

**В. М. ЗДЕЩИЦ, А. В. ЗДЕЩИЦ**

**ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВУОД  
В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ  
В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ  
СТУДЕНТІВ-ФІЗИКІВ**



2022

**УДК 373.5.016 : 53**

**З 46**

**Здешиц В. М., Здешиц А. В.**

**З 46** Використання технології BYOD в освітньому процесі в умовах дистанційного навчання студентів-фізиків: навч. посібник. Кривий Ріг: Вид. Літерія, 2022. – 185 с.

Розв'язується проблема забезпечення навчальних закладів сучасним вимірювальним обладнанням. Розглянута методика проведення дистанційних лабораторних робіт з фізики, яка використовує саморобні дослідницькі установки у поєднанні з технологією BYOD.

Посібник призначено для студентів-фізиків педагогічних ВНЗ.

Ключові слова: фізичний експеримент, лабораторні роботи, технології BYOD, параметри фізичних процесів.

© Здешиц В. М., Здешиц А. В., 2022

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ФІЗИКИ.....	6
1. 1. Режим уповільненого відео з мобільного телефону. Вимірювання гравітаційного прискорення.....	7
1. 2. Використання мобільних додатків і датчиків як засобів навчального фізичного експерименту.....	9
1. 3. Визначення положення датчика магнітного поля у смартфоні.....	16
1. 4. Дослідження поля лінійного магнітного диполя та квадруполя.....	21
Теоретичні відомості.....	21
Визначення залежності величини індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту вздовж його осі.....	23
Визначення залежності величини індукції магнітного поля від відстані до лінійного магнітного квадруполя вздовж його осі.....	27
1. 5. Реєстрація параметрів коливального руху маятників.....	35
Визначення маси Землі за допомогою математичного маятника.....	35
Дослідне вивчення властивостей математичного маятника.....	37
Визначення періоду коливань математичного маятника за допомогою магнітного датчика смартфона.....	41
Дослідження обертання залізної кулі навколо своєї осі.....	44
Використання камери смартфона у режимі “slow motion ” для визначення періоду коливань математичного маятника.....	49
Використання акселерометра смартфона для визначення періоду коливань математичного маятника.....	51
Використання датчика освітленості для визначення періоду коливань математичного маятника.....	52

1.6. Визначення моменту інерції смартфона.....	54
1.7. Вимірювання швидкості розповсюдження звуку за допомогою смартфонів.....	59
1.8. Використання вбудованого у смартфон мікрофону і навушників. Аудиометричний тест зі смартфоном.....	63
Розділ 2. ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВUOD ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ.....	75
2.1. Визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини методом відриву краплі.....	77
2.2. Визначення коефіцієнту поверхневого натягу методом важеля.....	80
2.3. Вимірювання величини сили відриву поверхні плоского тіла від рідини методом важеля.....	83
2.4. Перевірка рівняння Бернуллі.....	97
2.5. Визначення витрат і швидкості витікання води із отвору в боковій стінці посудини.....	103
2.6. Визначення в'язкості, середньої довжини вільного пробігу та ефективного діаметру молекул повітря.....	113
2.7. Дослідження параметрів самохідної системи, яка рухається проти сили тяжіння.....	120
2.8. Гравітаційні коливання рідини в трубці.....	131
2.9. Визначення величини коефіцієнта відновлення при зіткненні тіл: Перевірка гіпотези Ньютона.....	137
2.10. Хто виграє перегони: дослідження законів руху тіл з тертям ковзання та кочення.....	151
2.11. Слідство у справі "Пізанська вежа".....	159
2.12. Лабораторна робота "Петльовий маятник".....	172

## ВСТУП

Сьогодні зі стрімким розвитком мобільних додатків в освітньому процесі набувають актуальності технології BYOD (Bring your own devices) – технології, при яких на заняттях використовується обладнання, яке є «в кармані» сучасного студента, а саме, власні смартфони, планшети тощо. Це дає змогу розв'язати декілька важливих освітніх проблем, зокрема – проблему забезпечення навчальних закладів сучасним вимірювальним обладнанням, яке, за рахунок постійного розвитку мобільних додатків, значно розширює межі навчального процесу.

Технологія BYOD стає максимально ефективною, якщо всі учні забезпечені дослідницькими установками. Особливо це важко забезпечити в умовах дистанційного навчання. Для розв'язання цієї проблеми необхідно розробити лабораторні установки, які кожен студент може самотужки виготовити. Як приклад реалізації цього принципу в даній роботі розглядаються фізичні установки і методика проведення багатьох лабораторних робіт з використанням технології BYOD.

## **ВИКОРИСТАННЯ СМАРТФОНІВ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ФІЗИКИ**

Відомо, що студенти легше усвідомлюють наукові поняття, коли вони безпосередньо беруть участь у навчанні через лабораторні експерименти або інші практичні заняття. Практичне чи експериментальне навчання також допомагає студентам усвідомити наукову теорію. Одним із способів залучення студентів до курсу класичної фізики є використання смартфонів для перевірки чи ілюстрування різноманітних концепцій, висвітлених у лекціях. Смартфони все частіше використовуються у вищих навчальних закладах під час вивчення механіки, (Vogt&Kuhn, 2012; Madani, Ledenmat, Bsiesy &Chevrier, 2013), акустики (Hirth, Kuhn&Müller, 2015), термодинаміки (Vieyra, Vieyra&Macchia, 2017), оскільки вони надають унікальний спосіб проведення простого наукового експерименту. Сенсори смартфонів дозволяють вимірювати прискорення, тиск, освітленість, магнітні поля, нахил поверхні, величину шуму, його спектр. Смартфон можна використовувати як джерело світла, звука. Крім цього, у смартфонів є опція *slow motion*, яка дозволяє реєструвати фізичні процеси у сповільненому темпі. Наприклад, у смартфона Huawei p20 Pro є можливість реєструвати фізичні процеси зі швидкістю 960 кадрів в секунду.

Мета цієї книги - показати, що смартфон є потужним інструментом, який збільшує можливості навчання, а саме: робить лабораторну практику не надто складною; надає можливість проводити досліди як в лабораторії, так й дистанційно. Крім цього, практика повинна бути науково точною, включати підгонку (апроксимацію даних) з використанням методу найменших квадратів, визначення за його допомогою похибки вимірювань.

## 1.1. Режим уповільненого відео з мобільного телефону. Вимірювання гравітаційного прискорення

Простим, але фундаментальним досвідом кінематики є вимірювання рівноприскореного руху падаючого тіла поблизу поверхні Землі. Щоб відтворити цей експеримент, студентам пропонується визначити положення невеликої маси, що падає з висоти приблизно 1 м, як функцію часу. Це може бути металева сфера, скляна кулька або навіть гумовий м'яч. Єдиним обмеженням є незначний опір повітря. Використовуючи отримані дані, можна перевірити, що швидкість тіла збільшується лінійно в часі, і обчислити прискорення сили тяжіння  $g$ . Однак це важке завдання через високе значення  $g$ -прискорення ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), що не дозволяє неозброєним оком сприйняти лінійне збільшення швидкості та зафіксувати його. Тому ми стикаємося з питанням, як «зменшити» прискорення, щоб його можна було виміряти.

Традиційне рішення, вперше використане Галілеєм, полягає у використанні похилої площини. Зараз вільне падіння тіла у вертикальному напрямку студент може зареєструвати використавши функцію сповільненої зйомки смартфона. Це дещо еквівалентно зменшенню значення  $g$ .

Стандартне відео складається з послідовності зображень, отриманих зі швидкістю 30 кадрів в секунду. Функція сповільненої зйомки, яка зараз доступна в ряді смартфонів, дозволяє знімати відео зі швидкістю від 120 до 960 кадрів в секунду. Наприклад, час сканування зображень становить приблизно кожні 4,2 мс для відео, яке знімають зі швидкістю 240 кадрів в секунду. Це відповідає необхідної точності для вимірювання прискорення вільного падіння  $g$ .

Експеримент складається з розмітки аркушів паперу рівними мітками (10 см — розумна відстань) та підвішування їх на стіну за допомогою скотча або встановлення вертикально метрової лінійки біля стіни (рис. 1). Потім відеокамеру смартфона вмикають в режимі сповільненої зйомки, підвішують

тіло перед позначеною стіною і відпускають його, як показано на рис. 1 Використовуючи програму (наприклад, Tracker або TT Video lite для iOS, KineMaster для Android) для уповільненого відтворення відео, можна відчуті збільшення швидкості під час падіння тіла та зафіксувати його положення і час з достатньою точністю.



Рис. 1. Кадри уповільненого відео вільно падаючої металевої кулі, знятого за допомогою мобільного телефону

З отриманого набору даних студент може отримати швидкість як функцію часу, обчислену як  $s/t$ , яка потім використовується для підготовки графіка, як на рис. 2, де показано експериментальні точки та лінію тренду. Лінійна підгонка до даних дозволяє отримати значення  $g$  із нахилу інтерполяційної лінії.

Інший спосіб отримання експериментальних даних полягає в уповільненій з'йомці падіння тіла на фоні лінійки та секундоміра, який реєструє



час з точністю 1 мілісекунда (використовується мобільний додаток “Секундомір”). Для цього способу потрібно залучити ще один смартфон.

Значення  $g$  можна отримати безпосередньо з часу падіння та вихідної висоти тіла.

Таким чином, студенти можуть обчислити величину  $g$  двома способами і критично порівняти ці два значення.

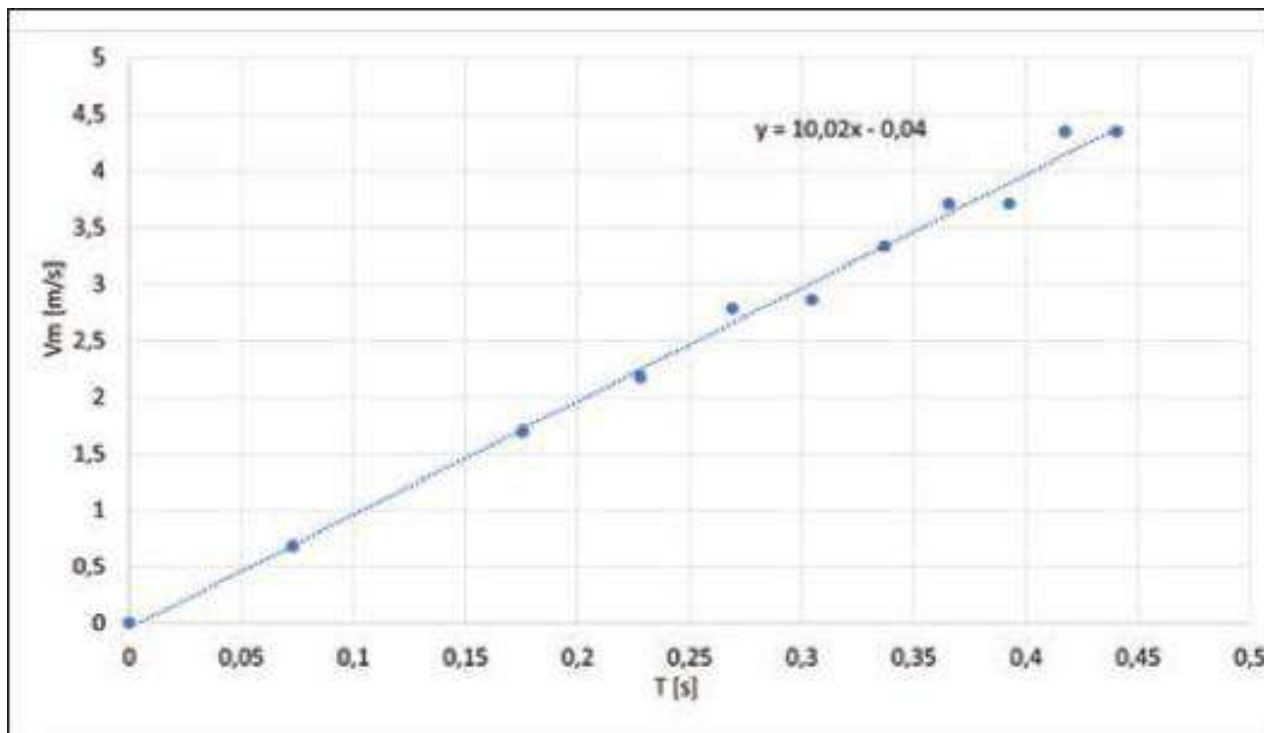


Рис. 2. Графік швидкості тіла, обчисленої з положення та часу, отриманих під час падіння. Нахил інтерполяційної лінії дає значення прискорення  $g$

Відносна невизначеність  $g$  в основному зумовлена невизначеністю нахилу інтерполяційної лінії. Така невизначеність, залежно від частоти кадрів мобільного телефону, може бути менше 5%. Студенти також повинні звернути увагу на систематичні помилки, і, зокрема, на помилки через паралакс, який є ефектом, при якому положення тіла виглядає відмінним від реального, оскільки воно розглядається під кутом від нормалі до площини падіння. Вплив цього ефекту зменшується, якщо висхідна висота падіння тіла зменшується.

## 1.2. Використання мобільних додатків і датчиків як засобів навчального фізичного експерименту

Для проведення експериментальних досліджень з фізики у сучасних смартфонах є багато датчиків, розроблені відповідні мобільні додатки. Розглянемо окремі датчики, мобільні додатки та їх дидактичні можливості для проведення фізичних досліджень. Поряд з акселерометром, гіроскопом і деякими іншими сенсорами у смартфонах може бути вмонтований датчик-барометр. Перед виконанням експерименту необхідно з'ясувати чи є цей датчик у конкретному мобільному пристрою. Цей датчик придатний для вимірювання атмосферного тиску. Для пристроїв з таким датчиком передбачено низку додатків, які дозволяють не лише вимірювати атмосферний тиск, але й аналізувати виміри, будувати графіки по днях і по годинах та прогнозувати зміни погоди. Додаток «Барометр» можна використовувати при вимірюванні тиску, а також як альтиметр (висотомір) (рис. 1).



Рис. 1. Інтерфейс додатку «Барометр»

Інші додатки, які можна використовувати в навчальних цілях на уроках фізики – Physics Toolbox Sensor Suite та Phyphox. Це дуже зручні додатки, які містять у собі можливість вимірювання параметрів фізичних полів за

допомогою датчиків смартфона: гіроскопу, магнітометру, датчика освітленості, барометру, акселерометру, надають можливість фіксувати результати, подавати їх у графічному вигляді, а також зберігати та поширювати результати експериментів (рис. 2).

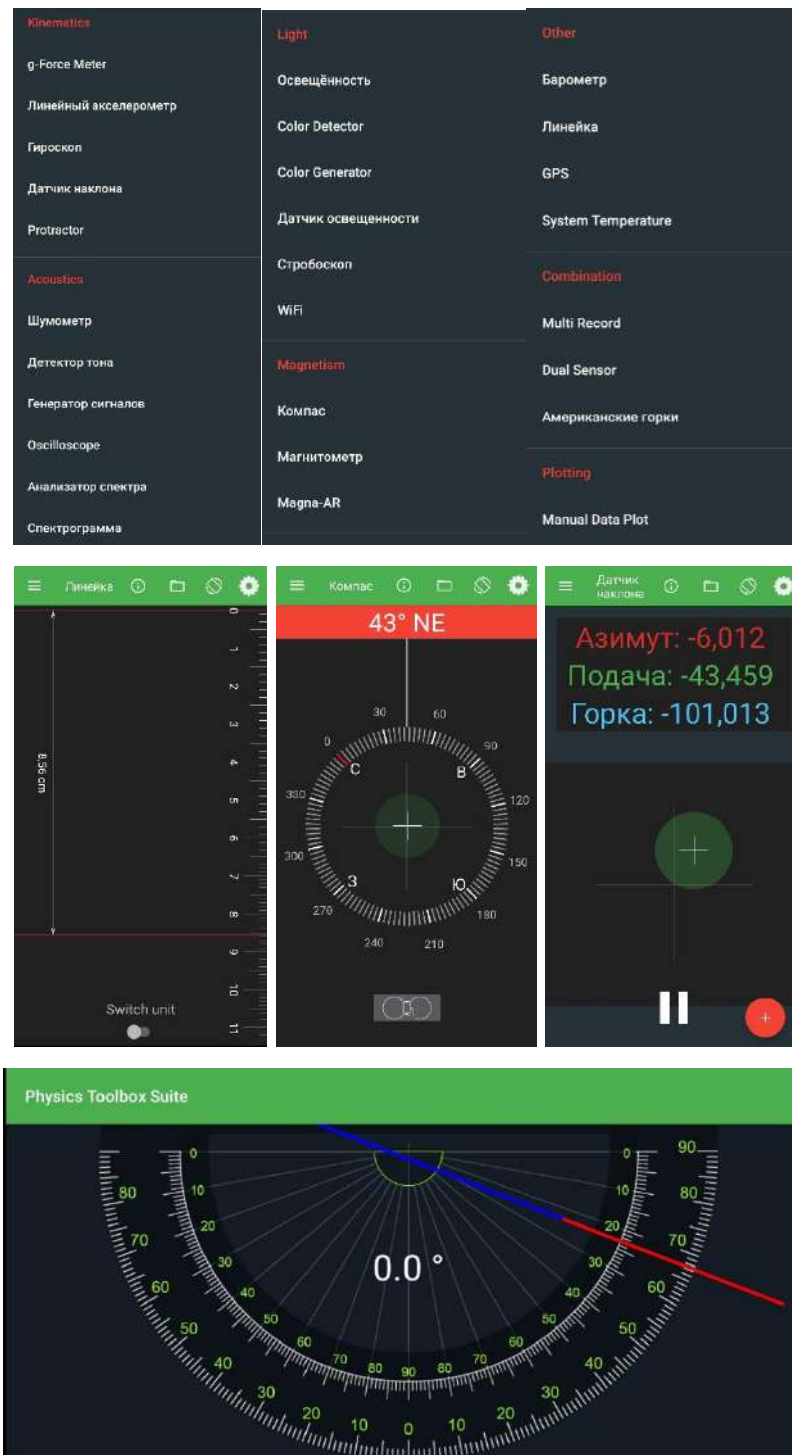


Рис. 2. Вимірювальні інструменти додатку Physics Toolbox Sensor Suite: лінійка, компас, датчик нахилу, транспортер

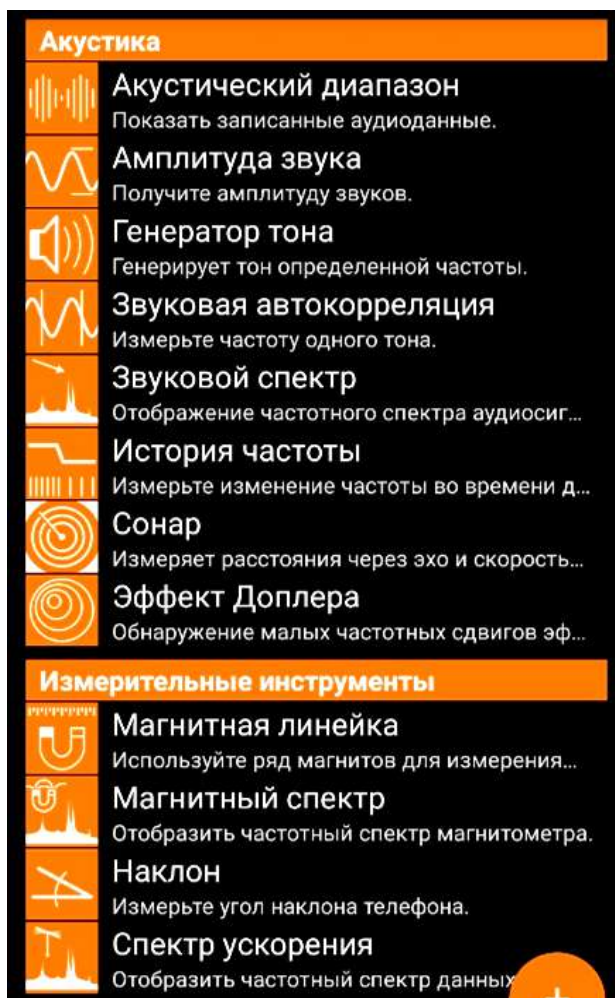
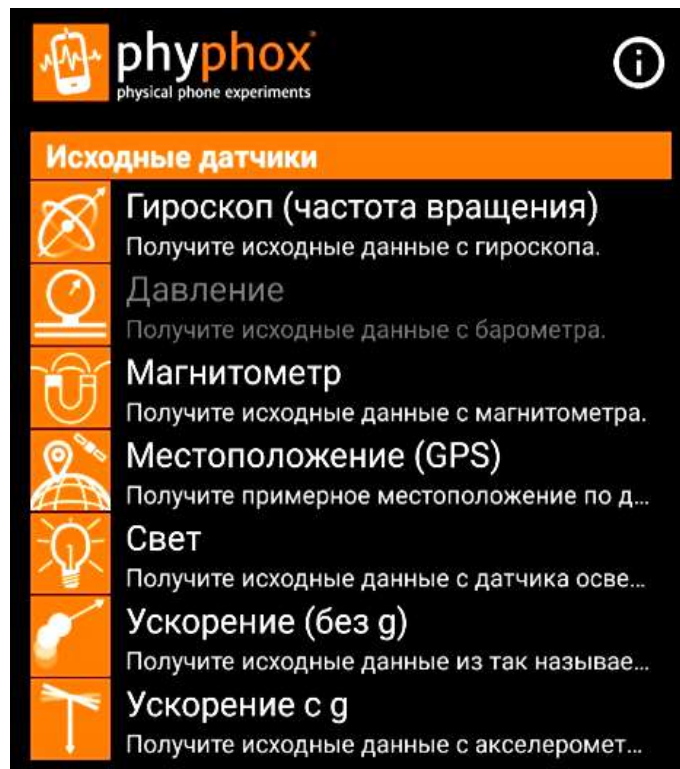


Рис. 3. Вимірювальні інструменти додатку Phyphox

Так, датчик-магнітометр вимірює силу магнітного поля уздовж осей  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ , а також магнітні властивості матеріалів. Використовувати такі датчики можна при дослідженнях магнітного поля та коливаннях його напруженості.

Датчик освітленості можна використати для дослідження рівня освітленості приміщення.

Узагальнюючи вищезазначене, приходимо до висновку, що мобільний пристрій може стати повсякденним інструментом для навчання, оскільки допомагає у проведенні навчального дослідження як в школі, так і за межами класу.

## Список літератури

1. Биков В.Ю. Мобільний простір і мобільно орієнтоване середовище інтернет-користувача: особливості модельного подання та освітнього застосування. Інформаційні технології в освіті. 2013. № 17. С.9-37.
2. Використання мобільних додатків для проведення навчальних досліджень [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://timso.koippo.kr.ua/skripka/vykorystannya-mobilnyh-dodatktiv-dlyaprovedennya-navchalnyh-doslidzhen/>.
3. Голицына И.Н. Мобильное обучение как новая технология в образовании. 2009 [Електронний ресурс] / И.Н. Голицына, Н.Л. Половникова.– Режим доступу до ресурсу: [http://library.istu.edu/bulletin/art\\_tech\\_2009\\_05.pdf](http://library.istu.edu/bulletin/art_tech_2009_05.pdf).
4. Дендев Б. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: монография / под ред.: Б. Дендева. М.: ИИТО ЮНЕСКО.
5. Заболотний В.Ф., Мисліцька Н.А., Слободянюк І.Ю. Хмаро орієнтовані технології навчання: навчально-методичний посібник. Вінниця: ТОВ «Нілан - ЛТД», 2020.144с.
6. Золотарьова І. О., Труш А.М. Застосування мобільного навчання в системі освіти // Системи обробки інформації. 2015. Вип. 4. С. 147-150.
7. Колесникова О.А., Мисліцька Н.А., Семенюк Д.С. Використання технології BYOD для формування експериментальних знань та умінь учнів з фізики: Науковий журнал: Фізико-математична освіта, випуск 2(20); (Суми) – 2019.
8. Мисліцька Н.А., Семенюк Д.С., Колесникова О.А. Мобільне навчання в системі сучасних методичних підходів до організації і проведення учнями фізичних досліджень: Наукові записки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. 31 Серія: Педагогічні науки №183 (2019).[Електронний ресурс] // Режим доступу:<https://www.cuspu.edu.ua/ua/ix-mizhнародna-naukovo-praktychnaonlain->

internet-konferentsiia-problemy-ta-innovatsii-v-pryrodnychomatematychnii-  
tekhnologichnii-i-profesiinii-osviti/sektsiia-3

9. Проводимо опитування всього класу за 30 секунд за допомогою Plickers [Електронний ресурс] // Режим доступу.- <http://phys.ipro.kubg.edu.ua/wpcontent/uploads/2016/12/Plickers.pdf>

10. Рашевська Н.В. Мобільні інформаційно-комунікаційні технології навчання вищої математики студентів вищих технічних навчальних закладів: автореф. дис...д-ра пед.наук: 13.00.10 /Київ, 2011. 21 с.

11. Рекомендації по політиці мобільного навчання [Електронний ресурс] //UNESCO.2015.–Режим доступу: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/igo/>

12. Сальник І.В. Мобільні пристрої та сучасне освітнє програмне забезпечення у навчанні фізики в закладах загальної середньої освіти: Інформаційні технології і засоби навчання, 2019, Том 73, №5.

13. Семенюк Д., Колесникова О., Нестерчук С. Використання технології BYOD під час вивчення фізики: Матеріали ІХ Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції «Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті». [Електронний ресурс] // Режим доступу:<https://www.cuspu.edu.ua/ua/ixmizhнародna-naukovo-praktychna-onlain-internet-konferentsiia-problemy-tainnovatsii-v-pryrodnycho-matematychnii-tekhnologichnii-i-profesiiniiiosviti/sektsiia-3?start=5> 32

14. Терещук С.І. Технологія мобільного навчання: проблеми та шляхи вирішення. ВісникЧернігівськогонаціональногопедагогічногоуніверситету . Серія: Педагогічні науки. 2016. Вип. 138. С. 178-180.

15. Traxler J. Defining, Discussing, and Evaluating Mobile Learning: The moving finger writes and having writ... / J. Traxler // International Review of Research in Open and Distance Learning. – 2007. – June. Volume 8. – Number 2.

16. Додатки Smart Tool Kit, Sensors.

### 1. 3. Визначення положення датчика магнітного поля у смартфоні

**Мета.** Визначити місцезнаходження датчика магнітного поля у смартфоні.

**Прилади й матеріали.** Невеликий магніт, смартфон з додатком Phyphox або Physics Toolbox Sensor Suite, лінійка (рулетка), папір з сіткою 5 мм.

#### Теорія та технічна інформація

Розміщення деяких датчиків смартфона на електричній платі наведено на рис. 1. Визначимо місцезнаходження датчика магнітного поля у смартфоні.

