

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

В. о. завідувача кафедри

_____ Д. Є. Бобилєв

Реєстраційний № _____

«___» _____ 2022 р.

«___» _____ 2022 р.

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПРАМІДА»
З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ 3D МОДЕЛЕЙ**

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи МІм-17
освітньо-кваліфікаційного рівня «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Малої Ірини Олегівни
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук
Польгун К. В.

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

_____ (підпис) (прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПІРАМІДА» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ.....	6
1.1. Логіко-математичний аналіз теми «Піраміда»	6
1.2. Методика введення основних понять і фактів про піраміду в курсі стереометрії	11
1.3. Аналіз навчальних програм та підручників.....	20
1.4. Узагальнення та систематизація знань і умінь учнів з теми «Піраміда» ..	27
Висновки до розділу 1	34
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ 3D МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПІРАМІДУ.....	35
2.1. Аналіз наявних електронних додатків та їх можливостей для створення 3D моделей піраміди.....	35
2.2. Застосування елементів 3D моделювання на уроках геометрії під час вивчення теми «Піраміда».....	40
2.3. Використання 3D моделей піраміди у процесі підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.....	56
Висновки до розділу 2	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	73
ДОДАТКИ	78

ВСТУП

Актуальність дослідження. Успішність оволодіння тією чи тією професією, ефективність трудової діяльності значною мірою залежить від рівня розвитку в людини просторової уяви. Адже саме за допомогою уяви ми здійснюємо процеси аналізу та синтезу – виокремлення певних елементів об'єкта або, навпаки, об'єднання частин в одне ціле. Задля забезпечення розвитку просторової уяви людини необхідно всіляко збагачувати запас її геометричних уявлень ще зі шкільного віку. Зокрема, вивчення геометрії сприяє формуванню раціонального стилю мислення школярів із характерними для нього рисами обґрунтованості, критичності, раціональності тощо.

Одним із ключових понять геометрії є піраміда. Багато об'єктів живої природи та предметів, що нас оточують, мають форму піраміди. Досить часто постає практична необхідність обчислювати площу поверхні та об'єм піраміди, досліджувати її розміри, взаємне розташування з іншими геометричними тілами.

Водночас у значної частини учнів оволодіння знаннями про піраміду, побудова просторових фігур та розв'язування задач викликає певні труднощі. Зокрема, про це свідчать результати зовнішнього незалежного оцінювання [34]. Відтак задля полегшення сприйняття учнями навчального матеріалу, підвищення ефективності процесу формування просторової уяви доцільним є використання комп'ютерних 3D наочностей. Це і зумовило вибір теми дослідження **«Методика вивчення теми «Піраміда» з використанням комп'ютерних 3D моделей»**.

Означене питання частково висвітлено в роботах М. Жалдака, В. Бикова, Ю. Рамського, Н. Морзе, Ю. Горошка, С. Ракова, В. Клочка, А. Пенькова та інших.

Об'єктом дослідження є вивчення теми «Піраміда» в шкільному курсі геометрії.

Предметом дослідження є методика вивчення теми «Піраміда» з використанням комп'ютерних 3D моделей в курсі геометрії 11 класу на профільному рівні.

Мета дослідження полягає у виявленні методичних особливостей вивчення теми «Піраміда» в курсі геометрії старшої школи із застосуванням комп'ютерних 3D моделей.

Досягнення мети дослідження передбачає виконання таких **завдань**:

1) опрацювати наукову та навчально-методичну літературу з теми дослідження;

2) здійснити логіко-математичний аналіз теми «Піраміда» за підручником «Геометрія» для 11 класу профільного рівня авторів О. Істера та О. Єрґіної;

3) узагальнити та систематизувати теоретичні відомості з теми «Піраміда», структурувати наявні дидактичні матеріали та розробити власні;

4) порівняти існуючі електронні додатки для створення 3D моделей стереометричних об'єктів;

5) створити методичні розробки уроків з теми «Піраміда» з використанням комп'ютерних 3D моделей.

У процесі роботи були використані такі **методи** педагогічного дослідження: аналіз та порівняння навчально-методичної, наукової літератури з теми дослідження, метод моделювання.

Практичне значення дослідження полягає в можливості використання пропонованих дидактичних матеріалів вчителями математики на різних етапах проведення уроків геометрії. Розроблені 3D моделі можуть використовувати учні під час проведення самостійних математичних досліджень.

Апробація дослідження передбачає участь у Всеукраїнській науково-практичній конференції «Математичні, природничі та комп'ютерні науки, технології, навчання: науково-практичні рішення та підходи молодих науковців» (Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені

Володимира Винниченка у м. Кропивницькому) з доповіддю «Використання комп'ютерних 3D моделей для розв'язування задач на піраміду».

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПІРАМІДА» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Логіко-математичний аналіз теми «Піраміда»

У шкільному курсі геометрії старшої школи вивчення піраміди охоплює такі теми: «Піраміда та її елементи», «Правильна піраміда», «Перерізи многогранників», «Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди», «Об'єм піраміди» [26].

Про належний рівень сформованості знань, умінь і навичок з теми «Піраміда» свідчить те, що учень:

- **формулює:** поняття піраміди, зрізаної піраміди, n -кутної піраміди, висоти піраміди, площі повної поверхні піраміди, апофеми, правильної піраміди; теореми про знаходження площі повної поверхні піраміди ; теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди; залежність між кутами в правильній n -кутній піраміди; теорему про площу бічної поверхні зрізаної піраміди; теорему про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди;
- **записує та пояснює:** елементи піраміди; формули площі бічної та повної поверхні піраміди; формулу об'єму піраміди;
- **обчислює:** площі поверхонь та об'єм піраміди; градусні міри кутів піраміди; суму кутів піраміди; висоту; периметр піраміди; площу та периметр основи піраміди; градусну міру двогранного та тригранного кутів піраміди;
- **доводить:** властивості перерізів піраміди площиною, паралельних основі;
- **розв'язує задачі, що передбачають застосування:** формул площ трикутників; формул площ бічної та повної поверхні піраміди; залежності між кутами; залежності між кутами трикутників; алгоритму для знаходження залежності між кутами; формул залежності між кутами.

У шкільному курсі математики з темою «Піраміда» учні вперше знайомляться в 5 класі. Вони розглядають лише її елементи. Наступного разу учні зустрічаються з даною фігурою вже в старшій школі. Тема «Піраміда»

вивчається в розділі многогранники. У підручнику геометрії 11 класу профільного рівня авторів О. Істера та О. Єрґіної [14] учням для вивчення пропонуються основні елементи піраміди, її види, обчислення площ бічної та повної поверхні піраміди, її об'єм та побудова перерізів піраміди. Наявний теоретичний матеріал щодо двогранних та многогранних кутів, що дає можливість розглянути типові задачі на залежності між кутами в піраміді.

Здійснимо логіко-математичний аналіз теми «Піраміда» за згаданим підручником [14].

До *нових понять*, з якими ознайомлюються учні, належать апофема, n -кутна піраміда, висота піраміди, тетраедр, висота бічної грані піраміди, правильна піраміда, діагональний переріз, зрізана піраміда, висота зрізаної піраміди.

Поміж *базових понять* теми можна виокремити двогранний кут, радіус, півпериметр, периметр, площа, бічне ребро, многогранник, призма, площа повної поверхні, площа бічної поверхні, переріз, об'єм.

Новими фактами для учнів під час вивчення теми «Піраміда» є теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди, формула площі бічної поверхні, формули залежності кутів для правильних трикутних, чотирикутних та шестикутних пірамід, теорема про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди, лема про рівновеликість трикутних пірамід із рівними висотами і рівновеликими основами, теорема про об'єм піраміди, теорема про об'єм зрізаної піраміди.

Базовими фактами, необхідними для вивчення теми, є формула Герона, формули площі трикутника, формули площ чотирикутників, формула периметра та півпериметра трикутника, радіуси описаного та вписаного кіл.

Нові способи діяльності, якими мають оволодіти учні – залежність між кутами в правильній n -кутній піраміді, алгоритм залежності між кутами, побудова перерізів піраміди, побудова просторових фігур з використанням електронних додатків.

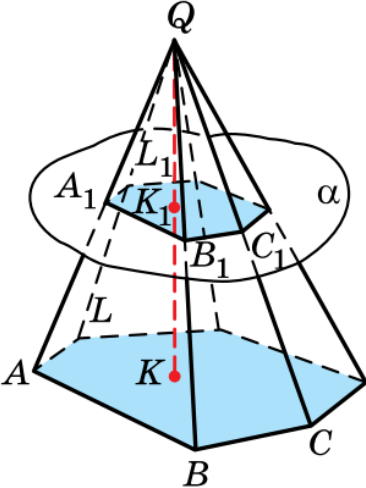
Базові способи діяльності, які лежать в основі оволодіння новими, – побудова перерізу, побудова елементарних просторових фігур, елементарні геометричні побудови.

Означення нових понять теми даються або описово, або конструктивно (табл. 1.1).

Таблиця 1.1.

**Логіко-математичний аналіз
формулювання означень нових понять теми**

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характерні властивості
Піраміда	Пірамідою називають многогранник, у якого одна з граней є довільним многокутником, а інші грані – трикутники зі спільною вершиною	Означення через найближчий рід та істотні властивості
Правильна піраміда	Піраміду називають правильною, якщо її основа – правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром многокутника	Описове означення
Тетраедр	Тетраедр – це трикутна піраміда	Описове означення
Висота піраміди	Висотою піраміди називають перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини основи	Означення через найближчий рід та істотні властивості
Апофема	Апофемою піраміди називають висоту бічної грані правильної піраміди, що виходить із вершини піраміди	Означення через найближчий рід та істотні властивості
Діагональний переріз	Діагональним перерізом піраміди називають переріз піраміди, який проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані	Означення через найближчий рід та істотні властивості
Зрізана піраміда	Розглянемо довільну піраміду $QABC...L$. Проведемо площину a , яка паралельна її основі. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди в точках $A_1; B_1; C_1, \dots, L_1$ (рис. 1.1) і розбиває піраміду на два многогранники. Многогранник, паралельними гранями якого є многокутники $ABC...L$ і $A_1B_1C_1...L_1$, чотирикутники $AA_1B_1B, BB_1C_1C, \dots, LL_1A_1A$, називають зрізаною пірамідою	Описове означення

	 <p style="text-align: center;">Рис. 1.1</p>	
Висота зрізаної піраміди	Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, проведений із деякої точки однієї основи до площини іншої основи	Означення через найближчий рід і істотні властивості
Правильна зрізана піраміда	Правильною зрізаною пірамідою називають піраміду, отримана з правильної піраміди перетином її площиною, паралельною основі	Описове означення

Найбільша кількість завдань, запропонованих у підручнику [14], присвячені знаходженню площ (площі повної та бічної поверхні піраміди, площі перерізу) та спрямовані на застосування понять, формул та властивостей піраміди (табл. 1.2).

Площею повної поверхні піраміди називають суму площ усіх її граней, а площею бічної поверхні піраміди – суму площ її бічних граней:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}.$$

Теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему:

$$S_{\text{біч}} = pl.$$

Теорема про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди. Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів на апофему:

$$S_{\text{біч}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l.$$

Таблиця 1.2.

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	Номер з підручника							
	Піраміда	Алофема	<i>n</i> -кутна піраміда	Висота піраміди	Правильна піраміда	Діагональний переріз	Зрізана піраміда	Висота зрізаної піраміди
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	–	–	3.3, 3.4	–	–	–	–	–
Вправи, спрямовані на виокремлення суттєвих властивостей та побудову об'єктів, які мають ці властивості	3.1–3.2, 3.23, 3.26	3.17	3.11, 3.12, 3.40	3.32, 3.33	3.41–3.44	–	3.15, 3.16	–
Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	3.71, 3.72	3.31, 3.34	–	3.50	–	–	–	–
Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	3.5– 3.10	3.35	3.18, 3.24, 3.25, 3.27–3.30	3.36	3.45, 3.46	3.21, 3.22	3.47, 3.48	3.82
Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	3.50–5.53	3.68	–	3.54	3.60–3.67	3.56– 3.58		3.69

Теорема про об'єм піраміди. Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

Теорема про об'єм зрізаної піраміди. Об'єм V зрізаної піраміди, висота якої дорівнює h , а площі основ – S_1 і S_2 , можна знайти за формулою:

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

1.2. Методика введення основних понять і фактів про піраміду в курсі стереометрії

Навчальний матеріал теми «Піраміда» можна розподілити на такі логічні частини: піраміда, її елементи та види; правильна піраміда та її властивості; площа поверхні піраміди; кути піраміди та залежність між ними; перерізи піраміди; зрізана піраміда та площа її поверхні.

Нижче наведено порівняльну таблицю означень основних понять теми «Піраміда» у підручниках з геометрії для учнів 11 класу (профільного рівня) авторів: 1) О. Істер, О. Єрґіна [14]; 2) Є. Нелін, О. Долгова [27].

Таблиця 1.3

За підручником О. Істера, О. Єрґіної	За підручником Є. Неліна, О. Долгової
Пірамідою називається многогранник, у якого одна з граней, яку називають основою, є довільним многокутником, а інші грані – трикутники зі спільною вершиною	Пірамідою називається многогранник, що складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, яка не лежить у площині основи, – вершини піраміди, і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи

Проаналізувавши перше означення, можемо зробити висновок, що автори підручника одразу формують в учнів уявлення про всі грані піраміди. Це, в свою чергу, значно полегшує засвоєння поняття піраміди та подальше її дослідження.

Провівши аналіз іншого означення, бачимо, що спочатку автори представляють піраміду як многогранник, а вже потім деталізують його опис. Це означення, на нашу думку, дещо складніше.

Під час вивчення поняття піраміди учні мають детально ознайомитися з елементами піраміди (бічна грань, основа, висота тощо). Для цього доцільно використовувати наочності. Варто звернути особливу увагу учнів на можливі варіанти розташування висоти піраміди, адже вона може проходити всередині піраміди (рис. 1.2) або зовні (рис. 1.3).

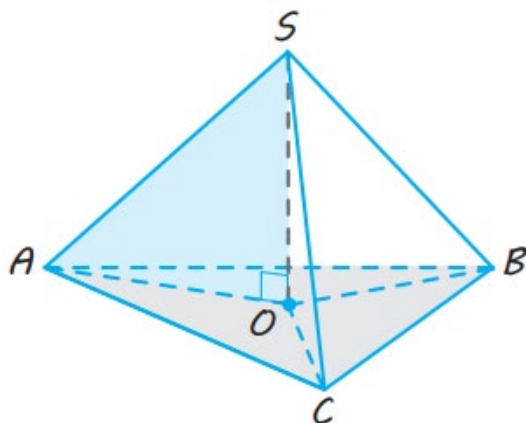


Рис. 1.2

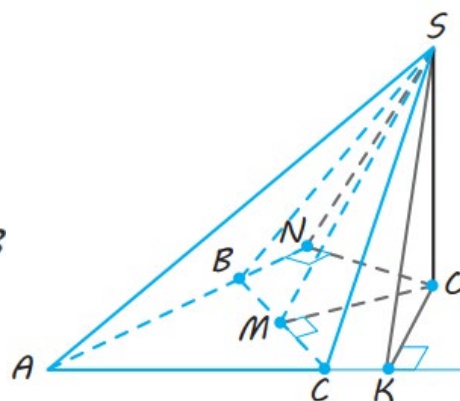


Рис. 1.3

Для піраміди можна виокремити групу властивостей, пов'язаних з висотою та кутом нахилу граней піраміди до площини основи.

Вводять новий елемент правильної піраміди – апофему. Апофема піраміди – це висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини (рис. 1.4). Вивчення поняття апофemi зазвичай не викликає в учнів особливих ускладнень [22].

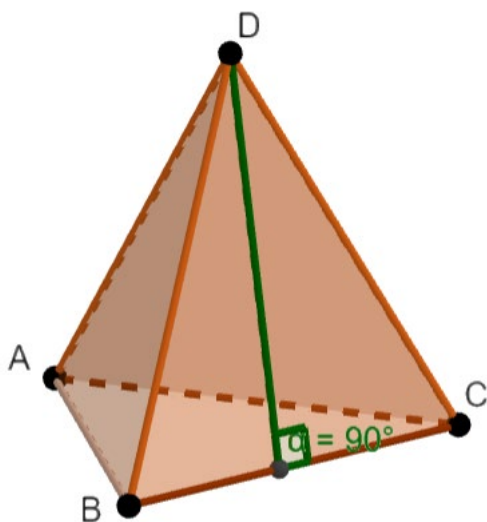


Рис. 1.4



Після вивчення поняття піраміди та її елементів варто розглянути деякі види піраміди та їх властивості. Автори О. Істер О., О. Єрґіна [14] пропонують розглянути деякі види пірамід та їх певні властивості на прикладі задач, в яких сформовані та доводяться дані властивості. Натомість інший авторський колектив [22] пропонує розглянути властивості піраміди, сформульовані без доведення. На даному етапі вивчення пірамід доцільно звернути увагу учнів на способи побудови пірамід.

Авторський колектив [27] виносить висоту піраміди як окрему тему для вивчення, що дає можливість сформулювати та довести властивості висоти в піраміді. Розглянемо деякі з них.

Властивість 1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і навпаки).

Доведення

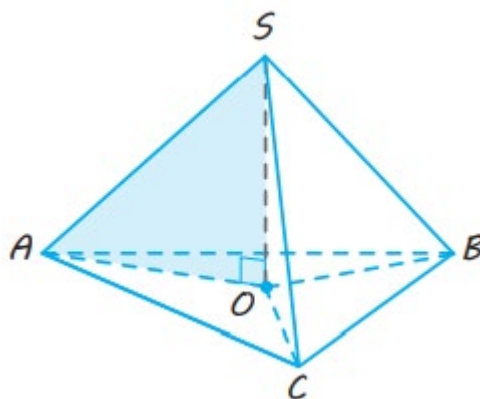


Рис. 1.5

Справді, нехай SO – висота піраміди $SABC$ (рис. 1.5). Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOA , SOB , SOC (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гіпотенузою або за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження – рівність за двома катетами).

