

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра інформатики та прикладної математики

«Допущено до захисту»

В. о. завідувача кафедри

\_\_\_\_\_ Семеріков С. О.

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 р.

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 р.

ПОБУДОВА ІНДИКАТОРІВ-ПЕРЕДВІСНИКІВ  
КРИЗОВИХ ЯВИЩ КРИПТОВАЛЮТНОГО  
РИНКУ НА ОСНОВІ ОБ'ЄДНАНОГО  
ТА КРОС-РЕКУРЕНТНОГО АНАЛІЗУ

Кваліфікаційна робота студента групи Ім-17  
ступінь вищої освіти «магістр»  
спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)  
**Белінського Андрія Олександровича**

Керівник: доктор фізико-математичних наук,  
професор  
**Соловйов Володимир Миколайович**

Оцінка:

Національна шкала \_\_\_\_\_

Шкала ECTS \_\_\_\_\_ Кількість балів \_\_\_\_\_

Голова ЕК \_\_\_\_\_

Члени ЕК \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Белінський Андрій Олександрович, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

---

(підпис)

# ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1. МОНІТОРИНГ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ КРИЗОВИХ ЯВИЩ РИНКУ КРИПТОВАЛЮТ</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1. Передумови виникнення криптовалютного ринку . . . . .	8
1.2. Фінансові бульбашки біткоїн ринку . . . . .	11
1.3. Еконофізика криптовалютного ринку . . . . .	16
Висновки до розділу 1 . . . . .	23
<b>2. МЕТОДОЛОГІЯ РЕКУРЕНТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩ СКЛАДНОСТІ</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1. Методологія реконструкції фазового простору . . . . .	25
2.2. Аналіз динамічних систем із використанням рекурентних діаграм . . . . .	27
2.2.1. Дослідження рекурентної поведінки на основі класичних рекурентних діаграм . . . . .	27
2.2.2. Біваріативне доповнення рекурентного аналізу крос-рекурентними діаграмами . . . . .	29
2.2.3. Аналіз синхронізації систем із використанням об'єднаних рекурентних діаграм . . . . .	31
2.3. Структури в рекурентних діаграмах . . . . .	32
2.4. Кількісний аналіз рекурентних діаграм . . . . .	35
2.4.1. Кількісні міри на основі щільності розподілу рекурентних точок . . . . .	36
2.4.2. Міри на основі розподілу діагональних ліній . . . . .	37
2.4.3. Міри на основі білих вертикальних ліній (часу рекурентності) . . . . .	43
2.5. Процедура розрахунку кількісних показників із використанням алгоритму ковзного вікна . . . . .	44
2.6. Програмне забезпечення для здійснення рекурентного аналізу	46
2.6.1. Програмний пакет “руunicorn” . . . . .	47
2.6.2. Програмний пакет “TISEAN” . . . . .	47
2.6.3. Програмний пакет “crqa” . . . . .	48

2.6.4. Командний рядок для виконання рекурентного аналізу	48
2.6.5. Ефективне проведення рекурентного аналізу з використанням PyRQA . . . . .	49
Висновки до розділу 2 . . . . .	50
<b>3. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКУРЕНТНИХ ТА КРОС-РЕКУРЕНТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БІТКОЇНА НА ОСНОВІ КРИПТОВАЛЮТНИХ ІНДЕКСІВ . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1. Уніваріативний рекурентний аналіз біткоїн ринку . . . . .	53
3.2. Емпіричні результати крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу криптовалютних крахів . . . . .	62
Висновки до розділу 3 . . . . .	79
<b>ВИСНОВКИ . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . . . . .</b>	<b>84</b>

## ВСТУП

Критичні й кризові явища, що іманентно притаманні складним фінансово-економічним системам, викликають дедалі більший інтерес як у представників наукових кіл, так і практикуючих менеджерів. Він обумовлений необхідністю розуміння основних причин і механізмів формування та динаміки перебігу кризових явищ з метою їх упередження та запобігання катастрофічних наслідків та значних матеріальних втрат.

Ринок цифрових валют є надзвичайно привабливим сегментом фінансового ринку, характеризується підвищеною волатильністю та неочікуваними особливостями характерної динаміки.

Відомо, що економічним системам властива фрактальна поведінка, довга пам'ять та “важкі” хвости розподілів флуктуацій активів, що свідчить про їх нелінійність та відхилення від нормального Гаусового розподілу. Індeksi фондового та криптовалютного ринків – яскраві представники неврівноважених систем, для вивчення яких були розроблені чисельні методи дослідження, а саме: ентропійні, хаос-динамічні, мультифрактальні, мережні, мультиплексні, рекурентні, квантові тощо. При цьому розуміння механізмів колективної самоорганізованої поведінки економічних агентів на сьогодні немає, а кризові явища на фінансових ринках є неочікуваними й малопрогнозованими. На крипторинку спостерігається значне число інвесторів, що знаходяться у великому ризику. Економічним ключем для злагодження їх активності є побудова ефективних індикаторів-передвісників.

Отже, пошук нових підходів до моделювання критичних і кризових явищ на фінансових ринках є надзвичайно **актуальною** науково-прикладною задачею.

Одним із фундаментальних підходів до розв'язання задач колективної динаміки співзалежних агентів є статистична фізика, ефективно використання апарату якої започаткувало в кінці минулого століття такий напрямок як “еконофізика” [35; 42; 81]. Виявилось, що загальновідомі закони класичної і квантової статистик безсилі при описі динаміки помітно корельованих складних систем, до яких, зокрема, відноситься і крипторинок. Вдалося з'ясувати, що такий клас самоорганізованих, колективних систем також може бути описаний за допомогою біваріативного (мульти-

варіативного) рекурентного аналізу. Концепції фазового простору, реконструкції атрактора, рекурентні карти, кількісний крос-рекурентний аналіз тощо можуть виступити потужними кандидатами на відображення тих змінних, що є рушієм зазначених складних систем.

Отже, **об'єктом дослідження** виступає ринок криптовалют.

**Предметом дослідження** є методологія та інструментарій класичного, крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу стосовно крахових явищ, що виникають у складних системах.

У цій роботі ми продемонструємо, що використання основних ідей та інструментарію рекурентного аналізу дозволяє як пояснити деякі притаманні складним системам закономірності, так і побудувати надійні індикатори й передвісники крахових явищ на ринку криптовалют.

**Мета дослідження** полягає у представленні ефективних індикаторів-передвісників кризових явищ, що базуватимуться на апараті крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу.

Відповідно до мети визначено такі основні **завдання дослідження**:

- 1) дослідити історію ринку криптовалют за період з 17 вересня 2014 року по 22 листопада 2022 року та його подальші перспективи;
- 2) проаналізувати літературні джерела, що присвячені тематиці фінансових криз, динаміки криптовалют, теорії складності, екофізики та рекурентного аналізу різних типів;
- 3) провести класифікацію кризових явищ ринку криптовалют на основі проаналізованої бібліографії;
- 4) дослідити можливість використання інструментарію крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу для побудови ефективних індикаторів-передвісників кризових явищ;
- 5) провести порівняльний аналіз кількісних рекурентних показників на чолі з біткоїном.

У процесі дослідження були використані такі групи *методів*:

- **теоретичні** – аналіз бібліографії економетричного і екофізичного інструментарію ідентифікації та прогнозування кризових явищ та

досліджень в області криптовалют, крахових із кризовими явищами, фінансових ринків різних типів тощо;

- **емпіричні** – моніторинг та порівняння динаміки біткоїна з якісними та кількісними показниками класичного рекурентного, крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу в якості індикаторів-передвісників кризових явищ.

**Наукова новизна результатів дослідження** полягає в тому, що вперше було використано інструментарій крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу для побудови індикаторів (індикаторів-передвісників) кризових явищ.

У процесі дослідження було здійснено порівняльний аналіз різних підходів з опорою на найбільш капіталізовані криптовалюти досліджуваного ринку, здійснена відповідна інтерпретація отриманих результатів та надані рекомендації стосовно ефективного застосування даних підходів та перспектив їх подальшого доповнення.

**Практичне значення результатів дослідження.** Представлений спектр рекурентних показників складності на основі біваріативних рекурентних підходів можуть бути корисним трейдерам, інвесторам, ризик-менеджерам та іншим фахівцям, для котрих децентралізовані фінанси представляють професійний інтерес та перспективний об'єкт подальших інвестицій. Не менший інтерес цей інструментарій представлятиме фізикам, що працюють з фізичними сигналами різної природи та складності.

**Апробація результатів дослідження.** Результати моделювання структури й динаміки фондового і криптовалютного ринків у критичних умовах представлені на ряді міжнародних конференцій та опубліковані в роботах, індексованих Scopus, зокрема:

- *Soloviev V., Belinskij A.* Methods of nonlinear dynamics and the construction of cryptocurrency crisis phenomena precursors // CEUR Workshop Proceedings / за ред. V. Ermolayev [та ін.]. 2018. Т. 2104. С. 116–127. URL: [https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper\\_175.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_175.pdf)
- *Soloviev V. N., Belinskiy A.* Complex Systems Theory and Crashes of

Cryptocurrency Market // Communications in Computer and Information Science / за ред. V. Yakovyna [та ін.]. 2019. Т. 1007. С. 276–297. DOI: 10.1007/978-3-030-13929-2\_14

- Econophysics of cryptocurrency crashes: A systematic review / A. O. Bielinskyi [та ін.] // CEUR Workshop Proceedings / за ред. A. Kiv, V. Soloviev, S. Semerikov. 2021. Т. 3048. С. 31–133. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3048/paper03.pdf>

Нещодавно було представлено дослідження [27], де було запропоновано різноманітні синергетичні підходи (інструментарій теорії складних систем) в освіті. Методологія нелінійного синтезу на основі наукових принципів еволюції та коеволюції складних структур світу може лягти в основу футурологічних досліджень, проектування різних шляхів розвитку суспільства. Як екологічний, економічний, і політичні проблеми людства стали глобальними, складними та нелінійними. Виникає потреба у врахуванні нових моделей колективної поведінки соціуму та багатьох процесів різної природи та складності, що переживаємо ми, як індивіди, із нашим світом. Представлені підходи можуть лягти в основу шкільних уроків з фізики, математики, біології, економіки, інформатики тощо. Особливо актуальними вони будуть при дослідженні явищ синхронізації різноманітних процесів. Наразі зазначені підходи лягають в основу такої дисципліни як “Моделювання складних систем”. Безумовно, міждисциплінарність цих методів дозволяє поширити їх на різні наукові сфери.

**Зв’язок роботи із програмами, планами, темами.** Кваліфікаційна робота виконана у межах фундаментального дослідження “*Моніторинг, прогнозування та попередження кризових явищ у складних соціально-економічних системах*”, що виконується за рахунок видатків загального фонду державного бюджету (державний реєстраційний номер 0122U001694).

**Структура роботи.** Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до них, загальних висновків, списку використаних джерел (152 найменування). Загальний обсяг роботи – 100 сторінок.



# РОЗДІЛ 1

## МОНІТОРИНГ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ

### КРИЗОВИХ ЯВИЩ РИНКУ

### КРИПТОВАЛЮТ

#### 1.1. Передумови виникнення криптовалютного ринку

8 січня 2009 року програміст під псевдонімом Сатоші Накамото опублікував у маловідомому списку розсилки криптографії програмний протокол із назвою *біткоїн* (Bitcoin, BTC), який дозволяє децентралізувати передачу й зберігання цінностей. У своїй роботі 2008 року, в якій представлений концептуальний план мережі біткоїн, Накамото характеризує її як “нову систему електронних грошових коштів, яка повністю однорангова, без довіреної третьої сторони” [100]. Шлях, який призвів до децентралізованих та однорангових цифрових грошей, усіяний невдалими спробами.

Винаходу Накамото передували такі віртуальні валюти як DigiCash, Hashcash або Bitgold. Однією з найбільш ранніх і помітних пропозицій є DigiCash Девіда Чаума. У 1989 році Чаум заснував компанію DigiCash, яка, застосувавши криптографічні протоколи з відкритим ключем, спробувала створити криптографічно захищену цифрову готівку, що імітує властивості фізичних грошей. Ще у 1983 році він опублікував статтю “Сліпі підписи для невідстежуваних грошових активів” (Blind Signatures for Untraceable Cash) [22], в якій запропонував так звані “сліпі підписи”, які забезпечували конфіденційність транзакцій і уникали проблеми “подвійних витрат” (double-spending problem), яка супроводжувала багато ранніх спроб створення цифрової готівки. DigiCash розробив валюту під назвою *ecash*, яка являла собою невідстежувану цифрову готівкову систему. Хоча деякі банки впровадили *ecash*, а Microsoft навіть запропонувала інтегрувати її у Windows, DigiCash врешті-решт подав заяву про банкрутство у 1998 році через нестачу достатньої кількості інвесторів та відсутність транзакцій між користувачами. Хвиля стартапів цифрових платежів із загальними назвами, такими як CyberGold, CyberCash або E-Gold розпочалася за винаходом

DigiCash у спробах розробити вебгроші. Однак, за винятком PayPal, який відхилився від своєї початкової ідеї про включення криптографічних платежів за допомогою портативних пристроїв Palm Pilot, ці стартапи онлайн-платежів зазнали невдачі. Паралельно з DigiCash та іншими спробами запатентувати та комерціалізувати цифрові валюти та системи онлайн-платежів, група криптографів, які взаємодіяли у так званому списку розсилки “cypherpunk”, почала розробляти альтернативи з відкритим кодом [101]. Хоча деякі проєкти, такі як E-Gold, пропонували прив’язати вартість цифрової готівки до фіатної валюти або товару, інші – почали експериментувати з незалежними від фіата цифровими валютами. Деякі люди почали впроваджувати дефіцит у своїх криптовалютах як джерело цінності їх активів. У біткоїнах цифровий дефіцит був досягнутий завдяки розробці платіжної архітектури, в якій створення грошей вимагає вирішення дорогих обчислювальних завдань. Ідея такої системи, яку біткоїн пізніше впровадив за допомогою свого алгоритму *доказу виконаної роботи* (proof-of-work), беруть початок від пропозиції криптографів Дворк і Наор, яка була опублікована на початку 1990-х [33]. Термін “доказ виконаної роботи” був введений у статті Якобссона та Юелса у 1999 році [57]. У своїй роботі Дворк і Наор запропонували систему, в якій розв’язання обчислювальних задач використовувалося для зменшення кількості спаму в електронній пошті. Пізніше схожа ідея була висловлена в алгоритмі *Hashcash* Адама Бека, яку він опублікував у 1997 році.

У системах доказу виконаної роботи, піонерами яких стали алгоритми Hashcash та ін., перевірка транзакцій і пов’язана з ними емісія цифрової валюти – робота, яка повинна бути доведена – виконуються процесорами, які вкладають обчислювальні ресурси у розв’язання математичних задач. Хоча назва Hashcash вже неявно містить ідею монетизації сертифікації доказу виконаної роботи, самі штампи Hashcash, що становлять собою обчислювальні докази роботи, не були призначені для придбання грошової цінності. Адам Бек представляв систему підтвердження працездатності Hashcash як цифрову готівку й, таким чином, як альтернативу DigiCash від Chaum. Однак, не було можливості обмінюватися марками хеш-кешу через однорангову мережу. Більш розвинені пропозиції, які концептуалізують розв’язання обчислювальних задач у вигляді грошових коштів, були ви-

сунуті у вигляді b-money та Bitgold [29; 137]. Для обох варіантів процес вирішення обчислювальних головоломок безпосередньо використовується для виробництва цифрової валюти. У Bitgold та b-money, які обидва використовують мітки часу для перевірки транзакцій, обчислювальні рішення самі створюють екземпляри грошових одиниць. Однак, b-money та Bitgold, які були неофіційно запропоновані у списку розсилки та серії публікацій у блозі, не просунулися далі концептуальної стадії розробки. Обидві валюти не були реалізовані та не мали специфікацій коду.

В той самий час, у 2010 році, на [Bitcointalk.org](http://bitcointalk.org) форумі Накамото заявив, що біткоїн є об'єднанням концепцій b-money та Bitgold. Біткоїн являє собою технологічну новинку, оскільки він виходить далеко за рамки простої реалізації набору раніше чинних криптографічних ідей. Дизайн архітектури біткоїна вирішив глибокі технічні та концептуальні проблеми, які попередники не змогли конкретизувати належним чином або просто не змогли вирішити. Більш конкретно, Hashcash, Bitgold або b-money мали дві основні проблеми, які Накамото розв'язав: самомонетизація криптовалюти на основі певного протоколу та децентралізація управління мережею. Тоді як у системі Hashcash критично відсутній будь-який контроль над інфляцією, біткоїн включає автоматичний механізм для періодичного коригування складності обчислювальних завдань, які регулюють випуск нової криптовалюти. Приймавши оновлену версію алгоритму Hashcash для процесу видобування біткоїнів, коригування складності видобування, яка управляє системою перевірки працездатності біткоїна, розв'язала проблему контролю інфляції, яку переслідували багато попередніх пропозицій з імплементації цифрової готівки. Іншими словами, оскільки цей механізм автоматично регулює складність для стабілізації рівня пропозиції, Накамото зміг розробити децентралізовану форму цифрових грошей, яка ігнорує будь-який центральний виконавчий орган влади, що до цього контролював рівень інфляції або забезпечував безпеку мережі. Грошово-кредитна політика, яка закладена в протокол, обмежує його пропозицію у 21 мільйон біткоїнів, і коригування складності, яка регулює потоки енергії, що витрачаються на забезпечення безпеки мережі, представляє джерело технологічних інновацій біткоїнів. Крім того, як Bitgold, так і b-money не вказали консенсус-механізми для вирішення розбіжностей між вузлами або серверами.

рами з приводу реєстру, в якому зберігатимуться всі транзакції у мережі. Тоді для вирішення розбіжностей потрібні були б надійні служби для створення та перевірки валюти, а також централізовані організації, які контролюють вхід в мережу, щоб захистити її від зловмисників, які намагаються змінити історію реєстру або двічі витратити віртуальні гроші. У біткоїні ця проблема вирішується за допомогою так званого “майнінгу” – процесу, який був розроблений таким чином, щоб бути ресурсомістким і обчислювано складним для забезпечення незмінності кількості видобутих блоків із записами проведених транзакцій. Замість того, щоб покладатися на надійні сервери, які фіксують транзакції по часу в бухгалтерській книзі – як це було запропоновано, наприклад, в серії наукових робіт Хабера й Сторнетти у 1990-х роках [50] – транзакції із біткоїнами обробляються мережею “майнерів”, робота яких компенсується новими біткоїнами й комісіями за транзакції. Упорядковані в лінійній послідовності, ці блоки породжують те, що Накамото назвав “ланцюгом часу” (time-chain), який згодом став відомим як “блокчейн” (blockchain) [99].

Як показують зазначені факти, архітектура біткоїна синтезує набір основних технічних елементів. Криптографія з відкритим ключем, дерева Меркле, криптографічні підписи та хеш-функції, перевірка працездатності та інші ідеї, отримані в результаті розробки стійких однорангових мереж в галузі комп’ютерних наук, слугували будівельним матеріалом для архітектури мережі біткоїн.

## **1.2. Фінансові бульбашки біткоїн ринку**

Історія біткоїна перемежовується спекулятивними бульбашками [47]. З моменту появи першої біржової ціни у 2010 році технологічне поширення біткоїнів можна уявити як серію циклів буму-спаду із дедалі більшою інтенсивністю і масштабом. Ця послідовність надекспоненціального підвищення цін, за якими відбуваються однаково виняткові падіння, здається, йде шляхом класичного циклу галасу Gartner, яка використовується в якості загальної схеми представлення різних етапів впровадження технології. Ці цикли ажіотажу підживлювались спекулятивними бульбашками, що, своєю чергою, призвело до масштабнішого впровадження технології. Отже, кожен цикл відповідає окремим етапам впровадження

певних ініціатив у біткоїн та ринок криптовалют загалом.

Дідьє Сорнет виокремлює п'ять основних бульбашкових крахових станів за довготривалу історію біткоїна [7; 53]. У 2011 році ціна біткоїна зросла з 1 долара США 14 квітня до 28,90 долара США 9 червня. Наступного року ціна зросла з 4,80 доларів США 10 травня до 13,20 доларів США 15 серпня. У 2013 році, з 3 січня по 09 Квітня, ціна біткоїна зросла з 13,40 долара США до 230 доларів США. У тому ж році біткоїн виріс з 123,20 долара США 7 жовтня до 1156,10 долара США 4 грудня. Після обвалу цін наприкінці 2013 року ціна повільно відновлювалася протягом двох років. 25 березня 2017 року ціна біткоїна почала прискорюватися з 975,70 долара США до 20,089 долара США 17 Грудня 2017 року.

До цього списку також варто додати бульбашку 2021 року, коли ціна зросла більш ніж на 700% за 12 місяців до рекордно високого рівня в 69 тис. доларів у листопаді. Спад у листопаді 2022 року був викликаний крахом FTX, однієї з найбільших світових криптобірж. FTX обробляє близько 1 мільярда транзакцій на день.

У червні 2022 року біткоїн впав нижче 20 тис. доларів. Це було викликано рішенням Celsius Network, великої американської компанії з кредитування криптовалют, заморозити зняття коштів і перекази, посиляючись на "екстремальні" умови.

Цей крок призвів до різкого падіння цін на криптовалюти, їх вартість впала нижче 1 трлн доларів вперше з січня 2021 року.

Ефір, другий за величиною токен після біткоїна, подешевшав на цілих 16% до 1177 доларів, що є найнижчим показником із січня 2021 року.

Тривале придушення криптоплатежів Китаєм теж грає свою роль. Також були припущення, що криптооперації можуть припинитися в Росії. До того ж відбулися раптові й серйозні розпродажі основних криптовалют. Це викликало паніку та подальші розпродажі, оскільки довіра споживачів похитнулася.

На відміну від традиційних інвестицій, таких як акції компаній, де на рух цін цілком можуть впливати показники бізнесу, біткоїн не має базового активу. Це означає, що коливання його ціни ґрунтуються винятково на припущеннях інвесторів про те, чи буде він зростати, чи падати в майбутньому. У результаті можуть спостерігатися різкі коливання ціни біткоїна

навіть протягом 24 годин.

На цей час висока інфляція і криза вартості життя змушують людей знижувати свої інвестиційні ризики, продаючи свою криптовалюту.

Також слід виокремити ряд інцидентів, які призвели до настільки різкого коливання цін. Серед негативних факторів можна виокремити:

- У листопаді 2022 року криптовалютна біржа FTX постала перед труднощами після того, як її конкурент Binance відмовився від угоди з купівлі компанії.
- Також у червні 2022 року Binance, одна з найбільших у світі криптовалютних бірж, призупинила виведення біткоїнів, а виконавчий директор Чанпен Чжао звинуватив “застряглу транзакцію”, яка викликала відставання.
- На початку 2022 року повідомлялося, що Росія може заборонити операції з криптовалютами. Але потім, після вторгнення в Україну, пролунали заклики до криптобірж заборонити російські транзакції.
- У травні 2021 року глава компанії Tesla Ілон Маск заявив, що виробник електромобілів більше не буде приймати цифрові платежі через побоювання з приводу впливу майнінгу криптовалюти на довкілля.
- У червні 2021 року банкам і платіжним установам в Китаї було наказано припинити дозволяти криптотранзакції, і китайський уряд заборонив видобування цих валют. Потім, у вересні 2021 року, всі криптотранзакції були оголошені незаконними, що фактично означало, що подібні біткоїни були заборонені.
- Також у червні 2021 року тодішній президент США Дональд Трамп назвав цю криптовалюту шахрайською через її намагання конкурувати з доларом за звання “валюти світу”.
- Агенти ФБР протягом багатьох років вилучали у злочинців мільйони доларів в біткоїнах.
- У серпні 2021 року британський регулятор The Financial Conduct Authority фактично вніс до чорного списку Binance, одну з

найбільших криптобірж. Великі банки, такі як HSBC і Santander, наслідували цей приклад, заблокувавши клієнтам здійснення платежів на Binance.

- У тому ж місяці Міжнародний валютний фонд випустив попередження країнам, що використовують криптовалюти в якості законного платіжного засобу, заявивши, що їх широке використання буде загрожувати “макроекономічній стабільності” і може завдати шкоди фінансовій цілісності.
- Крипто-пограбування: у серпні минулого року хакер вкрав 600 мільйонів доларів під час кібератаки, спрямованої на криптоплатформу Poly Network, лише щоб через чотири дні повернути більшу частину вкраденого, заявивши, що вони зробили це “для розваги” і щоб “виявити вразливість” в системі раніше, ніж це зробили інші.

Також варто згадати повномасштабне вторгнення Росії в Україну 24 лютого 2022 року. Автори цього дослідження [14] вперше розглядають вплив російсько-української війни на обсяг торгівлі біткоїнами й роблять висновок, що російсько-українська війна перешкоджає обсягу торгівлі біткоїнами. Вони досліджують, який вигляд мав обсяг торгівлі біткоїнами на період до вторгнення (з 23 січня по 23 лютого 2022 року) та в період після вторгнення (з 24 лютого по 16 квітня 2022 року), і виявляють, що вплив конфлікту на обсяг торгівлі біткоїнами є більш виражений у період після вторгнення. Крім того, у дослідженні розглядається, чи відрізнявся вплив на динаміку криптовалюти протягом першого тижня вторгнення (з 24 лютого 2022 року по 3 березня 2022 року) та після (з 4 березня 2022 року по 16 квітня 2022 року). З’ясовується, що вплив конфлікту на обсяг торгівлі біткоїном більший після першого тижня вторгнення. Нарешті, дослідження демонструє, що російсько-українська війна є передвісником динаміки біткоїна як в короткостроковій, так і в довгостроковій перспективі.

Серед негативних подій можна виокремити й позитивні, що підштовхували ціни криптовалюти й досі продовжують утримувати увагу багатьох людей. Серед основних можна виокремити такі новини:

- У березні 2021 року Morgan Stanley став першим великим банком США, який запропонував більш заможним клієнтам доступ до біткоїн-фондів, хоча й обмежений не більше ніж 2,5% від загального чистого капіталу інвестора.
- У червні 2021 року, через місяць після початку розпродажу криптовалют, Ілон Маск заявив, що Tesla, ймовірно, знову буде приймати платежі в біткоїнах, коли більше ніж 50% споживаної енергії буде надходити з поновлюваних джерел.
- У липні 2021 року Amazon розмістила оголошення про вакансію “провідного фахівця з цифрової валюти й блокчейн-продуктів”, що викликало припущення про те, що незабаром вона прийме біткоїн в якості оплати.
- У вересні минулого року Сальвадор зробив біткоїни законним платіжним засобом.
- Окрім цього Федеральна резервна система США, яка розглядала питання про запуск власної “цифрової валюти центрального банку”.
- У березні 2022 року президент США Джо Байден видав виконавчий указ, метою якого є координація дій уряду з регулювання цифрових активів.

Як показує ця модель циклічних біткоїн-бульбашок, за кожним крахом або корекцією йде слідом ще більша бульбашка. Ціна біткоїна під час вищезгаданих бульбашок значною мірою корелювала зі збільшенням ліквідності та з розвитком інфраструктури, що залучало нових користувачів, таких як підприємці чи спекулянти. Під час першої бульбашки було надзвичайно важко торгувати біткоїнами, які в основному добувалися за допомогою майнінгу, обмін і захист біткоїна став відносно легкими під час біткоїн-бульбашки, яка досягла свого апогею в грудні 2017 року.

Таким чином, ціна біткоїна може бути охарактеризована ієрархією повторюваних і експоненціально зростаючих бульбашок [47]. Ці бульбашки являють собою фази нестійких прискорюваних цінових корекцій, які обумовлені самопідкріплюючим зворотнім зв'язком великих мас людей [132].



Хоча обвал цін, який йде слідом за процесами зростання [134] може бути де-стабілізуєчим і руйнівним, цей тип бульбашок потрібно розуміти як джерело технологічних інновацій. Залучаючи капітал в обсязі, що перевищує той, який був би виправданий раціональним аналізом витрат і вигод або стандартним розрахунком дисконтованих грошових потоків, подібного роду крахові стани часом мотивують до впровадження нових технологій. Прилив капіталу відбувається на ранній стадії, що призводить до першої хвилі підвищення цін. За динамікою цієї валюти слідкує ще більше інвесторів, залучені перспективою отримання високих прибутковостей. Це викликає позитивний механізм зворотного зв'язку, який підживлює спіралеподібне зростання. Бульбашки, які історично породжували великі технологічні інновації та збої, мають спільну центральну динаміку: фінансування цих технологій відокремлюється від раціональних очікувань економічної віддачі та, відповідно, призводить до зниження колективного неприйняття ризику. Незалежно від кількісної фінансової віддачі та економічної цінності, бульбашки й крахи мобілізують фінансовий капітал, необхідний для розробки нових трансформаційних технологій. Ґрунтуючись на спостереженні, що динаміка цих бульбашок виходить з фінансових до соціальних систем, Дідьє Сорнетом було представлено серію детальних тематичних досліджень, що присвячені гіпотезі про соціальні бульбашки [48; 131].

### 1.3. Еконофізика криптовалютного ринку

Фізики вже давно цікавляться фінансовими ринками як практично, так і академічно. Що стосується інвестицій, Ісаак Ньютон, один з найбільших вчених в історії, як повідомляється, інвестував в акції компанії Південного моря у 1720-х роках і втратив 20 тис. фунтів стерлінгів (близько 3 мільйонів доларів США в сьогоднішніх грошах) в результаті вибуху сумнозвісної бульбашки Південних морів. Його спекулятивні зусилля призвели до знаменитої цитати про те, що “я можу прорахувати рух небесних тіл, але не божевілля людей”. У 1991 році Дойн Фармер разом із Норманом Пакардом та Джеймсом Макгіллом заснував компанію Prediction Company для розробки стратегій автоматичного статистичного арбітражу. Компанія була досить успішною, але продана UBS у 2006 році, а потім перепродана Millenium Management у 2013 році. У 1994 році Жан-Філіп Бушо і Дідьє

Сорнетт спільно заснували дослідницьку компанію Science & Finance, яка у 2000 році була об'єднана з Capital Fund Management. Тим часом Сорнетт покинув Science & Finance, а Бушо її очолив і став головним науковим співробітником Capital Fund Management. Існує безліч інших прикладів того, як фізики заграють з Волл-стріт, а Еммануель Дерман є зразком для наслідування [30].

Існують глибинні взаємозв'язки між фізикою та фінансами (а також принципові відмінності) [54; 133], які надихнули покоління як фізиків, так і економістів. Загалом фізики сприймають фінансові ринки як складні системи, і тому вони провели численні наукові дослідження. У 1930-х роках Еttore Майорана написав статтю під назвою “Значення статистичних законів у фізиці та соціальних науках”, яка була опублікована Джованні Джентіле молодшим у 1942 році після його зникнення, а її англійський переклад зроблений Мантенї був представлений у журналі кількісних фінансів у 2005 році [82]. У 1960-х роках Бенуа Мандельброт, який згодом буде розглядатися як основоположник еконофізики, започаткував серію праць про розподіл доходів [74–77; 80], розподіл коливань цін спекулятивних активів [78; 79] та довгострокові кореляції у фінансових та економічних часових рядах із використанням R/S аналізу [72; 115].