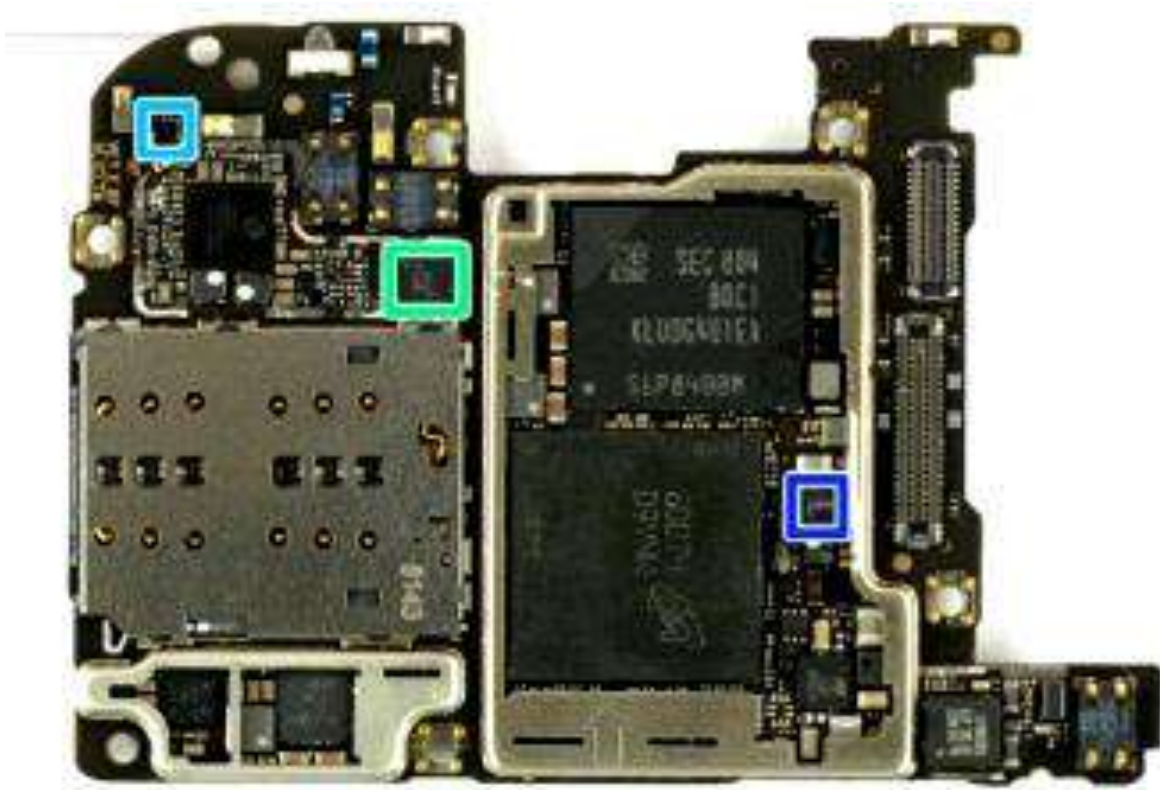


Рис. 1. Розміщення датчиків у смартфоні Huawei P20 Pro. Зеленим коліром помічено акселерометр / гіроскоп LSM 6DSM, блакитним – магнітний датчик AK 09918 C



Для вимірювання трьох просторових компонент магнітного поля на смартфоні потрібно встановити додаток. З усіх програм, що дозволяють проводити ці вимірювання в Інтернеті, ми рекомендуємо додаток Magnetometer для iOS та додаток Physics Toolbox Sensor Suite від Vieyra Software або Phyphox для смартфонів з операційною системою Android. На рис. 1 показано орієнтацію просторових осей на смартфоні.

Осі можна визначити за допомогою технології, яка полягає у наближенні невеликого магніту до датчика телефону з різних напрямків та визначенням максимального значення компонента магнітного поля. Нарешті, отримання даних завершується наступним чином. Смартфон розміщується на аркуші паперу, де малюємо відповідні осі  $x$  та  $y$  телефону, що проходять через датчик магнітного поля. За допомогою опції “Компас” додатку Physics Toolbox Sensor Suite вісь  $y$  орієнтуємо на географічну північ, щоб уникнути фону магнітного поля, що надходить від земного магнітного поля (рис. 2). Якщо неможливо точно компенсувати цей фон, його віднімаємо з даних вимірювань.

### **Виконання роботи**

Всі вимірювання дуже чутливі до наявності поблизу металу. Тому важливо переконатися, що в робочому середовищі немає інших джерел магнітних перешкод (залізо, сталь, наприклад, у столі; електричні кабелі тощо). Бажано перевести смартфон в режим польоту.

Оскільки смартфони містять немагнітні носії інформації, маленькі магніти в принципі не можуть пошкодити пристрій. Дуже сильні магнітні поля можуть пошкодити механічні частини смартфона (наприклад, гучномовці). Може статися, що датчик магнітного поля смартфона перекалібрується, якщо вимірює надзвичайно сильне поле. Якщо вимірювання здається безглуздим, перекалібруйте пристрій, похитуючи його вперед-назад у формі вісімки.

1) Переведіть свій смартфон у режим польоту та запустіть програму магнітометра. Помістіть смартфон на плоску немагнітну поверхню (наприклад, дерев'яний стіл або підлогу). Перевірте, чи ви не магнітні. Чи змінюються покази дисплея під час вашого руху? Чи впливають ваші окуляри, кулькова ручка, пряжка ременя тощо на вимірювання?

2) Покладіть смартфон на аркуш паперу з зошиту. Повернувши смартфон на поверхні столу разом з папером вирівняйте його у напрямку  $Y$  на північ, (рис. 2).



Рис. 2. Орієнтація просторових осей на смартфоні

Значення  $X$ -компоненти магнітометра тоді дорівнює нулю. Якщо є додаток Physics Toolbox, порівняйте напрям осі  $Y$  з компасом (рис. 3).



Рис. 3. Орієнтація смартфона та координатної сітки за допомогою компаса

Запишіть показання на дисплеї (рис. 4).



Рис. 4. Phyrphox показує X, Y, Z - компоненти та величину індукції поля  $B$

3) Визначити положення датчика напруженості магнітного поля в смартфоні. Для цього смартфон все ще спрямований на північ, а магніт розташовується поруч зі смартфоном (рис. 5, 6).

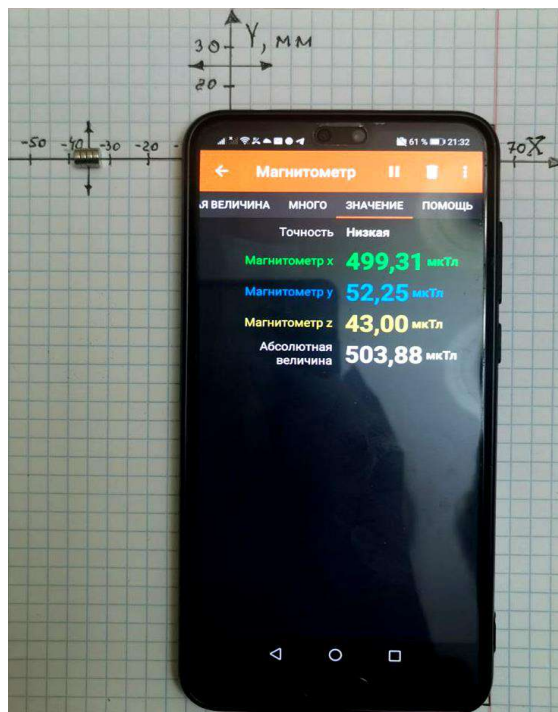


Рис. 5. Магніт, вирівняний з напрямком EW, переміщується в напрямку NS

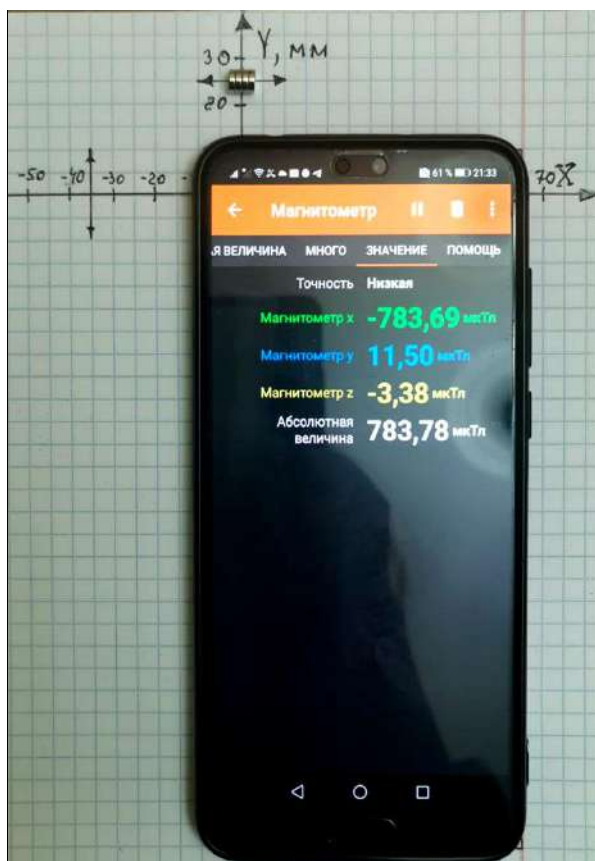


Рис. 6. Магніт, вирівняний з напрямком EW переміщується в напрямку EW

Якщо відображається максимальна величина індукції магнітного поля, магніт знаходиться точно на рівні датчика, де тепер його положення можна позначити, наприклад, липкою стрічкою. Запишіть марку та модель вашого телефону та зробіть ескіз розташування датчика.

Обчисліть кут нахилу вектора  $B$ -поля за компонентами  $Y$  та  $Z$ , наприклад для даних відображених на рис. 4:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_Z}{B_Y} = \frac{40,69}{19,19} = 2,12,$$

тобто,

$$\alpha = 64,75^{\circ}$$

## 1. 4. Дослідження поля лінійного магнітного диполя та квадруполя

Ця лабораторна робота спрямована на вдосконалення навчання студентів під час вивчення теми “Магнітне поле постійного магніта”. З огляду на це, розглянуто магнітне поле, створене лінійним магнітним диполем та лінійним магнітним квадруполем, і досліджено залежність магнітної індукції від відстані  $r^n$ , де  $n$  - показник відстані. Основна мета досліджень полягає в тому, щоб студенти виявили для себе, що показник ступеня  $n$  дуже близький до  $-2$  для диполя і  $-4$  для квадруполя. Ми будемо використовувати магнітний датчик смартфона на основі ефекту Холла, який дозволяє визначити три компоненти магнітного поля. За допомогою смартфона зосередимося на вимірюванні залежності магнітного поля диполя та квадруполя від відстані.

### Теоретичні відомості

*Лінійний електричний квадруполь* - це нейтральна система заряду, утворена трьома зарядами: один зі значенням  $-2q$ , розташований у початку координат, і два заряди значення  $+q$ , розташовані симетрично на осі  $x$ , один у точці  $(-d, 0)$ , а інший при  $(+d, 0)$ , як показано на рис. 1.

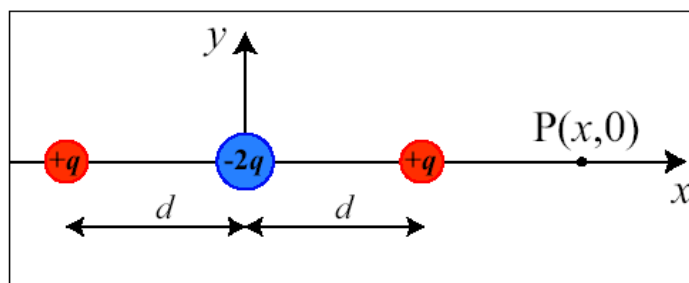


Рис. 1. Лінійний електричний квадруполь утворений двома протилежними електричними диполями, заряди яких знаходяться на відстані  $d$  один від одного. У точці  $P(x, 0)$  потрібно розрахувати електричне поле

Загальна ширина системи  $2d$ . Електричне поле цього квадруполя у довільній точці площини  $P$  має дві складові: одну радіальну, а другу поперечну. Для більшої простоти ми розглянемо точку  $P$  на осі  $x$  на відстані  $x$  від початку координат, як зазначено. Електричне поле цієї нейтральної системи заряду можна отримати, використовуючи електричне поле двох протилежних диполів, один із центром на  $(-d/2, 0)$ , а інший - на  $(+d/2, 0)$ , або, аналогічно, застосовуючи принцип суперпозиції до трьох точкових зарядів, як показано на рис. 1.  $X$ -компонент електричного поля буде визначатися так:

$$E_x = \frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{2kq}{x^2} + \frac{kq}{(x+d)^2}. \quad (1)$$

За допомогою прямих обчислень припускаючи, що  $x \gg d$ ,  $x$ -складова електричного поля квадруполя буде:

$$E_x = \frac{6kpd}{x^4}, \quad (2)$$

де  $p$  - електричний момент диполя кожного з двох диполів,  $p = qd$  і  $k$  постійна Кулона.

Насправді ми хочемо вивчити магнітний квадруполь, для виготовлення якого буде використано два магнітні диполі з двома південними полюсами, які знаходяться у початку координат, а їх північні полюси розміщені в точках з координатами  $(-d, 0)$  та  $(+d, 0)$ , отримуючи систему з нульовим магнітним дипольним моментом (див. рис. 2).

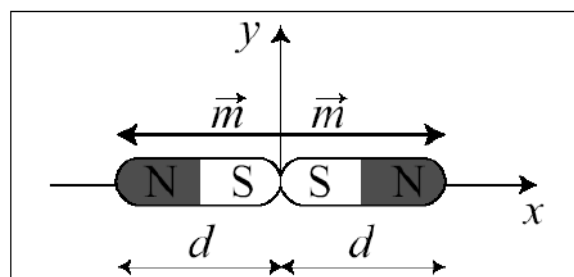


Рис. 2. Лінійний магнітний квадруполь, утворений двома протилежними магнітними диполями, – система з нульовим магнітним дипольним моментом, де  $\vec{m}$  – вектор магнітного дипольного моменту кожного магнітного диполя

Вираз, подібний до рівняння (1) можна записати для  $x$ -складової вектора магнітного поля, замінивши відповідні змінні:  $k$  для  $\mu_0$  та  $p$  для  $m$ ,  $\mu_0$  - магнітна проникність вакууму та  $m$  – величина вектора магнітного дипольного моменту обох магнітів (які доводиться ретельно відбирати, щоб вони були рівними). Тоді загальний магнітний дипольний момент визначається так само, як і в електростатичному випадку, і величина магнітної індукції квадруполя в залежності від відстані  $x$  буде дорівнювати:

$$B_x = \frac{6\mu_0 md}{x^4}, \quad (3)$$

Для проведення експериментів дуже важливо, щоб обидва магніти мали однакові геометричні та магнітні характеристики.

### **Визначення залежності величини індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту вздовж його осі**

Для визначення залежності величини індукції магнітного поля  $B$  від відстані  $r$  циліндровий (рис. 3 а) або стрічковий магніт (рис. 3 б) розміщуємо на різних відстанях від датчика смартфона. Вісь магніту повинна співпадати з віссю  $X$ .

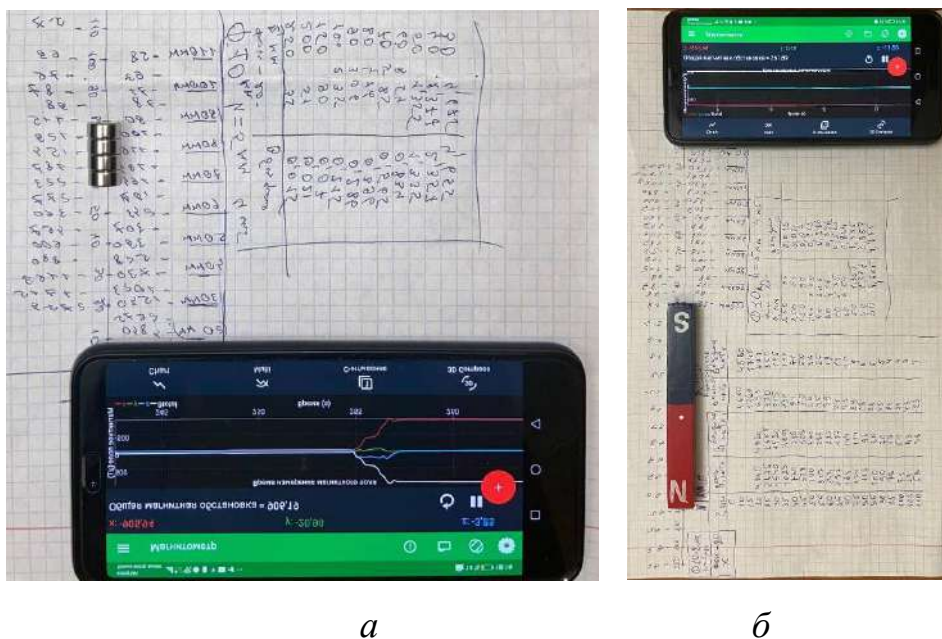


Рис. 3. Розміщення магнітів під час вимірювання магнітної індукції

Результати вимірювання величини індукції магнітного поля  $\vec{B}$  від відстані до стрічкового магніту  $r$  вздовж його осі наведено на рис. 4.

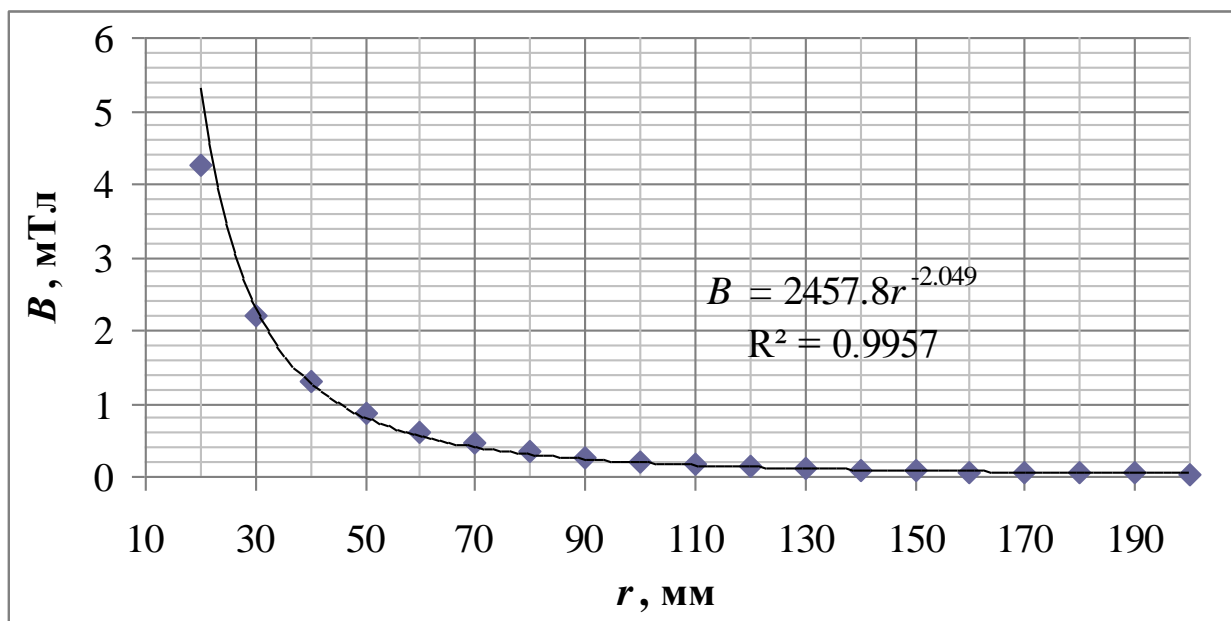


Рис. 4. Залежність індукції магнітного поля від відстані до стрічкового магніту

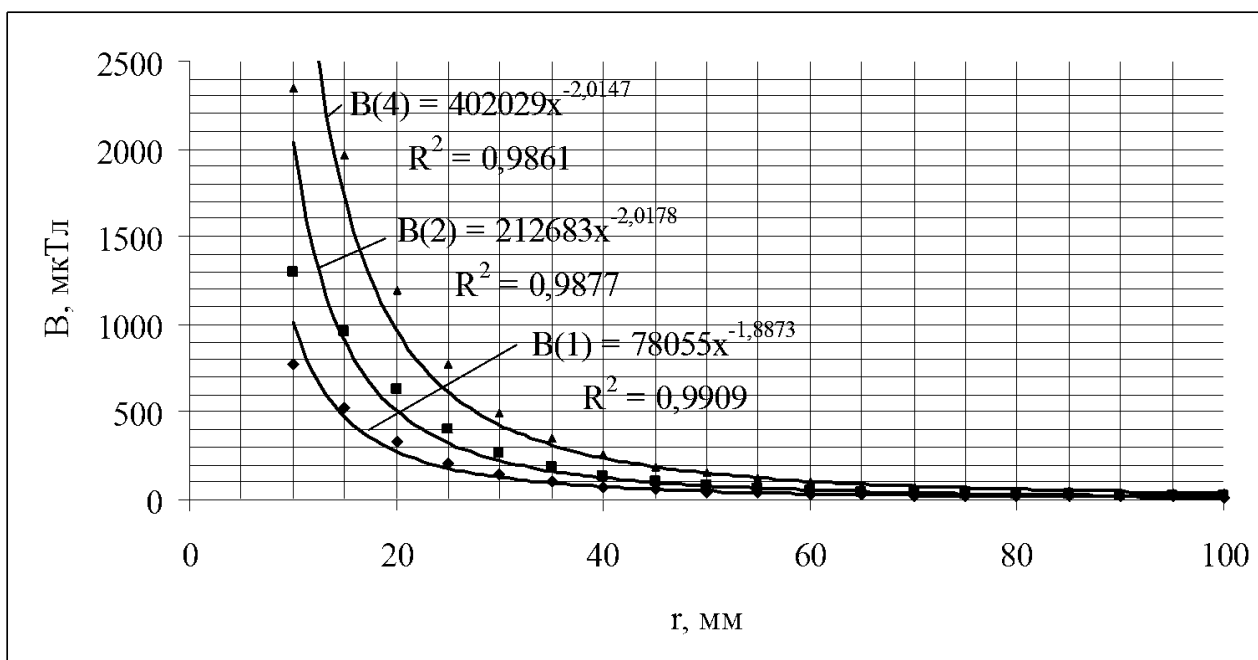


Рис. 5. Залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту, складеного з декількох однакових магнітів  $\varnothing 5$  мм, вздовж його осі



Як видно з графика рис. 4 залежність індукції магнітного поля від відстані до стрічкового магніту – обернено квадратична. Залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту, складеного з декількох однакових магнітів  $\varnothing 5$  мм, вздовж його осі наведено на рис. 5. Як видно з рис. 5 залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту обернено квадратична, незалежно від кількості магнітів в зборці.

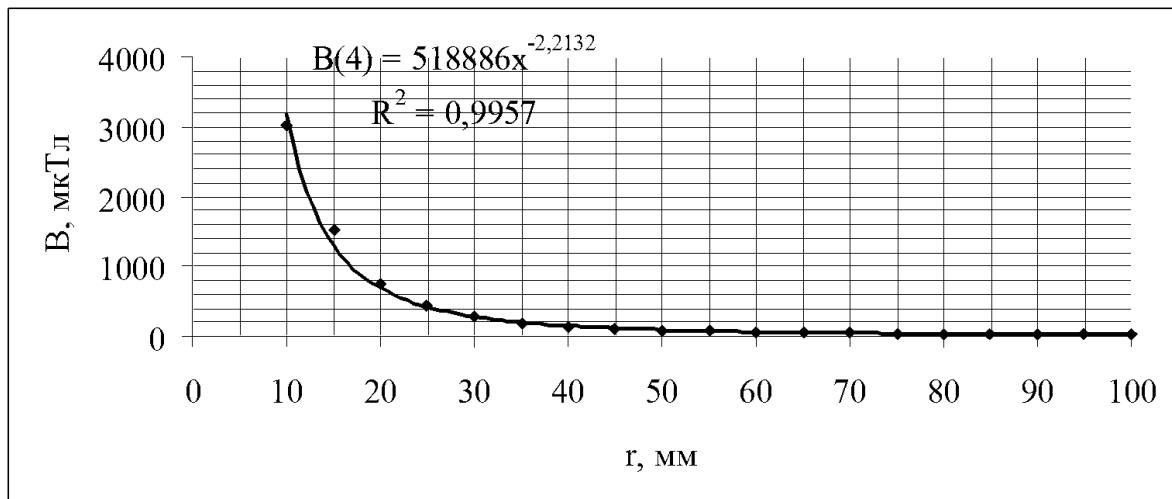


Рис. 6. Залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту, складеного з 4-ох однакових магнітів  $\varnothing 2$  мм,  $L = 4 \times 2 = 8$  мм

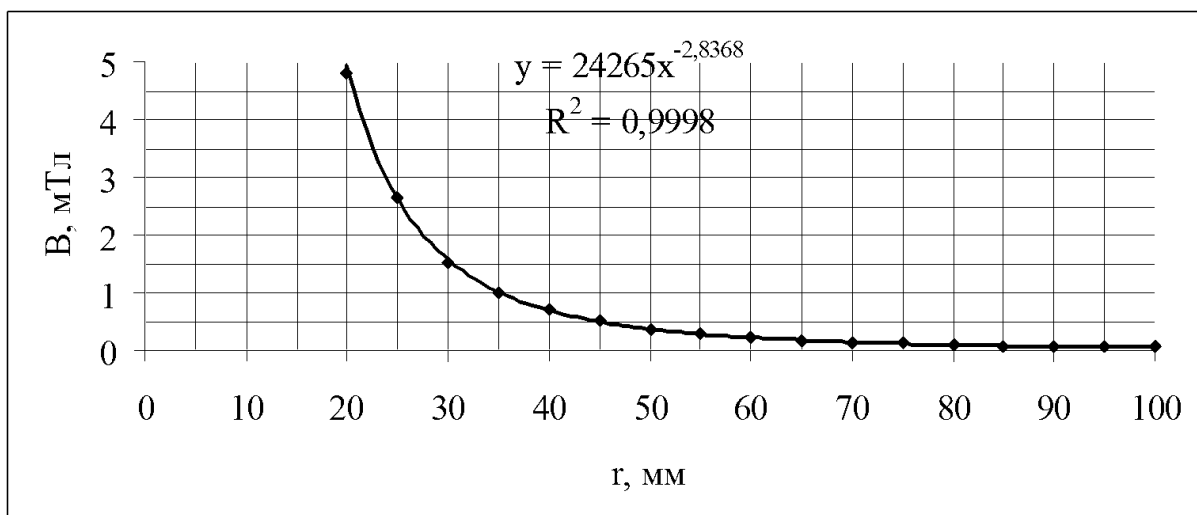


Рис. 7. Залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту, складеного з 2-ох однакових магнітів  $\varnothing 10$  мм,  $L = 2 \times 2 = 4$  мм

Як видно з рис. 6 залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту – майже обернено квадратична.

Як видно з рис. 7, 8 залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту – визначається вже як  $r^{-2,8}$ .

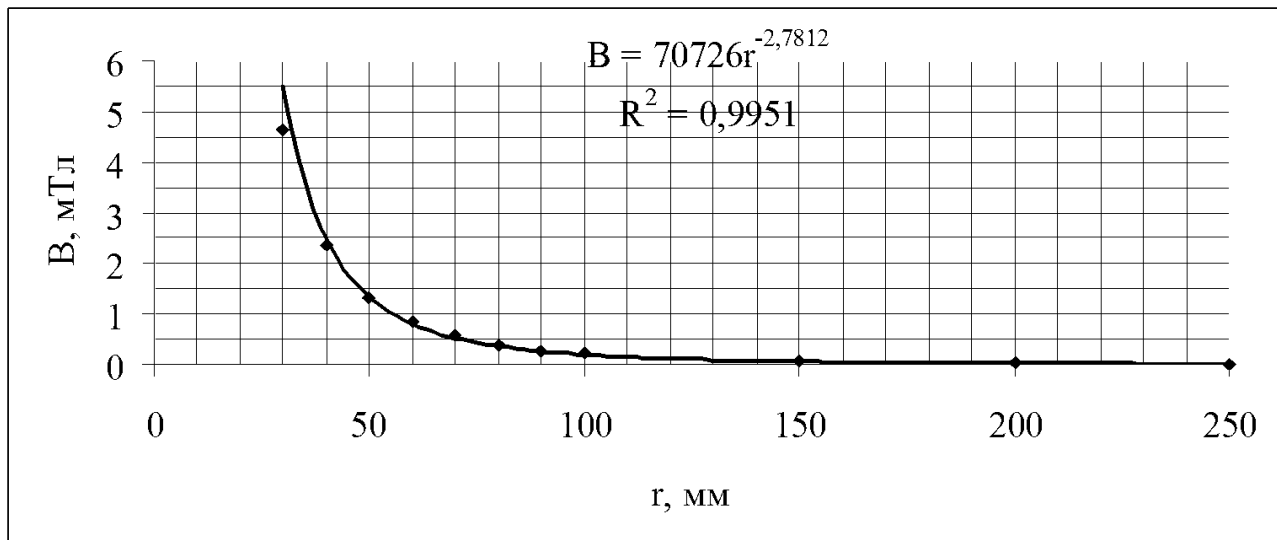


Рис. 8. Залежність індукції магнітного поля від відстані до циліндрового магніту, складеного з 4-ох однакових магнітів  $\varnothing 10$  мм,  $L = 4 \times 5 = 20$  мм

Провідний контур, по якому протікає струм, також створює магнітне поле, подібне до поля стержневого магніту; подібно до цього, він має магнітний дипольний момент. У точці P на відстані вздовж центральної осі диполя поле спрямоване паралельно осі і має напруженість поля:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r^3}$$

де  $\mu_0$  – постійна магнітного поля,  $\vec{m}$  – магнітний момент.