Наприклад, якщо всі бічні ребра піраміди рівні: $SA = SB = SC$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OA = OB = OC$. Отже, точка O

рівновіддалена від точок A, B, C і є центром кола, описаного навколо основи піраміди – трикутника ABC .

Обернені властивості до зазначеної вище наводяться без доведення.

Властивість 2. Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

Властивість 3. Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то основою висоти піраміди є точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони основи [22].

Наступним етапом вивчення піраміди є засвоєння формул площ (площі бічної поверхні, площі повної поверхні піраміди).

Теорема 1. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми:

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot d.$$

Площею поверхні піраміди (або площею повної поверхні піраміди) називають суму площ усіх її граней [22].

Формулювання наведене вище можна записати в такому вигляді:

$$S_{\text{п}} = S_6 + S_{\text{осн}}.$$

Також у підручнику [22] запропонована формула площі, в якій використовують косинус кута нахилу бічних граней до основи піраміди:

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha},$$

де α – кут нахилу всіх бічних граней до основи.

Далі варто розглянути залежність між кутами в правильній n -кутній піраміді. Авторський колектив О. Істер, О. Єргіна об'єднав теоретичний матеріал в один пункт та систематизував в таблицю залежність між кутами в піраміді. Встановлення залежності між кутами та розв'язування задач даного типу є однією з основних тем при вивченні піраміди, тому важливим є

сприяння розумінню учнями даної теми. Важливим аспектом якісного засвоєння даного матеріалу є демонстрація кутів та їх залежності.

Доцільним в даному випадку є використання 3D моделювання, оскільки це сприяє формуванню в учнів просторової уяви, що, в свою чергу, покращує сприйняття матеріалу. Адже вивчення просторових кутів та їх взаємозв'язків для учнів є однією з найскладніших тем для сприйняття. Також варто звернути увагу учнів на алгоритм визначення залежності між кутами:

1) обрати в піраміді два прямокутних трикутники, які мають спільну сторону, кожен з трикутників має містити один із шуканих кутів;

2) виразити спільну сторону з трикутників, використовуючи тригонометричні функції кутів і довжину сторони основи піраміді;

3) прирівняти частини формул та поділити рівність на довжину сторони основи, вивести формулу залежності кутів.

Деякі автори підручників на профільному рівні включають даний алгоритм до параграфа та узагальнюють залежності між кутами у вигляді таблиці 1.4 [14].

Таблиця 1.4

Кути	Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\operatorname{tg} \alpha \cos \frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{tg} \beta$	$\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta$
$\alpha \leftrightarrow \gamma$	$\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$	$\sqrt{3} \cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$	$\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$	$\cos \alpha = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$
$\gamma \leftrightarrow \beta$	$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \beta$	$2 \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{3} \cos \beta$	$\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \cos \beta$	$2 \sin \frac{\gamma}{2} = \cos \beta$
$\gamma \leftrightarrow \delta$	$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\delta}{2}}$	$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$	$\sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$	$2 \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\delta}{2}}$
$\beta \leftrightarrow \delta$	$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \sin \beta \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$	$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{3} \sin \beta$	$\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \sin \beta$	$\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \sin \beta$
$\alpha \leftrightarrow \delta$	$\cos \frac{\delta}{2} = \sin \alpha \sin \frac{180^\circ}{n}$	$2 \cos \frac{\delta}{2} = \sqrt{3} \sin \alpha$	$\sqrt{2} \cos \frac{\delta}{2} = \sin \alpha$	$2 \cos \frac{\delta}{2} = \sin \alpha$

Наступним етапом вивчення піраміди є побудова її перерізів. Переріз піраміди, який проходить через два бічних ребра, що не лежать в одній грані, перетинає площину основи піраміди по діагоналі, називають діагональним перерізом піраміди [14].

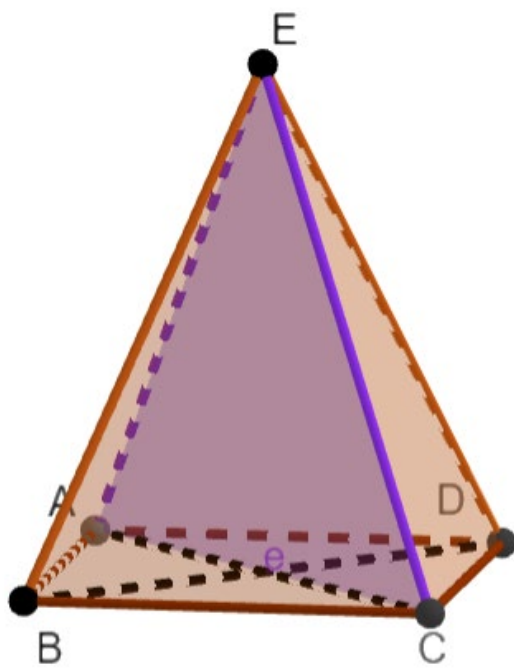


Рис. 1.6

EBD – діагональний переріз чотирикутної піраміди. Діагональним перерізом будь-якої піраміди є трикутник, вершина якого збігається з вершиною піраміди.

Авторський колектив [22] розглядає означення діагонального перерізу та метод його побудови – метод слідів. Автори О. Істер та О. Єргіна розбивають на пункти кожну тему підручника, зокрема й тему «Піраміда». Одним із пунктів є побудова перерізів піраміди. У ньому подано теоретичний матеріал та практичні завдання на знаходження діагонального перерізу.

Для формування в учнів задач на побудову перерізів доцільно запропонувати їм відповідні задачі та їх розв'язання.

Задача 3.21. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а висота – 5 см (рис. 1.7). Знайдіть площу перерізу піраміди, що проходить через її висоту і бічне ребро [14].

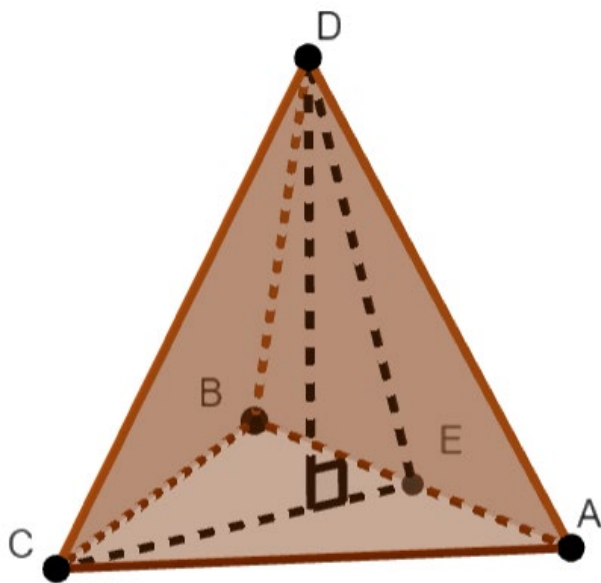


Рис. 1.7



Задача 3.22. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а висота – 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї піраміди [14].

Завершує цикл вивчення піраміди зрізана піраміда та її елементи. Вивчення нового поняття розпочинається з введення його означення. У підручниках по-різному представлено означення зрізаної піраміди.

В одному підручнику означення подано описово. Розглянемо довільну піраміду $QABC\dots L$. Проведемо площину α , яка паралельна її основі. Ця площина перетинає бічні ребра піраміди в точках $A_1; B_1; C_1, \dots, L_1$ і розбиває піраміду на два многогранники (рис. 1.8). Многогранник, паралельними гранями якого є многокутники $ABC\dots L$ і $A_1B_1C_1\dots L_1$, чотирикутники $AA_1B_1B, BB_1C_1C, \dots, LL_1A_1A$, називають зрізаною пірамідою [14].

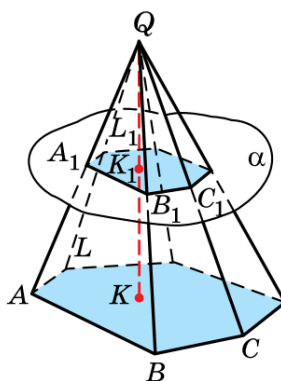


Рис. 1.8

Натомість строге означення зрізаної піраміди значно краще сприймається учнями та дає їм уявлення про нову фігуру. Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди. Ця площина розбиває дану піраміду на два многогранники: один многогранник є пірамідою, другий називають зрізаною пірамідою [22].

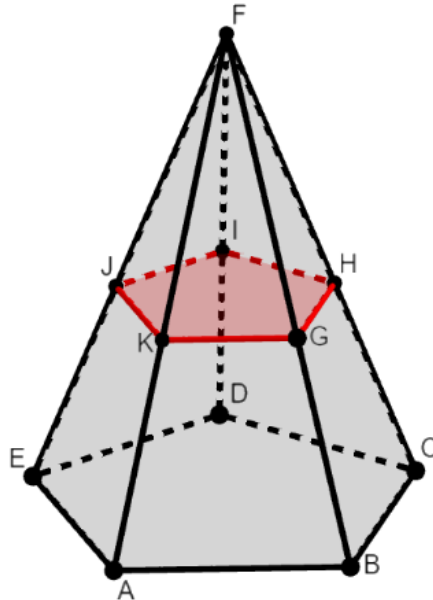


Рис. 1.9

Вслід за означенням зрізаної піраміди вивчають її елементи. Оскільки для зрізаної піраміди зберігаються всі ті самі елементи, що й для довільної піраміди, тому тут варто використати наочності та пригадати елементи піраміди.

Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу (рис. 1.10) [27].

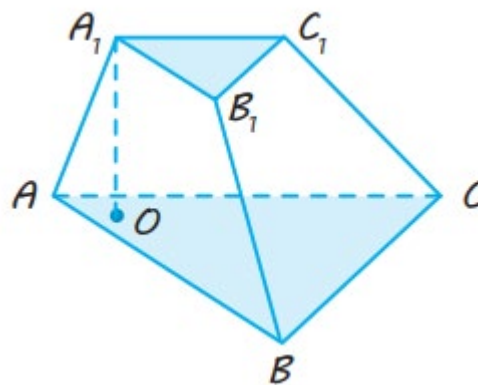


Рис.1.10

Апофемою правильної зрізаної піраміди називається відрізок, який сполучає середини ребр основ, що належать одній бічній грані [22].

Продовжуючи вивчення, варто вводити поняття площі бічної та повної поверхні зрізаної піраміди. Розглядається теорема, яка виносить на самостійне доведення.

Теорема 2 (про площу бічної поверхні правильної піраміди). Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему:

$$S_6 = pl.$$

Теорема 3. Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.

Твердження теореми 4.1 зручно подати у вигляді формули:

$$S_6 = \frac{1}{2}(P_{\text{осн}} + p_{\text{осн}}) \cdot d,$$

де $P_{\text{осн}}$ і $p_{\text{осн}}$ – периметри основ, d – довжина апофеми правильної зрізаної піраміди [27].

Тема об'єм піраміди висвітлюється в розділі об'ємів многогранників. Розглянемо об'єм піраміди та зрізаної піраміди.

Лема (про рівновеликість трикутних пірамід із рівними висотами і рівновеликими основами). Трикутні піраміди з однаковими площами основ і рівними між собою висотами мають однакові об'єми (рис.1.11).

Дана лема розглядається з доведенням.

Теорема 4 (про об'єм піраміди). Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

Доведення даної теореми розглядається для трикутної та n -кутної піраміди.

Теорема 5 (про об'єм зрізаної піраміди). Об'єм V зрізаної піраміди, висота якої дорівнює h , а площі основ – S_1 і S_2 , можна знайти за формулою:

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2).$$

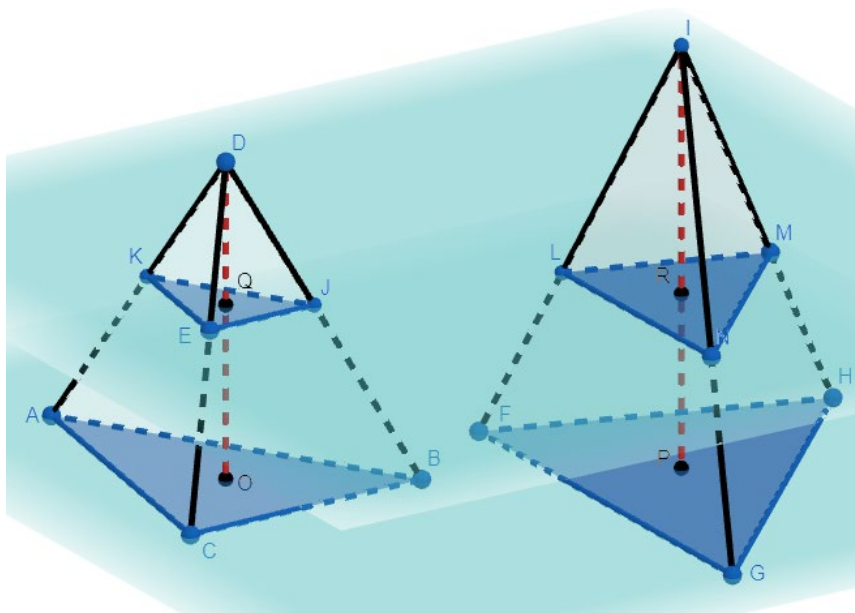


Рис. 1.11

Теорема розглядається з доведенням. Після теореми потрібно розглянути типові задачі на знаходження об'ємів пірамід, це сприяє засвоєнню даних формул.

1.3. Аналіз навчальних програм та підручників

Сайт Міністерства освіти і науки України пропонує навчальні програми для вивчення математики в 10-11 класах, що використовують в 2022-2023 н. р. Програми передбачають три основні рівні вивчення предмету: рівень стандарту [24], профільний рівень [25], поглиблений рівень навчання (для учнів які вивчають математику на поглибленому рівні з 8 класу) [26].

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (рівень стандарту) передбачає 3 години математики в тиждень, зокрема, у I семестрі – 2 години геометрії та 1 година алгебри; у II – навпаки. Загалом на вивчення алгебри відводиться 54 години, а геометрії – 51 година.

Програми, що передбачають вивчення математики на профільному рівні (учні обирають технічний профіль в 10 класі) та поглибленому (учні вивчають математику поглиблено з 8 класу) розраховані на вивчення математики в обсязі 6 годин алгебри та 3 годин геометрії на тиждень.

Навчальні програми, які ми розглянули вище, призначені для організації вивчення математики та розроблені на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням відповідних профілів навчання.

Провівши порівняльний аналіз, маємо, що на рівні стандарту учні ознайомлюються з основними видами просторових фігур, їх елементів, основними властивостями та формулами площ бічної та повної поверхні вивчених просторових фігур, вчать виконувати побудови фігур та їх перерізів.

Програма профільного рівня в 10 класі передбачає вивчення просторових фігур в розділі «Вступ до стереометрії». У даному розділі учні знайомляться з основними видами многогранників, вивчають серед них призму та піраміду, виконують їх зображення та зображення перерізів призм, вивчають метод слідів для побудови.

На профільному рівні вивчаються многогранні кути (двогранні та тригранні кути), різновиди многогранників та властивості їх елементів; вивчається зрізана піраміда, формули для обчислення площ бічної та повної поверхні многогранників.

На профільному рівні вивчення многогранників має більш високий рівень складності, тобто учні формулюють і доводять теореми та наслідки з них, проводять дослідження та аналіз многогранників та їх елементів, розв'язують задачі підвищеної складності; зображують рисунки за властивостями паралельного проектування та їх перерізи, розв'язують задачі на знаходження та побудову видимих та невидимих елементів досліджуваного многогранника.

Тепер проаналізуємо програму поглибленого вивчення. Учні знайомляться з просторовими фігурами наприкінці 9 класу, вивчаючи тему «Вступ до стереометрії». В 9 класі учні вивчають призму та піраміду, формули для обчислення площ та об'ємів цих тіл. За змістом та наповненням матеріал аналогічний матеріалу профільного рівня. Відмінності можна спостерігати лише в кількості годин, відведених на його опанування (в 9 класі – 20 годин). Водночас окремо вивчають елементи тетраедра.

Проаналізуємо основні вимоги до знань і вмінь учнів з теми «Піраміда».

Завершивши вивчення даної теми, учень на рівні стандарту:

- розпізнає та зображує піраміду та її елементи;
- формулює означення всіх елементів піраміди;
- записує та застосовує формули для обчислення площі бічної та повної поверхні піраміди, об'єму піраміди;
- має уявлення про переріз піраміди та може його побудувати.

Учень за результатами навчання на профільному рівні:

- розпізнає піраміду її елементи та види, класифікує їх;
- формулює та доводить теореми про площу бічної поверхні правильної піраміди, площу бічної поверхні зрізаної піраміди;
- розрізняє та зображає на рисунку видимі та невидимі елементи піраміди, правильну піраміду та тетраедр;
- обґрунтовує розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутного трикутника;
- характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії;
- розв'язує вправи на обчислення площ бічних поверхонь піраміди та зрізаної піраміди.

Отже, можемо зробити висновок, що вивчення даної теми на рівні стандарту реалізує загальні потреби учнів до вивчення фігури як базової. На профільному рівні учні детальніше вивчають дані поняття, що дає більше можливостей для них реалізувати свій науковий, творчий та дослідницький потенціал. Окрім цього, навчання на профільному рівні дає змогу більшою

мірою продемонструвати прикладну спрямованість математики, реалізує міжпредметні зв'язки з іншими науками (фізика, хімія, астрономія і тощо).

Вагому роль при вивченні математики відіграє систематична робота учнів з підручником. Проведемо порівняльний аналіз підручників з геометрії для 11 класу:

1) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів А. Мерзляка, Д. Номіровського, В. Полонського, М. Якіра [22];

2) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів Є. Неліна, О. Долгової [27];

3) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів О. Істера, О. Єрґіної [14];

У підручнику [22] стиль викладу навчального матеріалу абстрактно-дедуктивний. Підручник складається з чотирьох параграфів: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми тіл. Площа сфери», «Повторення курсу геометрії».

Кожен параграф підручника розподілений на пункти. Означення та основні поняття виділені жирним шрифтом, теореми та властивості – курсивом. Кожне поняття теми супроводжується рисунками. Частина властивостей сформульовані в задачі та виділені іншим шрифтом. Підказкою, що певне твердження є властивістю, слугує позначка у вигляді «ключа».

