

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико – математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____ Бобилев Д.Є.

Реєстраційний № _____

« ____ » _____ 2023 р.

« ____ » _____ 2023 р.

МЕТОДИКА ВІДПРАЦЮВАННЯ З УЧНЯМИ СПОСОБІВ ДІЯЛЬНОСТІ
В НАВЧАННІ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ» В
КУРСІ АЛГЕБРИ 10 КЛАСУ ЗА ПРОГРАМОЮ БАЗОВОГО РІВНЯ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм – 22
ступінь вищої освіти «Магістр»
спеціальності
«014 Середня освіта (Математика)»
Лабунської Альони Володимирівни
Науковий керівник:
доктор педагогічних наук, професор
Лов'янова І. В.
Оцінка:
Національна шкала _____
Шкала ECTS ____ Кількість балів ____
Голова ЕК _____
Члени ЕК _____

ЗМІСТ

ЗМІСТ	2
ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ I. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ УЧНІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПОСОБІВ ДІЯЛЬНОСТІ.....	5
1.1. Формування в учнів способів діяльності у навчанні математики як методична проблема	5
1.2. Аналіз змісту теми: «Функції, їх властивості і графіки» з точки зору формування в учнів способів діяльності	13
РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ПРИЙОМИ ВІДПРАЦЮВАННЯ З УЧНЯМИ СПОСОБІВ ДІЯЛЬНОСТІ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ»	26
2.1. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Числові функції»	26
2.2. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Властивості функції»	37
2.3. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Степенева функція»	50
2.4. Використання ІКТ у формуванні способів діяльності учнів у навчанні теми: «Функції, їх властивості і графіки»	57
ВИСНОВКИ.....	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	71
ДОДАТКИ.....	75

ВСТУП

Актуальність дослідження. Вивчення функцій, їх властивостей та графіків є одним із найважливіших етапів у процесі навчання математики. Оскільки поняття «функціональна залежність» широко використовується в багатьох галузях науки і техніки, в тому числі в математиці, фізиці, інформатиці, економіці та інших галузях. Вивчення функцій дозволяє розуміти природу явищ і процесів, що відбуваються в реальному світі, і знаходити оптимальні рішення в різних сферах діяльності. А саме математична освіта є необхідною складовою успішної кар'єри, а також розвитку суспільства.

Вивчення функцій не завжди є легким та зрозумілим для учнів, оскільки вона містить досить складні математичні поняття та перетворення, що вимагає абстрактного математичного мислення. Тому важливим є пошук ефективних методів, які допоможуть учням забезпечити успішне засвоєння матеріалу.

В сучасному світі, коли розвиток технологій відбувається з неймовірною швидкістю, освіта також потребує оновлення та вдосконалення. Одним з напрямків є використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. Сучасний вчитель має безліч комп'ютерних математичних інструментів, для вирішення різноманітних задач шкільного курсу математики. Тож не підлягає сумніву, що ІКТ можуть бути використані для поліпшення розуміння концепцій та покращення навичок учнів у навчанні теми: «Функції, їх властивості і графіки».

Об'єктом дослідження є процес формування способів діяльності учнів у навчанні алгебри і початків аналізу.

Предметом дослідження є методика відпрацювання з учнями способів діяльності у навчанні теми: «Функції, їх властивості і графіки» на базовому рівні підготовки.

Мета дослідження – проаналізувати способи діяльності, які опановують учні в темі «Функції, їх властивості і графіки», розробити методичні прийоми відпрацювання з учнями цих способів діяльності та запропонувати залучення

інформаційно-комунікаційних технологій до відпрацювання учнями способів діяльності у навчанні теми.

Завдання:

1. Дослідити психолого-педагогічні підходи до формування математичної діяльності учнів.
2. Провести логіко-математичний аналіз змісту навчання теми «Функції, їх властивості і графіки» з метою виокремлення способів діяльності, які учні опанують в цій темі.
3. Розробити методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Числові функції», «Властивості функції», «Степенева функція».
4. Розробити завдання та вправи з використанням ІКТ для відпрацювання учнями способів діяльності у навчанні теми.

Методи дослідження: *теоретичні:* аналіз, порівняння і узагальнення психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження; *емпіричні:* бесіди з вчителями і учнями, аналіз досвіду роботи вчителів з навчання теми «Функції, їх властивості і графіки».

Практичне значення роботи: матеріали дослідження можуть бути використані вчителями у практичній професійній діяльності, учнями старшої школи при вивченні теми «Функції, їх властивості і графіки» та підготовці до НМТ, матеріалом можуть скористатися студенти під час опрацювання питань з методики навчання математики, у процесі виробничої педагогічної практики у закладах середньої освіти.

Структура роботи: Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатку. Повний обсяг роботи становить 79 сторінок друкованого тексту, з них 70 сторінки основного тексту. У роботі 2 додатки.

РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ УЧНІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПОСОБІВ ДІЯЛЬНОСТІ

1.1. Формування в учнів способів діяльності у навчанні математики як методична проблема

Останнім часом спостерігається значне погіршення рівня знань з математики в учнів закладів загальної середньої освіти. Підтвердженням цього є оприлюдненні результати досліджень PISA в Україні, результати складання Національного мультипредметного тесту з математики. Тому вважаємо, що проблема організації навчальної математичної діяльності наразі стає особливо актуальною, зокрема формування в учнів способів діяльності у навчанні математики.

Навчальна діяльність, яка здійснюється в процесі вивчення конкретних навчальних предметів, здобуває специфічні відтінки, як у своєму психологічному змісті, так і в зовнішній структурі. Розглянемо математичну діяльність, опанування якою відбувається у процесі навчання математики у закладах загальної середньої освіти.

Як зазначається у монографії І.В.Лов'янової [14] навчання математики має будуватися як активне навчання, основою якого є активна мислительна діяльність усіх учнів. Це обумовлюється у першу чергу тим, що свідомість засвоєння передбачає активність учнів у процесі навчання.

Як наголошує авторка дослідження, слід розрізняти два види активності у процесі навчання математики, розглядати їх відповідно активністю у широкому і вузькому розумінні [14, С. 123]. Активність у широкому розумінні у навчанні математики не відрізняється суттєво від активності учнів у процесі навчання іншим предметам. Це взагалі активна мислительна діяльність. Активність у вузькому розумінні – це специфічна активність, мислительна діяльність певної структури, властива для математики, а тому її називають «математична» діяльність.

З іншого боку висвітлюється поняття математичної діяльності – це все-таки не сама ця специфічна діяльність, хоча вони в певному сенсі подібні. Діяльність учня в процесі навчання математики – це навчальна діяльність, складовою частиною якої є пізнавальна діяльність. Тому, все-таки більш точно слід говорити про навчальну діяльність в процесі навчання математики, а не про математичну діяльність в цьому процесі.

Перед навчанням постає одна проблема – сформулювати такі види діяльності, що із самого початку містять у собі задану систему завдань і забезпечують їхнє застосування в заздалегідь передбачених межах [14].

І.В. Лов'янова [14] аналізуючи існуючі підходи до вивчення понять «навчальна діяльність щодо засвоєння математики», «математична діяльність» у світлі проблематики профільної диференціації навчання в старшій школі, вважає за можливе виділити таке поняття як «навчальна математична діяльність», тобто діяльність учнів спрямована на засвоєння навчального предмета «математика» .

Ми дотримуємося точки зору І.В. Лов'янової, яка під *навчальною математичною діяльністю* розуміє активну навчально-пізнавальну діяльність учнів в межах обраного рівня математичної підготовки з елементами творчої діяльності, властивої математику-професіоналу, спрямовану на засвоєння навчального предмета [14, с. 125].

Навчальний предмет «математика» характеризують два провідних компоненти – наукові знання і способи діяльності. В навчальному предметі «геометрія» домінує компонент «наукові знання», а в навчальному предметі «алгебра» – «наукові способи діяльності». Що відповідно робить доцільною таку структуру уроку: в геометрії половина часу уроку на теорію, половина – на розв'язування задач, а в алгебрі на теорію одну третину уроку і на розв'язування задач – дві третини. При такому підході основним і переважним елементом роботи учня в процесі вивчення математики буде розв'язування задач, тобто освоєння діяльності. Фактичні (предметні) знання стають наслідком роботи над завданнями, організованими в доцільну та ефективну систему [14].

В науковому дослідженні [33] автори під способом діяльності розуміють систему послідовних дій та операцій, виконання яких приводить до результату, що відповідає меті діяльності [33, с.75].

Опановуючи математику, учні вивчають два види способів діяльності: загальнонавчальні та предметні. Формування загальнонавчальних способів діяльності можливе не тільки на уроках математики, але й під час вивчення інших дисциплін. До загальнонавчальних способів діяльності зараховують [33, с.76]:

- 1) планування навчальної діяльності;
- 2) організацію власної навчальної діяльності;
- 3) роботу з різними джерелами інформації;
- 4) оцінювання й осмислення результатів власних дій.

До предметних способів діяльності належать загальні предметні та спеціальні предметні способи діяльності [33].

Загальні предметні способи діяльності учні опановують під час вивчення всього курсу математики, але спеціально їх не формують. Уміння їх застосовувати формується опосередковано. До загальних предметних способів діяльності належать, зокрема, правила застосування означень понять та математичних фактів.

До спеціальних предметних способів діяльності, до яких вдаються учні, зараховуємо алгоритми, правила, евристичні схеми, методи доведення тверджень, способи розв'язування задач тощо.

Розрізняють змістовий та операційний компоненти способу діяльності. До складу змістового компонента способу діяльності зараховують [33, с.76] :

- 1) вихідні знання про об'єкт та його властивості;
- 2) підсумкові знання про результати дій з об'єктом;
- 3) знання про операційний склад способу діяльності;
- 4) знання про інтелектуальні й предметно-практичні засоби, необхідні для виконання діяльності;

5) систему орієнтирів вибору певного способу діяльності з множини інших.

Операційний компонент способу діяльності виражений тими навичками й уміннями, які опановують учні в процесі певного виду діяльності, зокрема навчальної діяльності.

Успіх у засвоєнні учнями різноманітних способів діяльності на уроках математики багато в чому залежить від методів і прийомів навчання, які обирає вчитель, враховуючи при цьому специфіку теми, яку необхідно опанувати, рівень знань учнів та їх пізнавальних можливостей.

А.І. Кузьмінський та В.Л. Омеляненко [13] зазначають, що методи навчання – це упорядковані способи діяльності вчителя й учнів, спрямовані на ефективне розв'язання навчально-виховних завдань.

Існують різні класифікації методів навчання:

- за джерелом знань та характером навчально-пізнавальної діяльності;
- за рівнем проблемності знань і рівнем учіння;
- на основі цілісного підходу до процесу та ін.

У своєму дослідженні ми слідом за Н.А. Тарасенковою [33]. керуємося класифікацією в якій виділяють п'ять методів навчання:

- пояснювально-ілюстративний (розповідь, лекція, пояснення, робота з підручником, демонстрації та ін.);
- репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою);
- проблемного викладу;
- частково-пошуковий (або евристична бесіда);
- дослідницький.

Засвоєння знань учнями відбувається на трьох рівнях:

- 1) усвідомленого сприйняття і запам'ятовування, що виявляється в точності або у близькому відтворенні;
- 2) у застосуванні за зразком або в подібній ситуації;
- 3) у творчому застосуванні знань, тобто в новій незнайомій ситуації.

За такими ж рівнями Н.А. Тарасенкова характеризує засвоєння способів діяльності, відповідно до цих рівнів добирають методи навчання [33, с.67].

Суть пояснювально-ілюстративного методу навчання полягає в тому, що вчитель повідомляє учням певну інформацію за допомогою різних засобів: мовних (розповіді, пояснення), друкованих (підручники, довідкові посібники), наочних (картини, схеми, таблиці тощо), практичного показу способів діяльності (зразки способів розв'язування задач, доведень теорем, способів складання плану тощо). При цьому учні виконують діяльність, необхідну для засвоєння знань на першому рівні. Описаний метод забезпечує цілеспрямоване виконання учнями комплексу дій зі сприйняття, усвідомлення та запам'ятовування навчального матеріалу [32].

На жаль, знання, отримані внаслідок пояснювально-ілюстративного методу, не формують навичок і вмінь їх використання. Для того щоб учні досягли другого рівня засвоєння знань та набули певних навичок і вмінь, учителям необхідно організовувати навчання, спрямоване на неодноразове відтворення отриманих учнями знань та способів діяльності.

Отже, відтворення і повторення отриманих учнями знань (за допомогою вчителя) і є головною ознакою репродуктивного методу навчання. Для кращого застосування аналізованого методу методисти розробляють систему вправ, спрямованих на відпрацювання конкретних навичок і вмінь.

Крім традиційних методів навчання, у процесі вивчення математики доцільно використовувати методи інтерактивного навчання. В. Г. Моторіна [20; 21] кваліфікує інтерактивне навчання як спеціальну форму організації пізнавальної діяльності, мета якої створити комфортні умови навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність, інтелектуальну спроможність. Дослідниця зазначає, що інтерактивна форма навчання, на відміну від традиційної, спрямована на перетворення особистості учня в процесі різних способів взаємодії учнів та вчителя.

Кожний метод складається з окремих прийомів, які виступають як його складові і являють собою окремих пізнавальний акт. Характерною ознакою прийому є частковість і здатність включатися в різні методи.

Метод може збагачуватися й урізноманітнюватися за рахунок тих чи інших прийомів, що входять до його складу.

У таблиці 1.1 наведемо приклади методичних прийомів [25] та вкажемо тип уроку математики (за дидактичною метою) та його етап, на яких доцільно використати ці прийоми.

Таблиця 1.1.

Методичний прийом	Тип уроку, етап уроку математики на якому доречно використати прийом
Прийом «Різноманітні самостійні роботи»	<p>Урок застосування знань, вмінь, навичок. Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами).</p> <p>Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка глибини осмислення учнями знань та рівня їх узагальнення.</p> <p>Комбінований урок Етап: Самостійна робота на творче застосування знань, умінь та навичок.</p>
Прийом «Робота за алгоритмом»	<p>Комбінований урок Засвоєння навичок та вмінь у стандартних умовах (тренувальні вправи).</p> <p>Урок засвоєння навичок та умінь. Етап: Застосування учнями знань та вмінь у стандартних умовах із метою набуття навичок (тренувальні вправи).</p>
Прийом «Що було б, якби...»	<p>Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи).</p> <p>Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.</p>
Прийом «Змагання»	<p>Урок застосування знань, вмінь, навичок. Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами).</p> <p>Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Застосування учнями знань у змінених умовах (нестандартних).</p>

Продовження таблиці 1.1.

Приєм «Завдання по колу»	<p>Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Застосування учнями знань та вмінь у стандартних умовах із метою набуття навичок (тренувальні вправи).</p> <p>Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка виконаних завдань, їх аналіз.</p>
Приєм «Навчаючи вчуся»	<p>Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи).</p> <p>Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.</p>
Приєм «Незакінчені речення»	<p>Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи).</p> <p>Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.</p>
Приєм «Робота з алгоритмом виправлення помилок» («Знайди помилку»)	<p>Урок застосування знань, вмінь, навичок. Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами).</p> <p>Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка виконаних завдань, їх аналіз.</p> <p>Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи).</p>
Приєм «Побудова логічних схем або семантичних карт»	<p>Урок вивчення нових знань. Етап: Сприйняття та первинне усвідомлення нового матеріалу.</p> <p>Урок узагальнення та систематизації знань. Етап: Актуалізація попередніх знань учнів.</p>
Приєм «Знаємо – Хотемо дізнатися – Дізналися (ЗХД)»	<p>Урок вивчення нових знань Етап: Сприйняття та первинне усвідомлення нового матеріалу</p>
Приєм «Проблемне питання»	<p>Урок вивчення нових знань Етап: Сприйняття та первинне усвідомлення нового матеріалу</p>
Приєм «Питання – відповідь»	<p>Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка глибини осмислення учнями знань та рівня їх узагальнення.</p> <p>Урок узагальнення та систематизації знань. Етап: Актуалізація попередніх знань учнів.</p>

Продовження таблиці 1.1.