Ця формула застосовується лише в тому випадку, якщо відстань значно перевищує розміри диполя або контура.

Визначте магнітний дипольний момент для вашого стержневого магніту за результатами вимірювань.

## Визначення залежності величини індукції магнітного поля від відстані до лінійного магнітного квадруполя вздовж його осі

Для виконання дослідів було побудовано магнітний квадруполь – систему, що складається з двох однакових диполів рівного, але протилежно спрямованого моменту так, що результуючий магнітний момент системи дорівнює нулю (див. рис. 2) та рис. 9. Важливо враховувати, що для отримання результатів, що відповідають теоретичним прогнозам, необхідно вибрати однакові магніти.

Результати експериментів з магнітним квадруполем наведені в табл. 1 та на графіку рис. 10.

Таблиця 1

**Результати експериментів з магнітним квадруполем, складеного з 2-ох однакових магнітів  $\varnothing 2$  мм, висотою  $h = 2$  мм кожний**

$r$ , мм	11,5	15	20	22,5	25
$B$ , мТл	0,26	0,1	0,037	0,02	0,01

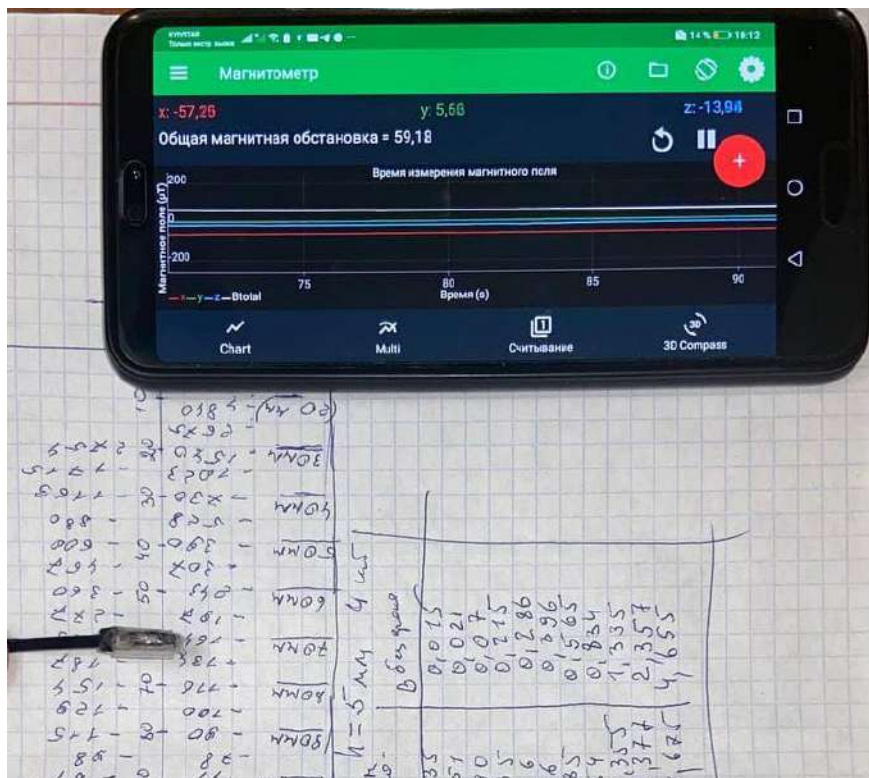


Рис. 9. Вимірювання магнітної індукції магнітного квадруполя

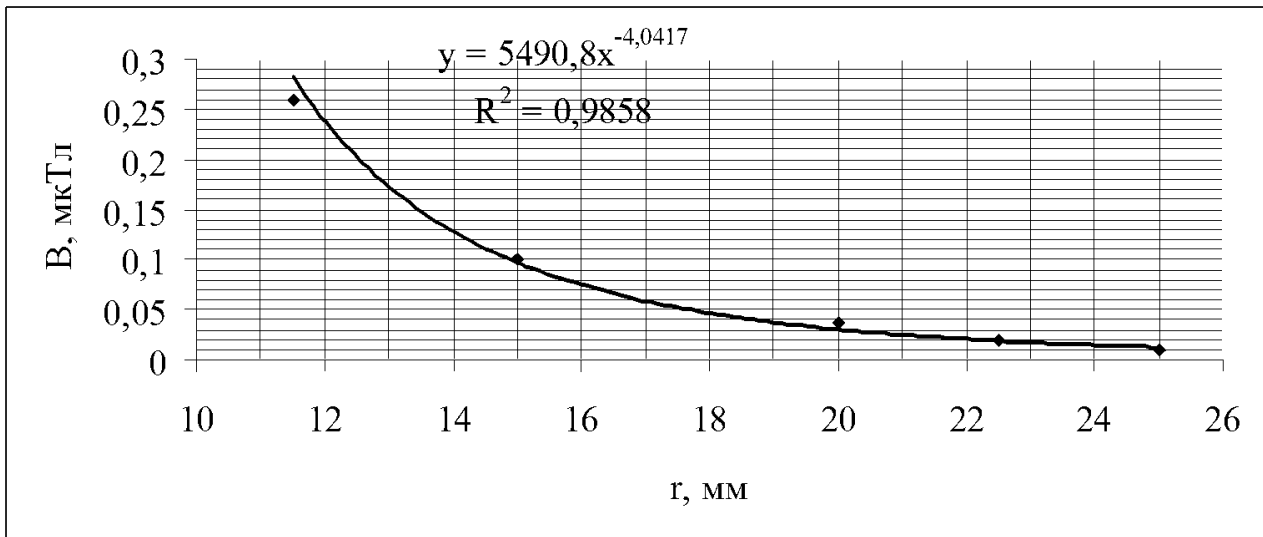


Рис. 10. Залежність індукції магнітного поля від відстані до магнітного квадруполя, складеного з 2-ох однакових магнітів  $\varnothing 2$  мм, висотою  $d = 2$  мм, повернутими один до одного полюсами одного знаку

### Обговорення результатів експериментів

Проаналізуємо результати, отримані за допомогою смартфона Huawei 20 pro із додатком «Магнітометр» для двох магнітних квадруполів, та порівняємо їх з циліндровими та стрічковими магнітами.

На рис. 4 показано графічне представлення даних, отриманих магнітним датчиком смартфона для  $x$ -складової магнітного поля  $B$  стрічкового магніту, як функції відстані  $r$ . Поряд з експериментальними даними наведено лінію тренду експериментальних даних з Excel, а також рівняння, яке відповідає експериментальним даним ( $B$  як функція  $r$ ), і квадрат коефіцієнта кореляції  $R^2$ , який дорівнює 0,9957. Тобто за допомогою обладнання, яке є майже у кожного учня або студента ми довели, що залежність індукції магнітного поля від відстані до стрічкового магніту – обернено квадратична.

У випадку з рис. 10 ми використовували магнітний квадруполь, що складається з двох неодимових шайб. Магнітний квадруполь розміщували на відстані 10–25 мм від смартфона. На більших відстанях магнітний датчик

смартфона не виявляв магнітне поле цього квадрупольного, що є наслідком сильної залежності величини магнітної індукції  $\vec{B}$  від відстані  $\propto \frac{1}{r^4}$ . Відповідно до теоретичної моделі (рівн. (3)),  $x$ -складова магнітного поля квадрупольного задана так:

$$B_x = 6\mu_0 m d x^n. \quad (4)$$

Значення  $n$  з експериментальних даних становить приблизно - 4, що повністю узгоджується з теоретичним прогнозом.

**Завдання.** Використавши (4) визначте магнітний момент для вашого лінійного квадрупольного магніту за результатами вимірювань.

Можна спостерігати, що вимірювання з різними квадрупольними мають квадрат коефіцієнта кореляції, дуже близький до одиниці.

З одного боку, ціллю, яку вважають достатньою, є усвідомлення того, що показник ступеня  $n$  дуже близький до мінус чотири.

З іншого боку, обчислення помилок є важливим завданням в експериментальних роботах. З цієї причини студенти використовуючи метод найменших квадратів для лінійної регресії повинні провести аналіз помилок вимірювань та результатів, і вони повинні відповідати експериментальним даним. Отже, ми повинні лінеаризувати результати, беручи логарифми в рівнянні (4), і отримаємо такий лінійний вираз:

$$\log B_x = \log(6\mu_0 m d) + n \cdot \log x. \quad (5)$$

Якщо ми представляємо  $\log B_x$  в залежності від  $\log x$ , ми можемо отримати інформацію про показник степеня  $x$  та його абсолютну похибку через нахил лінійного графіка (див. рис. 11).

Результати після відповідного застосування методу найменших квадратів до квадрупольних, що використовуються під час лабораторної практики зводяться у таблиці. Як ми бачимо з результатів, наведених у табл. 1, експериментальні значення залежності магнітного поля від відстані сумісні з очікуваним теоретичним значенням. Аргумент логарифму повинен мати безрозмірну

величину, хоча цей факт тут відкидається, оскільки він не має значення. Рекомендується працювати в Міжнародній системі одиниць, щоб не мати проблем з інтерпретацією результатів.

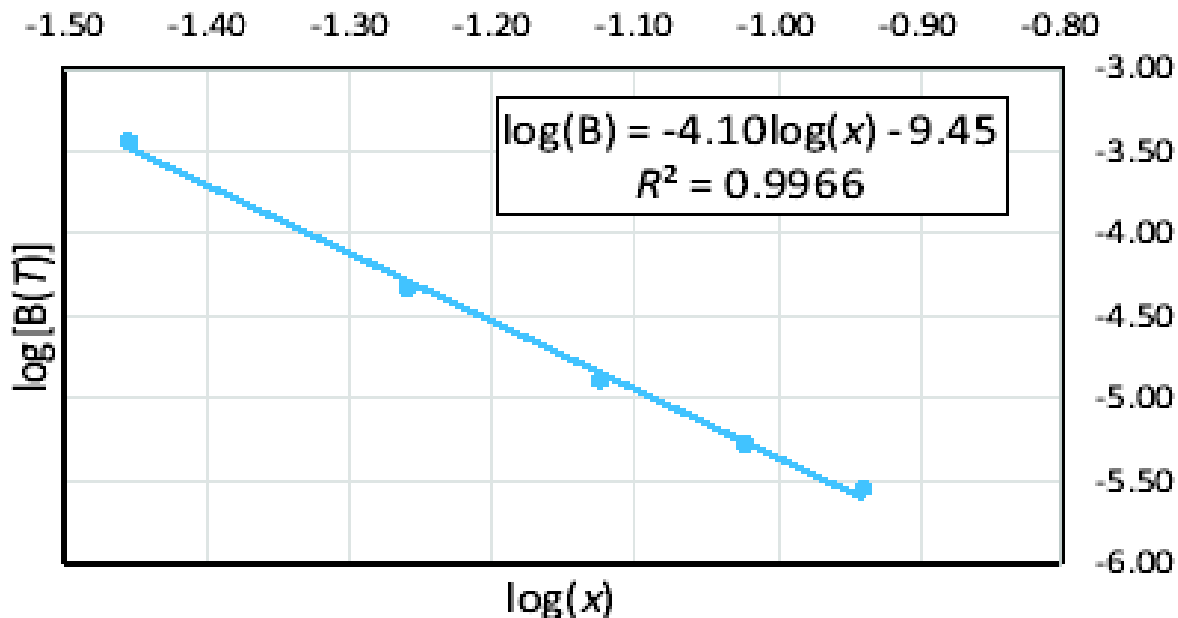


Рис. 11. Десяткові логарифми експериментальних даних (-) лінійне узгодження експериментальних даних для магнітного квадруполя, складеного з двох неодимових магнітів:  $n = -4,10 \pm 0,14$  (3%)

Студенти на початку лабораторної практики не знають рівняння (3); їм кажуть, що  $B$  - це функція від'ємної змінної  $x$ , яку вони самі спостерігають, оскільки при зменшенні  $x$  величина  $B$  збільшується. Отже, студенти не знають, що показник ступеня  $x$  дорівнює  $-4$ , і вони повинні отримати цей результат навчання шляхом відкриття. Таким чином, студенти засвоюють це завдяки власному досвіду в лабораторії. Фізична лабораторія дозволяє осмислене навчання за умови, що практики добре розроблені та не надто складні.

## Висновки

Розроблена технологія проведення лабораторної практики, яка дозволяє студентам отримати результати, які є досить точними та сумісними з базовою електромагнітною теорією. Для показника ступеня, теоретичне значення якого має бути  $-4$ , отримують дуже близькі експериментальні значення:  $-4,04 \pm 0,14$  з відносною похибкою 3%, що є досить малим значенням для фізичної лабораторії, і без використання особливо складних приладів для проведення вимірювань. Крім того, студенти мотивовані використанням нових технологій, застосовуючи смартфони для вимірювання магнітного поля датчиком, який зазвичай мають ці телефони, разом із відповідним та безкоштовним додатком. Насправді, найскладнішим пристроєм, який використовується, є смартфон, і оскільки у більшості студентів він є, лабораторна практика також дуже дешева. Досліди проводяться в групах з двох студентів, тому, якщо хтось не має смартфона, він може створити пару з іншим студентом, який його має.

Отже, наша робота доводить, що смартфон (з його численними датчиками) та безкоштовними додатками, придатний для вимірювання магнітних полів, є точним інструментом у лабораторії фізики першого та другого курсів.

## Список використаних джерел

1. A. M. Otebolaku and M. T. Andrade, "User context recognition using smartphone sensors and classification models," J. Netw. Comput. Appl. 66, 33 (2016).
2. J. Lenz and S. Edelstein, "Magnetic sensors and their applications," IEEE Sens. J. 6, 631 (2006).
3. H. Wang et al., "Design methodology for magnetic field-based soft tri-axis tactile sensors," Sensors 16, 1356 (2016).

4. J. Tronicke and M. H. Trauth, "Classroom-sized geophysical experiments: Magnetic surveying using modern smartphone devices," *Eur. J. Phys.* 39, 035806 (2018).
5. H. Al-Taani and S. Arabasi, "Solar irradiance measurements using smart devices: A cost-effective technique for estimation of solar irradiance for sustainable energy systems," *Sustainability* 10, 508 (2018).
6. U. Pili and R. Violanda, "Measuring average angular velocity with a smartphone magnetic field sensor," *Phys. Teach.* 56, 115 (Feb. 2018).
7. M. Monteiro, C. Stari, C. Cabeza, and A. C. Marti, "Magnetic field 'flyby' measurement using a smartphone's magnetometer and accelerometer simultaneously," *Phys. Teach.* 55, 580 (Dec. 2017).
8. A. Bonanno, G. Bozzo, and P. Sapia, "An innovative experimental sequence on electromagnetic induction and eddy currents based on video analysis and cheap data acquisition," *Eur. J. Phys.* 38, 065203 (2017).
9. S. Arabasi and H. Al-Taani, "Measuring the Earth's magnetic field dip angle using a smartphone-aided setup: A simple experiment for introductory physics laboratories," *Eur. J. Phys.* 38, 025201 (2017).
10. C. Puttharugsa, S. Khemmani, P. Utayarat, and W. Luangtip, "Investigation of the rolling motion of a hollow cylinder using a smartphone," *Eur. J. Phys.* 37, 055004 (2016).
11. M. A. Gonzalez and M. A. Gonzalez, "Smartphones as experimental tools to measure acoustical and mechanical properties of vibrating rods," *Eur. J. Phys.* 37, 045701 (2016).
12. J. Carlos Castro-Palacio, L. Velazquez-Abad, F. Gimenez, and J. A. Monsoriu, "A quantitative analysis of coupled oscillations using mobile accelerometer sensors," *Eur. J. Phys.* 34, 737 (2013).
13. A. Iqbal and M. S. Anwar, "Comment on 'Measurement of the magnetic field of small magnets with a smartphone: A very economical laboratory practice for introductory physics courses,'" *Eur. J. Phys.* 37, 028001 (2016).



14. T. Balaraman, "Physiotherapy students' perception on learning through smartphone: A pilot study," *Physiother. Occup. Ther. J.* 8, 53 (2015).
15. E. Arribas, I. Escobar, C. P. Suarez, A. Najera, and A. Beléndez, "Measurement of the magnetic field of small magnets with a smartphone: A very economical laboratory practice for introductory physics courses," *Eur. J. Phys.* 36, 065002 (2015).
16. R. D. Septianto, D. Suhendra, and F. Iskandar, "Utilisation of the magnetic sensor in a smartphone for facile magnetostatics experiment: Magnetic field due to electrical current in straight and loop wires," *Phys. Educ.* 52, 015015 (2017).
17. B. Setiawan, R. D. Septianto, D. Suhendra, and F. Iskandar, "Measurement of 3-axis magnetic fields induced by current wires using a smartphone in magnetostatics experiments," *Phys. Educ.* 52, 065011 (2017).
18. M. Taspika, L. Nuraeni, D. Suhendra, and F. Iskandar, "Using a smartphone's magnetic sensor in a low-cost experiment to study the magnetic field due to Helmholtz and anti-Helmholtz coil," *Phys. Educ.* 54, 015023 (2019).
19. P.-M. Binder, R. B. Tate, and C. K. Crowder, "Which dipole are you studying in lab?" *Eur. J. Phys.* 38, 015203 (2017).
20. M. Monteiro, C. Cabeza, and A. C. Marti, "Acceleration measurements using smartphone sensors: Dealing with the equivalence principle," *Rev. Bras. Ensino Física* 37, 1303 (2015).
21. E. C. S. Mahen, S. Susanti, B. W. Nuryadin, and A.Y. Nuryantini, "Preliminary study of simple methods to get the average speed using a smartphone's light sensor," *MATEC Web Conf.* 197, 02003 (2018).
22. U. Dilek and S. K. Şengören, "Using touchscreens as position detectors in physics experiments," *Phys. Educ.* 52, 035010 (2017).
23. M. Monteiro and A. C. Marti, "Using smartphone pressure sensors to measure vertical velocities of elevators, stairways, and drones," *Phys. Educ.* 52, 015010 (2017).

24. E. Arribas, I. Escobar, C. P. Suarez, A. Najera, and A. Belendez, “Reply to ‘Comment on “Measurement of the magnetic field of small magnets with a smartphone: a very economical laboratory practice for introductory physics courses,””*Eur. J. Phys.* 37, 028002 (2016).
25. Physics Toolbox Sensor Suite by Vieyra Software, <https://www.vieyrasoftware.net>.
26. Magnetometer for ios, <http://appcrawlr.com/ios/magnetometer>.
27. Linear Quadrupole Magnetic Field Measured with a Smartphone. *Phys. Teach.* 58, 182 (2020); <https://doi.org/10.1119/1.5145411>

## 1. 5. Реєстрація параметрів коливального руху маятників

### Визначення маси Землі за допомогою математичного маятника

Математичний маятник – це осцилятор, який є механічною системою, що складається з математичної точки на кінці невагомої нерозтяжної нитки або легкого стрижня, що знаходиться в однорідному полі сил тяжіння. Інший кінець нитки нерухомий (Вікіпедія) (рис. 1).

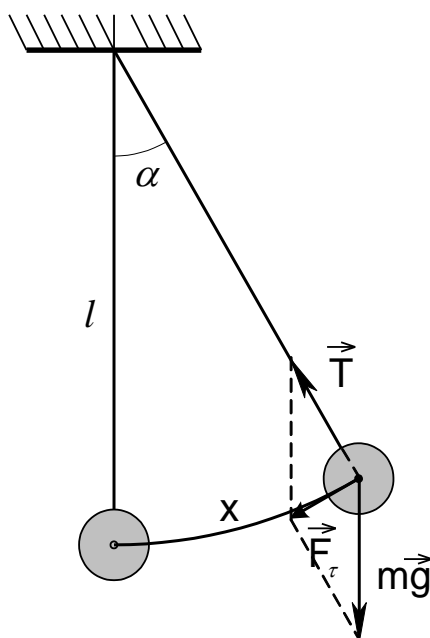


Рис.1

Період коливання математичного маятника при невеликих кутах відхилення від положення рівноваги дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

З цього рівняння можна знайти величину прискорення вільного падіння:

$$g = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot l. \quad (2)$$

З іншого боку прискорення вільного падіння можна знайти з всесвітнього закону тяжіння та другого закону Ньютона:

$$ma = G \frac{mM}{(R+h)^2}, \quad (4)$$

де  $m$  – маса тіла, що падає в гравітаційному полі Землі,  $M$  – маса Землі,  $R$  – радіус Землі,  $h$  – висота падіння,  $G$  – гравітаційна постійна.

Якщо  $h$  прямує до нуля, тоді з рівняння (4) отримуємо, що прискорення вільного падіння:

$$a = G \frac{M}{R^2}. \quad (6)$$

Це і є прискорення, яке стоїть в рівнянні (2). З рівнянь (2) та (6) отримуємо формулу для визначення маси Землі:

$$M = \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 \cdot \frac{l}{G}. \quad (7)$$

Отже, для визначення маси Землі не виходячи з дому потрібно виміряти період коливань, довжину маятника  $l$  (відстань від точки підвісу до центра кульки) та знати, що радіус Землі  $R_{\oplus} = 6371$  км,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ :

$$M = 24,24 \cdot 10^{24} \cdot \frac{l}{T^2} \text{ кг}. \quad (8)$$

Якщо підставимо близьки до експериментальних значень  $l = 0,76$  м,  $T = 1,725$  с, тоді

$$M_{\oplus} = 24,24 \cdot 10^{24} \cdot \frac{0,76}{(1,725)^2} = 6,2 \cdot 10^{24} \text{ кг},$$

що близько до табличного  $M_{\oplus} = 5,98 \cdot 10^{24}$  кг.

## Дослідне вивчення властивостей математичного маятника

**Мета роботи:** перевірити справедливість формули періоду коливань математичного маятника для різних довжин маятника і різних кутів відхилення від положення рівноваги.

**Прилади й матеріали:** біндер-затискач, сталева кулька на нитці, лінійка 1 м, смартфон.

### Теоретичні відомості.

**Математичним маятником** називають матеріальну точку, підвішену на невагомій нерозтяжній нитці. Гарним наближенням до цієї моделі є маленька кулька, підвішена на тонкій міцній нитці (тонка сталева дротина, рибальська волосінь, тощо). Як було зазначено вище, при відхиленні маятника на малий кут він буде здійснювати гармонічні коливання. Період цих коливань визначається виразом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

де  $l$  – довжина маятника.

В даній роботі пропонується перевірити справедливість формули (1) для різних довжин і різних кутів відхилення.

Оскільки частота коливань  $\nu$  обернена до періоду  $T$ , то з формули (1) одержимо:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{l}} \quad (2)$$

З (2) випливає, що добуток частоти маятника  $\nu$  на корінь квадратний з його довжини повинен бути сталою величиною:

$$v \cdot \sqrt{l} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} = \text{const} \quad (3)$$

Якщо  $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ , то ця константа дорівнює  $(0,4985 \pm 0,0005) \frac{M^{\frac{1}{2}}}{c}$

## Хід роботи

**Завдання 1.** Дослідження залежності частоти коливань математичного маятника від його довжини

1. Змінюючи довжину нитки, встановіть її приблизно рівною 1 м. Ретельно виміряйте довжину маятника  $l$  – це відстань від точки підвісу до центра кульки (див. рис. 1). Для цього за допомогою смартфона сфотографуйте точку підвісу маятника та кульку на фоні лінійки.

2. Відхиліть маятник від положення рівноваги на кут  $\alpha = 3-5^\circ$  і відпустіть маятник. Пропустіть декілька коливань і з рахунком "нуль" включіть секундомір. Зручно включати

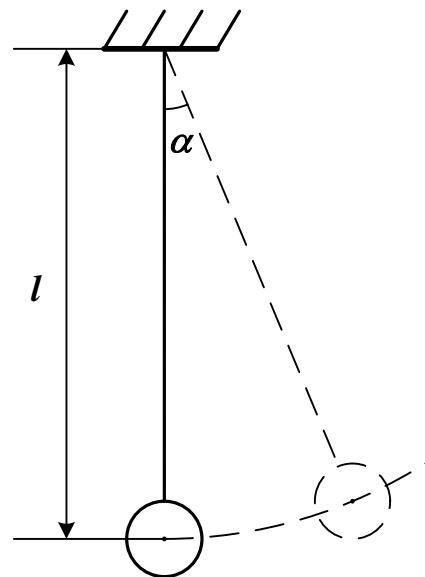


Рис. 1

секундомір в момент, коли маятник перебуває в положенні максимального відхилення. Виміряйте час  $t$  для 30–50 коливань. Для підвищення точності вимірювання періоду коливань використовуйте смартфон в режимі відео “slow motion” в прямої видимості екрана іншого смартфона з секундоміром мілісекундної точності.

3. Повторіть дослід ще один раз.

4. Зменшіть довжину маятника приблизно вдвічі і повторіть вимірювання довжини і часу.

5. Ще раз зменшіть вдвічі довжину маятника, виміряйте її та період коливань маятника з точністю до 1 мс.

6. Для кожного досліду обчисліть частоту  $\nu = \frac{N}{t}$ ,  $\sqrt{l}$  і добуток  $\nu\sqrt{l}$  з точністю до десятитисячної. Результати вимірювань і обчислень зручно подати у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

№	$l, \text{ м}$	$N$	$t, \text{ с}$	$\nu, \text{ с}^{-1}$	$\sqrt{l}, \text{ м}^{\frac{1}{2}}$	$\nu\sqrt{l}, \text{ м}^{\frac{1}{2}}\text{ с}^{-1}$
1						
2						
3						

7. Визначимо залежність квадрата циклічної частоти  $\omega^2$  від довжини маятника  $l$ . Циклічна частота  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . З формули 1 випливає, що

$$\omega^2 = g \cdot \frac{1}{l}.$$

Побудуйте графік залежності  $\omega^2$  від  $\frac{1}{l}$ .

**Завдання 2.** Дослідження залежності частоти коливань маятника від амплітуди його коливань.

1. Встановіть довжину маятника рівною приблизно 1 м. Виміряйте довжину маятника і визначте час 30–50 коливань, як це описано в п.п.1 і 2 завдання 1.

2. Обчисліть частоту коливань маятника, одержану з досліду (експериментальну):

$$\nu_e = \frac{N}{t}.$$

3. Повторіть визначення частоти для кутів відхилення  $20^\circ$ ,  $40^\circ$  і  $60^\circ$  від вертикалі. Оскільки при великих кутах відхилення стабільність коливань зменшується, то можна обмежитись меншим числом коливань (але не менше 20). При використанні смартфона кількість коливань може бути меншою 10.

4. Обчисліть теоретичну частоту  $\nu$  коливань маятника за формулою (2) .

Візьміть  $\pi = 3,1416$  і  $g = 9,81 \frac{м}{с^2}$ .

5. Знайдіть відносне відхилення результатів експерименту від теоретичного значення:

$$E = \frac{\nu_e - \nu}{\nu} \cdot 100\%$$

6. Результати вимірювань і обчислень зручно подати у вигляді табл. 2.

7. Зробіть висновки до кожного з завдань.

Таблиця 2

$N_0$	$l, м$	$\alpha$	$N$	$t, с$	$\nu_e, с^{-1}$	$\nu, с^{-1}$	$E, \%$
1							
2							
3							



## Визначення періоду коливань математичного маятника за допомогою магнітного датчика смартфона



Відомо, що періодичність використання лабораторного обладнання даного типу півроку – від семестру до семестру. Тому, наприклад, залізна кулька маятника півроку знаходиться в стані спокою і намагнічується під впливом магнітного поля Землі. Втім й інше обладнання намагнічується: теплові батареї, ножки стільців, столів тощо. Намагніченість кульки в цій лабораторній роботі використовується для вимірювання періоду коливань математичного маятника.

Залізна кулька діаметром 52 мм на мотузці довжиною 710 мм кріпилася до стільниці стола біндером-затискачем (рис. 1). Довжина маятника  $l_{\text{маятника}} = 0,736$  м, що відповідало теоретично розрахованому періоду коливань  $T_{\text{теор}} = 1,721$  с. Як сенсор використовувався магнітний датчик смартфона Huawei 20 Pro.