Тема «Піраміда» розкрита в першому параграфі розділу «Многогранники». Даній темі присвячені три пункти, зокрема, «Піраміда», «Площі поверхонь подібних многогранників», «Зрізана піраміда. Тетраедр». Також піраміда розглядається в темах «Комбінації конуса та піраміди» та «Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди».

Задачі підручника розподілені на три рівні. \circ – початковий та середній рівень, \bullet – достатній, $\bullet\bullet$ – високий рівень, $*$ – задачі з ускладненням. У підручнику переважають вправи початкового та достатнього рівня, певна кількість вправ високого рівня та декілька задач з ускладненням. Також в кінці теми висвітлені вправи для повторення. Завдання

розподілені кольорами на два типи. Рекомендовані для домашнього завдання – сині, завдання для роботи на уроці – чорні. Усні вправи відсутні в даній темі. Відсутні також прикладні задачі, тому при підготовці до уроку вчитель має знаходити або розробляти дані задачі самостійно.

У підручнику [27] стиль викладу навчального матеріалу абстрактно-дедуктивний. Підручник складається з трьох розділів: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл».

Кожен розділ підручника розподілений на параграфи. На початку кожного параграфа подається структурована основна інформація, що буде вивчатись в параграф (означення; властивості, теореми без доведення, види пірамід та їх рисунки). Далі в параграфі розповідається детально всі поняття та властивості, з доведенням та поясненням. Теоретичний матеріал супроводжується постійними посиланнями на рисунки. В параграфі представлені приклади розв'язування типових задач та паралельно з цим вони містять коментарі в яких описується як повинен міркувати учень при розв'язуванні задачі.

Означення та основні поняття виділені курсивом чи жирним шрифтом, теореми та властивості (назва та формулювання) – виділені також жирним шрифтом. Теореми мають позначку «галочки». Кожне поняття теми супроводжується рисунками.

Тема «Піраміда» частково розкривається в першому параграфі розділу «Многогранники». Подаються основні поняття, властивості та теореми про піраміду. Даній темі присвячені три пункти, зокрема, «Піраміда», «Розташування висоти в деяких видах пірамід», «Паралельні перерізи піраміди. Зрізана піраміда». Також піраміда розглядається в темах «Комбінації многогранників із кулею» та «Принцип Кавальєрі. Об'єм похилої призми. Об'єм піраміди і конуса».

У даному підручнику висота піраміди та її розміщення виноситься в окремий параграф для вивчення. Автор підручника пропонує властивості з доведенням для варіантів розміщення висоти та виду піраміди. Всі властивості

продемонстровані з доведенням та детальним проясненням ходу міркувань. Представлені пояснення побудови більш складних задач на знаходження висоти. Далі представлені розв'язання та хід міркувань задача на знаходження висоти та задачі для самостійного розв'язання.

Зрізана піраміда розглядається в розрізі вивчення теми «Паралельні перерізи піраміди. Зрізана піраміда», а тетраедр розглядається в темі «Правильні многогранники».

Задачі підручника розподілені на три рівні. ° – початковий та середній рівень, відсутня позначка – достатній та високий рівень, * – задачі з ускладненням. У кінці параграфа є задачі в рубриці прояви свою компетентність, де розміщені практичні задачі. В підручнику переважають вправи достатнього та високого рівня, певна кількість вправ початкового рівня та декілька задач з ускладненнями. Відсутній розподіл задач на рекомендовані для домашнього завдання та виконання в класі. Усні вправи відсутні в даній темі. Відсутні також прикладні задачі, тому при підготовці до уроку вчитель має знаходити або розробляти дані задачі самостійно.

У підручнику [14] стиль викладу навчального матеріалу абстрактно-дедуктивний. Підручник складається з чотирьох Розділів: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми многогранників», «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання».

Кожен параграф підручника розділений на пункти. Означення та основні поняття, теореми та властивості виділені жирним шрифтом. Кожне поняття теми супроводжується рисунками. Автори даного підручника пропонують вивчення даної теми зі знайомства з просторовою фігурою та вивчення її елементів та властивостей. Для закріплення певних властивостей чи теорем пропонується розглянути приклад типової задачі та її розв'язання з коротким поясненням.

Окремо для вивчення винесена правильна піраміда, її елементи та теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди. З доведення даної теореми виходить формульний запис теореми.

Авторський колектив виносить на розгляд залежність між кутами в правильній n -кутній піраміді. Спочатку демонструють на прикладі малюнку двогранні та тригранні кути в піраміді. Виведений алгоритм встановлення залежності між кутами, що значно полегшує діяльність в розв'язанні задачі. Взаємозв'язок кутів та формули для них представлені у вигляді узагальнюючої таблиці. Проте ці формули, можна вивести самостійно з алгоритму продемонстрованого в параграфі. Далі розглядається задача на взаємозв'язок кутів піраміди.

Наступним етапом є представлення перерізів піраміди, розглядають два перерізи довільний та діагональний. На діагональний переріз учням запропоновані дві змістовні задачі з коротким поясненням.

Завершує вивчення зрізана піраміда та її властивості. Детально розглядають елементи даної піраміди, та приклад на знаходження площі повної поверхні зрізаної піраміди.

Задачі підручника розподілені на три рівні. 1 – початковий, 2 – середній рівень, 3 – достатній, 4 – високий рівень, * – задачі з ускладненням, в кінці параграфа пропонуються «Життєва математика» та «Цікаві задачі для учнів неледачих». У підручнику представлена велика кількість задач для кожного рівня. Також в кінці теми висвітлені вправи для повторення. Завдання розподілені кольорами на два типи. Рекомендовані для домашнього завдання – сині, завдання для роботи на уроці – чорні. У кінці теми учням пропонують перевірити свою компетентність у вигляді тестування, яке оформлено в форматі ЗНО. Усні вправи відсутні в даній темі. Відсутні також прикладні задачі, тому при підготовці до уроку вчитель має знаходити або розробляти дані задачі самостійно.

Тетраedr розглядається в параграфі «Правильні многогранники», об'єм піраміди та зрізаної піраміди в розділі «Об'єми многогранників».

Отже, у кожному з підручників на належному науковому рівні, достатньо розлого подано теоретичний матеріал. Водночас найбільш доцільним, на нашу думку, є їх комбінування. Наприклад, використовувати таблиці з

узагальненнями з підручника [27], алгоритм встановлення залежності між кутами піраміди з підручника [14] тощо.

1.4. Узагальнення та систематизація знань і умінь учнів з теми «Піраміда»

Важливе місце у вивченні будь-якої теми в математиці посідає узагальнення та систематизація знань учнів. Це дає можливість не тільки повторити пройдений матеріал, а й звести його в певну систему, продемонструвавши зв'язки й відношення між її елементами.

Залежно від ролі і місця в навчальному процесі в науково-методичній літературі виокремлюють такі етапи узагальнення та систематизації:

- 1) первинне узагальнення;
- 2) локальні або понятійні узагальнення;
- 3) міжпонятійні узагальнення;
- 4) тематичні узагальнення та систематизації;
- 5) підсумкові узагальнення;
- 6) міжпредметні узагальнення [43].

Розглянемо запропоновані вище види узагальнення на прикладі теми «Піраміда».

Первинне узагальнення – це вид узагальнень, до яких належать найбільш елементарні. Тобто їх використовують для сприйняття та усвідомлення навчального матеріалу. Як результат – маємо отримати уявлення про предмети та явища.

До первинного узагальнення можемо віднести актуалізацію опорних знань учнів. Так, на цьому етапі доцільно поставити учням такі питання:

- Який многокутник називають пірамідою?
- Що називають основою, бічними гранями, вершиною та бічними ребрами піраміди?
- Що називають висотою піраміди?

– Що називають площею повної поверхні, площею бічної поверхні піраміди?

До локальних узагальнень варто віднести узагальнення, що здійснюються на уроці під час засвоєння нових понять. Основною метою даного виду узагальнення є виявлення причинно-наслідкових та інших видів зв'язків у дослідженні та вивченні піраміди та її властивостей.

До даного виду узагальнення можна віднести усні вправи або вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття.

Наприклад:

1. Назвіть фігури, зображені на рисунках, та поясніть, чим вони відрізняються:

Таблиця 1.5

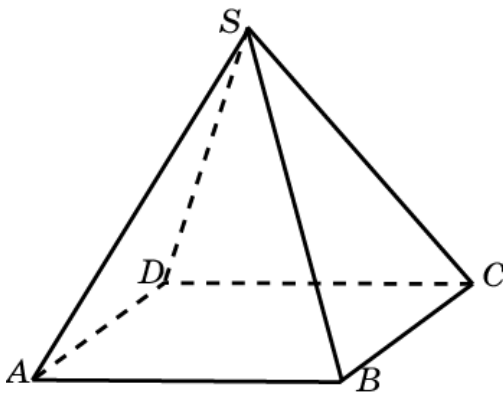


Рис.1.12

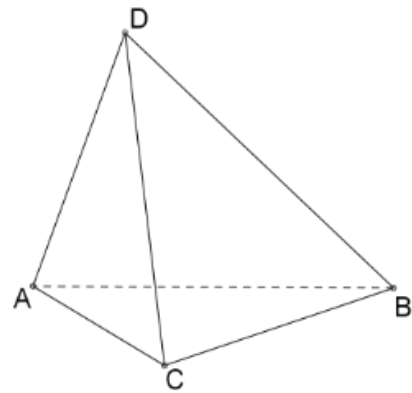


Рис.1.13

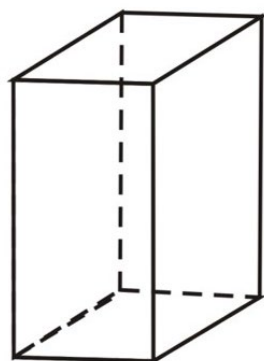


Рис.1.14

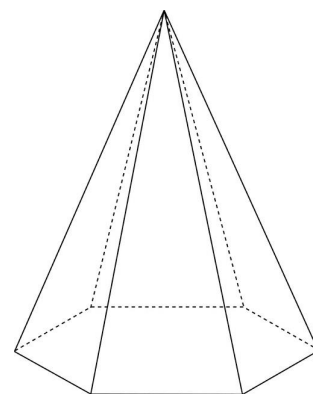


Рис.1.15

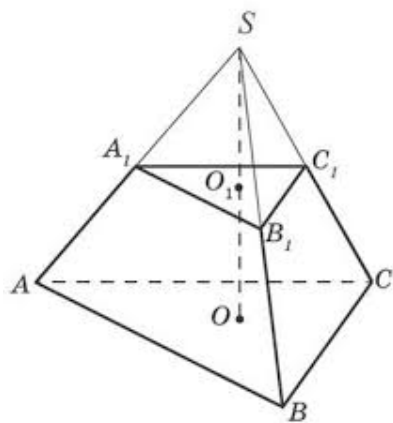


Рис.1.16

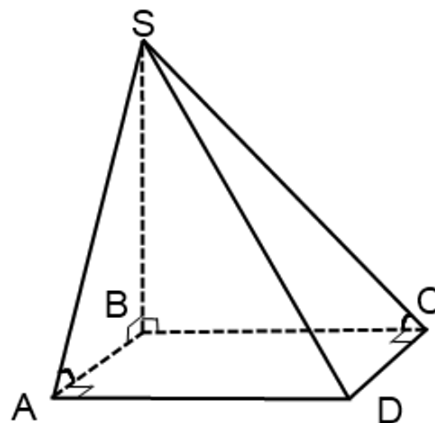


Рис.1.17

Міжпонятійні узагальнення та систематизація – вид узагальнень, які полягають у визначення суттєвих ознак і властивостей між поняттями, які вивчаються. Від менш загальних до більш загальних понять, в поєднанні цих понять в загальну систему, розміщення їх в «ланцюжковій» послідовності.

Призначення даного виду узагальнень в зведенні понять в систему для засвоєння певної теорії.

Наприклад: «Побудувати чи відтворити схему взаємозв'язків елементів піраміди та її властивостей. Піраміда → правильна піраміда → апофема → площа бічної поверхні піраміди.

Тематичне узагальнення та систематизація – це вид узагальнення, що має забезпечити засвоєння системи або циклу понять, вивчених за певний проміжок часу.

Підсумкове узагальнення – це узагальнення, яке слугує для встановлення зв'язків між системами знань та вмінь, засвоєними в процесі вивчення курсу.

Міжпредметні узагальнення і систематизації здійснюються із взаємопов'язаних предметів (наприклад, математика, фізика, хімія тощо). Це відбувається на окремих уроках в кінці вивчення теми або навіть всього курсу.

У комплексі вивчення теми передбачені уроки узагальнення та систематизації знань учнів. Проте проведення даного типу уроків перетворюється в повторення та відтворення попередньо вивченого матеріалу, а

це, в свою чергу, не відповідає меті, поставленій перед уроком. Тому під час уроку необхідно чітко дотримуватись його структури:

- 1) повідомлення теми та мети;
- 2) мотивація навчальної діяльності;
- 3) відтворення та коригування опорних знань;
- 4) узагальнення та систематизація понять;
- 5) засвоєння провідних ідей та теорій на основі систематизації;
- 6) рефлексія, домашнє завдання [14].

Тема уроку: Розв'язування вправ з теми: «Піраміда».

Мета уроку: *узагальнити й систематизувати* знання учнів з теми «Піраміда, її елементи та властивості», *удосконалити вміння* застосовувати формули для обчислення площ бічної та повної поверхні піраміди; *розвивати* просторову уяву учнів, вміння аналізувати та працювати творчо, інтерес учнів до геометрії; *виховувати* культуру мовлення та ведення математичних записів.

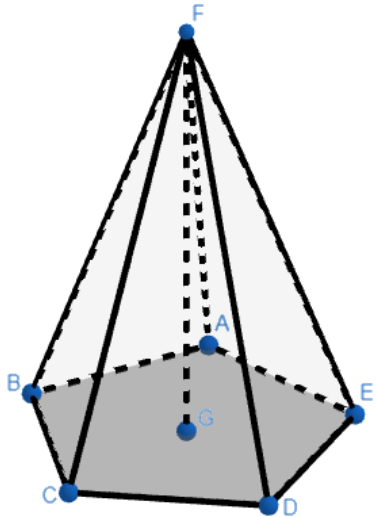
Організаційний момент. Вступне слово вчителя

Сьогодні наш урок присвячений такому знайомому та загадковому геометричному тілу, як піраміда. На ньому ми постараємося розкрити таємниці пірамід і здобути знання, які не тільки розширять ваш кругозір, а й будуть необхідні при розв'язуванні практичних задач.

Актуалізація опорних знань

Пригадаємо поняття піраміди та її елементів.

Кожен учень отримує картку з малюнком піраміди. Таких карток може бути декілька, залежно від видів піраміди. Учень має заповнити картку, вказавши елементи піраміди (Таблиця 1.6). У разі дистанційного проведення уроку, паперові картки можна замінити електронними документами. Це дає змогу працювати з усіма учнями одночасно. Загалом учням можна запропонувати 2-3 види пірамід. Потім під час перевірки результати доцільно вивести на екран. Так, учні зможуть виконати самоперевірку.

 <p>Рис.1.12</p>	Назва піраміди:
	Основа піраміди:
	Вершина піраміди:
	Бічні ребра:
	Ребра основи:
	Кількість бічних граней:
	Кількість вершин:
	Кількість ребер:

Розв'язування вправ

Задача 1. В Ісландії все частіше можна зустріти будинки, дах яких нагадує піраміду. Нижче зображена математична модель даху цього будинку та деякі його виміри.

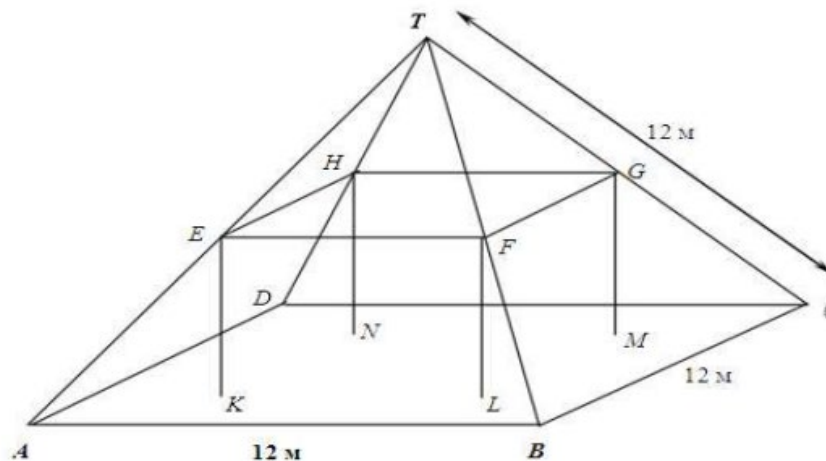


Рис. 1.13

На цій моделі підлога горища будинку – квадрат $ABCD$. Балки, на які спирається дах, є сторонами бетонного блоку, що має форму прямокутного

паралелепіпеда $EFGHKL MN$. E – середина ребра AT , F – середина BT , G – середина CT , H – середина DT . Усі ребра піраміди дорівнюють 12 м.

Завдання:

- 1) Обчислити площу підлоги горища (квадрат $ABCD$).
- 2) Знайти довжину горизонтального бетонного блоку EF та EH .

Розв'язання

- 1) $S_{\text{квадрата}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ м}^2$;
- 2) $EF = EH$ – середні лінії трикутника.
 $EF = EH = 12 : 2 = 6 \text{ см}$.

Відповідь: 144 м^2 ; 6 см.

Задача 2. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота однієї з бічних граней, проведена до ребра основи піраміди, – 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди [11].

Відповідь: $S_{\text{біч}} = 2H^2 \text{ctg} \beta \sqrt{2 + \text{ctg}^2 \beta}$.