Приєм «Робота у статичних парах»	Урок застосування знань, вмінь, навичок Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами).
Приєм «Перевірка за допомогою «еталону»	Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка виконаних завдань, їх аналіз. Комбінований урок. Етап: Вивчення нового матеріалу, його сприйняття, усвідомлення та осмислення (увідні вправи).
Приєм «Виконання завдання під керівництвом вчителя»	Урок застосування знань, вмінь, навичок Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами). Комбінований урок. Етап: Засвоєння навичок та вмінь у стандартних умовах (тренувальні вправи).
Приєм «Ланцюжок»	Урок застосування знань, вмінь, навичок Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами). Комбінований урок. Етап: Засвоєння навичок та вмінь у стандартних умовах (тренувальні вправи).
Приєм «Рецензія»	Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи). Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.
Приєм «Проблемна задача»	Урок вивчення нових знань. Етап: Сприйняття та первинне усвідомлення нового матеріалу. Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи). Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.
Приєм «Вистав оцінку сам собі»	Урок перевірки знань, навичок, вмінь. Етап: Перевірка виконаних завдань, їх аналіз. Урок застосування знань, вмінь, навичок. Етап: Перевірка виконання домашнього завдання, актуалізація попередніх знань учнів, необхідних для самостійної роботи.

Продовження таблиці 1.1.

Приєм «Мозковий штурм»	Комбінований урок Етап: Засвоєння узагальнених умінь на основі застосування знань і навичок у нових нестандартних умовах (творчі вправи). Урок засвоєння навичок та умінь Етап: Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь.
Приєм «Робота парами біля дошки»	Урок застосування знань, вмінь, навичок Етап: Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами). Комбінований урок. Етап: Засвоєння навичок та вмінь у стандартних умовах (тренувальні вправи).

Вважаємо, що зазначені у таблиці 1.1 прийоми будуть сприяти більш ефективному відпрацюванню з учнями способів діяльності у навчанні теми: «Функції, їх властивості і графіки» на різних етапах уроку конкретного типу.

1.2. Аналіз змісту теми: «Функції, їх властивості і графіки» з точки зору формування в учнів способів діяльності

Для аналізу було обрано підручник Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти [18] в якому можна виділити такі переваги [8; 29]:

1. Цілісний підхід: Підручник охоплює три основних розділи математики - алгебру, початки аналізу та геометрію. Це дозволяє учням отримати комплексне розуміння математичних концепцій і їх взаємозв'язку.

2. Відповідність стандартам: Підручник розроблений з урахуванням державних стандартів і вимог для вивчення математики на певному рівні. Це допомагає вчителям та учням зосередитися на важливих темах і навичках.

3. Чітка структура: Підручник має логічну та послідовну структуру, що сприяє легкому сприйняттю матеріалу. Він починається з базових понять і поступово переходить до складніших тем.

4. Зрозумілі пояснення: Автор намагається пояснити математичні

концепції зрозуміло та доступно для учнів. Велика увага приділяється прикладам розв'язання завдань теми та встановленню зв'язку з відомими учням фактами та поняттями.

5. **Вправи на повторення:** Підручник містить вправи на повторення тем курсу алгебри минулих років навчання. Це дозволяє учителю ефективно організувати етап підготовки до вивчення нової теми і, як наслідок, учням легше опанувати нові поняття та способи діяльності.

6. **Розвиває аналітичне мислення:** Завдання та вправи у підручнику спрямовані на розвиток аналітичного мислення учнів, їх здатності аргументувати власні відповіді та розв'язувати завдання систематично.

7. **Дослідницька діяльність:** Підручник містить завдання підвищеного рівня складності - завдання на дослідження (завдання з параметрами). Таким чином підручник може допомогти учителю в організації диференціації навчання учнів та розвитку дослідницьких вмінь учнів.

8. **Підтримка вчителів:** Для вчителів підручник є зручним інструментом, що допомагає зіставляти програмний матеріал із змістом уроків, давати додаткові пояснення та рекомендації.

9. **Актуальність і сучасність:** Підручник оновлюється відповідно до сучасних вимог та нових підходів у викладанні математики.

У Таблиці 1.2. представлено фрагмент навчальної програми з математики, рівень стандарту, для учнів 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів для вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» [16].

Таблиця 1.2.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ, 15годин	
Учень/учениця: користується різними способами задання функцій; знаходить область визначення функціональних залежностей;	Числові функції та їх властивості. Способи задання функцій. Парні та непарні функції. Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня, його властивості.

Продовження таблиці 1.2.

<p>значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення; встановлює за графіком функції її основні властивості; встановлює властивості функцій; обчислює та порівнює значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені; розпізнає та схематично зображує графіки степеневих функцій; моделює реальні процеси за допомогою степеневих функцій.</p>	<p>Степінь з раціональним показником, та його властивості Степеневі функції, їхні властивості та графіки.</p>
---	--

Таблиця 1.3.

Основні поняття, факти і способи діяльності теми

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	<p>Степенева функція з натуральним показником Степенева функція з цілим показником Корінь n-го степеня Арифметичний корінь n-го степеня Степінь з раціональним показником Степенева функція з раціональним показником</p>	<p>Властивості графіка парної та непарної функції Властивості степеневі функції (з натуральним, цілим, раціональним показником) Властивості кореня n-го степеня Властивості степеня з раціональним показником</p>	<p>Знаходження області визначення, множини значень функції. Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції Побудова графіків степеневих функцій Обчислення кореня n-го степеня Застосування властивостей кореня n-го степеня Застосування властивостей степеня з раціональним показником Дослідження функцій на парність та непарність Дослідження функцій на знаходження найбільших та найменших значень</p>
Базові	<p>Функція Аргумент Область визначення та множина (область) значень функції</p>	<p>Властивості степеня з цілим показником Поняття функції, графіка та області визначення функції</p>	<p>Побудова графіків функцій Перетворення графіків функцій Знаходження нулів функцій Знаходження значень функцій за відомим аргументом</p>

Продовження таблиці 1.3.

	Проміжки зростання та спадання функції Нулі функції Проміжки знакосталості функції Парна функція Непарна функція Найбільше значення функції Найменше значення функції	Основні елементарні функції, їх графіки та властивості Властивості квадратного кореня	Дослідження властивостей функцій Розв'язування рівнянь графічним методом Виконання найпростіших перетворень графіків функцій Дослідження властивостей функцій за їх графіком, такі як визначення функції за її графіком, знаходження аргументу функції, проміжків зростання та спадання функції
--	---	--	--

Таблиця 1.4.

Орієнтовна система вправ призначених для формування способів діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують способи діяльності	Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Знаходження області визначення, множини значень функції.	-	1.26, 1.28	-
Дослідження функцій на парність та непарність	1.3-1.6, 1.7, 1.8	1.12-1.15, 1.18, 1.19	1.20, 1.21, 1.22, 1.23
Дослідження функцій на знаходження найбільших та найменших значень	1.1, 1.2	1.9, 1.10, 1.11	1.16, 1.17, 1.22, 1.23
Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції	2.1, 2.2, 3.1, 3.2	2.3-2.6, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7	2.7, 2.8
Побудова графіків степеневих функцій	-	2.9, 2.10, 3.8	2.11, 3.9

Отже, у навчанні теми «Функції їх властивості і графіки» учні мають опанувати наступні нові спеціальні предметні способи діяльності:

1. Знаходження області визначення, множини значень функції.
2. Дослідження функцій на парність та непарність.
3. Дослідження степеневих функцій на знаходження найбільших та найменших значень.
4. Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції
5. Побудова графіків степеневих функцій

Для успішного опанування новими способами діяльності учням необхідні базові способи діяльності:

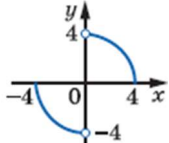
1. Знаходження значень функцій за відомим аргументом.
2. Знаходження аргументу за відомим значенням функції.
3. Знаходження області визначення та значень функцій.
4. Знаходження нулів функцій.
5. Дослідження функції на монотонність.
6. Знаходження проміжків знакосталості функції.
7. Побудова графіків функцій.
8. Перетворення графіків функцій.
9. Розв'язування рівнянь графічним методом.
10. Дослідження властивостей функцій за їх графіком, такі як визначення функції за її графіком, знаходження аргументу функції, проміжків зростання та спадання функції, нулів функції, проміжків знакосталості, дослідження функції на парність/непарність і т.д.

Використовуючи існуючі напрацювання [2; 4, 5, 7; 8; 17; 19; 22; 25], наведемо алгоритми для нових способів діяльності та надамо методичні рекомендації щодо моментів, на які треба звернути особливу увагу учнів при відпрацюванні деяких із них.

Таблиця 1.5.

<i>Алгоритм дослідження функції на парність і непарність (функція задана аналітично)</i>	ПРИКЛАД
1) Знайти область визначення функції $y = f(x)$ та переконатися, що вона симетрична відносно нуля множина; 2) Перевірити виконання умови $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$; 3) Зробити відповідний висновок про парність/непарність функції.	Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною 1) $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно нуля множина. 2) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$. 3) Функція f є непарною [18].

Таблиця 1.6.

<i>Алгоритм дослідження функції на парність /непарність (функція задана графічно):</i>	ПРИКЛАД
1) Знайти область визначення функції $y = f(x)$ та переконатися, що вона симетрична відносно нуля множина. 2) Перевірити наявність симетрії графіка функції відносно вісі ординат або симетрії відносно початку координат. 3) Зробити відповідний висновок про парність/непарність функції.	Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку:  1) $D(f) = [-4; 0) \cup (0; 4]$, то область визначення функції f симетрична відносно нуля множина. 2) Графік симетричний відносно початку координат 3) Функція f є непарною [18].

Таблиця 1.7.

<i>Алгоритм дослідження степеневих функцій на знаходження найбільших та найменших значень (функція задана аналітично)</i>	ПРИКЛАД
1) З'ясувати поведінку функції на проміжку дослідження (зростає чи спадає). 2) Порівняти значення функції при різних значеннях аргументу на заданому проміжку, врахувавши властивість зростання/спадання функції. 3) Зробити висновок про найбільше та найменше значення функції.	Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[0; 2]$ [18]. 1) На проміжку дослідження функція зростає. 2) Оскільки $0 < 2$, то і $f(0) < f(2)$. 3) $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = 0$ $\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 256$

Слід зауважити, що якщо функція задана графічно, то алгоритм буде відрізнятися лише відсутністю першого пункту.

Таблиця 1.8.

<i>Алгоритм порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції (функція задана аналітично)</i>	ПРИКЛАД
1) З'ясувати поведінку функції на проміжку дослідження (зростає чи спадає). 2) Порівняти значення функції при заданих за умовою значеннях аргументу.	Функцію задано формулою $f(x) = x^{21}$. Порівняйте: $f(1,4)$ і $f(1,8)$ [9]. 1) На проміжку, де знаходяться числа 1,4 та 1,8 функція зростає. 2) Оскільки $1,4 < 1,8$, то $f(1,4) < f(1,8)$.

Наведемо алгоритми для базових способів діяльності, керуючись джерелами [2;7; 8; 17; 19; 22; 25].

Перед розв'язуванням завдань на знаходження значень функцій за відомим значенням аргументу та знаходження аргументу за відомим значенням функції варто з учнями пригадати поняття функції та як саме пов'язанні змінні x та y . Разом з учнями можна проговорити *послідовність дій*:

➤ Якщо треба знайти значення функції при відомому значенні аргументу, то спочатку визначаємо як задана сама функція.

- При табличному заданні функції шукає у таблиці відповідний y до заданого x . При горизонтальній таблиці він буде стояти під x , при вертикальній – праворуч від нього.
- При описовому заданні функції треба виконати дії над x , які означені в описі, щоб отримати відповідний y .
- При графічному заданні функції знаходимо на графіку функції точку, що має абсцису рівну x , і визначаємо яка y цієї точки ордината, це і буде шукане значення функції.
- При аналітичному заданні функції замість x підставляємо його значення у рівність $y = f(x)$ і рахуємо відповідне значення функції.

➤ Якщо треба знайти значення аргументу при відомому значенні функції, то спочатку з'ясуємо як задана функція.

- При табличному заданні функції шукає у таблиці відповідний x до заданого y . При горизонтальній таблиці він буде стояти над y , при вертикальній – ліворуч від нього.
- При описовому заданні функції треба проаналізувати дії, які означенні в описі і знайти відповідний до цих дій x .
- При графічному заданні функції знаходимо на графіку функції точку, що має ординату рівну y , і визначаємо яка у цієї точки абсциса, це і буде шукане значення аргументу.
- При аналітичному заданні функції замість y підставляємо його значення у рівність $y = f(x)$ і розв'язуємо рівняння, коренем якого і буде шукане значення аргументу.

Перед тим як відпрацьовувати з учням завдання на знаходження області визначення функції доцільно надати їм загальні рекомендації:

1. Розгляньте вираз $f(x)$, яким задана функція та визначте можливі значення для x , при яких вираз $f(x)$ матиме зміст (не буде ділення на 0, не буде взяття кореня парного степеня з від'ємного числа, врахується значення основи степеня в степеневій функції при показниках відмінних від натурального).

2. Запишіть область визначення у вигляді інтервалу. Наприклад, якщо функція визначена для всіх x , окрім $x = 0$, то область визначення може бути записана як $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

При знаходженні області визначення за графіком функції варто шукати значення x , при яких графік існує. Точки, в яких графік не існує, тобто і функція в цей момент не існує, треба обов'язково виключити з області визначення.

Наведемо приклад:

Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x}{x^2+x}$ [23].

Область визначення запропонованої функції задана обмеженням

$x^2 + x \neq 0$, оскільки знаменник дроби не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2 + x = 0$. Маємо: $x(x + 1) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = -1$. Тоді область визначення можна задати обмеженням $x \neq 0, x \neq -1$ або записати так:

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Перед виконанням завдань на знаходження області значень функції доцільно звернути увагу учнів на такі моменти:

1. Спочатку знайдіть область визначення функції. Це може суттєво спростити розв'язання завдання, оскільки серед функцій є такі, у яких область визначення порожня множина, тоді і область значень буде одразу порожньою множиною. Якщо ж область визначення має декілька точок або одну, то область значень визначається підрахунком значень функції в кожній такій точці.

2. Врахувати значення, яких можуть набувати вирази, що входять до запису функції. Наприклад, якщо функція має корінь парного степеня з x , модуль або вираз в парному степені, то вони набувають значень більших або рівних нулю.

3. Схематичне зображення графіка функції, врахувавши його перетворення, теж може допомогти зорієнтуватися при визначенні множини значень функції.

Якщо знайти область значень функції потрібно за її графіком, то в системі координат слід шукати множину значень y , тобто знайти всі значення y , при яких графік існує. Аналогічно до області визначення: точки, в яких графік не існує, тобто і функція в цей момент не існує, треба обов'язково виключити з області значень.

Наведемо приклад:

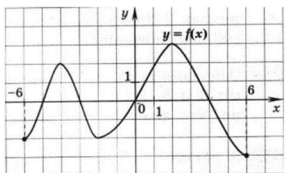
Знайти область значень функції $y = 3 - \sqrt{x}$ [9].

За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{x} \geq 0$. Тоді: $-\sqrt{x} \leq 0$. Далі додамо до обох частин цієї нерівності число 3, отримаємо: $3 - \sqrt{x} \leq 3$, тобто $y \leq 3$. Тому $E(y) = (-\infty; 3]$.

Таблиця 1.9.

<i>Алгоритм знаходження нулів функції (функція задана аналітично):</i>	ПРИКЛАД
1) Записати рівняння, ліва частина якого – функція, виражена через змінну x , а права частина – нуль (тобто рівняння $f(x) = 0$); 2) Розв'язати записане рівняння на області визначення функції. 3) Знайдені корені рівняння – нулі даної функції. Якщо рівняння коренів не має, то дана функція нулів не має.	Знайдіть нулі функції $f(x) = 7x^2 - 21x$ [1]. 1) $7x^2 - 21x = 0$ 2) $7x(x - 3) = 0$ $\begin{cases} 7x = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ 3) Отже, $x = 0$ і $x = 3$ – нулі заданої функції

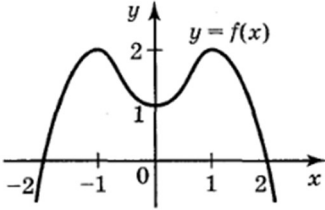
Таблиця 1.10.