Вимірювання зміни магнітного поля біля датчика під час коливання кульки велось за допомогою мобільного додатку “Магнітометр” Phyphox та Physics Toolbox Sensor Suite від Viewra Software. Вигляд дисплеїв під час проведення дослідів наведено на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

Осцилограми коливань, отримані та передані на комп'ютер у вигляді таблиць Excel – на рис. 4 та рис. 5.

Рис. 1. Вигляд кріплення маятника з залізною кулькою

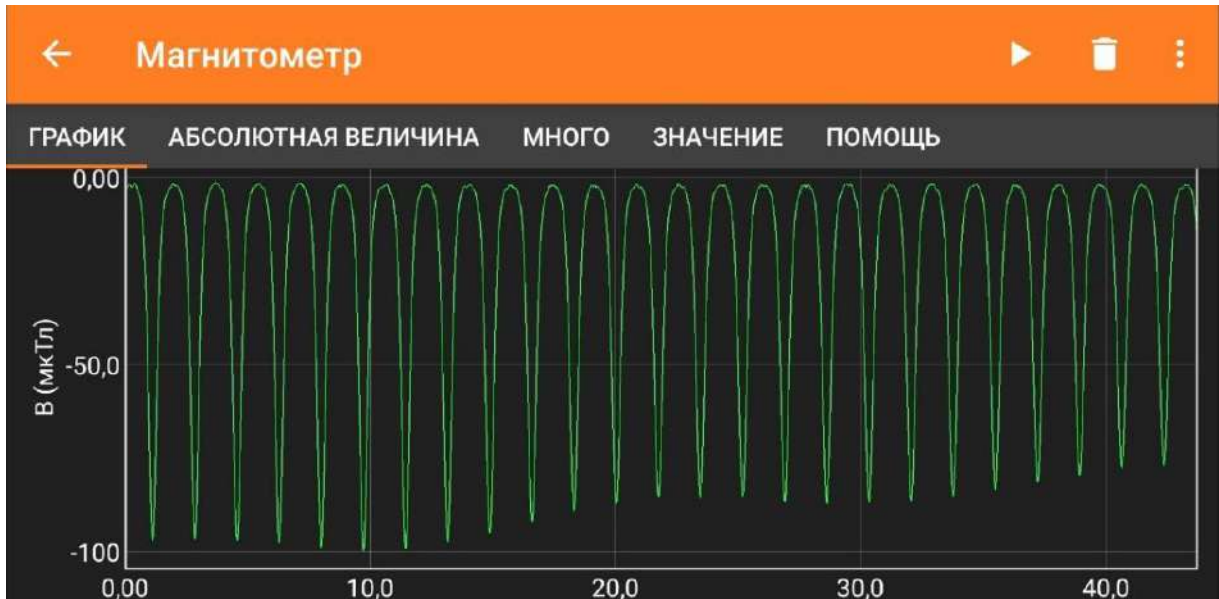


Рис. 2. Вигляд дисплея під час коливання математичного маятника.  
Мобільний додаток “Магнітометр” Phyphox

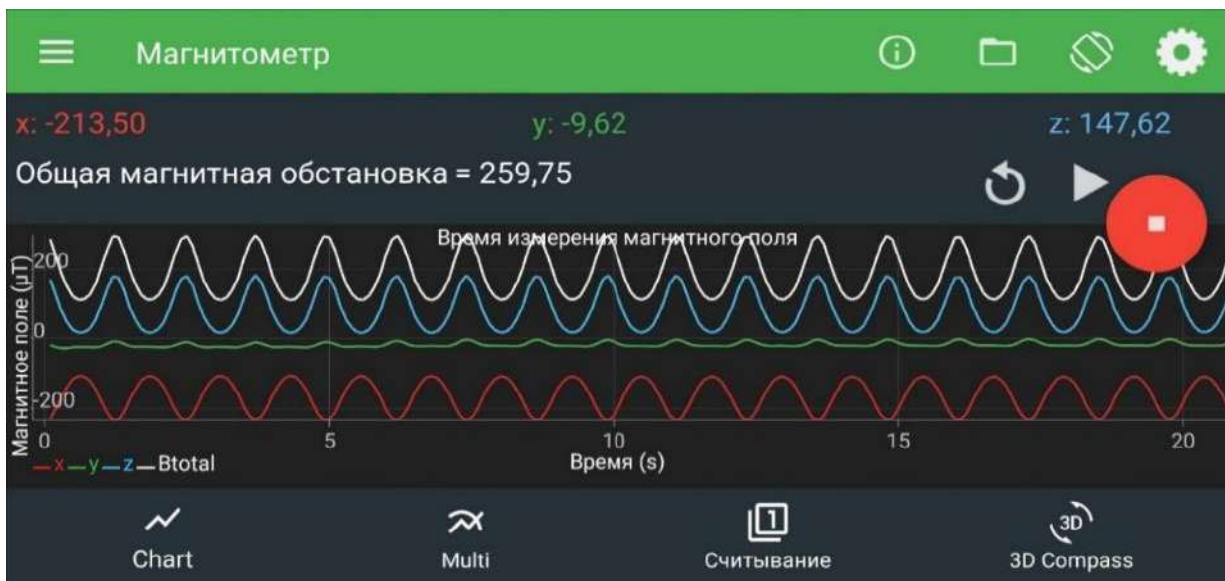


Рис. 3. Вигляд дисплея під час коливання математичного маятника.  
Мобільний додаток “Магнітометр” Physics Toolbox Sensor Suite

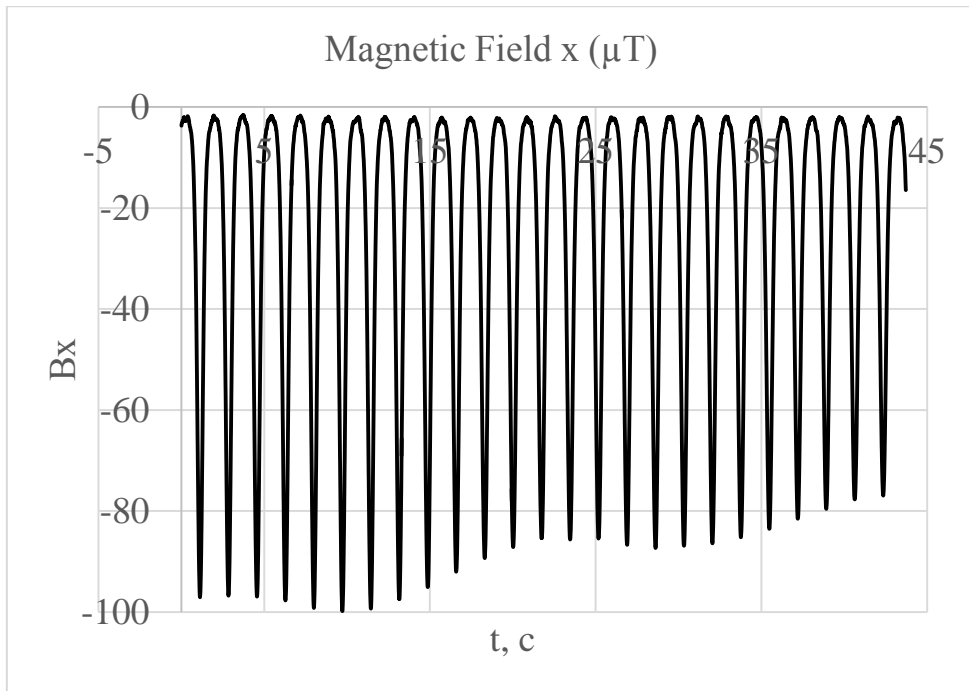


Рис. 4. Осцилограми коливань (Phyphox)

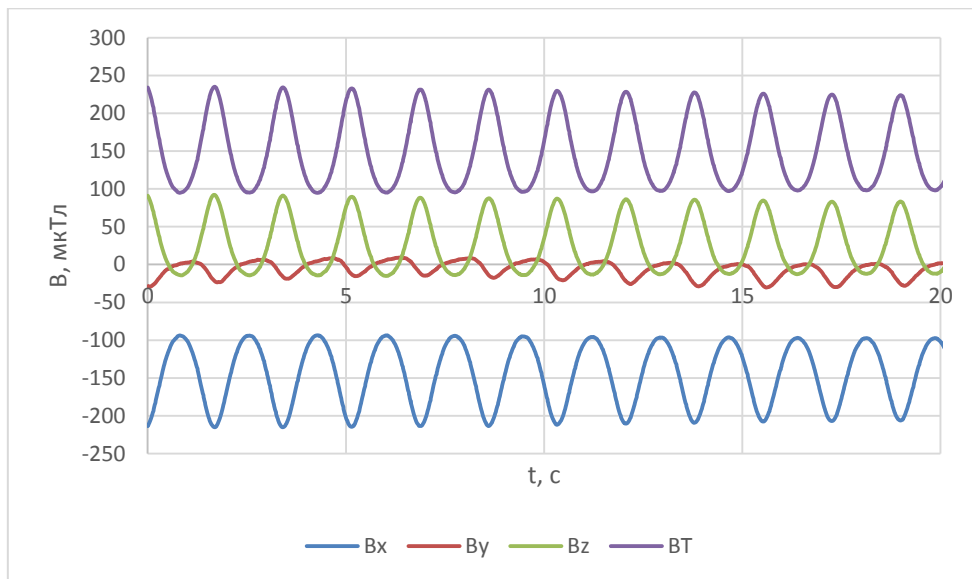


Рис. 5. Осцилограми коливань Physics Toolbox Sensor Suite

Фактично вимірний період коливань склав для мобільного додатку Physics Toolbox Sensor Suite  $T_{\text{факт}} = 1,732$  с, для мобільного додатку Phyphox  $T_{\text{факт}} = 1,717$  с. Отже, результати вимірювання періоду за допомогою різних мобільних застосунків узгоджуються. Середнє значення  $T = 1,725$  с.

## Дослідження обертання залізної кулі навколо своєї осі

Під час вимірювання періоду коливань за допомогою магнітного датчика смартфона іноді спостерігалися осцилограми вигляду зображеного на рис. 6.

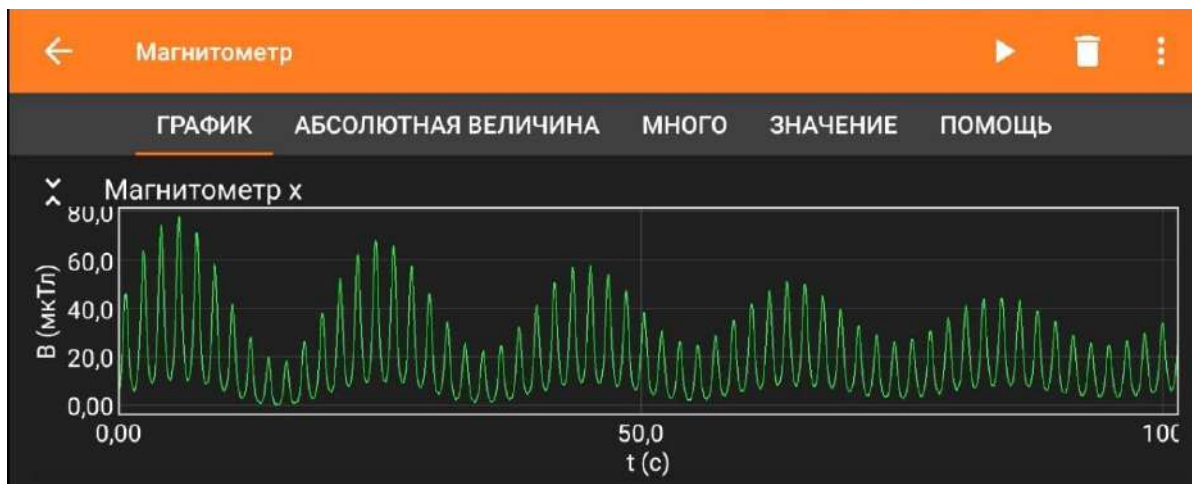


Рис. 6. Осцилограма зміни індукції  $B_x$  магнітного поля під час обертань залізної кулі. Сенсор – магнітний датчик смартфона Huawei 20 Pro. Мобільний додаток “Магнітометр” Phyphox

Тоді вигляд осцилограми змінюється: кутова швидкість обертання залізної кулі навколо осі змінюється з безперервним загасанням енергії коливань (рис. 7, 8). Результати вимірювання періоду обертання наведені в табл. 3 та на рис. 9. На графіках зміни компонент магнітного поля X, Y (рис. 7) можна розрізнити, у який бік оберталася куля: спостерігається сзув фази на 0,25 T.



Рис. 7. Осцилограми зміни індукції  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  магнітного поля під час обертання залізної кули

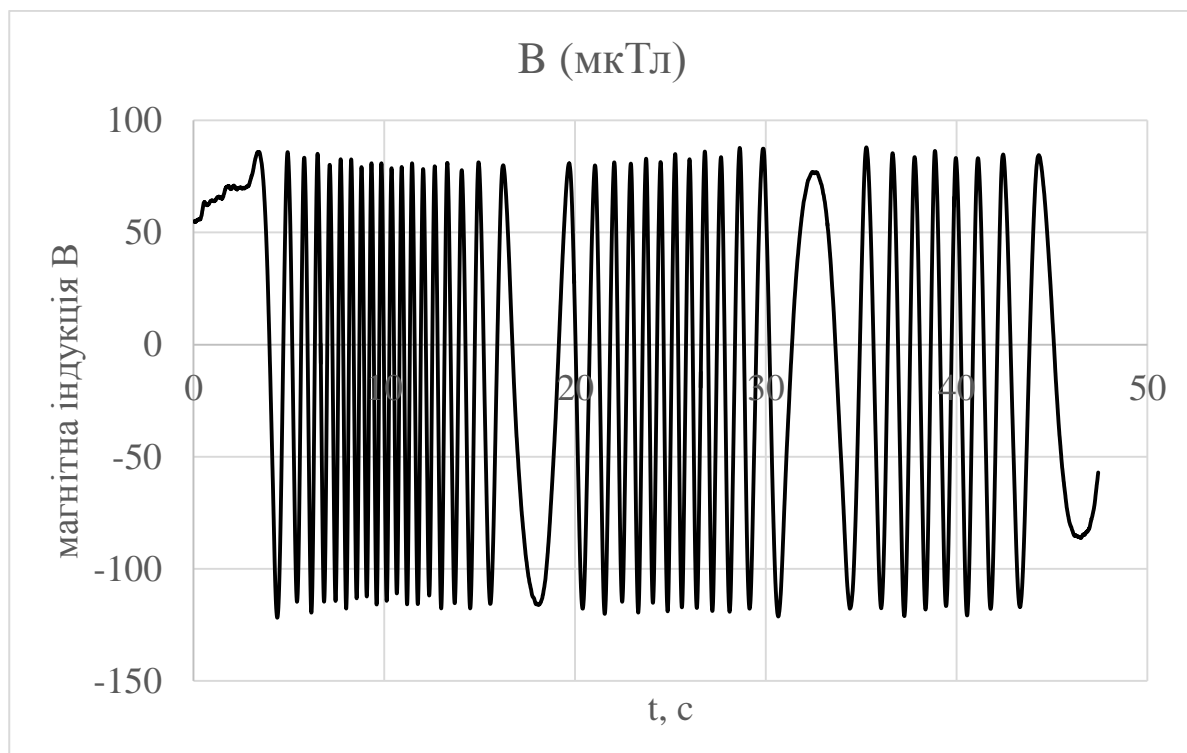


Рис. 8. Осцилограма, відтворена за допомогою EXCEL, зміни індукції магнітного поля  $B_x$  під час обертання залізної кули



**Результати вимірювання періоду обертання кульки**

№ коливання	Час, с	Період, с
0	3,42	
1	4,93	1,51
2	5,80	0,87
3	6,50	0,7
4	7,14	0,64
5	7,71	0,57
6	8,26	0,55
7	8,80	0,54
8	9,33	0,53
9	9,85	0,52
10	10,38	0,53
11	10,91	0,53
12	11,45	0,54
13	12,03	0,58
14	12,64	0,61
15	13,30	0,66
16	14,06	0,76
17	14,94	0,88
18	16,23	1,29
19	19,68	3,45
20	21,04	1,36
21	22,05	1,01
22	22,92	0,87
23	23,72	0,8
24	24,48	0,76
25	25,25	0,77

26	26,00	0,75
27	26,80	0,8
28	27,65	0,85
29	28,63	0,98
30	29,86	1,23
31	32,64	2,78
32	35,27	2,63
33	36,64	1,37
34	37,80	1,16
35	38,86	1,06
36	39,96	1,1
37	41,12	1,16
38	42,44	1,32
39	44,30	1,86



Рис. 9. Візуалізація даних таблиці 3

З рис. 9 видно, що виходячи зі стану спокою, куля зменшує період за 9 обертань утричі: з  $T_1 = 1,5$  с до  $T_{\min. 1} = 0,5$  с під час закрутки у один бік. Потім



кінетична енергія переходить ще за 9 обертань в потенціальну до максимального закручування нитки. Після чого куля починає обертатися у інший бік, але досягає мінімального періоду обертання  $T_{\min. 2} = 0,75$  с. Третя серія обертань проходить у бік першої серії. При цьому досягається  $T_{\min. 3} = 1$  с. Отже, мінімальний період обертання збільшується лінійно з кожною серією обертань: за 25 обертань період збільшився удвічі. Кінетична енергія залежить від кутової швидкості квадратично, тому за 25 обертів втрати енергії складають 75 %. Визначення цієї величини і є основним завданням проведеної лабораторної роботи.

### **Використання камери смартфона у режимі “slow motion” для визначення періоду коливань математичного маятника**

Ще одним методом визначення періоду коливань математичного маятника є відеореєстрація руху кулі у режимі “slow motion” з одночасною реєстрацією часу. Slow motion це функція основної камери сучасних смартфонів, яка дозволяє знімати відео з великою частотою кадрів. Взагалі у кінематографі є стандарт – 24 кадри в секунду. Slow motion дозволяє записувати подію з частотою 60-240 а то й 960 кадрів в секунду. Такий відеоролик запущений зі звичайною для мобільних телефонів частотою 30 кадрів у секунду дозволяє показати відео уповільненим у 2-32 рази. Тобто процеси, які раніше були невидимі для ока людини, зараз стають відкритими для вимірювання. І це зручніше робити, якщо є часова фіксація події. У якості такого годинника використовуємо мобільний додаток “Секундомір” з точністю вимірювання часу 1 мілісекунда (рис. 10, 11).



Рис. 10. Дисплей додатку “Секундомір”



Рис. 11. Моменти часової реєстрації досягнення амплитуди коливання

Алгоритм визначення періода коливань полягає в вимірюванні часового інтервалу, на протязі якого математичний маятник робить  $N = 10$  коливань. Період коливання визначається за формулою:

$$T = \frac{\Delta t}{N}.$$

Результати вимірювання періода коливань за такою технологією наведені в табл. 4.

Таблиця 4

**Результати вимірювання періода коливань**

Дослід	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T, c$										

Отже, середній за 10-ма дослідями період коливань математичного маятника дорівнює:

$$T = 1,725 c.$$

**Використання акселерометра смартфона для визначення періоду коливань математичного маятника**

У мобільному додатку Phyphox вибрано опцію “Вимірювання прискорення без g”. Осцилограма коливань залізної кулі зі смартфоном наведено на рис. 1.

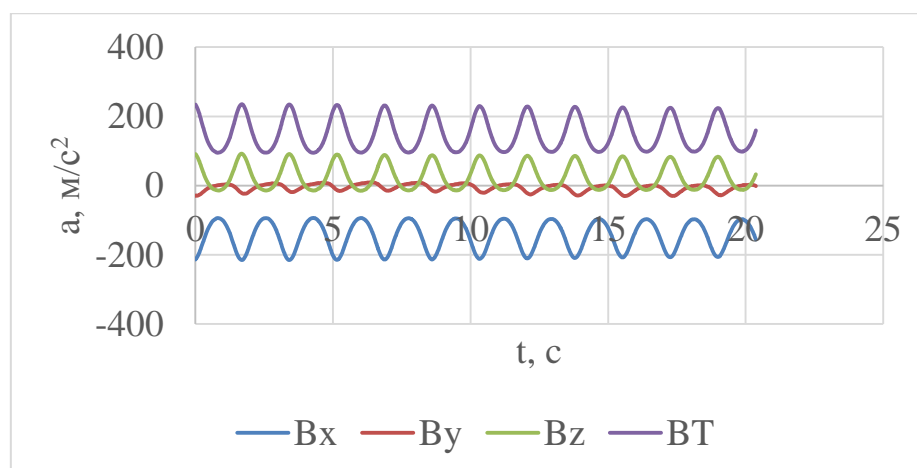


Рис. 1. Осцилограми коливань математичного маятника (Phyphox)

Середній за 10-ма дослідями період коливань математичного маятника для цього методу дорівнює:

$$T = 1,728 \text{ с.}$$

### **Використання датчика освітленості для визначення періоду коливань математичного маятника**

У мобільному додатку Physics Toolbox вибрано опцію “Освещенность”. Осцилограма коливань залізної кулі, зареєстрована смартфоном, наведена на рис. 1.

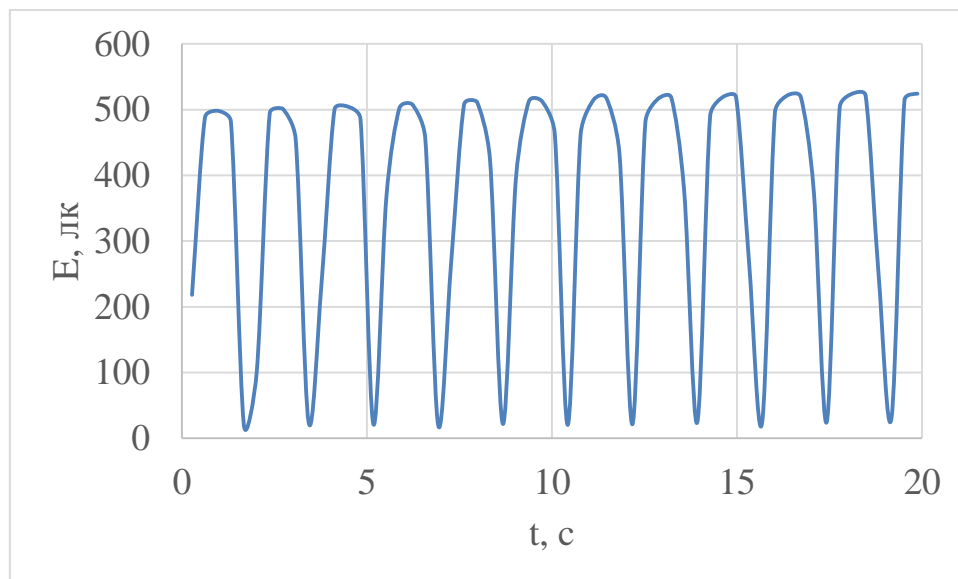


Рис. 1. Осцилограма коливань (Physics Toolbox Sensor Suite)

Середній за 10-ма дослідями період коливань математичного маятника для цього методу дорівнює:

$$T = 1,750 \text{ с.}$$

Отже, періоди коливань математичного маятника, визначених за допомогою різних датчиків смартфона, такі (табл. 5):

**Результати вимірювання періода коливань математичного маятника**

Датчик	Додаток	Період, с
Магнітний	Physics Toolbox	1,732
Магнітний	Phyphox	1,717
Камера	Секундомір + slo moution	1,725
Акселерометр	Phyphox “Вимірювання прискорення без g”	1,728
Датчик освітленості	Physics Toolbox “Освітленість”.	1,750

Отже, є 5 способів вимірювання періода коливань математичного маятника за допомогою смартфона. Найбільш близьким до середнього значення:

$$T = 1,725 \text{ с}$$

є візуальний метод визначення періода коливання математичного маятника з використанням камери смартфона у режимі “slow motion”.

Згідно цієї величини (див. стор. 28) маса Землі:

$$M_{\oplus} = 24,24 \cdot 10^{24} \cdot \frac{0,76}{(1,725)^2} = 6,2 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

У розділі 1 ми показали можливості смартфона, як вимірювача параметрів фізичних полів. На прикладі математичного маятника було продемонстровано роботу датчиків, які ми будемо використовувати надалі.

## 1.6. Визначення моменту інерції смартфона

**Мета:** визначити момент інерції смартфона та порівняти його з довідковими даними, наданими теорією рухів твердого тіла.

**Прилади й матеріали:** м'який килимок і смартфон із додатком, який записує кутову швидкість під час обертального руху, наприклад, програму *phyphox*<sup>8</sup> (RWTH Aachen, Німеччина), доступну для смартфонів Android та iOS.

### Теоретичні відомості

Коли смартфон падає з положення, де він вільно стоїть з центром мас  $S$  на висоті  $d$  трохи вище його найдовшого краю  $b$ , у положення, де він падає задньою стороною на м'який килимок (рис. 1), його потенціальна енергія перетворюється в кінетичну енергію обертання:

$$\frac{I_b}{2} \cdot \omega_{y,max}^2 = mg \left( d - \frac{c}{2} \right). \quad (1)$$

Тут  $m$  і  $I_b$  позначають масу та момент інерції смартфона відповідно,  $g$  — прискорення тяжіння, а  $\omega_{y,max}$  — кутову швидкість руху по колу в момент зустрічі смартфона з килимком.

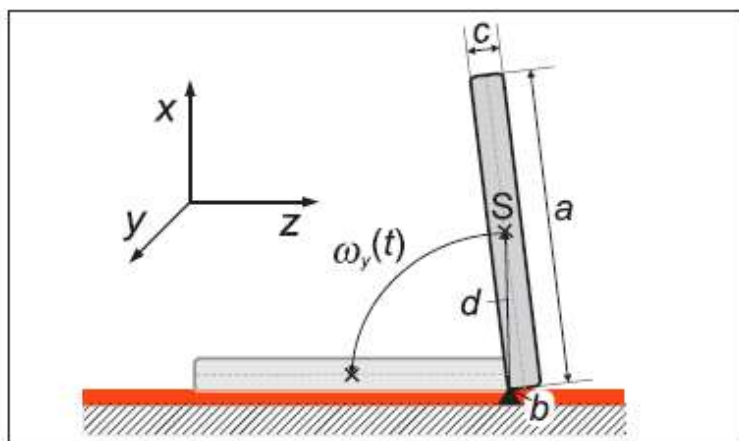


Рис. 1. Схема експерименту

Оскільки вісь обертання — це ребро  $b$  (див. рис. 1), довжина  $d$ , що впливає з розмірів смартфона за теоремою Піфагора

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \quad (2)$$

також необхідна для обчислення моменту інерції  $I_b$  з використанням теореми Штейнера:

$$I_b = I_y + md^2 \quad (3)$$

$I_y$  – головний момент інерції смартфона для осі, спрямованої в напрямку  $Y$ .

Об'єднавши рівняння (1) до (3) знаходимо  $I_y$ :

$$I_y = \frac{mg(2d-c)}{\omega_{y,max}^2} - md^2 \quad (4)$$

Відповідне опорне значення для порівняння з експериментальним результатом, отриманим за допомогою рівняння (4) можна розрахувати, припустивши, що смартфон є однорідним паралелепіпедом. Відповідний головний момент інерції  $I_y$ :

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2), \quad (5)$$

де  $a$  і  $c$  — довжини двох країв смартфона, орієнтованих перпендикулярно до осі  $y$ .

### Експериментальна частина

Експериментальна установка зображена на рис. 1. Спочатку смартфон стоїть на неслизькому м'якому килимку. Додаток *rhyrfox* “Гіроскоп” записує та відображає дані кутової швидкості  $\omega_y(t)$  з гіроскопа MEMS. Смартфон обережно нахиляють до тих пір, поки його центр мас  $S$  не опиниться безпосередньо над довгим краєм  $b$ . У цей момент він починає вільно нахилитися під дією сили тяжіння. Після того, як він зупиниться на килимку, запис даних припиняється, і дані  $\omega_y(t)$  можуть бути проаналізовані або експортовані у вигляді таблиць Excel на інший пристрій.

