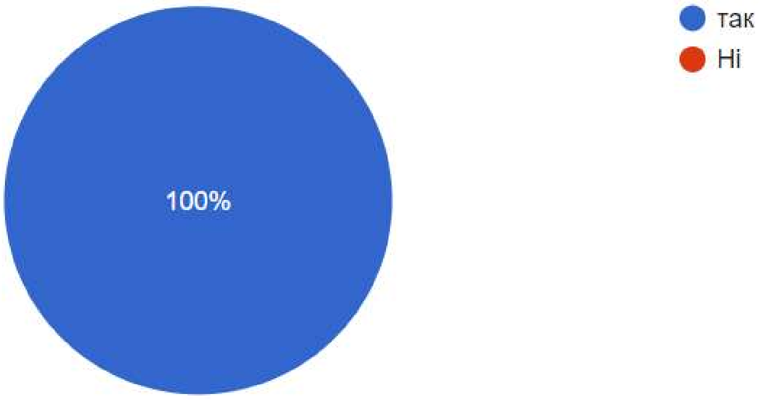


Рис.Д.1.1

2. На якому етапі вивчення геометрії Ви знайомите учнів з поняттям теорема (рис.Д.1.2)?

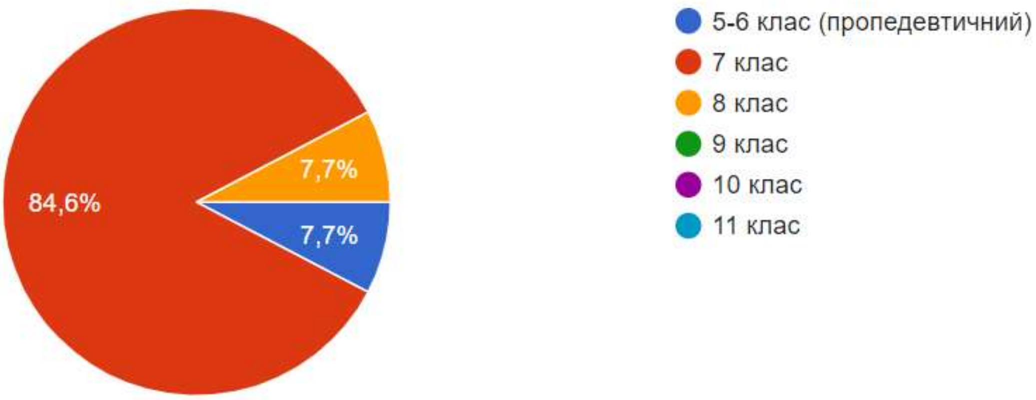


Рис.Д.1.2

3. На якому етапі використовуєте методику вивчення готових теорем та їх відтворення у курсі геометрії (рис.Д.1.3)?

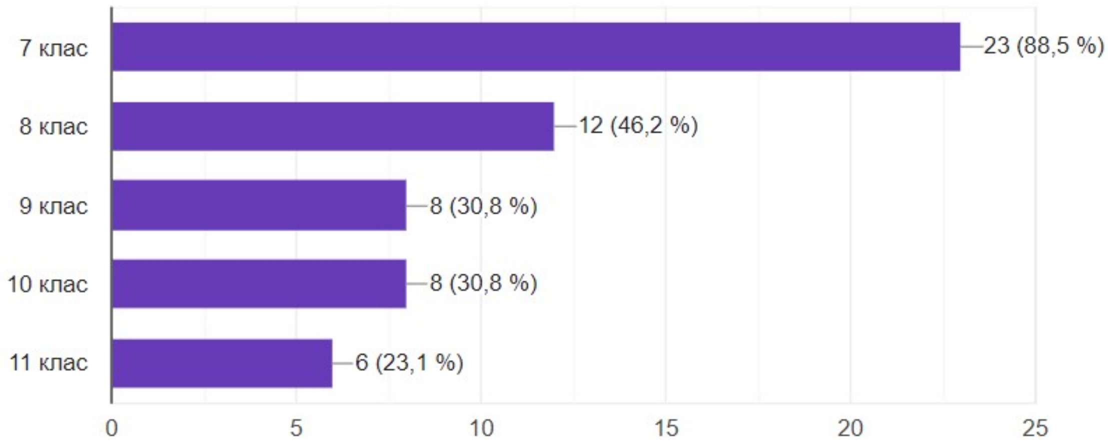


Рис.Д.1.3

4. Чи зрозумілі дітям доведення теорем, подані в підручнику (рис.Д.1.4)?

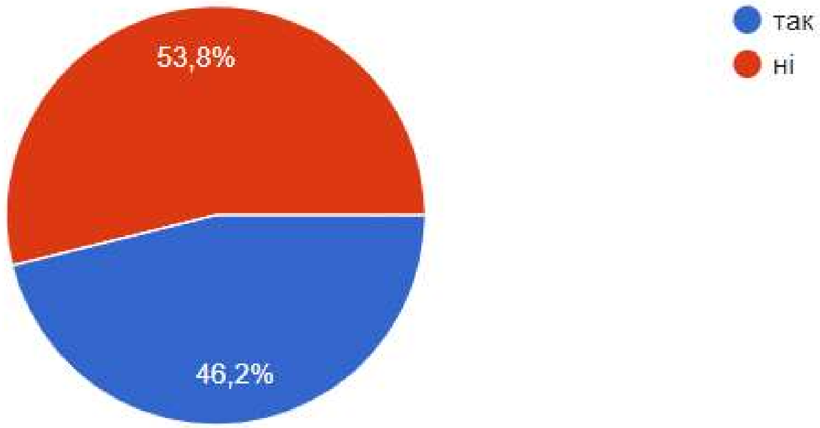


Рис.Д.1.4

5. На якому етапі починаєте використовувати методику самостійного доведення за поданим зразком (рис.Д.1.5)?

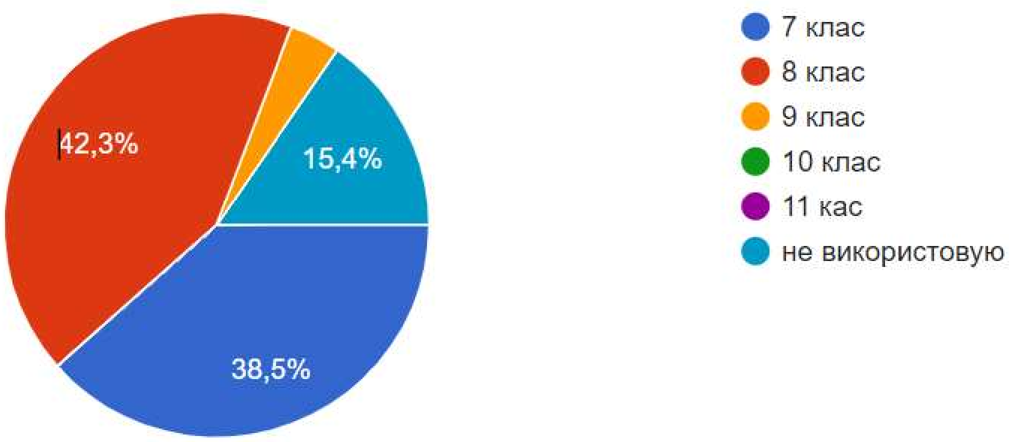


Рис.Д.1.5

6. На якому етапі починаєте використовувати методику самостійного пошуку доведення за вказаним вчителем методом (рис.Д.1.6)?