<i>Алгоритм знаходження нулів функції (функція задана графічно):</i>	ПРИКЛАД
1) На графіку функції знайти точки, в який графік перетинає вісь абсцис. 2) Абсиси знайдених точок і будуть нулями функції. Якщо графік функції не перетинає вісь абсцис, то дана функція нулів не має.	Знайдіть за графіком нулі функції $y = f(x)$  1) Точки перетину з віссю абсцис: $(-5; 0), (-3; 0), (0; 0), (4; 0)$. 2) Нулі функції: $x = -5, x = -3,$ $x = 0, x = 4$ [23]

Таблиця 1.11.

<i>Алгоритм дослідження функції на монотонність (функція задана аналітично):</i>	ПРИКЛАД
1) Вибрати з області визначення функції (або її підмножині) будь-які два значення x_1 і x_2 , такі, що $x_2 > x_1$; 2) Скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$, з'ясувати (якщо це можливо), чи буде вона додатною (від'ємною), і, користуючись означенням числової нерівності, переконатися, що $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). 3) Зробити висновок про зростання або спадання функції на області визначення (або її підмножині).	Дослідіть на монотонність функцію $f(x) = 3x - 1$ [3]. 1) Нехай $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ – довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. 2) Відповідні значення функції: $f(x_1) = 3x_1 - 1$ і $f(x_2) = 3x_2 - 1$. Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 = 3(x_2 - x_1) > 0$ Тобто $f(x_2) > f(x_1)$ 3) Отже, задана функція зростає на усій області визначення.

Таблиця 1.12.

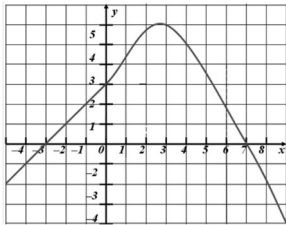
Алгоритм дослідження функції на монотонність (функція задана графічно):	ПРИКЛАД
<p>1) На графіку функції вибрати ті його частини, на яких для будь-яких двох значень x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) виконується тільки одна з двох умов: $f(x_2) > f(x_1)$ або $f(x_2) < f(x_1)$. Умовним орієнтиром для пошуку таких проміжків буде «прямування» графіка вгору або вниз.</p> <p>2) Зробити висновок про зростання або спадання функції на області визначення (або її підмножині).</p>	<p>Функція $y = f(x)$ задана графічно на проміжку $[-2; 2]$. Визначте проміжки, на яких функція зростає і спадає [11].</p>  <p>Функція зростає на проміжку $[-2; -1]$ і $[0; 1]$. Функція спадає на проміжку $[-1; 0]$ і $[1; 2]$.</p>

Таблиця 1.13.

Алгоритм знаходження проміжків знакосталості функції (функція задана аналітично):	ПРИКЛАД
<p>1) Знайти корені рівняння $f(x) = 0$. Ці корені будуть точками, де функція перетинає ось x (тобто нулями функції).</p> <p>2) Нанести корені рівняння $f(x) = 0$ на область визначення функції, одержаться інтервали, обмежені цими коренями.</p> <p>3) Для кожного інтервалу вибрати одну тестову точку та обчислити значення функції $f(x)$ в цій точці. Це значення може бути додатнім або від'ємним.</p> <p>4) Зробити відповідний висновок та записати проміжки, де функція набуває додатного або від'ємного значення.</p>	<p>Знайти проміжки знакосталості функції $y = x^2 - 6x + 9$ [11].</p> <p>1) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $(x - 3)^2 = 0$ $x - 3 = 0$ $x = 3$ – нуль функції</p> <p>2) Маємо інтервали: $(-\infty; 3)$ і $(3; +\infty)$</p> <p>3) Для інтервалу $(-\infty; 3)$ обчислимо $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ Для інтервалу $(3; +\infty)$ обчислимо $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = 1 > 0$</p> <p>4) Отже, функція набуває додатних значень при $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Від'ємних значень функція не набуває.</p>

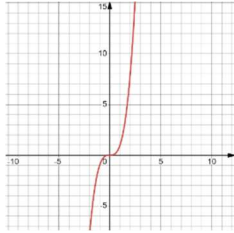
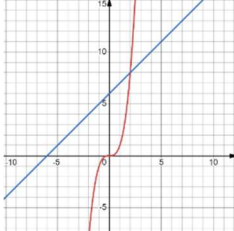
Примітка до алгоритму знаходження проміжків знакосталості функції (із таблиці 1.13): якщо функція немає нулів, то доцільно розглянути нерівності $f(x) < 0$ та $f(x) > 0$.

Таблиця 1.14.

Алгоритм знаходження проміжків знакосталості функції (функція задана графічно):	ПРИКЛАД
<ol style="list-style-type: none"> 1) Зафіксувати на графіку функції проміжки, де графік знаходиться над віссю x. Саме на них функція набуває додатного значення. 2) Зафіксувати на графіку функції проміжки, де графік знаходиться під віссю x. Саме на них функція набуває від'ємного значення. 3) Зробити відповідний висновок та записати проміжки, де функція набуває додатного або від'ємного значення. 	<p>Функція $y = f(x)$ задана графічно. Визначте проміжки знакосталості функції [23].</p>  <p>Функція набуває додатного значення при $x \in (-3; 7)$ Функція набуває від'ємного значення при $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$</p>

Побудова графіків функцій ґрунтується на знаннях графіків елементарних функцій, вмінні працювати з точками в прямокутній Декартовій системі координат та на правилах перетворень графіків функцій.

Таблиця 1.15.

Алгоритм розв'язування рівнянь графічним методом	ПРИКЛАД
<ol style="list-style-type: none"> 1) Побудувати графік функції $y = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – ліва частина рівняння. 2) В тій же системі координати побудувати графік функції $y = f_2(x)$, де $f_2(x)$ – права частина рівняння. 3) Знайти точку або точки перетину побудованих графіків функцій. 4) Абсциса (-и) знайденої точки (точок) є розв'язком (-ми) рівняння. 	<p>Розв'яжіть графічно рівняння $x^3 = x + 6$ [18]</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Побудуємо графік функції $y = x^3$  <ol style="list-style-type: none"> 2) Побудуємо графік функції $y = x + 6$  <ol style="list-style-type: none"> 3) Точка перетину графіків функцій (2; 8) 4) $x = 2$ – розв'язок рівняння

Наведені алгоритми для дослідження основних властивостей функцій доцільно скласти разом з учнями після вивчення теоретичних понять перед відпрацюванням відповідних способів діяльності. Використання таких алгоритмів до розв'язування задач сприятиме легшому формуванню способів діяльності в темі «Функції, їх властивості і графіки».

Отже, з усього вищезазначеного можна зробити висновок про актуальність та необхідність розгляду методичних прийомів відпрацювання з учнями способів діяльності у навчанні теми «Функції, їх властивості та графіки». Вважаємо за потрібне дослідити методичні прийоми формування способів діяльності, навести приклади завдань, розробити інтерактивні вправи до теми, надати методичні коментарі до вказаних розробок.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ПРИЙОМИ ВІДПРАЦЮВАННЯ З УЧНЯМИ СПОСОБІВ ДІЯЛЬНОСТІ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ»

2.1. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Числові функції»

Однією з основних моделей математики є функція, саме тому функції, їх властивості, графіки у всіх їх формах утворюють стержень шкільного курсу математики.

Поняття функції учні вивчають починаючи з 7 класу. Вони мають засвоїти такі поняття: функція, аргумент, область визначення та значень, способи задання функції, графік функції та навчитися будувати графіки функцій. Закінчивши розділ функції учні мають вивчити основні поняття теми, які дають можливість їм вивчати наступні функції у 8 та 9 класах.

В старшій школі перш ніж переходити безпосередньо до вивчення степеневих функцій учні мають повторити та розширити базові знання та вміння з теми. Для учнів вводиться поняття числової функції, яке буде використовуватись у курсі алгебри і початків аналізу. Також учні розглядають поняття області визначення, множини значень функції та їх відповідні позначення, повторюють всі способи задання функції: графічний, описовий, табличний, аналітичний [16].

До спеціальних предметних способів діяльності, до яких вдаються учні при опануванні теми «Числові функції», належать робота за створеними алгоритмами, дотримання правил, застосування різних методів доведення тверджень та способи розв'язування задач. Їх учні опановують на уроках під час роботи над темою завдяки використанню різноманітних методичних прийомів.

Розглянемо приклади методичних прийомів на відпрацювання алгоритмів діяльності задавати функції різними способами.

Приєм «Встановлення відповідності» :

Установіть відповідність між способом задання функції та його визначенням:

- | | |
|---|----------------|
| 1. Функцію задають за допомогою формули, яка дає можливість обчислити значення функції при довільному значенні аргументу, для якого вона визначена. | А. Описовий |
| 2. Відповідність задається множиною точок координатної площини, координати x і y дорівнюють відповідно аргументам x і значенням функції y в цих аргументах. | Б. Графічний |
| 3. Має вигляд таблиці, в I-му рядку вписані всі значення аргументу, в II-му рядку числа утворені за правилом $y=f(x)$. | В. Аналітичний |
| 4. Полягає в тому, що закон, за яким обчислюють y , описується словами. | Г. Табличний |

Приєм «Перевірка завдання за допомогою «еталону».

Учні по варіантам виконують завдання самостійно. Після закінчення часу на виконання завдання, вчитель виводить на мультимедійну дошку «еталон», з яким учні порівнюють свої відповіді.

1 варіант: Функцію задано формулою $y = \sqrt{x + 2}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y :

x	2		-1,75	
y		5		0,4

2 варіант: Функцію задано формулою $y = -0,5x + 3$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y :

x	-4		1,2	
y		2		-5

Приєм «Так-Ні».

Суть прийому у визначенні правильне твердження чи ні. При традиційному офлайн навчанні учням роздаються двосторонні картки, на яких буде з одного боку слово «Ні» – твердження помилкове, а з іншого боку – слово «Так» – твердження правильне. Учні показують потрібну сторону картки після демонстрації кожного графіка функції. При онлайн навчанні роль карток можуть відігравати реакції у кімнаті конференції.

Завдання: Чи є графік, наведений на рисунку 2.1., графіком функції [7]?

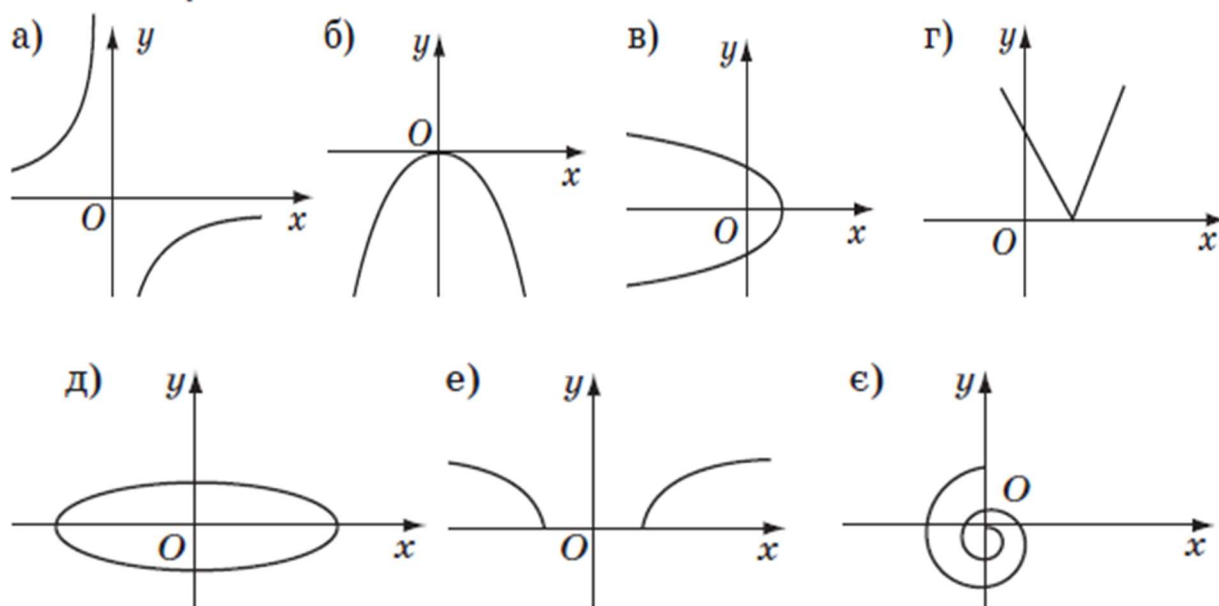


Рис. 2.1.

Приєм «Наведення учнями своїх прикладів за новим матеріалом».
Розгляньте функцію Діріхле, проаналізуйте її задання. Придумайте власну функцію, у якої множина значень буде мати не три числа, а п'ять.

Приєм «Змагання».

Для виконання завдання учні об'єднуються у групи. Для кожної групи видається завдання і час на його виконання. По закінченню часу, група демонструє класу свої результати. Враховується не тільки правильність, а і швидкість виконання завдання.

Завдання: Функція задана графічно (Рис.2.2). Задайте її формулою, описово та побудуйте для неї таблицю.

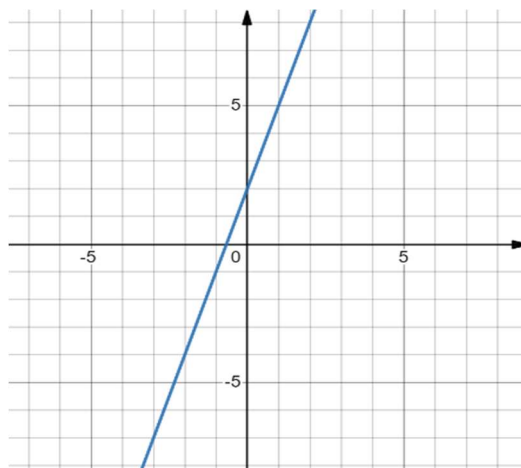


Рис.2.2.

Розглянемо приклади методичних прийомів на відпрацювання способів діяльності знаходити значення функцій при заданих значеннях аргументу та знаходити значення аргументу, за яких функція набуває даного значення.

Прийом «Робота за алгоритмом».

Учням пропонуються алгоритми на знаходження значень функцій за відомим значенням аргументу та знаходження аргументу за відомим значенням функції, у випадку задання функції аналітично.

Завдання: Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$.

- 1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$
- 2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 0; -1; -56.
- 3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 5$; $f(2) = -8$ [1].

Завдання. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{18}{x-3}$.

- 1) Знайдіть: $f(4)$; $f(0)$; $f(9)$; $f(-3)$.
- 2) Знайдіть значення x , при якому: $f(x) = 9$; $f(x) = 0,5$; $f(x) = -10$ [9].

Прийом «Робота за алгоритмом».

Учням пропонуються алгоритми на знаходження значень функцій за відомим значення аргументу та знаходження аргументу за відомим значенням функції, у випадку задання функції графічно.

Завдання: На заданому рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком (Рис. 2.3) знайдіть:

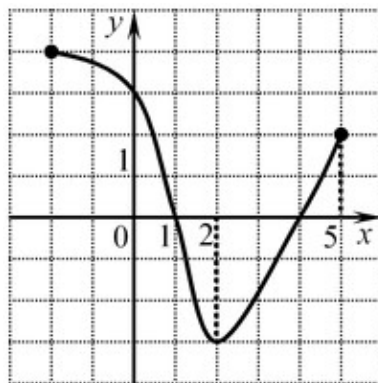


Рис. 2.3.

- 1) $f(2)$; $f(5)$, $f(0)$;
- 2) значення x , при яких $f(x) = 0$; $f(x) = 3$; $f(x) = 4$ [12].

Приєм «Встановлення відповідності».

Установіть відповідність між функцією (1–3) та її значенням у точці $x_0 = -1$ (1–4) [27].

1	$y = \sqrt{x+5}$	А	0
2	$y = x^2 + 2x$	Б	2
3	$y = x + 1$	В	-3
		Г	-1

Приєм «Навчаючи вчуся».