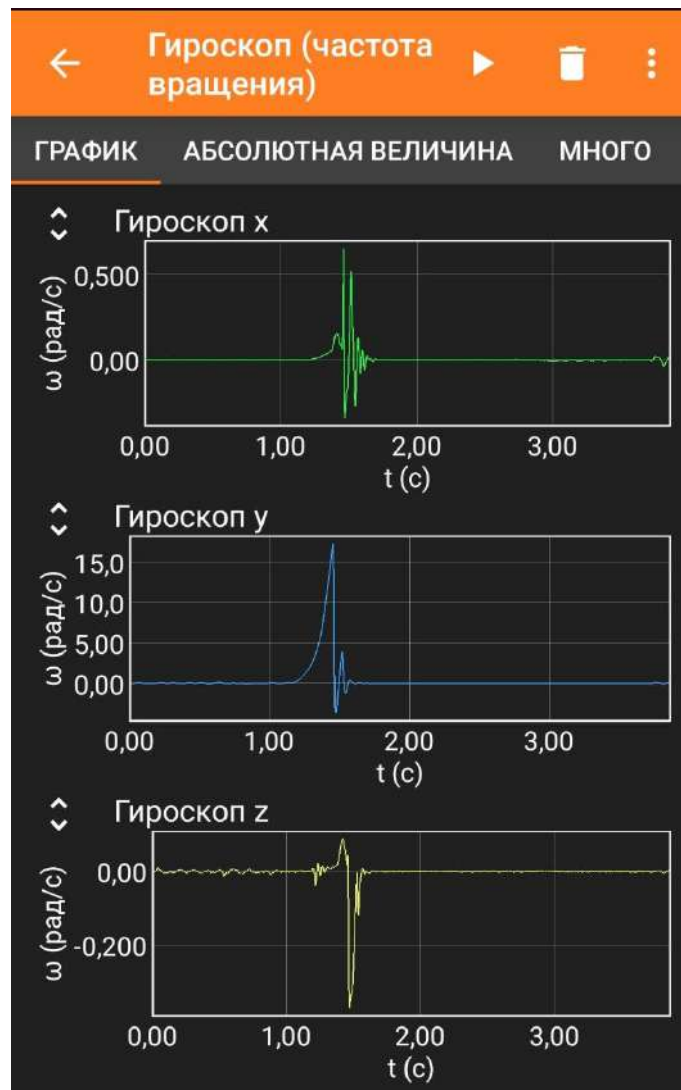


Рис. 2. Дисплей смартфона під час експерименту

На рис. 2 показано дисплей смартфона під час експерименту. Графік залежності кутової швидкості  $\omega_y(t)$  від часу наведено на рис. 3. Початок вільного нахилу при  $t = 1,1$  с, максимальна кутова швидкість ( $t_{\max} = 1,455$  с), а також удар смартфона об килимок ( $t = 1,474$  с) легко ідентифікуються. Максимальну кутову швидкість зчитуємо з таблиці даних Excel або графіка (див. рис. 3), оцінюємо її невизначеність вимірювань і обчислюємо експериментальне та еталонне значення моменту інерції смартфона за допомогою рівнянь. (4) і (5) відповідно (див. табл. 1).



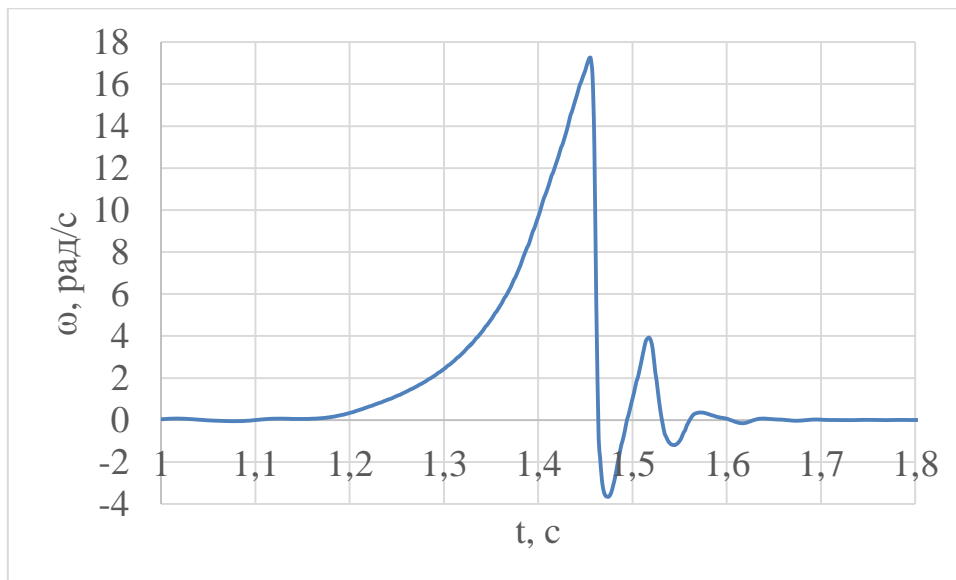


Рис. 3. Кутова швидкість  $\omega_y(t)$  смартфона під час експерименту. Максимальне значення  $\omega_y(t) = 17,47 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Таблиця 1

**Дані смартфона, експериментальні та теоретичні значення моменту інерції  $I_y$ .**

Ширина $a$ , м	0,077
Довжина $b$ , м	0,158
Товщина $c$ , м	0,010
Маса $m$ , кг	0,204
$d$ , м	$d = \frac{1}{2}\sqrt{0,077^2 + 0,01^2} = 0,04 \text{ м}$
Експериментальне значення моменту інерції $I_y$ , $\text{кгм}^2$	$I_y = 0,204 \cdot \left( \frac{9,81(2 \cdot 0,04 - 0,01)}{17,47^2} - 0,04^2 \right) = 1,33 \cdot 10^{-4}$
Теоретичне значення моменту інерції $I_y$ , $\text{кгм}^2$	$I_y = \frac{0,204}{12} (0,077^2 + 0,01^2) = 1 \cdot 10^{-4}$

У експериментах визначено, що обидва значення моменту інерції  $I_y$  узгоджуються в межах заданої невизначеності вимірювання.

Отже, запропонований експеримент дає розумні кількісні результати для головного моменту інерції смартфона. Студенти опанують важливу тему обертального руху твердих тіл за допомогою власних смартфонів як кишенькової лабораторії.

### Список використаних джерел

1. P. Vogt and J. Kuhn, “Analyzing free fall with a smartphone acceleration sensor,” *Phys. Teach.* **50**, 182 (March 2012).
2. P. Vogt and J. Kuhn, “Analyzing simple pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor,” *Phys. Teach.* **50**, 439–440 (Oct. 2012).
3. C. Fahsl and P. Vogt, “Determination of the radius of curves and roundabouts with a smartphone,” *Phys. Teach.* **57**, 566–567 (Nov. 2019).
4. P. Vogt and J. Kuhn, “Analyzing radial acceleration with a smartphone acceleration sensor,” *Phys. Teach.* **51**, 182 (March 2013).
5. A. Shakur and T. Sinatra, “Angular moment,” *Phys. Teach.* **51**, 564–565 (Dec. 2013).
6. M. Patrinoopoulos and C. Kefalis, “Angular velocity direct measurement and moment of inertia calculation of a rigid body using a smartphone,” *Phys. Teach.* **53**, 564–565 (Dec. 2015).
7. M. Monteiro, C. Cabeza and A. Marti, “Rotational energy in a physical pendulum,” *Phys. Teach.* **52**, 312–313 (May 2014).
8. The phyphox homepage by the RTWH Aachen, <https://phyphox.org/de/home-de/>.
9. Kaps, and F. Stallmach. Tilting motion and the moment of inertia of the smartphone. *Phys. Teach.* **58**, 216 (2020); <https://doi.org/10.1119/1.5145423>

## 1. 7. Вимірювання швидкості розповсюдження звуку за допомогою смартфонів

**Мета:** визначити швидкість звуку у повітрі.

**Прилади й матеріали:** два смартфони, п'ятиметрова лінійка.

### Теоретичні відомості

З усіх датчиків, доступних у сучасних телефонах, мікрофон надає найкраще часове розділення, оскільки він записує зазвичай інформацію зі швидкістю 48 кГц. Наявність мікрофону дозволяє за допомогою двох смартфонів з додатками Phyrphox визначити швидкість звуку шляхом вимірювання часу розповсюдження звукової хвилі. У додатку Phyrphox використовується опція «Акустичний секундомір» (рис. 1). Програма використовує мікрофон для реєстрації звуку, який запускає та зупиняє секундомір.

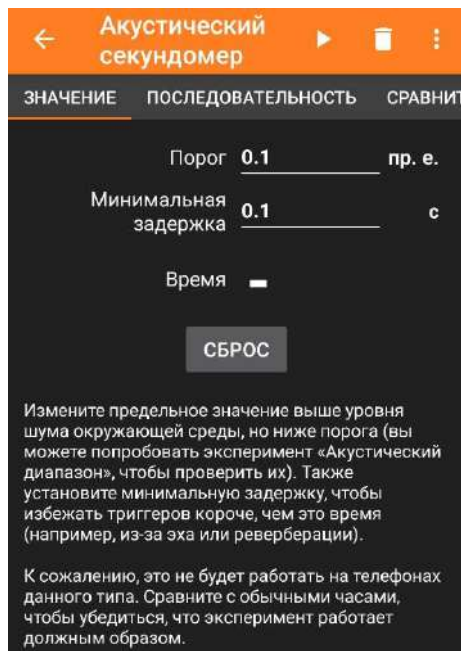


Рис. 1. Додаток Phyrphox пропонує акустичний секундомір, який вимірює час між двома акустичними подіями

Як тільки амплітуда звуку перевищує заданий поріг, починається вимірювання часу. Коли амплітуда перевищує поріг вдруге, вимірювання припиняється і відображається час між двома акустичними подіями. Можна встановити мінімальну затримку, щоб уникнути ненавмисної зупинки секундоміра з першою звуковою подією через її тривалість або реверберацію. Реакція акустичного секундоміра перевіряється шляхом плескання у долоні. Якщо секундомір запускається без хлопань або пропускає хлопки, зазвичай достатньо збільшити поріг спрацьовування або зменшити його.

Сам експеримент проводять двоє студентів зі смартфонами. Вони розміщують телефони на певній відстані (наприклад, 6 м). Під час вимірювання швидкості звуку обидва телефони та джерела обох звукових сигналів повинні знаходитися на прямій лінії, тоді швидкість звуку на відстані 6 м буде визначатися з невизначеністю  $\sim 30$  м/с, що досить точно з огляду на простоту цього експерименту.

Обидва студенти готують акустичний секундомір і стають біля свого телефону (рис. 2).

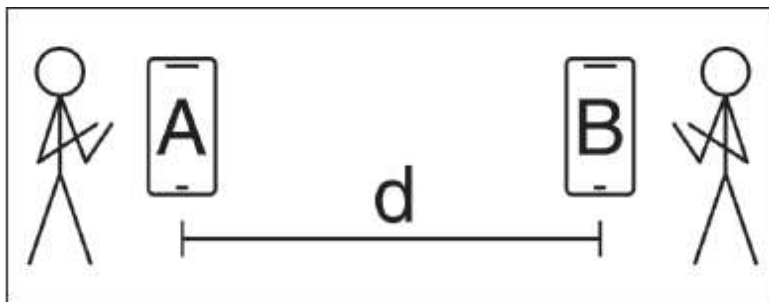


Рис. 2. Схема вимірювання швидкості звуку

Студент *A* генерує звуковий сигнал для запуску таймера на обох телефонах. Генерувати гучний звуковий сигнал можна свистком, плесканням у долоні, барабаном, лопанням повітряних куль тощо. Потім студент *B* зупиняє роботу програм смартфонів іншим звуковим сигналом. Телефони вимірюють різні часові інтервали  $\Delta t_A$  і  $\Delta t_B$ , забезпечуючи дані для розрахунку швидкості

звуку. Телефон  $B$  розпочне вимірювання із затримкою часу  $\Delta t$ , який потрібен звуку, щоб пройти відстань  $d$  між смартфонами. Коли студент  $B$  генерує другий звуковий сигнал обидва телефони зупиняють вимірювання часу, але телефон  $A$  отримує сигнал з затримкою  $\Delta t$ . Це означає, що телефон  $A$ , який почав працювати раніше на  $\Delta t$ , тепер зупиняється пізніше на  $\Delta t$ .

Отже, телефон  $A$  вимірює загальний час між звуковими сигналами  $\Delta t_A$ , який більше часу  $\Delta t_B$ , виміряному телефоном  $B$ , на  $2\Delta t$ :

$$\Delta t_A = \Delta t_B + 2 \Delta t. \quad (1)$$

З рівняння (1) часовий інтервал  $\Delta t$  дорівнює:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_A - \Delta t_B}{2} \quad (2)$$

Таким чином, отримуємо таке рівняння для визначення швидкості звуку:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t_A - \Delta t_B} \quad (3)$$

Слід зазначити, що час реакції смартфона на другий звуковий сигнал не має значення для цього обчислення, оскільки він однаково впливає як на вимірювання  $\Delta t_A$  так і  $\Delta t_B$ .

Оскільки програма генерує вибірки даних зі швидкістю 48 кГц, теоретична часова роздільна здатність значно нижче 1 мс. На практиці це обмежується кінцевим часом наростання фактичних акустичних сигналів, які по-різному записуються обома смартфонами через загасання на відстані.

## Список літератури

1. P. Vogt, J. Kuhn, and S. Müller, “*Experiments using cell phones in physics classroom education: The computer-aided  $g$  determination,*” *Phys. Teach.* 49, 383–384 (Sept. 2011).
2. Ann-Marie Pendrill and Johan Rohlén, “*Acceleration and rotation in a pendulum ride, measured using an iPhone 4,*” *Phys. Educ.* 46, 676 (Nov. 2011).

3. Jochen Kuhn and Patrik Vogt, “*Smartphones as experimental tools: Different methods to determine the gravitational acceleration in classroom physics by using everyday devices*,” *Eur. J. Phys. Educ.* 4, 16–27 (Jan. 2013).
4. J. Chevrier, L. Madani, S. Ledenmat, and Ahmad Bsiesy, “*Teaching classical mechanics using smartphones*,” *Phys. Teach.* 51, 376–377 (Sept. 2013).
5. Rebecca Vieyra, Chrystian Vieyra, Philippe Jeanjacquot, Arturo Marti, and Martín Monteiro, “*Turn your smartphone into a science laboratory*,” *Sci. Teach.* 82, 32 (Jan. 2015).
6. David Mehrl and Marion Hagler, “*Active learning using inexpensive sound cards for circuits and communications experiments*,” *Proc. 28th Annu. Front. Educ.* 03, 1102–1106 (Nov. 1998).
7. Carlos C. Carvalho, J. M. B. Lopes dos Santos, and M. B. Marques, “*A time-of-flight method to measure the speed of sound using a stereo sound card*,” *Phys. Teach.* 46, 428–431 (Sept. 2008).
8. C. E. Aguiar and M. M. Pereira, “*Using the sound card as a timer*,” *Phys. Teach.* 49, 33–35 (Jan. 2011).
9. Lutz Kasper, Patrik Vogt, and Christine Strohmeyer, “*Stationary waves in tubes and the speed of sound*,” *Phys. Teach.* 53, 52–53 (Jan. 2015).
10. Sara Orsola Parolin and Giovanni Pezzi, “*Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures*,” *Phys. Teach.* 51, 508–509 (Nov. 2013).
11. Michael Hirth, Jochen Kuhn, and Andreas Müller, “*Measurement of sound velocity made easy using harmonic resonant frequencies with everyday mobile technology*,” *Phys. Teach.* 53, 120–121 (Feb. 2015).
12. Martín Monteiro, Arturo C. Marti, Patrik Vogt, Lutz Kasper, and Dominik Quarthal, “*Measuring the acoustic response of Helmholtz resonators*,” *Phys. Teach.* 53, 247–249 (April 2015)

## 1. 8. Використання вбудованого мікрофону і навушників.

### Аудіометричний тест зі смартфоном

Смартфони стають все більш потужними, з сучасними аудіокодерами (кодером / декодером), які забезпечують високу якість записаного звуку. Розробники смартфонів тепер пропонують багато звукових додатків, використовуючи вбудований мікрофон і навушники. Це, в принципі, дає можливість перевірити слух, як чиста аудіометрія на смартфоні, де студенти можуть вимірювати частотну залежність рівня слуху власних вух за допомогою смартфона. Вони можуть перевіряти кожне вухо окремо і порівнювати їх, або порівнювати їхні результати з іншими. Експерименти з цього фізіологічного суб'єкта дають можливість зрозуміти і поглибити багато фізичних понять в міждисциплінарному підході.

### Будова людського вуха

Зовнішнє вухо (рiнна) збирає звукові хвилі з навколишнього середовища і спрямовує їх по слуховому проходу до барабанної перетинки, яка починає вібрувати (див. рис. 1).

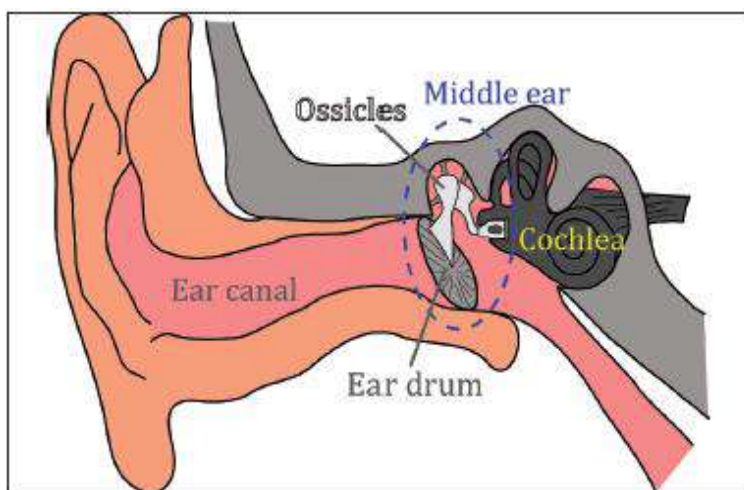


Рис. 1. Будова людського вуха

Вібрація барабанної перетинки передається до овального вікна внутрішнього вуха за допомогою крихітних кісточок: молоточка, ковадла і стремена, як показано на рис. 2.

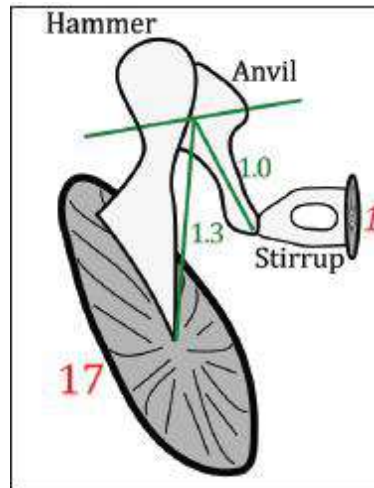


Рис. 2. Співвідношення важеля молотка до важеля ковадла (близько 1,3), а також площі поверхні барабанної перетинки до площі поверхні овального вікна (близько 17) збільшує звуковий тиск на овальне вікно

Вібрації передаються через мембрану овального вікна до равлики, що є спіральною трубкою, наповненою рідиною і вистеленою волосковими клітинами мікроскопічного розміру. Вібрації овального вікна викликають хвилі стиснення і розрідження, що поширюються через равлик, і згодом викликають рух волоскових клітин. Рух волоскових клітин генерує нервові сигнали, які наш мозок потім сприймає як звук.

### Чутливість вуха

Чутливість людського вуха значно змінюється залежно від частоти. Структури зовнішнього та середнього вуха сприяють як чудовій чутливості, так і широкому динамічному діапазону слуху людини. Осикалярна система передає силу від барабанної перетинки до овального вікна внутрішнього вуха з механічною перевагою приблизно 1,3. Тиск на овальне вікно збільшується



приблизно в 22 рази — 1,3 фактора для впливу механічного важеля і 17 для різниці площі між овальним вікном (приблизно 3,2 мм<sup>2</sup>) і ефективною площею барабанної перетинки (приблизно 55 мм<sup>2</sup>). Кісточки (рис. 2) — крім того, що вони є складним важелем, який забезпечує посилення, — можна регулювати за допомогою м'язової дії, щоб послабити звуковий сигнал для захисту від гучних звуків. Щоб запобігти відзеркаленню звукових хвиль на поверхні овального вікна, кісточка також виконує функцію узгодження імпедансу, оскільки вони з'єднують низький опір повітря з високим імпедансом заповненої рідиною раулики. Вухо найбільш чутливе до частот в діапазоні 2 кГц–5 кГц з піком близько 3,7 кГц, що виникає в результаті резонансу слухового проходу, що відповідає закритій трубці довжиною близько 2,5 см (рис. 3).

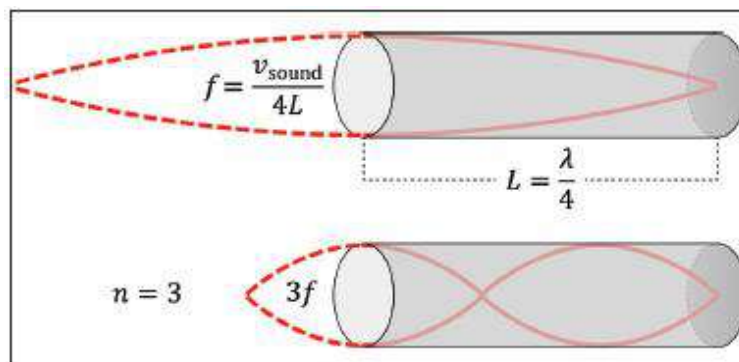


Рис. 3. Аналогія вібраційної струни. Слуховий прохід можна змодельовувати як закриту трубу. Якщо швидкість звуку  $c = 350$  м/с, замкнутий циліндричний стовп повітря довжиною  $L = 2,5$  см вироблятиме основну частоту  $f_1 = (350 \text{ м/с}) / (4 \times 0,025 \text{ м}) = 3,5$  кГц. На практиці ефективна акустична довжина збільшується, а положення пучності трохи виходить за межі відкритого кінця. Для трубки, закритої з обох кінців, виправлена формула  $f_1 = c / (2L_{\text{eff}})$ . Це стосується навушників, де ефективна довжина  $L_{\text{eff}}$  може коливатися від 3 см (накладні навушники) до кількох міліметрів (вкладні навушники)

Ця область високої чутливості дуже важлива для розуміння мовлення, оскільки під час звичайної розмови найчастіше використовуються частоти від

500 Гц до 3 кГц. Для розбірливості мовлення, особливо для англійських мов з великою кількістю глухих приголосних (наприклад, *p, t, k, s*), високі частоти є важливими. Для інших мов, таких як японська або маорі, з довгими голосними звуками ці високі частоти є набагато менш важливими, і, ймовірно, саме тому в Японії слухові апарати використовують дуже мало.

Інша менш важлива область підвищеної чутливості - близько 13,5 кГц, яка може бути пов'язана з резонансом третьої гармоніки слухового проходу. На відміну від трубки, яка є високоселективним резонатором, слуховий прохід неправильної форми забезпечує резонанс для широкого діапазону частот.

### Рівень звуку

Шумоміри відкалібровані в дБ SPL (рівень звукового тиску, див. табл. 1).

Таблиця 1

### Шкала дБ

- Децибел (символ дБ, 1/10 Бел) — це логарифмічна одиниця, яка використовується для опису відношення двох значень фізичної величини:  
 $Q_{(P)} = 10 \log_{10} (P_2/P_1)$ , дБ
- Оскільки це на нелінійній шкалі, значення дБ не можна просто скласти разом.
- Для SPL коефіцієнт є середньоквадратичним звуковим тиском ( $p_{\text{rms}}$ , в Па), поділений на стандартний еталонний звуковий тиск у повітрі ( $p_0 = 20$  мкПа):  $L_p = 20 \log_{10} (p_{\text{rms}}/p_0)$ , дБ.
- Збільшення на 3 дБ за цією шкалою відповідає приблизному подвоєнню квадрата звукового тиску.

Однак наші вуха не однаково добре чують на всіх частотах. Наприклад, найслабший звук, який може почути молода людина з нормальним слухом на частоті 3,5 кГц, становить 0 дБ SPL. На відміну від цього, при частоті 20 Гц звук повинен бути набагато гучнішим при 72 дБ SPL, щоб його просто почути (див. рис. 4).

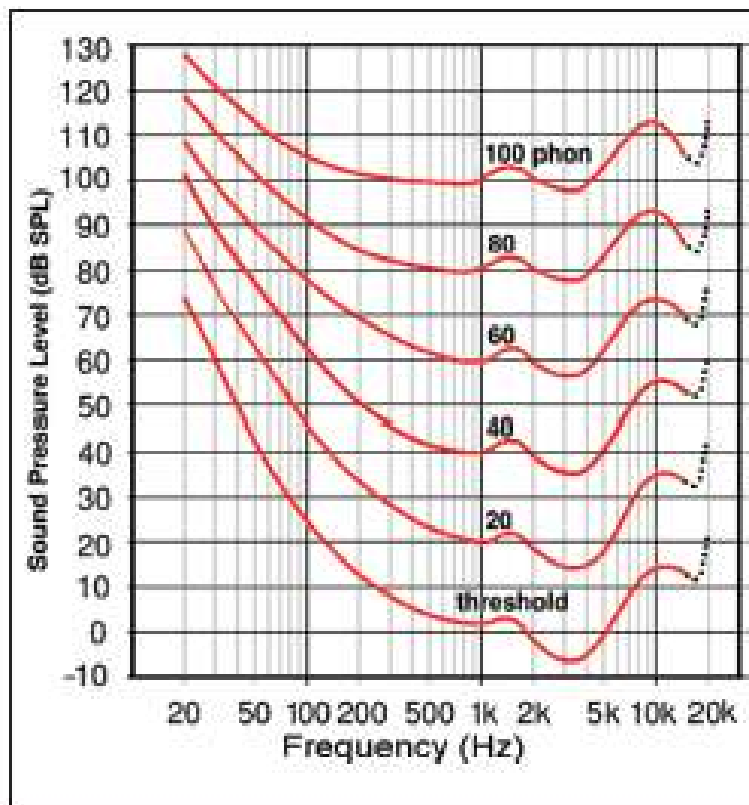


Рис. 4. Криві однакової гучності. Кількість фонів звуку – це дБ SPL звуку на частоті 1 кГц, який звучить так само голосно. Найнижча крива - це середній поріг чутності

Якби нормальну реакцію слуху відобразити на аудіограмі за шкалою SPL, це була б вигнута хвиляста лінія, і було б важко визначити, скільки втрати слуху у людини за частотою. Таким чином, для клінічного використання вигнута шкала SPL нормалізується так, що стає плоскою прямою лінією з 0 дБ для всіх частот. Використовуючи нормалізовану шкалу дБ HL (рівень слуху), нормальний слух – це пряма лінія через верхню частину аудіограми. Таким чином, дБ HL 0 представляє поріг виявлення кожної частоти для молодої здорової людини. Будь-яке відхилення, яке опускається нижче лінії HL 0 дБ, вказує на втрату слуху. Зауважте, що на аудіограмі дБ HL зображено вниз по ординаті як ступінь втрати слуху. Отже, чим нижче крива, тим вище втрата слуху. Для перетворення децибел рівня звуку SPL в шкалу децибел рівня слуху (дБ HL), необхідно враховувати чутливість людського вуха (див. рис. 4). Крім того, оскільки навушники змінюють довжину слухового проходу, аудіометри

повинні бути відкалібровані залежно від типу (наприклад, надвушні, циркулярні або вставні навушники) за допомогою значень корекції для кожної частоти, перевіреної відповідно до специфікацій для аудіометрів. Звичайне розмовне мовлення на відстані 1 м становить близько 60 дБ SPL, що відповідає майже 50 дБ HL. Нормальний слух - це коли найтихші звуки, які чути, знаходяться в діапазоні від -10 до 15 дБ HL (див. табл. 2).

Таблиця 2

### Ступінь втрати слуху

Ступінь втрати слуху	Діапазон втрати слуху (дБ HL)
Нормальний	-10–15
Легкий	16–25
Середній	26–40
Помірний	41–55
Помірно важкий	56–70
Сильний	71–90
Глибокий	91 або більше

Людина, яка не може розпізнати звуки між 16 дБ HL та 25 дБ HL, мають незначну втрату слуху навколо відповідної частоти, що досліджується. Легка втрата слуху становить від 26 дБ HL до 40 дБ HL.