На відміну від традиційної економіки, яка побудована на моделі раціонального вибору, еконофізика запозичує модель частинок зі статистичної фізики для пояснення поведінки соціальних агентів. Така модель передбачає, що смаки та уподобання агентів не є фіксованими, а натомість залежать від кооперації з іншими агентами [5]. Іншими словами, еконофізика приділяє більше уваги соціальному оточенню агентів [102]. Деякі інші фізичні моделі та концепції, які зазвичай застосовуються в економіці, включають кінетичну теорію газів, теорію хаосу, перколяцій та самоорганізовану критичність.

Хоча статистична фізика не може обійтися без квантово-механічних ідей та понять, основною сферою її інтересів є макроскопічний опис систем з великою кількістю частинок, динамічна поведінка яких не може бути зведена до мікроскопічних динамічних рівнянь квантової механіки, розрахованих для окремих частинок без використання відповідних статистичних постулатів [8]. В останні роки спостерігається дедалі більший потік робіт, в

яких наводяться докладні моделі взаємодії учасників ринкових процесів і квантово-механічні аналогії, поняття та термінології, засновані на методах опису соціально-економічних систем, для пояснення як приватних особливостей сучасної ринкової динаміки, так і економічного функціонування в цілому [90; 124; 126]. У роботах [122; 129] Соловйов і Сапцин запропонували нову парадигму моделювання складних систем, засновану на ідеях квантової, а також релятивістської механіки. Було виявлено, що використання квантово-механічних аналогій (таких як принцип невизначеності, поняття оператора та інтерпретація квантових вимірювань) може бути застосовано для опису соціально-економічних процесів.

Крахові та критичні явища постійно чинять тиск на світову економіку, частиною якої стали й криптовалюти. Ринок криптовалют являє собою складну, нелінійну систему, динаміка котрої обумовлена багатьма факторами. Складні системи складаються із багатьох співзалежних агентів, проявом поведінки яких є формація новітніх часових, просторових або функціональних структур [26; 96; 143].

Кілька досліджень дійшли висновку, що ринок криптовалют схильний до спекулятивних бульбашок [1; 23; 43; 49]. Таким чином, аналіз волатильності та її передбачуваності корисний для оцінки ринкового ризику, що також сприяє зменшенню спекуляцій та спекулятивних бульбашок. Коли панує невизначеність, значні зміни у волатильності прибутковостей можуть суттєво та негативно вплинути на інвесторів, які не схильні до ризику [12].

З моменту появи ймовірнісної оцінки ризику, ризик визначався як математичний добуток ймовірності події та деякої міри її негативних наслідків. У фінансовому аналізі ризик часто вимірюється за допомогою дисперсії. Тобто чим вище дисперсія, тим більший ризик. Однак історично дисперсія також вважалася мірою розсіювання, невизначеності та засобом оцінки коригування моделі [31].

В емпіричних дослідженнях ринку криптовалют моделі узагальненої авторегресійної умовної гетероскедастичності (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, GARCH), включаючи асиметричні моделі GARCH, використовувались для моделювання волатильності [6; 44; 67; 71], для оцінки значення в ризику (Value at Risk, VaR) та умовного значення в ризику (Conditional Value at Risk, CVaR) [18]. В інших дослідженнях як,

наприклад, в роботі [56], використовують методологію векторного авторегресійного моделювання (vector autoregressive modelling, VAR) для вивчення взаємної інформації між найважливішими криптовалютами (Bitcoin, Litecoin, Ripple, Ethereum та Bitcoin Cash). Стаття [136] розглядає зв'язок між біткоїном та компаніями в енергетичному та технологічному секторі в контексті асиметричної багатовимірної аналізу. Карфедіне та ін. [21] використовуються двовимірні динамічні моделі GARCH для вивчення фінансових властивостей криптовалют та їх динамічного взаємозв'язку з деякими фінансовими та товарними активами. У статті [146] застосується підхід GARCH-MIDAS для прогнозування волатильності деяких відповідних криптовалют за допомогою різних частот даних. Єдиної думки про найбільш коректної моделі немає. Однак моделі GARCH враховують лише другий момент значень прибутковостей  $i$ , таким чином, можуть охопити лише невелику частину інформаційного вмісту розподілів прибутковостей. Те саме відбувається з дисперсією, яка часто використовується для оцінки волатильності, фінансового ризику та невизначеності. Таким чином, виникає потреба у більш надійних методах оцінки ризиків.

Ентропія є більш загальною мірою невизначеності, ніж дисперсія або стандартне відхилення, оскільки вона може бути пов'язана з моментами розподілів вищого порядку [31]. Багато фінансових досліджень застосовують ентропію для оцінки ризику, але лише деякі зосереджені на ринку криптовалют. Наприклад, у роботі [67] ентропія Шеннона була застосована для оцінки фрактальності та випадковості значень волатильностей біткоїна. Аналіз символічних часових рядів був використаний для обчислення ентропії Шеннона на внутрішньоденних прибутковостях біткоїна та для визначення значення в ризику [107].

Значення в ризику є одним з найбільш поширених показників ризику [98]. Цей метод вказує на можливі (найгірші) втрати в заданому часовому інтервалі ( $h$ ) з певною ймовірністю. Значення в ризику є доречним, коли метою є мінімізація ймовірності екстремальних втрат [4], але цей метод критикували за те, що він не задовольняє аксіому субадитивності для всіх розподілів. Однак, він задовольняє цю аксіому для активів з важкими хвостами розподілу прибутковості та чітко визначеним середнім значенням [39]. Оскільки розподілу прибутковостей криптовалют характерні важкі

хвости [44; 109], значення в ризику є відповідною мірою ризику для ринку криптовалюти.

В останні роки теорія нелінійних систем широко використовувався для розуміння основних складних процесів, пов'язаних з поведінкою біологічних, екологічних, економічних, фізичних, психологічних, фізіологічних динамічних систем [15; 60; 61; 65; 94; 103–106]. Зазвичай складність спостережуваної динамічної системи аналізується за допомогою часового ряду такої системи. Дослідження хаосу і мультифрактальних характеристик має значне значення при прогнозованості часових рядів. З одного боку, хаотичні системи (сигнали) можуть мати обмежену короткострокову передбачуваність. Разом з тим, мультифрактальність і самоподібність представляють джерело довготривалої пам'яті, і тому можуть призвести до приросту точності довгострокових прогнозів майбутніх значень досліджуваної системи.

Автори цієї роботи [149] вивчали щоденні значення волатильності біткоіна з використанням старшого показника Ляпунова та мультифрактального аналізу детрендованих флуктуацій. На основі даних методів вони будують моделі хаотичних нейронних мереж і демонструють перспективні результати при прогнозуванні волатильності криптовалюти. Такайши [138] та Лахмірі з Бекірос [66] вивчали мультифрактальні властивості біткоіна. Уркварт [145] вивчав ринкову неефективність біткоіна за допомогою випадкових блукань, тоді як Барів'ера [9] повернувшись до цієї ж теми, використовувала показник Херста. Гарньє та ін. [45] спостерігали впорядковану кореляцію на ринку біткоіна. Існують альтернативні погляди на біткоїн щодо його хаотичності та складності. Пілкінгтон [110] також вивчав біткоїн з точки зору теорії складності. У цій роботі [148] порівняно мультифрактальні властивості біткоіна на ряду із золотом, фондовими та світовими валютними ринками, і їхні результати показують, що ринок біткоіна є найбільш неефективним порівняно з іншими. В аналогічному дослідженні Бурі та ін. [140] також перевірили нелінійні короткострокові й довгострокові взаємозв'язки між біткоїном, сукупними цінами на сировинні товари та золото. У цій роботі [64] дослідники розглянули адаптивну гіпотезу ринку та еволюційну передбачуваність прибутковості на ринку біткоїнів. Тут [63] автори також оцінили адаптивність

довготривалої пам'яті ряду щоденних значень волатильності біткоїна, водночас досліджуючи вплив обсягу торгів на адаптивність довготривалої пам'яті. Цзян та ін. [59] також вивчали довгострокову пам'ять біткоїна зі зміною в часі, використовуючи коефіцієнт Херста. Чан і Лі [58] опирались на байєсівські нейронні мережі при прогнозуванні цін на біткоїн. Крім досліджень, пов'язаних з криптовалютою в літературі, хаос і його особливості вже були розглянуті з великим інтересом.

У слід за основоположною статтею Лоренца [70], багато науковців намагалися дослідити хаос в різних областях. Математично Лі та Йорке визначили три основні властивості хаосу: чутливість до початкових умов, обмеженість і неперіодичність. Деяка відносно рання робота була виконана Броком [16], що забезпечує строге математичне введення в тести, які допомагають розрізняти випадкові та детерміновані системи. Відповідні результати наведені в [125].

Використання показників Ляпунова вивчалось на інших ринках, таких як ф'ючерсних [13]. Попри те, що існують альтернативні методи виявлення нелінійностей у фінансових часових рядах, BDS-тест отримав широке визнання. Маккензі [93] застосував BDS-тест в контексті хаотичної поведінки індексів національного фондового ринку. Однак, не будучи показником хаосу, у великій кількості досліджень цей тест використовується в якості доповнення. Серед них Опонг та ін. [141] вивчали поведінку деяких фондових ринків Великобританії, використовуючи показники Херста, а також BDS-тест. Серлетіс і Гогас [127] вивчали хаос в обмінних курсах на чорному ринку Східної Європи, використовуючи значення показника Ляпунова разом із BDS-тестом. У роботі Баркуласа та ін. [10] також використовувався BSD-тест та ряд інших методів.

З іншого боку, фрактальна розмірність, яка також використовується при вивченні хаотичних особливостей, була вперше вивчена Мандельбротом [73], а алгоритмічні реалізації були вивчені в [142]. У роботі Петерса [108] згадується можливість застосування теорії хаосу та фракталів для аналізу фінансових ринків. Ліндсі та Кемпбелл [69] застосовували метод "box-counting" для прогнозування банкрутств в рамках підходу теорії хаосу. З іншого боку, в даній роботі [114] вивчали передбачуваність фондового індексу Hang Seng за допомогою мультифрактального аналізу та методу

box-counting.

У цій роботі ми будемо послуговуватись ще одним методом для аналізу складних нелінійних систем – *рекурентним аналізом*. Ми використовуватимемо методологію ковзного вікна, щоб ідентифікувати зміни в динаміці біткоїна з плином часу. У літературі є кілька досліджень, в яких кількісний рекурентний аналіз із використанням ковзного вікна застосовувався до фінансових часових рядів. У даній статті [11] автори застосували кількісний рекурентний аналіз до щоденних значень щодо індексів 23 розвинених фондових ринків та тих 23 ринків, що знаходяться на стадії розвитку за період з січня 1995 по грудень 2009 року. Використовуючи ковзне вікно, автори продемонстрували, що під час критичних економічних подій, таких як бульбашка доткомів, азійська фінансова криза і криза 2008 року спостерігається зниження ламінарності системи та її детермінізму. Тут [111] автори досліджували кілька обвалів фондового ринку з використанням кількісного рекурентного аналізу і показали, що показники рекурентності можуть бути використані для виявлення ринкових бульбашок. Автори продемонстрували, що показник ламінарності може бути використаний для диференціації різних періодів ринку, таких як нормальне функціонування, нестабільність, критичний період і релаксація. У даній роботі [123] авторами розглянуто двоє індексів індійського фондового ринку за період з 2 січня 2002 року по 10 жовтня 2013 року з використанням рекурентного аналізу. Автори дійшли висновку, що індійський фондовий ринок має хаотичний характер. Крім того, вони продемонстрували, що детермінізм ринків зазнав спаду під час кризи 2008 року та європейської боргової кризи 2010 року. Автори прийшли до висновку, що після кризи низькоякісної іпотеки 2008 року ринок перебував у турбулентному стані. Крім того, автори досліджували зміну показника ламінарності з ходом часу. Вони також показали спад ламінарності під час кризи 2008 року. Молоні та Рагавендра [95] використовували рекурентний підхід для аналізу промислового індексу Доу-Джонса. Авторів особливо цікавили події 1929, 1973, 2000 та 2007 років. Автори виявили, що показники рекурентності спадають незадовго до ринкових криз або поблизу них. Це означає, що навколо кризових станів динаміка ринку втрачає свою детерміновану структуру. Автори виявили фазові переходи, коли ринок переходить з бичачого стану

до ведмежого.

Міри складності на основі еконофізичного інструментарію повинні так чи інакше реагувати на такі кризові явища крипторинку. Ключовою ідеєю тут є гіпотеза про те, що складність системи має змінюватись до настання аномальної події і фактично в час її виникнення. Той чи інший стан системи має сигналізувати про відповідний ступінь її складності, якщо дані міри здатні кількісно оцінити певні закономірності. Представлений інструментарій характеризуватиметься своєю динамічністю, тобто можливістю відстежувати зміни обраної міри з ходом часу і зіставляти її сигнали з динамікою вихідного часового ряду.

Отже зрозуміло, що на ринках спостерігається значна кількість інвесторів, що розпродають і прагнуть оптимізувати свої фінансові портфелі коштом менш ризикованих активів. Це призводить до високої волатильності типової для кризових періодів. Економічний ключ до запобігання такої активності може полягати в криптовалютах і побудові ефективних індикаторів можливих критичних станів, які гарантуватимуть інвесторам і трейдерам значну мінімізацію своїх ризиків. Протягом багатьох років цей актив обговорювався великою кількістю людей, він пережив значні зміни за такий короткий період, багато людей вірять у нього, і в результаті загальний ринок криптовалют склався в досить складну та самоорганізовану систему. Події зовнішнього світу знаходять відображення в динаміці криптовалют, і відповідна інформація, яка закодована в часових рядах криптовалютного ринку, може бути вилучена [17; 113; 116]. В умовах нестабільності фінансових ринків важливо вибирати такі показники складності, які зможуть надати нам передчасну ідентифікацію потенційний криз.

## **Висновки до розділу 1**

1. Ринок криптовалют являє собою складну, самоорганізовану систему, яку в більшості випадків можна розглядати або як складну мережу ринкових агентів, або як інтегрований вихідний сигнал цієї мережі – часовий ряд, наприклад, цін на окрему криптовалюту. Дослідження коливань цін криптовалют, що проводиться на міжнародному рівні, ускладнено взаємодією багатьох факторів, включаючи попит і пропозицію на ринку, обмінний курс долара США, стан фондового ринку,



вплив злочинності, тіньового ринку і тиск регулятора фіатних грошей, що вносить високий рівень шуму в дані криптовалют. Отже, ціни на криптовалюти демонструють такі складні характеристики волатильності, як нелінійність і невизначеність, які важко прогнозувати, і будь-які отримані результати є невизначеними. Таким чином, прогнозування цін на криптовалюти залишається надзвичайно актуальною задачею.

2. Оглянуто історію ринку криптовалют, що підтверджує твердження про те, що біткоїн являє собою технологічний прорив. Біткоїн – це радикальна технологічна інновація, що представляється поєднанням ідей та технологій Накамото, які раніше існували в різних і раніше невідомих широкому колу людей областях. Сам Сатоші Накамото представив систему взаємопов'язаних техніко-економічних циклів зворотного зв'язку, які підживлюють його цінність, безпеку та мережну структуру.
3. Після здійсненого аналізу робіт присвячених криптовалютному ринку, пересвідчилися, що ринок криптовалют – це складна самоорганізована система, що сформована зі складної мережі скоординованих агентів. Новітні часові, просторові або функціональні структури є результатом цієї складної взаємодії. Ціни на криптовалюти демонструють високий рівень нелінійності, невизначеності та волатильності [2; 20]. Тому прогнозування цін на криптовалюти представляється дуже нетривіальною задачею [28]. Результуюча нелінійна динаміка фінансових активів і, зокрема, криптовалют стала привертати до себе увагу багатьох науковців, що призвело до чисельної кількості досліджень присвячених цим хаотичним системам. Видно, що крипториннок було діагностовано за допомогою різних як лінійних, так і нелінійних методів. Поки що одним із найменш досліджених методів теорії складності є інструментарій рекурентного аналізу. Проте, як показують роботи присвячені фондовим індексам, рекурентний аналіз представляє ефективні кількісні показники для ідентифікації критичних змін у динаміці системи.

# РОЗДІЛ 2

## МЕТОДОЛОГІЯ РЕКУРЕНТНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩ СКЛАДНОСТІ

### 2.1. Методологія реконструкції фазового простору

Системи в природі або техніці зазвичай існують або у квазістаціонарних станах. Складність цих процесів (нелінійних, з багатьма пов'язаними змінними, зашумлених і т.д.) не піддається осмисленому аналізу. Проте, наблизений із певною точністю опис цих процесів залишаються важливим напрямком серед численних наукових дисциплін (наприклад, метеорології). Тою мірою, в якій системи є детермінованими (керованими правилами), все ще залишається надія і завдання опису динамічних системних змін до такої міри, щоб можна було передбачати майбутні стани системи (наприклад, робити прогнози). Практично звичайна мета полягає в тому, щоб знайти математичні моделі, які можуть бути адаптовані до реальних процесів (імітація) і потім використані для вирішення поставлених завдань. Вимірювання стану та подальший аналіз даних є першими кроками до розуміння положення процесу. Добре відомими й схваленими методами аналізу даних є ті, які засновані на лінійних концепціях, таких як метод моментів, кореляційний аналіз, спектральний аналіз або метод головних компонент тощо. Проте, за останні два десятиліття цей набір аналітичних методів поповнився методами теорії нелінійної динаміки. Деякий з цих нових методів засновані на топологічному аналізі фазового простору основної динаміки або на відповідній їй реконструкції [61; 139].

Стан системи може бути описаний змінними стану

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t). \quad (2.1)$$

Змінні стану  $d$  в момент часу  $t$  утворюють вектор  $\vec{X}(t)$  у  $d$ -вимірному просторі, який називається фазовим простором. Цей вектор рухається у часі та напрямку, який задається його вектором швидкості

$$\dot{\vec{X}} = \partial_t \vec{X}(t) = \mathbf{F}(x). \quad (2.2)$$

Часова послідовність векторів фазового простору утворює траєкторію (траєкторія фазового простору, орбіта). Поле швидкостей  $\mathbf{F}(x)$  є дотичним до цієї траєкторії. Для автономних систем траєкторія не повинна перетинатися сама з собою. Часова еволюція траєкторії пояснює динаміку системи, тобто атрактор системи. Якщо відомо  $\mathbf{F}(x)$ , стан у даний момент часу може бути визначено шляхом інтегрування системи рівнянь (2.2). Однак графічна візуалізація траєкторії дозволяє визначити стан без інтегрування рівнянь. Форма траєкторії дає уявлення про систему; періодичні або хаотичні системи мають характерні фазові портрети.

Спостереження за реальним процесом зазвичай не дає всіх можливих змінних стану. Або відомі не всі змінні стану, або не всі з них можуть бути виміряні. Найчастіше доступне лише одне спостереження  $x(t)$ . Оскільки вимірювання призводять до дискретних часових рядів, спостереження будуть записані у вигляді  $x_i$ , де  $t = i\Delta t$ , а  $\Delta t$  – це частота дискретизації вимірювання.

Зв'язки між компонентами системи означають, що кожен окремий компонент містить важливу інформацію про динаміку всієї системи. Отже, еквівалентна траєкторія у фазовому просторі, яка зберігає топологічні структури вихідної траєкторії, може бути відновлена з використанням тільки одного спостереження або часового ряду [46; 139]. Найчастіше використовуваний метод для реконструкції такої траєкторії  $\vec{X}(t)$  – це метод часової затримки:

$$\vec{X}(t) = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(d_E-1)\tau}), \quad (2.3)$$

де  $d_E$  – це розмірність вкладень,  $\tau$  – це часова затримка.

Збереження топології вихідного фазового простору гарантується, якщо  $d_E \geq 2d + 1$ , де  $d$  – це розмірність атрактора [139]. Було доведено, що для детермінованих динамічних систем відновлений таким чином фазовий простір топологічно еквівалентний вихідному простору, якщо  $d_E > 2D_f$ , де  $D_f$  – фрактальна розмірність інваріантної міри, що генерується динамікою в істинному (але часто не більше, ніж частково спостережуваному) просторі станів. Зверніть увагу, що  $D_f$  може бути набагато менша

за розмір базового вихідного (фізичного) фазового простору, охопленого всіма відповідними системними змінними.

Обидва параметри часових вкладень, розмірність  $d_E$  і затримка  $\tau$ , повинні бути обрані відповідним чином. Для визначення найменшого достатнього розміру вкладення можуть бути застосовні різні підходи [19; 41; 61; 62].

## **2.2. Аналіз динамічних систем із використанням рекурентних діаграм**

Природні процеси можуть демонструвати характерну рекурентну (повторювану) поведінку, наприклад, періодичність, але також нерегулярну циклічність. Більше того, рекурентність станів розуміється в тому сенсі, що фазові траєкторії системи предстають доволі близькими одна до одної через деякий проміжок часу. Рекурентність є фундаментальною властивістю детермінованих динамічних систем і є типовою для нелінійних або хаотичних систем [3; 103; 112].

Формальна концепція рекурентності була введена Анрі Пуанкаре в його фундаментальній роботі 1890 року [112]. Розглядаючи обмежену задачу трьох тіл, він зазначав: “у цьому випадку, нехтуючи деякими винятковими траєкторіями, виникнення яких нескінченно мало ймовірно, можна показати, що система повертається нескінченно багато разів до свого початкового стану” [112]. Хоча в наступні роки була проведена велика математична робота, новаторській роботі Пуанкаре та його відкриттю концепції рекурентності довелося чекати понад 70 років до виникнення швидких і ефективних комп’ютерів. Використання потужних обчислювальних можливостей комп’ютерів сприяло розвитку теорії хаосу і дозволило вивчати нові системи.

### **2.2.1. Дослідження рекурентної поведінки на основі класичних рекурентних діаграм**

Рекурентність в динаміці динамічної системи можна візуалізувати за допомогою *рекурентних діаграм* (*recurrence plots*, RP), уведених Екманом у 1987 році [34]. Рекурентна діаграма представляє моменти часу, коли тра-

екторії фазового простору  $\vec{X}(i)$  починають повторюватись. Компонентами цих векторів можуть бути, наприклад, положення і швидкість маятника або такі величини, як температура, тиск повітря, вологість, і навіть теперішні й попередні значення криптовалютного індексу.

Початковим наміром було надати інструмент, який може легко забезпечити розуміння різноманітних процесів, що протікають у багатовимірних динамічних системах, траєкторії яких у фазовому просторі в іншому випадку дуже важко візуалізувати [34; 83]. Рекурентна діаграма дозволяє досліджувати траєкторію  $d_E$ -вимірного фазового простору через двовимірне представлення його рекурентних станів (рис. 2.1). Збіжність траєкторії в момент часу  $i$  з іншою траєкторією в момент часу  $j$  можна представити у двовимірній двійковій матриці  $\mathbf{R}$ , де обидві осі представляються осями часу [119]:

$$R(i, j)^{d_E, \varepsilon} = \Theta \left( \varepsilon - \|\vec{X}(i) - \vec{X}(j)\| \right), \quad \vec{X}(i) \in \mathbb{R}^{d_E}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

де  $N$  – це кількість врахованих траєкторій фазового простору  $\vec{X}(i)$ ;  $\varepsilon$  – пороговий радіус багатовимірного кола з центром у точці  $\vec{X}(i)$ ,  $\|\cdot\|$  – норма для визначення відстані між траєкторіями (станами), і  $\Theta(\cdot)$  – функція Гевісайда.

Оскільки, згідно з визначенням,  $R(i, i) = 1$ , рекурентна діаграма містить головну чорну діагональну лінію – *лінію ідентичності* (*line of identity*, LOI), з кутом нахилу  $\pi/4$ . Слід зазначити, що окремо взята рекурентна точка  $R(i, i)$  не представляє жодної інформації про поточний стан системи в моменти часу  $i$  та  $j$ . Лише зі сукупності всіх точок можна надати конкретну характеристику стосовно поведінки досліджуваної системи у фазовому просторі [52; 119; 121].

На практиці марно і значною мірою неможливо знайти повну рекурентність ( $\vec{X}(i) \equiv \vec{X}(j)$ ). Наприклад, надалі стани певної хаотичної системи не будуть повторюватись повністю, але наблизатимуться до початкового стану як завгодно близько. Отже, рекурентність можна визначити як достатню близькість стану  $\vec{X}(i)$  до  $\vec{X}(j)$ . Це означає, що ті траєкторії  $\vec{X}(j)$ , які потрапляють в  $d_E$ -вимірну околицю радіуса *varepsilon* із центром в  $\vec{X}(i)$ , є рекурентними. Ці траєкторії  $\vec{X}(j)$  будуть називаються ре-

курентними точками. Представлене визначення математично визначається рівнянням (2.4) через функцію Гевісайда та його аргумент  $\varepsilon_i$ .

У початковому визначенні рекурентних діаграм околиця являє собою кулю (тобто використовується евклідова норма), і її радіус обраний таким чином, щоб він містив фіксоване число найближчих станів  $\vec{X}(j)$  [34]. При такій околиці радіус  $\varepsilon_i$  змінний для кожного стану  $\vec{X}(i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) та  $R(i, j) \neq R(j, i)$ , оскільки околиці  $\vec{X}(i)$  не обов'язково повинні збігатися з околицями  $\vec{X}(j)$ . Зазначена властивість призводить до асиметричної рекурентної діаграми, але всі стовпці матимуть однакову щільність розподілу рекурентних точок. Ми позначаємо цю близькість як *фіксовану кількість найближчих сусідів* (*fixed amount of nearest neighbors*, FAN). Однак, найбільш часто використовувані означення сусідства полягають у використанні певної метрики  $\|\cdot\|$  та фіксованого радіуса  $\varepsilon_i = \varepsilon, \forall i$ . Метрика і фіксований радіус гарантують, що  $R(i, j) = R(j, i)$ . Тобто, в цьому випадку рекурентна діаграма представлятиметься симетричною. Тип сусідства, який слід використовувати, залежить від конкретно поставленої задачі [86; 119]. Наприклад, фіксована кількість найближчих сусідів корисна для нестационарних даних, для дослідження двовимірної рекурентності з використанням крос-рекурентних діаграм або порівняння рекурентних діаграм різних систем, оскільки нема потреби заздалегідь нормалізувати часові ряди [119].

### 2.2.2. Біваріативне доповнення рекурентного аналізу крос-рекурентними діаграмами

*Крос-рекурентна діаграма* (*cross-recurrence plot*, CRP) – це біваріативне доповнення класичних рекурентних діаграм, що було введено для дослідження подібності еволюції двох різних фазових просторів [88; 150]. Іншими словами, крос-рекурентна діаграма демонструє всі моменти, коли траєкторія фазового простору першої системи опиняється приблизно в тій самій області фазового простору, де знаходиться траєкторія фазового простору іншої системи. Довжина часових рядів обох систем може відрізнятися, що призводить до неквадратичної крос-рекурентної матриці. Припустимо, у нас є дві динамічні системи, кожна з яких представлена траєкторіями  $\vec{X}(i)$  та  $\vec{Y}(i)$  в одному  $d$ -вимірному фазовому просторі. Ми

знаходимо відповідну матрицю крос-рекурентностей, обчислюючи попарні взаємні відстані між фазовими векторами двох систем:

$$CR(i, j)_{\varepsilon}^{\vec{X}, \vec{Y}} = \Theta \left( \varepsilon - \|\vec{X}(i) - \vec{Y}(j)\| \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.5)$$

Варто зазначити, що обидві системи розглядаються в одному фазовому просторі, оскільки крос-рекурентний аналіз відстежує ті моменти, коли стан першої системи рекурентний зі станом іншої системи. Використовуючи експериментальні дані, іноді важко реконструювати фазовий простір. Якщо параметри реконструкції оцінюються за двома часовими рядами, що не є рівними, тоді слід опиратися на параметри довшого ряду. Однак дані, про які йде мова, повинні бути отримані з одного й того ж (або дуже схожого) процесу і, фактично, повинні представляти однакову спостережувану величину. Отже, відновлений фазовий простір повинен бути однако-вим. Компоненти  $\vec{X}(i)$  та  $\vec{Y}(i)$  зазвичай нормалізуються перед обчисленням матриці крос-рекурентності, щоб обидві системи були придатними для порівняння.

Оскільки значення головної діагоналі  $CR(i, i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) не обов'язково рівні одиниці, чорна головна діагональ зазвичай відсутня. Крім того, структури, що спостерігаються в класичних рекурентних діаграмах, можуть зберігатися і в крос-рекурентних. Лінії, орієнтовані по діагоналі, також представляють тут великий інтерес. Вони являють собою відрізки на обох траєкторіях, які у деякий проміжок часу йдуть паралельно. Частота і довжина цих ліній, очевидно, пов'язані з певною залежністю динаміки обох систем. Міри, заснована на довжинах таких ліній, можуть бути використані для пошуку нелінійних взаємозв'язків між двома системами, які неможливо виявити за допомогою класичних показників крос-кореляції [88].

Важливою перевагою крос-рекурентних діаграм є те, що вони виявляють локальну різницю в еволюції близьких один до одного траєкторій, представлених вигнутими лініями. Тимчасове розширення або тимчасове стиснення однієї з траєкторій викликає спотворення діагональних ліній [87]. Часовий зсув між траєкторіями призводить до зміщення *лінії синхронізації* (*line of synchronization*, LOS). Отже, лінії синхронізації двох рядів можуть лежати досить далеко від лінії ідентичності крос-рекурентної діаграми.

### 2.2.3. Аналіз синхронізації систем із використанням об'єднаних рекурентних діаграм

Якщо вдаватися в питання, чи мають дві системи подібну рекурентну структуру, тобто чи повторюються стани двох систем синхронно, ми використовуватимемо *об'єднану рекурентну діаграму (joint recurrence plot, JRP)* [24; 97]. Тут ми розглядаємо рекурентність траєкторій двох систем в роздільних один від одного фазових просторах даних систем, і шукаємо моменти синхронної рекурентності обох систем, тобто коли спостерігається *об'єднана рекурентність*. При використанні цього підходу допустимі навіть різні розмірності реконструйованого фазового простору обох систем. Крім того, можна розглянути два різних пороги рекурентності  $\varepsilon^{\vec{X}}$  та  $\varepsilon^{\vec{Y}}$  для кожної системи, так що можуть застосовуватись окремі критерії для вибору порогу рекурентності з урахуванням природи обох систем. *Об'єднана рекурентна матриця* для двох систем  $\vec{X}$  і  $\vec{Y}$  тоді представляється добутком Адамара одиничних рекурентних діаграм:

$$JR(i, j)_{\varepsilon^{\vec{X}}, \varepsilon^{\vec{Y}}}^{\vec{X}, \vec{Y}} = \Theta \left( \varepsilon - \|\vec{X}(i) - \vec{X}(j)\| \right) \times \Theta \left( \varepsilon - \|\vec{Y}(i) - \vec{Y}(j)\| \right), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

При такому підході  $JR(i, j) = 1$ , якщо траєкторія  $\vec{X}(j)$  першого фазового простору повертається в околиці траєкторії  $\vec{X}(i)$  цього ж фазового простору, і водночас траєкторія  $\vec{Y}(j)$  другого фазового простору повертається в околиці траєкторії  $\vec{Y}(i)$  цього ж другого фазового простору. Загалом, досліджується спільна ймовірність того, що обидва рекурентні стани (або  $N$  рекурентних станів у багатовимірному випадку) виникнуть одночасно у своїх фазових просторах. У даному визначенні рекурентності не обов'язково, щоб рекурентності розглядалися для одних і тих же станів досліджуваних систем.