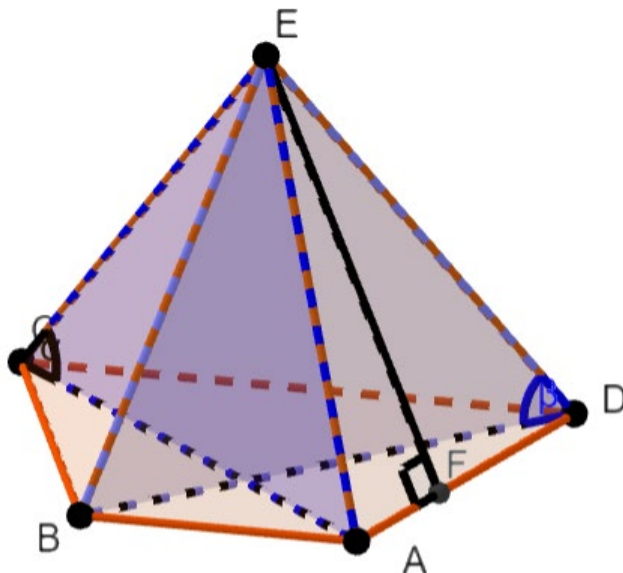


Рис. 1.13



Задача 3. У правильній чотирикутній піраміді кут між апофемою і площиною основи дорівнює α . Бісектриса цього кута перетинає висоту піраміди в точці, яка розміщена на відстані d від апофеми. Знайдіть бічну поверхню піраміди [10].

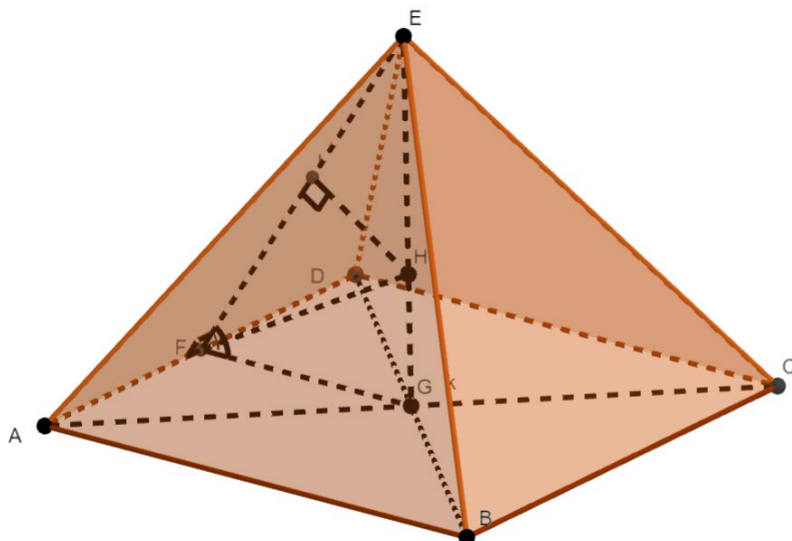


Рис. 1.14

Відповідь: $\frac{4d^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

Задача 4. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші – нахилені під кутом β . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta} (\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} + 1)$.

Рефлексія. Підсумки уроку

Права «Відкритий мікрофон»:

1. Мені сподобалося ...
2. Це важко, тому що ...
3. Мій настрій ...
4. Я навчився / навчилася ...

Домашнє завдання

Підготуватися до контрольної роботи з теми «Піраміда» та розв'язати задачі з презентації № 5; 6.

Під час роботи зі старшокласниками використовують такі форми й методи узагальнення та систематизації знань:

- розроблення опорних конспектів, схем, таблиць;



- розв'язування комплексних задач;
- робота з тестами;
- метод проектів [9].

Важливо, щоб учитель не просто надавав учням готовий алгоритм дій для розв'язування задачі, а спонукав їх до самостійних пошуків. Оскільки безпосередньо систематичне та послідовне вивчення матеріалу не гарантує необхідний рівень засвоєння знань. Проте самостійна робота учнів вимагає належної основи знань та вмінь для подальшого їх розвитку.

Узагальненню та систематизації знань учнів сприяють графічні зображення, схеми, таблиці. Вони можуть замінити громіздкі формулювання на короткі лаконічні, візуалізувати взаємозв'язки між об'єктами. Виділення написів різними кольорами, шрифтами сприяє кращій роботі зорової пам'яті, полегшує сприйняття та засвоєння навчального матеріалу.

Висновки до розділу 1

У першому розділі здійснено логіко-математичний аналіз теми «Піраміда», проведено порівняльний аналіз програм з математики для учнів старшої школи за трьома рівнями: стандарт, профільний та поглиблений. Простежено методику введення основних понять теми в шкільних підручниках.

Схема викладу матеріалу в підручника однакова – від простішого до складнішого. Вивчення теми починається з просторової фігури, її елементів та властивостей. Зрізану піраміду вивчають, проводячи аналогію зі звичайною пірамідою.

Проведено аналіз навчальних підручників з геометрії профільного рівня авторських колективів: 1) А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір; 2) Є. Нелін, О. Долгова; 3) О. Істер, О. Єргіна.

Проаналізовані види узагальнень та систематизації знань учнів та розроблені відповідно до них фрагменти уроків.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ 3D МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПІРАМІДУ

2.1. Аналіз наявних електронних додатків та їх можливостей для створення 3D моделей піраміди

З початку XXI ст. комп'ютери є невід'ємною частиною освітнього процесу. Спочатку його використовували як носій інтерактивних навчальних матеріалів, спеціального програмного забезпечення, динамічних наочностей тощо. За словами К. Польгун, змішане навчання, що охоплює традиційне та дистанційне, електронне, мобільне, сприяє створенню відкритого навчального середовища [с. 8, 31].

Для вивчення стереометрії необхідним є використання наочностей, оскільки це полегшує розуміння теми, розвиває інтерес учнів та їх пізнавальні навички. У даному підрозділі розглянуто інструментарій для створення необхідних матеріалів.

За рахунок використання наочностей та ІКТ можна частково узгодити час, що відводиться для вивчення певної теми та сприйняття учнями навчального матеріалу.

Додаток GeoGebra – це вільно-поширюване динамічне геометричне середовище, що дає можливість створювати різні геометричні побудови на площині і в просторів та їх перегляд в режимі доповненої реальності.

Даний додаток можна завантажити на смартфон або відкрити за посиланням в браузері комп'ютера з обов'язковим доступом до мережі Інтернет. Також можна завантажити 3D додаток на персональний комп'ютер.

Інтерфейс даної програми є інтуїтивно зрозумілим, що не викликає ускладнень в його вивченні. Учні з легкістю розберуться з використанням даної програми. Користування інтерфейсом даної програми можна розглянути на прикладі побудови піраміди в даному додатку, або надіславши учням відео-інструкцію для їх завчасного ознайомлення з даною програмою.

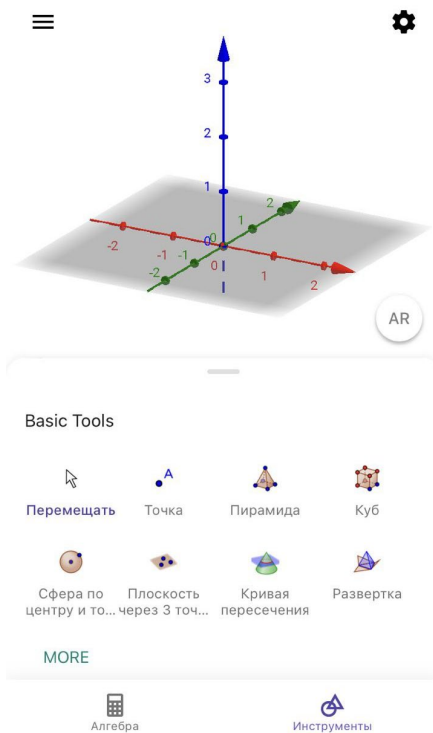


Рис. 2.1

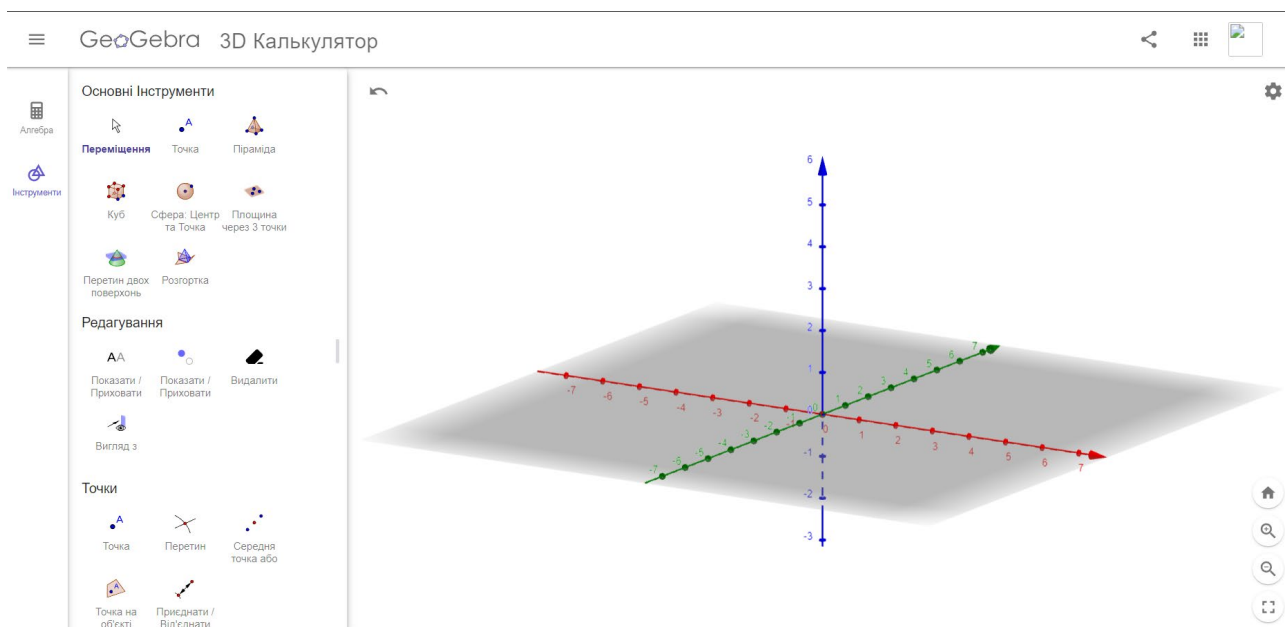


Рис. 2.2

Розглянемо можливості побудови геометричних фігур в даному додатку. Порівнюючи додатки для телефону (рис. 2.1) та персонального комп'ютера (рис. 2.2), можемо зробити висновок, що можливості побудови повністю співпадають.

Для побудови доступні такі фігури: пряма, точка, площина, піраміда, тетраедр, розгортка, перпендикуляр, перетин двох поверхонь, витискання піраміди.

У додатку GeoGebra можна виконувати побудови як використовуючи фігуру та її елементи для побудови фігур так і рівняння фігур, які будуть побудовані. Також в програму вбудована функція доповненої реальності. Дана функція доступна на телефоні та комп'ютері, що дає можливість проєктувати просторові геометричні фігури в реальному часі та просторі, створювати різні комбінації об'єктів, робити їх нерухомими в просторі. Також доступна можливість створювати розгортки фігур та виконувати з ними побудови.

Також варто відмітити, що для всіх фігур можна обирати зафарбування в кольори або обрати прозорий. Дані властивості дають можливість зобразити різні комбінації фігур та відрізнити їх елементи.

Розглянемо наступний додаток – Cabri 3D. Це комерційна програма, яка має місяць безкоштовного пробного часу для її використання. Для цього потрібно завантажити програму на персональний комп'ютер, аналога онлайн додатку в даної програми немає.

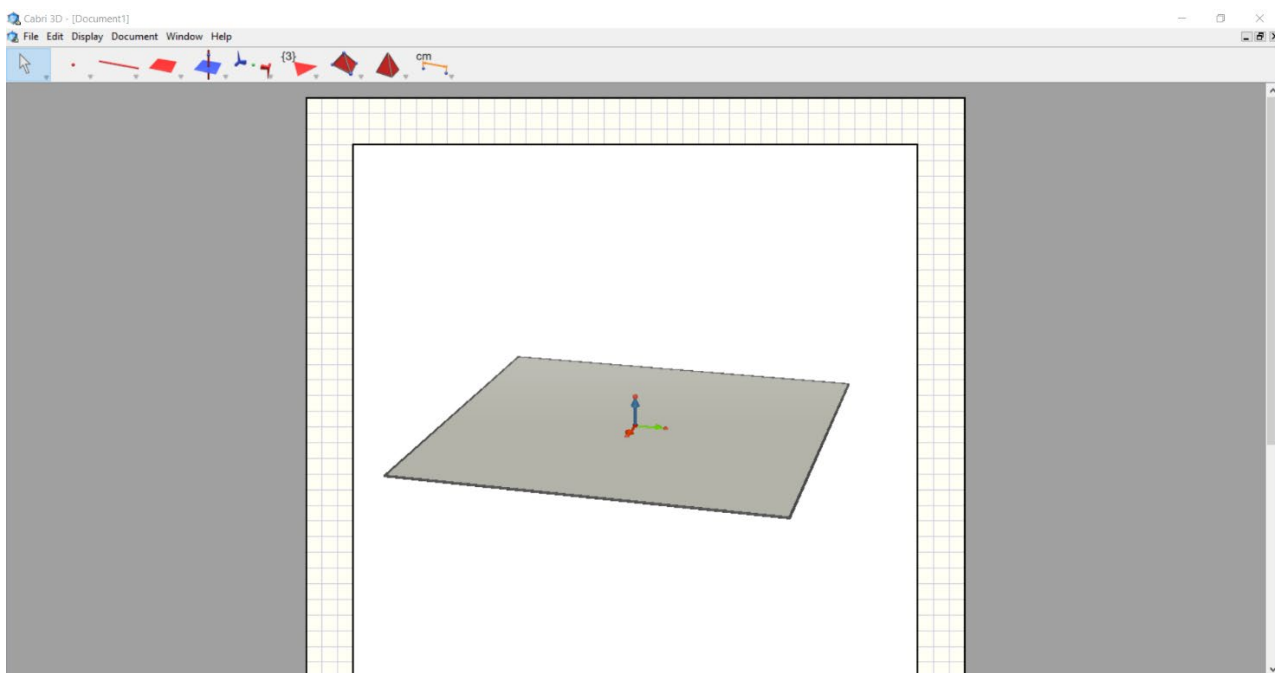


Рис. 2.3

Cabri 3D представляє собою динамічне зображення математичних об'єктів у просторі. Дана програма дозволяє будувати 3D фігури стереометрії, що значно полегшує сприйняття учнями інформації.

Інтерфейс даної програми є нескладним, інтуїтивно зрозумілим (рис. 2.3). Відсутній україномовний інтерфейс, що трохи ускладнює роботу учнів.

Для побудови доступні такі геометричні фігури: пряма, точка, n -кутники, площина, піраміда, тетраедр, розгортка, перпендикуляр, перетин двох поверхонь.

Порівняємо деякі елементарні побудови в графічних додатках. Побудуємо чотирикутну піраміду та проведемо в ній апофему та висоту. Піраміду на рис. 2.4 побудовано в додатку GeoGebra, на рис. 2.5 – в Cabri 3D.

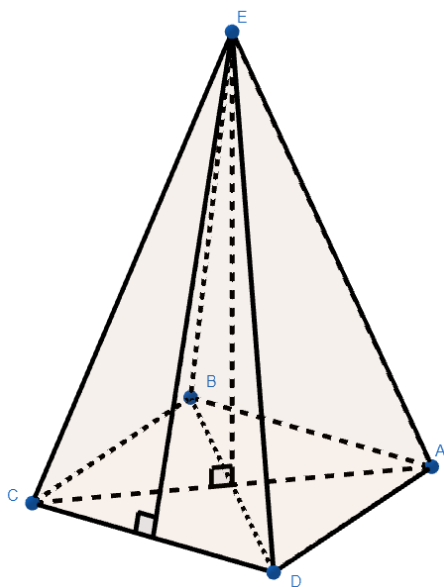


Рис. 2.4

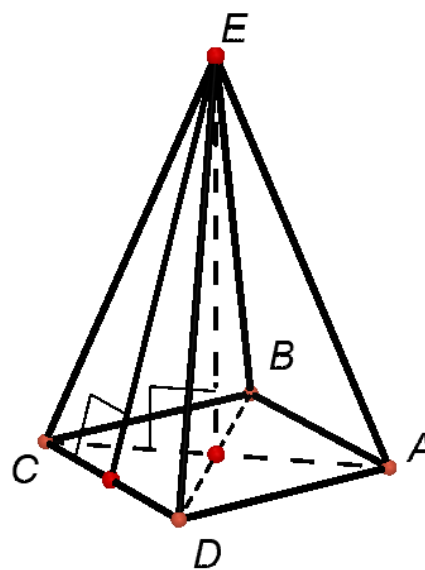


Рис. 2.5

Розглянемо безпосередньо програми для 3D моделювання. Програма tinkercad – це безкоштовна онлайн-програма призначена для 3D моделювання, що працює у веб-браузері. Дана програма призначена для друку 3D моделей, в тому числі й піраміди.

Проте в даній програмі неможливо здійснити побудову плоских фігур та елементів піраміди. Можна виконувати лише елементарні комбінації піраміди з

іншими фігурами. Інтерфейс даної програми є яскравим, легким в користування, складнощів в побудові не виникає (рис. 2.6).