Людина часто відчуває труднощі під час мовлення, особливо в шумних ситуаціях. Помірна втрата слуху становить від 41 дБ HL до 55 дБ HL. Людині часто важко слідкувати за мовленням та іншими тихими звуками. Помірна важка втрата слуху становить від 56 дБ HL до 70 дБ HL. Сильна втрата слуху становить від 71 дБ HL до 90 дБ HL. Людина не може чути мовлення навіть у тихому оточенні та не чує загальних шумів, таких як рух транспорту, якщо вони не гучні. Глибока втрата слуху перевищує 90 дБ HL. У цьому випадку людина не може почути більшість звуків, якщо вони не є особливо гучними.

## Звичайні перевірки слуху

Перевірки слуху зазвичай проводяться аудіологом у середовищі, захищеному від зовнішнього шуму. Тест складається з представлення слухачеві звуків різних рівнів і різної частоти. Слухач вказує звуки, які він/вона здатний сприймати, щоб визначити найнижчий рівень (поріг чутності) для кожної частоти. Результати тесту наносять на аудіограму, яка показує поріг чутності на різних частотах (рис. 5).

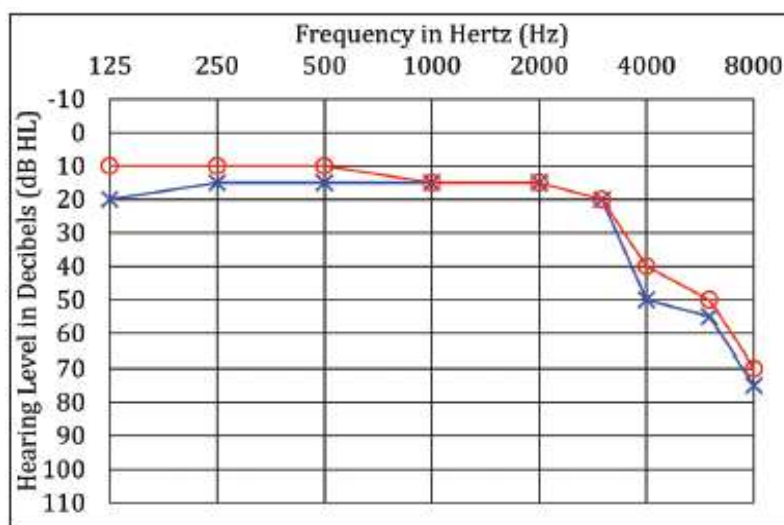


Рис. 5. Аудіограма лівого (сині хрестики) і правого (червоні кола) вуха, що показує втрату слуху на високих частотах, яка поступово виникає з віком. Горизонтальна вісь показує частоту звуку в Гц. Вертикальна вісь відображає рівень звуку, виміряний в дБ НЛ. Нуль децибел у верхній частині осі означає найтихший звук, який людина зазвичай може почути. Чим більше людина рухається вниз по осі, тим більше збільшується рівень звукового тиску і звук стає гучнішим

Аудіометри (прилади, що використовуються для перевірки слуху) здатні видавати чисті тони на різних частотах. Основними компонентами аудіометра є осцилятор, атенуатор і переривник. Генератор виробляє чисті тони, як правило, на октавних і півоктавних частотних інтервалах, починаючи від 125 Гц до

8000 Гц або навіть до 20 000 Гц. Атенюатор контролює рівень звуку тонів з кроком 5 дБ або з кроком 1 дБ для більш високої роздільної здатності. Перемикач керує проміжком часу, протягом якого чистий тон подається пацієнту. Тест на повітропровідність чистого тону можна проводити за допомогою навушників, вставних приймачів або динаміків. Вибір відповідного датчика для використання з досліджуванним зазвичай визначається факторами пацієнта.

### **Перевірка слуху смартфонами**

Коли смартфони продаються в комплекті з різними навушниками (наприклад, Apple iPhone 6s разом із Apple EarPods), це дозволяє розробникам відкалібрувати процес вимірювання для цього конкретного пакета у порівнянні зі стандартними аудіометричними налаштуваннями. Як альтернатива, біологічне калібрування для певного пакета складається з наближення еталонного рівня звуку через поріг чутності однієї або кількох здорових молодих людей із нормальним слухом. Ми проводимо перевірку слуху на смартфоні та стандартних навушниках, які постачаються з базовою моделлю Huawei p 20 Pro.

Доступно кілька програм для перевірки слуху. Наприклад, AudCal розроблено для професійного використання та дуже добре відкалібровано. Додаток слуху, використаний у цьому дослідженні, Hearing Test & Ear Age Test, призначений для самооцінки, простий у використанні та безкоштовний. Тим не менш, програма використовує ті ж принципи, що й для звичайного тесту. Студенти можуть виконати самоперевірку приблизно за п'ять хвилин. Зверніть увагу, що гучність повинна бути встановлена на 50%.

На рис. 6 наведено зразкове вимірювання рівня звуку в дБ HL для семи частот.

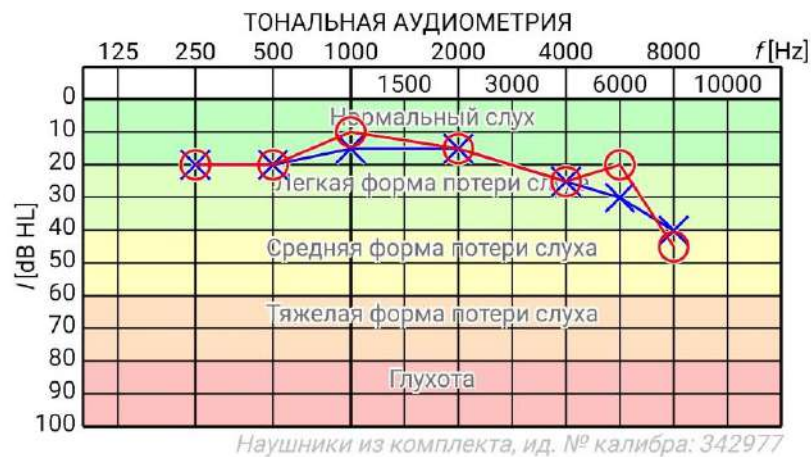


Рис. 6. Перевірка слуху для семи частот

Результаты показывают легкую потерю слуха для высоких частот (від 3000 до 8000 Гц). Для правого уха (червоні кола) средняя потеря слуха для частоты 8000 Гц.

На рис. 7 наведено порівняння результатів аудиометрії з віком людини.

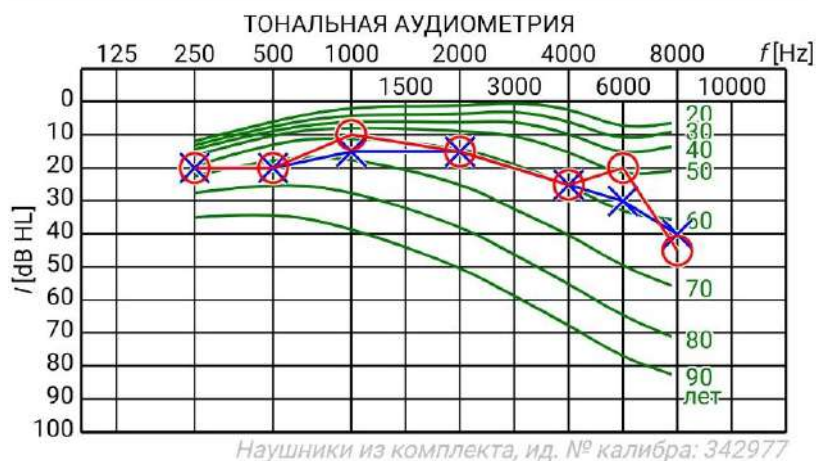


Рис. 7. Аудиограма лівого (сині хрестики) і правого (червоні кола) вуха

На рис. 8 наведені результати перевірки слуху на розбірливість мовлення людини. Вимова цифр ведеться програмою в цьому випадку при наявності шуму.

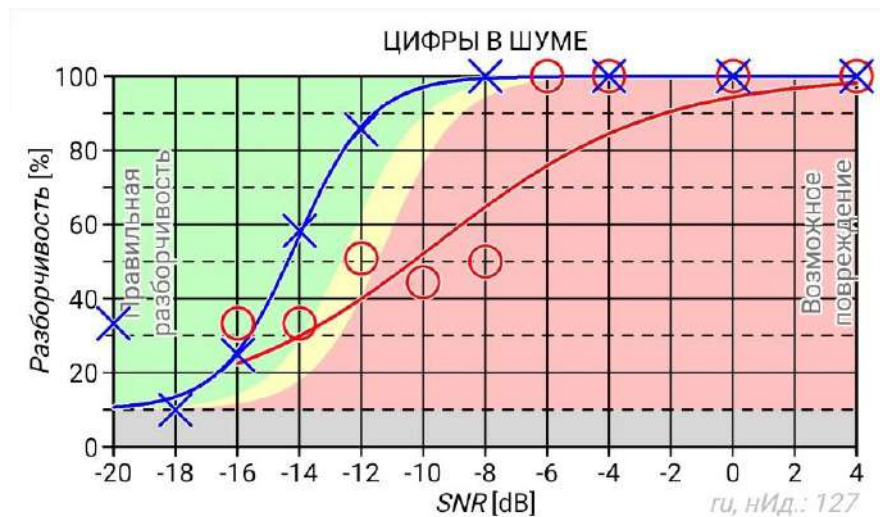


Рис. 8. Перевірка слуху при наявності шуму

### Обговорення

Вже існує кілька досліджень, які повідомляють про порівняльні результати щодо порогів слуху, отриманих за допомогою тесту слуху на смартфоні, і результатів, отриманих за допомогою звичайної аудіометрії чистого тону. Однак слід підкреслити, що більшість досліджень використовує конкретну модель смартфона з навушниками, що постачаються для демонстрації корисних результатів, а для інших навушників очікуються менш надійні результати. На відміну від звичайної аудіометрії чистого тону, яка використовує стандартизовані вставні навушники або навушники з відкаліброваною силою обв'язки, тест на слух на смартфоні, що виконується самостійно, використовує звичайні комерційні навушники, які самі учні можуть вільно вставляти у вухо. Це може призвести до великої невизначеності отриманих порогових значень.

Проведення кількох тестів з одним і тим же студентом і одним і тим же налаштуванням дозволяє обчислити середнє значення та дисперсію, що спонукає до обговорення надійності процесу вимірювання. Крім того, через шум навколишнього середовища можуть бути неточні результати, що зазвичай



призводить до втрати чутливості вуха. Навушники можуть допомогти приглушити шум навколишнього середовища в класі. Крім того, студенти повинні мати власні пристрої. В іншому випадку перед використанням навушники слід продезінфікувати за допомогою спиртової серветки. Проведення експериментів, за допомогою яких учні можуть виміряти частотну характеристику власного слухового апарату сприйняття, не тільки мотивує учнів, але й сприяє усвідомленню крихкості людського вуха, а також профілактичні заходи щодо збереження органів здоровими (наприклад, уникнення гучної музики).

*Примітка:* тест не слід використовувати для медичної діагностики через відсутність повного медичного огляду. Однак учні можуть дізнатися більше про свій слуховий стан і попередити про потенційну втрату слуху.

### **Список літератури**

1. For an overview of the anatomy and function of the ear, see A. R. Møller, *Hearing: Anatomy, Physiology, and Disorders of the Auditory System*, 2nd ed. (Academic Press, Amsterdam, Boston, 2006).
2. To get a good idea of how the ear works, students can watch animations, for example from <https://www.youtube.com/watch?v=eOXuM1J8wNs>.
3. S. Hougaard, S. Ruf, and C. Egger, “EuroTrak+ JapanTrak 2012: Societal and personal benefits of hearing rehabilitation with hearing aids,” *Hearing Rev.* 20 (3), 16–26 (2013).
4. T. Jiang, “Important Revision of ANSI S3.6-1989: ANSI S3.6- 1996 American National Standard Specification for Audiometers,” *Revue Canadienne d'Orthophonie et d'Audiologie* 22 (1), 5–9 (1998).
5. J. G. Clark, “Uses and abuses of hearing loss classification,” *Asha* 23, 493–500 (1981).

6. F. Larrosa et al., “Development and evaluation of an audiology app for iPhone/iPad mobile devices,” *Acta Oto-Laryngologica*, 135 (11), 1119–1127 (2015), <https://doi.org/10.3109/00016489.2015.1063786>.
7. M. Masalski, T. Grysinski, and T. Krecicki, “Biological calibration for web-based hearing tests: Evaluation of the methods,” *J. Med. Internet Res.* 16 (1), e11 (2014), <https://doi.org/10.2196/jmir.2798>.
8. Yuichi Sakashita, *Hearing Test & Ear Age Test*, <https://itunes.apple.com/us/app/hearing-test-ear-age-test/id1067630100>.
9. Anna Chi Shan Kam et al., “Clinical evaluation of a computerized self-administered hearing test,” *Int. J. Audiol.* 51 (8), 606–610 (2012).
10. Abu-Ghanem et al., “Smartphone-based audiometric test for screening hearing loss in the elderly,” *Eur. Arch. Oto-RhinoLaryngology* 273 (2), 333–339 (2016).
11. D. W. Swanepoel et al., “Smartphone hearing screening with integrated quality control and data management,” *Int. J. Audiol.* 53 (12), 841–849 (2014).
12. O. Handzel et al., “Smartphone-based hearing test as an aid in the initial evaluation of unilateral sudden sensorineural hearing loss,” *Audiol. Neurotol.* 18 (4), 201–207 (2013), <https://doi.org/10.1159/000349913>.
13. L. Renda et al., “Smartphone based audiometric test for confirming the level of hearing; Is it usable in underserved areas?” *J. Ind. Adv. Otol.* 12 (1), 61-66 (2016).
14. Na Youngmin et al., “Smartphone-based hearing screening in noisy environments,” *Sensors* 14 (6), 10346–10360 (2014).

## **ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВUOD ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ**

Пандемія, спровокована вірусом SARS-CoV-2, призвела до перерв у навчанні віч-на-віч як у школах, так і в університетах. Раптовий перехід від очних до онлайн-занять спричинив багато проблем для викладачів і студентів. Ключовою проблемою була організація лабораторної діяльності без доступу до лабораторій. У цьому розділі ми описуємо, як подолати цю проблему, дозволивши студентам виконувати різні фізичні експерименти вдома. Прості експерименти, аналогічні тим, які вони проводили в лабораторії, кожен студент проводить індивідуально під онлайн-контролем викладача. Використовується обладнання, яке зазвичай доступне вдома або яке можна придбати за низькою ціною як в магазинах, так і в Інтернеті.

Формування цікавого домашнього досвіду для учнів ґрунтується на двох основних ідеях. По-перше, це спонукати їх використовувати повсякденний предмет, з яким молоді люди справді знайомі: мобільний телефон, який дійсно є потужним комп'ютером, оснащеним багатьма типами датчиків, включаючи тиск, температуру, прискорення та магнітне поле. Друга ідея полягає в тому, що для вивчення природи не завжди потрібно використовувати дороге обладнання.

Власне кажучи, відомі фізики 17 століття Галілео Галілей та Ісаак Ньютон досягли важливих результатів, використовуючи відносно прості вимірювальні прилади або навіть рудиментарні по відношенню до наявних в даний час. Крім того, вивчення фізики за допомогою простих інструментів може виявитися корисним і в звичайних умовах навчання. Давня проблема розуміння фізики – це очевидна відсутність зв'язку між теорією та повсякденним життям. «Виконання» фізики з повсякденними предметами

(технологія DYOD) є засобом подолання цієї труднощі та зробить фізику менш абстрактною.

Через карантин деякі студенти, ймовірно, не зможуть зібрати всі предмети, необхідні для виконання одного або кількох із запропонованих дослідів. У світлі цього студенти можуть отримати від викладача експериментальні дані, пов'язані з деякими експериментами. Тим не менш, усвідомлюючи, що просте маніпулювання даними не є насправді корисним для розуміння природи, ми наполегливо заохочуємо студентів проводити власні експерименти, а не просто покладатися на наявні дані. Тому у цьому розділі ми покажемо, як самотужки можна виготовити експериментальне обладнання і як використати смартфони для вимірювання, наприклад, коефіцієнтів поверхневого натягу різних рідин. Крім цього, перевіримо справедливність рівняння Бернуллі, продемонструвавши конструкцію експериментальної установки, виготовлену з матеріалів, які оточують нас. На прикладі лабораторних робіт "Перевірка рівняння Бернуллі" і "Визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини" та інших доведемо, що використання технології BYOD у поєднанні з розробленими установками дозволяє кожному студенту проводити повноцінні дослідження як в аудиторії, так і дистанційно, вдома. Точність вимірювань кінематичних параметрів і часу за допомогою сучасних девайсів дозволяє розрізнити, наприклад, навіть невелику відмінність законів течії скрізь отвір рідини від гранульованих матеріалів.

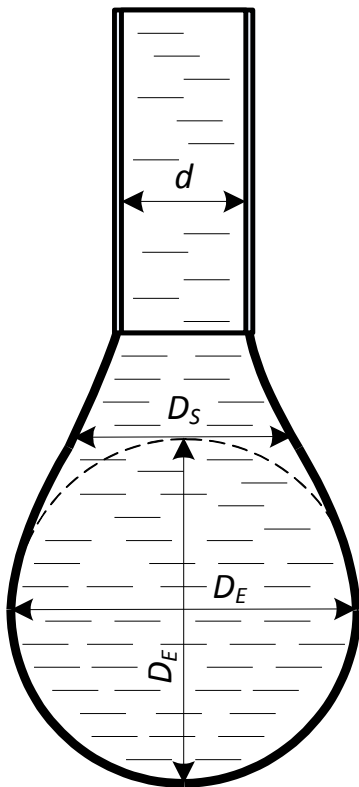
## 2.1. Визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини методом відриву краплі

Якщо рідина повільно витікає з нижнього отвору вузької вертикальної трубки, то утворюються краплини, які в момент відриву мають форму, зображену на рис. 1. На краплину в момент відриву діє сила тяжіння  $mg$  і сила поверхневого натягу  $F_n = 2\pi r\sigma$ , які врівноважують одна одну:

$$mg = 2\pi r\sigma, \quad (1)$$

де  $r$  – радіус краплини в місці її розриву (це місце називають шийкою).

Діаметр шийки  $d = 2r$  приблизно дорівнює внутрішньому діаметру кінчика трубки, з якої витікає рідина. Взагалі форма краплини описується рівнянням



Лапласа, де вага краплі і сила поверхневого натягу збалансовані. Розв'язок цього рівняння вимагає розрахункового аналізу, який використовується для високоточного вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу. У нашому випадку, коли головним є ознайомлення студентів з методами вимірювання і суттю фізичного явища, можна вважати  $r$  – радіусом кінчика трубки. Знаючи  $d$  і  $m$ , визначаємо  $\sigma$ :

Рис. 1. Краплина рідини на кінці трубки

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{mg}{\pi d}. \quad (2)$$

Якщо не має можливості виміряти масу краплі, то коефіцієнт поверхневого натягу можна визначити за формулою (Adamson, 1967):

$$\sigma = \frac{\Delta\rho g D_E^2}{H}, \quad (3)$$

де  $\Delta\rho$  – різниця густини між рідиною і повітрям,  $g$  – прискорення вільного падіння ( $g = 9,81 \text{ м / с}^2$ ),  $D_E$  є максимальним діаметром краплі перед падінням (див. рис. 1). Величину  $1/H$  можна розуміти як форм-фактор, обумовлений витягнутою формою краплі, який розраховується за формулою (Adamson, 1967):

$$\frac{1}{H} = 0,345 \left( \frac{D_S}{D_E} \right)^{-2,5}, \quad (4)$$

Значення  $D_S$  визначається діаметром краплі на відстані  $D_E$  від дна краплі (див. рис. 1).

Отже, за формулою (3) можна отримати значення коефіцієнта поверхневого натягу шляхом вимірювання діаметрів краплі лінійкою безпосередньо на екрані смартфона.

### **Будова дослідної установки та результати виконання лабораторної роботи “Визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини методом відриву краплі”**

Для отримання крапель виготовляється пристрій (рис. 2 а), який складається з невеликої прозорої пляшки, в кришку якої вставляється корпус 20 мл або 50 мл шприця.

Накінецьник кулькової ручки без кульки вставлявся в отвір конуса-накінецьника шприця (рис. 2 б). Внутрішній діаметр виготовленої таким чином випускної трубки склав  $d = 0,84 \text{ мм}$ . Вимірювання внутрішнього діаметра трубки виконувалося за допомогою смартфона. Для цього спочатку фотографувався торець трубки та вимірювався мікрометром його зовнішній діаметр ( $d_{\text{зовн.}} = 2,11 \text{ мм}$ ), а потім з порівняння діаметрів на збільшеному фото визначався внутрішній діаметр.



Рис. 2. Дослідницька установка для дистанційного проведення лабораторної роботи

Аналогічно вимірювалися геометричні параметри крапель. Результати вимірювань наведено в табл. 1. Цей пристрій (без накінецьника кулькової ручки) використовувався також для перевірки справедливості рівняння Бернуллі та дослідження закону течії скрізь отвір гранульованих матеріалів.

Таблиця 1

**Результати вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу  $\sigma$**

Рідина	$D_E$ , мм	$D_S$ , мм	$D_E / D_S$	Густина рідини, кг/м <sup>3</sup>	$\sigma$ (30°C), мН/м	Табличне значення $\sigma$ (20°C), мН/м
Вода	3,4	2,7	1,26	1000	$68 \pm 3$	72.8
Олія сонячна рафінована	2.765	2,33	1,1875	930	$37 \pm 3$	32-44
Етанол	0.8			780	$22 \pm 2$	23

## 2.2. Визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини методом важеля

Для визначення залежності коефіцієнта поверхневого натягу рідини від температури при дистанційному виконанні лабораторної роботи застосовується метод важеля, роль якого виконує прямолінійний алюмінієвий дріт. Дріт виконує дві функції: він є вагами і водночас аналогом дротяної рамки, яку зазвичай витягують з рідини для вимірювання коефіцієнту її поверхневого натягу. Рівень рідини встановлюють на 1-1,5 мм нижче гострого краю посудини. При торканні води дротом утворюється тонка плівка рідини завширшки  $x$  (рис. 2).

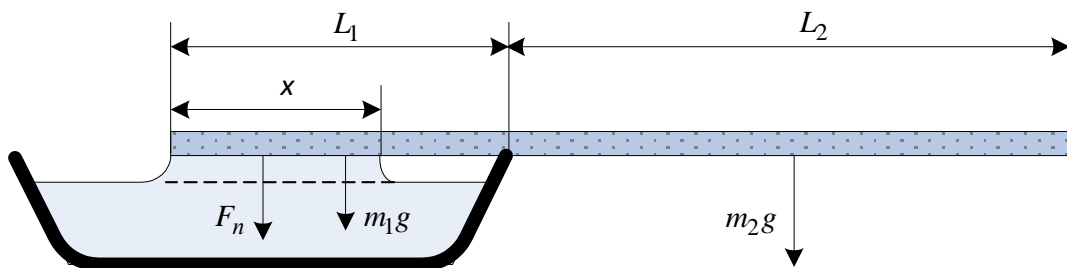


Рис. 2. Схема установки для вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу

Вздовж поверхні плівки діє сила поверхневого натягу  $\vec{F}_n$ , модуль якої дорівнює:

$$F_n = 2x\sigma \quad (5)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу. Множник 2 з'являється тому, що плівка має дві поверхні.

Нехай  $m$  - маса дроту,  $L = L_1 + L_2$  - довжина дроту,  $m/L$  — маса одиниці довжини дроту. Запишемо умову рівноваги дроту щодо краю ємкості, тобто рівність моментів сил:

$$F_n \left( L_1 - \frac{x}{2} \right) + m_1 g \frac{L_1}{2} = m_2 g \frac{L_2}{2}. \quad (6)$$



Підставимо в (6) силу поверхневого натягу (5), маси:

$$m_1 = \frac{L_1 m}{L}, \quad m_2 = \frac{L_2 m}{L}, \quad m = \rho V = \frac{\rho \pi d^2 L}{4}$$

і виразимо коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$ . Вимірювання і обчислення спростяться, якщо вода змочуватиме всю довжину  $L_1$ . Тоді остаточно отримаємо розрахункову формулу:

$$\sigma = \frac{\rho \pi d^2 g}{8} \frac{L}{L_1} \left( \frac{L}{L_1} - 2 \right). \quad (7)$$

Величини  $L$  та  $L_1 = L - L_2$  вимірюються лінійкою, а діаметр дроту  $d$  - мікрометром. При відсутності мікрометра значення  $x$  та  $d$  визначаємо за допомогою смартфона, фотографуючі установку, зображену на рис. 2, на фоні лінійки.

Якщо у посудину налити гарячу рідину, наприклад, воду, тоді через деякий час температура води буде знижуватися, що вплине на величину коефіцієнта поверхневого натягу. Найбільш відома емпірична залежність коефіцієнта поверхневого натягу від температури, яка була запропонована Лорандом Етвешем (рис. 3). Ця залежність підтверджена у наш час теоретичними дослідженнями (Хайдаров, Машек, Майоров, 2012).

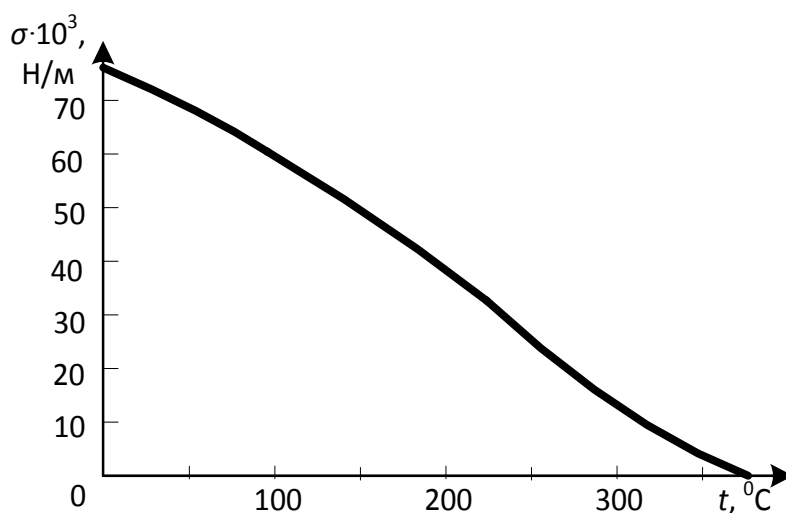


Рис. 3. Залежність поверхневого натягу води від температури

## Результати вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу рідини методом важеля

Для вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу рідини методом важеля (рис. 2) використовувався алюмінієвий дріт (густина  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ) оптимальною довжиною, як показали експерименти,  $L = 15 \text{ см}$  та діаметром  $d = 1,77 \text{ мм}$ . При температурі води  $30^\circ\text{C}$  отримано  $L_1 = 5,4 \text{ см}$ , тобто за формулою (7) коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma = 70 \pm 2 \text{ мН/м}$ , що близько до табличного значення коефіцієнта поверхневого натягу води при кімнатній температурі та узгоджується з результатами, отриманими методом відриву краплі. Залежність коефіцієнта поверхневого натягу води від температури наведена в табл. 2.

Таблиця 2

### Результати вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу $\sigma$ в залежності від температури

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\gamma, \text{мН/м}$	75,5	74,4	72,9	71,2	69,5	67,8	66,1	64,4	62,7	60,8	58,9

### 2. 3. Вимірювання величини сили відриву поверхні плоского тіла від рідини методом важеля

**Мета.** Метою роботи є визначення функціональної залежності сили відриву диску, який дотикається до рідини плоскою поверхнею, від величини площі диску, наявності в ньому отворів та його периметру.

Розглянемо методику проведення лабораторної роботи з фізики, яка використовує саморобну дослідницьку установку для визначення функціональної залежності сили відриву диску, який дотикається до рідини плоскою поверхнею, від величини площі диску та його периметру.