Учням дається непросте завдання для виконання. Ті з учнів, хто виконав правильно першим це завдання, допомагають іншим учням з його розв'язанням.

Завдання: Знайдіть значення функції:

1) $f(-x)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, якщо $f(x) = \frac{1+x}{x-1}$;

$$2) f(-1), f(2), \text{ якщо } f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{при } x < 0 \\ 2 - x^2, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$3) f(-5), f\left(\frac{1}{2}\right), f(12), \text{ якщо } \begin{cases} 2x, & \text{при } x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 1 [19]. \\ 2 - x, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Розглянемо приклади методичних прийомів на відпрацювання способів діяльності знаходження області визначення функції.

Прийом «Знайди помилку».

Учням надається розв'язане завдання. Їм треба визначити де допущено помилку і виправити її.

Завдання (з помилкою): Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 16} [4]$$

Розв'язання:

Дана функція є раціональним дробом, а тому існує при тих значення x , при яких знаменник і чисельник не дорівнюють нулю:

$$D(y): x^2 - 16 \neq 0 \text{ і } x + 3 \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 4) \cup (4; +\infty)$$

Завдання (правильне): Знайти область визначення функції:

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 16}$$

Розв'язання:

Дана функція є раціональним дробом, а тому існує при тих значення x , при яких знаменник не дорівнюють нулю:

$$D(y): x^2 - 16 \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty) [25].$$

Прийом «Різномірності завдання».

Завдання. Знайти область визначення функції:

- Початковий рівень: 1) $y = \frac{1}{x-3}$; 2) $y = \sqrt{x+5}$.
- Достатній рівень: 1) $y = \frac{5}{x^2 - 10x + 9}$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{5+x}}$.
- Високий рівень: 1) $y = \frac{\sqrt{3x+2}}{x^2 - x - 2}$; 2) $y = \frac{\sqrt[6]{x-4}}{|x|-2} + \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-6}}$ [19].

Прийом «Незакінчене речення»

Завдання: Продовжіть речення:

- 1) функція – це...
- 2) область визначення функції – це...
- 3) область визначення функції $y = \frac{x-2}{\sqrt{20-8x-x^2}} + \sqrt{x+6}$...
- 4) функція $y = \frac{2}{x^2 - 2x}$ невизначена при $x =$ [25]

Прийом «Ланцюжок».

Учні по черзі виконують завдання біля дошки з коментуванням.

Завдання: Знайти область визначення функції:

- 1) $f(x) = \frac{9}{x+4}$;
- 2) $f(x) = \frac{x-6}{4}$;
- 3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;
- 4) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x-1}}$;
- 5) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 6x - 7}$;
- 6) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x}$;
- 7) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[6]{1-x}$;
- 8) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{12+4x-x^2}}$;

$$9) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|x|-1};$$

$$10) f(x) = \sqrt{6-x} + \frac{2}{x^2-6x};$$

$$11) f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2}{x-4} \text{ [28].}$$

Прийом «Що було б, якби ...».

Завдання: Графік заданої функції зображено на рисунку 2.4. Що було б з областю визначення функції, якби графік цієї функції відобразили відносно:

- 1) вісі x
- 2) вісі y
- 3) початку координат [18]

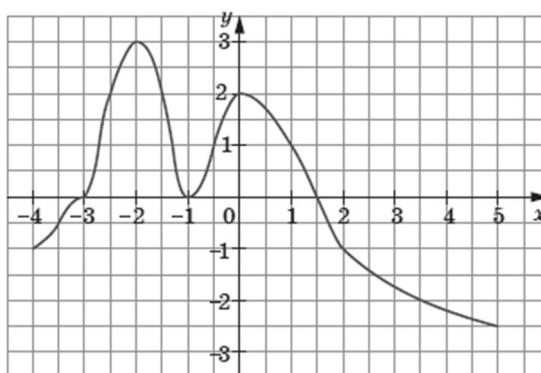


Рис. 2.4.

Розглянемо приклади методичних прийомів на відпрацювання способів діяльності знаходження множини значень функції.

Прийом «Знайди помилку».

Учням надається розв'язане завдання. Їм треба визначити де допущено помилку і виправити її.

Завдання (з помилкою): Знайти множину значень функції:

$$y = \sqrt{x} + 4 \text{ [5].}$$

Розв'язання:

Дана функція містить \sqrt{x} , який набуває на області визначення значень строго більше нуля. Оскільки до кореня додається 4, то вираз $\sqrt{x} + 4$ набуває значень більше 4.

Відповідь: $y \in (4; +\infty)$.

Завдання (правильне): Знайти множину значень функції:

$$y = \sqrt{x} + 4.$$

Розв'язання:

Дана функція містить \sqrt{x} , який набуває на області визначення значень більше або рівно нулю. Оскільки до кореня додається 4, то вираз $\sqrt{x} + 4$ набуває значень більше рівно 4.

Відповідь: $y \in [4; +\infty)$ [25].

Приєм «Робота за алгоритмом».

Учням пропонуються алгоритми на знаходження множини значень функцій, якщо функція задана аналітично.

Завдання: Знайти множину значень функції:

- 1) $y = -2x^2$
- 2) $y = x^2 + 1$
- 3) $y = -x^3$
- 4) $y = |x| + 5$
- 5) $y = |5 - 4x|$
- 6) $y = \sqrt{2 - x}$
- 7) $y = \sqrt{9 - x^2}$
- 8) $y = x^2 - 2x + 1$
- 9) $y = -\frac{2}{x}$ [19].

Прийом «Робота за алгоритмом».

Учням пропонуються алгоритми на знаходження множини значень функцій, якщо функція задана графічно.

Завдання: Знайти множину значень функції, зображеної на рисунку 2.5 [18].

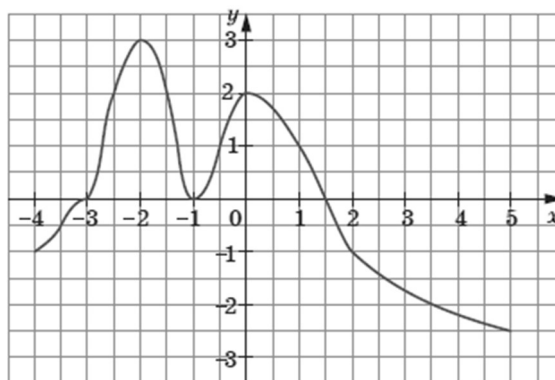


Рис. 2.5.

Фрагмент конспекту уроку з теми «Числові функції» [25]:

Актуалізація опорних знань і фіксація утруднення в діяльності

Діяльність вчителя: Учитель креслить на дошці таблицю (Прийом «Знаємо – Хочемо дізнатися – Дізналися (ЗХД)»)

ФУНКЦІЯ

Що знаємо?	Про що хочемо дізнатися?	Про що дізналися?

Діяльність вчителя: Учитель пропонує учням назвати основні відомості про функцію, з якими вони ознайомилися в 7-9 класах і записує їх у графі «Що знаємо?».

Питання:

1. Що називають аргументом функції?
2. Що називають значенням функції?
3. Що називають областю визначення функції?

4. Що називають областю значень функції?
5. Якими способами можна задавати функції?

Діяльність учнів: Відповідають на питання вчителя усно

Діяльність вчителя: Учитель запитує в учнів про те, у чому вони не впевнені.

Діяльність учнів: Учні відповідають і ці питання учитель записує у стовпчик «Про що хочемо дізнатися?»

Виявлення причин утруднення. Постановка мети діяльності.

Діяльність вчителя: Узагальнює дані таблиці та роздає дітям теоретичний матеріал (у вигляді таблиці або звичайного тексту) з означеннями основних понять і прикладами. Пропонує дітям оформити матеріал та створити семантичну карту (Прийом «Семантична карта»).

Діяльність учнів: Учні опрацьовують матеріал, створюють на основі нього семантичну карту до теми «Числова функція» (Рис. 2.6). Учні можуть виконати завдання у зошиті, можуть на гаджетах у відповідних графічних редакторах та застосунках.

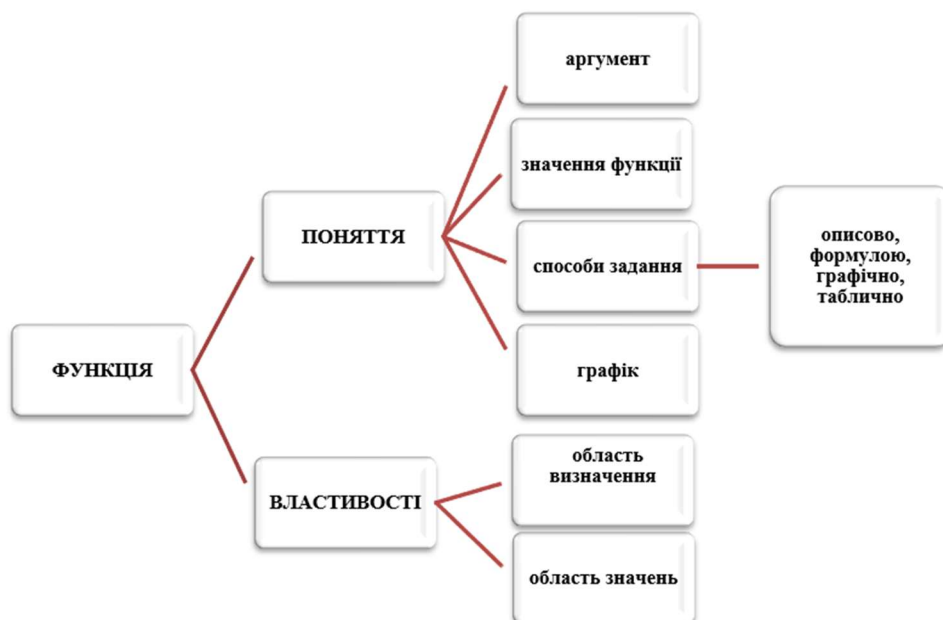


Рис. 2.6. Приклад можливої семантичної карти, створеної учнями до теми «Числові функції»

Кожен із зазначений прийомів може бути використаний вчителем не тільки під час офлайн навчання учнів, а і під час онлайн навчання. Але вчителю доведеться врахувати специфіку онлайн навчання.

Зокрема, для прийому «Робота за алгоритмом» доцільно закріпити на екрані відповідний алгоритм, щоб при виконанні завдання він був постійно перед очима учнів. При використанні прийомів «Знайди помилку» та «Незакінчене речення» виводити на екран відповідні завдання і запрошувати учні до спільної роботи з ними. Прийом «Ланцюжок» практично не буде відрізнятися від роботи з ним офлайн, оскільки і при онлайн режимі учні можуть по черзі виконувати завдання, але вже на віртуальній дошці. Прийом «Навчаючи вчуся» складно реалізувати онлайн, але можливо при роботі у програмі Zoom, в якій є можливість поділу дітей на групи (сесійні зали) і до кожної такої групи можна прикріпити учня-консультанта. Для прийомів «Різнорівневі завдання» та «Встановлення відповідності» можна організувати групову роботу на фреймах Jamboard, а для прийому «Так-ні» використати можливості програм Zoom або Google Meet: ставити реакції або писати в чаті конференції.

На нашу думку, запропоновані методичні прийоми для відпрацювання учнями способів діяльності є ефективними, оскільки не тільки урізноманітнюють діяльність учнів на уроках, а і сприяють відпрацюванню необхідних способів діяльності учнів при вивченні теми «Числові функції».

2.2. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Властивості функції»

Для функції $y=f(x)$ в курсі алгебри 10 класу за програмою базового рівня вивчають такі властивості: нулі функції, проміжки знакосталості функції, проміжки зростання та спадання функції, монотонність, парність і непарність функції, найбільше та найменше значення функції.

Розглянемо у таблиці 2.1. як вказані властивості подані в діючих підручниках.

Таблиця 2.1.

Підручник	Особливості подання властивості
Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика: Алгебра і початок аналізу та геометрія	Алгоритм дій для дослідження функції на парність/непарність та для знаходження найменшого і найбільшого значення функції відсутні. Запропоновано правило, за яким потрібно знаходити нулі функції, а також проміжки знакосталості функції
Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)	Подано схеми дослідження функції на монотонність, на парність і непарність. Відсутні алгоритми дій для знаходження нулів функції, проміжків знакосталості, та для знаходження найменшого і найбільшого значення функції.
Істер О.С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)	Алгоритми дій не запропоновано, наявні тільки означення та приклади.
Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту	Алгоритми дій не запропоновано. Подано правило за яким, можна дослідити функцію на парність і непарність.
Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)	Окремі алгоритми не запропоновано, проте автор подає приклади розв'язаних завдань.

Проаналізувавши таблицю в точки зору подання властивостей у діючих підручниках, можна зробити висновок, що готових алгоритмів на відпрацювання майже немає. Отже, вчителю перед тим, як почати відпрацювання способів діяльності, необхідно або сформулювати з учнями алгоритми дій на основі поданих в підручнику властивостей, або надати готовий алгоритм для використання.

Розглянемо методичні прийоми відпрацювання способів діяльності визначати властивості функції аналітично.

Прийом «Завдання по колу»

В класі обирається один ряд учнів. Учні отримують завдання від вчителя (вчитель або виводить його на мультимедійну дошку, або роздає учням роздруковані завдання).

Для функції $f(x) = \frac{2}{x}$ знайти:

1. нулі функції,

2. проміжки знакосталості,
3. проміжки зростання (спадання) функції
4. дослідити на парність.

Після отримання завдання учень на першій парті має зачитати завдання і дати усно означення першому поняттю «Нулі функції» та передає слово будь-якому учню з цього ряду. Другий учень має на дошці розв'язати завдання. Після цього передає слово третьому учню. Третій учень перевіряє завдання на правильність, коментує його, якщо є помилки виправляє. Після чого передає слово іншому учню з цього ряду, який формулює наступне поняття і т.д. Інші учні класу слухають, мають можливість доповнити відповідь і роблять записи у зошитах.

Розв'язання (запис у зошиті учнів):

- 1) Знайдемо нулі функції:

$$\frac{2}{x} = 0$$

Дане рівняння розв'язків немає, тому у функції не буде нулів.

- 2) Визначимо проміжки знакосталості функції. Оскільки нулів функція немає, розглянемо нерівності:

$$f(x) > 0$$

$$\frac{2}{x} > 0$$

$$x > 0$$

Отже, функція набуває додатніх значень при $x \in (0; +\infty)$.

$$f(x) < 0$$

$$\frac{2}{x} < 0$$

$$x < 0$$

Отже, функція набуває від'ємних значень при $x \in (-\infty; 0)$.

- 3) Визначимо проміжки зростання (спадання) функції.

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_2 > x_1$. Тоді за властивістю числових нерівностей:

$$\frac{2}{x_2} < \frac{2}{x_1}$$

Маємо, що дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно можна довести, що функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Отже, задана функція спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

4) Дослідимо функцію на парність.

Область визначення функції $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ є симетричною множиною відносно нуля.

$$f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x)$$

Отже, функція непарна [25].

Приєм «Робота за алгоритмом»

Учні під керівництвом вчителя створюють алгоритм і виконують завдання за створеним алгоритмом.

Завдання: Знайти нулі функції:

1) $y = -0,8x + 12$

2) $y = 2(3x - 5) - 20$

3) $y = \frac{3x - 4}{x + 2}$

4) $y = \frac{5 - 2x}{x - 1}$

5) $y = \sqrt{4x(x - 2)}$

6) $y = -3x^2 + 9x$

7) $y = \frac{4x^2 + 4x - 15}{2x + 1}$ [19].

Для знаходження відповіді на вказане питання учні мають пригадати всі властивості функції, виявити ту, яка дає можливість знайти $f(-x)$ при відомому $f(x)$.

Приєм «Питання – відповідь»

Завдання. Чи є функція $f(x) = x^2$ парною, якщо її областю визначення є множина:

- 1) $[-4; 4]$;
- 2) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;
- 3) $[-5; 5]$;
- 4) $(-\infty; 6]$ [1]?

Приєм «Робота за алгоритмом»

Учні під керівництвом вчителя створюють алгоритм і виконують завдання за створеним алгоритмом.