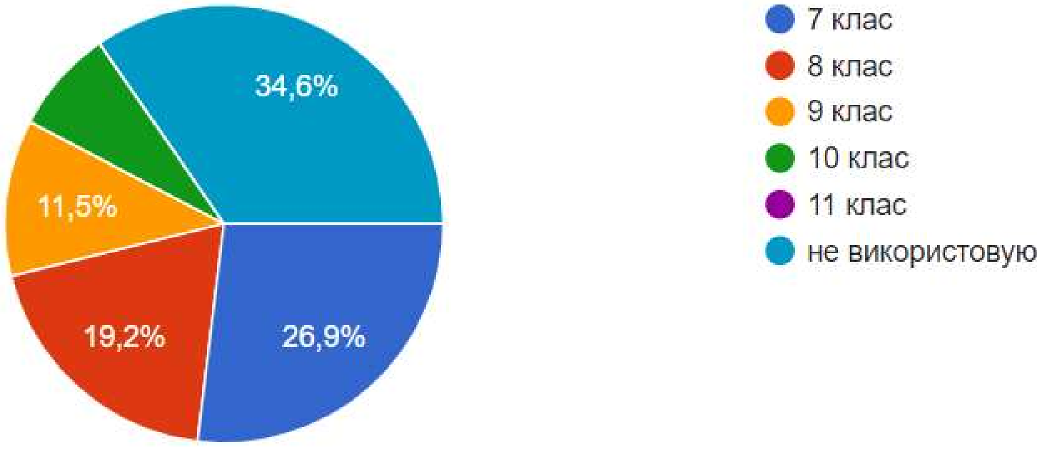


Рис.Д.1.6

7. На якому етапі починаєте використовувати самостійний пошук та доведення теореми учнями (рис.Д.1.7)?

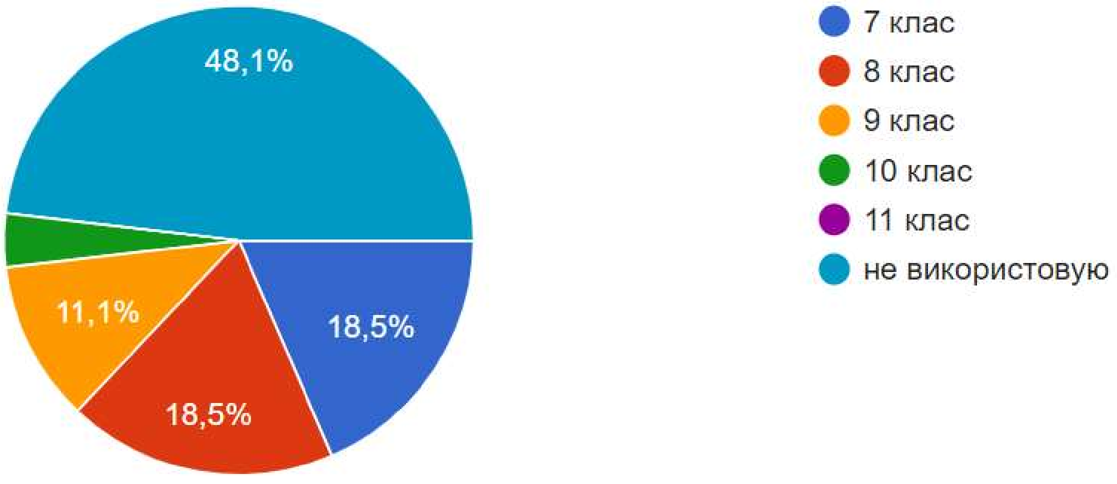


Рис.Д.1.7

8. Скільки часу на уроці у Вас займає доведення теореми у 7-9 класах (рис.Д.1.8)?

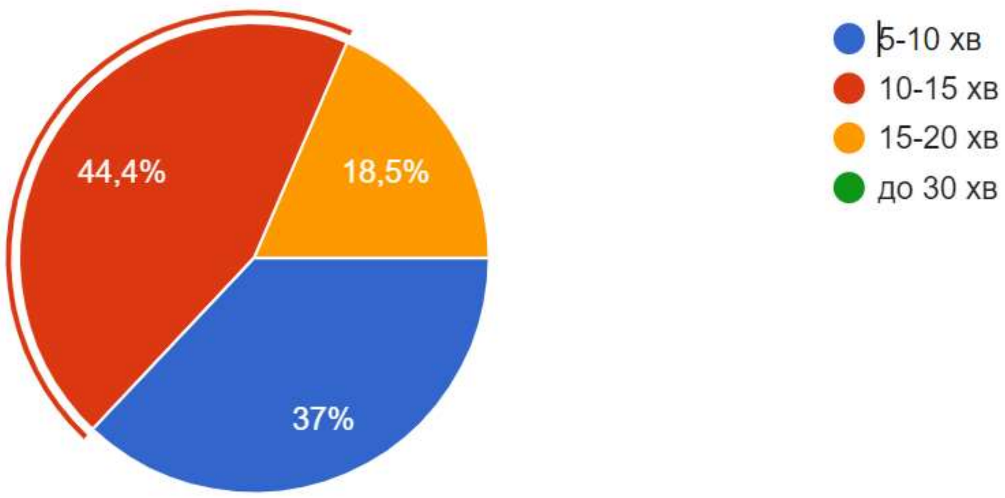


Рис.Д.1.8

9. Скільки часу на уроці у Вас займає доведення теореми у 10-11 класах (рис.Д.1.9)?

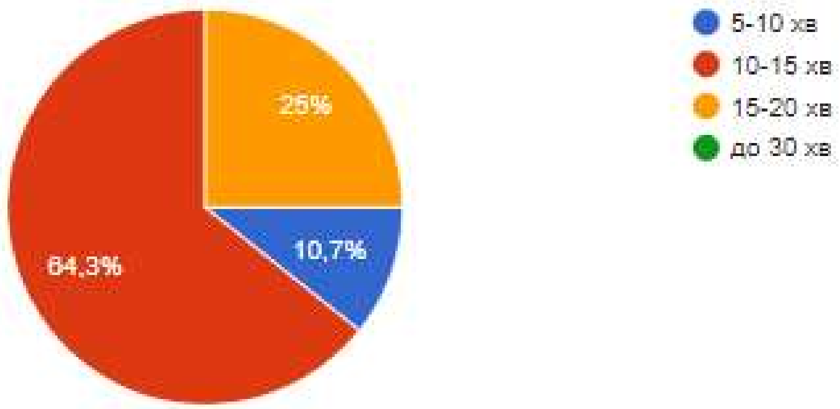


Рис.Д.1.9

10. Якими методами доведення теореми Ви користуєтесь найчастіше (рис.Д.1.10)?

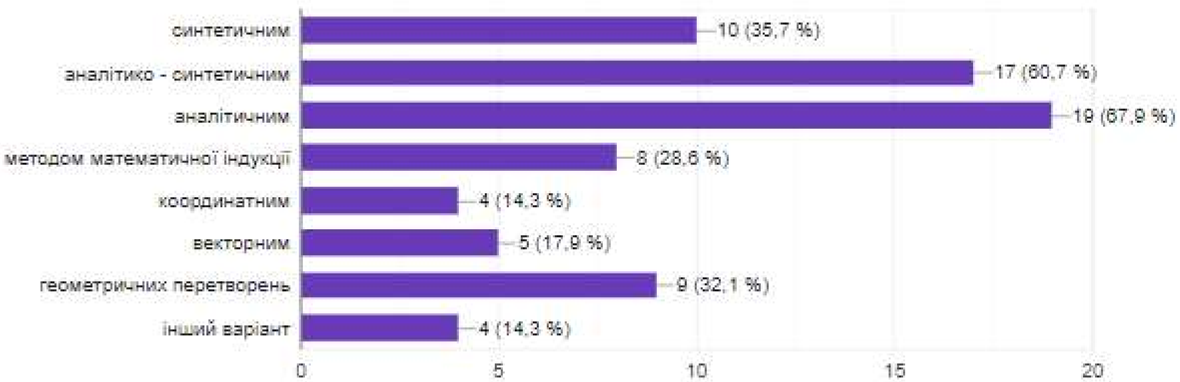


Рис.Д.1.10

11. На Вашу думку, чи здатні учні 10-11 класів самостійно доводити теореми (рис.Д.1.11)?