Об'єднана рекурентна діаграма інваріантна до перестановок координат в одній або обох досліджуваних системах.

До того ж, ми маємо змогу працювати з об'єднаною рекурентною матрицею із врахуванням часової затримки  $\tau$ :



$$JR(i, j)_{\epsilon^{\vec{X}}, \epsilon^{\vec{Y}}, \tau}^{\vec{X}, \vec{Y}} = R(i, j)_{\epsilon^{\vec{X}}}^{\vec{X}} \times R(i + \tau, j + \tau)_{\epsilon^{\vec{Y}}}^{\vec{Y}}, \quad i, j = 1, \dots, N - \tau, \quad (2.7)$$

що дуже корисно для аналізу співзалежних систем із часовою затримкою  $\tau$ .

Об'єднана рекурентна діаграма може бути використана для оцінки ймовірностей спільних рекурентних станів і навіть умовних ймовірностей рекурентної поведінки [37; 55].

### 2.3. Структури в рекурентних діаграмах

Основною метою рекурентних діаграм є візуалізація траєкторій фазового простору вищої розмірності. Структурні закономірності в рекурентних діаграмах розкривають приховану інформацію про часову еволюцію цих траєкторій. Іншими явними перевагами рекурентних діаграм є те, що вони можуть бути застосовані не тільки до шумових даних, але й до відносно нестационарних даних, а також і до коротких наборів даних. Рекурентні діаграми демонструють характерні купномасштабні та дрібномасштабні структури.

Крупномасштабні структури рекурентної діаграми можна класифікувати як *однорідні*, *періодичні*, *дрейфт* та *різкі зміни* [34; 83]:

- Однорідні закономірності характерні для стаціонарних та автономних систем, в яких час релаксації невеликий порівняний із довжиною ряду. Прикладом такої рекурентної діаграми є нормально розподілений шум (рис. 2.1а).
- Рекурентні діаграми з діагонально орієнтованими періодичними повторюваними структурами (діагональні лінії) є відмінною рисою осцилюючих систем. Навіть для тих систем, осциляції яких нелегко розпізнати, можна використати рекурентний аналіз [34].
- Блідість або затемнення рекурентних траєкторій, що супроводжується віддаленням від лінії ідентичності (*дрейф*) характерне для дрейфуючих систем з повільно змінними параметрами. Таким чином, повільні (адіабатичні) зміни динаміки з часом освітлюють верхній лівий і нижній правий кути рекурентної діаграми (рис. 2.1в).

- Білі області або смуги в рекурентних діаграмах вказують на різкі зміни в динаміці, а також на екстремальні (аномальні) події (рис. 2.1г). У цих випадках рекурентні діаграми можна використовувати для пошуку та оцінки екстремальних та рідкісних подій шляхом підрахунку частоти їх повторень.

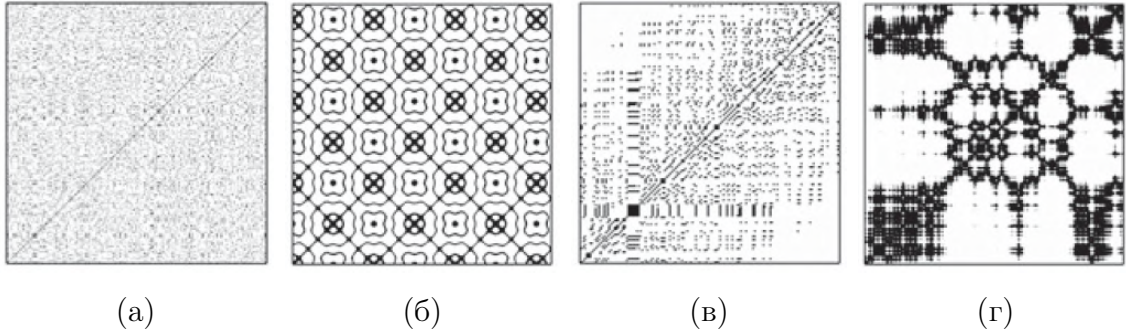


Рис. 2.1. Характерні топології рекурентних діаграм: (а) – однорідна (нормально розподілений шум); (б) – періодична (генератор Ван дер Поля); (в) – дрейф (відображення Ікеди з накладеною послідовністю, що лінійно росте); (г) – контрастні області або смуги (узагальнений броунівський рух) (запозичено з [120]).

Ретельний огляд рекурентних діаграм дозволяє виявляти дрібномасштабні структури, які складаються з комбінації *ізолюваних точок* (випадкових або екстремальних подій), точок, що утворюють *діагональні лінії* (детерміновані структури), а також розподілу *вертикальних/горизонтальних ліній* або точок, що характеризують незмінювані (ламінальні, сингулярні) стани. Ці дрібномасштабні структури є основою для кількісного аналізу рекурентних діаграм.

- *Одиничні, ізолювані* рекурентні стани можуть виникати, якщо стани рідкісні, не персистентні протягом будь-якого часу або якщо вони мають сильні флуктуації. Однак вони не є унікальною ознакою випадковості чи шуму.
- *Діагональні лінії*  $R(i + k, j + k) = 1$  (для  $k = 1, \dots, d$ , де  $d$  – це довжина діагональної лінії) виникають коли траєкторія відвідує одну і ту ж область фазового простору в різні моменти часу. Довжина цієї діагональної лінії визначається тривалістю такої подібної локальної

еволюції сегментів траєкторії. Напрямок цих діагональних структур може відрізнятися. Діагональні лінії, паралельні лінії ідентичності (під кутом  $\pi/4$ ), представляють паралельне проходження траєкторій за один і той самий час еволюції. Діагональні структури, перпендикулярні лінії ідентичності, представляють паралельне проходження траєкторій з протилежними часами (дзеркальні сегменти; це часто є підказкою, що реконструкцію фазового простору було здійснено неправильно). Довжини діагональних ліній в рекурентній діаграмі безпосередньо пов'язані зі співвідношенням детермінізму або передбачуваності. Якщо система передбачувана, тобто для станів що є рекурентними, ймовірність для  $R(i+k, j+k) = 1$  (ймовірність мати схоже майбутнє) доволі велика. Таким чином, ідеально передбачувані системи мали б нескінченно довгі діагональні лінії в рекурентній діаграмі. Для стохастичних систем ситуація зворотна: ймовірність для  $R(i+k, j+k) = 1$  дуже низька. Тобто, ми знаходимо лише окремі точки або короткі лінії. Якщо система хаотична, близькі стани в майбутньому будуть розходитися експоненціально швидко. Чим швидша розбіжність, тобто чим вище показник Ляпунова, тим коротші діагональні лінії.

- *Вертикальні (горизонтальні) лінії*  $R(i, j+k) = 1$  (для  $k = 1, \dots, v$ , де  $v$  – довжина вертикальної лінії) визначає проміжок часу, протягом якого стан системи не змінюється або змінюється дуже повільно. Схоже, що система на якийсь час “заморозилась”. Це типова поведінка ламінарних станів (переривчастість) або систем, які застрягли в стані сингулярності. Такі структури можуть виявляти розриви в сигналі, які віщують про особливі стани системи.
- *Білі вертикальні (горизонтальні) лінії*  $R(i, j+k) = 0$  (для  $k = 1, \dots, w$ , де  $w$  – це довжина білої вертикальної лінії) постають на противагу чорним вертикальним лініям. Вони слугують оцінкою часу рекурентності, який фіксує період, що минув, поки система не повернулася до рекурентного стану. Подібно до чорних вертикальних ліній, кожна біла вертикальна лінія має дзеркальний аналог тієї ж довжини, але з горизонтальним вирівнюванням. Ця властивість ви-

конується, якщо рекурентна матриця симетрична.

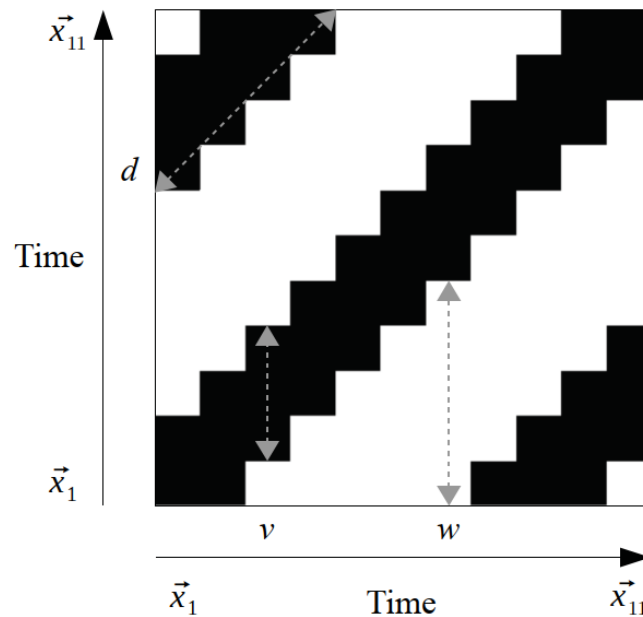


Рис. 2.2. Основні концепції рекурентного аналізу. Відображена діаграма рекурентності базується на часовому ряду, що було реконструйовано до 11 реконструйованих векторів, від  $\vec{X}(0)$  до  $\vec{X}(10)$ . Виділено діагональну лінію довжиною  $d = 3$ , вертикальна лінія довжиною  $v = 3$  і білу вертикальну лінію довжиною  $w = 5$  (запозичено з [117]).

Візуальна інтерпретація рекурентних діаграм вимагає певного досвіду. Вивчення рекурентних діаграм парадигматичних систем дає повне уявлення про характерну типологію та структуру. Однак їх кількісна оцінка пропонує більш об'єктивний спосіб оцінки досліджуваної системи. Кількісні міри рекурентності надають неупереджене представлення рекурентних діаграм.

## 2.4. Кількісний аналіз рекурентних діаграм

Візуально рекурентні діаграми можуть надати деякі корисні відомості про динаміку динамічних систем. Однак графічне представлення з недостатньою роздільною здатністю для відображення мають той недолік, що користувачі змушені суб'єктивно інтуїтивно сприймати й інтерпретувати закономірності та структури, що представлені в діаграмі рекурентності. Якщо у дослідників різний досвід роботи з рекурентним

аналізом, тоді кожен може сприймати феномени по-різному. Щоб подолати суб'єктивізм цієї методології, Збілут та Веббер запровадили кількісні міри для визначення рекурентності [147; 151; 152]. Вони визначили набір із п'яти індикаторів рекурентності, які функціонували як міри складності, засновані на розподілі діагональних ліній в рекурентних діаграмах, і надали представлений методології назву *кількісний аналіз рекурентних діаграм* (*recurrence quantification analysis, RQA*).

#### 2.4.1. Кількісні міри на основі щільності розподілу рекурентних точок

Найпершою та найпростішою мірою кількісного рекурентного аналізу є *відсоток рекурентності* (*percent recurrence, REC*) або *частота рекурентності* (*recurrence rate, RR*):

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R(i, j), \quad (2.8)$$

яка просто підраховує кількість рекурентних точок у рекурентної діаграми, виключаючи лінію ідентичності. Ця міра визначає відносну щільність рекурентних точок у діаграмі. По-іншому, вона визначає ймовірність теперішнього стану системи бути в стані рекурентності при  $N \rightarrow \infty$ :

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} RR(\varepsilon, N). \quad (2.9)$$

З іншого боку,  $RR$  для крос-рекурентних діаграм відповідатиме крос-кореляційній сумі [92]:

$$CC_2(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N CR(i, j), \quad (2.10)$$

і міра частоти рекурентності для об'єднаної рекурентної діаграми з  $n$  систем відповідатиме об'єднаній кореляційній сумі:

$$JC_2(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \prod_{k=1}^n R(i, j)^{\bar{X}^{(k)}}(\varepsilon^{(k)}). \quad (2.11)$$

## 2.4.2. Міри на основі розподілу діагональних ліній

Наступна міра опирається на розподіл діагональних сегментів довжини  $d$ , де гістограма довжин діагональних ліній може бути визначена як

$$P(d) = \sum_{i,j=1}^N [1 - R(i-1, j-1)] [1 - R(i+d, j+d)] \prod_{k=0}^{d-1} R(i+k, j+k). \quad (2.12)$$

Частка діагональних фрагментів мінімальної довжини  $d_{min}$  визначається мірою *детермінізму* (*determinism*,  $DET$ ):

$$DET = \sum_{d=d_{min}}^N d \cdot P(d) / \sum_{i,j=1}^N R(i, j). \quad (2.13)$$

Системи, яким властива детермінована динаміка, характеризуються значним розподілом діагональних ліній різної довжини. Для періодичних сигналів діагональні лінії довгі. Для хаотичних сигналів діагональні лінії короткі. Для стохастичних сигналів діагональні лінії відсутні, за винятком випадкових повторень, що утворюють дуже короткі лінії.  $DET$  можна інтерпретувати як міру передбачуваності системи. Параметр  $d_{min}$  задає нижню границю визначення ліній рекурентної діаграми. Порогове значення  $d_{min}$  виключає діагональні лінії, які утворюються в результаті тангенціального руху траєкторії у фазовому просторі. Як правило,  $d_{min} = 2$ . Якщо  $d_{min} = 1$ ,  $DET$  та  $RR$  ідентичні. Для  $d_{min} > 2$  цей параметр слугить фільтром, виключаючи коротші лінії та зменшуючи  $DET$ , що доволі корисно для вивчення деяких динамічних систем. Варто враховувати, що занадто велике значення  $d_{min}$  може погіршити гістограму  $P(d)$  і, отже, надійність вимірювання загального детермінізму системи.

Інша міра кількісного аналізу враховує довжину *найдовшої діагональної лінії*  $D_{max}$  знайденої на рекурентній діаграмі:

$$D_{max} = \max \left( \{d_i\}_{i=1}^{N_d} \right), \quad (2.14)$$

де  $N_d = \sum_{d \geq d_{min}} P(d)$  представляє загальну кількість діагональних ліній. Опіраючись на максимальну довжину діагональних ліній, ми можемо знайти її зворотне значення – *дивергенцію* (*divergence*,  $DIV$ ):

$$DIV = 1 / D_{max}. \quad (2.15)$$

Спираючись на  $D_{max}$ , ми маємо змогу визначити максимальний період передбачуваності досліджуваної системи, тобто, діагональні структури демонструють період часу при якому сегмент траєкторії знаходиться досить близько до іншого сегмента траєкторії в інший момент часу. Зворотне значення до максимальної довжини діагональних ліній надає розуміння про швидкість та тривалість розбіжності досліджуваних траєкторій. Чим менше  $D_{max}$ , тим сильніша розбіжність траєкторії. Чим  $D_{max}$  більша, тим ближче збігаються траєкторії фазового простору один до одного. Виходячи з цієї ідеї, очевидно, що існує взаємозв'язок між найбільшим позитивним показником Ляпунова і  $D_{max}$ . Дійсно, взаємозв'язок може бути знайдений шляхом розгляду (кумулятивного) частотного розподілу довжин діагональних ліній та  $K_2$  ентропії, що є нижньою границею суми позитивних показників Ляпунова [119].

Близькою до  $D_{max}$  є *середня довжина діагональної лінії*  $D_{mean}$  (*average diagonal line length*):

$$D_{mean} = \sum_{d=d_{min}}^N d \cdot P(d) / \sum_{d=d_{min}}^N P(d), \quad (2.16)$$

яка в свою чергу характеризує середній період часу при якому дві траєкторії фазового простору знаходяться в достатній близькості один до одного. Цю міру можна інтерпретувати як середній час при якому система залишається передбачуваною.

Для відповідних діагональних сегментів є можливість розрахувати очікувану кількість інформації, що може бути отримана із розподілу довжин діагональних ліній. Ця міра буде мати назву *Шенонівська ентропія частотного розподілу діагональних ліній*  $DLEn$  (*Shannon entropy of the frequency distribution of the diagonal line lengths*):

$$DLEn = - \sum_{d=d_{min}}^N p(d) \ln p(d), \quad (2.17)$$

де

$$p(d) = P(d) / \sum_{d=d_{min}}^N P(d). \quad (2.18)$$

Відповідна міра є показником складності досліджуваної системи. Вищі значення  $DLEn$  характеризують вищу складність або невпорядкованість досліджуваних систем. Для некорельованого шуму чи осциляцій очікується мале значення Шенонівської ентропії розподілу довжин діагональних ліній. Мале значення цієї ентропії також означатиме, що розподіл довжин діагональних ліній представляється асиметричним: існує невеличка частка діагональних ліній певної довжини, які є домінуючими в системі. Разом з тим, зі зростанням  $DLEn$ , очікується більш рівномірний розподіл довжин зазначених ліній. Тобто, період передбачуваності досліджуваної системи характеризується різними ступенями прогнозованості. Можна також зазначити, що  $DLEn$  залежить від кількості інтервалів групування і тому чутливе до підбору параметрів рекурентного аналізу (наприклад, різних порогів рекурентності  $\varepsilon$ , різних значень  $d_{min}$  тощо).

Ще один показник, *коефіцієнт* (ratio,  $DET/RR$ ), був визначений як співвідношення між мірами передбачуваності  $DET$  та частоти рекурентності  $RR$  [147]. Цю міру можна обчислити на основі числа  $P(d)$  діагональних ліній довжини  $d$  наступним чином:

$$RATIO = DET/RR = N^2 \sum_{d=d_{min}}^N d \cdot P(d) / \left( \sum_{d=1}^N d \cdot P(d) \right)^2. \quad (2.19)$$

Евристичне дослідження показало, що це співвідношення може бути використано для виявлення прихованих закономірностей в динаміці фізіологічних часових рядів; під час певних типів якісних переходів  $RR$  зменшувався, тоді як  $DET$  залишався незмінним [147].

Не менш важливими є кількісні міри, що опираються на розподіл вертикальних ліній рекурентної діаграми, які й представляє наступний розділ.

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N [1 - R(i, j - 1)] [1 - R(i, j + v)] \prod_{k=0}^{v-1} R(i, j + k). \quad (2.20)$$



У системах безперервного часу, дискретизованих з досить високою часовою роздільною здатністю і з відповідним великим порогом  $\varepsilon$ , більша частина цих вертикальних ліній зазвичай відповідає тангенціальному руху траєкторії у фазовому просторі (рис. 2.3). Однак не всі елементи цих множин належать до тангенціального руху. Наприклад, всупереч тому, що на діаграмах відсутній тангенціальний рух, ми знаходимо вертикальні лінії в їх рекурентних діаграмах, наприклад, за наявності ламінарних станів в переривчастих режимах. Крім того, у системах з двома різними часовими масштабами ми могли б виявити вертикальні лінії через кінцевий розмір порогу  $\varepsilon$ , а не через тангенціальний рух. Іноді точки, що стосуються тангенціального руху, називаються *точками перебування* (*sojourn points*) [32].

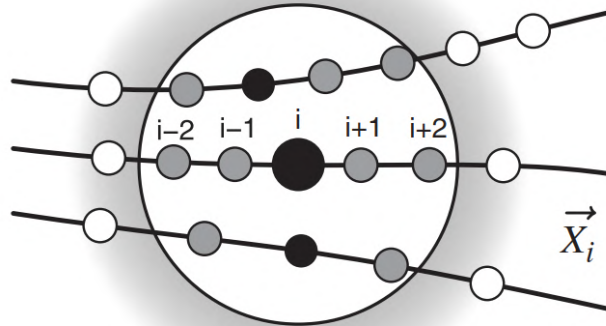


Рис. 2.3. Стани наступного моменту часу можуть потрапляти в околиці стану в момент  $i$ , представляючи штучні рекурентності (сірі точки). Це називається тангенціальним рухом, і такі точки називаються точками перебування (запозичено зі [120]).

Частка рекурентних точок, що формують структури з вертикальних ліній можуть бути використанні, щоб розрахувати міру *ламiнарності* (*laminarity, LAM*):

$$LAM = \sum_{v=v_{min}}^N d \cdot P(v) / \sum_{v=1}^N v \cdot P(v). \quad (2.21)$$

Обчислення індикатору ламінарності виконується для тих вертикальних ліній довжина яких перевищують мінімальну довжину  $v_{min}$ , щоб зменшити вплив тангенціального руху. Для кількісного аналізу  $v_{min} = 2$

є оптимальним значенням. Міра ламінарності представляє виникнення ламінарних станів у системі без опису тривалості цих ламінарних фаз.  $LAM$  спадатиме при збільшенні ізольованих рекурентних точок у порівнянні з вертикальними структурами. Зі збільшенням цієї міри, збільшується і ймовірність перебування системи в ламінарному стані.

Інша міра кількісного аналізу враховує максимальний період перебування системи в ламінарному стані – *максимальна довжина вертикальних ліній*  $V_{max}$  (*maximal length of the vertical lines*):

$$V_{max} = \max \left( \{v_i\}_{i=1}^{N_v} \right), \quad (2.22)$$

де  $N_v = \sum_{v \geq v_{min}} P(v)$  представляє загальну кількість вертикальних ліній, довжина яких перевищує  $v_{min}$ . За аналогією до (2.15), опираючись на максимально довжину вертикальної лінії, ми можемо знайти її зворотне значення – *дивергенцію вертикальних ліній* (*vertical line divergence,  $VDIV$* ):

$$VDIV = 1 / V_{max}. \quad (2.23)$$

Опираючись на  $V_{max}$ , ми маємо змогу визначити максимальний період незмінюваності досліджуваної системи. Зворотне значення до максимально довжини діагональних ліній надає розуміння про швидкість та тривалість розбіжності досліджуваних траєкторій. Чим менше  $V_{max}$ , тим сильніше відходження траєкторії від ламінарних процесів і тим динамічніша (аномальніша) поведінка системи. Чим  $V_{max}$  більша, тим ближче збігаються траєкторії фазового простору один до одного.

Середня довжина вертикальних структур може бути представлена як

$$TT = \sum_{v=v_{min}}^N v \cdot P(v) / \sum_{v=v_{min}}^N P(v), \quad (2.24)$$

яка має назву *час затримки* (*trapping time,  $TT$* ). Середня довжина вертикальних ліній відповідає середньому періоду часу при якому система “завмирає”, тобто залишається незмінною. Очевидно, що зростання цієї величини характеризує дедалі більший час затримки досліджуваної системи в певному стані.

Для розподілу довжин вертикальних структур рекурентної діаграми може бути інформаційна ентропія Шеннона для визначення того наскільки

складність системи обумовлена даними структурами. *Шеннонівська ентропія частотного розподілу вертикальних ліній VLEn* (*Shannon entropy of the frequency distribution of the vertical line lengths*) може бути визначена наступним чином:

$$VLEn = - \sum_{v=v_{min}}^N p(v) \ln p(v), \quad (2.25)$$

де

$$p(v) = P(v) / \sum_{v=v_{min}}^N P(v). \quad (2.26)$$

Ця міра, по аналогії до (2.17), також є мірою складності (хаотичності) досліджуваного часового ряду. Наприклад, для синусоїди ми очікуємо мале значення цієї ентропії, оскільки це простий, періодичний процес. Для складного процесу з високим ступенем довгострокової пам'яті ми очікуємо високе значення цього типу рекурентної ентропії. Це означає, що ламінарність процесу характеризуються різноманітними періодами, що розподілені відносно рівномірно.

Схожим чином до (2.19), ми можемо виразити відношення між мірою ламінарності *LAM* та детермінізмом *DET*:

$$LAM/DET = \sum_{v=v_{min}}^N vP(v) \cdot \sum_{d=1}^N dP(d) / \sum_{d=d_{min}}^N dP(d) \cdot \sum_{v=1}^N vP(v). \quad (2.27)$$

Представлена міра рекурентності також може допомогти при виявленні прихованих структур у динаміці системи. Можуть траплятися випадки коли ламінарність систем залишається незмінною і при цьому *DET* зростає.

На відміну від мір на основі діагональних ліній, ці показники здатні ідентифікувати переходи “хаос-хаос” [3]. Отже, вони дозволяють досліджувати переривчастість навіть для досить коротких і нестаціонарних часових рядів. Крім того, оскільки для періодичної динаміки показники, що кількісно визначають вертикальні структури, дорівнюють нулю, так можуть бути ідентифіковані переходи “хаос-порядок”.

### 2.4.3. Міри на основі білих вертикальних ліній (часу рекурентності)

Час рекурентності можна вилучити безпосередньо з рекурентної діаграми. Спочатку визначаємо множину точок, що потрапили в  $\varepsilon$ -околицю довільно обраної траєкторії  $\vec{X}(i)$ :

$$\mathfrak{R}(i) = \left\{ \vec{X}(j_1), \vec{X}(j_2), \dots, |R(i, j_k) = 1 \right\}. \quad (2.28)$$

Елементи цієї множини відповідають рекурентним точкам  $i$ -ої колонки рекурентної діаграми  $\{R(i, j)\}_{j=1}^N$ . Відповідні періоди рекурентності між цими точками (*час рекурентності першого типу* (*recurrence times of first type*)), відповідно до позначення, наведеного в [32]) виражається як  $\left\{ T_k^{(1)} = j_{k+1} - j_k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ . Деякі рекурентні точки в  $\mathfrak{R}(i)$  відповідають періоду рекурентності  $T_k^{(1)} = 1$  через можливий тангенціальний рух. Одним із варіантів уникнення тангенціального руху є видалення усіх рекурентних точок із  $\mathfrak{R}(i)$  для яких  $T_k^{(1)} = 1$ . Це результує в нову множину  $\mathfrak{R}(i)' = \left\{ \vec{X}(j_1)', \vec{X}(j_2)', \dots \right\}$ . Далі, *час рекурентності другого типу* (*recurrence time of second type*), відповідно до [32], розраховується із залишку рекурентних точок в  $\mathfrak{R}(i)'$  :  $\left\{ T_k^{(2)} = j'_{k+1} - j'_k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ . Отже,  $T^{(2)}$  вздовж вертикальної лінії вимірює часову відстань між початком наступних рекурентних структур у рекурентній діаграмі. Альтернативною оцінкою часу рекурентності  $T^{(2)}$  є *середнє значення довжини білої вертикальної лінії* (*mean white vertical line length,  $WV L_{mean}$* ):

$$T^{(2)} = WV L_{mean} = \sum_{w=w_{min}}^N w \cdot P(w) / \sum_{w=w_{min}}^N P(w), \quad (2.29)$$

де  $P(w)$  – це частотний розподіл білих вертикальних ліній довжиною  $w$ , а  $w_{min}$  відповідає мінімальній довжині білих вертикальних ліній (найменшому періоду повернення до стану рекурентності). Дану міру можна спробувати інтерпретувати як середній горизонт *непередбачуваності* системи.

Для систем з меншим розподілом ламінарних структур (тобто  $LAM$  і  $TT$  прямують до нуля) розподіл такого середнього значення майже збігається з розподілом  $T^{(2)}$ , визначеним у [32]. Однак для систем з ламінарними станами (наприклад, для логістичної карти з підбором пев-

них параметрів),  $T^{(2)}$  згідно з визначенням Гао [32] переоцінює час рекурентності, а  $T^{(2)}$ , що обчислено на основі білих вертикальних ліній, недооцінює час рекурентності.

Шеннонівська інформаційна ентропія може бути використана і для вертикальних ліній даного типу. *Інформаційна (Шеннонівська) ентропія частотного розподілу білих вертикальних ліній WVLEn (Information entropy of the frequency distribution of the white vertical line lengths)* може бути представлена наступним чином:

$$WVLEn = - \sum_{w=w_{min}^N} p(w) \ln p(w), \quad (2.30)$$

де

$$p(w) = P(w) / \sum_{w=w_{min}}^N P(w). \quad (2.31)$$

представляє ймовірність того, що довжина білої вертикальної лінії перевищуватиме  $w_{min}$ .

Ці міри дозволяють розрізняти динаміку різних типів (наприклад, періодичну, хаотичну чи стохастичну) або початок динамічних переходів (наприклад, від хаосу до дивних нехаотичних атракторів).

## 2.5. Процедура розрахунку кількісних показників із використанням алгоритму ковзного вікна

Кількісний аналіз рекурентних діаграм – це потужний інструмент для аналізу незначних змін і переходів в динаміці складної системи. Оскільки динамічні системи проходять різні етапами еволюції із ходом часу, виникає потреба в кількісному рекурентному аналізі із залежністю від часу. Дана процедура може бути реалізована в декілька способів (рис. 2.4):

1. Часовий ряд поділяється на пересічні сегменти  $x_i$  ( $i = k, \dots, w_{win} - 1$ ) для кожного з яких будується рекурентна діаграма та на основі яких і виконується подальший кількісний аналіз.
2. Уздовж рекурентної діаграми розрахованої для всього часового ряду проходить ковзне вікно розміру  $w_{win}$ , що рухається вздовж

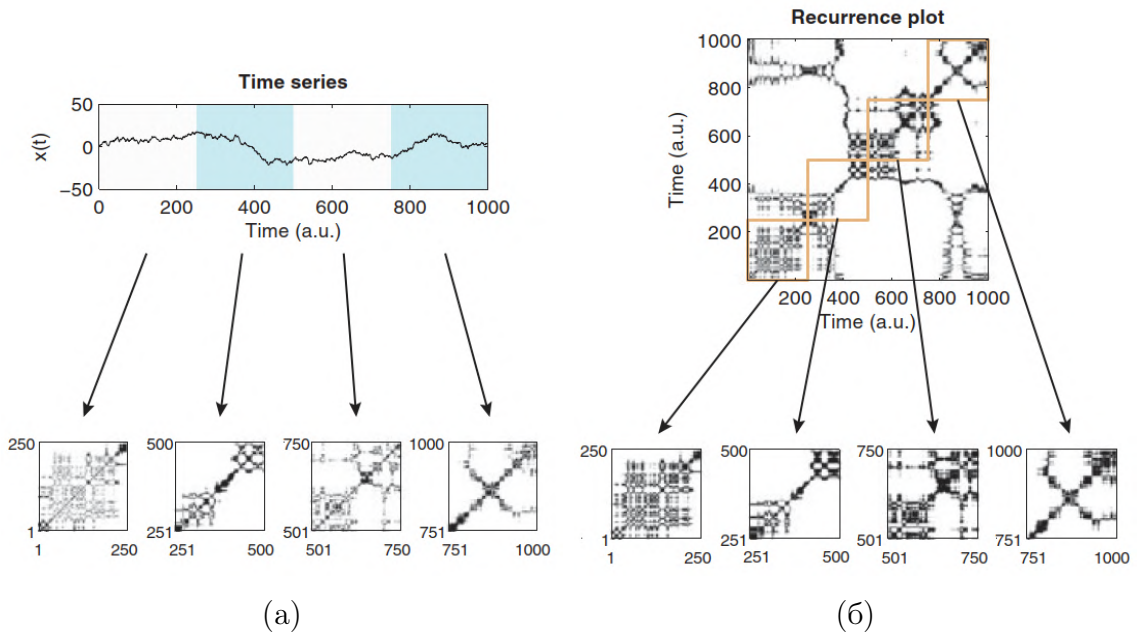


Рис. 2.4. Дві можливості використання кількісного аналізу рекурентних діаграм із віконною процедурою: (а) використання вікон для вихідного часового ряду та (б) використання вікон в рамках рекурентної діаграми побудованої для всього часового ряду. Підфрагменти чітко демонструють різницю між двома підходами (запозичено з [120]).