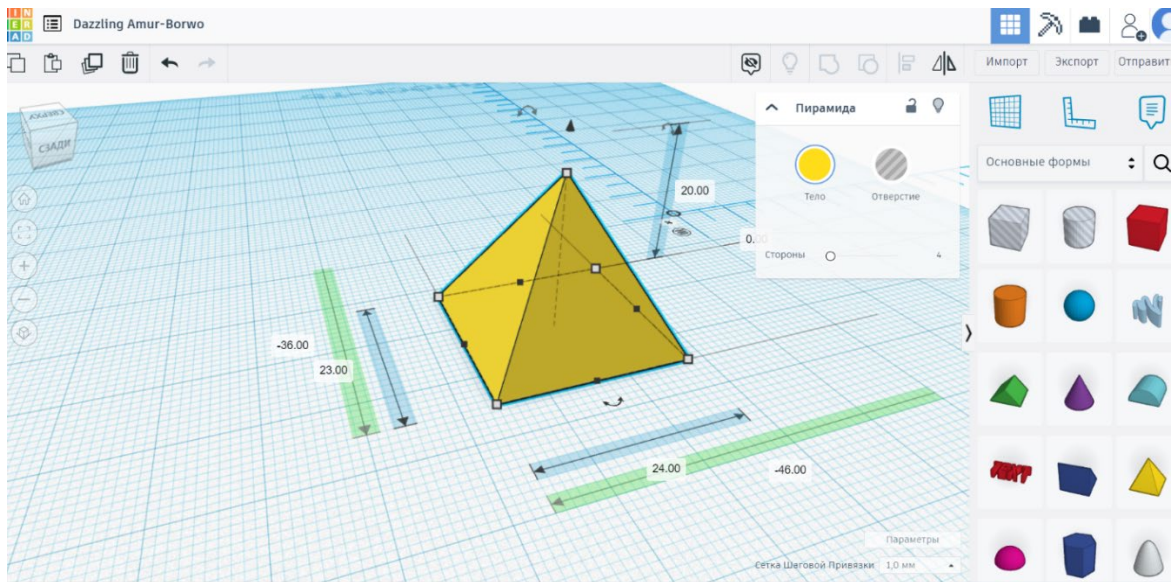


Рис. 2.6.

Популярним для 3D моделювання є середовище програми Blender. Даний програмний пакет призначений для створення тривимірної комп'ютерної графіки з засобами моделювання, анімації, рендерінгу та обробки. Програма дає можливості для роботи з деякими геометричними фігурами планіметрії та стереометрії. Фігура піраміди відсутня, проте її можна створити в даній програмі. Фігура не може бути прозорою та складно побудувати всередині піраміди елементи.

За допомогою даних програм можна створити практично будь-яку за рівнем складності 3D модель об'єкта, крім того, кожна з них містить вузькоспеціалізовані інструменти тривимірного моделювання.

Графічним калькулятором є програма Desmos. Він розроблений як для персонального комп'ютера, так і для телефону. Проте графічний калькулятор не підтримує розробку 3D моделей. На основі калькулятора створений Desmos classroom, що дозволяє виконувати просторові побудови геометричних фігур та виконувати вправи з ними.

Проте розробки даних фігур є лише імітаціями просторових фігур. Вони зображаються на площині та не мають можливості розгляду фігури в 3D

просторі. Розглянемо інтерфейс програми Desmos та приклад побудови піраміди (рис. 2.7).

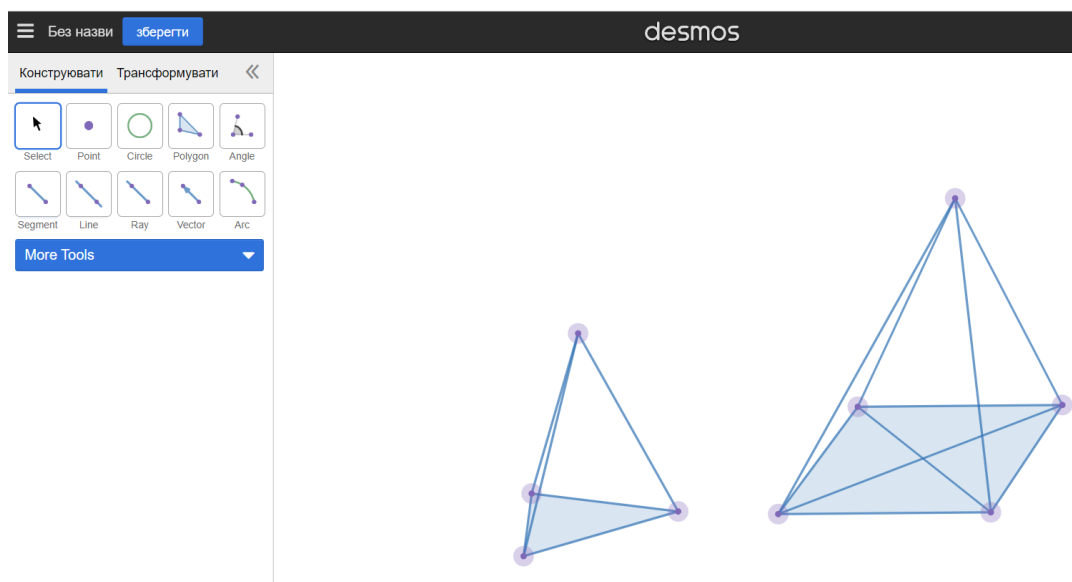


Рис. 2.7

2.2. Застосування елементів 3D моделювання на уроках геометрії під час вивчення теми «Піраміда»

Стереометричні задачі займають особливе місце у шкільному курсі математики. Для розв'язання задач цього типу застосовуються в комплексі знання та вміння учнів з арифметики, алгебри, тригонометрії, планіметрії, стереометрії та початків аналізу. Розвитку математичної культури та просторової уяви сприяє поєднання арифметичних обчислень, геометричних побудов, досліджень та задач на доведення геометричних фігур і їх властивостей.

Проте завдання з розділу стереометрії викликають в учнів значні труднощі через недостатній рівень розвитку їх просторової уяви. Адже рисунок, зроблений на площині, не завжди наочно відображає властивості, які мають стереометричні тіла.

Найважливішу роль в розв'язанні геометричних задач відіграє побудова рисунка до задачі. Це є запорукою швидкого та правильного розв'язання задачі.

Використання 3D моделювання дає змогу демонструвати об'єкт з усіх боків, змінювати ракурс, повертати, вносити корективи тощо, відобразити його динаміку. Також слід зазначити, що 3D моделі можна використовувати потім багаторазово, в тому числі і для виготовлення прототипів або макетів.

Перш ніж переходити до створення тривимірної моделі, необхідно провести детальний аналіз геометричної фігури та її елементів, пригадати основні означення та властивості.

На уроках геометрії побудова об'єктів з двовимірної площини в тривимірну та оперування ними, дає можливість легше пояснювати складні елементи.

До переваг організації навчання з використанням технологій 3D моделювання належать:

- зменшення часу на пояснення нового матеріалу;
- організація освітнього процесу за вимогами нових освітніх стандартів;
- підвищення ефективності роботи педагога;
- якісна побудова в просторі елементарних та складних зображень;
- складання розгортки об'ємних фігур за їхніми зображеннями і навпаки;
- змінювання структури об'єкта, його розташування в просторі, «розглядати одну й ту саму фігуру з різних точок зору»;
- розпізнавання фігур або елементів фігур по їх ознаками або властивостями;
- побудова просторових фігур на площині;
- застосування навичок роботи з проєкційними кресленнями;
- правильна оцінка розмірів геометричних фігур, їх положень в просторі або на площині «на око».

Застосовувати 3D технології можна не тільки під час проведення уроків, але також для здійснення позаурочної та колективно-творчої діяльності, постановки додаткових завдань та домашньої роботи.

Науковці вважають, що в навчанні найпоширеніша активна репродуктивна уява, коли учень, докладаючи зусилля, здатний «відновити конкретний образ наявної ситуації за тими відомостями або інформації, яка йому повідомляється» [11]. Наприклад, створення тривимірного образу геометричної фігури на основі її опису або двовимірного зображення.

Розглянемо конспекти уроків різних типів з теми «Піраміда».

Конспект уроку №1

Тема уроку: «Піраміда, види пірамід, їх властивості».

Мета уроку: формування понять «піраміда», «основа пірамід», «вершина пірамід», «бічні ребра пірамід», «висота пірамід»; вміння учнів знаходити елементи пірамід; розвивати просторову уяву, пам'ять, уміння проводити аналогії; виховувати наполегливість, працьовитість.

Обладнання: моделі пірамід.

Тип уроку: засвоєння нових знань

Хід уроку

I. Організаційний етап

II. Актуалізація опорних знань

1) Назвіть фігури, зображені на малюнках:

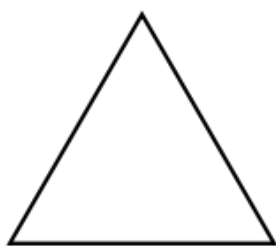


Рис.2.8

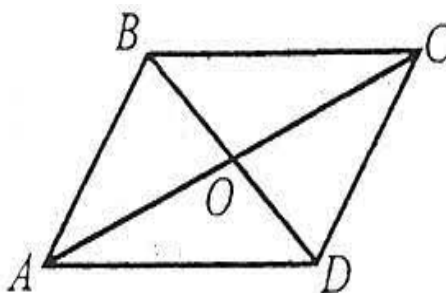


Рис.2.9

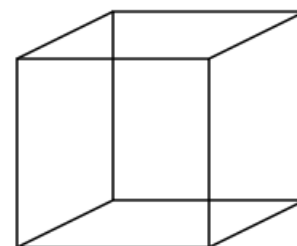


Рис.2.10

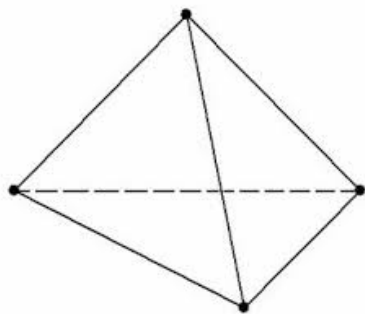


Рис.2.11

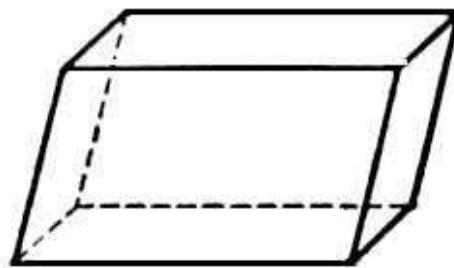


Рис.2.12

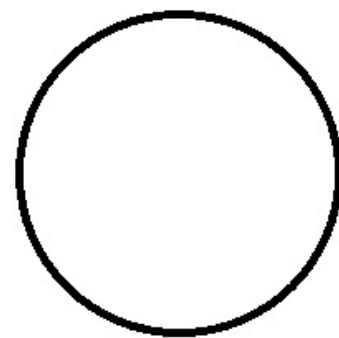


Рис.2.13

З якою з фігур ми з Вами не працювали?

III. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Пірамідою (n -кутною) називається многогранник, у якого одна грань є довільним n -кутником, а інші n граней – трикутники, які мають спільну вершину. n -кутник називається *основою*, а трикутники – *бічними гранями*. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*.

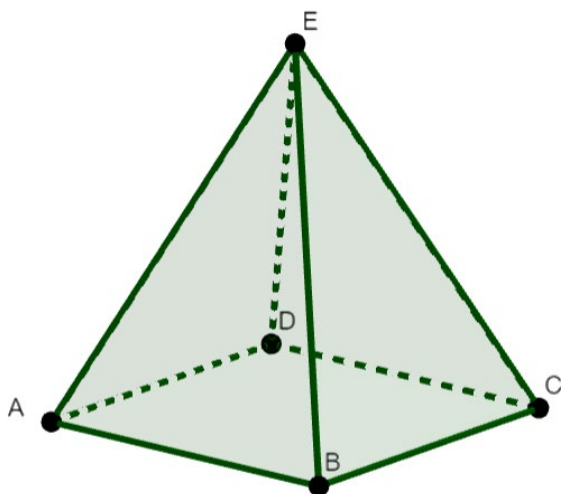


Рис. 2.8



На рис. 2.8 зображено піраміду, основа якої – многокутник $ABCD$, інші грані – трикутники ADE, DCE, ECB, ABE . Ці грані називають бічними гранями піраміди. Їхню спільну точку – точку E – називають вершиною піраміди. Піраміду, зображену на рис. 2.8 Називають пірамідою $EABCD$. Ребра піраміди, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи піраміди, називають бічними ребрами піраміди. На рис. 2.8 це відрізки EC, ED, EA, EB .

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний багатокутник, а основа висоти збігається з центром цього багатокутника. Всі бічні ребра правильної піраміди рівні, а бічні грані – рівнобедрені трикутники.

Висота піраміди – це перпендикуляр, опущений з вершини на основу піраміди (рис. 2.9).

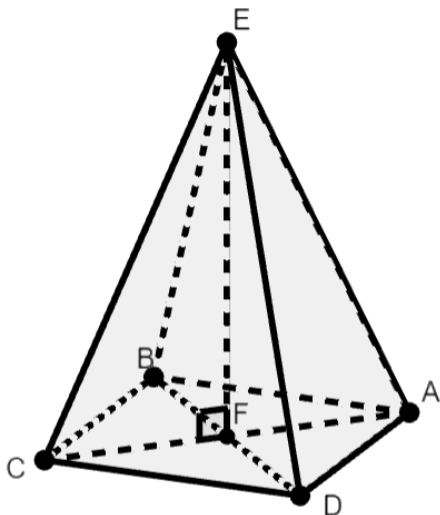


Рис. 2.9



Апофема – це перпендикуляр бічної грані піраміди, опущений з вершини піраміди до сторони основи (рис. 2.10).

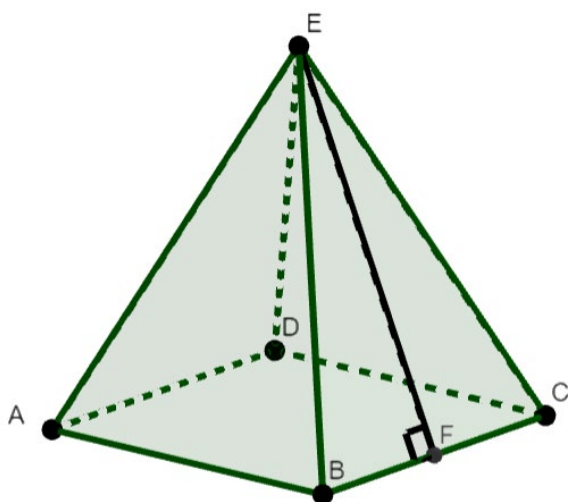


Рис. 2.10



Бічна поверхня піраміди – це сума площ всіх бічних граней піраміди.

Повна поверхня піраміди – це сума площ бічної поверхні та основи піраміди.

Теорема 1. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.

IV. Закріплення й осмислення нового матеріалу

Розв'язування задач

Задача 1. Побудувати в додатку довільну піраміду та дослідити її за такими пунктами:

- вид піраміди;
- вершини, грані, ребра піраміди;
- побудувати висоту та апофему піраміди.

3.3. Скільки граней і скільки ребер має семикутна піраміда [14]?

3.8. Апофема правильної піраміди дорівнює 5 см, а периметр основи – 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди [14].

3.9. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані піраміди дорівнює 15 см^2 [14].

3.9. Площа повної поверхні піраміди дорівнює 250 см^2 , а площа її бічної поверхні – 200 см^2 . Знайдіть площу основи піраміди [14].

3.11. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює:

1)13; 2)16; 3) 2011; 4) 2012 [14]?

3.13. Сторона основи правильної восьмикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди [14].

IV. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1. Дайте означення піраміди (основи піраміди, бічних граней, ребер, висоти).

2. Бічні ребра піраміди рівні. У яку точку проектується її вершина?

3. Бічні грані піраміди однаково нахилені до основи. У яку точку основи проектується її вершина?

4. Скільки бічних граней, перпендикулярних до площини основи, може мати піраміда?

V. Домашнє завдання

Одним із видів навчання учнів старших класів є метод проектів. Він орієнтований на самостійну діяльність учнів – індивідуальну, парну, групову, спрямовану на розв'язання конкретної проблеми з використанням різноманітних методів і способів навчання, знань з різних галузей науки. Використання проектних технологій є так званим «містком» між теорією і практикою в процесі навчання, виховання і розвитку особистості учня.

Конспект уроку № 2

Тема уроку: «Розв'язування вправ з теми: Піраміда».

Мета уроку: узагальнення та систематизація знань учнів, розширення кругозору учнів з теми піраміда; розвивати просторову уяву, пам'ять, уміння проводити аналогії; виховувати наполегливість, працьовитість.

Обладнання: моделі пірамід.

Хід уроку

Етап 1. Вибір теми проекту – засідання «круглого столу».

На даному етапі учні обговорюють тему свого проекту. Наприклад:

- 1 група – географи;
- 2 група – підприємці;
- 3 група – архітектори.

Етап 2. Вибір теми і визначення мети проекту.

Цей етап є досить складним, але дуже важливим, адже потрібно допомогти учням з вибором теми проекту та мети дослідження. Важливо саме допомогти учням з вибором теми, а не запропонувати учням тему дослідження.

Учні поставили перед собою таку мету:

- 1) розширити знання учнів про піраміду та її використання в прикладних задачах;
- 2) надати учням можливість проявити ініціативу і самостійність;

3) стимулювати використання різноманітних методів вивчення теми: інтерв'ю, вивчення літератури, пошук інформації, виготовлення і використання наочності;

4) закріпити навички оформлення результатів своєї роботи та складання повідомлень за її результатами;

5) презентувати проекти.

Міждисциплінарні зв'язки розкриваються між такими предметами: географія, економіка, інформатика, мистецтво, технології.

Етап 3. Вибір методів і матеріалів для роботи над проектом.

Різнманітні методи роботи над проектом дають можливість учням розширяти власний кругозір та піднести діяльність на високий дослідницький рівень.

Учні мають ознайомитися з доступними для них методами роботи: інтерв'ю, опитування, анкетування, співбесіда, дослідження літератури, пошук інформації через мережу Інтернет, побудова схем та діаграм тощо.

Для роботи над проектом кожна група має виготовити на вибір з теми «Піраміда» схему, буклет, узагальнюючі картки тощо

Етап 4. Робота над проектом.

Основна частина роботи над дослідженням. Роль вчителя на даному етапі – це помічник, фасилітатор, який неявно керує проектом, допомагає та коригує роботу учнів.

1 група – географи. Вони досліджують піраміди в країнах світу, їх розміщення, вито і тд. Розв'язують задачі пов'язані з пірамідою Хеопса та Майя.

2 група – підприємці. Дана група досліджує застосування піраміди в підприємницькій діяльності (виготовлення палаток, свічок та побутових виробів).

3 група – архітектори. Досліджують використання піраміди в будівництві.

При розв'язуванні задач практичного змісту учні виконують побудову малюнків в 3D додатку Geogebra або інших аналогічних програмах.