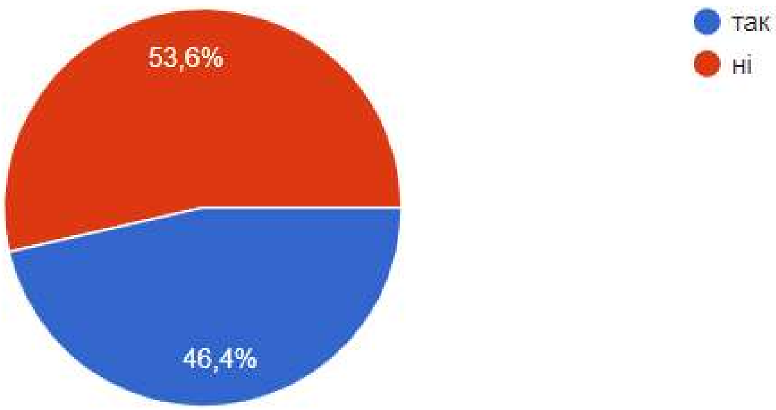


Рис.Д.1.11

12. Чи необхідно учнів вчити самостійному доведенню теорем чи раціональніше давати вже готові доведення (рис.Д.1.12)?

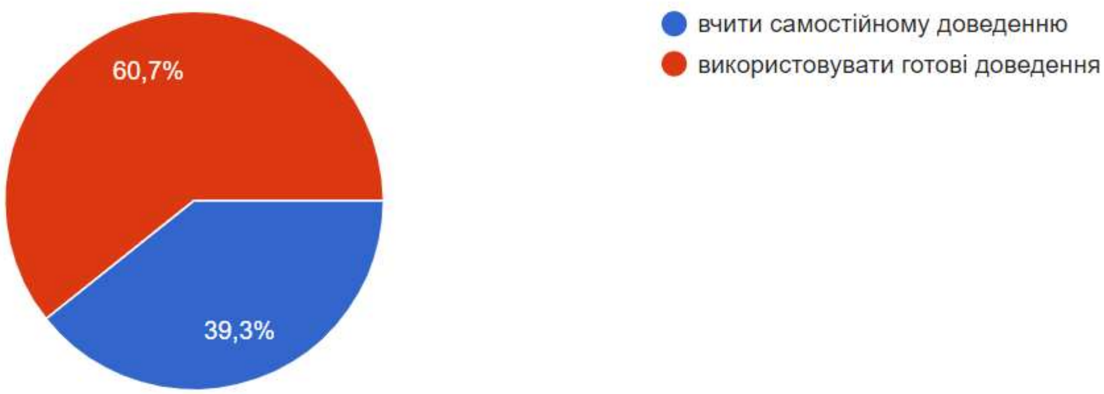


Рис.Д.1.12

ДОДАТОК Е

Таблиця Е.1.1

Логіко – математичний аналіз теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників»

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристична властивість
Трикутник	Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.	Вид: конструктивне означення; Характеристичні властивості: 1) Фігура; 2) Три точки якої не лежать на одній прямій та сполучені відрізками.
Вершини	Точки, що утворюють трикутник	Вид: описове означення; Характеристичні властивості: три точки трикутника, що не лежать на одній прямій.
Сторони трикутника	Відрізки, що сполучають вершини трикутника.	Вид: описове означення; Характеристична властивість: відрізки, що сполучають вершини трикутника.
Елементи трикутника	Три вершини, три сторони, три кути трикутника.	Вид: описове означення; Характеристична властивість: вершини, сторони та кути трикутника.
Периметр трикутника	Сума довжин усіх сторін трикутника.	Вид: конструктивне означення; Характеристична властивість: сума довжин сторін.
Гострокутні трикутники	Трикутники, у яких усі кути гострі.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: трикутник, у якого всі кути гострі.
Прямокутні трикутники	Трикутники, що мають один прямий кут.	Характеристичні властивості: трикутник, у якого один кут прямий, а два інші гострі.
Тупокутні трикутники	Трикутники, що мають один тупий кут.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: трикутник, у якого один кут тупий, а два інші гострі.

Продовж.табл.Е.1.1

Рівні геометричні фігури	Геометричні фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити при накладанні.	Вид: описове означення; Характеристичні властивості: геометричні фігури, які можна сумістити при накладанні.
Рівнобедрений трикутник	Трикутник називають рівнобедреним, якщо в нього дві рівні сторони.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: трикутник, у якого дві сторони рівні.
Різносторонній трикутник	Трикутник, у якого всі сторони мають різні довжини, називають різностороннім.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: трикутник, всі сторони якого різної довжини.
Рівносторонній трикутник	Трикутник, усі сторони якого рівні, називають рівностороннім.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: трикутник, всі сторони якого мають однакову довжину.
Медіана	Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: відрізок, проведений з вершини трикутника до протилежної сторони та ділить її навпіл.
Центроїд трикутника	Це точка перетину медіан.	Вид: описове означення; Характеристичні властивості: точка перетину всіх медіан трикутника.
Бісектриса трикутника	Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: 1) Відрізок бісектриси; 2) Відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.
Інцентр трикутника	Точка перетину бісектрис трикутника	Вид: описове означення; Характеристичні властивості: бісектриси трикутники перетинаються в одній точці.
Висота трикутника	Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.	Вид: конструктивне означення; Характеристичні властивості: 1) Перпендикуляр; 2) Відрізок, проведений з вершини трикутника до протилежної сторони.

Продовж.табл.Е.1.1

Зовнішній кут трикутника	Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.	Вид: через найближчий рід; Характеристичні властивості: кут, суміжний до кута трикутника.

Таблиця Е.1.1

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ / **Поняття**	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об’єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об’єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення
Вершини	-	265, 266, 267,	-	-	-	-
Сторони трикутника	-	266, 267, 271	274, 275	-	-	-
Елементи трикутника	-	266,267	278	-	-	-
Периметр трикутника	-	264, 268, 269, 273, 276, 277, 279	-	-	-	-

Продовж.табл.Е.1.2

Гострокутні трикутники	-	270	-	-	-	-
Прямокутні трикутники	-	275	-	-	-	-
Тупокутні трикутники	-	271	-	-	-	-
Рівні геометричні фігури	286, 287, 288, 289	283, 284, 285	292, 293, 294	-	295, 296	-
Рівнобедрений трикутник	323	-	324, 325, 326, 329, 332, 333, 334, 335, 336, 337	-	331, 338	-
Рівносторонній трикутник	-	-	327, 328	-	345, 346, 344	-
Медіана	-	-	355, 362, 364, 365, 367, 368, 369, 371	350, 351	-	363
Бісектриса трикутника	-	-	279, 356, 362, 366, 371	350, 351, 360, 375	-	363
Висота трикутника	-	-	357, 358, 362, 364, 365	350, 351, 359,	-	363
Зовнішній кут трикутника	437	-	438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 448, 449, 459, 460	447, 458, 461	-	-

Таблиця Е.1.3

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Формулювання математичного твердження Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон ’юнктивне, складене
3. Виділення роз'яснювальної частини	Довільні трикутники
4. Виділення умови	Дві сторони і кут між ними довільного трикутника (складена)
5. Виділення вимоги	Дві сторони і кут між ними довільного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні (складена, імплікативна кон'юктивна).
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Два трикутники є рівними, якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника є відповідно рівними двом сторонам і кути між ними іншого трикутника.

Таблиця Е.1.4

Формулювання математичного твердження Теорема 2 (друга ознака рівності трикутників)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон ’юнктивне, складене
3. Виділення роз'яснювальної частини	Довільні трикутники
4. Виділення умови	Сторони і прилеглі до них кути трикутників (складена).
5. Виділення вимоги	Сторона і прилеглі кути довільного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні (імплікативна кон'юктивна).
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Два довільні трикутники є рівними, якщо сторона і прилеглі кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і прилеглим кутам іншого.

Таблиця Е.1.5

Формулювання математичного твердження Теорема (властивість кутів рівнобедреного трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Будь-який трикутник
4. Виділення умови	Рівнобедрений трикутник (проста)
5. Виділення вимоги	Кути при основі рівні (проста, категорична)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Кути, протилежні бічним сторонам рівнобедреного трикутника, рівні.