Класична теорія явищ на межі рідини і твердого тіла базується на двох константах: коефіцієнті поверхневого натягу рідини  $\sigma$  і куті змочування рідиною твердого тіла  $\theta$ . Однак ці "константи" залежать від цілого ряду додаткових обставин. Так, на величину конкретного кута змочування впливає більше десятка параметрів. Цей кут залежить від суперпозиції ряду явищ і процесів і повинен бути кінцевим результатом обчислення, що відображає реакцію рідини на суму всіх зовнішніх впливів, а не основою для подальших розрахунків.

Під час викладання студентам навчального матеріалу нюанси визначення кута, як правило, випадають з розгляду, і в більшості випадків завдання зводяться до варіантів повного змочування або повного не змочування поверхонь; складна крива поверхні рідини в капілярі замінюється сферичною, а при розгляді рівноваги краплі на поверхні в якості незалежної змінної величини вводиться площа основи краплі, що обчислюється з її радіусу. Витоки таких спрощень лежать в способі отримання відомого рівняння Юнга (1804 р.), що зв'язує кут змочування  $\theta$  і коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$  на межі середовищ:

$$\cos \theta = (\sigma_{SG} - \sigma_{SL}) / \sigma_{LG}, \quad (1)$$

де нижні пари індексів відносяться до пар речовин, які контактують, на межі між якими вимірюється або обчислюється поверхневий натяг;  $S$  - тверда поверхня;  $L$  - рідина;  $G$  - газ.

Як видно з цього рівняння макроскопічний параметр  $\theta_0$  не залежить від властивостей молекул, а уявлення про силове поле між молекулами враховується тільки на лінії їх розмежування. Тому з постановки і трактування результатів експериментів по визначенню коефіцієнта поверхневого натягу рідини студенти роблять помилковий висновок, що сила діє тільки по лінії змочування. Взаємодія всіх інших молекул рідини і твердого тіла на контактуючих поверхнях з їх поля зору випадає. Це є дидактичною проблемою, і цей підхід до вивчення адгезії та когезії речовин (без урахування досить суттєвих поправок) треба виправляти.

Роль об'ємних і поверхневих сил при взаємодії рідини з твердим тілом можна з'ясувати, провівши три досліди: 1) з вимірювання величини сили відриву поверхні плоского тіла від рідини, 2) відриву вісячої краплі від горизонтальної поверхні, яка її утримує та 3) з ниткою у вигляді петлі. Простота постановки дослідів, можливість копіювання розробленого нами обладнання, доступність матеріалів дозволяє студентам досліджувати явища на межі двох середовищ не тільки в лабораторних умовах, а й дистанційно.

Розуміння міжмолекулярних взаємодій є ключовим для досягнення контролю над матеріалами на молекулярному рівні. У сучасній фізиці сили, які діють між поверхнями макроскопічних тіл через третє середовище (наприклад, вакуум і пару) називають поверхневими силами, тоді як сили, які діють для утримання двох тіл при контакті називають силами зчеплення. І в тому і в іншому випадку це, більшою мірою, сили Ван-дер-Ваальса, які можуть бути притягальними, відштовхувальними або дорівнювати нулю.

Необхідно відзначити, що за 217 років існування рівняння (1) не отримано достатньо повного його експериментального підтвердження. У деяких публікаціях справедливність цього рівняння ставиться під сумнів. Наприклад,

вплив шорсткості та хімічного складу поверхні на форму крапель води та кут контакту  $\theta$  рівнянням (1) не враховується взагалі.

### Теоретичні відомості

Для визначення залежності коефіцієнта поверхневого натягу рідини від температури у п. 2.2 застосовується метод важеля, роль якого виконує прямолінійний алюмінієвий дрід. Дрід виконує дві функції: він є вагами і водночас аналогом дротяної рамки, яку зазвичай витягують з рідини для вимірювання коефіцієнту її поверхневого натягу. Рівень рідини встановлюють на 1-1,5 мм нижче гострого краю посудини. При торканні води дротом утворюється тонка плівка рідини завширшки  $L_1$  (рис. 1а).

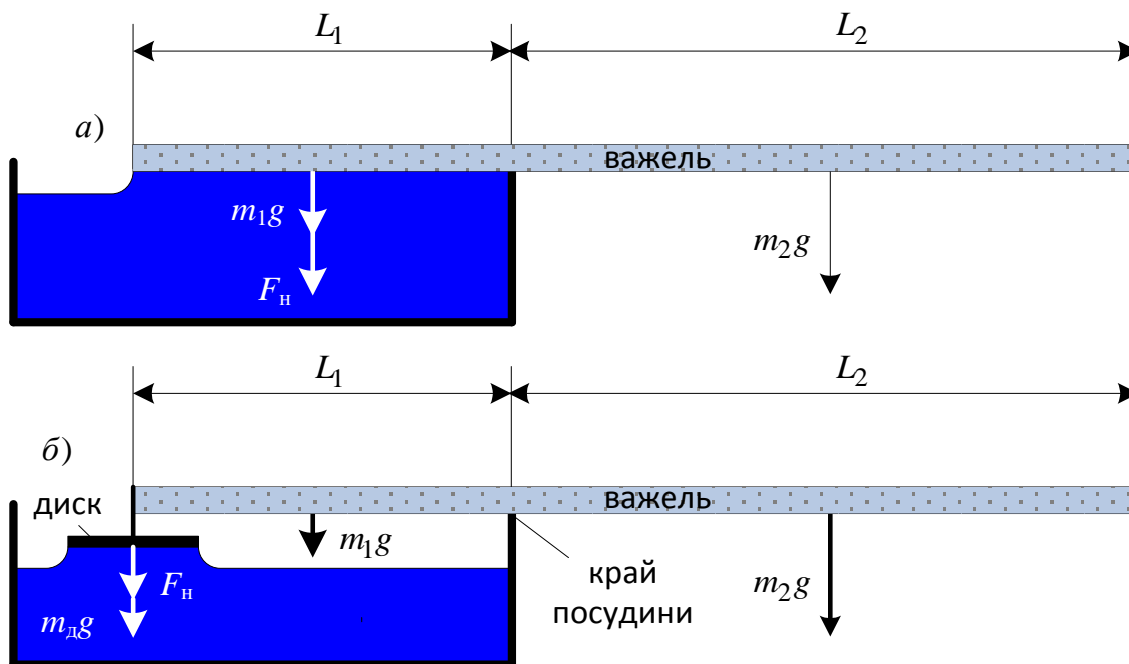


Рис. 1. Схема установки для вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу та сили відриву плоского тіла від рідини

Вздовж поверхні плівки діє сила поверхневого натягу  $\vec{F}_n$ , модуль якої дорівнює:

$$F_n = 2L_1\sigma \quad (1)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу. Множник 2 з'являється тому, що плівка має дві поверхні.

Нехай  $m$  - маса дроту,  $L = L_1 + L_2$  - довжина дроту,  $m/L$  — маса одиниці довжини дроту. Запишемо умову рівноваги дроту щодо краю ємкості, тобто рівність моментів сил:

$$(F_n + m_1g)\frac{L_1}{2} = m_2g\frac{L_2}{2}. \quad (2)$$

Підставимо в (2) силу поверхневого натягу (1), маси:

$$m_1 = \frac{L_1m}{L}, \quad m_2 = \frac{L_2m}{L}, \quad m = \rho V = \frac{\rho\pi d^2 L}{4}$$
 і виразимо коефіцієнт поверхневого

натягу  $\sigma$ . Тоді остаточно отримаємо розрахункову формулу:

$$\sigma = \frac{mg}{2L} \left[ \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\rho\pi d^2 g}{8} \frac{L}{L_1} \left( \frac{L_2}{L_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Величини  $L$  та  $L_1 = L - L_2$  вимірюються лінійкою, а діаметр дроту  $d$  - мікрометром. При відсутності мікрометра значення  $d$  визначаємо за допомогою смартфона, фотографуючі алюмінієвий дріт на фоні лінійки.

В умовах дистанційного навчання роль алюмінієвого дроту може виконувати кавова трубочка (соломка для коктейлів) діаметром 4,8 мм. Прямолінійна ділянка трубочки – важеля складає 160 мм, маса 0,4 г. Досліди показали, що при кімнатній температурі  $L_2 = 116$  мм, тобто  $L_1 = 44$  мм. За формулою (3) величина  $\sigma = 0,073$  Н/м, що підтверджує працездатність метода. Оскільки маса трубки невелика чутливість методу висока. Тому цей прилад можна застосувати для розв'язання іншої задачі, а саме, вимірюванню величини сили відриву поверхні плоского тіла від рідини (рис. 1б). Чому актуальна ця задача для студента, який вивчає тему поверхневого натягу рідини?

Відповідно до класичних уявлень за силову взаємодію під час відриву поверхні плоского тіла від рідини відповідальні сили поверхневого натягу, і

максимальна сила відриву, наприклад, плоского диску вагою  $m_d g$  від поверхні рідини пропорційна периметру кола  $\pi d$  і поверхневому натягу  $\sigma$  :

$$F = m_d g + \pi d \cdot \sigma \cdot \cos \theta, \quad (4)$$

де  $\theta$  – крайовий кут у кромки диска.

Сила відриву досягає максимального значення при вертикальному напрямку поверхні рідини, тобто коли  $\theta = 0$ . Взагалі кажучи, сила взаємодії повинна б залежати від властивостей кожної з речовин, які контактують, але це не відображається у формулі (4). Тому такі пояснення фізики процесу відриву плоскої поверхні від рідини студентам не зрозумілі. У загальному випадку сумарна сила відриву тіла вагою  $m_d g$  повинна складатися з поверхневої сили, пропорційної периметру тіла, що виймається з рідини, і сили, що залежать від площі поверхні:

$$F = m_d g + k \sigma P + \beta S, \quad (5)$$

де  $k$  — поправочний коефіцієнт поверхневого натягу рідини;  $P$  – периметр, вздовж якого відбувається змочування твердого тіла;  $\beta$  — коефіцієнт пропорційності;  $S$  - площа змоченої поверхні.

У довідниках наведені значення коефіцієнтів поверхневого натягу рідин, які межують зі своєю парою. Коефіцієнти поверхневого натягу рідини, що межує зі своєю парою та з іншою густішою речовиною, значно різняться між собою. Тому не можна довідкові значення використовувати без врахування умов контакту. Значення  $\sigma$  на межі двох рідин або на межі рідина–тверде тіло завжди менші, ніж у випадку вільної поверхні рідини, коли вона межує з власною парою. Це цілком природно, оскільки молекули речовини взаємодіють з молекулами поверхневого шару рідини і послаблюють сили, які втягують молекули всередину рідини. Так, мило зменшує поверхневий натяг води. Розчин цукру, розчини різних солей збільшують поверхневий натяг рідин. Отже, коефіцієнт поверхневого натягу повинен мати два індекси, перший з яких

відноситься до рідини, а інший – до середовища, з яким межує її вільна поверхня, або це враховувати, використовуючи коефіцієнт  $k$ .

Використовуючи “метод важеля” студент самотужки та, головне, дистанційно може дослідити функціональну залежність (5) від параметрів контактуючого з рідиною тіла: його площі контакту, периметру тощо. Запишемо умову рівноваги важеля (рис. 1б):

$$(F_n + m_d g)L_1 + \left(\frac{L_1}{L} mg\right) \cdot \frac{L_1}{2} = \left(\frac{L_2}{L} mg\right) \cdot \frac{L_2}{2}.$$

Звідси

$$F_n \cdot L_1 = \left(\frac{L_2}{L} mg\right) \cdot \frac{L_2}{2} - \left(\frac{L_1}{L} mg\right) \cdot \frac{L_1}{2} - m_d g L_1 = \frac{mg}{2L} (L_2^2 - L_1^2) - m_d g L_1 = \frac{mg(L_2 - L_1)}{2} - m_d g L_1$$

або

$$F_n = 0,5mg \left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right) - m_d g. \quad (6)$$

Якщо  $m_d g \ll F_n$ , тоді

$$f = \frac{F_n}{mg} = 0,5 \left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right). \quad (7)$$

$$F_n = 0,5mg \left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right). \quad (8)$$

Отже, для обчислення сили поверхневого натягу  $f = \frac{F_n}{mg}$  потрібно знати масу

важеля  $m$  та відношення довжин  $\frac{L_2}{L_1}$ . Вимірювання можна проводити з набором

пластин різної форми і площі, тіл з незвичайною формою, наприклад дисків з декількома отворами різного діаметру і т. і. Можна визначати силу відриву тіл, виготовлених з різних матеріалів. Варіювання в широких межах абсолютних



розмірів, форми, стану поверхні і хімічного складу тіл, що випробовуються, є принциповою відмінністю цих експериментів від аналогічних "класичних" дослідів.

### Результати дослідження

З урахуванням того, що досліди студенти будуть робити вдома, за плоскі тверді тіла було вибрано прозорі пластмасові диски з полімерної плівки товщиною 270 мкм (рис. 2 а). По центру диска приклеюється тонке кільце від кавової трубочки, в яке вставлявся алюмінієвий дріт – важіль (рис. 2 б). Маса алюмінієвого важеля склала 7,645 грама, діаметр  $\varnothing 3,5$  мм, довжина 323 мм. Маса дисків була 0,071 - 1,384 г в залежності від діаметрів дисків  $d = 15 - 70$  мм. Максимальна сила відриву визначалася, коли відбувався відрив диску від поверхні рідини. Для цього відрізок важеля довжиною  $L_2$  збільшувався до моменту відриву. Метою дослідів було визначення залежності сили відриву від 1) площі поверхні тонких дисків, що виготовлені з різних матеріалів та торкаються поверхні рідини, 2) їх периметру, 3) наявності отворів в дисках. Результати дослідів наведені в табл. 1, графіках залежностей на рис. 3 – 6.

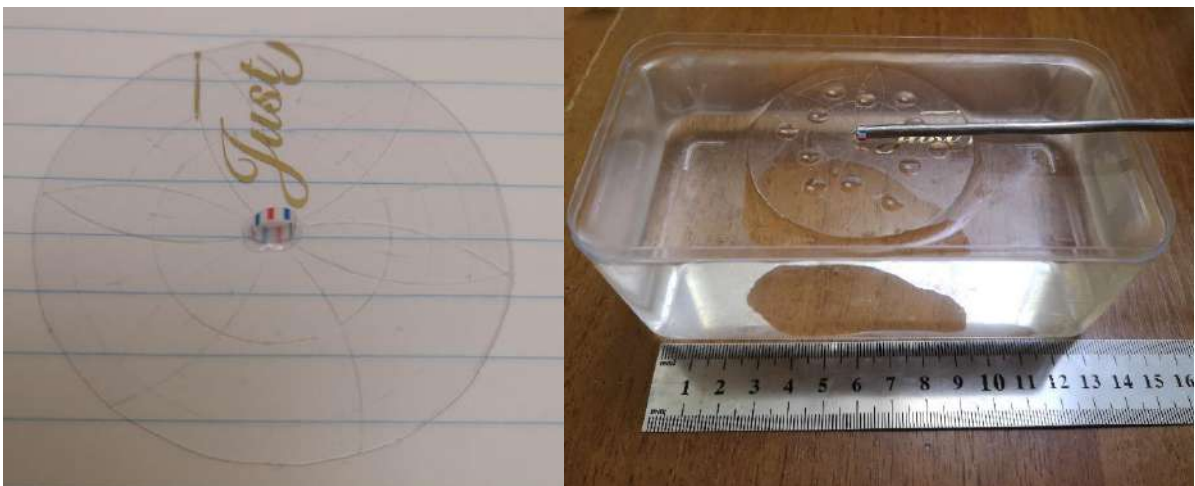


Рис. 2. Фото установки з важелем та диском

**Результати вимірювання сили відриву  $F_H$  дисків з полімерної плівки від поверхні води**

$m_d$ , г	Діаметр диска, мм	Площа диска, мм <sup>2</sup>	Периметр диска, мм	$L_2$ , мм	$L_1$ , мм	$L_2 / L_1$	$F_H$ , мН
0,071	15	176,7	47,1	174	149	1,17	5,68
0,137	20	314,16	62,8	185	138	1,34	11,41
0,26	30	706,86	94,3	201	122	1,65	21,75
0,458	40	1256,64	125,7	225	98	2,30	44,11
0,71	50	1963,5	157,1	241	82	2,94	65,75
1,002	60	2827,4	188,5	260	63	4,13	107,43
1,384	70	3848,45	219,9	273	50	5,46	153,67
1,091*	60	2827,4	188,5	259	64	4,05	103,55

\*- полімерна плівка, покрита знизу Al плівкою

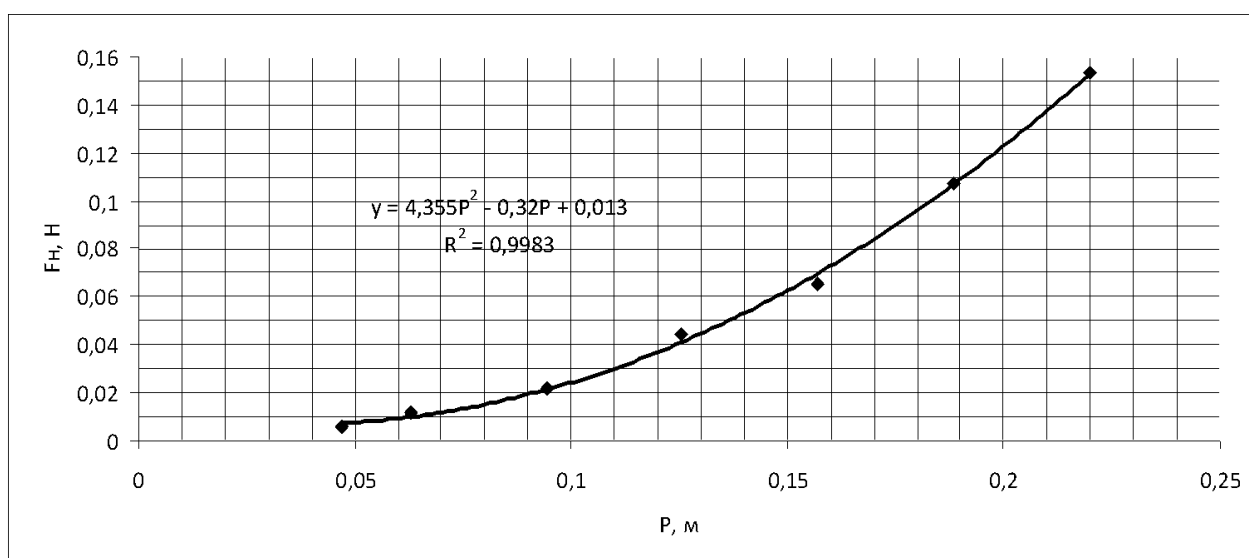


Рис. 3. Графік залежності сили відриву від периметру диску

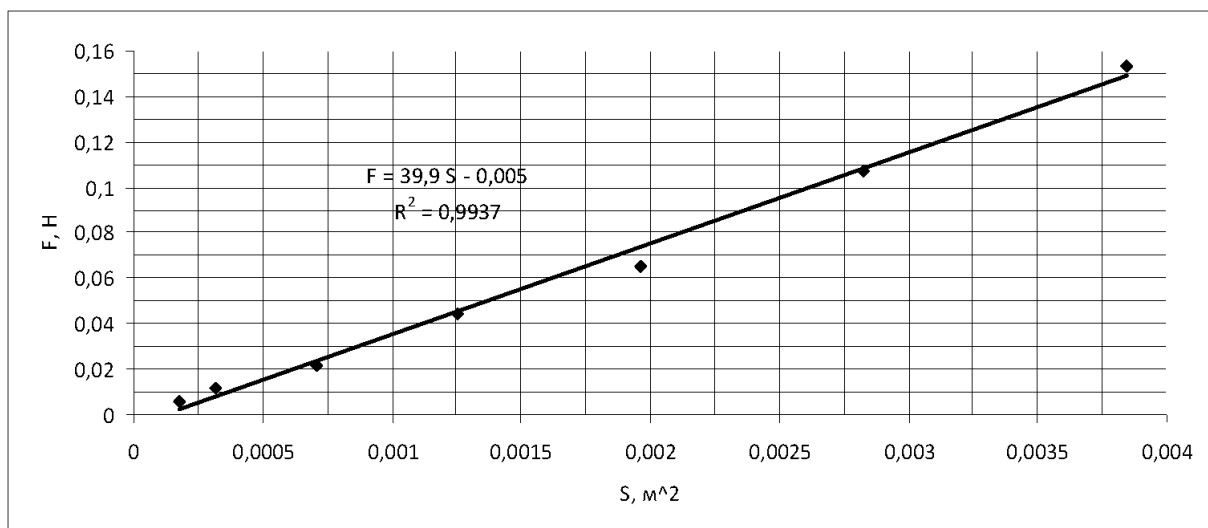


Рис. 4. Графік залежності сили відриву  $F_H$  від площі контактної поверхні диска  $S = \pi d^2 / 4$

Як видно з рис. 3 лінійної залежності  $F = \sigma \cdot l$  не існує ( $l$  в даному випадку – периметр). Тобто, сила поверхневого натягу під час підйому диска не працює, “виключена”. Графік на рис. 4 лінійний, тобто сила відриву диска від рідини прямо пропорційно залежить від площі диска. Це доводить, що сила відриву визначається об’ємними силами взаємодії молекул рідини зі всіма молекулами твердого тіла, а не тільки вздовж лінії розмежування. З рівняння лінії на рис. 4 визначено, що коефіцієнт пропорційності в рівнянні (5)  $\beta \approx 40 \text{ Н/м}^2$ , що узгоджується з результатами дослідів  $\beta \approx 45 \text{ Н/м}^2$  інших дослідників.

Крім пари вода – полімерна плівка коефіцієнт  $\beta$  може бути визначений і для інших матеріалів. Так, якщо поверхню полімерного диска покрить знизу Al фольгою та провести ті ж досліди, тоді отримуємо коефіцієнт  $\beta = 40 \text{ Н/м}^2$  (див. табл. 1). Для пари вода—скло  $\beta = 38 \text{ Н/м}^2$ , пари сталь—вода  $\beta = 42 \text{ Н/м}^2$ , для пари вода—латунь  $\beta = 16 \text{ Н/м}^2$ . З цього можна зробити висновок, що коефіцієнти  $\beta$  для матеріалів, яки добре змочуються, прямують до граничного

значення  $\beta \approx 40 \text{ Н / м}^2$ , який визначається міцністю зв'язків молекул рідини між собою.

Щоб довести, що значення коефіцієнта  $\beta$  є константою і визначається не взаємодією фаз – твердого тіла і рідини, – а міцністю зв'язків молекул рідини між собою, в дисках дираколом робляться однакові отвори  $\varnothing$  6 мм (див. рис. 2 б). Для симетрії отвори пробивали парами з різних боків геометричної осі диска. Площа диска діаметром  $\varnothing$  60 мм при цьому зменшувалася, а довжина границі розмежування (периметр взаємодії) – збільшувалася. При пробитті 20 отворів в диску його площа зменшилася на 20%, а периметр з  $P_0$  за рахунок отворів зріс і став рівним  $3 P_0$ . Проте сила відриву від води суцільного диску  $F_0 = 96 \text{ мН}$  і перфорованого не змінилася. Це свідчить про те, що відповідальними за зчеплення є всі молекули води, які знаходяться під диском. Саме вони шляхом перерозподілу сил зчеплення в просторі зберігають майже незмінну величину сили відриву диска від рідини.

Пояснити виявлений зв'язок сили відриву і геометричних характеристик диску: периметру і площі – можна парною потенційною функцією взаємодії молекул, що описується, потенціалом Леннарда-Джонса. Ця силова взаємодія існує для будь-яких молекул. Потенційна функція подібна для всіх однакових пар молекул, де б вони не знаходилися. Для розрахунку сили взаємодії поверхонь рідких і твердих тіл досить визначення величини сил міжмолекулярної взаємодії між усіма молекулами рідини у всьому об'ємі рідини, а не тільки на границі твердого тіла з вільною поверхнею рідини.

Доповнити цей висновок можна виконавши досліди з краплею води, що висить на стелі, де вона утримується не поверхневими силами викривленої лінії розмежування рідини з повітрям, а адгезійною силою на всій площі контакту рідини з твердим тілом в поєднанні з об'ємним розтягуванням усієї маси краплі (рис. 5).

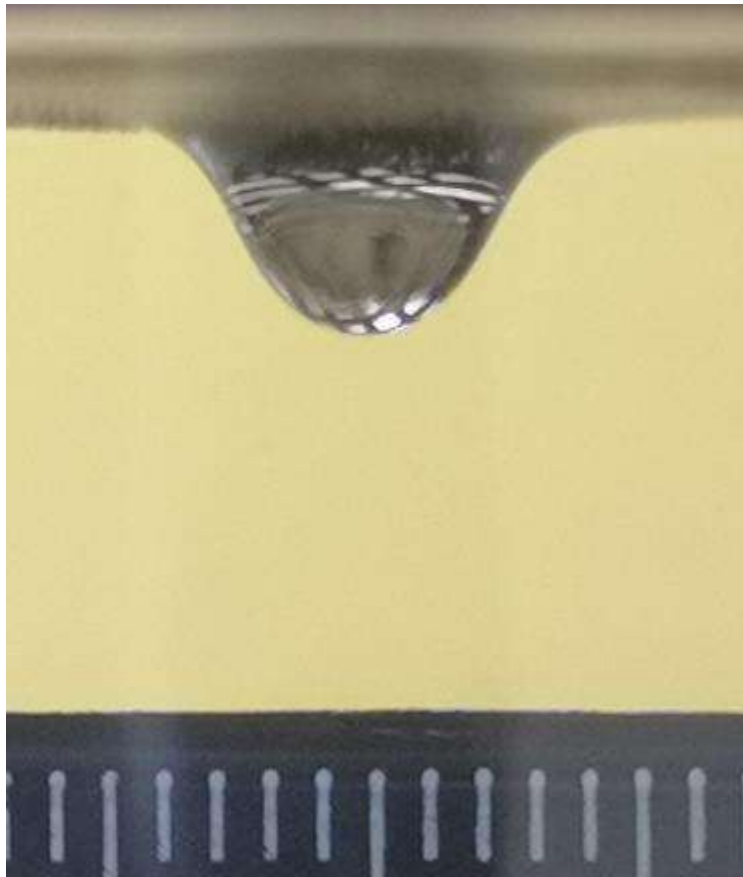


Рис. 5. Форма вісячої краплі перед падінням (діаметр основи 8 мм)

Форма поверхні краплі є наслідком перерозподілу внутрішніх напружень починаючи від межі різнорідних середовищ. При цьому силою поверхневого натягу, яка діє у горизонтальному напрямку на лінії дотику до утримуючої краплю поверхні, неможливо пояснити, хто утримує краплю від падіння? Тому виникає питання: чи є взагалі сила поверхневого натягу? Довести її існування можна виконавши інший дослід. Переконливим експериментальним доказом тангенціальної природи цієї сили є те, що показано на рис. 6: на поверхню мильної плівки накладена петля з нитки довільної форми. Вона з часом не змінюється.