лінії ідентичності. Для кожного такого вікна виконується кількісний аналіз підрекурентних діаграм  $\{R(i, j) \mid i, j = k, \dots, k + w_{win} - 1\}$ .

Такий підхід із врахуванням залежності від часу може бути використаний для аналізу стаціонарності динамічної системи або динамічних переходів, таких як “період-хаос” або переходи “хаос-хаос”.

Різні віконні методи залишаються еквівалентними лише в тому випадку, якщо ми не нормалізуємо (стандартизуємо) часовий ряд (або його фрагменти), з якого будується рекурентна діаграма, і коли ми обираємо фіксований поріг рекурентності. Обидва підходи можуть бути корисні й залежать від цього питання. Якщо ми знаємо, що часові ряди проявляють нестационарність або тенденції, які не представляють інтересу, то перший підхід може допомогти знайти переходи, які нехтують цими нестационарностями. Але, якщо ми зацікавлені у виявленні загальних змін (наприклад, перевірка на нестационарність), ми повинні зберегти загальну рекурентність всього часового ряду та обрати другий підхід.

У будь-якому разі, для кожного кількісного аналізу ми повинні чітко

вказати, як виконувалася процедура вікна. У нашому випадку використовуватиметься перша процедура.

При виборі розміру вікна ми повинні враховувати наступний факт: оскільки показники кількісного рекурентного аналізу є статистичними показниками, отриманими на основі частотних розподілів ліній різних типів, розмір вікна має бути достатньо великим, щоб охоплювати достатню кількість рекурентних траєкторій. Занадто мале вікно може зіпсувати статистику точкових та лінійних структур досліджуваних періодів ряду, що в свою чергу призведе до показників зі слабкою статистичною значущістю та загалом викривленою динамікою даних індикаторів. Тому обраний розмір вікна повинен бути ретельно перевірений, а висновки про нестационарність або динамічні переходи повинні бути підтверджені тестами на значущість [86; 89].

## **2.6. Програмне забезпечення для здійснення рекурентного аналізу**

Цей розділ надає огляд декількох програмних продуктів, які дозволяють створювати рекурентні діаграми та здійснювати кількісний рекурентний аналіз. Основна увага приділяється програмному забезпеченню, яке є у вільному доступі та з відкритим кодом.

Наявні реалізації кількісного рекурентного аналізу мають свої плюси та мінуси. Основні обмеження багатьох продуктів включає обмеження на кількісні розрахунки, які ускладнюють аналіз великих даних:

1. Обмеження пам'яті. Рекурентна матриця не вміщується в основну пам'ять обчислювальної системи. Матриці, що перевищують основну пам'ять, не можуть бути проаналізовані в цілому або взагалі.
2. Обмеження пристрою. Кількісний аналіз проводиться на одному процесорі. Обчислювальні можливості систем, що містять кілька процесорів або прискорювачів, таких як графічні процесори, не включаються.
3. Обмеження часу виконання. Кількісний аналіз забирає багато часу через обмежене використання можливостей паралельної обробки.

Більшість із зазначених програмних продуктів страждають від цієї проблеми.

### 2.6.1. Програмний пакет “*ruunicorn*”

Програмний продукт *ruunicorn* – це бібліотека мови програмування Python, випущена під ліцензією BSD, яка дозволяє проводити аналіз складних мереж, а також рекурентний аналіз [144]. Окрім цього, *ruunicorn* дозволяє виконувати кількісний рекурентний аналіз та створювати рекурентні діаграми різних типів. З переваг цього продукту також варто відзначити можливість побудови рекурентних мереж різних типів та різноманітних мір складності для досліджуваних мереж. Також *ruunicorn* включає обширний набір рекурентних індикаторів. Для підвищення ефективності обчислень він включає фрагменти коду, написані на C, C++ та FORTRAN.

Функціонал бібліотеки *ruunicorn* дозволяє зберігати рекурентну матрицю в основній пам’яті. Залежно від розміру доступної основної пам’яті, ця характеристика накладає обмеження на можливу довжину досліджуваного часового ряду, який можна обробити, лише для кількох тисяч точок даних. Це унеможливорює аналіз часових рядів, що складаються з більш ніж мільйона точок даних.

### 2.6.2. Програмний пакет “*TISEAN*”

Абревіатура *TISEAN* походить від “*аналіз часових рядів (time series analysis)*”, являє собою набір інструментів командного рядка, випущених під ліцензією GPL, які дозволяють проводити аналіз часових рядів. Версія 3.0.1 містить утиліти, наприклад, для генерації часових рядів і зниження рівня шуму, а також для проведення лінійного і нелінійного аналізу часових рядів [51].

*TISEAN* містить дві версії програми *recurr*. Одна написана на C, і інша на FORTRAN для обчислення вмісту рекурентної матриці. Програма *recurr* обчислює попарні відстані між реконструйованими векторами, використовуючи околиці фіксованого порогу рекурентності в поєднанні з  $L_\infty$ -нормою. Вихідні дані *recurr* – це список рекурентних точок, представлених у вигляді пар цілих значень, які можуть бути записані в *stdout* або



збережені у файлі. `recurr` не надає жодних функціональних можливостей для проведення кількісного аналізу на основі цих даних.

### 2.6.3. Програмний пакет “`crqa`”

Бібліотека `crqa` – це пакет, написаний на R і випущений під ліцензією GPL. Цей програмний продукт дозволяє проводити крос-рекурентний кількісний аналіз [25]. Пакет `crqa` частково базується на *Cross Recurrence Plot Toolbox*, реалізованих у MATLAB [85].

Серед іншого, пакет `crqa` надає функцію `crqa`, яка виконує крос-рекурентний для двох вхідних часових рядів. Задана функція може імітувати традиційний рекурентний аналіз, якщо надати на вхід функції два однакових ряди. `crqa` повертає як рекурентну діаграму, так і дев'ять кількісних рекурентних показників, наприклад, частоту повторень і детермінізм. Функція будує матрицю крос-рекурентності на основі сусідства фіксованого радіуса.

Структура даних, що представляє масив значень рекурентних точок зберігається в основній пам'яті комп'ютера. Отже, цей продукт дозволяє аналізувати лише ті матриці, що вмістилися в пам'ять комп'ютера. `crqa` використовує розпаралелювання, виконуючи відповідні розрахунки в декілька потоків.

### 2.6.4. Командний рядок для виконання рекурентного аналізу

Рекурентний аналіз у командному рядку представляє можливість для отримання рекурентних діаграм та проведення кількісний рекурентного аналізу [84]. Версію 1.13z даного інструменту можна отримати в скомпільованому вигляді для різних платформ, включаючи Linux, macOS, Windows, HP-UX і Solaris. Неприємна особливість цього продукту полягає в тому, що його вихідний код не є загальнодоступним.

Основою цього інструменту є кількісний рекурентний аналіз. Ідентифікація лінійних структур виконується без збереження рекурентної матриці в пам'яті обчислювальної системи. Значення скоріше обчислюються на льоту, при послідовному перегляді елементів всередині діагональних і вертикальних структур рекурентної матриці. Це дозволяє аналізувати рекурентні матриці практично довільного розміру.

Командний рядок виконує обчислення виключно в одному потоці процесора. При цьому використовується лише мала частина обчислювальних можливостей, що надаються багатоядерними процесорами.

### 2.6.5. Ефективне проведення рекурентного аналізу з використанням PyRQA

*PyRQA* – це безкоштовний пакет програмного забезпечення з відкритим вихідним кодом [118]. Обчислювальні підходи, що закладені в цій бібліотеці були успішно застосовані до реальних кліматичних часових рядів, які складаються з більш ніж мільйона значень [38]. Час виконання аналізу може бути значно скорочено шляхом проведення обчислень на декількох графічних процесорах. У роботі [91] оцінюється, як застосування концепцій з розробки баз даних впливає на продуктивність проведення кількісного рекурентного аналізу.

Обчислювальні алгоритми *PyRQA* застосовують концепцію “*Розділяй та Рекомбінуй (Divide & Recombine)*” [68], щоб забезпечити обробку великих масивів даних. Рекурентна матриця підрозділяється на набір підматриць. Обчислення подібності попарних векторів, а також виявлення лінійних структур виконується для кожної підматриці індивідуально. Окремі результати рекомбінуються в глобальні структури даних, які служать основою для обчислення показників кількісного аналізу рекурентних діаграм.

Лінії можуть перетинати вертикальні та горизонтальні границі суміжних підматриць. *PyRQA* використовує додаткові структури даних, щоб забезпечити їх правильне виявлення. *Буфери перенесення (carryover buffers)* зберігають довжину ліній, які досягають зовнішніх границь відповідних підматриць. Для ліній кожного типу передбачений окремий буфер перенесення. Ці проміжні довжини ліній використовуються як вхідні дані для виявлення ліній у суміжних підматрицях. Накладні витрати на зберігання та обслуговування цих буферів перенесення незначні.

Розділення всієї рекурентної матриці має дві основні переваги. По-перше, це дозволяє *подолати обмеження пам'яті*, оскільки розмір підматриць може бути обраний таким чином, щоб вони поміщалися в доступну пам'ять. По-друге, обробка підматриць може бути розподілена між

декількома комп'ютерними пристроями. Таким чином, *усувається проблема обмеження на пристрій*.

PyRQA використовує фреймворк OpenCL для гетерогенних обчислень [135]. OpenCL призначений для використання можливостей паралельних обчислень багатоядерних пристроїв, таких як центральні та графічні процесори. OpenCL підтримується багатьма обчислювальними пристроями від різних постачальників обладнання.

Обробка OpenCL розділена між одним або кількома обчислювальними пристроями. Вихідний код PyRQA складається з основної програми, написаної на Python, і функцій ядра, написаних на OpenCL C. Функції ядра фіксують атомарні завдання кожного оператора і виконуються обчислювальними пристроями.

PyRQA поширюється через “каталог пакетів Python (Python Package Index)”. Вміст цієї бібліотеки є безкоштовним, а також з відкритим вихідним кодом, що випущений під ліцензією Apache версії 2.0.

З цього невеликого оглядового списку можна зрозуміти, що PyRQA представляє найбільшу перспективу. Ця бібліотека може бути цікавою як для звичайного аналітика даних, так і для трейдерів та спеціалістів з області ризик-менеджменту, яким потрібно надійні та недорогі з боку обчислювальних потужностей алгоритми. Для криптовалютного ринку не менш важливим є можливість обробки великих даних, що бібліотека дозволяє робити доволі ефективно. Варто згадати й першу з цього списку бібліотеку – `ruunicorn`. Хоча вона і не надає значного чисельного прискорення, але має екстенсивний інструментарій кількісного рекурентного аналізу. У комбінації з мережевими методами бібліотека дозволяє проводити крос-мережевий рекурентний аналіз, що містить міри складності з теорії складних мереж.

## Висновки до розділу 2

1. Розглянули концепцію рекурентності. Визначили, що рекурентність – це фундаментальна властивість складних, нелінійних та хаотичних систем, яка визначає іррегулярну циклічність або періодичність системи. Тобто, системи реального світу характеризуються повторюваністю, незважаючи навіть на значне відхилення від початко-

вого стану. При роботі з реконструйованим фазовим простором досліджуваної системи під рекурентністю станів розуміється зближення фазових траєкторій системи через деякий проміжок часу.

2. Продемонстровано методологію дослідження рекурентних станів із використанням рекурентних діаграм. Можна простежити, що з 1987 року, коли цей підхід був представлений Екманом, він не втратив свою надійність та популярність. Більше того, був доповнений кількісними рекурентними індикаторами та чисельними прикладними додатками для виконання рекурентного аналізу. Наприклад, рекурентні діаграми пропонують дослідження складних систем у рамках мережевої парадигми або дослідження станів синхронізації із використанням крос-рекурентних чи об'єднаних рекурентних кількісних показників. Простота впровадження і широка застосовність рекурентних діаграм у різних системах продовжує залучати все більшу кількість науковців і розширювати використання цих підходів у все більшій кількості наукових областей.
3. В цьому розділі з'ясували, що структура рекурентних діаграм поділяється на крупномасштабні та дрібномасштабні структури. Топологію крупномасштабних структур рекурентної діаграми можна класифікувати як однорідну, періодичну, дрефт та різкі зміни. Дрібномасштабні структури складають окремі ізольовані точки, діагональні та вертикальні/горизонтальні лінії. Визначили, що окремо ізольовані точки можуть представляти різкі або аномальні події у динаміці досліджуваної системи. Комбінації точок, що формують діагональні лінії визначають детерміновані структури досліджуваної системи. Вертикальні лінії відображають стани ламінарності, коли система переважний період часу залишається незмінною.
4. Ознайомилися з кількісною процедурою дослідження рекурентності. Визначили набір показників для кількісної оцінки складності системи. Відповідні показники можна визначити як для всього ряду, так і в рамках процедури ковзного вікна. Також представили декілька процедур у рамках алгоритму ковзного вікна. У рамках першої процедури береться фрагмент часового ряду і для нього виконуються всі

дії в рамках рекурентного аналізу. Далі часове вікно зміщується на певний крок і процедура повторюється до повного вичерпання нашого ряду. У рамках другої процедури спершу будується рекурентна діаграма для всього ряду, і вздовж цієї діаграми проходить ковзне вікно в рамках якої визначається різний спектр рекурентних показників. Зазначили, що в даній роботі використовуватиметься перший підхід, хоча можливі експерименти з другим підходом, і результати можуть відрізнятись в порівнянні з першим методом.

5. Представлено короткий огляд програмних продуктів, які дозволяють виконувати рекурентний аналіз. Основна увага була приділена програмному забезпеченню із відкритим вихідним кодом. Зазначено основні позитивні та негативні сторони багатьох із них. Надалі використовуватиметься бібліотека рекурентного аналізу PyRQA. Основною перевагою цієї бібліотеки є можливість виконання розподілених та паралельних обчислень та використання фреймворку OpenCL для гетерогенних обчислень. Це дозволяє проводити рекурентний аналіз паралельно на безлічі комп'ютерних пристроїв, що використовують різні архітектури, включаючи графічні процесори та центральні процесори від різних постачальників обладнання без необхідності змінювати вихідний код [88].

# РОЗДІЛ 3

## ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКУРЕНТНИХ ТА КРОС-РЕКУРЕНТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БІТКОІНА НА ОСНОВІ КРИПТОВАЛЮТНИХ ІНДЕКСІВ

### 3.1. Унівариативний рекурентний аналіз біткоїн ринку

Будучи історично перевіреною, популярною і широко використовуваною криптовалютою, біткоїн почав породжувати безліч новин і спекуляцій, які визначати його подальше життя. Подібні обговорення призвели до різного роду крахів, яких стали побоюватися професійні інвестори й недосвідчені користувачі. Таким чином, ми перейшли до активних дій і поставили завдання:

- класифікувати подібного роду крахи;
- побудувати індикатори (індикатори-передвісники) на основі рекурентного аналізу, які будуть надавати надійні сигнали катастрофічних подій крипторинку.

Відповідно, за період існування біткоїна сталося безліч крахових подій, що він відчув на собі. Наразі існують різні дослідницькі роботи на тему крахів і їх класифікації. Визначення цих подій досі залишається суперечливим. Однак, пропозиції більшості авторів мають спільні елементи, які дозволяють прийти до консенсусу, що крах ринку – це раптове зниження цін на фінансові активи на певному ринку [49].

Розглянувши різноманітні дослідження на цю тематику, ми виокремили найбільш значущі крахові події крипторинку, опираючись на часовий ряд щоденних значень цін на біткоїн за період з 17 вересня 2014 року по 22 листопада 2022 року [89].

Ми зазначаємо, що крахи – це короткі й локалізовані в часі падіння, які тривають орієнтовно декілька тижнів зі значним щоденним ціновим зниженням. Волатильність таких подій висока, у відсотковому вираженні їх

зниження перевищує 30 відсотків, а нормалізовані прибутковості виходять за межі  $\pm 3\sigma$ .

Виходячи з цих міркувань, ми виокремлюємо 8 крахових періодів у досліджуваному ряді біткоїна, опираючись на стандартизовані прибутковості та волатильність, де прибутковості розраховуються як

$$G(t) = \ln x(t + \Delta t) - \ln x(t) \cong [x(t + \Delta t) - x(t)] / x(t) \quad (3.1)$$

і нормалізовані прибутковості згідно з наступною формулою:

$$g(t) \cong [G(t) - \langle G \rangle] / \sigma, \quad (3.2)$$

де  $\sigma \equiv \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2}$  – це середнє квадратичне відхилення величини  $G$ ,  $\Delta t$  – часова затримка (у нашому випадку  $\Delta t = 1$ ), а  $\langle \dots \rangle$  позначає середнє за досліджуваний часовий період. Волатильність може бути визначена як

$$V_T(t) = \frac{1}{n} \sum_{t'=t}^{t+n-1} |g(t')|. \quad (3.3)$$

Більш детальна інформація про виокремлені крахові події зазначена в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Список основних крахів з грудня 2015 року по листопад 2022 року.

№	Дата	Довжина корекції у днях	Найвища ціна, \$	Найнижча ціна, \$	Падіння, %	Падіння, \$
1	11.01.2015-14.01.2015	3	267.80	178.10	33	89.69
2	04.01.2017-11.01.2017	8	1154.73	777.76	33	376.97
3	16.12.2017-30.12.2017	15	19497.40	12952.20	34	6545.20
4	06.01.2018-17.01.2018	12	17527.00	11188.60	36	6338.40
5	18.11.2018-15.12.2018	28	5623.54	3236.76	42	2386.78

Продовження таблиці 3.1.

№	Дата	Довжина корекції у днях	Найвища ціна, \$	Найнижча ціна, \$	Падіння, %	Падіння, \$
6	06.03.2020-16.03.2020	11	9122.55	5014.48	45	4108.07
7	08.05.2021-25.05.2021	18	58803.78	38402,22	35	20401.55
8	08.06.2022-18.06.2022	11	30214.36	19017.64	37	11196.71

На рис. 3.1 представлено зазначені крахові події, що відмічені відповідними стрілками, стандартизовані прибутковості та волатильність розрахована в рамках алгоритму ковзного вікна довжиною в 100 значень (днів).

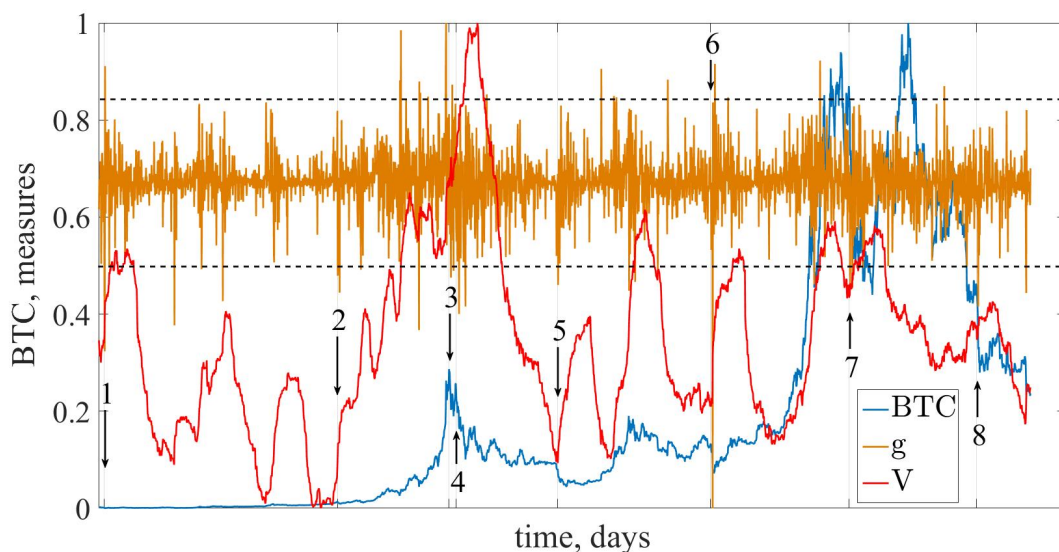


Рис. 3.1. Нормалізована динаміка біткоіна, прибутковості  $g$  та волатильність  $V_T(t)$ . Горизонтальними лініями позначено межі  $\pm 3\sigma$ . Стрілки вказують на початок зазначених крахів.

З рис. 3.1 видно, що в періоди крахів стандартизовані прибутковості  $g$  значно виходять за межі  $\pm 3\sigma$ . Це вказує на відхилення цінових флуктуацій біткоіна від нормального Гаусового розподілу та наявність “важких хвостів” у розподілі прибутковостей, які є характеристиками аномаль-



них явищ на ринку. Разом з тим зростає і волатильність. Як уже згадувалось, динаміка даних кількісних показників у такий спосіб є основою нашої класифікації відповідних крахових подій. Ці показники є індикаторами крахових подій, оскільки вони реагують тільки в момент появи вищезазначених явищ і не дозволяють ідентифікувати їх заздалегідь. Водночас від крос-рекурентних та об'єднаних рекурентних показників очікується передчасна реакція на критичні зміни в динаміці криптовалюти. Таким чином, зазначені показники слугуватимуть у якості не просто індикаторів, а індикаторів-передвісників кризових подій.

Розрахунки проводилися в рамках алгоритму ковзного вікна. Показники розраховувались згідно з підходом із розділу 2.5. У нашому випадку розмір вікна  $w_{win} = 100$  днів, а часовий зсув між кожним вікном  $\Delta t = 1$  день. Часова локалізація, наприклад, у 50 або 500 днів не матиме сенсу, оскільки деякі з представлених мір або занадто чутливі до розміру вікна, або при кількісних розрахунках ми охоплюватимемо забагато кризових подій, що негативним чином впливатимуть на ідентифікацію подальших крахів. Попередньо розрахунок показників тестувався як для стандартизованих прибутковостей, так і для стандартизованого часового ряду. У ході експериментів було визначено, що стандартизований вихідний часовий ряд найкращим чином відображає динаміку крипторинку.

Рекурентний аналіз був проведений із використанням наступних параметрів:

- поріг рекурентності  $\varepsilon = 0.3$  як для уніваріативного рекурентного аналізу, так і для біваріативного;
- розмір вкладень  $d_E = 1$  та часова затримка  $\tau = 1$  для реконструкції фазового простору;
- для визначення відстані між відповідними траєкторіями фазового простору використовувалась  $L_2$  (Евклідова) метрика;
- мінімальна довжина діагональних ліній  $d_{min} = 2$ , вертикальних ліній  $v_{min} = 2$  та білих вертикальних ліній  $w_{min} = 2$ .

На рис. 3.2 представлено класичну рекурентну діаграму для всього часового ряду біткоїна.

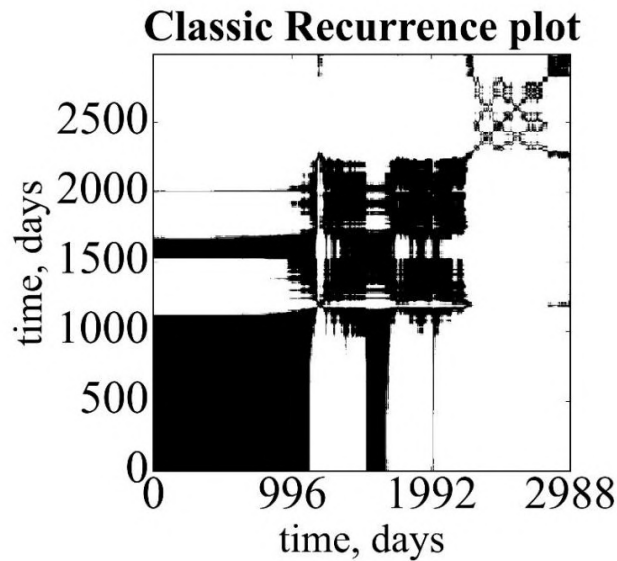


Рис. 3.2. Рекурентна діаграма для часового ряду біткоїна за весь досліджуваний період часу.

Виходячи з рисунка вище, можна зробити висновок, що упродовж певного моменту часу (перші 1000 днів) між значеннями біткоїна спостерігалась значна рекурентність. Після крахової події 2018 року біткоїн почав представати менш рекурентним. Дана рекурентна діаграма чітко демонструє, що динаміка цієї криптовалюти виходить далеко за межі стаціонарної, періодичної динаміки. Для подій останніх років вибудовуються деякі рекурентні характеристики, але їх значущість набагато менша в порівнянні з подіями минулого. Продемонструємо як виглядатиме зміна рекурентності з ходом часу на прикладі кількісних показників рекурентного аналізу.

На рис. 3.3 представлено динаміку показників передбачуваності (*DET*) та ламінарності (*LAM*).

На рис. 3.3 видно, що *DET* та *LAM* зростають під час кризових подій. Ми можемо зробити висновок, що локально в межах певного часового вікна всі крахи характеризуються високим ступенем ламінарності та детермінізму. Помітно, що відповідні міри зростають і в інші періоди, що не були виокремлені згідно з нашою класифікацією. Як вже зазначалось, у даній роботі ми виділили лише ті події, що характеризуються падінням у понад 30% за короткий проміжок часу. Безумовно серед них можна виокре-

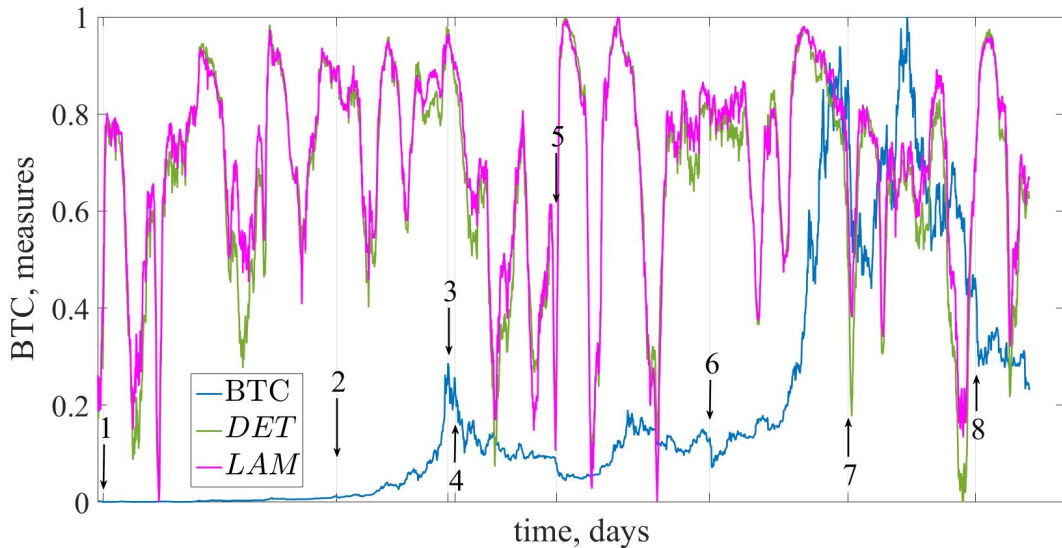


Рис. 3.3. Динаміка мір передбачуваності ( $DET$ ) та ламінарності ( $LAM$ ) для всього досліджуваного періоду біткоіна.

мити такі ж значущі падіння, але з більшим періодом тривалості. Загалом можна сказати, що крахи представляються доволі складними, персистентними та, відповідно, детермінованими. Їх ступінь передбачуваності стає вище і відповідні міри рекурентності предстають індикаторами або навіть індикаторами-передвісниками даних подій.

На рис. 3.4 та рис. 3.5 представлено рекурентні міри відношень детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ) та ламінарності до детермінізму ( $LAM/DET$ ).

На рис. 3.4 видно, як  $DET/RR$  спадає у кризові та навіть передкризові періоди, сигналізуючи про можливу кризу. Для міри  $LAM/DET$  на рис. 3.5 спостерігається схожа закономірність. Для  $DET/RR$  можна зазначити, що загальний відсоток рекурентних точок на рекурентній діаграмі постає вищим у порівнянні з лише діагональними структурами. Тобто, міра  $RR$  стає більшою у порівнянні з  $DET$ . Виходячи з динаміки  $LAM/DET$ , можна сказати, що загальний ступінь передбачуваності системи набагато вищий у порівнянні з ламінарністю.

Рис. 3.6 представляє динаміку мір діагональної  $DIV$  та вертикальної  $VDIV$  дивергенції.

Рис. 3.6 показує, що дивергенція детерміністичних та ламінарних структур крипторинку спадає під час кризових станів. Оскільки дані міри

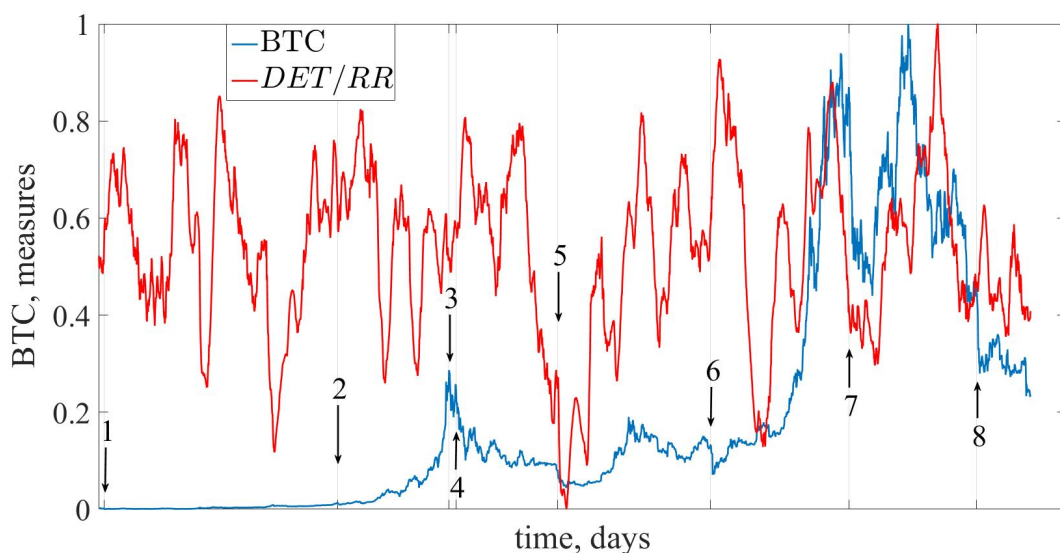


Рис. 3.4. Динаміка співвідношення детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ) для всього досліджуваного періоду біткоїна.