Завдання. Дослідити на парність функцію, що задана формулою (тренажер, який можна використати і на уроці, і в якості домашнього завдання):

- а) $y = 3x^2 - 2$;
- б) $y = 5x^3$;
- в) $y = y = \frac{4}{x}$;
- г) $y = \frac{1-x^2}{x-4}$;
- д) $y = x^2 - |x|$;
- е) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2-1}}$;
- є) $y = \frac{(1-x)^2}{x+2} - \frac{(1+x)^2}{x-2}$;
- ж) $y = |x - 1| + |1 + x|$ [9].

Прийом «Заповни пропуски».

Учням пропонується записане розв'язання завдання, в якому пропущені деякі записи. Учням потрібно їх заповнити. Після кожного пропуску в дужках подамо правильне його заповнення.

Наведемо приклад можливого оформлення завдання на визначення властивостей функції з використанням вказаного прийому в зошиті учня:

Користуючись заданим на рисунку 2.7 графіком функції, визначеної на проміжку $[-4; 7]$, знайдіть нулі цієї функції, проміжки знакосталості функції, проміжки зростання і спадання, дослідіть функцію на парність [18]:

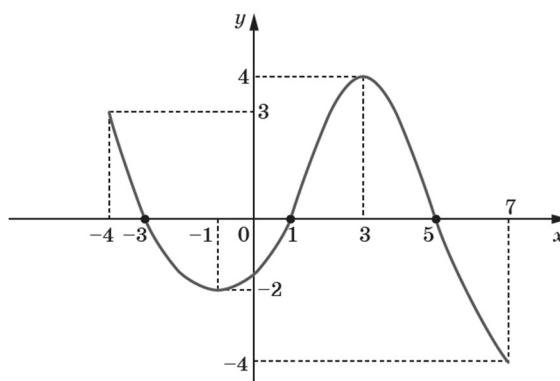


Рис. 2.7.

1) Графік функції перетинає вісь _____ (абсцис) тричі у точках з абсцисами: $x = \underline{\quad}(-3)$, $x = \underline{\quad}(1)$, $x = \underline{\quad}(5)$. Саме вони і будуть нулями функції.

2) $f(x) \underline{(>)} 0$ при $x \in [-4; -3) \cup (1; 5)$ — частина графіка _____ (над) віссю x ,
 $f(x) \underline{(<)} 0$ при $x \in (-3; 1) \cup (5; 7]$ — частина графіка _____ (під) віссю x .

3) функція зростає коли $x \in \underline{\quad}([-1; 3])$, спадає при $x \in \underline{\quad}([-4; -1] \text{ і } x \in 3; 7])$.

4) область визначення функції _____ (не є симетричною множиною) відносно нуля, тому функція _____ (не є парною і не є непарною). Крім цього, відсутня симетрія графіка і відносно _____ (вісі y), і відносно _____ (початку координат).

Розглянемо приклади завдань на відпрацювання способів діяльності встановлювати за графіком функції її основні властивості.

Прийом «Робота за алгоритмом»

Учні під керівництвом вчителя створюють алгоритм і виконують завдання за створеним алгоритмом.

Завдання. Функцію задано графічно (Рис. 2.8). Укажіть:

- а) нулі функції та її парність;
- б) проміжки зростання і спадання функції;
- в) значення x , при яких функція додатна;
- г) найбільше значення функції [9].

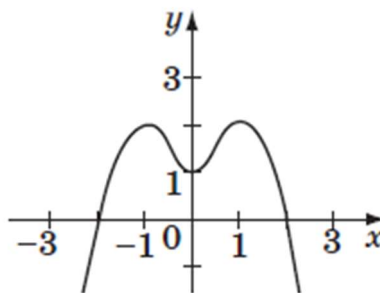


Рис. 2.8.

Прийом «Робота у статичних парах»

Передбачено створення пари з учнів для розв'язання завдання. Пара може складатися із двох «слабких», двох «сильних» або «слабкого» і «сильного» учнів.

Завдання. Користуючись заданим на рисунку 2.9 графіком (а-г), установіть основні властивості функції (знайдіть нулі функції, область визначення і множину значень, проміжки зростання і спадання, найбільші та найменші значення функції; дослідіть функцію на парність) [17]:

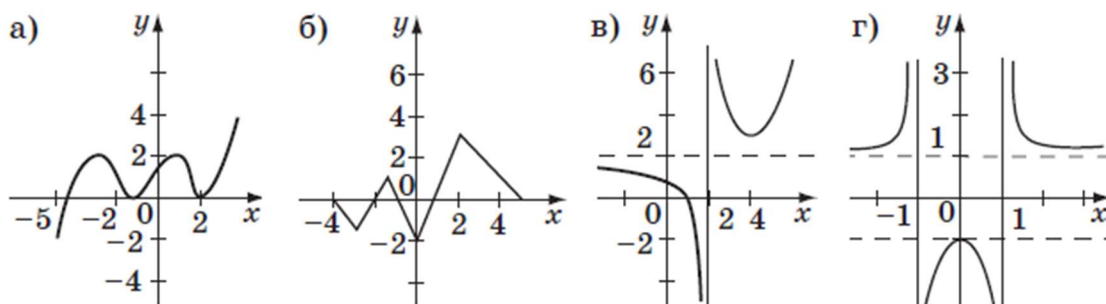


Рис. 2.9.

Прийом «Ланцюжок».

Завдання. Побудуйте графік лінійної функції. Укажіть, чи є функція зростаючою або спадною:

а) $y = -2x$;

б) $y = 3x + 2$;

в) $y = -x - 2$;

г) $-3x + 2y - 6 = 0$;

д) $y + 2 = 0$ [17].

Прийом «Робота за алгоритмом».

Учні під керівництвом вчителя створюють алгоритм і виконують завдання за створеним алгоритмом.

Завдання. Побудуйте графік функції, укажіть її область визначення та дослідіть функцію на парність:

а) $y = \frac{1}{x}$;

б) $y = -\frac{2}{x}$;

в) $xy = 3$;

г) $y = x^2$;

д) $y = -2x^2$;

е) $y = \frac{x^2}{2}$ [19].

Прийом «Ажурна тилка».

Учні об'єднуються у п'ять груп і всі отримують завдання:

Побудуйте графік функції. Встановіть, чи є функція непарною. Укажіть, якщо це можливо, найменше значення функції:

а) $y = x^3$;

б) $y = -x^3$;

в) $y = \sqrt{x}$;

$$\text{г) } y = -\sqrt{x};$$

$$\text{д) } y = |x| \text{ [19].}$$

Кожна група має пріоритетну функцію, тобто ту, з якої має почати свою роботу. Учні працюють над завданням протягом відведеного часу. Після цього в групах обирають по одному представнику. За сигналом вчителя представники переходять до іншої групи (це може бути найближча за розсадкою група або будь-яка за іншою ознакою). Задача представника донести бачення виконання пріоритетного завдання своєї групи та почути розв'язання пріоритетного завдання групи, в яку він потрапив. Так продовжується поки представник не повернеться до своєї групи, де він має поділитися почутими думками від інших груп.

Приєм «Перевірка за допомогою «еталону»

У запропонованому завданні «еталоном» може виступати графік функції, побудований вчителем заздалегідь; показати його варто після того, як учні побудують власні варіанти.

Завдання. На рисунку 2.10 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є:

- 1) парною;
- 2) непарною [18].

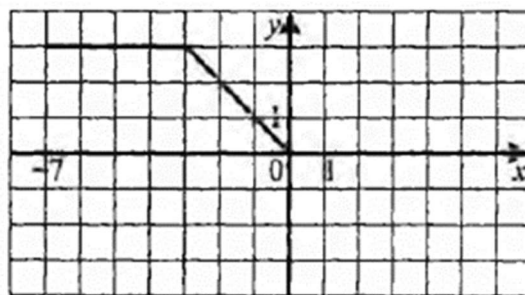


Рис. 2.10.

Властивості функцій використовують не тільки при дослідженні функцій, а й для розв'язання рівняння. Як приклад, розв'язування нерівностей, рівнянь та їх систем можна ототожнювати з областю значень функції для правої та лівої частини функцій. В результаті можемо отримати порожню множину або одну

спільну точку. З отриманого робимо висновок про розв'язок рівняння чи нерівності. Добре при розв'язуванні рівнянь працюють властивості зростання і спадання функцій. При цьому аналізуються окремо ліва і права частини рівняння, і на основі теорем робляться висновки про наявність коренів рівняння та шляхом підбору встановлюється який саме корінь буде у рівняння. Такі рівняння не входять у програму базового рівня, але для учнів, що цікавляться математикою такі завдання варто запропонувати.

Наведемо приклад можливого оформлення завдання на визначення властивостей функції в зошиті учня:

Прийом «Виконання завдання під керівництвом вчителя»

Розв'яжіть рівняння $x^5 + \sqrt{2x - 1} = 2$ [19].

Розв'язання:

Функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ є зростаючими. Отже, за властивостями зростаючих функцій і функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою. Отже, дане рівняння має не більше одного кореня.

Нескладно помітити, що число 1 є коренем даного рівняння.

Ураховуючи вищесказане, цей корінь є єдиним.

Відповідь: 1.

Прийом «Ланцюжок»

Завдання. Розв'яжіть рівняння:

- а) $\sqrt{16 + x^2} = 4 - x^2$;
- б) $1 + |x^2 - 2x| = \sqrt{1 - x^2}$;
- в) $|2x - 3| = 12x - 4x^2 - 9$;
- г) $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = 2 - |x|$ [19].

Прийом «Виконання завдання під керівництвом вчителя»

Завдання. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

- а) $x^3 + 6x = -7$;

$$\text{б) } x^2 + \sqrt{2x + 1} = 19;$$

$$\text{в) } 2\sqrt{x} + \sqrt{x - 3} = 5;$$

$$\text{г) } 2\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{x} = 7 \text{ [19].}$$

Завдання. Розв'яжіть рівняння, використовуючи монотонність функцій:

$$\text{а) } 2x^3 = 22 - 3x;$$

$$\text{б) } 3\sqrt{x + 3} + 2x = 9 - x;$$

$$\text{в) } \sqrt{x} = 4 - \sqrt{x^2 + 8};$$

$$\text{г) } \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} = 3 - x \text{ [19].}$$

Фрагмент конспекту уроку з теми «Властивості функції»

Актуалізація опорних знань і фіксація утруднення в діяльності

Вчитель використовує прийом «Ланцюжок» для усного опитування:

1) Дайте означення функції.

Відповідь учня: Функцією називають таку відповідність між змінними x і y , при якій кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y . При цьому змінну x називають аргументом, а змінну y функцією (від аргументу x).

2) Що таке область визначення функції?

Відповідь учня. Усі значення, яких набуває аргумент утворюють область визначення функції і позначають $D(y)$.

3) Що таке область значень функції?

Відповідь учня. Усі значення, яких набуває залежна змінна утворюють область значень функції і позначають $E(y)$.

4) Які способи задання функції вам відомі?

Відповідь учня. Задавати функції можна формулами, таблицями, графіком і описово.

5) Що таке графік функції?

Відповідь учня. Графіком функції називається фігура, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати - відповідним значенням функції.

6) Що називають нулями функції, інтервалами знакосталості?

Відповідь учня. Нулі функції — значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю. Інтервали знакосталості — проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює свій знак.

7) Які функції називають зростаючими? Спадними?

Відповідь учня. Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу і цього проміжку відповідає більше значення функції. Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу і цього проміжку відповідає менше значення функції.

Узагальнення та систематизація понять, засвоєння системи знань та їх застосування для виконання вправ

Учні об'єднуються в статичні пари та виконують завдання:

Заповнити пропуски та побудувати ескіз графіка функції

Відомо, що функція $y = f(x)$ непарна, нулі функції $x = -6$, $x = 0$, $x = \underline{\quad}$; найменшого значення, що дорівнює -2 , функція набуває при $x = -3$. Тоді при $x = 3$ функція набуває $\underline{\quad}$ значення, яке дорівнює $\underline{\quad}$. Функція спадає на проміжку $[-8; -3]$ і $\underline{\quad}$, зростає на проміжку $[-3; 0]$ і $\underline{\quad}$. Область визначення функції $x \in [-8; \underline{\quad}]$, множина значень функції $\underline{\quad}$.

Користуючись цими даними, накресліть ескіз графіка функції $y = f(x)$.

Після виконання завдання вчитель пропонує колективно обговорити заповнені пропуски для перевірки правильності виконання завдання та коригування помилкових відповідей.

Запропоновані прийоми можуть бути використані вчителем під час традиційного офлайн-навчання і під час дистанційної форми при умові організації синхронних онлайн-уроків.

Використання вчителем прийомів «Мозковий штурм», «Проблемне питання», «Питання-відповідь», «Перевірка за допомогою «еталону» на онлайн-уроках не буде суттєво відрізнятися від їх використання в офлайн режимі,

оскільки можливості кімнат для конференцій (наприклад, Zoom, Google Meet, Microsoft Teams) дозволяють легко організувати колективні форми роботи, запустити демонстрацію екрану та керувати дозволами на вмикання мікрофону. Для прийомів «Завдання по колу», «Робота у статичних парах», «Ажурна пилка» зручною є функція об'єднання учасників конференції за допомогою сесійних залів. Виконання завдань із самоперевіркою зручно можна організувати за допомогою різноманітних тестових платформ, наприклад, НаУрок, Всеосвіта, Google Forms тощо.

2.3. Методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темі «Степенева функція»

При вивченні теми «Степенева функція» передбачається розгляд питань: узагальнення понять степінь та степінь з дійсним показником; корінь n -го степеня та його властивості, розв'язування ірраціональних рівнянь; степеневі функції, графік та властивості степеневої функції.

Розглянемо приклади завдань на відпрацювання способів діяльності на порівняння значень степеневої функції на основі властивості зростання/спадання функції.

Прийом «Рецензія»

Коли один учень відповідає, його слухають усі, згодом хтось із них робить рецензію відповіді. Інші уважно слухають рецензента, доповнюють його виступ.

Завдання. Функцію задано формулою $f(x)=x^{21}$. Порівняйте:

1) $f(1,4)$ і $f(1,8)$;

2) $f(-7,6)$ і $f(-8,5)$;

3) $f(-6,9)$ і $f(6,9)$;

4) $f(0,2)$ і $f(-12)$ [3].

Прийом «Проблемна задача».

На етапі мотивації навчальної діяльності на початку вивчення теми вчителю доцільно запропонувати учням завдання на порівняння чисел, які учні

не вміють обчислювати, тобто проблемну задачу. Після опрацювання теоретичного матеріалу треба повернутися до виконання такого завдання.

Завдання. Порівняти числа: $2\sqrt[3]{4}$ і $3\sqrt[3]{2}$ [3].

Прийом «Вистав оцінку сам собі»

Учитель пропонує учням завдання та час на його виконання. Після того, як час спливає діти отримують шкалу, за якою виставляють собі оцінки. Згодом учитель надає учням правильні відповіді. Порахувавши свої помилки, учні виставляють собі олівцем на полях оцінку за запропонованою шкалою. Можна попросити при перевірці обмінятися зошитами товаришам по парті. Діти перевіряють і фіксують помилки в чужому зошиті, проте оцінку за шкалою кожен виставляє собі сам. Ця оцінка в журнал не переноситься.

Завдання. Укажіть, між якими двома послідовними цілими числами міститься число:

а) $\sqrt{5,76}$;

б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$;

в) $-\sqrt{0,25}$;

г) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$;

д) $\sqrt[3]{-64}$;

е) $-\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$. [1]

Прийом «Робота за алгоритмом»

Перед виконанням завдання учитель або разом з дітьми, або самостійно формулює алгоритм порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції (функція задана аналітично). Керуючись цим алгоритмом, учні виконують завдання.

Завдання. Розташуйте в порядку зростання числа:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}; \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}; \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}};$

б) $(1,5)^{\frac{1}{2}}; (1,5)^{\frac{1}{4}}; (1,5)^{\frac{1}{5}}; (1,5)^{\frac{1}{3}}$ [18].

Прийом «Заповни пропуски».

Завдання. Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$. Порівняйте:

1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$

2) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$

3) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$ [27].

Розв'язання:

1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$

Для порівняння значень функції в заданих точках скористаємося властивостями степеневі функції. Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$.