Таблиця Е.1.6

Формулювання математичного твердження Наслідок (кути рівностороннього трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Будь-який трикутник
4. Виділення умови	Рівносторонній трикутник (проста)
5. Виділення вимоги	Всі кути рівні (проста, категорична)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Усі внутрішні кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60^{o}.

Таблиця Е.1.7

Формулювання математичного твердження Теорема (ознака рівнобедренного трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте

Продовж.табл.Е.1.7

3. Виділення роз'яснювальної частини	Будь-який трикутник
4. Виділення умови	Рівнобедрений трикутник (проста)
5. Виділення вимоги	Два рівні кути (проста, категорична)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутник, у якого два кути рівні є рівнобедреним, а сторона до якої вони прилягають – основа.

Таблиця Е.1.8

Формулювання математичного твердження Наслідок (ознака рівностороннього трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Будь-який трикутник
4. Виділення умови	Рівносторонній трикутник (проста)
5. Виділення вимоги	Всі кути рівні (проста, категорична)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутник, у якого два кути дорівнюють 60^o є рівностороннім.

Таблиця Е.1.9

Формулювання математичного твердження Теорема (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
7. Формулювання твердження	У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи є медіаною та висотою.
8. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон 'юнктивне, складене
9. Виділення роз'яснювальної частини	Рівнобедрений трикутник
10. Виділення умови	Бісектриса, проведена з вершини трикутника до основи
11. Виділення вимоги	Бісектриса є медіаною та висотою.
12. Формулювання твердження рівносильного даному.	В рівнобедреному трикутнику бісектриса кута, протилежного до основи трикутника, є медіаною та висотою.

Таблиця Е.1.10

Формулювання математичного твердження Наслідок (властивість медіани рівнобедреного трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
13. Формулювання твердження	У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи є бісектрисою та висотою.
14. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон ’юнктивне, складене
15. Виділення роз’яснювальної частини	Рівнобедрений трикутник
16. Виділення умови	Медіана, проведена з вершини трикутника до основи
17. Виділення вимоги	Медіана є бісектрисою та висотою.
18. Формулювання твердження рівносильного даному.	Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Таблиця Е.1.11

Формулювання математичного твердження Теорема (третя ознака рівності трикутників)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон ’юнктивне, складене
3. Виділення роз’яснювальної частини	Будь - які трикутники
4. Виділення умови	Три сторони трикутника (проста).
5. Виділення вимоги	Сторони одного трикутника відповідно рівні сторонам іншого трикутника.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутники є рівними геометричними фігурами якщо відповідні сторони рівні.

Таблиця Е.1.12

Формулювання математичного твердження Теорема (про суму кутів трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Сума кутів трикутника дорівнює 180 ^{o}.

Продовж.табл.Е.1.12

2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Який би не був многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є трикутником (проста)
5. Виділення вимоги	Сума кутів дорівнює 180 º (проста, категорична)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Сума внутрішніх кутів, будь-якого трикутника становить 180 º.

Таблиця Е.1.13

Формулювання математичного твердження Наслідок (про суму кутів трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	У будь-якому трикутнику, принаймні два кути гострі.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне кон 'юнктивне, складене
3. Виділення роз'яснювальної частини	Який би не був многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є трикутником (проста)
5. Виділення вимоги	Трикутник має принаймні два гострі кути.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутник не може мати більше ніж один прямий кут або тупий кут.

Таблиця Е.1.14

Формулювання математичного твердження Теорема (властивість зовнішнього кута трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних з ним.
2. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон 'юнктивне, складене
3. Виділення роз'яснювальної частини	Зовнішній кут трикутника
4. Виділення умови	Кут, що є суміжним до одного з кутів трикутника

Продовж.табл.Е.1.14

5. Виділення вимоги	Дорівнює сумі несуміжних з ним кутів.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних з ним.

Таблиця Е.1.15

Формулювання математичного твердження Теорема (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	У трикутнику: 1) Проти більшої сторони лежить більший кут; 2) Проти більшого кута лежить більша сторона.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Геометрична фігура - трикутник
4. Виділення умови	Будь-який трикутник
5. Виділення вимоги	Проти більшої сторони лежить більший кут; Проти більшого кута лежить більша сторона.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	У трикутнику: Проти більшої сторони лежить більший кут; Проти більшого кута лежить більша сторона.

Таблиця Е.1.16

Формулювання математичного твердження Властивість прямокутного трикутника	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Сума гострих кутів дорівнює 90 º.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Геометрична фігура - трикутник
4. Виділення умови	Прямокутний трикутник
5. Виділення вимоги	Сума гострих кутів 90 º.

Продовж.табл.Е.1.16

6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Сума кутів при гіпотенузі становить 90 º.

Таблиця Е.1.17

Формулювання математичного твердження Властивість прямокутного трикутника	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь – який з його катетів.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Геометрична фігура - трикутник
4. Виділення умови	Прямокутний трикутник
5. Виділення вимоги	Гіпотенуза – найбільша сторона.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Навпроти прямого кута прямокутного трикутника лежить найбільша сторона.

Таблиця Е.1.18

Формулювання математичного твердження Властивість прямокутного трикутника	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Катет прямокутного трикутника, що лежить навпроти кута 30 º, дорівнює половині гіпотенузи.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне кон 'юнктивне, складене
3. Виділення роз'яснювальної частини	Прямокутний трикутник
4. Виділення умови	Катет, що лежить навпроти кута 30 º
5. Виділення вимоги	Катет навпроти кута 30 º дорівнює половині гіпотенузи.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Якщо один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 30 º, то протилежний до нього катет дорівнює половині гіпотенузи і є найменшою стороною.

Таблиця Е.1.19

Формулювання математичного твердження Ознаки рівності прямокутних трикутників (за двома катетами)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'яснювальної частини	Для двох прямокутних трикутників.
4. Виділення умови	Катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого (Проста)
5. Виділення вимоги	Трикутники рівні (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Прямокутні трикутники, у яких катети відповідно дорівнюють одне одному, будуть рівними.

Таблиця Е.1.20

Формулювання математичного твердження Ознаки рівності прямокутних трикутників (за гіпотенузою і гострим кутом)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'яснювальної частини	Для двох рівних трикутників
4. Виділення умови	Гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого (Складена, кон'юнктивна)
5. Виділення вимоги	Якщо гіпотенузи і прилеглі до них кути відповідно рівні то такі трикутники рівні.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних між собою гострих кутів, то й інша пара гострих кутів — також рівні між собою кути, трикутники рівні між собою.

Таблиця Е.1.21

Формулювання математичного твердження Властивість прямокутних трикутників	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Імплікативне кон ’юнктивне, складене
3. Виділення роз’яснювальної частини	Прямокутний трикутник
4. Виділення умови	Катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого
5. Виділення вимоги	Якщо відповідні катети та гіпотенузи рівні, то прямокутні трикутники рівні між собою.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Якщо сторони прямокутного трикутника відповідно рівні сторонам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Таблиця Е.1.22

Формулювання математичного твердження Властивість прямокутних трикутників	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне кон ’юнктивне, просте
3. Виділення роз’яснювальної частини	Прямокутний трикутник
4. Виділення умови	Медіана, проведена до гіпотенузи
5. Виділення вимоги	Медіана, проведена до гіпотенузи дорівнює половині гіпотенузи.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Відрізок, що сполучає середину гіпотенузи та вершину прямого кута дорівнює половині гіпотенузи.

Таблиця Е.1.23

Формулювання математичного твердження Теорема (нерівність трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне кон ’юнктивне, просте
3. Виділення роз’яснювальної частини	Будь – який трикутник
4. Виділення умови	Будь-яка сторона трикутника
5. Виділення вимоги	Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутник існує лише тоді, коли кожна сторона менша від суми інших.