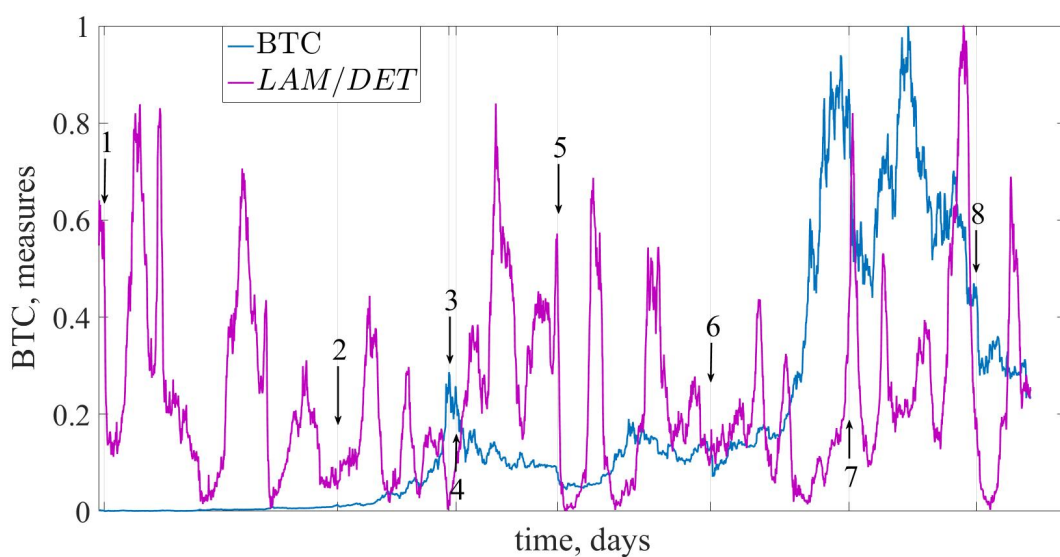


Рис. 3.5. Динаміка співвідношення ламінарності до детермінізму ( $LAM/DET$ ) для всього досліджуваного періоду біткоїна.

представляють зворотні величини до максимальних діагональних та вертикальних ліній ( $D_{max}$  та  $V_{max}$ ), дані міри закономірно спадають. Попередні показники продемонстрували, що кризові стани крипторинку характеризуються високим ступенем детермінізму та ламінарності. У такому випадку, довжини діагональних та вертикальних ліній також зростають, що вказує на ріст горизонту передбачуваності та незмінюваності.

Рис. 3.7 представляє динаміку частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої

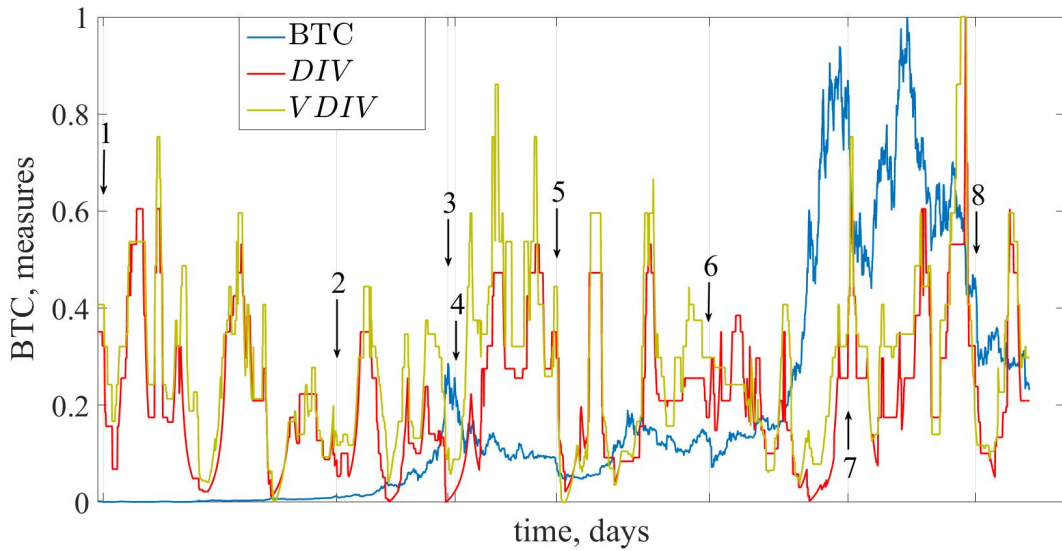


Рис. 3.6. Динаміка мір діагональної ( $DIV$ ) та вертикальної ( $VDIV$ ) дивергенції для всього досліджуваного періоду біткоіна.

довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ).

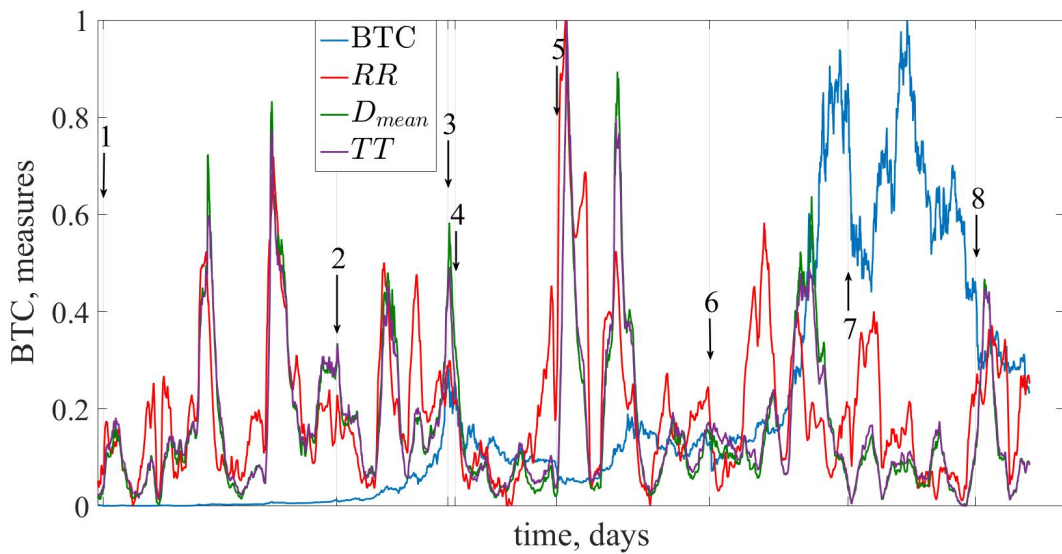


Рис. 3.7. Динаміка частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ) для всього досліджуваного періоду біткоіна.

На рис. 3.7 видно, що частота рекурентності зростає під час кризової події. Це значить, що зростає загальна кількість траєкторій фазового простору, що постають достатньо близькими один до одного в передкризовий період або у сам момент краху. Відносно динаміки попередніх мір

та  $D_{mean}$  ми бачимо, що середній ступінь передбачуваності зростає під час кризи. Згідно динаміки  $TT$  можна зазначити, що система «застрягає» у кризовому стані.

На рис. 3.8 та рис. 3.9 представлено динаміку середньої довжини білих вертикальних ліній та ентропії розподілу діагональних, вертикальних та білих вертикальних ліній.

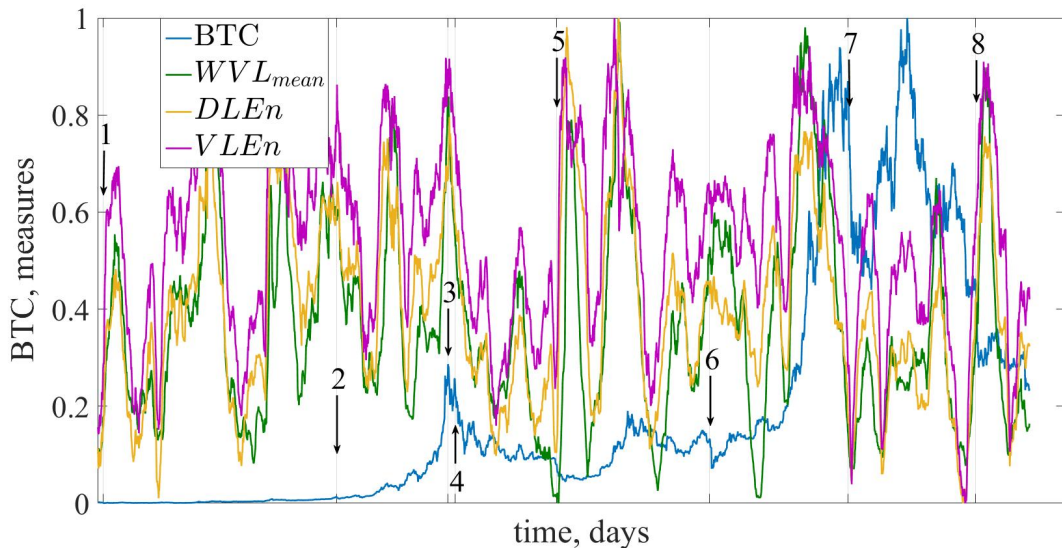


Рис. 3.8. Динаміка мір середньої довжини білих вертикальних ліній ( $WVLMean$ ), ентропії розподілу діагональних ліній ( $DLEn$ ) та вертикальних ліній ( $VLEn$ ) для всього досліджуваного періоду біткоїна.

З рис. 3.8 видно, що значення  $WVLMean$ ,  $DLEn$  та  $VLEn$  починають зростати в час кризи, сигналізуючи про особливий стан системи в даний період часу. Середня довжина білих вертикальних ліній показує, що кризові події характеризуються не лише детермінізмом динаміки крипторинку, але і несхожістю даних подій у порівнянні з попередніми станами, оскільки довжина білих вертикальних ліній характеризується зростанням.

Ентропія діагональної лінії також показує тенденцію до збільшення. Оскільки ентропія Шеннона максимальна при рівномірному розподілі, можна зробити висновок, що події колапсу біткоїна характеризуються різними горизонтами передбачуваності. Тобто в передкризовій динаміці немає однієї чорної діагональної лінії, що є домінуючою перед усіма іншими. Під час кризи з'являються горизонти детермінізму, які набувають ще більшої ваги на одному рівні з іншими.

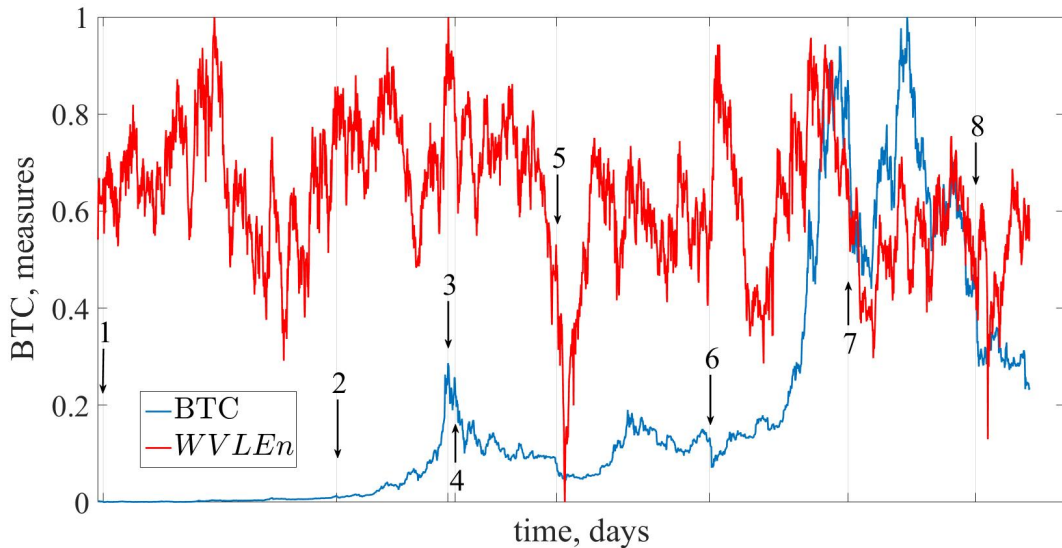


Рис. 3.9. Динаміки ентропії розподілу білих вертикальних ліній ( $WVLEn$ ) для всього досліджуваного періоду біткоїна.

Ентропія вертикальних ліній зростає схожим чином до  $DLEn$ . Можна припустити, що аналогічно діагональним лініям ламінарні стани мають різні горизонти незмінності під час крахових подій, і ці горизонти незмінності мають більшу тенденцію до рівномірного розподілу.

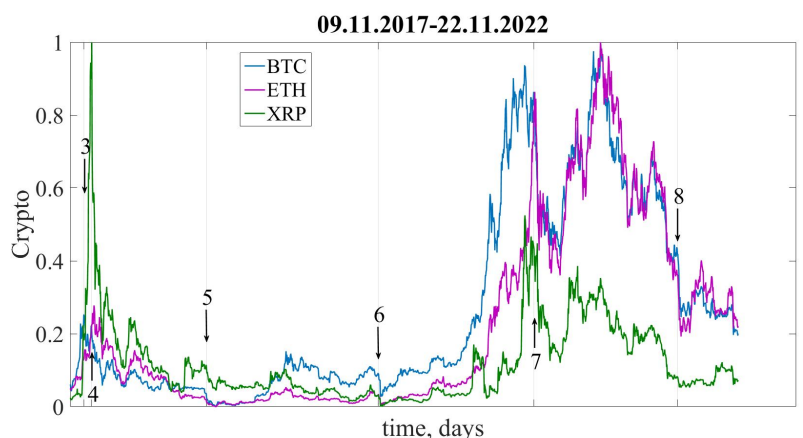
З рис. 3.9 видно, що ентропія розподілу білих вертикальних ліній спадає у кризовий або передкризовий стан системи. Це вказує на зростання асиметричності розподілу даного типу ліній. Можна припустити, що дана динаміка характеризується поступовим переважанням структур, що складаються з розподілу чорних ліній. Тобто, у передкризовий стан криптовалютного ринку система досягає певного чутливого стану при якому траєкторії фазового простору поступово починають збігатися.

### 3.2. Емпіричні результати крос-рекурентного та об'єднаного рекурентного аналізу криптовалютних крахів

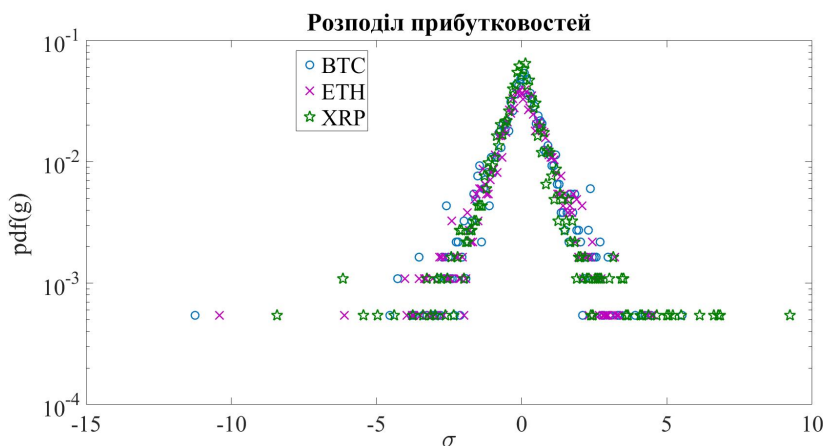
Даний розділ представляє результати якісного та кількісного крос-рекурентного та об'єднаного аналізу. Використовуючи дані методи, ми висуваємо припущення, що ринок криптовалют – це складна, самоорганізована система, динаміка якої зумовлена не лише ціноутвореннями

самого біткоїна, але й колективною динамікою багатьох криптовалютних індексів, інновації яких породжують нові динамічні зміни.

Для крос-рекурентного та подальшого об'єднаного рекурентного аналізу були обрані дві найкапіталізованіші та найдовші історично криптовалюти – ріпл (ripple, XRP) та ефіріум (ethereum, ETH). Дані криптовалюти, так само як і біткоїн, були завантажені з сайту Yahoo Finance [40] за весь часовий період, що даний ресурс пропонує, а саме з 9 листопада 2017 року по 22 листопада 2022 року. На рис. 3.10 представлено динаміку досліджуваних індексів.



(а)



(б)

Рис. 3.10. Динаміка часових рядів BTC, ETH та XRP у нормалізованому масштабі з вказаними кризами (а). Розподіл прибутковостей досліджуваних криптовалютних індексів у напівлогарифмічному масштабі (б).

Як можна бачити з представлених рисунків, розподіл флуктуації ефіріума та ріпла також виходить за межі нормального Гаусового роз-



поділу, як і біткоїна. Оскільки флуктуації досліджуваних індексів описуються в рамках одного закону розподілу, це дає нам підстави для дослідження їх крос-рекурентних характеристик.

На рис. 3.11 представлено крос-рекурентні та об'єднані рекурентні діаграми для біткоїна в парі з ефіріумом (BTC-ETH) та ріплом (BTC-XRP).

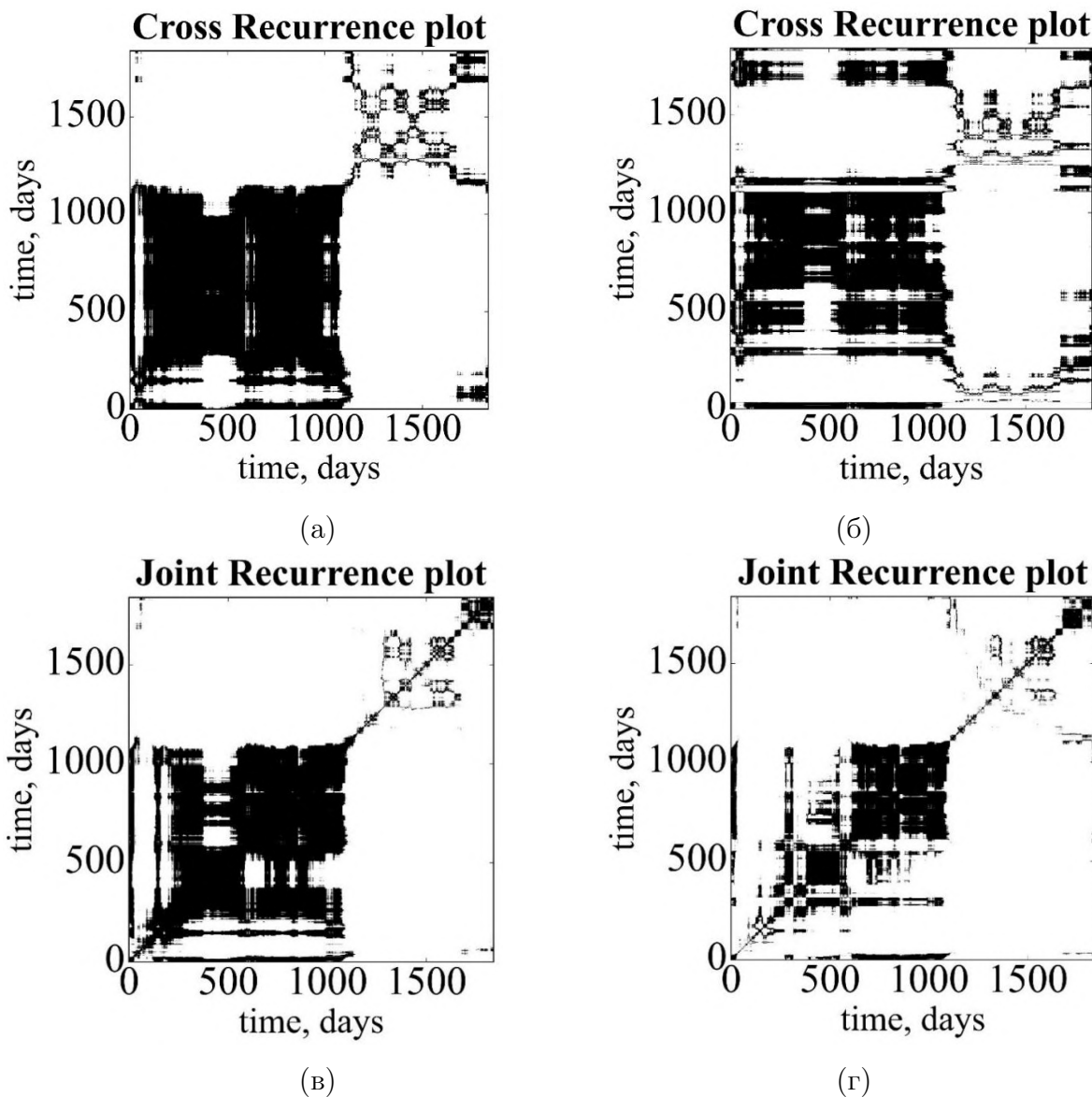
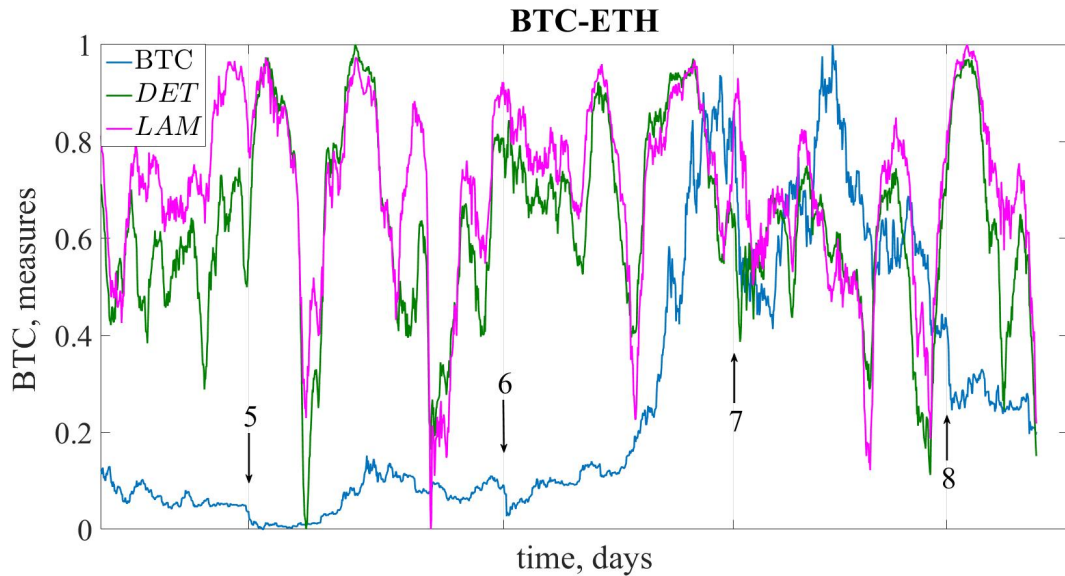


Рис. 3.11. Крос-рекурентні діаграми для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б). Об'єднані рекурентні діаграми для пар BTC-ETH (в) та BTC-XRP (г).

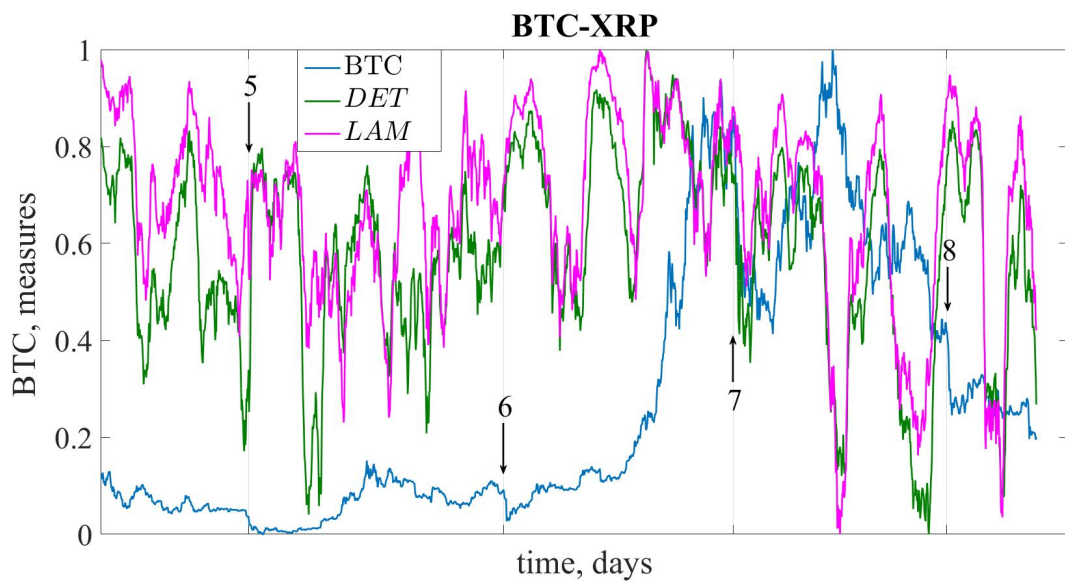
Видно, що для обох пар спостерігається значна крос-рекурентна та об'єднана рекурентна поведінка для перших 1000 днів. Просліджується певна часткова рекурентність для останніх днів. Візуально найбільша частка рекурентних точок спостерігається для пари BTC-XRP. Для

об'єднаного рекурентного аналізу ситуація обернена. Кількісний аналіз має надати більше інформації стосовно зміни біваріативної рекурентності.

На рис. 3.12 представлено крос-рекурентну динаміку показників передбачуваності ( $DET$ ) та ламінарності ( $LAM$ ).



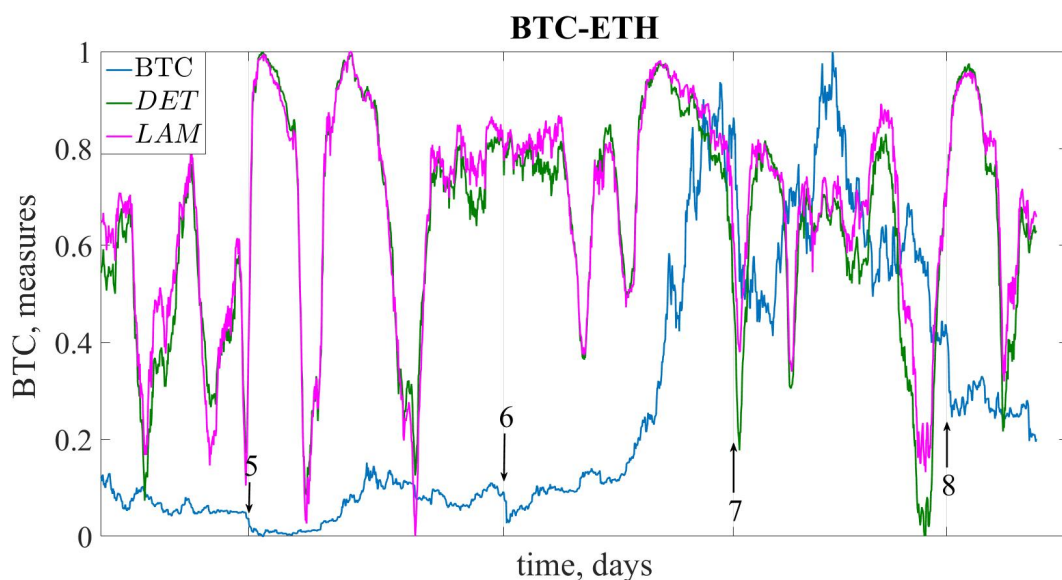
(a)



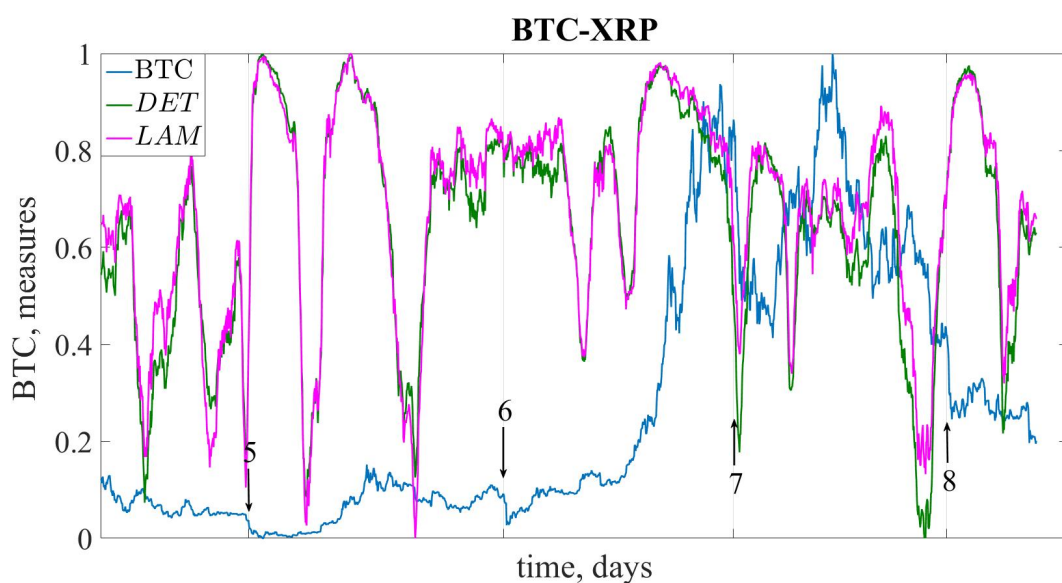
(б)

Рис. 3.12. Крос-рекурентна динаміка мір передбачуваності ( $DET$ ) та ламінарності ( $LAM$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

Рис. 3.13 демонструє динаміку показників ( $DET$ ) та ( $LAM$ ) на основі об'єднаного рекурентного аналізу.