Етап 5. Презентація проекту.

Важливим аспектом проектної технології є оформлення роботи. Коли інформація зібрана, оброблена і висновки підведені, учні працюють над оформленням зібраних матеріалів та оформлення кінцевого результату роботи. Результати дослідження учні публікують на розробленому сайті та презентують на уроці.

Конспект уроку № 3

Тема уроку. Розв'язування вправ

Мета уроку: розв'язувати задачі на знаходження двограних та тригранних кутів; застосовувати формули залежності між кутами та навчитись розв'язувати задачі без формул залежності; інтелект учнів, уміння аналізувати, робити висновки за аналогією; культуру мовлення, чіткість і точність думки, критичність мислення, здатність відчувати красу ідеї, методу розв'язання задачі або проблеми; інтерес до вивчення математики, потяг до наукової творчості.

Обладнання: моделі пірамід.

Тип уроку: застосування набутих знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

На минулому уроці ми розглянули нову просторову геометричну фігуру піраміду, вивчили площу її бічної і повної поверхні. Розглянули основні формули і розв'язали найпростіші завдання. А далі необхідно поглибити свої знання, та застосовувати набуті навички.

II. Мотивація навчальної діяльності

Вправа «дерево очікувань» – напишіть, що Ви очікуєте від сьогоднішнього уроку [Додаток А].

III. Актуалізація опорних знань

Проводимо в формі веб-вікторини.

IV. Застосування набутих знань, формування вмінь і навичок. (20хв.)

3.84. У правильній чотирикутній піраміді кут нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює 60° . Знайдіть тангенс кута нахилу бічної грані до площини основи.

3.68. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а площа бічної поверхні – 18 см^2 . Знайдіть кут нахилу бічної грані до площини основи [14].

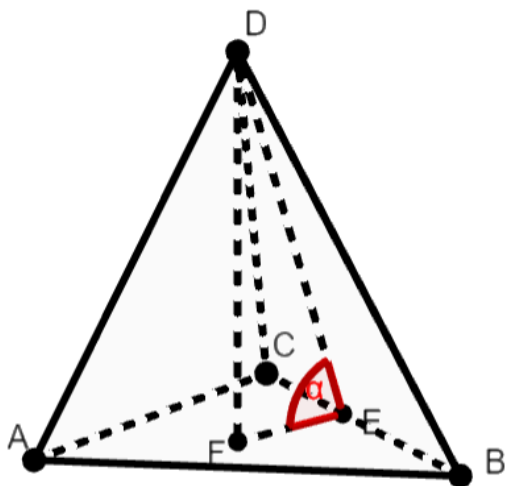


Рис. 2.12



Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

1.75. Висота трикутної піраміди дорівнює 1 см, перетинає основу та рівновіддалена від сторін основи. Сторони основи дорівнюють 19 см, 16 см і 5 см. Знайдіть двогранні кути при основі піраміди [14].

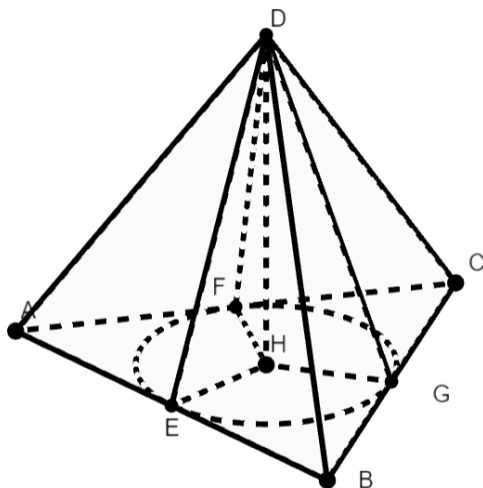


Рис. 2.13



3.93. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 120° . Знайдіть кут, який бічна грань піраміди утворює з площиною основи [14].

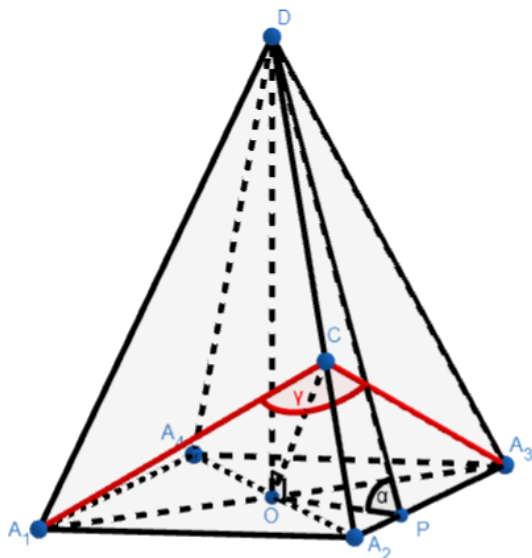


Рис. 2.14

Відповідь. 30° .

V. Самостійне виконання учнями завдань (10 хв.)

3.100. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, якщо площина, яка проходить через сторону основи під кутом 60° .

IV. Підведення підсумку уроку . Рефлексія

Оцінення результатів роботи на уроці.

Вправа «Відкритий мікрофон»:

Що Вам сподобалось на уроці ?

Що потребує пояснення ?

Що викликало ускладнення ?

V. Домашнє завдання

Конспект уроку №4

Тема уроку: Розв'язування вправ з теми: перерізи піраміди.



Мета уроку: формування понять переріз піраміди, діагональний переріз, умінь будувати піраміди та їх перерізи. розвивати просторову уяву, пам'ять, уміння проводити аналогії; виховувати наполегливість, працьовитість.

Обладнання: моделі пірамід.

Тип уроку: бінарний урок

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань

Пригадаймо!

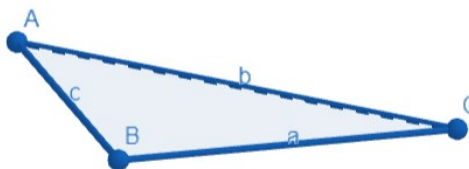
- 1) Як зображуються рівносторонній трикутник?
- 2) Як зображуються рівнобедрений трикутник?
- 3) Як зображуються прямокутний трикутник ?
- 4) Як зображують паралелограм ?

II. Сприймання та усвідомлення нового матеріалу

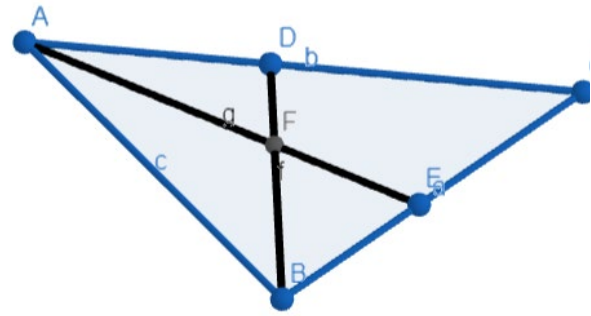
Правила зображення піраміди: зображення піраміди можна починати із зображення її основи. Правила зображення багатокутників нам відомі.

Після зображення основи позначають вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи, невидимі ребра зображають штриховими лініями. Для більшої наочності рисунка висоту піраміди зображають «вертикальним відрізком».

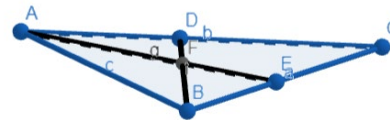
- 1) будуємо основу піраміди



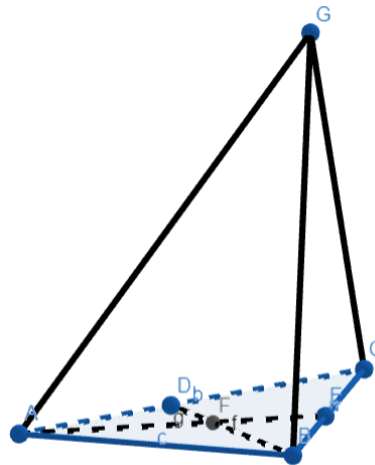
2) знаходимо центр n -кутника



3) ставимо вершину піраміди



4) сполучаємо бічними ребрами вершину піраміди з вершинами основи, невидимі ребра зображаємо штриховими лініями.



Діагональним перерізом піраміди називається переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідні бічні ребра піраміди

Правила побудови перерізів піраміди

Побудова перерізу піраміди зводиться, як правило, до побудови прямих, які є прямими перетину заданої січної площини з площинами граней піраміди.

При побудові перерізів піраміди січною площиною використовують метод слідів та метод внутрішнього проектування. Згадаємо суть методу слідів при побудові перерізів:

- 1) будується лінія перетину (слід) січної площини з площиною грані;
- 2) знаходяться точки перетину січної площини з ребрами многогранника;
- 3) будується переріз (поєднуємо одержані точки).

Крім методу слідів для побудови перерізів піраміди можна використати метод внутрішнього проектування (центрального). Суть методу полягає в наступному:

- 1) будуються центральні проєкції точок, що задають переріз, на площину основи; на основі вибирається четверта точка — одна із вершин основи, яка служить проєкцією однієї із вершин перерізу;
- 2) проводяться діагоналі одержаного чотирикутника;
- 3) на одній із прямих перерізу будується точка, проєкцією якої є точка перетину діагоналей чотирикутника;
- 4) за допомогою побудованої точки знаходиться вершина перерізу.

III. Розв'язування вправ

Використовуючи додаток Geogebra:

1. Побудуйте зображення тетраедра.
2. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник, а основа висоти є точкою перетину діагоналей прямокутника.
3. Побудуйте зображення трикутної піраміди, в основі якої лежить правильний трикутник, а основа висоти є центром трикутника основи.
4. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить квадрат, а одне з бічних ребер перпендикулярне до основи.
5. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить ромб, а одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи.

Розв'яжіть задачі використовуючи графічна додатки та збережіть проєкт.

3.56. У правильній трикутній піраміді $QABC$ сторона основи дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а висота – 8 см. M – середина ребра QC . Знайдіть площу перерізу ABM [14, с.62].

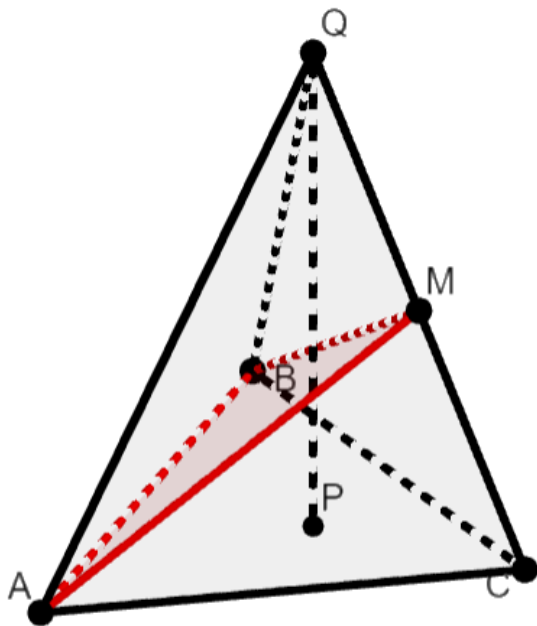


Рис. 2.15



3.58. $QABCD$ – правильна чотирикутна піраміда, у якої бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60° . Точка E – середина ребра QC . Знайдіть відношення площі діагонального перерізу піраміди до площі перерізу площиною BDE [14, с.62].

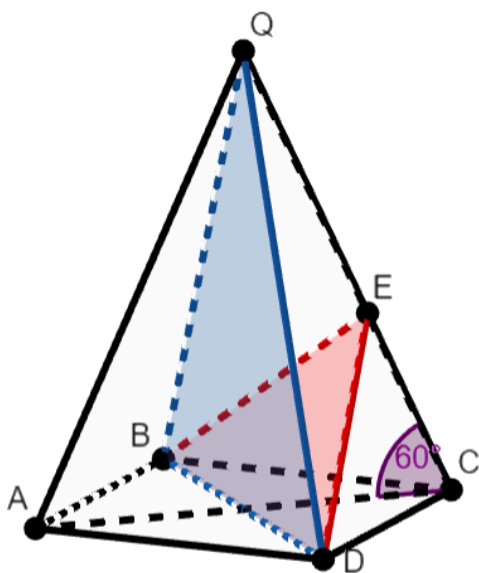


Рис.2.16



3.102. У правильній шестикутній пірамід апофема утворює кут 30° із висотою піраміди. Знайдіть відношення площі меншого діагонального перерізу до площі більшого діагонального перерізу [14, с. 66].

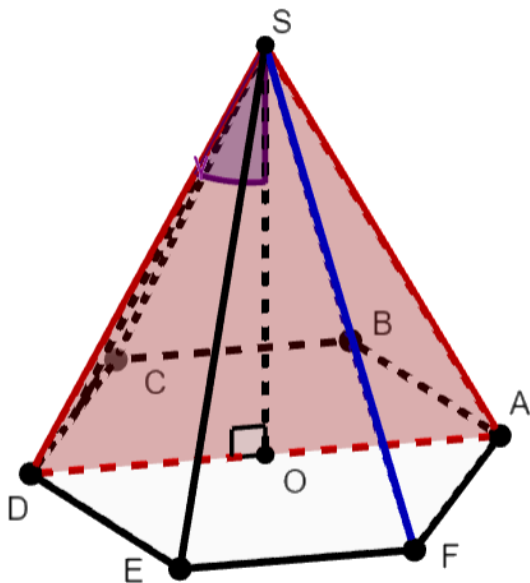


Рис.2.17



3.110. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 16 см, а бічне ребро – 17 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через центр основи паралельно бічній грані [14, с. 67].

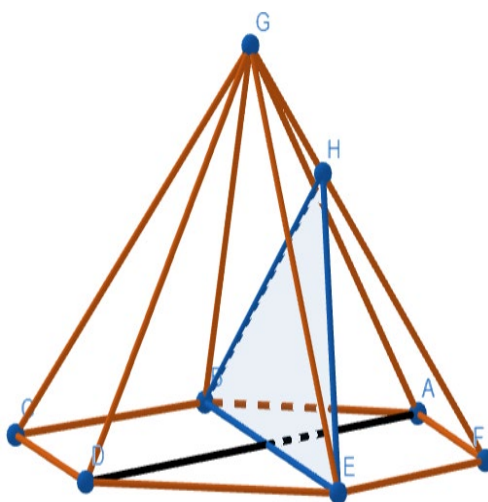


Рис. 2.18

IV. Підсумки уроку. Рефлексія

- 1) Якою фігурою є переріз піраміди площинами, які проходять через її вершину?
- 2) Що таке діагональний переріз піраміди?

- 3) Якою фігурою є діагональний переріз піраміди? Чому?
 4) Які методи побудови перерізів піраміди вам відомі? У чому їх суть?

V. Домашнє завдання

2.3. Використання 3D моделей піраміди у процесі підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання

Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики передбачає перевірку знань і вмінь учнів з теми «Піраміда» (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Тема	Засвоєні поняття	Предметні вміння та способи навчальної діяльності
<ul style="list-style-type: none"> – піраміда та її елементи; – зрізана піраміда та її елементи; – площа бічної та повної поверхні піраміди та зрізаної піраміди; – об'єм піраміди 	<ul style="list-style-type: none"> – висота піраміди; – апофема піраміди; – зрізана піраміда; – діагональний переріз 	<ul style="list-style-type: none"> – обчислюють площу бічної поверхні правильної та зрізаної піраміди; – обчислюють повну площу поверхні правильної та зрізаної піраміди; – обчислюють об'єм правильної та зрізаної піраміди; – будують перерізи піраміди: – визначають двогранні та тригранні кути піраміди; – виконують побудови комбінацій піраміди та інших просторових тіл

Розглянемо деякі задачі на піраміду (період з 2007-2022 рр.), створимо відповідні 3D наочності, які сприятимуть полегшенню сприйняття учнями просторових об'єктів та їх елементів.

№ 1. Основою піраміди $SABC$ є трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), довжина середньої лінії якої дорівнює 5 см. Бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди і вдвічі більше від середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань від середини ребра SD до площини SBC (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 210 см^2 (рис. 2.19) [13].

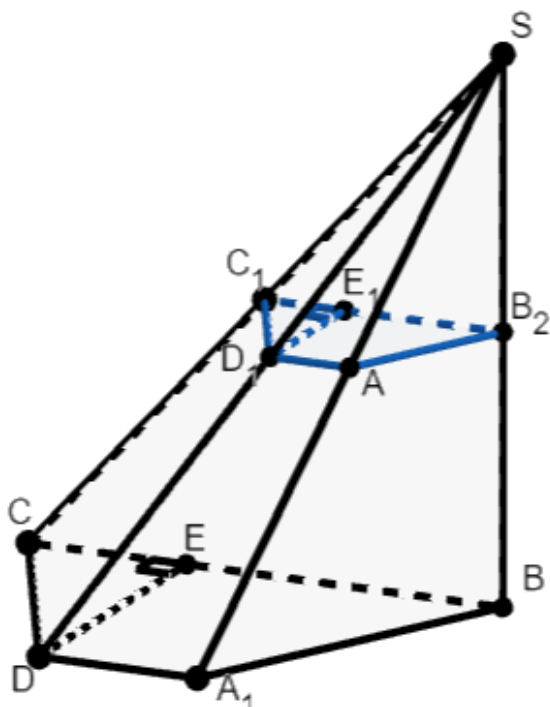


Рис. 2.19

Відповідь. 6,3 см.

№ 2. Основою піраміди є ромб, тупий кут якого дорівнює 120° . Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см^2), якщо її висота дорівнює 4 см (рис. 2.20) [13].