Графік степеневі функції з парним натуральним показником на проміжку $(-\infty; 0]$ – _____ (спадає), а на проміжку $[0; +\infty)$ – _____ (зростає).

Значення аргументу $x = 5,8$ і $x = 4,9$ належать проміжку _____ (зростання) функції. Відповідно означення _____ (зростаючої) функції, більшому значенню аргументу відповідає _____ (більше) значення функції, тобто

$$g(5,8) _ (>) g(4,9)$$

2) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$

Графік степеневі функції $g(x) = x^{12}$ на проміжку _____ ($(-\infty; 0]$) – спадає, а на проміжку _____ ($[0; +\infty)$) – зростає. Значення аргументу $x = -12,3$ і $x = -15,1$ належать проміжку _____ (спадання) функції. Відповідно означення _____ (спадної) функції, більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто

$$g(-12,3) _ (<) g(-15,1)$$

3) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$

Функція $g(x) = x^{12} - \underline{\hspace{2cm}}$ (парна), тобто її графік симетричний відносно $\underline{\hspace{2cm}}$ (осі Oy), тобто значення функції в точках $g(-x) = \underline{\hspace{1cm}}(g(x))$. Тоді $g(-2,1) = \underline{\hspace{1cm}}(g(2,1))$. Звідси маємо, що

$$g(1,4) \underline{\hspace{1cm}} (<) g(-2,1)$$

Прийом «Знайди помилку»

Завдання: *Розташуйте в порядку спадання значення виразів*

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5, \left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5 \quad [27].$$

Розв'язання (містить помилки):

Функція $y = x^5$ зростає на всій області визначення, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Порівняємо основи степенів. Для цього зведемо дроби до спільного знаменника 60:

$$-\frac{45}{60}, -2\frac{30}{60}, -\frac{40}{60}, -2\frac{24}{60}$$

Враховуючи правило порівняння від'ємних чисел отримаємо:

$$-\frac{40}{60}, -\frac{45}{60}, -2\frac{30}{60}, -2\frac{24}{60}$$

Поставивши кожному дроби у відповідність значення степеня запишемо відповідь:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5$$

Розв'язання (правильне):

Функція $y = x^5$ зростає на всій області визначення, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Порівняємо основи степенів. Для цього зведемо дроби до спільного знаменника 60:

$$-\frac{45}{60}, -2\frac{20}{60}, -\frac{40}{60}, -2\frac{24}{60}$$

Враховуючи правило порівняння від'ємних чисел отримаємо:

$$-\frac{40}{60}, -\frac{45}{60}, -2\frac{20}{60}, -2\frac{24}{60}$$

Поставивши кожному дробу у відповідність значення степеня запишемо відповідь:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5$$

Розглянемо приклади завдань на відпрацювання способів діяльності побудови графіків степеневих функцій.

Прийом «Робота за алгоритмом»

Завдання. Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$;

2) $x^5 = 3 - 2x$;

3) $x^4 = 0,5x - 2$

Прийом «Мозковий штурм»

Завдання. Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) n – парне натуральне число;

2) n – непарне натуральне число ?

Прийом «Робота парами біля дошки»

Для виконання завдання учні виходять до дошки по двоє. Побудова графіків функцій відбувається паралельно обома учнями. Після завершення побудови і перевірки на правильність її виконання вчителем графіки аналізуються учнями з метою закріплення виконаного перетворення. Вчитель може задавати навідні питання. Наведемо приклад такого питання: При перетворенні $y = f(x) + b$, де $b > 0$ графік функції рухається вгору чи вниз?

Завдання. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} + 2$ і $y = x^{-2} - 2$;

2) $y = (x - 3)^3$ і $y = (x + 3)^3$;

$$3) y = -2x^{-0,5} \text{ і } y = -\frac{1}{2}x^{-0,5};$$

$$4) y = \sqrt{3x+1} \text{ і } y = \sqrt{\frac{1}{3}x+1};$$

$$5) y = |x^2 - 3x + 1| \text{ і } y = x^2 - 3|x| + 1 [19].$$

Прийом «Встановити відповідність»

Завдання. Установити відповідність (Рис. 2.11) між функціями (1-4) та ескізами їх графіків (А-Д) [11].

1	2	3	4
$y = \sqrt[5]{x}$	$y = \frac{1}{x^5}$	$y = \frac{1}{x^4}$	$y = \sqrt[4]{x}$

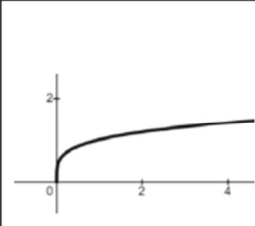
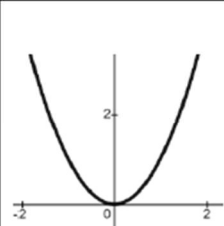
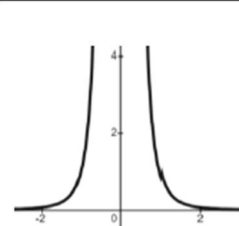
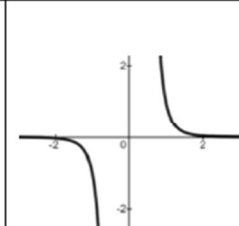
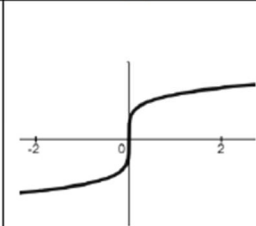
А	Б	В	Г	Д
				

Рис. 2.11.

Прийом «Робота за алгоритмом»

Визначте графічно кількість коренів рівняння $x^4 = x + 5$ [19].

Розв'язання:

У правій та лівій частині даного рівняння стоять функції:

$$f(x) = x^4 \text{ та } g(x) = x + 5$$

Для визначення кількості коренів рівняння $x^4 = x + 5$ побудуємо в одній системі координат графіки обох функцій (Рис. 2.12).

1) $f(x) = x^4$ – степенева функція з парним показником. Її графік симетричний відносно осі Оу, проходить через початок координат.

2) $g(x) = x + 5$ – пряма. Для її побудови достатньо двох точок. Виберемо з області визначення декілька значень аргументу, наприклад $x = 0$, $x = -2$. Підставимо ці значення у функцію та отримаємо дві точки $(0; 5)$ і $(-2; 3)$.

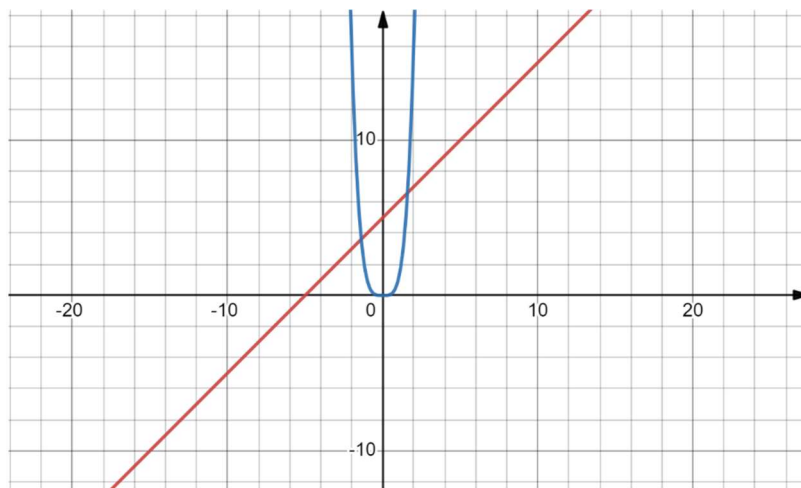


Рис. 2.12.

Як бачимо, графіки даних функцій перетинаються у двох точках, тобто рівняння $x^4 = x + 5$ має два кореня.

Фрагмент конспекту уроку з теми «Степенева функція» [1]

Застосування учнями знань та вмінь у стандартних умовах із метою набуття навичок (тренувальні вправи)

Вчитель пропонує учням виконати завдання за алгоритмом (колективне виконання вправ).

Завдання. Які з точок належать графіку функції $y = \sqrt{x}$?

$A(0,1; 0,01)$, $B(0,16; -0,4)$, $C(-10; 100)$, $D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$, $E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$, $F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$.

Завдання. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α , якщо графік функції проходить через точку:

а) $A(7; 49)$; б) $B(144; 12)$, в) $C(-64; -4)$, г) $D(-216; -6)$.

Завдання. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 1$:

а) $0,15^\alpha$ і $0,34^\alpha$; б) $0,17^\alpha$ і $0,23^\alpha$; в) $3,1^\alpha$ і $4,52^\alpha$; г) $2,78^\alpha$ і $6,9^\alpha$.

Творче застосування знань та навичок у нових або змінених умовах із метою формування вмінь

Використовуючи прийом «Робота парами біля дошки» вчитель організовує виконання наступного завдання

Завдання. Функцію задано формулою $y = x^q$. Знайдіть q , якщо графік функції проходить через точку:

а) $A\left(27; \frac{1}{9}\right)$; б) $B(16; 0,25)$, в) $C(625; 0,2)$, г) $D\left(243; \frac{1}{3}\right)$.

Діяльність учнів: пари по черзі працюють біля дошки, решта учнів працюють у своїх зошитах на місцях

Вчитель пропонує учням самостійно в зошиті виконати завдання. Після цього вчитель дає учням завдання оцінити себе (учні отримують схему оцінювання), порівнявши свої відповіді з правильними продовжується колективне обговорення правильних відповідей.

Завдання. Значення функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{5}{2}}$ у точці $x = 3$, коли відомо, що $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,73$.

Отримані дані запишіть у таблицю.

$3^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3^{\frac{5}{2}}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$3^{-\frac{5}{2}}$

З'ясуйте: а) Яка з функцій має в точці $x = 3$ найбільше значення, а яка – найменше? б) Яка з функцій має найбільше значення, а яка – найменше в точці $x = 1$? в) Які з функцій визначені в точці $x = 0$? а в точці $x = -1$?

Розглянуті прийоми «Проблемна задача», «Вистав оцінку сам собі», «Робота за алгоритмом», «Заповни пропуски», «Знайди помилку», «Встановити відповідність» можуть бути використанні вчителем при вивченні теми «Степенева функція» і під час онлайн навчання. При цьому завдання демонструються вчителем на екрані, замість дошки у класі, і учні працюють у зошитах. Після уроку вчитель може (за необхідності) попросити учнів надіслати йому фото зошита. Для прийому «Робота парами біля дошки» можна організувати роботу учнів на фреймах у Jambord і в режимі реального часу

контролювати роботу учнів, або дати можливість коментування екрану учням на дошці у zoom. Прийоми «Рецензія» та «Мозковий штурм» під час онлайн навчання так само добре працюють як і під час очного навчання, оскільки під час онлайн уроку технічно учні можуть висловити свою думку і долучитись до спільного обговорення.

2.4. Використання ІКТ у формуванні способів діяльності учнів у навчанні теми: «Функції, їх властивості і графіки»

Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики, зокрема алгебри, надає змогу вчителю урізноманітнити види діяльності учнів протягом уроку, оптимізувати освітній процес шляхом зменшення витрат часу на кожному етапі уроку, наприклад, при перевірці домашнього завдання або на етапі актуалізації опорних знань [10].

В умовах тривалого навчання в дистанційній формі впровадження ІКТ перестає бути частковим, адже без таких технологій неможливо організувати освітній процес. У зв'язку з цим розглянемо програмні та онлайн засоби, які можуть бути використані вчителем при формуванні способів діяльності учнів у навчанні теми «Функції, їх властивості і графіки» в курсі алгебри 10 класу: СКМ GeoGebra [26], графічний онлайн-калькулятор Desmos [30], веб-сайт Mathway [31], сервіси LearningApps, Wordwall, LIVEWorksheets. Вибір засобу залежить від багатьох факторів, таких, як дидактична мета, відповідність змісту вправи її формі, готовність вчителя працювати в конкретному сервісі, наявність чи відсутність ефекту новизни для дітей тощо [34].

У таблиці 2.2 подамо доцільність вибору певного онлайн сервісу відповідно до кожного способу діяльності, який опановується в темі «Функції їх властивості і графіки».

Таблиця 2.2.

СПОСІБ ДІЯЛЬНОСТІ	ДОЦІЛЬНИЙ ОНЛАЙН СЕРВІС
Знаходження області визначення, множини значень функції	LearningApps Wordwall
Дослідження функцій на парність та непарність	LIVEWorksheets
Дослідження степеневих функцій на знаходження найбільших та найменших значень	LearningApps
Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції	LearningApps Wordwall
Побудова графіків степеневих функцій	СКМ GeoGebra графічний онлайн-калькулятор Desmos веб-сайт Mathway

Розглянемо деякі приклади вправ, які доцільно використати при формуванні способів діяльності учнів у вказаній темі (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3.

СПОСІБ ДІЯЛЬНОСТІ	ВПРАВА, СЕРВІС	ПОСИЛАННЯ НА ВПРАВУ
Дослідження функцій на парність та непарність	Вправа на заповнення пропусків, LIVEWorksheets	https://www.liveworksheets.com/workbook/2330783/preview/GXyFsckQpg
Дослідження степеневих функцій на знаходження найбільших та найменших значень	Вікторина з відкритими питаннями, LearningApps	https://learningapps.org/32418862
Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції	Флеш-карти, Wordwall	https://wordwall.net/uk/resource/63421959
Побудова графіків степеневих функцій	графічний онлайн-калькулятор Desmos	Приклад рисунка, який вчитель може запропонувати дітям: https://www.desmos.com/calculator/gnajuzwlyl

При формуванні способу діяльності «Дослідження функції на парність та непарність» доцільно запропонувати учням виконати вправу, створену на онлайн-сервісі LIVEWorksheets – інтерактивний аркуш, який передбачає заповнення пропусків під запропонованими завданнями (Рис. 2.13.).

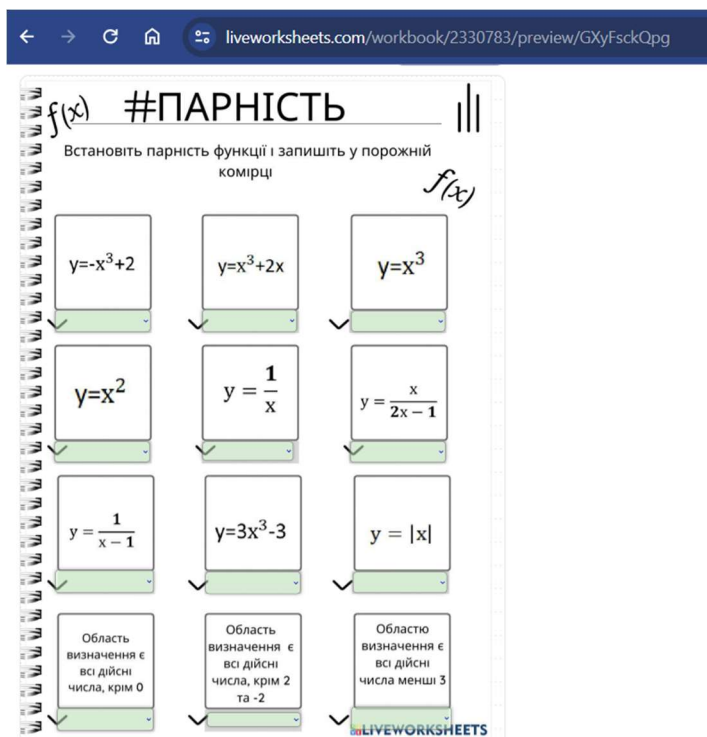


Рис. 2.13. Інтерактивна вправа у сервісі LIVEWorksheets

Кожен пропуск містить додаткове меню – список варіантів відповідей. Завдання: визначити чи є функція парною, непарною чи індиферентною. Функції розташовані за підвищенням складності та не передбачають великого за обсягом аналізу. Очікувані результати: учень усно може знайти область визначення функції, проаналізувати її симетричність відносно нуля та визначити якою є функція. Деякі функції є елементарними і без використання алгоритму дослідження функції на парність та непарність учень має вміти визначити її вид.

Інтерактивні аркуші такого виду можуть бути використані: в синхронному режимі при закріпленні нового матеріалу чи при узагальненні та систематизації знань, можна пропонувати учням для самоперевірки в домашньому завданні або як один з типів завдань під час асинхронного уроку .