(a)

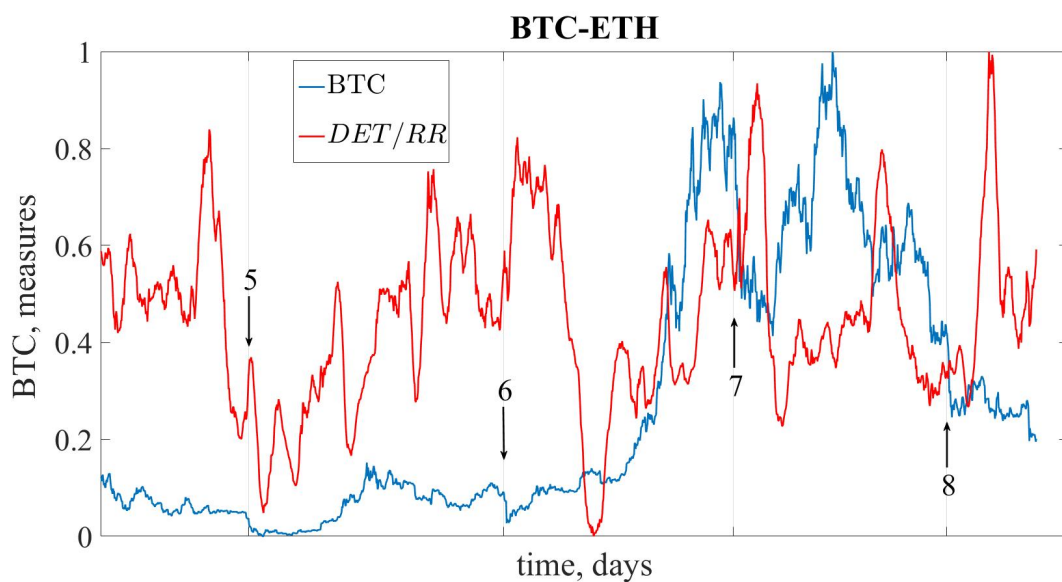


(б)

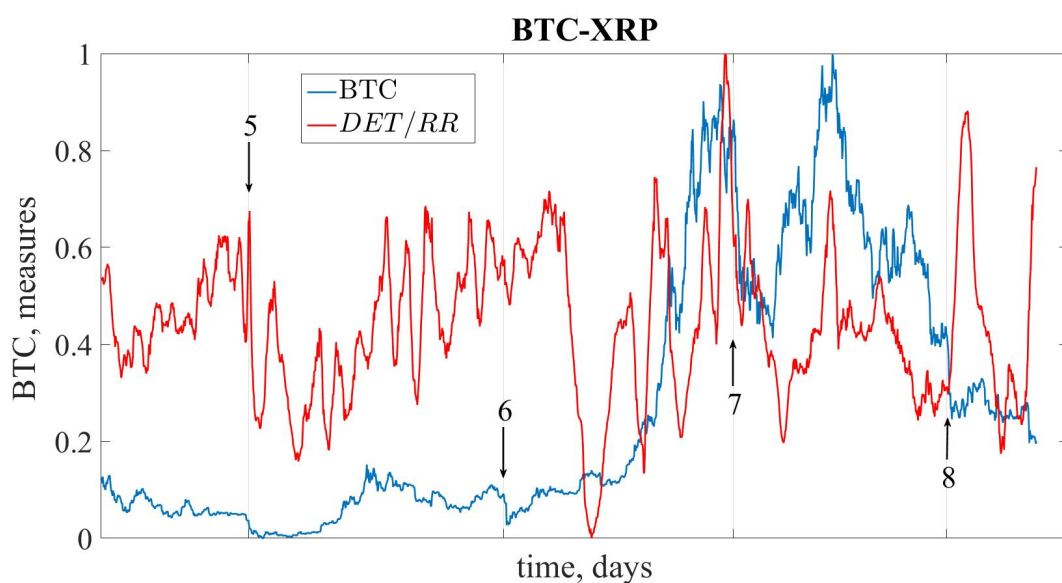
Рис. 3.13. Об'єднана рекурентна динаміка мір передбачуваності ( $DET$ ) та ламінарності ( $LAM$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.12 та рис. 3.13 видно, що  $DET$  та  $LAM$  зростають під час кризових подій. Видно, що крос-рекурентна та об'єднана рекурентна динаміка крахів характеризується високим ступенем ламінарності та детермінізму.

На рис. 3.14 представлена динаміка крос-рекурентної міри відношення детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ).



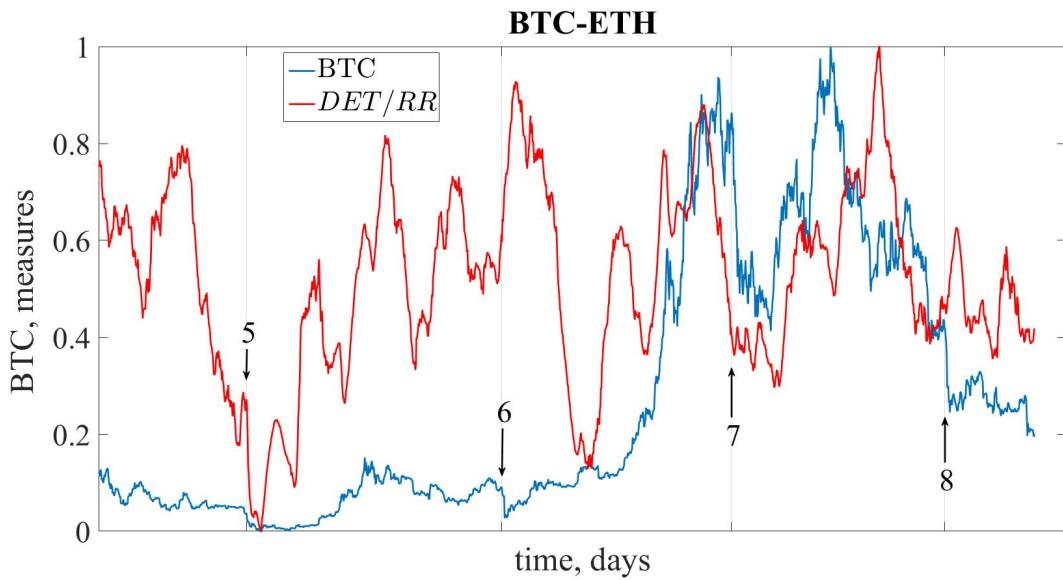
(a)



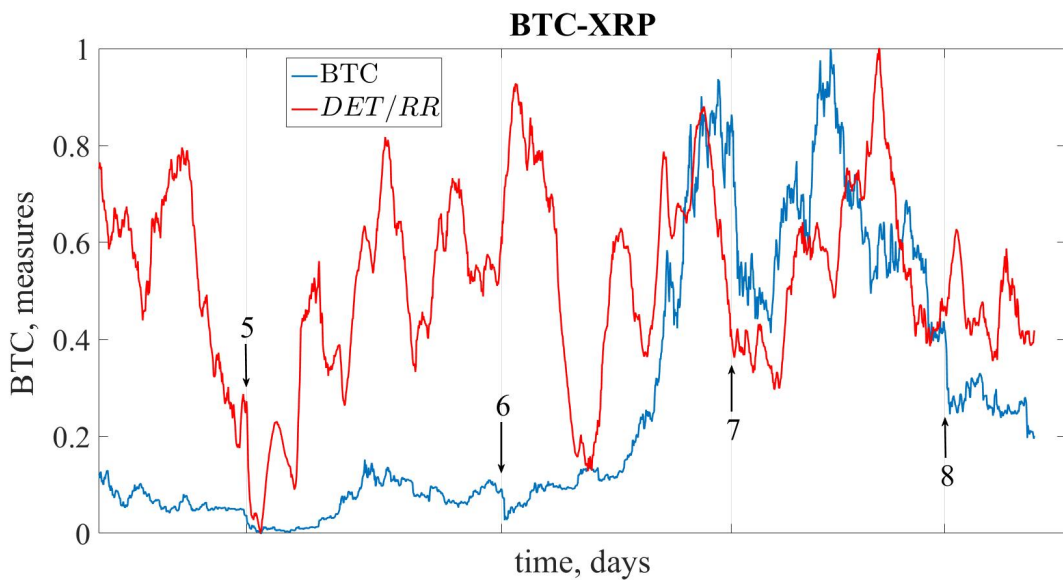
(б)

Рис. 3.14. Крос-рекурентна динаміка співвідношення детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

Рис. 3.15 представляє динаміку міри відношення детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ) на основі об'єднаного рекурентного аналізу.



(a)

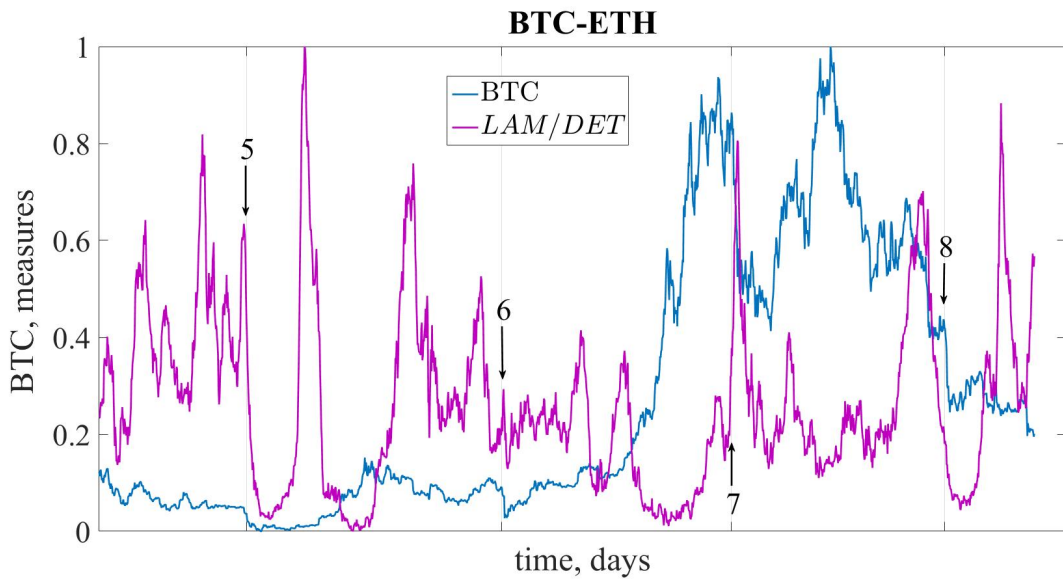


(б)

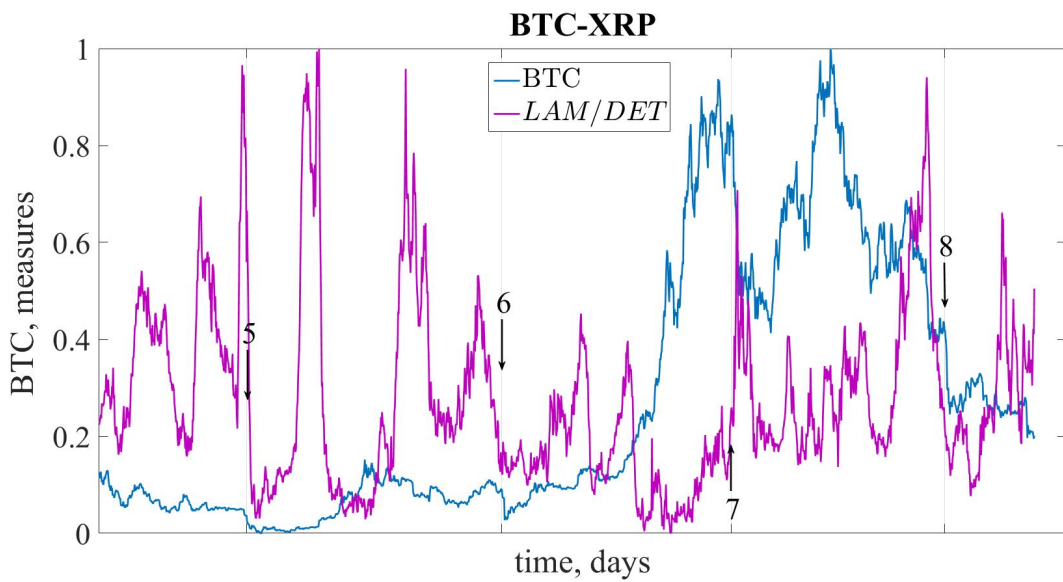
Рис. 3.15. Об'єднана рекурентна динаміка співвідношення детермінізму до частоти рекурентності ( $DET/RR$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.14 та рис. 3.15 показано, що крос-рекурентний та об'єднаний рекурентний показник  $DET/RR$  спадає у кризові та навіть передкризові періоди, сигналізуючи ріст рекурентності в кризовий (передкризовий) стан крипторинку.

На рис. 3.16 продемонстровано динаміку співвідношення міри ламінарності ( $LAM$ ) до детермінізму ( $DET$ ) на основі крос-рекурентного аналізу.



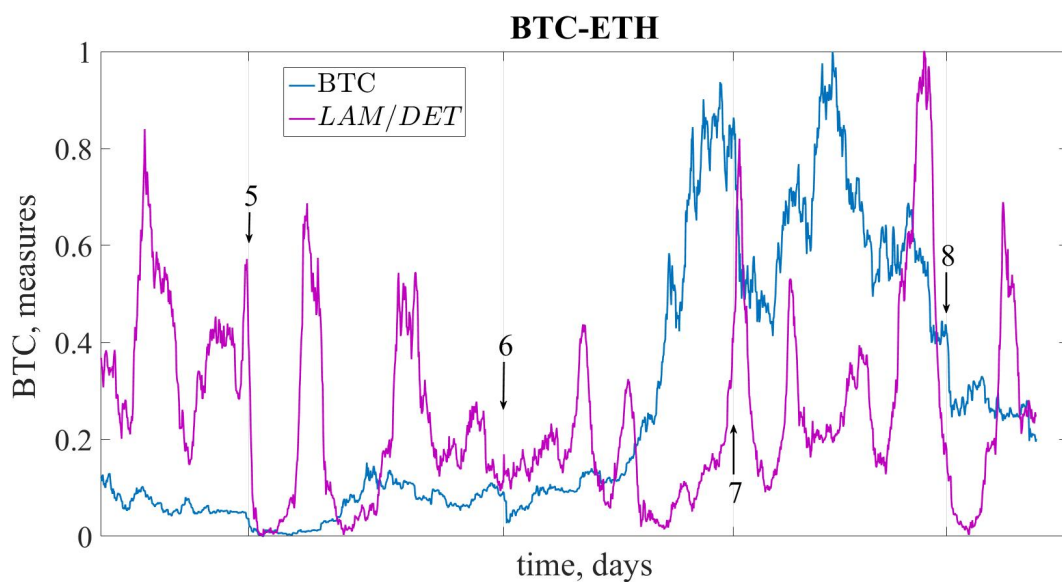
(a)



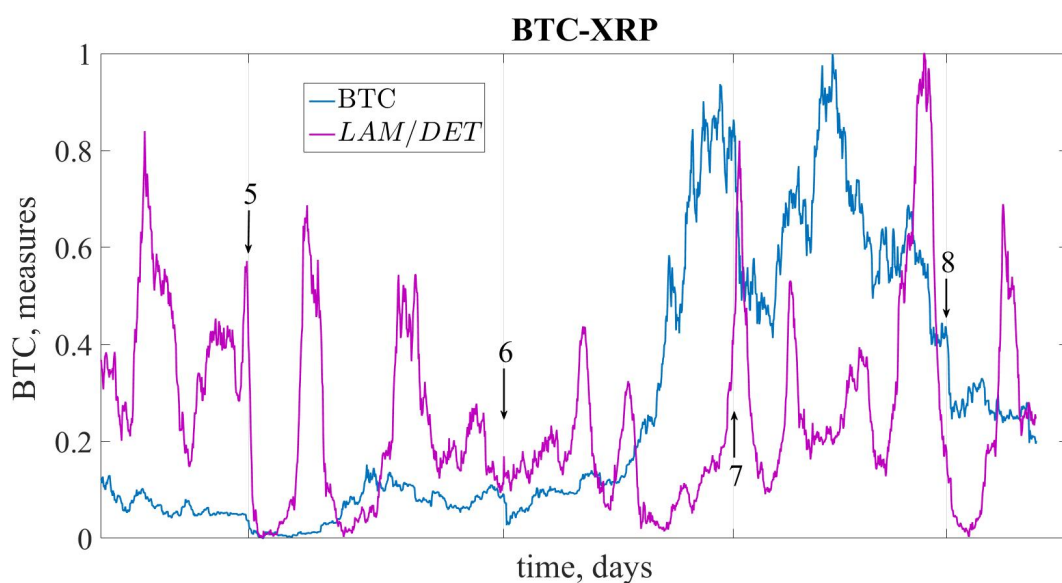
(б)

Рис. 3.16. Крос-рекурентна динаміка співвідношення ламінарності до детермінізму ( $LAM/DET$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.17 продемонстровано динаміку співвідношення міри ламінарності ( $LAM$ ) до детермінізму ( $DET$ ) на основі об'єднаного рекурентного аналізу.



(a)

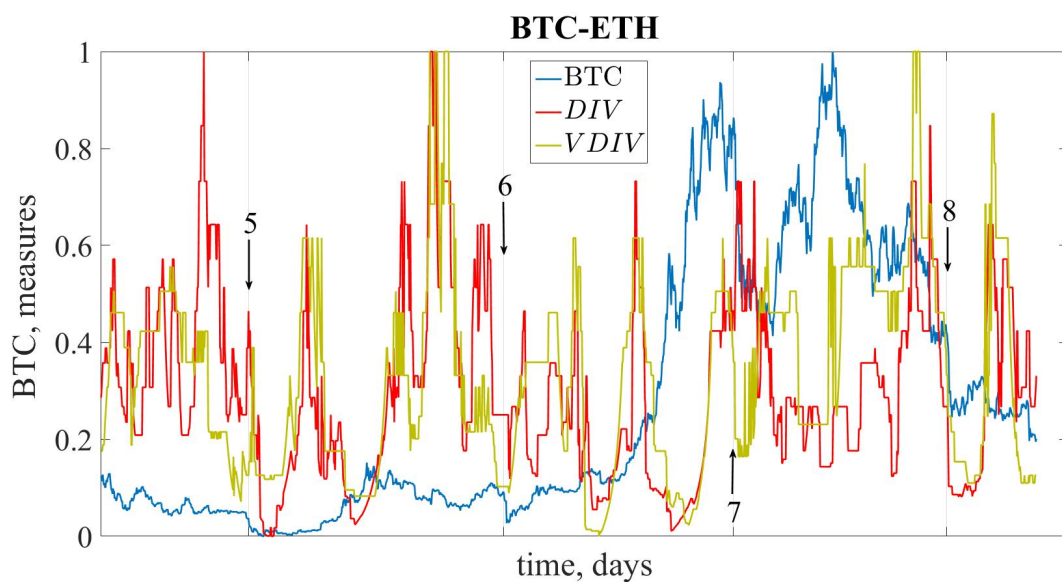


(б)

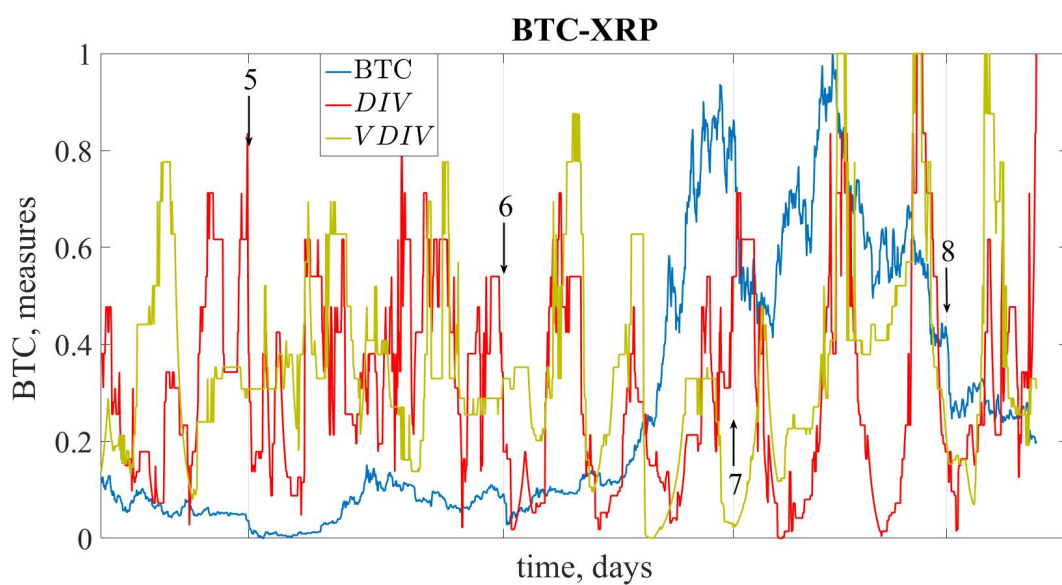
Рис. 3.17. Об'єднана рекурентна динаміка співвідношення ламінарності до детермінізму ( $LAM/DET$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

Для крос-рекурентного та об'єданого показника  $LAM/DET$  (рис. 3.16 та рис. 3.17) спостерігається схожа з попереднім показником закономірність. Можна зазначити, що загальний ступінь передбачуваності системи в стані краху набагато вищий у порівнянні з ламінарністю.

Рис. 3.18 представляє крос-рекурентну динаміку показника дивергенції діагональних ( $DIV$ ) і вертикальних ( $VDIV$ ) ліній.



(a)

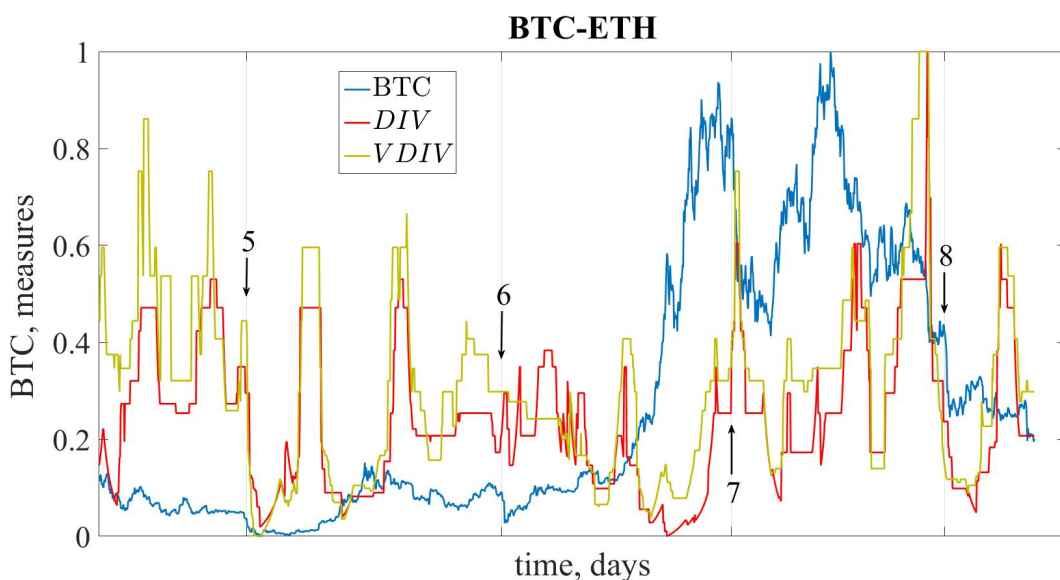


(б)

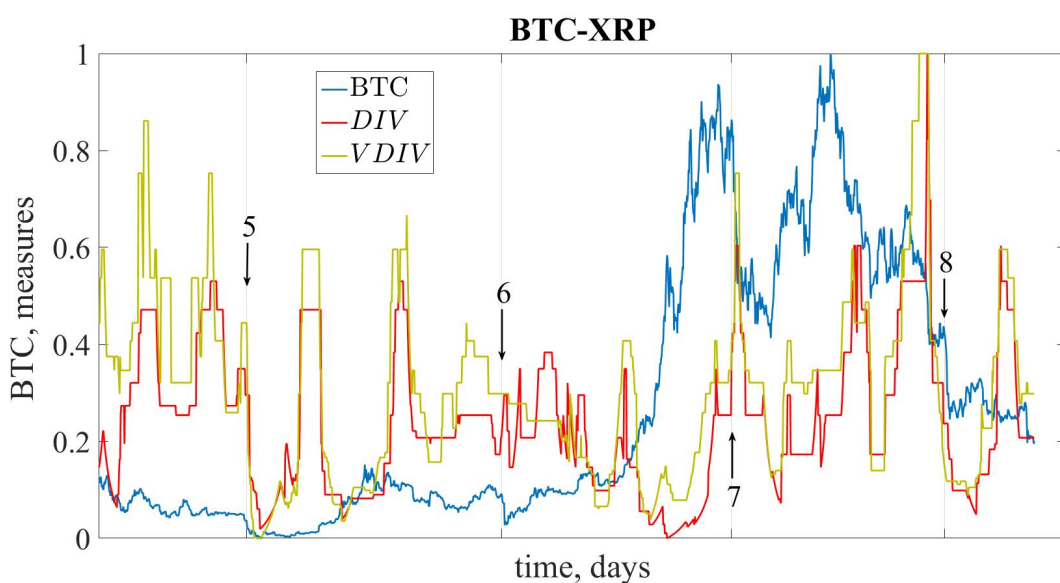
Рис. 3.18. Крос-рекурентна рекурентна динаміка діагональної ( $DIV$ ) та вертикальної ( $VDIV$ ) дивергенції для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.19 продемонстровано об'єднану рекурентну динаміку показника дивергенції діагональних ( $DIV$ ) і вертикальних ( $VDIV$ ) ліній.





(a)

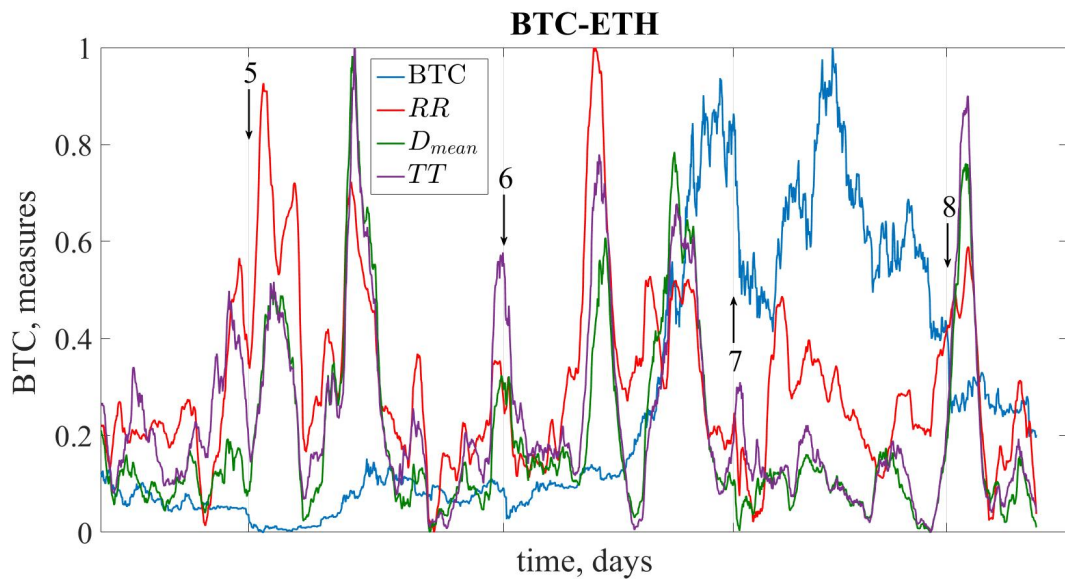


(б)

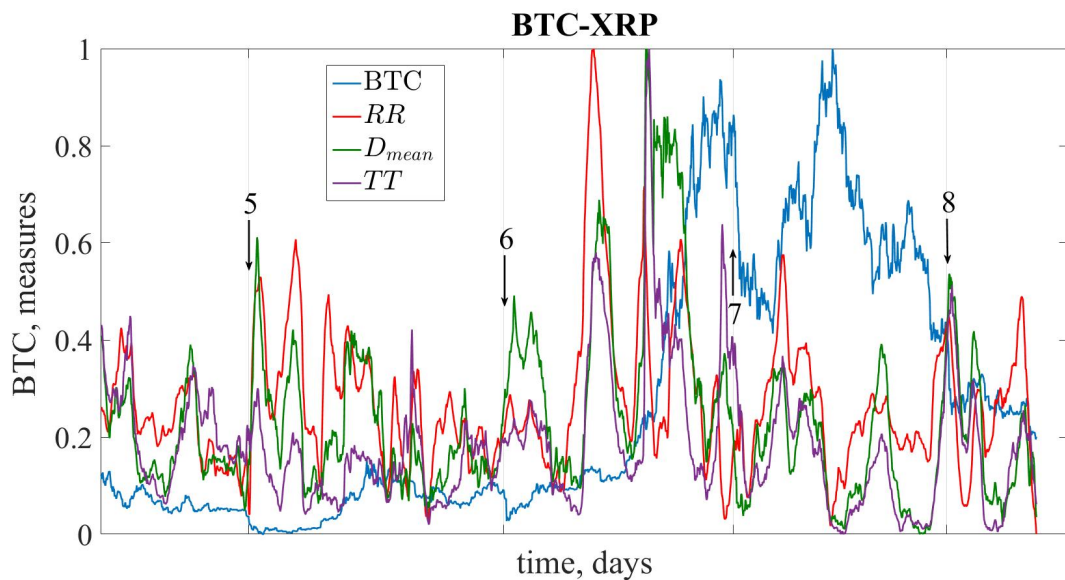
Рис. 3.19. Об'єднана рекурентна динаміка діагональної ( $DIV$ ) та вертикальної ( $VDIV$ ) дивергенції для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.18 та рис. 3.19 видно, що крос-рекурентна та об'єднана рекурентна дивергенція детерміністичних та ламінарних структур крипторинку спадає під час кризових станів. Можна зробити висновок, що у кризові стани значно зростає максимальна довжина діагональних та вертикальних структур при синхронізації систем у кризові періоди. Дана властивість також відображає зростання ступеня детермінізму та ламінарності під час криз двох криптоіндексів.

Рис. 3.20 представляє крос-рекурентну динаміку частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ).



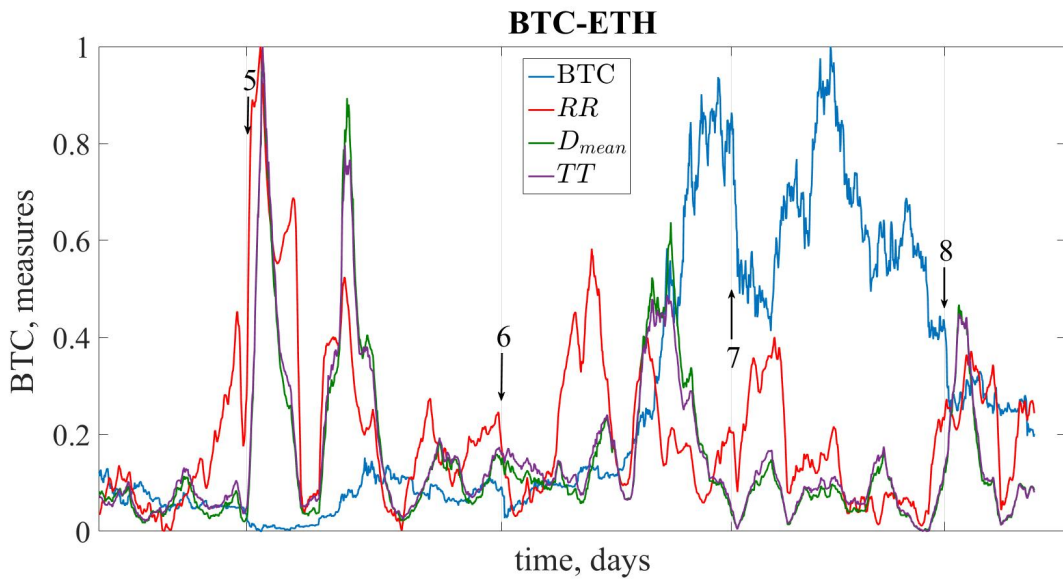
(a)



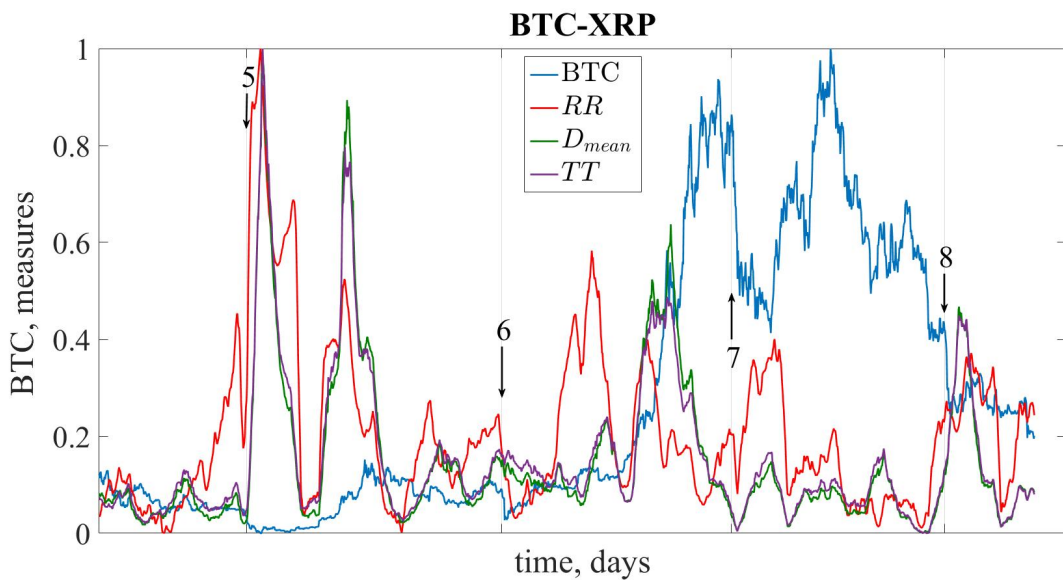
(б)

Рис. 3.20. Крос-рекурентна динаміка частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

Рис. 3.21 демонструє об'єднану рекурентну динаміку частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ).