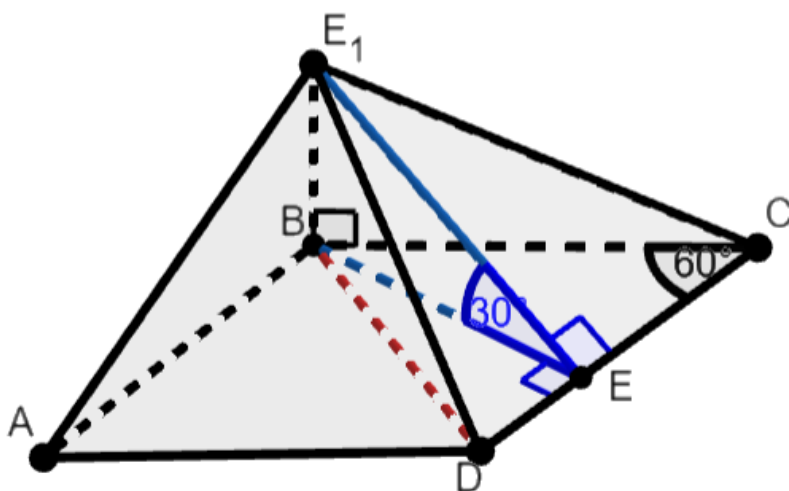


Рис. 2.20

Відповідь. 96 см^2 .



№ 3. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема – 5 см. Визначте косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи (рис. 2.21) [13].

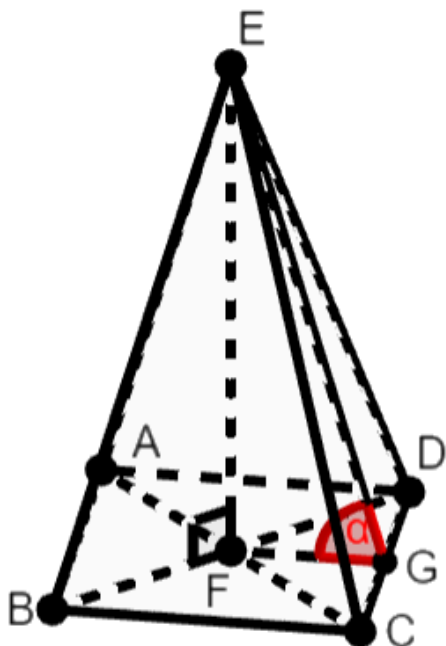


Рис.2.21

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$

Відповідь. Б $\frac{3}{5}$.

№ 4. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а бічне ребро – 5 см. Визначте косинус кута між бічним ребром і площиною основи (рис. 2.22) [13].

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$

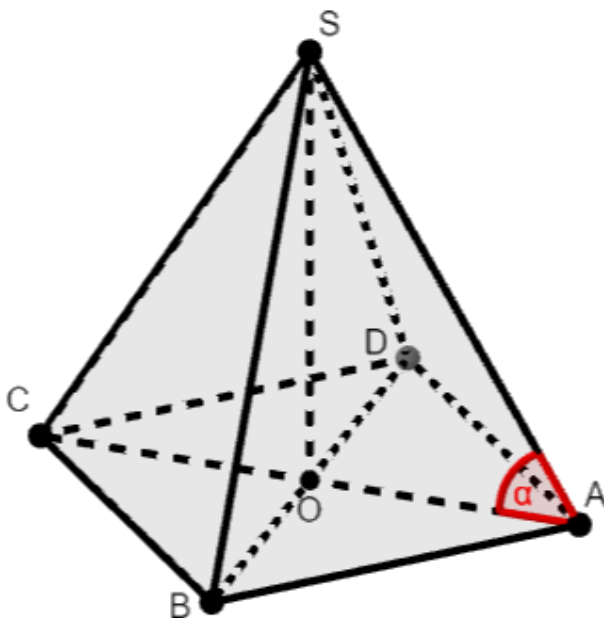


Рис. 2.22

Відповідь. $A \frac{4}{5}$.

№ 5. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30° . Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см^2), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см (рис. 2.23) [13].

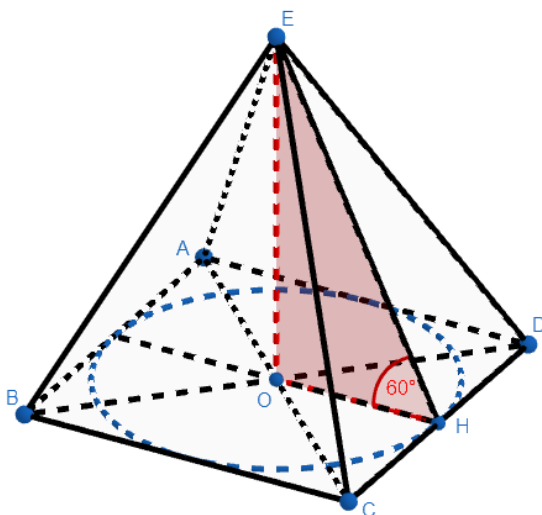


Рис. 2.23

Відповідь. 144.

№ 6. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, гострий кут — 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до



площини її основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди (у см^3) (рис. 2.24) [13].

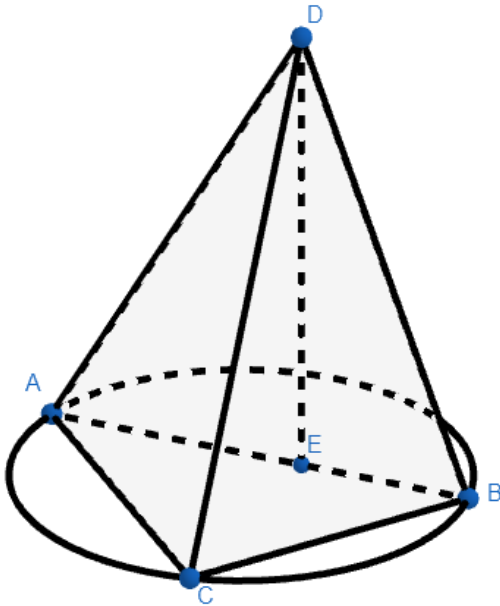


Рис. 2.24



Відповідь. 12.

№ 7. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Бічна грань SBC , площа якої дорівнює $24,4\text{см}^2$, перпендикулярна до площини основи піраміди. Точка M - середина ребра SB . Площина MAD перетинає ребро SC в точці N . Визначте довжину відрізка MN (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 152см^3 , а площа її основи - 57см^2 (рис. 2.25) [13].

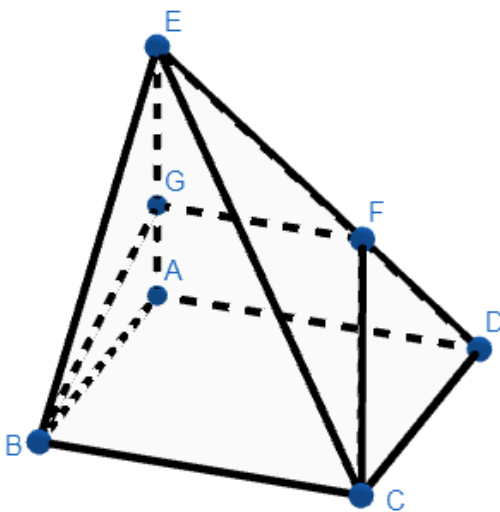


Рис. 2.25

Відповідь. 3,05.



№ 8. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а її апофема – 10 см. Знайдіть довжину сторони основи піраміди (рис. 2.26) [13].

А	Б	В	Г	Д
12 см	$6\sqrt{3}$ см	4 см	6 см	$6\sqrt{2}$ см

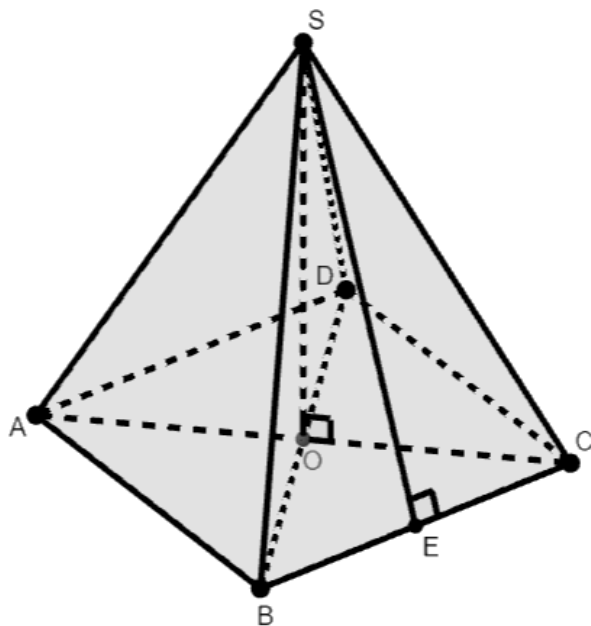


Рис. 2.26

Відповідь. А 12 см.

№ 9. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а об'єм – 64 см^3 . Знайдіть висоту піраміди (рис. 2.26) [13].

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}$ см	4 см	8 см	12 см	16 см

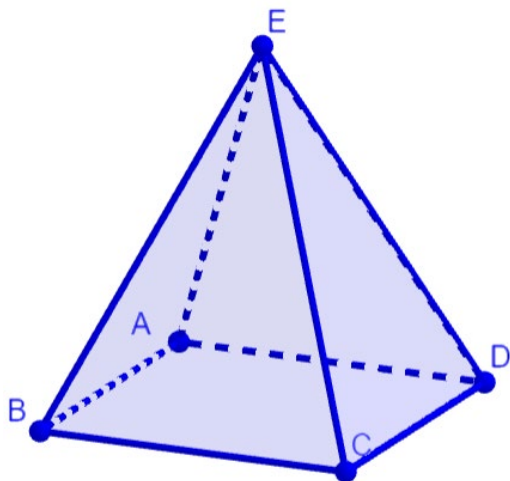


Рис. 2.26

Відповідь. Γ 12 см.

№ 10. В основу піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60° . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди (у см^3) (рис. 2.27) [13].

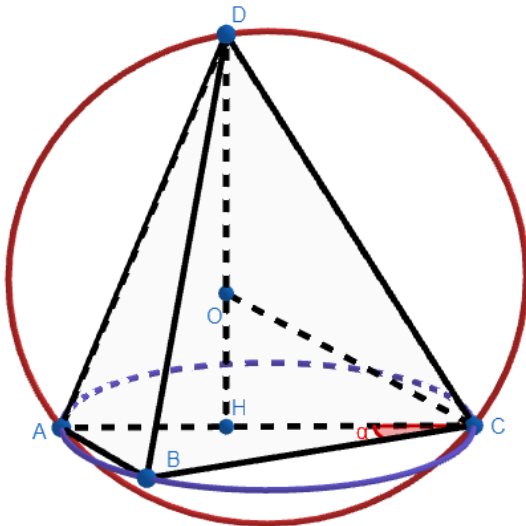


Рис. 2.27



Відповідь. 40,5.

№ 11. У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу, площа якої дорівнює $36\pi \text{ см}^2$. Бічна грань піраміди нахилена до площини її основи під кутом 60° . Обчисліть об'єм піраміди (у см^3) (рис. 2.28) [13].

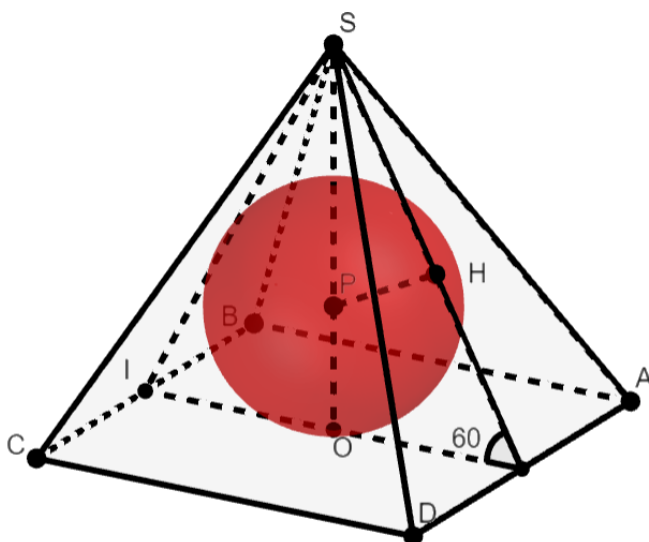


Рис. 2.28



Відповідь. 324.

№ 12. Об'єм прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 48 см^3 . Точка M – середина ребра CC_1 (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди $MABC$ (рис. 2.29) [13].

А	Б	В	Г	Д
6 см^3	8 см^3	12 см^3	16	24
			см^3	см^3

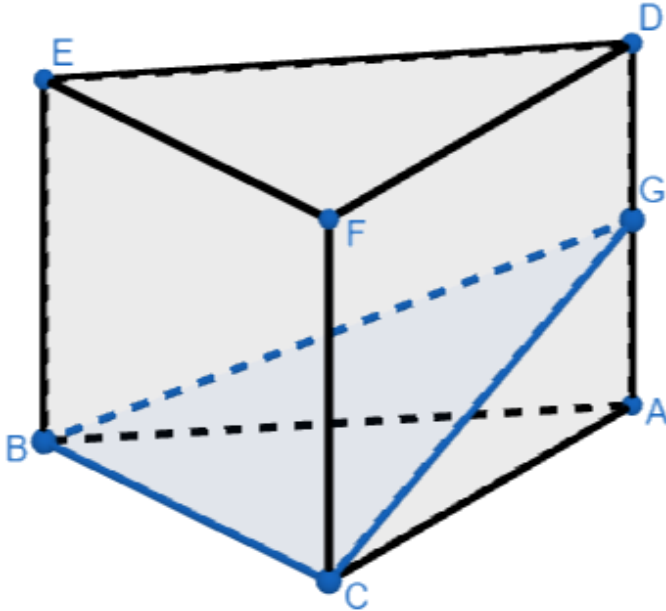


Рис. 2.29



№ 13. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом 60° . Обчисліть площу S сфери, описаної навколо піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$ (рис. 2.30) [13].

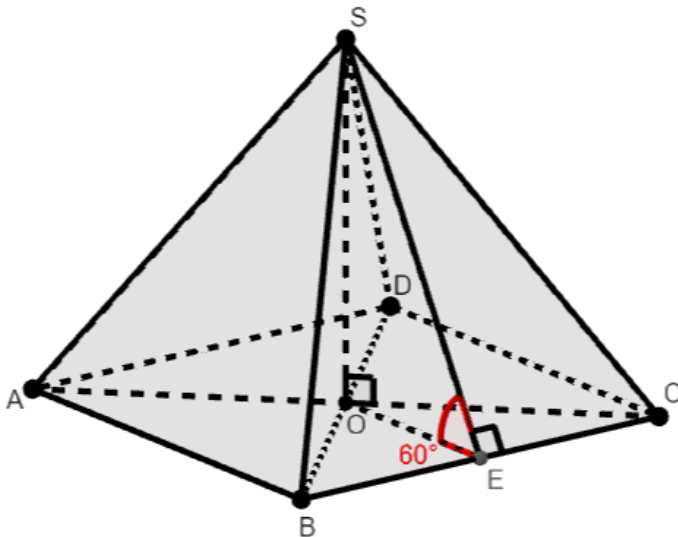


Рис. 2.30



Відповідь. 96.

№ 14. У косинус вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник. Бічна грань, що містить один з катетів основи, утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди у см^3), якщо твірна конуса дорівнює 9 см і нахилена до площини основи під кутом 45° (рис. 2.31) [13].

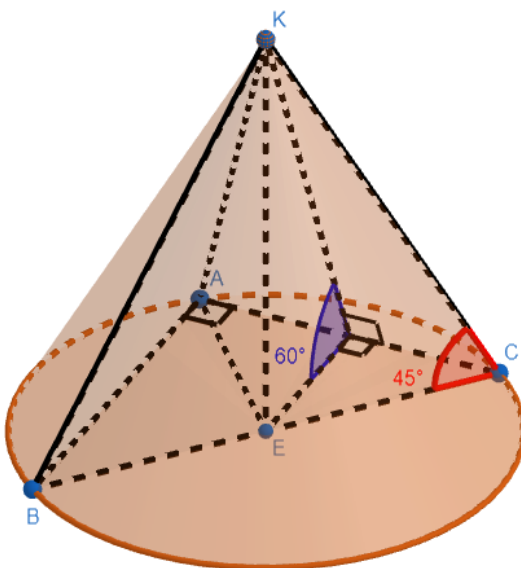


Рис. 2.31

Відповідь. 81.

№ 15. Об'єм куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 216 см^3 (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди $D_1 ACD$ (у см^3) (рис. 2.32) [13].



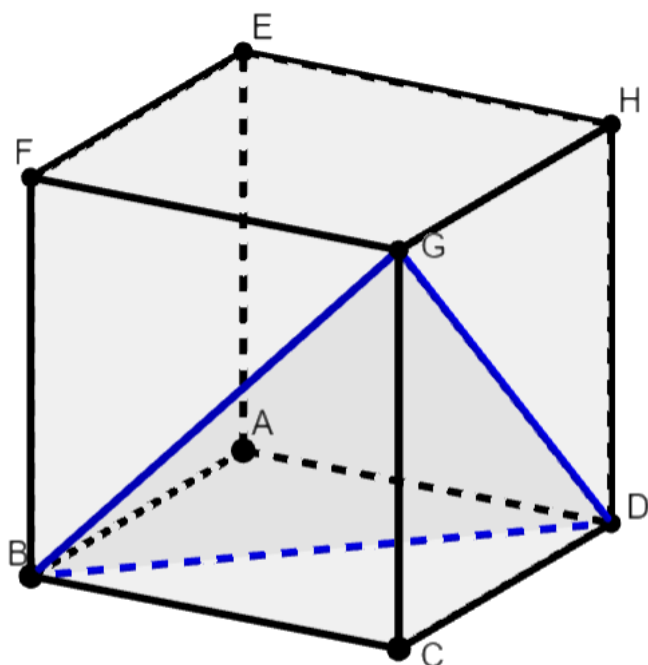


Рис. 2.32

№ 16. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи – 12 см. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди (рис. 2.33) [13].

А	Б	В	Г	Д
6 см	$3\sqrt{5}$ см	$5\sqrt{3}$ см	9 см	15 см

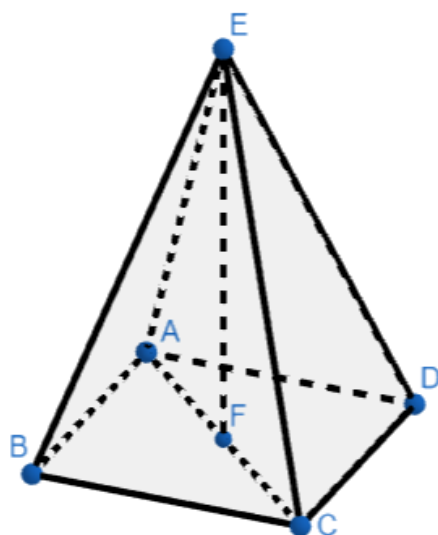


Рис. 2.33

№ 17. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо

довжина його твірної дорівнює 4. У відповідь запишіть значення $\frac{V}{\pi}$ (рис. 2.34) [13].