При формуванні способу діяльності «Дослідження функцій на знаходження найбільших та найменших значень» доцільно запропонувати учням вправу, розроблену з використанням сервісу LearningApps (Рис. 2.14.), яка має на меті допомогти учням зрозуміти, як можна використати властивість зростання,

спадання функції до аналізу її значень та закріпити алгоритм знаходження таких значень.

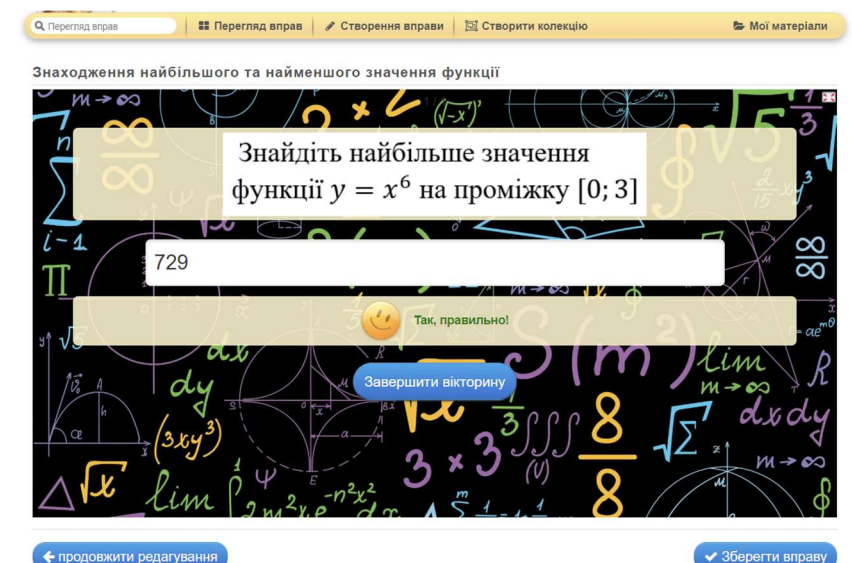


Рис. 2.14. Інтерактивна вправа (вікторина з відкритими питаннями) у сервісі LearningApps

Вправа може бути використана як індивідуальне завдання або як завдання для парної або групової роботи, сприяючи взаємодії та взаємопідтримці між учнями.

Порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції – при формуванні такого способу учням можна запропонувати до виконання інтерактивну вправу «Флеш-карти», створену на платформі Wordwall. Вправа містить 15 двосторонніх карток (Рис. 2.15.).

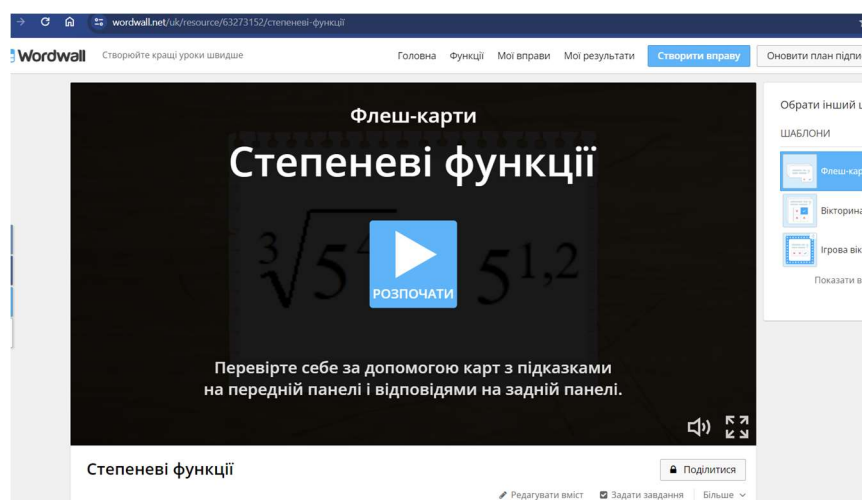


Рис. 2.15. Флеш-карти, розроблені на платформі Wordwall

Завдання до всіх карток одне – порівняти значення виразів. На одній стороні вказані вирази, об'єднані сполучником «і» (Рис. 2.16.), на іншій – відповідь – правильна числова нерівність.

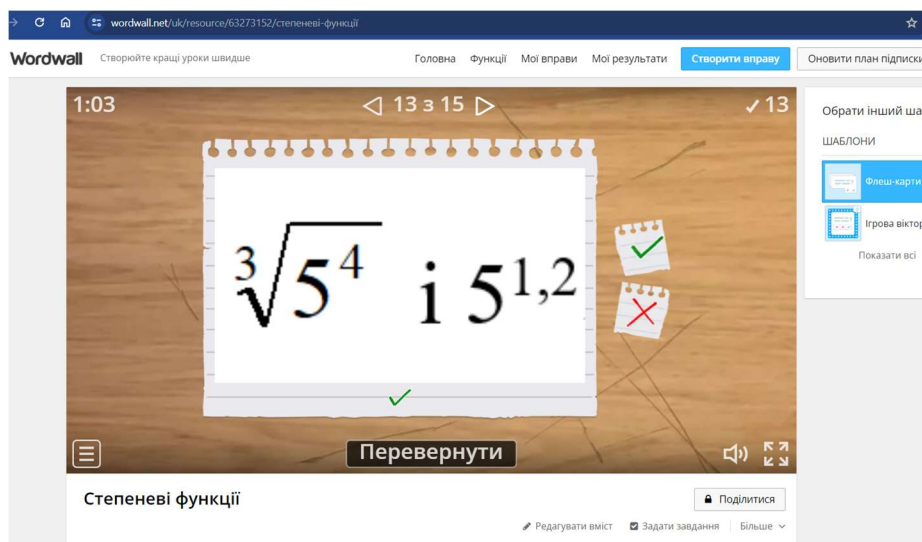


Рис. 2.16. Завдання флеш-карти, розробленої на платформі Wordwall

Після того, як картка буде перевернута учню пропонується відмітити правильність виконання вправи: натиснути на галочку (правильне виконання) чи хрестик (помилка). За кожне правильно виконане завдання нараховується один бал, при помилці нараховується нуль балів. З огляду на специфіку інтерактивної вправи вбачаємо за доцільне виконувати завдання колективно під час уроку або пропонувати для самостійного виконання з подальшою самоперевіркою при підготовці до самостійної чи контрольної роботи з теми.

Спосіб діяльності «Побудова графіків степеневих функцій».

При вивченні кожної степеневі функції (з натуральним, цілим або раціональним показником) учням варто пропонувати завдання на побудову графіків відповідних функцій та завдання на розв'язання рівнянь графічним способом. На початку варто пропонувати учням будувати графіки традиційним шляхом: в зошиті за допомогою олівця та лінійки. Пізніше доцільно залучити учнів до виконання дослідницьких проєктів, які передбачають побудову графіків степеневих функцій. На етапі підготовки до проєкту та знайомства з вимогами до його виконання учням можна надати можливість повторити графіки

степеневих функцій. Для цього зручно використати програмні або онлайн засоби для побудови графіків функцій, зокрема СКМ GeoGebra, графічний онлайн-калькулятор Desmos, веб-сайт Mathway. Заради ефективності роботи вчителю варто обрати один сервіс та використовувати його не тільки при вивченні степеневих функцій [24].

Зупинимо нашу увагу на графічному онлайн-калькуляторі Desmos, який дозволяє не тільки будувати графіки (Рис. 2.17.), а й порівнювати кілька функцій одночасно, що сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між ними.

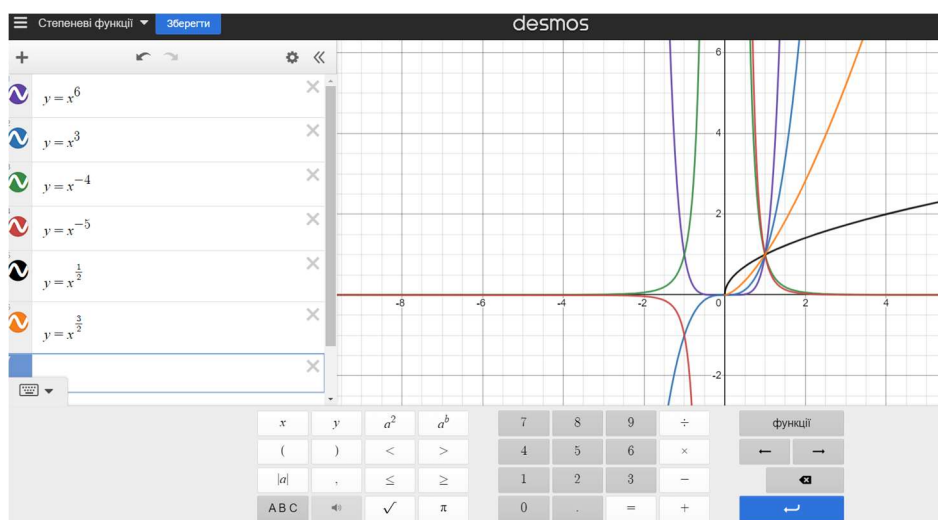


Рис. 2.17. Графіки степеневих функцій

Крім того, Desmos може бути використаний для розв'язування рівнянь, пов'язаних зі степеневими функціями, що допомагає учням практикувати навички вирішення математичних завдань, а також формувати інформаційну компетентність.

Степеневі функції в 10 класі можна розглядати у застосуванні до опису кривої попиту та пропозицій товарів різних категорій. У зв'язку з цим учням доцільно запропонувати проєкт практичного змісту «Степеневі функції в економіці»

Завдання для учнів можна сформулювати так: у цьому проєкті ви вивчатимете практичні застосування степеневих функцій у реальному світі, а саме в економічних ринкових процесах. Використовуючи графічний онлайн-калькулятор Desmos, ви повинні дослідити різні сценарії, де степеневі функції

можуть бути використані для моделювання реальних явищ. Кожен з вас повинен обрати конкретний товар та побудувати степеневу функцію – криву попиту та пропозицій, яка найкраще відображає ринкові закономірності. Після цього, поясніть, як ваша функція може бути використана для аналізу та передбачення реальних подій.

Далі учням бажано надати перелік задач, які варто виконати в процесі виконання проєкту.

Інструкція виконання проєкту «Степеневі функції в економіці»

1. Обрати товар: Оберіть конкретний товар або послугу, які ви як споживач теж обираєте на ринку.

2. Зібрати дані: Зберіть або знайдіть відповідні дані про ваш обраний товар чи послугу: скільки є виробників чи постачальників, які пропонують на ринку товар, скільки є надавачів послуг на певній території. Які є статистичні дані щодо кількості продаж за певний період часу. Скористайтеся даними у вільному доступі. Їх можна знайти в роботах економістів, на сайтах-біржах праць (якщо розглядати надання послуг). Ці дані будуть використовуватися для побудови графіку степеневі функції.

3. Побудувати графік: Використовуючи Desmos, побудуйте степеневу функцію, яка найкраще апроксимує ваші дані. Експериментуйте з різними значеннями коефіцієнтів, щоб отримати найточніший графік.

4. Аналіз та висновки: Поясніть, як ваша степенева функція відображає реальний сценарій. Зробіть висновки про тенденції, можливі прогнози та значення параметрів у контексті обраної проблеми.

Кінцевий результат проєкту:

Учень має представити презентацію або звіт, який містить наступні елементи: обраний товар або послугу та пояснення вибору, графік степеневі функції, побудований на Desmos, разом із відповідними даними, аналіз графіка та висновки щодо його відповідності реальному сценарію, пояснення можливих застосувань та користі від використання степеневі функції у даному контексті.

Такий проєкт може бути виконаний як індивідуально, так і в малих групах (по 2 – 3 учні). Його варто пропонувати до виконання протягом тижня або більше на розсуд вчителя. Проєкт допоможе учням побачити, як математика може бути застосована в реальних ситуаціях, розвине їхні навички аналізу та моделювання реальних явищ за допомогою степеневих функцій.

Окрім проєкту практичного характеру учням доцільно запропонувати творчій проєкт. Наведемо приклад такого проєкту: «Рисунок графіками степеневих функцій».

Завдання для учнів можна сформулювати так: у цьому творчому проєкті ви матимете можливість поєднати математику та мистецтво, будуючи рисунки за допомогою графіків степеневих функцій. Ваше завдання – створити унікальний рисунок, використовуючи різні степеневі функції та їхні комбінації. Бажано використовувати перетворення графіків функцій. Ви будете працювати у графічному онлайн-калькуляторі Desmos для побудови графіків та створення художнього шедевру.

Далі учням бажано надати перелік задач, які варто виконати в процесі виконання проєкту.

Інструкція виконання проєкту «Рисунок графіками степеневих функцій»

1. Вибрати тему: Оберіть тему для свого рисунка. Це може бути щонебудь абстрактне, геометричне чи навіть предмети з навколишнього світу.
2. Побудувати графіки: Використовуючи Desmos, побудуйте графіки степеневих функцій в одній системі координат. Створюючи функцію не забувайте використовувати свої знання з теми «Перетворення графіків функцій». Ви можете використовувати різні кольори та стилі для кожної функції та обмежувати значення змінних для побудови частини графіка.
3. Розфарбування: Використовуйте нерівності для розфарбування рисунка.

4. Додаткові деталі: За потреби додайте до свого рисунка додаткові деталі, такі як точки, прямі, або інші елементи, які доповнюють ваше мистецьке творіння.

5. Збереження та пояснення: Збережіть ваш рисунок та напишіть коротке пояснення про обрані функції, кольори та стилі, які ви використовували. Поясніть, як ваш рисунок відображає обрану тему.

Кінцевий результат проєкту: Учень має представити разом із поясненням свій рисунок, створений за допомогою графіків степеневих функцій в онлайн-калькуляторі Desmos. Рисунок має бути виразним, креативним та відображати вміння учня використовувати математику у творчому процесі. Пояснення повинно містити обґрунтування вибору функцій та їхніх характеристик, що використовуються для створення рисунка.

Творче завдання на створення власного рисунка бажано пропонувати учням для самостійного індивідуального виконання. На етапі постановки задачі вчителю варто показати приклад найпростішого рисунка (Рис. 2.18.) та пояснити який інструментарій має онлайн-калькулятор Desmos.

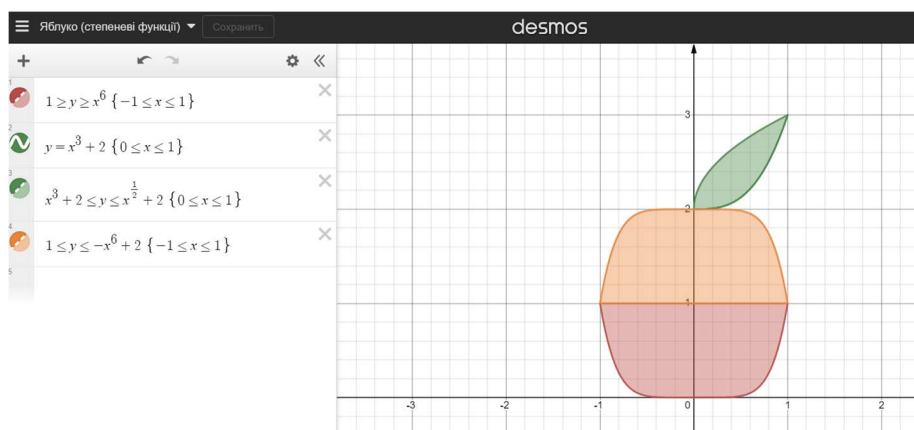


Рис. 2.18. Рисунок графіками степеневих функцій

Особливу увагу варто приділити побудові частин графіків функцій (показати як потрібно обмежити значення змінної) та розфарбуванню рисунка.

Окрім творчих завдань, завдань практичного характеру та інтерактивних вправ важливою є діагностика рівня сформованості способів діяльності. Вона

може бути організована за допомогою тестувань у будь-яких сервісах на вибір вчителя, наприклад, НаУрок, Всеосвіта, Google Form, Classtime тощо.

З розробленими завданнями самостійної роботи у формі тестування, створеного на платформі Всеосвіта (Рис. 2.19.), можна ознайомитись у *Додатку А* до роботи.