(a)

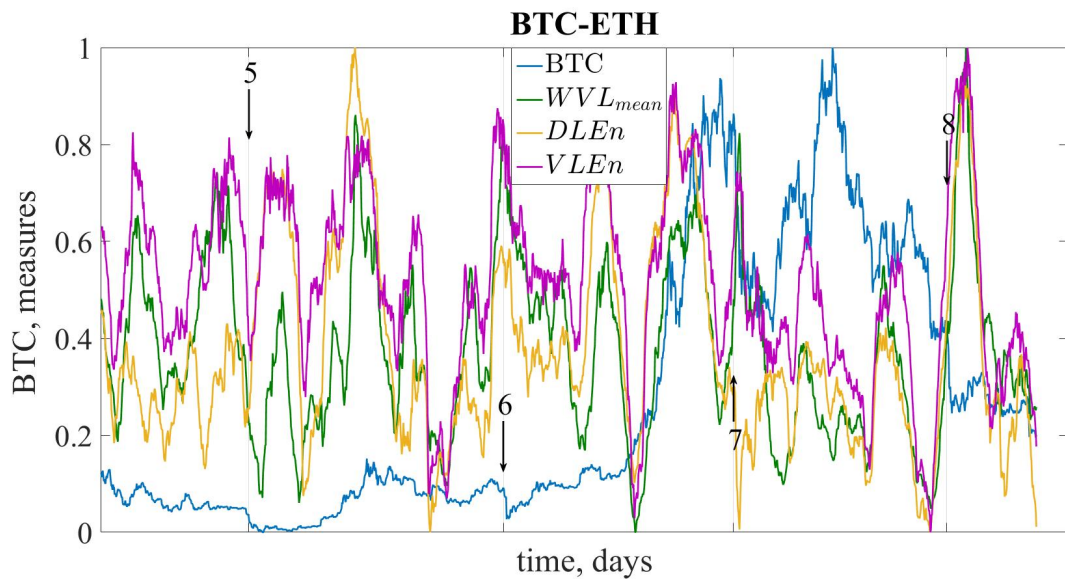


(б)

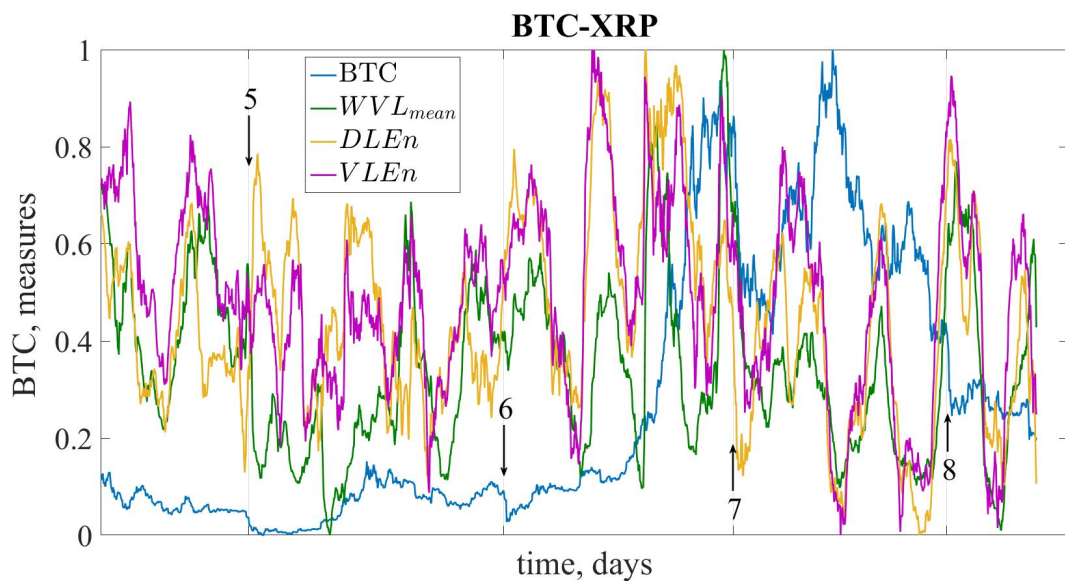
Рис. 3.21. Об'єднана рекурентна динаміка частоти рекурентності ( $RR$ ), середньої довжини діагональних ліній ( $D_{mean}$ ) та часу затримки ( $TT$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

Рис. 3.20 та рис. 3.21 показують, що крос-рекурентна та об'єднана рекурентна частота точок зростає під час кризових подій крипторинку. Це значить, що зростає загальна кількість траєкторій у досліджуваних парах криптовалют, що постають достатньо близькими один до одного в передкризовий період або у сам момент краху. Зростає і середній ступінь передбачуваності двох систем під час кризових явищ, і середній час ламінарності, що відповідає динаміці попередніх показників.

На рис. 3.22 представлено крос-рекурентну динаміку середньої довжини білих вертикальних ліній і ентропії розподілу діагональних, вертикальних та білих вертикальних ліній.



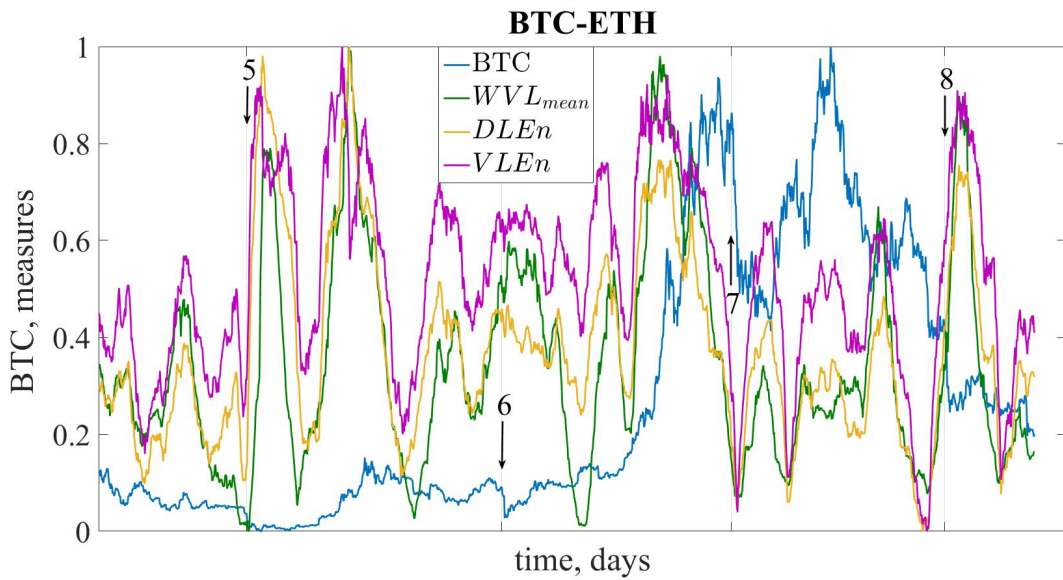
(a)



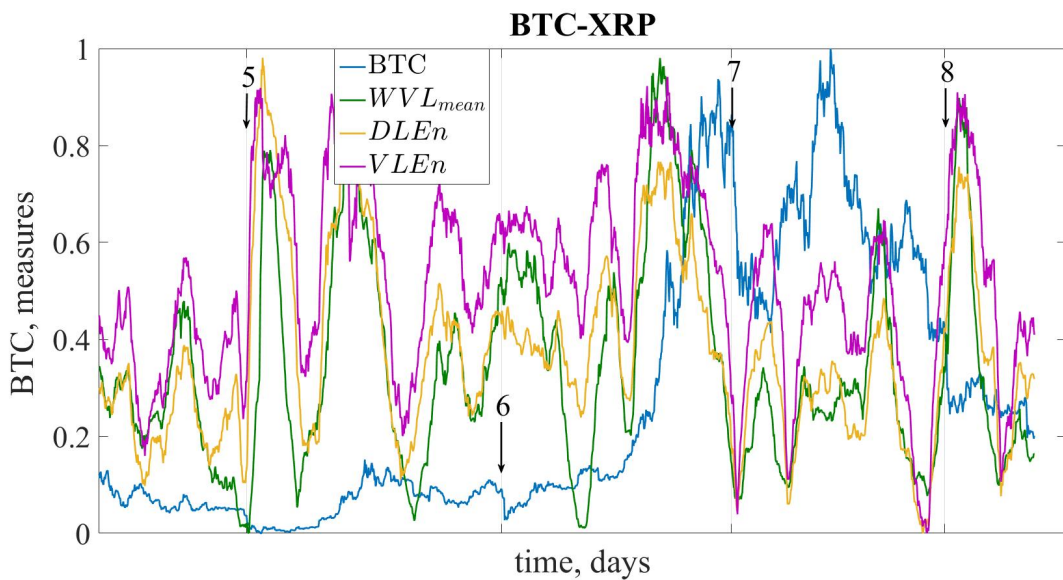
(б)

Рис. 3.22. Крос-рекурентна динаміка середньої довжини білих вертикальних ліній ( $WVLMean$ ), ентропії розподілу діагональних ліній ( $DLEn$ ) та вертикальних ліній ( $VLEn$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

Рис. 3.23 демонструє динаміку середньої довжини білих вертикальних ліній і ентропії розподілу діагональних, вертикальних та білих вертикальних ліній на основі об'єднаного рекурентного аналізу.



(a)



(б)

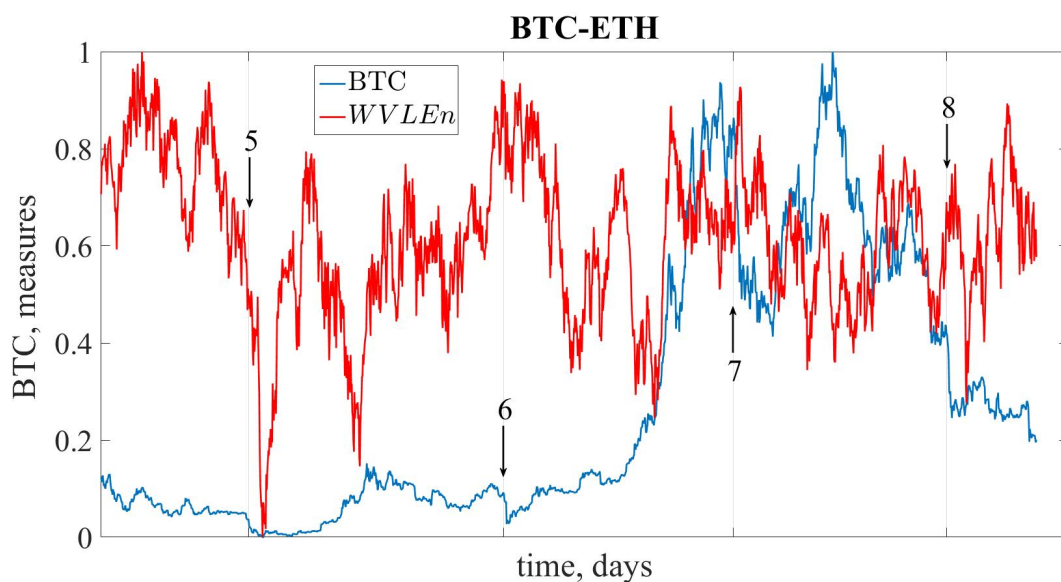
Рис. 3.23. Об'єднана рекурентна динаміка середньої довжини білих вертикальних ліній ( $WVLM_{mean}$ ), ентропії розподілу діагональних ліній ( $DLEn$ ) та вертикальних ліній ( $VLEn$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

З рис. 3.22 та рис. 3.23 видно, що показники  $WVLM_{mean}$ ,  $DLEn$  та  $VLEn$  на основі крос-рекурентного та об'єданого рекурентного аналізу починають зростати в час кризи, сигналізуючи про особливий стан двох систем у конкретний період часу. Оскільки довжина білих вертикальних ліній характеризується зростанням, кризові події двох пар характеризуються не лише детермінізмом динаміки крипторинку, але й несхожістю даних подій у порівнянні з попередніми, більшим інтервалами часу для повернення до

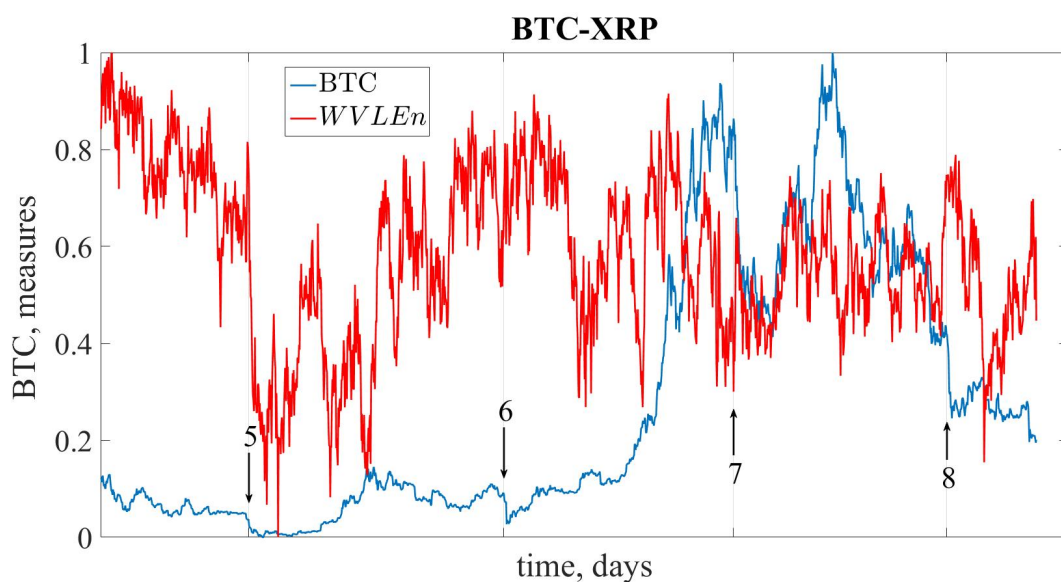
стану рекурентності.

Ентропія діагональної лінії також показує тенденцію до збільшення, вказуючи на ріст складності взаємної динаміки двох систем. Аналогічним чином зростає ентропія вертикальних ліній.

На рис. 3.24 представлено крос-рекурентну динаміку ентропії розподілу довжин білих вертикальних ліній ( $WVLEn$ ).



(a)

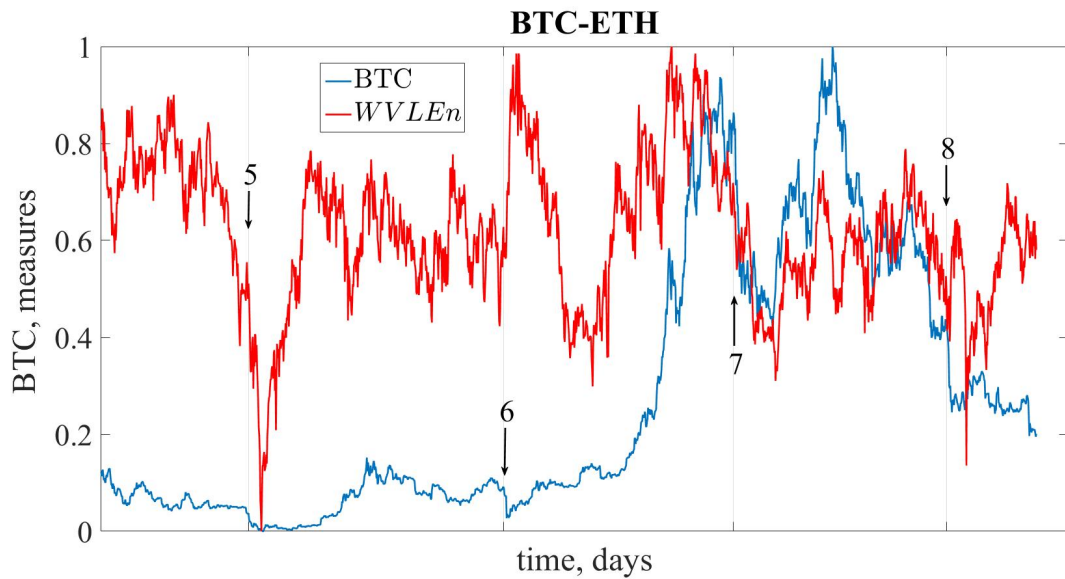


(б)

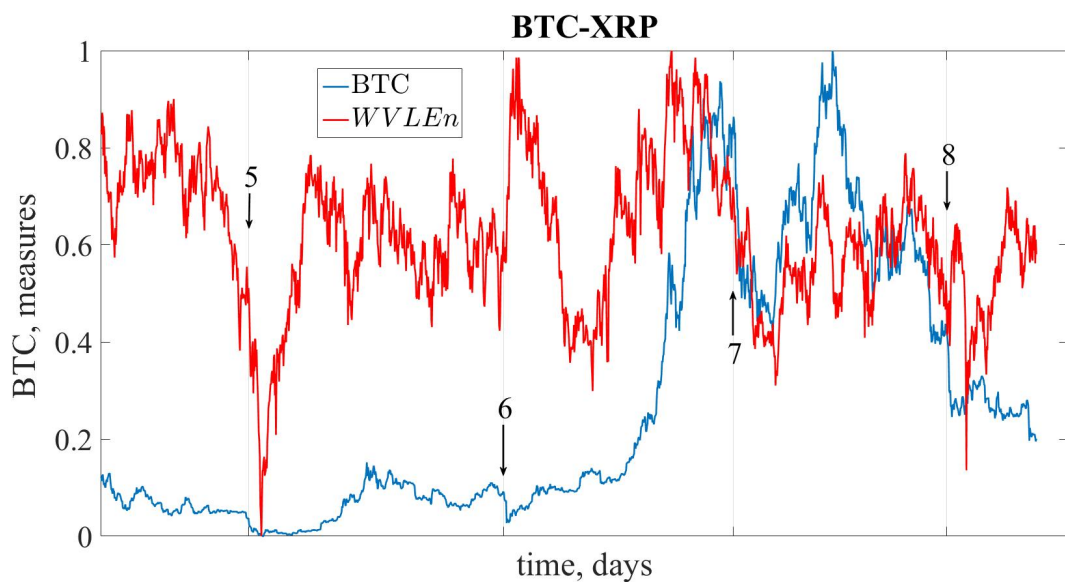
Рис. 3.24. Крос-рекурентна динаміка ентропії розподілу довжин білих вертикальних ліній ( $WVLEn$ ) для пар BTC-ETH (a) та BTC-XRP (б).

На рис. 3.25 представлено динаміку ентропії розподілу довжин білих

вертикальних ліній ( $WVLEn$ ) на основі об'єднаного рекурентного аналізу.



(a)



(б)

Рис. 3.25. Об'єднана рекурентна динаміка ентропії розподілу довжин білих вертикальних ліній ( $WVLEn$ ) для пар BTC-ETH (а) та BTC-XRP (б).

З рис. 3.24 та рис. 3.25 видно, що крос-рекурентна та об'єднана рекурентна ентропія розподілу довжин білих вертикальних ліній спадає у кризовий або передкризовий стан системи, вказуючи на особливу самоорганізовану критичність крипторинку в передкризовий стан.

## Висновки до розділу 3

1. У цьому розділі проведено класичний рекурентний аналіз біткоіна за період з 17 вересня 2014 року по 22 листопада 2022 року. На основі часового ряду даної криптовалюти представлено класифікацію криптовалютних крахів, що пережив біткоїн за час свого існування. Визначено, що крахи крипторинку – це короткі й локалізовані у часі падіння, волатильність яких значна, а у відсотковому вираженні їх зниження перевищує 30 відсотків, і прибутковості перевищують  $\pm 3\sigma$ . На основі цього визначення представлено відповідну таблицю крахів. Використовуючи класичний рекурентний аналіз, розраховано широкий спектр кількісних рекурентних показників для надання надійних сигналів катастрофічних подій на ринку криптовалют. Використовуючи класичні рекурентні діаграми показано, що упродовж перших 1000 днів між значеннями біткоіна спостерігалась значна рекурентність. Після крахової події 2018 року динаміка біткоіна почала представлятися менш рекурентною. Рекурентна діаграма чітко демонструє, що динаміка цієї криптовалюти виходить далеко за межі стаціонарної, періодичної динаміки. На основі кількісного рекурентного аналізу можна зробити висновок, що всі крахи біткоіна характеризуються високим ступенем ламінарності й детермінізму. Зростає загальна частка рекурентних точок, як і середня довжина вертикальних з діагональними лініями. Також спостерігається зростання рекурентних ентропійних показників, що вказує на зростання складності системи під час відповідних крахових періодів.
2. Представлено динаміку кількісних крос-рекурентних та об'єднаних рекурентних показників. Виходячи з припущення, що динаміка біткоїн ринку обумовлена не лише теперішніми та попередніми значеннями самого біткоіна, але й попарною залежністю даної криптовалюти з такими індексами як ефіріум (ETH) та ріпл (XRP), досліджувалась крос-рекурентна динаміка BTC-ETH та BTC-XRP за період з 9 листопада 2017 року по 22 листопада 2022 року. Біваріативний рекурентний аналіз показав, що взаємна крахова динаміка двох криптовалютних пар характеризується високим



ступенем передбачуваності та незмінюваності. Так само як і для уніваріативного аналізу біткоїна, крос-рекурентна та об'єднана рекурентна динаміка біткоїна та одного з досліджуваних індексів характеризується підвищеною кількістю діагональних та вертикальних рекурентних структур, що може вказувати на взаємну реакцію майже всього крипторинку на крахову динаміку біткоїна.

# ВИСНОВКИ

У цій роботі, згідно з поставленою метою та завданням дослідження, було проведено огляд робіт присвячених криптовалютному ринку. Ми переконались, що ринок криптовалют – це складна самоорганізована система. Ціни на криптовалюти демонструють високий рівень нелінійності, невизначеності та волатильності, тому прогнозування динаміки криптовалютного ринку являє собою дуже нетривіальну задачу. Дослідження нелінійної динаміки цифрових активів стало привертати увагу багатьох науковців, що підтверджується чисельною кількістю досліджень присвячену фінансовим ринкам і, зокрема, криптовалютам. Виявляється, що цей ринок було діагностовано за допомогою різних як лінійних, так і нелінійних методів. Одним із найефективніших підходів із цього списку є інструментарій рекурентного аналізу. Як показують роботи присвячені фондовим індексам, рекурентний аналіз представляє ефективні якісні та кількісні показники для ідентифікації критичних змін у динаміці системи.

У другому розділі було репрезентовано рекурентні діаграми різних типів і характерні закономірності, що можна спостерігати. Було описано як крупномасштабні, так і дрібномасштабні структури, що є основою для проведення кількісного аналізу рекурентних діаграм. Був представлений підхід до оцінки мінливості рекурентних станів із плином часу – алгоритм ковзного вікна. Також було описано кількісні підходи до оцінки ступеня рекурентності, що властивий досліджуваній системі. Останнім у рамках другого розділу представлено короткий огляд програмних продуктів, які дозволяють виконувати рекурентний аналіз. Основну увагу приділено програмному забезпеченню з відкритим вихідним кодом. Було зазначено основні позитивні та негативні сторони багатьох із них. З усіх зазначених ми виокремили лише бібліотеку PyRQA, оскільки вона характеризується можливістю проведення розподілених та паралельних обчислень на великих масивах даних.

Було проведено класичний, крос- та об'єднаний рекурентний аналіз криптовалютного ринку. Кількісні та якісні показники рекурентного аналізу різних типів надали можливість отримати наступні висновки:

1. Крахові події криптовалютного ринку проявляють високий ступінь

ламінарності й детермінізму. Крахи характеризуються значною довготривалою пам'яттю, що відображається в зростанні пропорції чорних точок на рекурентній діаграмі.

2. Загальний відсоток точок у рекурентній діаграмі стає вище, ніж відсоток лише діагональних або просто вертикальних структур. Разом з тим, відсоток діагональних ліній у рекурентній діаграмі під час кризових подій набагато вище, ніж відсоток вертикальних ліній. Таким чином, загальний ступінь детермінізму більше ніж ламінарності.
3. Дивергенція детермінованих і ламінарних структур криптовалютних індексів спадає під час крахових станів, що вказує на вищий ступінь рекурентності в динаміці досліджуваних систем. Також це дає розуміння того, що траєкторії фазового простору стають близькими один до одного під час критичних явищ.
4. Такі показники, як частота повторень, середня довжина діагональної лінії і час затримки також збільшуються під час кризових явищ. Це показує, що загальне число траєкторій у фазовому просторі однієї або декількох систем, які досить близькі одна до одної, стає більше в кризовий або передкризовий період. Отже, ймовірність виникнення рекурентного стану зростає, і середній ступінь передбачуваності стає вище. Велика частина вертикальних ліній вказує на те, що система “застрягла” в стані кризи на певний період часу.
5. Ентропійні показники на основі частоти розподілу діагональних та вертикальних ліній і, зокрема, показник середньої довжини білих вертикальних ліній показують, що криптовалютним індексам притаманні складні нелінійні характеристики, які поєднують в собі не тільки горизонти детермінізму й ламінарності, але й деякі патерни асинхронності відображені у білих вертикальних лініях. Ентропія розподілу білих вертикальних ліній спадає в кризовий або передкризовий стан системи, що може вказувати на поступове зростання розподілу структур із розподілу чорних точок. Тобто, у передкризовий момент часу криптовалютний ринок починає приходити до певного стану синхронізації, за якого траєкторії фазових просторів двох

досліджуваних індексів починають повторюватись.

Застосовані підходи до пар BTC-ETH та BTC-XRP підтверджують, що криптовалютний ринок є відкритою, колективною, дуже складною, хаотичною і нелінійною системою, яка залежить від різних технічних та фундаментальних показників. Хоча рекурентні діаграми різних типів і кількісний рекурентний аналіз на їхній основі надає перспективні результати для прогнозування криз та побудови індикаторів-передвісників, але описані підходи потребують подальшого розвитку, сам кількісний аналіз – доповнення спектром нових показників, аби мати змогу створювати прикладні торгові стратегії на їхній основі та автономних торгових ботів. Оскільки пропоновані міри рекурентності є лише індикаторами (індикаторами-передвісниками), які дають можливість відстежувати крахові явища в конкретний момент часу існування ринку, прогнозування таких подій вимагає інтеграції представлених підходів з конкретними прогнозними моделями, що і планується зробити в подальших дослідженнях.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Agosto A., Cafferata A.* Financial Bubbles: A Study of Co-Explosivity in the Cryptocurrency Market // *Risks*. — 2020. — Київ. — Т. 8, № 2. — С. 34. — DOI: 10.3390/risks8020034.
2. *Alqaralleh H., Abuhommous A. A., Alsarairah A.* Modelling and Forecasting the Volatility of Cryptocurrencies: A Comparison of Nonlinear GARCH-Type Models // *International Journal of Financial Research*. — 2020. — Лип. — Т. 11, № 4. — С. 346. — DOI: 10.5430/ijfr.v11n4p346.
3. *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos / J. H. Argyris [та ін.].* — Springer Berlin Heidelberg, 2015. — DOI: 10.1007/978-3-662-46042-9.
4. Analyzing time–frequency co-movements across gold and oil prices with BRICS stock markets: A VaR based on wavelet approach / *W. Mensi [та ін.]* // *International Review of Economics & Finance*. — 2018. — Бер. — Т. 54. — С. 74–102. — DOI: 10.1016/j.iref.2017.07.032.
5. *Andersen J. V., Nowak A.* Financial Markets as Interacting Individuals: Price Formation from Models of Complexity // *An Introduction to Socio-Finance*. — Springer Berlin Heidelberg, 2013. — С. 59–76. — DOI: 10.1007/978-3-642-41944-7\_3.
6. *Ardia D., Bluteau K., Rüede M.* Regime changes in Bitcoin GARCH volatility dynamics // *Finance Research Letters*. — 2019. — Черв. — Т. 29. — С. 266–271. — DOI: 10.1016/j.frl.2018.08.009.
7. Are Bitcoin bubbles predictable? Combining a generalized Metcalfe’s Law and the Log-Periodic Power Law Singularity model / *S. Wheatley [та ін.]* // *Royal Society Open Science*. — 2019. — Черв. — Т. 6, № 6. — С. 180538. — DOI: 10.1098/rsos.180538.
8. *Baaquie B. E.* Quantum Finance. — Cambridge University Press, 11.2004. — DOI: 10.1017/cbo9780511617577.