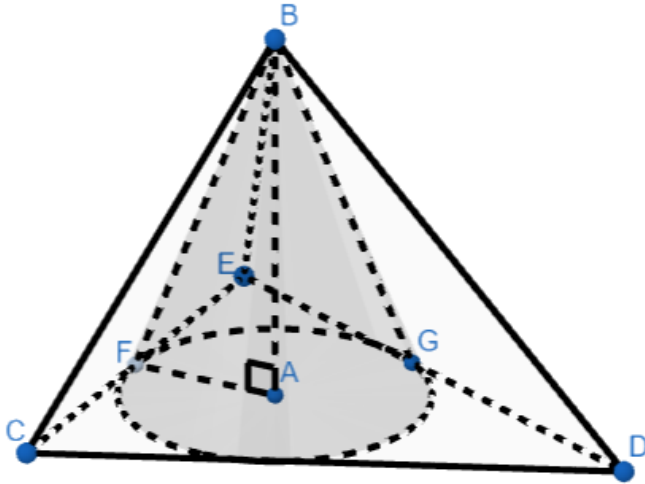


Рис.2.34

№ 18. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60° . Визначте об'єм (у см^3) цієї піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює 3 см (рис. 2.35) [13].

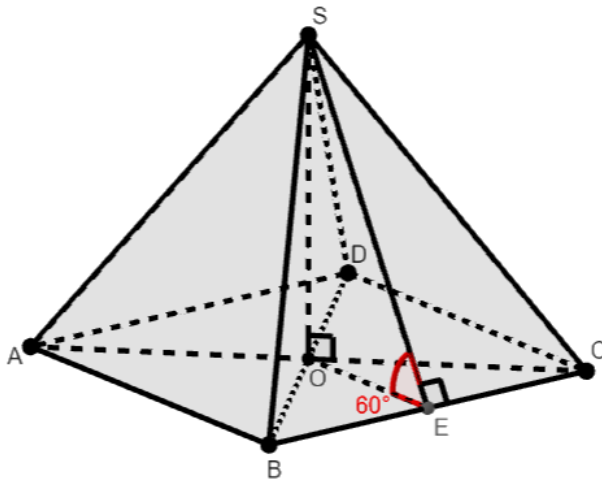


Рис. 2.35

№ 19. Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 см. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15 см (рис. 2.36) [13].

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	10 см	12 см	14 см

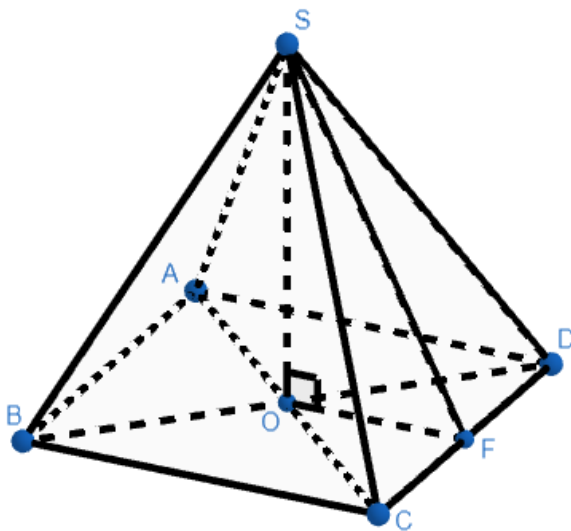


Рис. 2.36

№ 20. Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює 10 см, а довжина бічного ребра – 13 см (рис. 2.37) [13].

А	Б	В	Г	Д
180 см^2	$15\sqrt{69} \text{ см}^2$	$30\sqrt{69} \text{ см}^2$	360 см^2	390 см^2

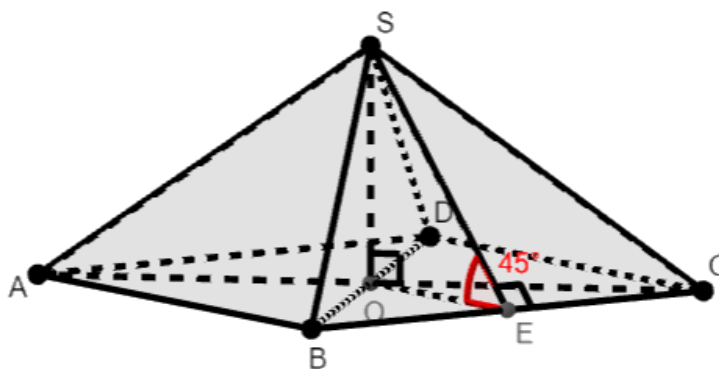


Рис. 2.37

№ 21. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, апофема – 13 см. Обчисліть об'єм (у см^3) цієї піраміди (рис. 2.38) [13].

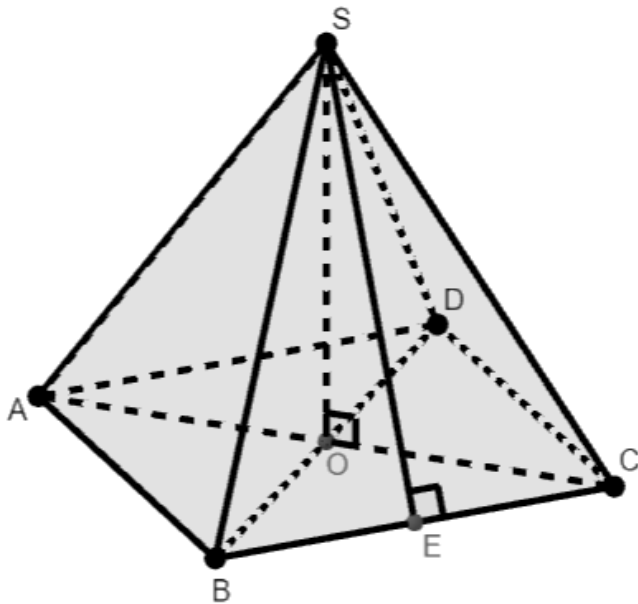


Рис. 2.38



№ 22. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, апофема – 7 см. Визначте площу поверхні цієї піраміди (рис. 2.37) [13].

А	Б	В	Г	Д
84 см ²	204 см ²	156 см ²	162 см ²	120 см ²

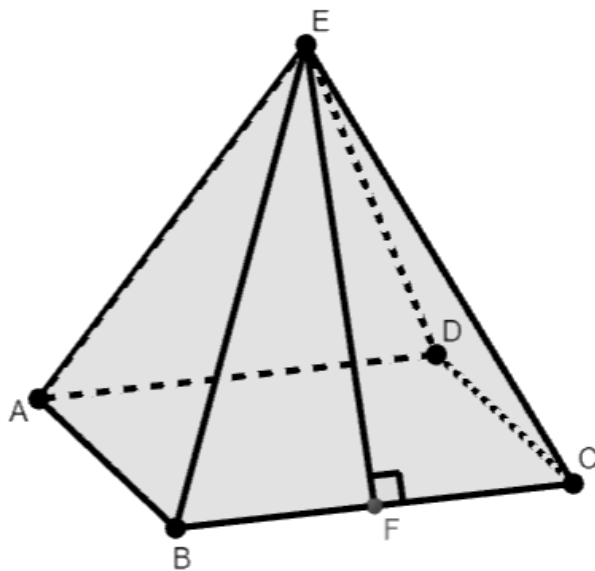


Рис. 2.37



№ 23. Визначте довжину апофема правильної чотирикутної піраміди, якщо площа її повної поверхні дорівнює 208 см², а довжина сторони основи – 8 см (рис. 2.38) [13].

А	Б	В	Г	Д
13 см	12 см	9 см	8 см	6 см

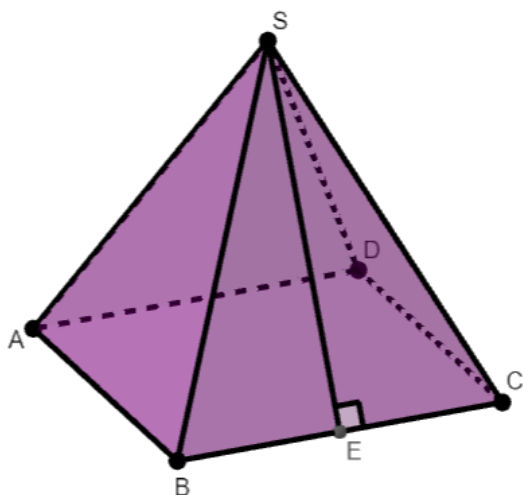


Рис. 2.38



Висновки до розділу 2

Провівши аналіз та узагальнення методичного матеріалу теми «Піраміда», можна виділити ряд рекомендацій.

Поняття піраміди слід формувати за допомогою ряду наочних прикладів і рисунків, виготовлених заздалегідь.

Ознайомлюючи учнів з елементами піраміди (бічною гранню, основою, висотою тощо), треба звернути увагу на можливість різного розташування висоти, адже вона може бути розміщена всередині піраміди чи в площині однієї (і навіть двох) граней, а може проходити зовні піраміди.

При визначенні об'єму піраміди рекомендовано спочатку розглянути трикутну піраміду, а потім перейти до довільної піраміди, розбивши довільну піраміду на трикутні піраміди і довівши, що всі отримані трикутні піраміди мають одну й ту саму висоту, вивести формулу об'єму довільної піраміди.

Розглядаючи об'єм зрізаної піраміди, необхідно звернути увагу дітей на той факт, що будь-яку зрізану піраміду можна доповнити до повної. Тобто об'єм зрізаної піраміди буде рівний різниці об'ємів повної піраміди і доповненої.

Для забезпечення реалізації поставлених цілей доцільним є використання 3D моделей піраміди. Водночас не варто перенавантажувати урок засобами ІКТ та 3D моделями, оскільки учні мають навчитися орієнтуватись в просторових фігурах по їх зображенні на площині.

При розв'язуванні задач на обчислення визначаються довжини відрізків, величини кутів, площі перерізів, поверхні, об'єм піраміди та зрізаної піраміди. Рекомендуємо слідувати принципу наступності: від простого до більш складного, оскільки без вироблення умінь і навичок розв'язувати найпростіші задачі не можна навчити добре розв'язувати задачі середньої складності.

У даному розділі були розроблені конспекти уроків та 3D моделі піраміди до відповідних задач. Також підібрано задачі на піраміду, які було подано в зовнішньому незалежному оцінюванні, створено просторові моделі до них.

ВИСНОВКИ

Вивчаючи піраміду в шкільному курсі геометрії, учні здобувають уміння працювати не тільки з ідеальними математичними об'єктами, а й елементами навколишнього світу, які мають форму піраміди. Цьому сприяє розв'язування задач прикладного змісту.

Основною метою вивчення піраміди є формування в учнів поняття та уявлення про піраміду, її елементи та властивості; застосування отриманих знань до розв'язування задач; формування графічних і обчислювальних умінь.

Поміж труднощів, що виникають в учнів під час вивчення згаданої теми, є неможливість уявити об'ємну фігуру внаслідок недостатньо розвинутої просторової уяви, побудова просторового тіла в площині зошита. Одним зі шляхів розв'язання означеної проблеми є використання 3D моделей пірамід на різних етапах проведення уроків.

У процесі виконання магістерської роботи:

- 1) проведено логіко-математичний аналіз теми «Піраміда»;
- 2) розглянуто та проаналізовано методикау введення основних понять і фактів про піраміду;
- 3) здійснено аналіз навчальних програм для трьох рівнів вивчення геометрії (стандарт, профільний та поглиблений);
- 4) проведено порівняльний аналіз підручників геометрії профільного рівня;
- 5) розглянуто види узагальнень та систематизації знань і умінь учнів;
- 6) розроблено фрагменти уроків для здійснення узагальнення та систематизації знань і умінь учнів;
- 7) проаналізовано наявні додатки для 3D моделювання та можливості їх застосування на уроках геометрії;
- 8) розроблено конспекти уроків з теми «Піраміда» з використанням 3D моделей;
- 9) розроблено 3D моделі задач на піраміду для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Усі поставлені на початку дослідження завдання виконано, мети досягнуто.

Дана кваліфікаційна робота може бути використана вчителями для підготовки та проведення уроків з теми «Піраміда» для учнів 11 класів як стандартного, так і профільного рівня навчання, під час підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія, ч. II, Стереометрія. Київ : Рад. шк., 1955. 735 с.
2. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: книжка для вчителя. Київ : Рад. шк., 1991. 128 с.
3. Апостолова Г. В. Стереометрія в опорних схемах. Київ : Факт, 2000. 68 с.
4. Бевз Г. П. Математика : проб. підруч. для 11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 1995. 191 с. 8.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. // Математика. 2002. № 13.
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. Київ : Освіта, 2000. 239 с.
8. Березняк О.С. Розв'язання екзаменаційних завдань з математики. Частина 2. Геометрія. Тернопіль: Підручники і посібники, 2000. 104 с.
9. Богатинська Н. В., Голубева С. Ф. Узагальнення й систематизація – джерело знань учнів. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики* : зб. наук. праць. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103–107.
10. Бурда М. І., Дубинчук О. С., Мальований Ю. І. Математика 10–11 : проб. навч. посібник для шк., ліцеїв та гімназій гуманітар. профілю. Київ : Освіта, 1997. 224 с.
11. Волощук І. А., Шпонька Р. Ю. Використання ІКТ на уроках математики як засіб розвитку просторової уяви учнів. *Педагогічне Криворіжжя* : педагогічний альманах : зб. наук.-метод. праць. Вип. 3, 2017. С. 46–48.

12. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ / гол. ред. В. О. Надточій. Слов'янськ : Вид-во Б. І. Маторін. Вип. № 11, 2021. 228 с.
13. «ЗНО-ОНЛАЙН». Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.уа». URL : <https://zno.osvita.ua/mathematics/>
14. Істер О. С., Єргіна О. С. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 288с.:іл.
15. Казанчук І. Ю. Комп'ютерно орієнтовані засоби навчання для предметів фізико-математичного циклу. Вид-во : Таврійський вісник освіти, 2013. С. 21–30.
16. Кнопський В. М., Скопец З. А., Ягодовський М. І. Геометрія : навчальний посібник для 10 класу середньої шк. Київ : Рад. шк., 1978. 160 с. 22.
17. Комишан А. І., Щокіна Н. Б. Метод проектів як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. *Наукові записи кафедри педагогіки*. Випуск 41, 2017. С. 81–93.
18. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах: для ст. шк. віку. Київ : Рад. шк., 1991. 208 с.
19. Марченко О. М. Систематизація знань учнів у процесі навчання математики із застосуванням методу проектів на основі комп'ютерної підтримки. *Дидактика математики: проблеми та дослідження*. Вип. 26, 2006. С. 150–154.
20. Межейнікова Л.С. Про визначення поняття активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. *Дидактика математики: проблеми дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт*. 2005. Вип. 23. 112 с.
21. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б та ін. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 240 с.
22. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б, Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.

23. Методика стереометрії. За ред. Астряба О. М., Білоусової В. П. 2-е видання. Київ: Рад. шк., 1949. 192 с.

24. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

25. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

26. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasi>

27. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.

28. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. Математика. 2004. № 27–28.

29. Півторак А. А. Використання ІКТ при вивченні математики. Педагогічний дизайн. Вінниця : ММК, 2015. 74 с.

30. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія : Підручник для 10–11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.

31. Польшун К. В. Організація інклюзивного навчання фізико-математичних дисциплін студентів з обмеженими фізичними можливостями у вищих технічних навчальних закладах : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.09. Тернопіль, 2017. 20 с.

32. Програма ЗНО з математики. Український центр оцінювання якості освіти. URL : <https://testportal.gov.ua/progmath/>

33. Прокопенко Н. С., Щекань Н. П. (відповідальні за випуск). Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків.

34. Результати з математики зно-2021. URL: <https://testportal.gov.ua/rezultaty-z-matematyky-zno-2021-vazhlyvo-znaty-shhob-rozumity/>

35. Саніна Є. І. Розвиток просторового мислення в процесі навчання стереометрії / Є. І. Саніна, О. А. Гришина. Вісник РУДН, серія Психологія та педагогіка. 2013. № 4. С. 99–102.

36. Сверчевська І. А. Психолого-педагогічні умови підвищення продуктивності вивчення геометричних тіл / І. А. Сверчевська. Вісник ЖДУ імені Івана Франка. 2004. Вип. 19. С. 213–217.

37. Сенчілов В. В. Застосування інтерактивних технологій при вивченні курсу геометрії в школі. URL : <http://ekoncept.ru/2013/13197.htm>

38. Система динамічної математики «GeoGebra». URL : <http://www.geogebra.com>

39. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

40. Слінчук В. І. Формування життєвих компетентностей учнів засобами навчального проекту на уроках математики. URL : <http://eprints.zu.edu.ua/1610/1/20.pdf>

41. Статистика та аналітика. URL: <https://dneprtest.dp.ua/cms/index.php/home/staticianalitik>

42. Третякова А. І. Прикладна спрямованість математики / А. І. Третякова. Харків: Основа, 2006. 40 с.

43. Уроки узагальнення та систематизації знань. Реферат. Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.ua». URL : <https://osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14807>

44. Чайка В. М. Основи дидактики : навч. посіб. (Серія «Альма-матер»). Київ : Академвидав, 2011. 240 с.

45. Шишкіна М. П. Методологічний підхід до оцінювання якості програмних засобів навчання / М. П.Шишкіна. Нові технології навчання: наук.-метод. зб. / МОН України, Ін-т інновац. технологій і змісту освіти. Київ, 2010. Вип. 61. С. 22–28.

ДОДАТКИ

Додаток А

Дерево очікувань



Рис. 1.



Рис. 2.