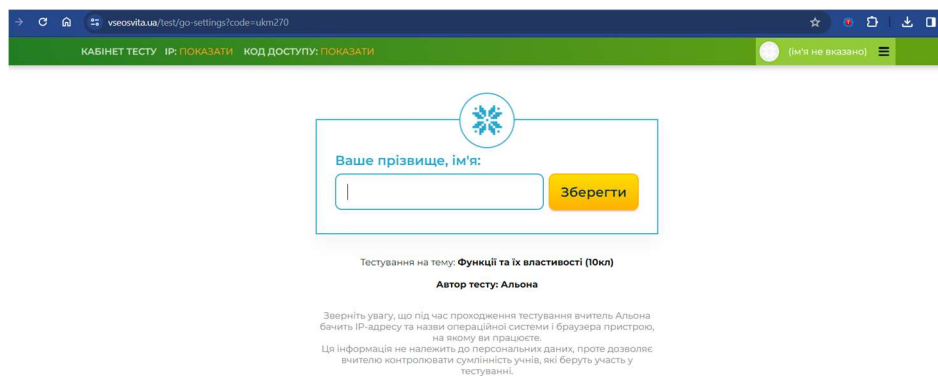


Рис. 2.19. Тест на платформі Всеосвіта

Самостійна робота містить завдання з теми «Функції, їх властивості і графіки», а саме завдання на знаходження значення функції за заданим аргументом, знаходження значення аргумента за заданим значенням функції, знаходження області визначення та значень функції, нулів функції, проміжків зростання та спадання функції, проміжків знакосталості, завдання на впізнавання графіків парних функцій, на дослідження парності/непарності функції.

Тест може бути запропонований не тільки як завдання самостійної роботи, а й наданий для повторення вивченого матеріалу в темі або для додаткового тренування із подальшою самоперевіркою.

Тестування надає вчителям та учням інформацію про навчальні досягнення, допомагає вдосконалювати навчальний процес та забезпечує важливий зворотний зв'язок для подальшого навчання та вдосконалення математичних навичок учнів.

Отже, в ході виконаного дослідження розглянуто методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності у навчанні теми «Функції, їх

властивості і графіки». Висвітлено методичні прийоми відпрацювання з учнями способів діяльності в темах «Числові функції», «Властивості функції» та «Степенева функція». Запропоновано завдання разом з методичними коментарями, розв'язання окремих завдань. Створено власні алгоритми, які можуть полегшити відпрацювання відповідних способів діяльності. Розроблено низку інтерактивних вправ, самостійну роботу у тестовій формі, запропоновано проєкт практичного змісту та проєкт творчого характеру.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження присвячене аналізу способів діяльності, які опановують учні в темі «Функції, їх властивості і графіки», розробленню методичних прийомів відпрацювання з учнями цих способів діяльності та дослідженню можливостей використання інформаційно-комунікаційних технологій до відпрацювання учнями способів діяльності у навчанні теми.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з теми дослідження, вимог до знань і умінь учнів в діючій навчальній програмі на базовому рівні підготовки, логіко-математичний аналіз теми «Функції, їх властивості і графіки» дозволили виявити необхідність розгляду методичних прийомів відпрацювання з учнями способів діяльності.

Проведено логіко-математичний аналіз теми «Функції, їх властивості і графіки» в курсі алгебри базового рівня (10 клас), на основі якого виокремлено способи діяльності, які учні опановують в цій темі. На основі опрацювання методичної літератури та діючих підручників запропоновано алгоритми: знаходження нулів функції, дослідження функції на монотонність, на парність/непарність, знаходження проміжків знакосталості функції тощо. Кожен з алгоритмів запропоновано як для функції заданої аналітично, так і графічно. Використання таких алгоритмів полегшить формування способів діяльності в темі «Функції, їх властивості і графіки».

Запропоновано методичні прийоми (різномірні самостійні роботи, Робота за алгоритмом, «Що було б, якби...», змагання, завдання по колу навчаючи вчуся, незакінчені речення, робота з алгоритмом виправлення помилок, побудова логічних схем або семантичних карт, прийом «Знаємо – Хочемо дізнатися – Дізналися (ЗХД)», прийом «Проблемне питання», прийом «Питання – відповідь», прийом «Робота у статичних парах», прийом «Перевірка за допомогою «еталону», прийом «Виконання завдання під керівництвом вчителя», прийом «Ланцюжок», прийом «Рецензія», прийом «Проблемна задача», прийом «Вистав оцінку сам собі», прийом «Мозковий штурм», прийом «Робота парами біля дошки») відпрацювання з учнями способів діяльності в

темах «Числові функції», «Властивості функції», «Степенева функція». Підбрано різноманітні за змістом і рівнем складності завдання для відпрацювання з учнями способів діяльності, наведено розв'язання; надано методичні коментарі.

Розроблено низку інтерактивних вправ на відпрацювання з учнями способів діяльності (дослідження функцій на парність та непарність, дослідження функцій на знаходження найбільших та найменших значень, порівняння значень степеневі функції на основі властивості зростання/спадання функції та побудова графіків степеневих функцій) в темі «Властивості функції» та «Степенева функція», надано коментарі щодо можливих ефективних варіантів їх використання вчителем. Крім того, створено та запропоновано два проекти: практичного спрямування (економічна галузь) та проект творчого характеру (художня галузь). До кожного з них сформульовано постановку задачі для учнів, розроблено покрокову інструкцію виконання проекту та описано очікувані результати.

Підбрані завдання самостійної роботи «Функції та їх властивості» і створене відповідне тестування (додаток до роботи містить повний текст завдань та відповіді на них). Таким чином, розроблено завдання та вправи з використання ІКТ для поліпшення розуміння концепцій та покращення навичок учнів у навчанні теми.

Одержані результати та рекомендації мають широке практичне застосування, зокрема, вчителями математики при навчанні учнів способам діяльності в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу, при підготовці учнів до національного мільтипредметного тесту. Вчителі математики можуть запропонувати учням самостійно сформулювати алгоритми для відпрацювання способів діяльності в темі «Функції, їх властивості і графіки» або сформулювати їх разом на уроках з відповідних підтем. Матеріал роботи може бути використаний вчителями для роботи математичного гуртка або факультативних занять.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика: Алгебра і початок аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл.закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
2. Бевз Г.П. Моя методика математики / упоряд. і відп. редактор: В.О. Тадеєв. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021. 584 с.
3. Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
4. Гайштут О.Г., Ушаков Р.П., Шамович О.А. Математика : довідник для абітурієнтів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Літера ЛТД, 2013. 624 с.
5. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. Ужгород: В-во «Shark», 2015. 238с.
6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти // Постанова Кабінету міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898 «Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти» URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
7. Зубко В. Узагальнення і систематизація при вивченні функціональної лінії в шкільному курсі математики. *Фізико-математична освіта. Науковий журнал*. Суми: СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. № 1 (2). С. 13-17.
8. Іванюк Т. Особливості організації освітнього процесу з математики в 2022/2023 навчальному році. *Освітня галузь «Математика»*, 2022. С. 19 – 32.
9. Істер О.С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. Освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.
10. Казанчук І. Ю. Комп'ютерно орієнтовані засоби навчання для предметів фізико-математичного циклу. Вид-во : Таврійський вісник освіти, 2013. С. 21-30.

11. Козира В.М. Тематичні контрольні роботи з математики у форматі ЗНО. 10 кл.: навчальний посібник. Тернопіль: Астон, 2021. 120 с.
12. Кравчук В. Зошит для контролю навчальних досягнень з математики. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Рівень стандарту. Самостійні та контрольні роботи. Тернопіль: Підручники і посібники, 2019. 48 с.
13. Кузьмінський А.І., Омеляненко В.Л. Педагогіка: підручник, 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: Знання-Прес, 2004. 445 с.
14. Лов'янова І.В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія. Черкаси: Видавець Чабаненко Ю.А., 2014. 368 с.
15. Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. : А. Капіносов, Г. Гап'юк, Л. Кондратьєва, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль : Підручники і посібники, 2013. 336с.
16. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
17. Математика. Повний повторювальний курс. Підготовка до ЗНО та ДПА. Алгебра і початки аналізу. URL : <https://subject.com.ua/mathematics/zno/250.html>
18. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
19. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебраїчний тренажер: посібник для школярів та абітурієнтів. Вид. : 3-тє. Х. : Гімназія, 2016. 272 с.
20. Моторіна В. Г. Професійна компетентність учителя математики профільної школи: навч. посіб. для студ. природничо–математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. Харків: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, 2012. 268 с.

21. Моторіна В.Г., Сизоненко Є.Ю. Формування графічної грамотності майбутнього вчителя математики. Навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів. Харків, Видавництво «Мітра», 2014. 79 с.
22. Нелін Є.П. Алгебра в таблицях: навч. посіб. для учнів 7-11 кл. 8-ме вид. Харків: Гімназія, 2020. 128 с.
23. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. Освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.
24. Півторак А. А. Використання ІКТ при вивченні математики. Педагогічний дизайн. Вінниця : ММК, 2015. 74 с.
25. Проектування уроків математики, які базуються на компетентнісному та діяльнісному підходах: Методичний посібник. URL: https://wp.nmc-pto.rv.ua/DOK/TG2019/TG3_posibnyk.pdf
26. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 2012. №4 (30). С. 5-23.
27. Роганін О.М. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія). 10 кл.: рівень стандарту: робочий зошит для поточного та тематичного оцінювання Харків: Гімназія, 2020. 104 с.
28. Розуменко А., Лунгор І. Самостійна робота учнів професійно–технічних училищ у процесі навчання математики. *Фізико-математична освіта. Науковий журнал*. Суми: СумДПУ ім.А.С. Макаренка, 2013. № 1 (1). С. 39-45.
29. Светлова Т.В. Методичні рекомендації щодо навчання змісту предмета «Математика» у 2022-2023 навчальному році. *Математика*, 2022. С. 3 – 8.
30. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики і методичні проблеми їх використання. URL: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1055/813#.VDPbk2d_vE

31. Семеніхіна О.В. Програми динамічної математики як сучасний інструмент реалізації професійної діяльності вчителя математики. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції *«Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця»* (НПК2013). Суми : ВВП «Мрія», 2013. Т.1. С. 178-181
32. Семеніхіна О.В. Про реформування вищої педагогічної освіти в галузі математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. Суми: Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2014. №5 (39). С. 347-353.
33. Тарасенкова Н. А. , Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
34. Шамрай С. Уточнення переліку комп'ютерних математичних інструментів, необхідних вчителю математики. *Фізико-математична освіта. Науковий журнал*. Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. № 1 (2). С. 33-43.

ДОДАТКИ

Додаток А

Завдання самостійної роботи «Функції та їх властивості (10клас)» - тест на платформі Всеосвіта

Тип запитання: На встановлення відповідності. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №1 / 10

Функцію задано формулою: $f(x) = 0,5x^2 - 4x$

Поставте у відповідність.

1 $f(0)$	A 10
2 $f(1)$	B 0
3 $f(-2)$	B 0; 8
4 $x=...$, якщо $f(x)=0$	Г -3,5
	Д 0; -8

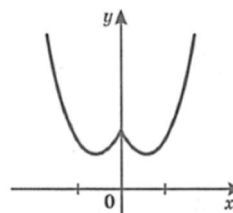
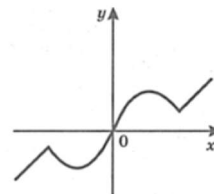
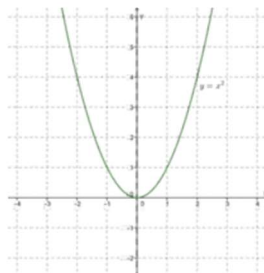
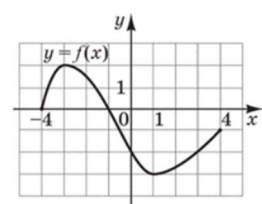
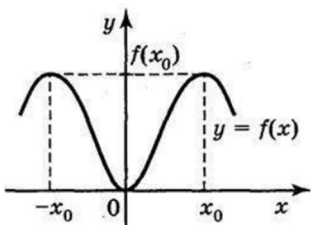
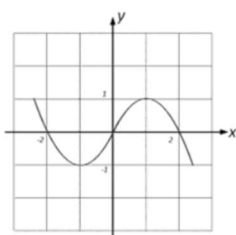
Правильна відповідь:

1 ↔ Б	2 ↔ Г	3 ↔ А	4 ↔ В
-------	-------	-------	-------

Тип запитання: З кількома правильними відповідями. Балів: 1/12 (8.33 %)

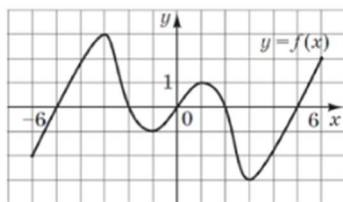
ЗАПИТАННЯ №2 / 10

Оберіть рисунки на яких показано парні функції



Тип запитання: Із заповненням пропусків у тексті. Балів: 2/12 (16.67 %)

ЗАПИТАННЯ №3 / 10



На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$ визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) Область значень $E(y) =$ [[Правильно: -3]; [Правильно: 3]]
- 2) Нулі функції $x =$ [Правильно: -5]; [Правильно: -2]; [Правильно: 0]; [Правильно: 2]; [Правильно: 5]
- 3) Вказати проміжки зростання $x \in$ [[Правильно: -6]; [Правильно: -3]] і [[Правильно: -1]; [Правильно: 1]] і [[Правильно: 3]; [Правильно: 6]]
- 4) Найбільше значення функції [Правильно: 3], найменше значення функції [Правильно: -3].

Тип запитання: З полем для вводу відповіді. Балів: 2/12 (16.67 %)

ЗАПИТАННЯ №4 / 10

Знайти область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{3x+2}}{x^2-x-2}$

Виконайте розв'язання в зошиті та прикріпіть фото.

Правильна відповідь:

[-2/3;2)об'єднання(2;+нескінч.)

Учень може додатково до відповіді прикріпити файл(-и).

Тип запитання: З полем для вводу відповіді. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №5 / 10

Знайдіть нулі функції: $y = x^2 - 8x + 15$

Виконайте розв'язання в зошиті та прикріпіть фото.

Правильна відповідь:

3; 5

Учень може додатково до відповіді прикріпити файл(-и).

Тип запитання: 3 однією правильною відповіддю. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №6 / 10

Яка з функцій непарна?

- $y = 4x^6 + 2x^4 + 3$
- $y = 4x^5 + 2x^3$
- $y = 4x^6 + 2x^3 + 3$
- $y = x^2 + 2x$

Тип запитання: 3 однією правильною відповіддю. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №7 / 10

Область значень функції $f(x) = x^2 - 3$:

- $(-\infty; +\infty)$;
- $[3; +\infty)$;
- $[-3; +\infty)$;
- $(-3; +\infty)$.

Тип запитання: 3 однією правильною відповіддю. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №8 / 10

Значення функції $y(x) = -3x + 8$ додатні, якщо:

- $x \leq 2\frac{2}{3}$;
- $x \geq 2\frac{2}{3}$;
- $x < 2\frac{2}{3}$;
- таких значень x немає.

Тип запитання: 3 однією правильною відповіддю. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №9 / 10

Якщо відомо, що $f(3) = 0$, то:

- $x = 3$ є нулем функції $y = f(x)$;
- $y = 3$ є нулем функції $y = f(x)$;
- $x = 0$ — це нуль функції $y = f(x)$;
- функція $y = f(x)$ не має нулів.

Тип запитання: На встановлення відповідності. Балів: 1/12 (8.33 %)

ЗАПИТАННЯ №10 / 10

Установіть відповідність між початком речення та його закінченням так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Функція $y=2-x$	A	не має нулів
2	Функція $y=x-2$	B	спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$
3	Функція $y=2$	B	має два нулі
4	Функція $y=x^2$	Г	зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
		Д	має один нуль

Правильна відповідь:

1 ↔ Б	2 ↔ Г	3 ↔ А	4 ↔ Д
-------	-------	-------	-------

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Лабунська Альона Володимирівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав(ла) і не одержував(ла) недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений(а). Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.



(підпис)