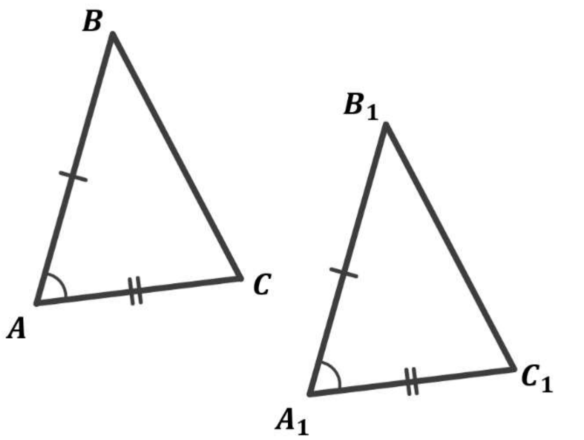
Таблиця Е.1.24

Формулювання математичного твердження Наслідок (нерівність трикутника)	
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне кон ’юнктивне, просте
3. Виділення роз’яснювальної частини	Будь – який трикутник
4. Виділення умови	Будь-яка сторона трикутника
5. Виділення вимоги	Будь-яка сторона трикутника більша від різниці двох інших.
6. Формулювання твердження рівносильного даному.	Трикутник існує лише тоді, коли кожна сторона більша від різниці двох інших.

Таблиця Е.1.25

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Теорема (перша ознака рівності трикутників)

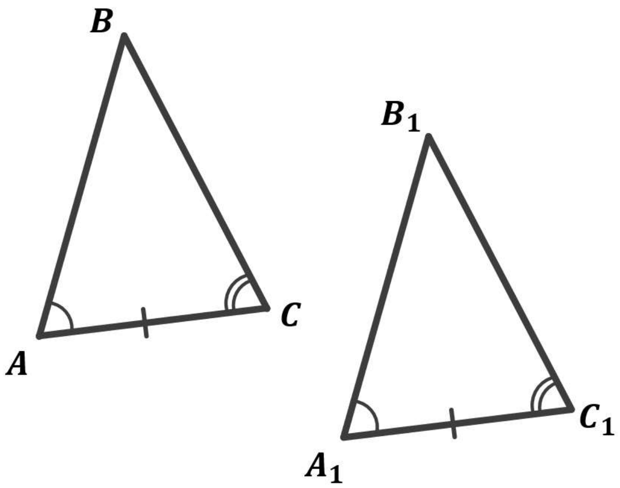
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Довести, що трикутники є рівними, якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника.
Етапи доведення	 Розглянемо трикутники $A_1B_1C_1$ *і* ABC. 1) Так як $\angle A = \angle A_1$, то трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC можна сумістити накладанням так, що вершина A_1 суміститься з вершиною A, а сторони A_1B_1 і A_1C_1 накладуться на промені AB і AC. 2) Так як кінці сторін трикутників – це їх вершини і $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то вершини B_1 і C_1 сумістяться з вершинами B і C. 3) $\angle A = \angle A_1$ $AB = A_1B_1$ $AC = A_1C_1$ Вершини $\Delta A_1B_1C_1$ сумістяться з відповідними вершинами ΔABC, отже дані трикутники є рівними, тобто $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Таблиця Е.1.26

Теорема (друга ознака рівності трикутників)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення

Продовж.табл.Е.1.26

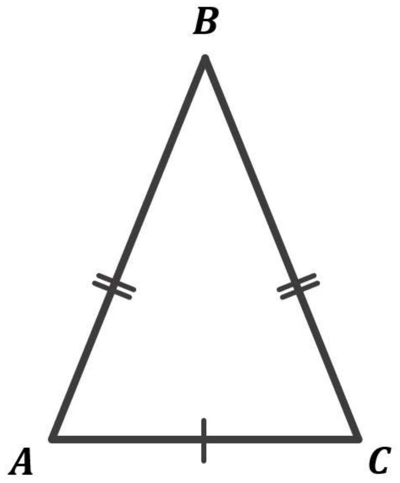
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Довести, що трикутники рівні, якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника.
Етапи доведення	 Розглянемо трикутники $A_1B_1C_1$ *і* ABC, у яких $\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$, $AC = A_1C_1$. 1) Так як $\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$, то $\Delta\mathrm{A_1B_1C_1}$ можна накласти на ΔABC, так, що вершина $\mathrm{A_1}$ збігатиметься з вершиною A, вершина $\mathrm{C_1}$ - з вершиною C, а вершини $\mathrm{B_1}$ і B лежатимуть по один бік від прямої AC. 2) Промені AB і $\mathrm{A_1B_1}$ та CB і $\mathrm{C_1B_1}$ сумістяться унаслідок рівності кутів A і $\mathrm{A_1}$ та C і $\mathrm{C_1}$. 3) Так як промені AB і $\mathrm{A_1B_1}$ та CB і $\mathrm{C_1B_1}$ суміщаються накладанням і дві прямі можуть перетинатися лише в одній точці, точки B і $\mathrm{B_1}$ збігатимуться. Отже, робимо висновки: три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника трикутники $A_1B_1C_1$. *Отже,* $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Таблиця Е.1.27

Теорема (властивість кутів рівнобедреного трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	

Продовж.табл.Е.1.27

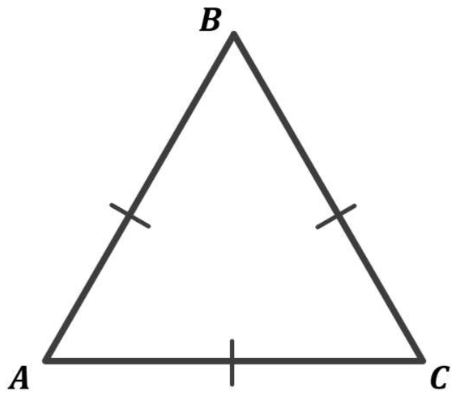
Основна ідея доведення	Визначити, чи є кути при основі рівнобедреного трикутника рівними, використовуючи ознаки рівності трикутників.
Етапи доведення	 Розглянемо трикутники ABC і CBA: $AB = CB$, $CB = BA$, ∠B – спільний. Отже, $\Delta ABC = \Delta CBA$ (за першою ознакою рівності трикутників). $\angle A = \angle C$ *(як відповідні кути рівних трикутників)*.

Таблиця Е.1.28

Наслідок з теореми, про властивість кутів рівнобедреного трикутника

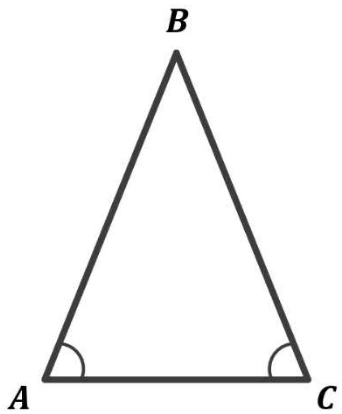
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи властивість рівнобедреного трикутника довести, що всі кути рівностороннього трикутника рівні.

Продовж.табл.Е.1.28

Етапи доведення	 Розглянемо рівносторонній трикутник ABC, у якому $AB = BC = AC$ Оскільки $AB = BC$, то його можна вважати рівнобедреним з основою АС. ΔABC – рівнобедрений, отже $\angle A = \angle C$. ΔCAB – рівнобедрений, отже $\angle C = \angle B$. Отже, $\angle A = \angle C = \angle B$.

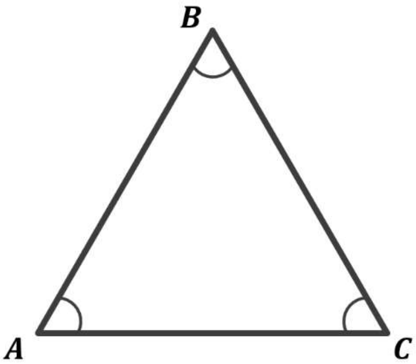
Таблиця Е.1.29

Теорема (ознака рівнобедреного трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи ознаки рівності трикутників, довести, що трикутник у якого два кути рівні є рівнобедреним.
Етапи доведення	 Розглянемо трикутники ABC і CBA: $\angle A = \angle C$, $\angle C = \angle A$ АС – спільна сторона, то $\Delta ABC = \Delta CBA$ (за другою ознакою рівності трикутників). $\Delta ABC = \Delta CBA \rightarrow AB = CB$, отже ΔABC – рівнобедрений.