9. *Bariviera A. F.* The inefficiency of Bitcoin revisited: A dynamic approach // *Economics Letters*. — 2017. — Груд. — Т. 161. — С. 1—4. — DOI: 10.1016/j.econlet.2017.09.013.
10. *Barkoulas J., Travlos N.* Chaos in an emerging capital market? The case of the Athens Stock Exchange // *Applied Financial Economics*. — 1998. — Черв. — Т. 8, № 3. — С. 231—243. — DOI: 10.1080/096031098332998.
11. *Bastos J. A., Caiado J.* Recurrence quantification analysis of global stock markets // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2011. — Квіт. — Т. 390, № 7. — С. 1315—1325. — DOI: 10.1016/j.physa.2010.12.008.
12. *Bentes S. R., Menezes R.* Entropy: A new measure of stock market volatility? // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2012. — Листоп. — Т. 394. — С. 012033. — DOI: 10.1088/1742-6596/394/1/012033.
13. *Blank S. C.* “Chaos” in futures markets? A nonlinear dynamical analysis // *Journal of Futures Markets*. — 1991. — Груд. — Т. 11, № 6. — С. 711—728. — DOI: 10.1002/fut.3990110606.
14. *Boungou W., Yatié A.* The impact of the Ukraine–Russia war on world stock market returns // *Economics Letters*. — 2022. — Черв. — Т. 215. — С. 110516. — DOI: 10.1016/j.econlet.2022.110516.
15. *Bradley E., Kantz H.* Nonlinear time-series analysis revisited // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Бер. — Т. 25, № 9. — С. 097610. — DOI: 10.1063/1.4917289.
16. *Brock W.* Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version // *Journal of Economic Theory*. — 1986. — Жовт. — Т. 40, № 1. — С. 168—195. — DOI: 10.1016/0022-0531(86)90014-1.
17. *Broomhead D., King G. P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1986. — Черв. — Т. 20, № 2/3. — С. 217—236. — DOI: 10.1016/0167-2789(86)90031-x.
18. Can volume predict Bitcoin returns and volatility? A quantiles-based approach / M. Balcilar [та ін.] // *Economic Modelling*. — 2017. — Серп. — Т. 64. — С. 74—81. — DOI: 10.1016/j.econmod.2017.03.019.

19. *Cao L.* Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1997. — Груд. — Т. 110, № 1/2. — С. 43–50. — DOI: 10.1016/s0167-2789(97)00118-8.
20. *Chaim P., Laurini M. P.* Nonlinear dependence in cryptocurrency markets // *The North American Journal of Economics and Finance*. — 2019. — Квіт. — Т. 48. — С. 32–47. — DOI: 10.1016/j.najef.2019.01.015.
21. *Charfeddine L., Benlagha N., Maouchi Y.* Investigating the dynamic relationship between cryptocurrencies and conventional assets: Implications for financial investors // *Economic Modelling*. — 2020. — Лют. — Т. 85. — С. 198–217. — DOI: 10.1016/j.econmod.2019.05.016.
22. *Chaum D.* Blind Signatures for Untraceable Payments // *Advances in Cryptology*. — Springer US, 1983. — С. 199–203. — DOI: 10.1007/978-1-4757-0602-4\_18.
23. *Cheah E.-T., Fry J.* Speculative bubbles in Bitcoin markets? An empirical investigation into the fundamental value of Bitcoin // *Economics Letters*. — 2015. — Трав. — Т. 130. — С. 32–36. — DOI: 10.1016/j.econlet.2015.02.029.
24. Classification of coupling patterns among spontaneous rhythms and ventilation in the sympathetic discharge of decerebrate cats / A. Porta [та ін.] // *Biological Cybernetics*. — 1996. — Серп. — Т. 75, № 2. — С. 163–172. — DOI: 10.1007/s004220050284.
25. *Coco M. I., Dale R.* Cross-recurrence quantification analysis of categorical and continuous time series: an R package // *Frontiers in Psychology*. — 2014. — Черв. — Т. 5. — DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00510.
26. Competition of noise and collectivity in global cryptocurrency trading: Route to a self-contained market / S. Drożdż [та ін.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Лют. — Т. 30, № 2. — С. 023122. — DOI: 10.1063/1.5139634.

27. Complex systems and physics education / A. O. Bielskiy [та ін.] // CEUR Workshop Proceedings / за ред. S. Semerikov, M. Shyshkina, A. Kiv. — 2022. — Т. 3085. — С. 56–80. — URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3085/paper17.pdf>.
28. Cryptocurrencies and Price Prediction: A Survey / Y. Mezquita [та ін.] // Blockchain and Applications. — Springer International Publishing, 09.2021. — С. 339–346. — DOI: 10.1007/978-3-030-86162-9\_34. — URL: [https://doi.org/10.1007%2F978-3-030-86162-9\\_34](https://doi.org/10.1007%2F978-3-030-86162-9_34).
29. *Dai W.* B-money. — 1998. — URL: <http://www.weidai.com/bmoney.txt>.
30. *Derman E.* My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance. — John Wiley & Sons, 2016.
31. *Dionisio A., Menezes R., Mendes D. A.* An econophysics approach to analyse uncertainty in financial markets: an application to the Portuguese stock market // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. — 2006. — Бер. — Т. 50, № 1/2. — С. 161–164. — DOI: 10.1140/epjb/e2006-00113-2.
32. Distinguishing dynamics using recurrence-time statistics / E. J. Ngamga [та ін.] // Phys. Rev. E. — 2012. — Лют. — Т. 85, вип. 2. — С. 026217. — DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026217.
33. *Dwork C., Naor M.* Pricing via Processing or Combatting Junk Mail // Advances in Cryptology — CRYPTO' 92. — Springer Berlin Heidelberg. — С. 139–147. — DOI: 10.1007/3-540-48071-4\_10.
34. *Eckmann J.-P., Kamphorst S. O., Ruelle D.* Recurrence Plots of Dynamical Systems // Europhysics Letters (EPL). — 1987. — Листоп. — Т. 4, № 9. — С. 973–977. — DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004.
35. Econophysics and Data Driven Modelling of Market Dynamics / за ред. F. Abergel [та ін.]. — Springer International Publishing, 2015. — DOI: 10.1007/978-3-319-08473-2.



36. Econophysics of cryptocurrency crashes: A systematic review / A. O. Bielinskyi [та ін.] // CEUR Workshop Proceedings / за ред. А. Kiv, V. Soloviev, S. Semerikov. — 2021. — Т. 3048. — С. 31–133. — URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3048/paper03.pdf>.
37. Estimating coupling directions in the cardiorespiratory system using recurrence properties / N. Marwan [та ін.] // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2013. — Серія. — Т. 371, № 1997. — С. 20110624. — DOI: 10.1098/rsta.2011.0624.
38. Fast Computation of Recurrences in Long Time Series / T. Rawald [та ін.] // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — Springer International Publishing, 2014. — С. 17–29. — DOI: 10.1007/978-3-319-09531-8\_2.
39. Fat tails, VaR and subadditivity / J. Daniélssohn [та ін.] // Journal of Econometrics. — 2013. — Лют. — Т. 172, № 2. — С. 283–291. — DOI: 10.1016/j.jeconom.2012.08.011.
40. *Finance* Y. List of Cryptocurrencies. — 2022. — URL: <https://finance.yahoo.com/crypto/>.
41. *Fraser A. M., Swinney H. L.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information // Physical Review A. — 1986. — Лют. — Т. 33, № 2. — С. 1134–1140. — DOI: 10.1103/physreva.33.1134.
42. Front Matter // Econophysics and Sociophysics. — Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. — С. I–XXVI. — DOI: 10.1002/9783527610006.fmatter.
43. *Fry J.* Booms, busts and heavy-tails: The story of Bitcoin and cryptocurrency markets? // Economics Letters. — 2018. — Жовт. — Т. 171. — С. 225–229. — DOI: 10.1016/j.econlet.2018.08.008.
44. GARCH Modelling of Cryptocurrencies / J. Chu [та ін.] // Journal of Risk and Financial Management. — 2017. — Жовт. — Т. 10, № 4. — С. 17. — DOI: 10.3390/jrfm10040017.

45. *Garnier J., Solna K.* Chaos and order in the bitcoin market // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2019. — Черв. — Т. 524. — С. 708—721. — DOI: 10.1016/j.physa.2019.04.164.
46. *Geometry from a Time Series / N. H. Packard [та ін.]* // *Physical Review Letters*. — 1980. — Бер. — Т. 45, № 9. — С. 712—716. — DOI: 10.1103/physrevlett.45.712.
47. *Gerlach J. C., Demos G., Sornette D.* Dissection of Bitcoin’s multiscale bubble history from January 2012 to February 2018 // *Royal Society Open Science*. — 2019. — Лип. — Т. 6, № 7. — С. 180643. — DOI: 10.1098/rsos.180643.
48. *Gisler M., Sornette D.* Exuberant Innovations: The Apollo Program // *Society*. — 2008. — Листоп. — Т. 46, № 1. — С. 55—68. — DOI: 10.1007/s12115-008-9163-8.
49. *Goodell J. W., Goutte S.* Co-movement of COVID-19 and Bitcoin: Evidence from wavelet coherence analysis // *Finance Research Letters*. — 2021. — Січ. — Т. 38. — С. 101625. — DOI: 10.1016/j.frl.2020.101625.
50. *Haber S., Stornetta W. S.* How to Time-Stamp a Digital Document // *Advances in Cryptology-CRYPTO’ 90*. — Springer Berlin Heidelberg. — С. 437—455. — DOI: 10.1007/3-540-38424-3\_32.
51. *Hegger R., Kantz H., Schreiber T.* Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 1999. — Черв. — Т. 9, № 2. — С. 413—435. — DOI: 10.1063/1.166424.
52. *Hirata Y., Horai S., Aihara K.* Reproduction of distance matrices and original time series from recurrence plots and their applications // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2008. — Жовт. — Т. 164, № 1. — С. 13—22. — DOI: 10.1140/epjst/e2008-00830-8.
53. *Huber T. A., Sornette D.* Boom, Bust, and Bitcoin: Bitcoin-Bubbles as Innovation Accelerators // *Journal of Economic Issues*. — 2022. — Січ. — Т. 56, № 1. — С. 113—136. — DOI: 10.1080/00213624.2022.2020023.

54. *Huber T. A., Sornette D.* Can there be a physics of financial markets? Methodological reflections on econophysics // The European Physical Journal Special Topics. — 2016. — Груд. — Т. 225, № 17/18. — С. 3187—3210. — DOI: 10.1140/epjst/e2016-60158-5.
55. Inferring indirect coupling by means of recurrences / Y. Zou [та ін.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2011. — Квіт. — Т. 21, № 04. — С. 1099—1111. — DOI: 10.1142/s0218127411029033.
56. Information Transmission Between Cryptocurrencies: Does Bitcoin Rule the Cryptocurrency World? / P. Bação [та ін.] // Scientific Annals of Economics and Business. — 2018. — Черв. — Т. 65, № 2. — С. 97—117. — DOI: 10.2478/saeb-2018-0013.
57. *Jakobsson M., Juels A.* Proofs of Work and Bread Pudding Protocols(Extended Abstract) // Secure Information Networks. — Springer US, 1999. — С. 258—272. — DOI: 10.1007/978-0-387-35568-9\_18.
58. *Jang H., Lee J.* An Empirical Study on Modeling and Prediction of Bitcoin Prices With Bayesian Neural Networks Based on Blockchain Information // IEEE Access. — 2018. — Т. 6. — С. 5427—5437. — DOI: 10.1109/access.2017.2779181.
59. *Jiang Y., Nie H., Ruan W.* Time-varying long-term memory in Bitcoin market // Finance Research Letters. — 2018. — Черв. — Т. 25. — С. 280—284. — DOI: 10.1016/j.frl.2017.12.009.
60. *Kadji H. G. E.* Effects of a locally injected signal on phase synchronization in a network of self-excited cells // The European Physical Journal B. — 2013. — Квіт. — Т. 86, № 4. — DOI: 10.1140/epjb/e2013-31087-3.
61. *Kantz H., Schreiber T.* Nonlinear Time Series Analysis. — Cambridge University Press, 11.2003. — DOI: 10.1017/cbo9780511755798.
62. *Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. I.* Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // Physical Review A. — 1992. — Бер. — Т. 45, № 6. — С. 3403—3411. — DOI: 10.1103/physreva.45.3403.

63. *Khuntia S., Pattanayak J.* Adaptive long memory in volatility of intraday bitcoin returns and the impact of trading volume // Finance Research Letters. — 2020. — Ciч. — Т. 32. — С. 101077. — DOI: 10.1016/j.frl.2018.12.025.
64. *Khuntia S., Pattanayak J.* Adaptive market hypothesis and evolving predictability of bitcoin // Economics Letters. — 2018. — Черб. — Т. 167. — С. 26–28. — DOI: 10.1016/j.econlet.2018.03.005.
65. *Lahmiri S., Bekiros S.* Chaos, randomness and multi-fractality in Bitcoin market // Chaos, Solitons & Fractals. — 2018. — Ciч. — Т. 106. — С. 28–34. — DOI: 10.1016/j.chaos.2017.11.005.
66. *Lahmiri S., Bekiros S.* Chaos, randomness and multi-fractality in Bitcoin market // Chaos, Solitons & Fractals. — 2018. — Ciч. — Т. 106. — С. 28–34. — DOI: 10.1016/j.chaos.2017.11.005.
67. *Lahmiri S., Bekiros S., Salvi A.* Long-range memory, distributional variation and randomness of bitcoin volatility // Chaos, Solitons & Fractals. — 2018. — Лют. — Т. 107. — С. 43–48. — DOI: 10.1016/j.chaos.2017.12.018.
68. Large complex data: divide and recombine (D&R) with RHIPE / S. Guha [та ін.] // Stat. — 2012. — Бep. — Т. 1, № 1. — С. 53–67. — DOI: 10.1002/sta4.7.
69. *Lindsay D. H., Campbell A.* A Chaos Approach To Bankruptcy Prediction // Journal of Applied Business Research (JABR). — 2011. — Бep. — Т. 12, № 4. — С. 1. — DOI: 10.19030/jabr.v12i4.5779.
70. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Бep. — Т. 20, № 2. — С. 130–141. — DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
71. *Maciel L.* Cryptocurrencies value-at-risk and expected shortfall: Do regime-switching volatility models improve forecasting? // International Journal of Finance & Economics. — 2020. — Cepн. — Т. 26, № 3. — С. 4840–4855. — DOI: 10.1002/ijfe.2043.

72. Macro-Econometric Models // *Econometrica*. — 1971. — Т. 39, № 4. — С. 168—172. — ISSN 00129682, 14680262. — URL: <http://www.jstor.org/stable/1912420> (дата зверн. 28.11.2022).
73. *Mandelbrot B.* How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension // *Science*. — 1967. — Трав. — Т. 156, № 3775. — С. 636—638. — DOI: 10.1126/science.156.3775.636.
74. *Mandelbrot B.* Paretian Distributions and Income Maximization // *The Quarterly Journal of Economics*. — 1962. — Лют. — Т. 76, № 1. — С. 57. — DOI: 10.2307/1891131.
75. *Mandelbrot B.* Stable Paretian Random Functions and the Multiplicative Variation of Income // *Econometrica*. — 1961. — Жовт. — Т. 29, № 4. — С. 517. — DOI: 10.2307/1911802.
76. *Mandelbrot B.* The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income // *International Economic Review*. — 1960. — Трав. — Т. 1, № 2. — С. 79. — DOI: 10.2307/2525289.
77. *Mandelbrot B.* The Stable Paretian Income Distribution when the Apparent Exponent is Near Two // *International Economic Review*. — 1963. — Січ. — Т. 4, № 1. — С. 111. — DOI: 10.2307/2525463.
78. *Mandelbrot B.* The Variation of Certain Speculative Prices // *The Journal of Business*. — 1963. — Січ. — Т. 36, № 4. — С. 394. — DOI: 10.1086/294632.
79. *Mandelbrot B.* The Variation of Some Other Speculative Prices // *The Journal of Business*. — 1967. — Січ. — Т. 40, № 4. — С. 393. — DOI: 10.1086/295006.
80. *Mandelbrot B. B.* New methods in statistical economics // *Fractals and Scaling in Finance*. — Springer New York, 1997. — С. 79—104. — DOI: 10.1007/978-1-4757-2763-0\_3.
81. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* Introduction to Econophysics. — Cambridge University Press, 11.1999. — DOI: 10.1017/cbo9780511755767.

82. *Mantegna R. N.* Presentation of the English translation of Ettore Majorana's paper: The value of statistical laws in physics and social sciences // *Quantitative Finance*. — 2005. — Т. 5, № 2. — С. 133—140. — DOI: 10.1080/14697680500148174.
83. *Marwan N.* A historical review of recurrence plots // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2008. — ЖОВТ. — Т. 164, № 1. — С. 3—12. — DOI: 10.1140/epjst/e2008-00829-1.
84. *Marwan N.* Commandline Recurrence Plots. — 2016. — URL: <http://tocsy.pik-potsdam.de/commandline-rp.php>.
85. *Marwan N.* Cross recurrence plot toolbox 5.20 (R30.5). — 2016. — URL: <http://tocsy.pik-potsdam.de/CRPtoolbox/>.
86. *Marwan N.* How to avoid potential pitfalls in recurrence plot based data analysis // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2011. — КВІТ. — Т. 21, № 04. — С. 1003—1017. — DOI: 10.1142/s0218127411029008.
87. *Marwan N., Kurths J.* Line structures in recurrence plots // *Physics Letters A*. — 2005. — БЕР. — Т. 336, № 4/5. — С. 349—357. — DOI: 10.1016/j.physleta.2004.12.056.
88. *Marwan N., Kurths J.* Nonlinear analysis of bivariate data with cross recurrence plots // *Physics Letters A*. — 2002. — БЕР. — Т. 302, № 5/6. — С. 299—307. — DOI: 10.1016/s0375-9601(02)01170-2.
89. *Marwan N., Schinkel S., Kurths J.* Recurrence plots 25 years later — Gaining confidence in dynamical transitions // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2013. — СІЧ. — Т. 101, № 2. — С. 20007. — DOI: 10.1209/0295-5075/101/20007.
90. *Maslov V. P., Nazaikinskii V. E.* Mathematics underlying the 2008 financial crisis, and a possible remedy. — 2008. — URL: <https://arxiv.org/abs/0811.4678>.
91. *Massively Parallel Analysis of Similarity Matrices on Heterogeneous Hardware / T. Rawald [та ін.] //*. — С. 56—62. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1330/#paper-11>.

92. *McFarland D. J., Sarnacki W. A., Wolpaw J. R.* Electroencephalographic (EEG) control of three-dimensional movement // *Journal of Neural Engineering*. — 2010. — Трав. — Т. 7, № 3. — С. 036007. — DOI: 10.1088/1741-2560/7/3/036007.
93. *McKenzie M. D.* Chaotic behavior in national stock market indices // *Global Finance Journal*. — 2001. — Бер. — Т. 12, № 1. — С. 35–53. — DOI: 10.1016/s1044-0283(01)00024-2.
94. *Medvinsky A. B., Rusakov A. V., Nurieva N. I.* Integer-based modeling of population dynamics: Competition between attractors limits predictability // *Ecological Complexity*. — 2013. — Черв. — Т. 14. — С. 108–116. — DOI: 10.1016/j.ecocom.2012.05.005.
95. *Moloney K., Raghavendra S.* Examining the dynamical transition in the Dow Jones Industrial Index from Bull to Bear market using Recurrence Quantification Analysis. — 2016. — URL: <https://aran.library.nuigalway.ie/bitstream/handle/10379/3063/Examining%20the%20dynamical%20transition%20in%20the%20Dow.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
96. Multiscale characteristics of the emerging global cryptocurrency market / *M. Wątopek [та ін.]* // *Physics Reports*. — 2021. — Бер. — Т. 901. — С. 1–82. — DOI: 10.1016/j.physrep.2020.10.005.
97. Multivariate recurrence plots / *M. C. Romano [та ін.]* // *Physics Letters A*. — 2004. — Бер. — Т. 330, № 3/4. — С. 214–223. — DOI: 10.1016/j.physleta.2004.07.066.
98. *Nadarajah S., Zhang B., Chan S.* Estimation methods for expected shortfall // *Quantitative Finance*. — 2013. — Лип. — Т. 14, № 2. — С. 271–291. — DOI: 10.1080/14697688.2013.816767.
99. *Nakamoto S.* Bitcoin Open Source Implementation of P2P Currency. — 2009. — URL: <https://satoshi.nakamotoinstitute.org/posts/p2pfoundation/2/>.
100. *Nakamoto S.* Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. — 2008. — URL: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.

101. *Narayanan A., Clark J.* Bitcoin's Academic Pedigree // Queue. — 2017. — Серп. — Т. 15, № 4. — С. 20—49. — DOI: 10.1145/3134434.3136559.
102. *Ormerod P.* Ten years after “Worrying trends in econophysics”: developments and current challenges // The European Physical Journal Special Topics. — 2016. — Груд. — Т. 225, № 17/18. — С. 3281—3291. — DOI: 10.1140/epjst/e2016-60126-7.
103. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. — Cambridge University Press, 08.2002. — DOI: 10.1017/cbo9780511803260.
104. *Pal N., Samanta S., Chattopadhyay J.* Revisited Hastings and Powell model with omnivory and predator switching // Chaos, Solitons & Fractals. — 2014. — Бep. — Т. 66. — С. 58—73. — DOI: 10.1016/j.chaos.2014.05.003.
105. *Panja P., Mondal S. K., Jana D. K.* Effects of toxicants on Phytoplankton-Zooplankton-Fish dynamics and harvesting // Chaos, Solitons & Fractals. — 2017. — Листоп. — Т. 104. — С. 389—399. — DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.036.
106. *Peacock-Lopez E.* Ecological Model of competitive species and the role of intraspecies interaction in the formation of spatio-temporal patterns // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2004. — Січ. — Т. 1. — С. 76—81.
107. *Pele D., Mazurencu-Marinescu-Pele M.* Using High-Frequency Entropy to Forecast Bitcoin's Daily Value at Risk // Entropy. — 2019. — Січ. — Т. 21, № 2. — С. 102. — DOI: 10.3390/e21020102.
108. *Peters E. E.* Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. — Wiley, 1994. — (Wiley Finance). — ISBN 978-0-471-58524-4.
109. *Phillip A., Chan J. S., Peiris S.* A new look at Cryptocurrencies // Economics Letters. — 2018. — Лют. — Т. 163. — С. 6—9. — DOI: 10.1016/j.econlet.2017.11.020.
110. *Pilkington M.* Bitcoin through the lenses of complexity theory. — DOI: 10.4337/9781784719005.00035.



111. *Piskun O., Piskun S.* Recurrence Quantification Analysis of Financial Market Crashes and Crises. — 2011. — URL: <https://arxiv.org/abs/1107.5420>.
112. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // *Acta mathematica*. — 1890. — Т. 13. — С. 1—270.
113. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Серп. — Т. 66, вып. 2. — С. 026215. — DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215.
114. Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong / X. Sun [та ін.] // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2001. — Груд. — Т. 301, № 1—4. — С. 473—482. — DOI: 10.1016/s0378-4371(01)00433-2.
115. Price Behavior // *Econometrica*. — 1970. — Т. 38, № 4. — С. 122—124. — ISSN 00129682, 14680262. — URL: <http://www.jstor.org/stable/1911596> (дата зверн. 28.11.2022).
116. *Rajković M.* Extracting meaningful information from financial data // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2000. — Груд. — Т. 287, № 3/4. — С. 383—395. — DOI: 10.1016/s0378-4371(00)00377-0.
117. *Rawald T.* Scalable and Efficient Analysis of Large High-Dimensional Data Sets in the Context of Recurrence Analysis : PhD dissertation / Rawald Tobias. — Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, 2018. — С. 299. — DOI: 10.18452/18797.
118. *Rawald T., Sips M., Marwan N.* PyRQA—Conducting recurrence quantification analysis on very long time series efficiently // *Computers & Geosciences*. — 2017. — Лип. — Т. 104. — С. 101—108. — DOI: 10.1016/j.cageo.2016.11.016.
119. Recurrence plots for the analysis of complex systems / N. Marwan [та ін.] // *Physics Reports*. — 2007. — Січ. — Т. 438, № 5/6. — С. 237—329. — DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.

120. Recurrence Quantification Analysis / за ред. С. L. Webber, N. Marwan. — Springer International Publishing, 2015. — DOI: 10.1007/978-3-319-07155-8.
121. *Robinson G., Thiel M.* Recurrences determine the dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2009. — Черв. — Т. 19, № 2. — С. 023104. — DOI: 10.1063/1.3117151.
122. *Saptsin V., Soloviev V.* Relativistic quantum econophysics - new paradigms in complex systems modelling. — 2009. — URL: <https://arxiv.org/abs/0907.1142>.
123. *Sasikumar A., Kamaiah B.* A Complex Dynamical Analysis of the Indian Stock Market // *Economics Research International*. — 2014. — Груд. — Т. 2014. — С. 1–6. — DOI: 10.1155/2014/807580.
124. *Schaden M.* Quantum finance // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2002. — Груд. — Т. 316, № 1–4. — С. 511–538. — DOI: 10.1016/s0378-4371(02)01200-1.
125. *Scheinkman J. A., LeBaron B.* Nonlinear Dynamics and Stock Returns // *The Journal of Business*. — 1989. — Січ. — Т. 62, № 3. — С. 311. — DOI: 10.1086/296465.
126. *Schinckus C.* A Methodological Call for a Quantum Econophysics // *Quantum Interaction*. — Springer Berlin Heidelberg, 2014. — С. 308–316. — DOI: 10.1007/978-3-642-54943-4\_28.
127. *Serletis A., Gogas P.* Chaos in East European black market exchange rates // *Research in Economics*. — 1997. — Груд. — Т. 51, № 4. — С. 359–385. — DOI: 10.1006/reec.1997.0050.
128. *Soloviev V., Belinskij A.* Methods of nonlinear dynamics and the construction of cryptocurrency crisis phenomena precursors // *CEUR Workshop Proceedings / за ред. V. Ermolayev [та ін.]*. — 2018. — Т. 2104. — С. 116–127. — URL: [https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper\\_175.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_175.pdf).
129. *Soloviev V., Saptsin V.* Heisenberg uncertainty principle and economic analogues of basic physical quantities. — 2011. — URL: <https://arxiv.org/abs/1111.5289>.

130. *Soloviev V. N., Belinskiy A.* Complex Systems Theory and Crashes of Cryptocurrency Market // Communications in Computer and Information Science / за ред. V. Yakovyna [та ін.]. — 2019. — Т. 1007. — С. 276—297. — DOI: 10.1007/978-3-030-13929-2\_14.
131. *Sornette D.* Nurturing breakthroughs: lessons from complexity theory // Journal of Economic Interaction and Coordination. — 2008. — Київ. — Т. 3, № 2. — С. 165—181. — DOI: 10.1007/s11403-008-0040-8.
132. *Sornette D.* Fundamentals of Financial Markets // Why Stock Markets Crash. — Princeton University Press, 03.2017. — DOI: 10.23943/princeton/9780691175959.003.0002.
133. *Sornette D.* Physics and financial economics (1776–2014): puzzles, Ising and agent-based models // Reports on Progress in Physics. — 2014. — Трав. — Т. 77, № 6. — С. 062001. — DOI: 10.1088/0034-4885/77/6/062001.
134. *Sornette D., Cauwels P.* Financial Bubbles: Mechanisms and Diagnostics // Review of Behavioral Economics. — 2015. — Жовт. — Т. 2, № 3. — С. 279—305. — DOI: 10.1561/105.00000035.
135. *Stone J. E., Gohara D., Shi G.* OpenCL: A Parallel Programming Standard for Heterogeneous Computing Systems // Computing in Science & Engineering. — 2010. — Трав. — Т. 12, № 3. — С. 66—73. — DOI: 10.1109/mcse.2010.69.
136. *Symitsi E., Chalvatzis K. J.* Return, volatility and shock spillovers of Bitcoin with energy and technology companies // Economics Letters. — 2018. — Бep. — Т. 170. — С. 127—130. — DOI: 10.1016/j.econlet.2018.06.012.
137. *Szabo N.* Bit gold. — 2008. — URL: <https://unenumerated.blogspot.com/2005/12/bit-gold.html>.
138. *Takaishi T.* Statistical properties and multifractality of Bitcoin // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2018. — Бep. — Т. 506. — С. 507—519. — DOI: 10.1016/j.physa.2018.04.046.

139. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 1981. — С. 366—381. — DOI: 10.1007/bfb0091924.
140. Testing for asymmetric nonlinear short- and long-run relationships between bitcoin, aggregate commodity and gold prices / E. Bouri [та ін.] // Resources Policy. — 2018. — Серп. — Т. 57. — С. 224—235. — DOI: 10.1016/j.resourpol.2018.03.008.
141. The behaviour of some UK equity indices: An application of Hurst and BDS tests / K. K. Opong [та ін.] // Journal of Empirical Finance. — 1999. — Бер. — Т. 6, № 3. — С. 267—282. — DOI: 10.1016/s0927-5398(99)00004-3.
142. *Theiler J.* Estimating fractal dimension // Journal of the Optical Society of America A. — 1990. — Черв. — Т. 7, № 6. — С. 1055. — DOI: 10.1364/josaa.7.001055.
143. *Thurner S., Klimek P., Hanel R.* Introduction to the Theory of Complex Systems. — Oxford University Press, 11.2018. — DOI: 10.1093/oso/9780198821939.001.0001.
144. Unified functional network and nonlinear time series analysis for complex systems science: The pyunicorn package / J. F. Donges [та ін.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Листоп. — Т. 25, № 11. — С. 113101. — DOI: 10.1063/1.4934554.
145. *Urquhart A.* The inefficiency of Bitcoin // Economics Letters. — 2016. — Т. 148. — С. 80—82. — ISSN 0165-1765. — DOI: 10.1016/j.econlet.2016.09.019.
146. *Walther T., Klein T., Bouri E.* Exogenous drivers of Bitcoin and Cryptocurrency volatility – A mixed data sampling approach to forecasting // Journal of International Financial Markets, Institutions and Money. — 2019. — Т. 63. — С. 101133. — ISSN 1042-4431. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.intfin.2019.101133>.
147. *Webber C. L., Zbilut J. P.* Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies // Journal of Applied Physi-

- ology. — 1994. — Лют. — Т. 76, № 2. — С. 965—973. — DOI: 10.1152/jappl.1994.76.2.965.
148. *Al-Yahyaee K. H., Mensi W., Yoon S.-M.* Efficiency, multifractality, and the long-memory property of the Bitcoin market: A comparative analysis with stock, currency, and gold markets // *Finance Research Letters*. — 2018. — Груд. — Т. 27. — С. 228—234. — DOI: 10.1016/j.frl.2018.03.017.
149. *Yin T., Wang Y.* Nonlinear analysis and prediction of bitcoin return's volatility // *E+M Ekonomie a Management*. — 2022. — Черв. — Т. 25, № 2. — С. 102—117. — DOI: 10.15240/tul/001/2022-2-007.
150. *Zbilut J. P., Giuliani A., Webber C. L.* Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross-recurrence quantification // *Physics Letters A*. — 1998. — Бep. — Т. 246, № 1/2. — С. 122—128. — DOI: 10.1016/s0375-9601(98)00457-5.
151. *Zbilut J. P., Webber C. L.* Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots // *Physics Letters A*. — 1992. — Груд. — Т. 171, № 3/4. — С. 199—203. — DOI: 10.1016/0375-9601(92)90426-m.
152. *Zbilut J. P., Webber C. L.* Recurrence quantification analysis: Introduction and historical context // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2007. — Жовт. — Т. 17, № 10. — С. 3477—3481. — DOI: 10.1142/s0218127407019238.