Таблиця Е.1.30

Наслідок (з ознаки рівнобедреного трикутника)

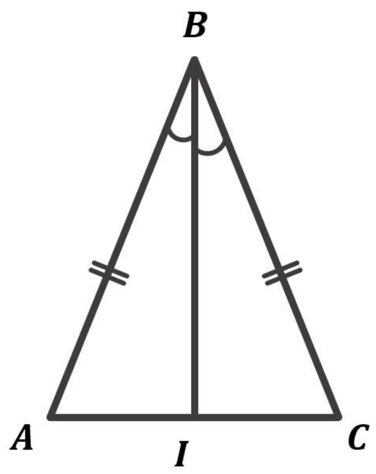
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи ознаки рівнобедреного трикутника, довести, що якщо в трикутнику всі кути рівні, то такий трикутник рівносторонній.
Етапи доведення	 Нехай, ΔABC, такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки, $\angle A = \angle B,$ AB = BC. Отже, AC = BC =AB, тобто ΔABC — рівносторонній.

Таблиця Е.1.31

Теорема (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи ознаки рівнобедреного трикутника, довести, що якщо в трикутнику всі кути рівні, то такий трикутник рівносторонній.

Продовж.табл.Е.1.31

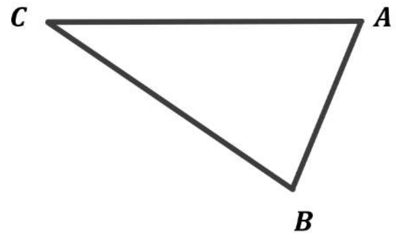
Етапи доведення	 Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AC, BI — його бісектриса. Доведемо, що BI є також медіаною і висотою. 1) Оскільки AB = BC, і тому $\angle ABI = \angle CBI$, а відрізок BI є спільною стороною трикутників ΔABI і ΔCBI, то $\Delta ABI = \Delta CBI$ (за першою ознакою рівності трикутників). 2) $\Delta ABI = \Delta CBI \rightarrow AI = CI$ як відповідні сторони рівних трикутників, отже BI – медіана. $\Delta ABI = \Delta CBI \rightarrow \angle BIA = \angle BIC$, як відповідні кути рівних трикутників $\angle BIA = \angle BIC = 90°$ То BI висота трикутника.

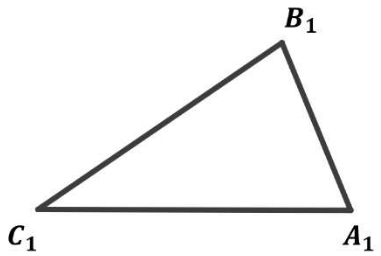
Таблиця Е.1.32

Теорема (третя ознака рівності трикутників)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи ознаки рівнобедреного трикутника, довести, що якщо в трикутників всі сторони відповідно рівні, то такі трикутники рівні.

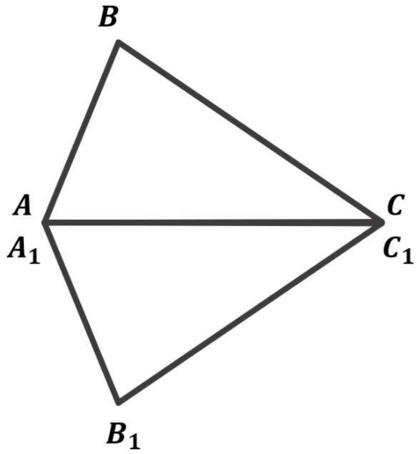
Продовж.табл.Е.1.32

<table>
<tr>
<td>Етапи доведення</td>
<td>


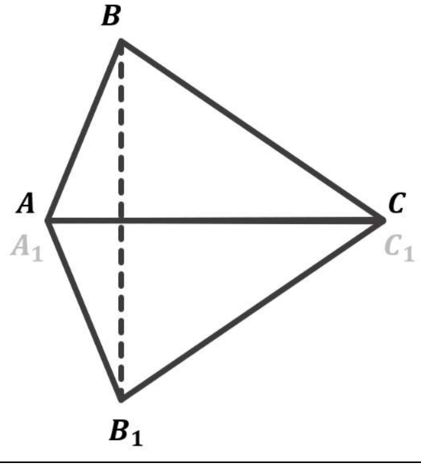


Нехай дано ΔABC *і* $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,$AC = A_1C_1$.

1) Прикладемо трикутники один до одного більшою стороною так, щоб вершини B і B_1 опинилися по різні сторони відносно прямої AC.



2) Побудуємо відрізок BB_1 і розглянемо трикутники ABB_1 і CBB_1.

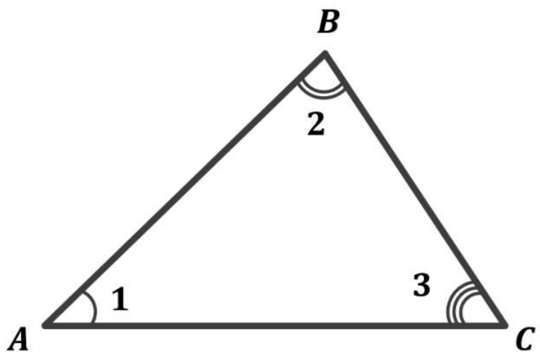
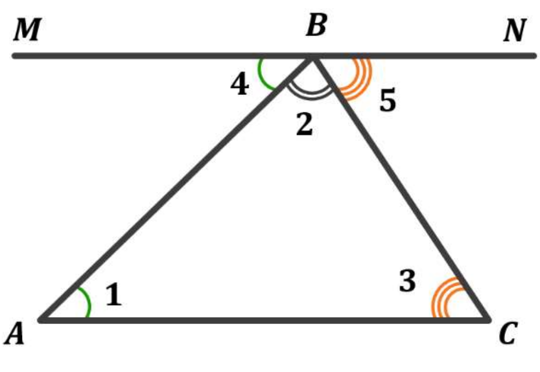


</td>
</tr>
</table>

	$AB = A_1B_1$ (*За умовою*) $BC = B_1C_1$ (*За умовою*), то ΔABB_1 і ΔCBB_1 – рівнобедрені. Тоді, $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ та $\angle CB\ _1 = \angle CB_1B$ – як кути при основі рівнобедрених трикутників. Тому, $\angle ABC = \angle AB_1C$. $\Delta ABC = \angle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників).

Таблиця Е.1.33

Теорема (про суму кутів трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод доведення
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи властивості паралельних прямих, перетнутих січною довести що сума кутів трикутника становить 180°.
Етапи доведення	Розглянемо трикутник ABC  1) Проведемо через вершину B пряму MN паралельно прямій AC. 

Продовж.табл. Е.1.33

	Кути 1 і 4 — внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AC і MN січною AB, а кути 3 і 5 — внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною AC. Тому, $\angle 1 = \angle 4$ та $\angle 3 = \angle 5$. 2) $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, так як $\angle MBN -$ розгорнутий. 3) Так, як $\angle 1 = \angle 4$, а $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. То, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. Теорему доведено.

Таблиця Е.1.34

Наслідок (з теореми про суму кутів трикутника)

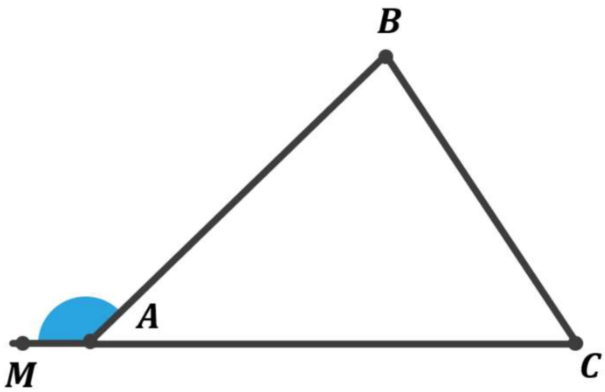
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Непряме доведення
Метод доведення	Метод від супротивного
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Методом протирічь довести, що у будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.
Етапи доведення	Припустимо, що в трикутнику лише один кут є гострим. Тоді сума двох інших кутів, що не є гострими, не менша за 180°. А отже, у сумі з гострим перевищить 180°, що суперечить доведеній теоремі. Прийшли до протиріччя, бо наше припущення є неправильним. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.

Таблиця Е.1.35

Теорема (властивість зовнішнього кута трикутника)

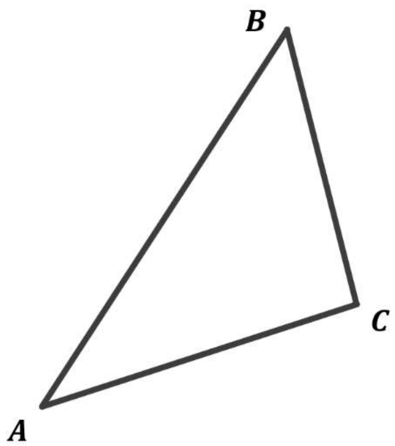
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Довести, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Продовж.табл.Е.1.35

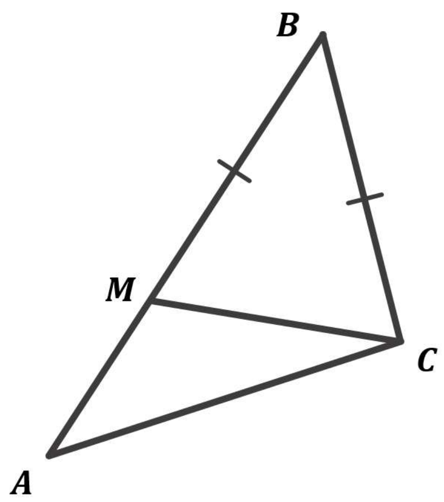
Етапи доведення	 Нехай, $\angle MAB$ – зовнішній кут ΔABC. $\angle MAB = 180° - \angle BAC$ (за теоремою про суміжні кути) $\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$(за теоремою про суму кутів трикутника). Отже, $\angle MAB = \angle B + \angle C$, що й треба було довести.

Таблиця Е.1.36

Теорема (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	1) Пряме доведення 2) Непряме доведення
Метод доведення	1) Аналітико – синтетичний метод 2) Метод від супротивного
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Доведемо твердження: *1) Проти більшої сторони лежить більший кут.* *2) Проти більшого кута лежить більша сторона*
Етапи доведення	 Нехай у трикутнику ABC AB > BC. Доведемо, що $\angle C > \angle A$.

Продовж.табл.Е.1.36

<table>
<tr><td></td><td>
1) Відкладемо на стороні BA відрізок BM, що дорівнює BC.


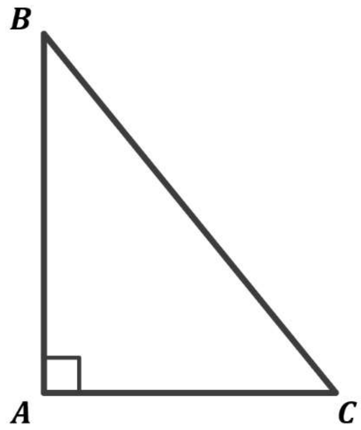
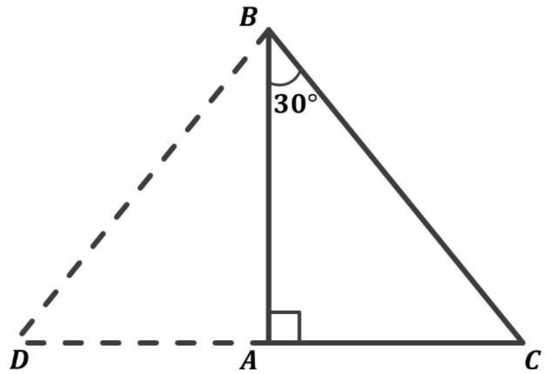
$BM = BC \rightarrow \Delta MBC$ − рівнобедрений
ΔMBC − рівнобедрений $\rightarrow \angle BMC = \angle BCM$
$\angle BMC$ – зовнішній кут $\Delta AMC \rightarrow \angle BMC > \angle A$
$\angle BCM > \angle A \rightarrow \angle C > \angle A$ − що необхідно було довести.
2) Нехай $AB = BC \rightarrow \Delta ABC$ − рівнобедрений $\rightarrow \angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{C}$ (дане твердження суперечить умові).
Нехай $AB < BC \rightarrow \angle \boldsymbol{C} < \angle \boldsymbol{A}$ (за першою частиною теореми) (дане твердження суперечить умові).
Отже, наші припущення не правильні $\rightarrow AB > BC$.
</td></tr>
</table>

Таблиця Е.1.37

Теорема (властивість прямокутного трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	За властивістю кутів прямокутного трикутника довести, що катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Продовж.табл.Е.1.37

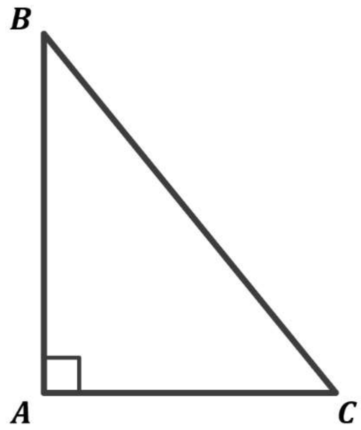
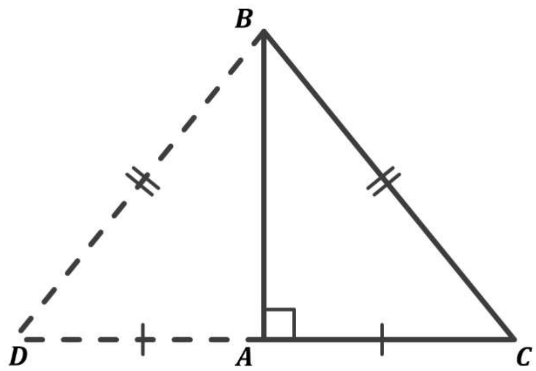
Етапи доведення	1) BAC – прямокутний трикутник, $\angle A = 90°, \angle B = 30°$.  2) Прикладемо $\Delta BAD = \Delta BAC$.  $\angle D = \angle C = 90° - 30° = 60°$ (за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника) $\angle DBC = \angle DBA + \angle CBA = 30° + 30° = 60°$ (за основною властивістю вимірювання кутів). $\angle D = \angle C = 60°$, то $\Delta BCD -$ рівносторонній $\rightarrow DC = BC$. $AC = \frac{1}{2}DC \ \rightarrow \ AC = \frac{1}{2}BC$ – що необхідно було довести.

Таблиця Е.1.38

Теорема (властивість прямокутного трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	

Продовж.табл.Е.1.38

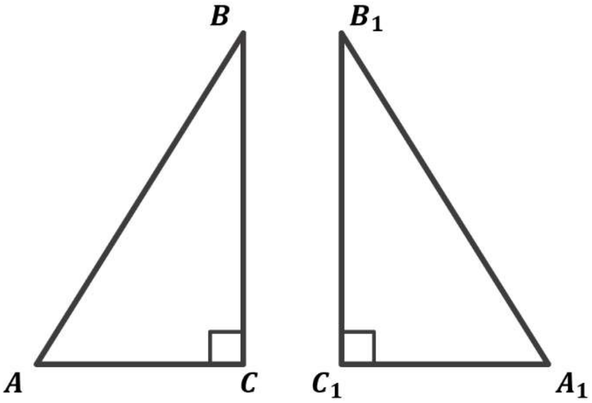
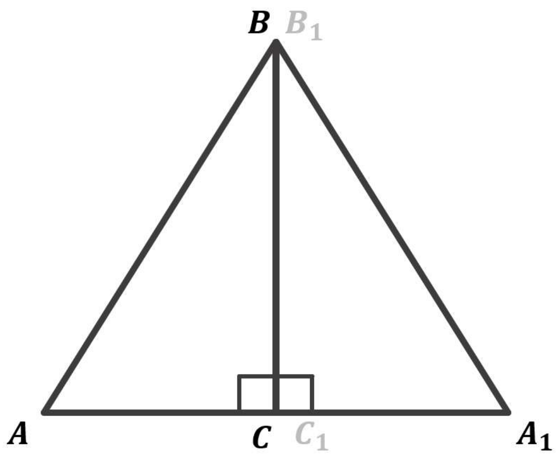
Основна ідея доведення	За властивістю кутів прямокутного трикутника довести, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
Етапи доведення	1) BAC – прямокутний трикутник, $\angle A = 90°, AC = \frac{1}{2}BC$  2) Прикладемо $\Delta BAD = \Delta BAC$.  $AC = \dfrac{1}{2}BC \ \rightarrow \ DC = BC = BD$ $DC = BC = BD \ \rightarrow \ \Delta BCD -$ рівносторонній → $\angle C = 60°$ $\angle CBA = 90° - 60° = 30°$ (за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника) Теорему доведено.

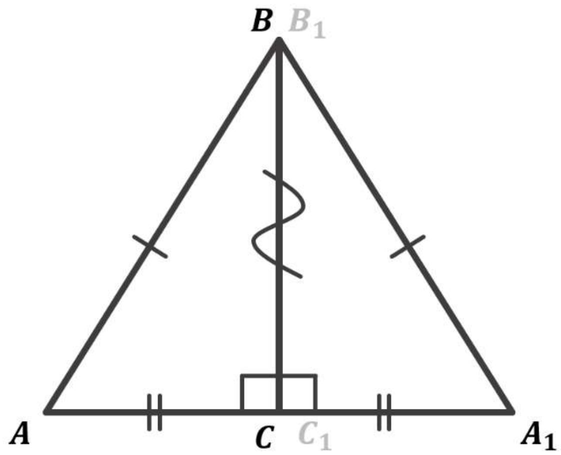
Таблиця Е.1.39

Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод

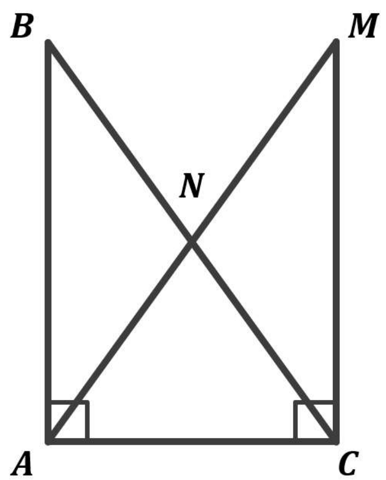
Продовж. табл.Е.1.39

Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Властивість висоти рівнобедреного трикутника, третя ознака рівності трикутників.
Етапи доведення	1) Розглянемо прямокутні трикутники BCA і $B_1C_1A_1$. $BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90°$ $BC = B_1C_1, BA = B_1A_1$  2) Прикладемо ΔABC до $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб вершина B сумістилася з вершиною B_1 а вершина C з вершиною C_1 $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90°$  $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90° \rightarrow \angle ACA_1 -$ розгорнутий $\angle AC\quad_1 -$ розгорнутий $\rightarrow$ точки A, C, A_1 лежать на одній прямій $AB = BA_1$ за побудовою $\rightarrow$ $\Delta ABA_1 -$ рівнобедрений 3) **BC** – висота, що проведена до основи рівнобедреного трикутника, отже BC – медіана. $BC -$ медіана $\rightarrow AC = CA_1$.

	 4) $AC = CA_1, BA = B_1A_1, BC -$ спільна сторона Отже, $\Delta BCA = \Delta B_1C_1A_1$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

Таблиця Е.1.40

Теорема (властивість медіани , проведеної до гіпотенузи)

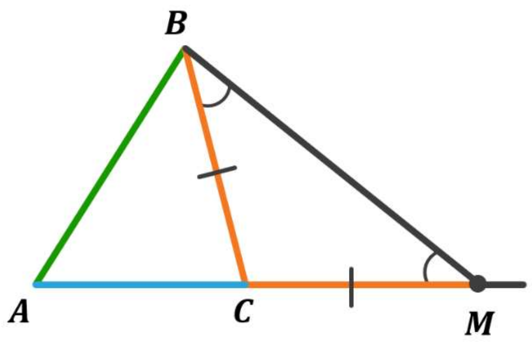
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи ознаки рівності прямокутних трикутників, властивості прямокутних та рівнобедрених трикутників, довести, що у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.
Етапи доведення	1) Побудуємо $MC = AB$ так, що $MC \perp AC$ Розглянемо ΔBCA *і* ΔMAC: ΔBCA і ΔMAC - прямокутні AC – спільна сторона $MC = AB$ за побудовою. 

Продовж.табл.Е.1.40

	1) ΔBCA і ΔMAC – прямокутні, $MC = AB$ за побудовою, AC – спільна сторона. $\Delta BCA = \Delta MAC$ (за двома катетами). $\Delta BCA = \Delta MAC \rightarrow \angle BCA = \angle MAC$ $\angle BCA = \angle MAC \rightarrow \Delta ANC$ – рівнобедрений, N=NA як бічні сторони рівнобедреного ΔANC. $CN = NA = BN \rightarrow AN$ – медіана $\rightarrow AN = \frac{1}{2}BC$. Теорему доведено

Таблиця Е.1.41

Теорема (нерівність трикутника)

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника та властивості рівнобедреного трикутника визначити, як співвідноситься кожна сторона трикутника та сума двох інших сторін.
Етапи доведення	 Розглянемо довільний ΔABC і доведемо, що його сторона, наприклад AB, менша від суми двох інших сторін AC і CB. 1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CM, що дорівнює стороні BC. Тоді ΔBCM — рівнобедрений і тому $\angle CBM = \angle CMB$. 2) ∠ABM > ∠CBM, тому ∠ABM > ∠AMB. Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то AB <AM. Але ж AM = AC + CM = AC + BC. Отже, AB < AC + BC. Аналогічно можна довести, що AC < AB + BC, BC < AB + AC. Теорему доведено.

Таблиця Е.1.42

Наслідок з теореми про нерівність трикутників

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико – синтетичний метод
Специфічний метод доведення	Алгебраїчний
Основна ідея доведення	Використовуючи теорему про нерівність трикутника визначити, як співвідноситься кожна сторона трикутника та різниця двох інших сторін.
Етапи доведення	Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AB < AC + BC$. Віднявши від обох її частин, наприклад AC, матимемо: $AB - AC < BC$. Таку дію можна виконати, використовуючи властивості нерівностей, які розглядатимуться в курсі алгебри. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$. Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо: $BC > \|AB - AC\|$.

Таблиця Е.1.43

Факти, сформульовані в задачах

Номер задачі, сторінка підручника	Факт
Ключова задача, с. 91	Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник – рівнобедрений.
Ключова задача, с.91	Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник – рівнобедрений.
Ключова задача, с. 92	Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник – рівнобедрений.
Ключова задача, с.100	Якщо медіана трикутника дорівнює половині довжини сторони, до якої проведена, то такий трикутник – прямокутний.
Ключова задача, с.101	Кожен з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.
Ключова задача, с.102	Кути при основі рівнобедреного трикутника – гострі.
Ключова задача, с.102	Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник — рівносторонній.

Продовж. табл.Е.1.43

Ключова задача, с.107	Сума зовнішніх кутів будь-якого трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.
Ключова задача, с.114	Точка, яка лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.

Додаток Ж

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Литвиненко Анастасія Русланівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

підпис