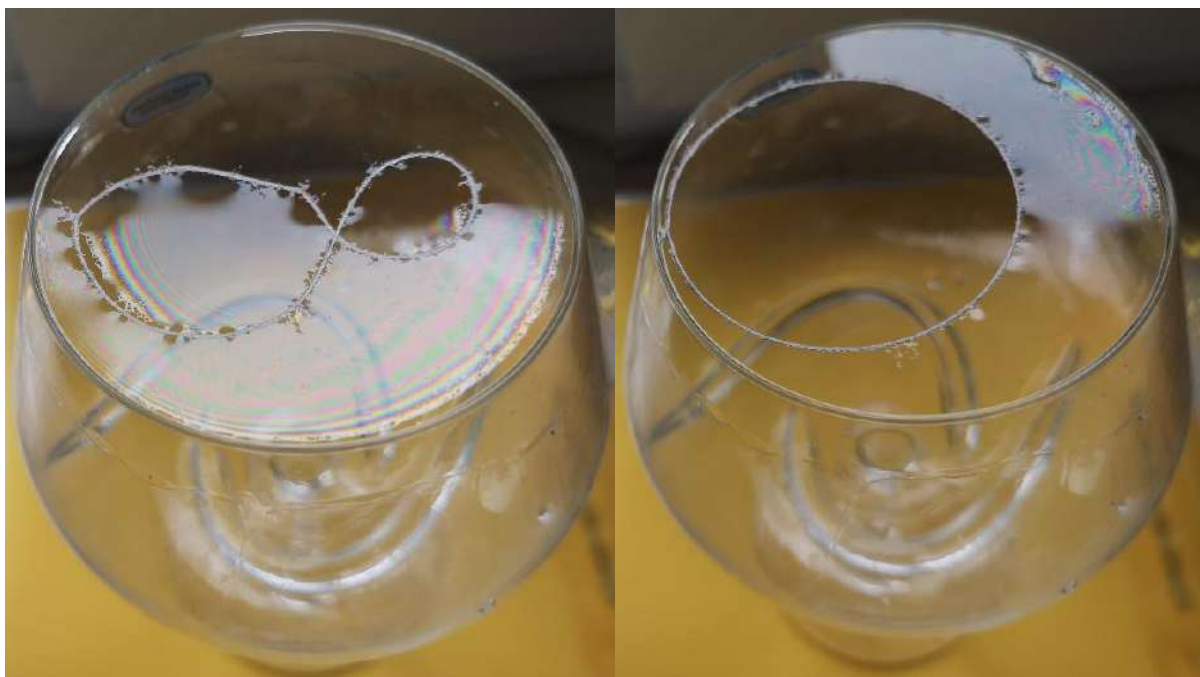


Рис. 6. Експериментальне підтвердження тангенціальної орієнтації сили поверхневого натягу

Якщо доторкнутися пальцем до поверхні, обведену ниткою, тоді відразу ж петля приймає округлу форму, яка виникає в результаті дії тангенціальної сили поверхневого натягу, що діє по дотичній до поверхні води на кожну точку нитки. Кожен елементарний шматок нитки відчуває дію сил як з внутрішнього боку нитки так і з зовнішнього, але густина повітря значно менше густини води, тому і кількість взаємодіючих на межі молекул різна. Цей дослід підкреслює той факт, що поверхневий натяг залежить від двох рідин, що контактують.

Аналогічний дослід можна провести якщо на поверхню води положити петлю з нитки, а потім доторкнутися до поверхні, обведену ниткою, мильною паличкою. Тоді петля завдяки різниці коефіцієнтів поверхневого натягу мильної води і чистої буде розтягнута тангенціальними поверхневими силами й прийме форму кола.

Отже, роль об'ємних і поверхневих сил при взаємодії рідини з твердим тілом студент може з'ясувати вдома, провівши серію переконливих дослідів: з

вимірювання величини сили відриву поверхні плоского тіла від рідини, вісячими краплями та з ниткою у вигляді петлі покладеною на плівку мильної води. Простота постановки дослідів, доступність матеріалів дозволяє студентам досліджувати явища на межі двох середовищ не тільки в лабораторних умовах, а й дистанційно.

## Висновки

На прикладі серії дослідів розглядається явище поверхневого натягу, природа якого пояснюється силами міжмолекулярного зчеплення. В роботі доводиться:

1) сила відриву диска від поверхні води непропорційна периметру диска. Це доводить той факт, що поверхневий натяг рідини як особлива реально діюча тангенціальна сила себе у цьому досліді не проявляє;

2) сила відриву диска від рідини прямо пропорційно залежить від площі диску:  $F \propto \beta S$ ;

3) Граничне значення міцності зв'язків молекул рідини між собою дорівнює  $\beta = 40 \text{ Н / м}^2$ ;

4) незмінність величини сили відриву того ж самого диска при збільшенні кількості виконаних в ньому отворів і залежність сили відриву тільки від площі поверхні цільного диска доводить той факт, що в утриманні диска беруть участь всі молекули, що знаходяться в контактному шарі диска і рідини.

## Список використаних джерел

1. Горюнов Ю. В., Сумм Б. Д. Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 232 с.
2. Fabio L. et al. Theoretical Models for Surface Forces and Adhesion and Their Measurement Using Atomic Force Microscopy. *International Journal of Molecular Sciences*. 2012, 13, 12773-12856; doi:10.3390/ijms131012773. [www.mdpi.com/journal/ijms](http://www.mdpi.com/journal/ijms)
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
4. Физический энциклопедический словарь: Под ред. А. М. Прохорова. М.: Сов. энциклопедия, 1984. 944 с
5. Jonson R. E., Dettre R. H. *Surface and Colloid Science*: Ed. by E. Matievic. New York, 1969. V. 2. P. 85—153
6. Bikerman J. J. *Surface Chemistry*. New York. Academic Press, 1958. 501 p.
7. Eid K. F., Panth M. and Sommers A. D. The physics of water droplets on surfaces: exploring the effects of roughness and surface chemistry. *Eur. J. Phys.* 39 (2018) 025804 (21pp) <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa9c8a>
8. Здешиц В.М., Здешиц А.В., Прихожа Ю. О. Використання технології BYOD під час виконання лабораторних робіт з фізики. *Фізико-математична освіта*. 2020. Випуск 3 (25). Частина 2. С. 43-49. doi.10.31110/2413-1571-2020-025-3-024.
9. Физические величины: Справочник: под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
10. Якібчук П.М., Клим М.М. Молекулярна фізика. Підручник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2013. 584 с
11. Иголкин С. И. Критический анализ опытов по измерению углов смачивания и сил поверхностного натяжения. *Прикладная физика* № 4, 2007. с. 43-51.



## 2. 4. Перевірка рівняння Бернуллі

Ця лабораторна робота, яка розглядається як об'єкт для дистанційного навчання фізики, присвячена перевірці справедливості рівняння Бернуллі. Відшукаємо теоретичну залежність рівня води від часу її витікання з циліндра висотою  $H$  та площиною поперечного перерізу  $S_1$ , наповненого до країв рідиною (рис. 4). Задамося питанням: за який час уся рідина виллється через отвір  $S_2$  в дні циліндра? Вязкість рідини не враховуємо.

Рівняння Бернуллі для цього випадку має вигляд:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (8)$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $v_1$  – швидкість руху площини  $S_1$ ,  $v_2$  – швидкість рідини в отворі  $S_2$ .

З врахуванням рівняння нерозривності течії:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (9)$$

рівняння Бернуллі буде мати вигляд:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (10)$$

Тобто швидкість витікання рідини з отвору буде дорівнювати:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (S_2/S_1)^2}}. \quad (11)$$

Елементарний об'єм рідини  $dV$ , що витікає з отвору за час  $dt$ , дорівнює  $dV = S_2 v_2 dt$ . З іншого боку  $dV = -S_1 dh$ . Тому

$$dV = -S_1 dh = S_2 v_2 dt = S_2 \cdot \sqrt{\frac{2gh}{1 - (S_2/S_1)^2}} \cdot dt. \quad (12)$$

Тобто час витікання рідини з отвору буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}
 t &= \int_0^t dt = -\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{1-(S_2/S_1)^2}{2g}} \times \int \frac{h}{H\sqrt{h}} dh = \\
 &= 2 \cdot \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{1-(S_2/S_1)^2}{2g}} (H^{1/2} - h^{1/2}) = \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{1-(d_2/d_1)^4}{2g}} (H^{1/2} - h^{1/2}). \tag{13}
 \end{aligned}$$

З умови  $h=0$ , загальний час витікання рідини дорівнює:

$$t = 2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{1-(d_2/d_1)^4}{2g}} \cdot H. \tag{14}$$

Тобто, для відношення діаметрів  $d_1/d_2 = 14$  та  $H = 10$  см час витікання рідини  $\approx 30$  с. Якщо  $d_1 \gg d_2$ , то

$$t = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}} \times (H^{1/2} - h^{1/2}). \tag{15}$$

Звідки рівень рідини під час витікання скрізь отвір в посудині визначається формулою:

$$h = \left[ \sqrt{H} - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} \times t \right]^2. \tag{16}$$

З цього робимо висновок: рівняння залежності рівня рідини від часу є квадратичним.

## Приклад виконання лабораторної роботи “Перевірка рівняння Бернуллі”

Для виконання лабораторної роботи також використовується технологія BYOD. Для реєстрації залежності висоти рівня рідини в посудині з отвором від часу використовуються смартфони в режимі відео і секундоміра (див. рис. 5 а). Результати експериментів відображено на графіку рис. 6.

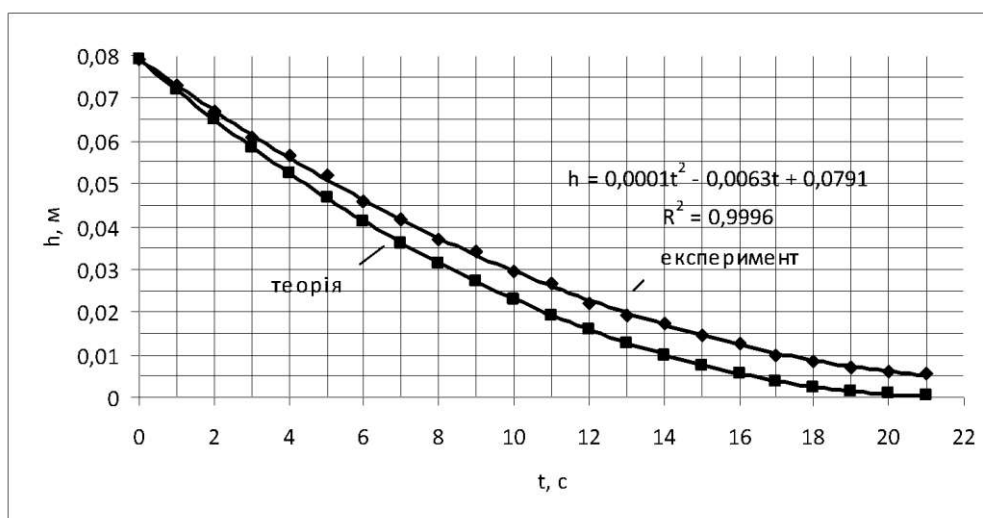


Рис. 6. Графік залежності рівня води від часу для 50 мл шприця ( $d_1 = 28,7$  мм,  $d_2 = 2,2$  мм )

### Обговорення результатів експериментів

Як видно з табл. 1 результати вимірювання значення коефіцієнта поверхневого натягу за допомогою смартфона збігаються з табличними значеннями  $\sigma$ . Тобто, дослідницька установка, яку самотужки може виготовити кожен студент, дозволяє дистанційно виконати лабораторну роботу з достатньою для освітнього процесу точністю.

Як видно з табл. 2 результати вимірювання значення коефіцієнта поверхневого натягу збігаються з наведеним на рис. 3 графіком  $\sigma = f(t)$ . Отже, і цю установку студент може самостійно виготовити і виконати лабораторну роботу дистанційно.

Як видно з експериментального графіка (рис. 6) рівняння залежності рівня води від часу є квадратичним, що підтверджує справедливність рівняння Бернуллі. Для освітніх цілей це є дуже цікавим висновком. Можна акцентувати увагу студентів на тому, що завдяки нелінійності графіка водяні часи – клепсидри – не витримали конкуренції з пісочними, у яких характеристика повинна бути лінійною. Ерсель (Yersel, 2000) звернув увагу, що довести це можна шляхом аналізу розмірності. Потік зернистого (гранульованого) матеріалу густиною  $\rho$ , внаслідок дії гравітаційного поля Землі напруженістю  $g$ , при відкритті отвору в посудині площею  $S = \pi D^2$ , буде визначатися виразом:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho\sqrt{g}S^{5/4}. \quad (17)$$

де  $k$  – константа.

Визначивши розмірність кожного елемента цього виразу:

$$M^1T^{-1} = (M^1L^{-3})^a (LT^{-2})^b (L^1)^c = M^a T^{-2b} L^{-3a+b+c}$$

отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ -1 &= -2b, \\ -3a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши систему, визначимо значення параметрів:  $a = 1$ ,  $b = 0,5$ ,  $c = 2,5$ .

Отже,

$$\frac{dm}{dt} = C\rho^1 g^{1/2} D^{5/2} = k\rho\sqrt{g}S^{5/4}. \quad (18)$$

Тобто, на протигагу рідині витрата, наприклад, піску буде величиною постійною у часі і не залежить від його висоти. Доведення справедливості цього висновку можливо також на установці, зображеної на рис. 5 а. Результати досліджень з цукровим піском як гранульованого матеріалу відображені на графіку рис. 7.

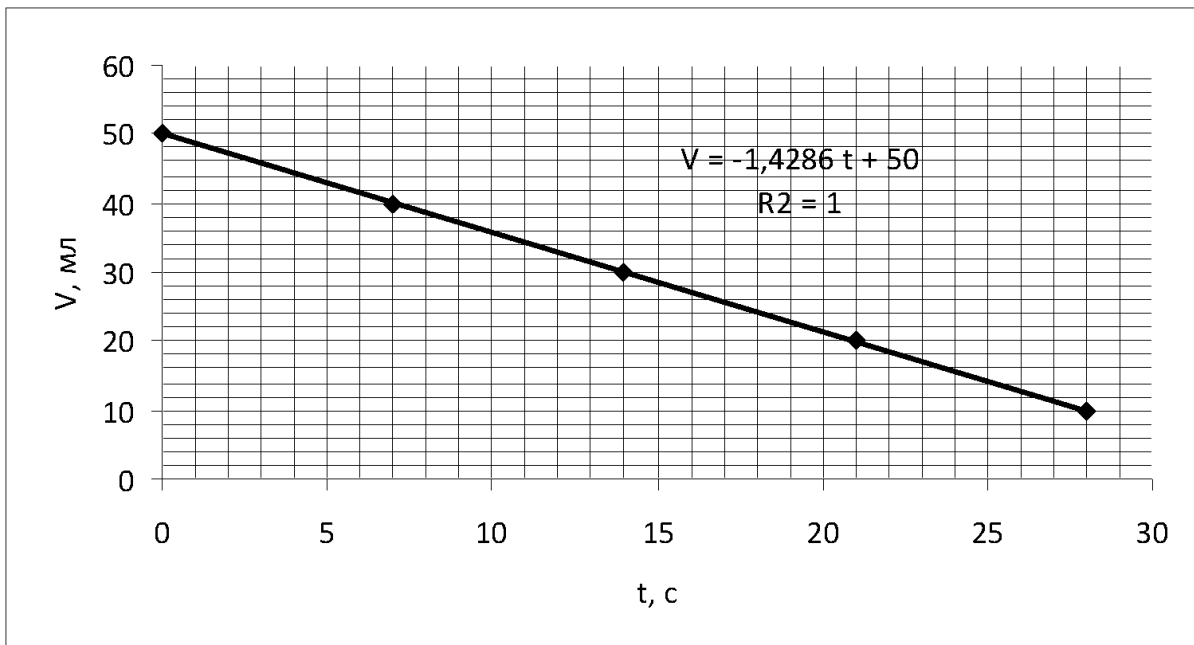


Рис. 7. Залежність об'єму цукрового піску у 50 мл шприці від часу висипання через отвір діаметром 5 мм

Отже, на прикладі лабораторних робіт "Перевірка рівняння Бернуллі" і "Визначення коефіцієнту поверхневого натягу рідини " можна побачити, що використання технології BYOD у поєднанні з розробленими установками дозволяє кожному студенту проводити повноцінні досліди як в аудиторії фронтально, так і дистанційно, вдома. Точність вимірювань кінематичних параметрів і часу за допомогою сучасних девайсів дозволяє розрізнити навіть невелику відмінність законів течії скрізь отвір рідини від гранульованих матеріалів.

Не співпадіння теоретичного і експериментального графіків на рис. 6 можна пояснити неврахуванням в'язкості рідини. Тому цю тему можна продовжити і запропонувати студентам з'ясувати чи є цей фактор дійсно ключовим для пояснення розбіжності або потрібно шукати ще й інші пояснення.

### Список використаних джерел

1. P. Vogt and J. Kuhn, “Analyzing simple pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor,” *Phys. Teach.* **50**, 439 (Oct. 2012).
2. P. Vogt and J. Kuhn, “Analyzing free fall with a smartphone acceleration sensor,” *Phys. Teach.* **50**, 182 (March 2012).
3. M. Hirth, J. Kuhn, and A. Müller, “Measurement of sound velocity made easy using harmonic resonant frequencies with everyday mobile technology,” *Phys. Teach.* **53**, 120 (Feb. 2015).
4. R. Elizabeth Vieyra, C. Vieyra, and S. Macchia, “Kitchen physics: Lessons in fluid pressure and error analysis,” *Phys. Teach.* **55**, 87 (Feb. 2017).
5. A.W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces*, 2nd ed. (Interscience Publishers, 1967).
6. Хайдаров Г. Г., Хайдаров А. Г., Машек А. Ч., Майоров Е. Е. Влияние температуры на поверхностное натяжение // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 4. 2012. Вып. 1. С. 24–28.
7. Metin Yersel, “The flow of sand,” *Phys. Teach.* **38**, 5, 290–291, 2000.

## 2.5. Визначення витрат і швидкості витікання води із отвору в боковій стінці посудини

Рух рідини при її витіканні відбувається у вигляді струменя. У залежності від місця розташування отвору в стінці й умов витікання рідини розрізняють витікання з досконалим і недосконалим, з повним і неповним стисненням струменя, витікання із затопленого й незатопленого отворів, при постійному й змінному напорі на отворі. Досконале стиснення струменя буде тоді, коли бокові стінки і дно резервуара не впливатимуть на витікання рідини, тобто отвір розташований від них на відстані, більшій за потроєний вертикальний розмір отвору .

Стиснення буде недосконалим, коли одна або декілька бокових стінок резервуара будуть віддалені від отвору на відстань, меншу за потроєний вертикальний розмір отвору .

Основними показниками при витіканні рідини через отвори є швидкість витікання  $v$  і витрата рідини  $\mu$ .

При витікання рідини через отвір частинки рідини переміщуються по плавно зігнутій траєкторії, що викликає виникнення відцентрових сил, направлених до осі струменя. На деякому віддаленні від площини отвору (для круглих отворів) кривизна ліній струменя зменшується і рух набуває практично паралельно-струменевого характеру.

Крім того, на характер витікання рідини з отворів істотно впливає стиснення струменя при підході до отвору, постійність або зміна напору і рівень рідини за отвором  $H$  (рис. 1. 1).

За отвором спостерігається значне зменшення площі перерізу струменя.

Відношення площі струменя до площі отвору називають *коефіцієнтом стиснення струменя*:

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} \quad (1)$$

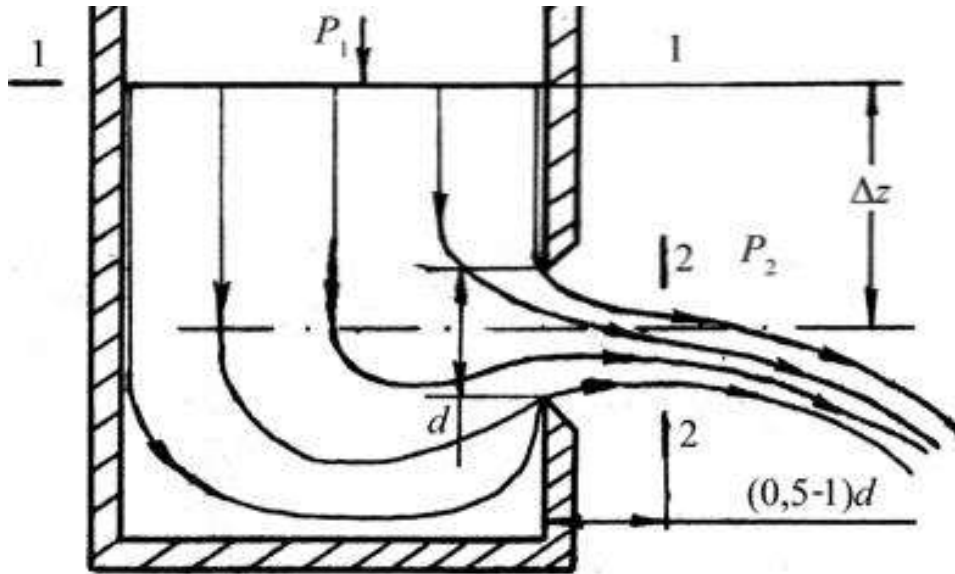


Рис. 1.1. Витікання рідини з малих отворів

За формулою Торрічеллі теоретична швидкість витікання рідини дорівнює:

$$v_T = \sqrt{2gH} \quad (2)$$

Відношення фактичної швидкості руху рідини до теоретичної швидкості називають *коефіцієнтом швидкості*:

$$\varphi = \frac{v_{\text{факт}}}{v_T} \quad (3)$$

Траекторія струменя описується рівнянням параболи і, отже, координати центру тяжіння будь-якого перерізу струменя визначаються виразами (рис. 2):

$$x = v_{\text{факт}} \tau ; \quad h = \frac{g\tau^2}{2}, \quad (4)$$

де  $\tau$  – час руху частинки рідини від перерізу 2-2 до даного перерізу з координатами  $X, Y$ .



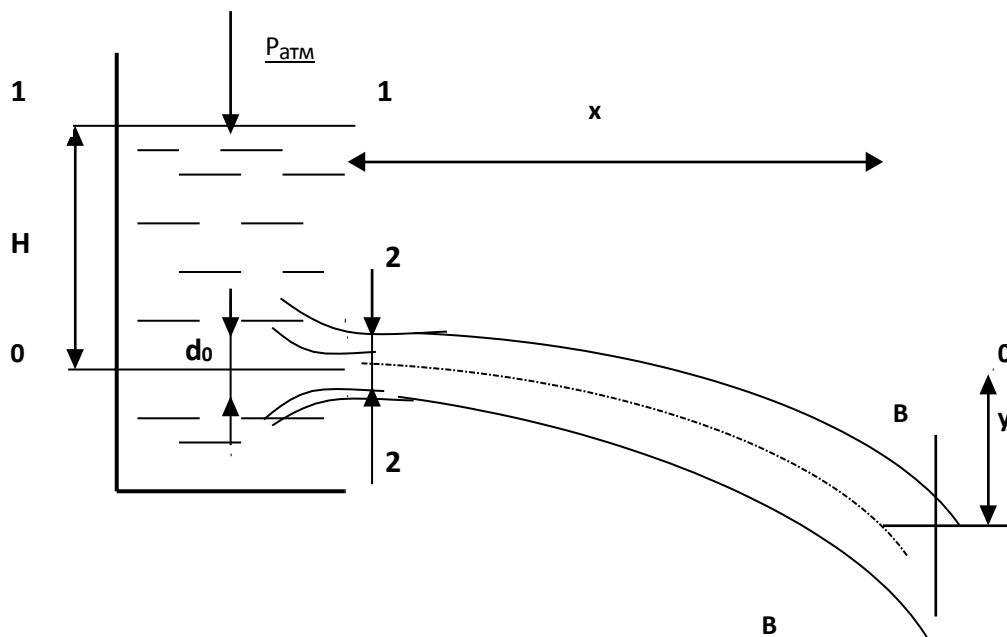


Рис. 2. Траєкторія струменя рідини

Розв'язавші спільно рівняння (4), знаходимо:

$$v_{\text{факт}} = \sqrt{\frac{gx^2}{2h}}, \quad (5)$$

або

$$\varphi \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{gx^2}{2h}}, \quad (6)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт швидкості, безрозмірна величина, яка характеризує зменшення фактичної швидкості в порівнянні з теоретичною в результаті вязкості рідини, опору в отворі і т.і.

Отже, коефіцієнт швидкості визначається за формулою:

$$\varphi = \frac{x}{2\sqrt{hH}} \quad (7)$$

Інший важливий параметр – коефіцієнт витрати об'єму . За фізичним змістом це відношення фактичної витрати об'єму за одиницю часу до теоретичної витрати за ту саму годину:

$$\mu = \frac{v_{\text{факт}}}{v_{\text{теор}}} \quad (8)$$

Фактична об'ємна витрата рідини визначається за формулою:

$$v_{\text{факт}} = \frac{V}{t}, \quad (9)$$

де  $V$  – об'єм води, що витікає з круглого отвору,  $t$  – час відбору рідини.

Теоретична об'ємна витрата рідини визначається за формулою:

$$v_{\text{теор}} = S_0 v_T = S_0 \sqrt{2gH}, \quad (10)$$

де  $S_0 = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа круглого отвору,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння;  $H$  – відстань по вертикалі від вільної поверхні рідини до горизонтальної осі отвору.

Фактична витрата рідини визначається за формулою:

$$v_{\text{факт}} = v_c S_c = \varphi v_T \varepsilon S_0 = \mu v_{\text{теор}}. \quad (11)$$

Тобто, стиснення струменя:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\varphi}. \quad (12)$$

Остаточне розрахункове рівняння для об'ємної витрати має вигляд:

$$v_{\text{факт}} = \mu S_0 \sqrt{2gH} = \frac{\mu \pi d^2 \sqrt{2gH}}{4}. \quad (13)$$

### **Експериментальне визначення параметрів витікання рідини через отвір в боковій стінці посудини**

Для визначення параметрів витікання рідини (води) через отвір в боковій стінці посудині використовуються відкриті для атмосферного тиску пластикові пляшки з водою (рис. 3). Рівень води  $H$  та відстань горизонтального польоту струменя  $X$  вимірюється лінійками. Діаметр отвору був  $\varnothing 2 \text{ мм}$ . За допомогою смартфона проводиться відеореєстрація витоку рідини з круглого отвору в боковій стінці посудини та вимірюється час. Залежність рівня води  $H$  від часу наведена на рис. 4.



Рис. 3. Дослідна установка

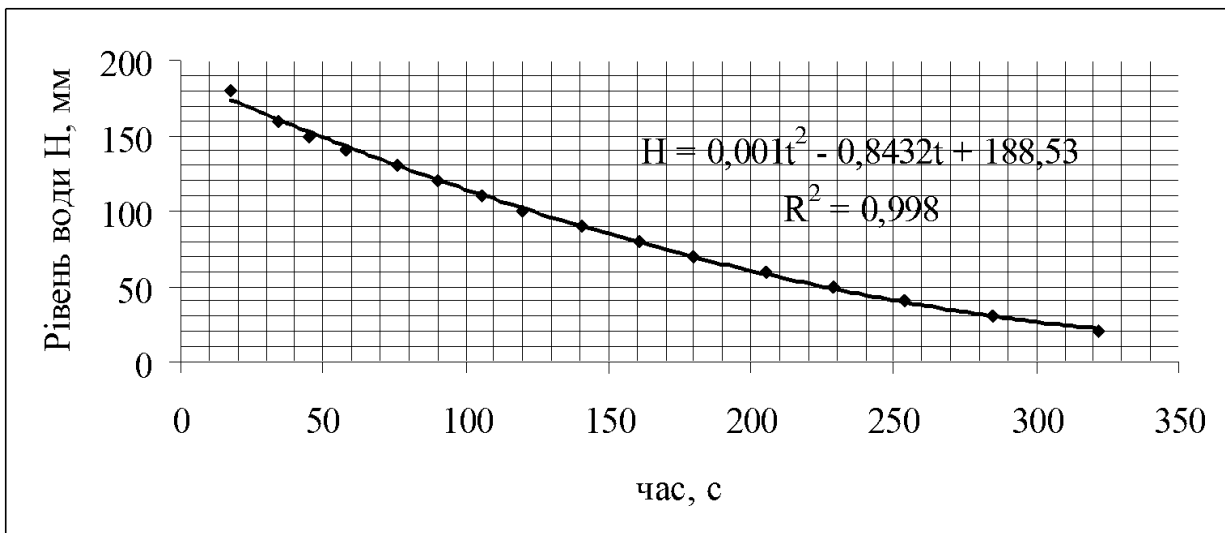


Рис. 4. Залежність рівня води  $H$  від часу витікання  $t$  через отвір  $\varnothing 2$  мм

В табл. 1 та графіках рис. 5, 6 наведено результати обчислення коефіцієнта  $\varphi$  в залежності від швидкості води при діаметрі отвору 2 мм.

Таблиця 1

**Величина коефіцієнта  $\varphi$  в залежності від швидкості**

№ досліду	$v_{\text{факт}}, \text{ м/с}$	$v_{\text{теор}}, \text{ м/с}$	$\varphi$
1	1,131	1,469	0,77
2	1,078	1,4	0,77
3	0,997	1,329	0,75
4	0,918	1,25	0,74
5	0,844	1,172	0,72
6	0,755	1,085	0,696
7	0,668	0,99	0,675
8	0,557	0,885	0,629
9	0,396	0,767	0,516
10	0,198	0,626	0,316

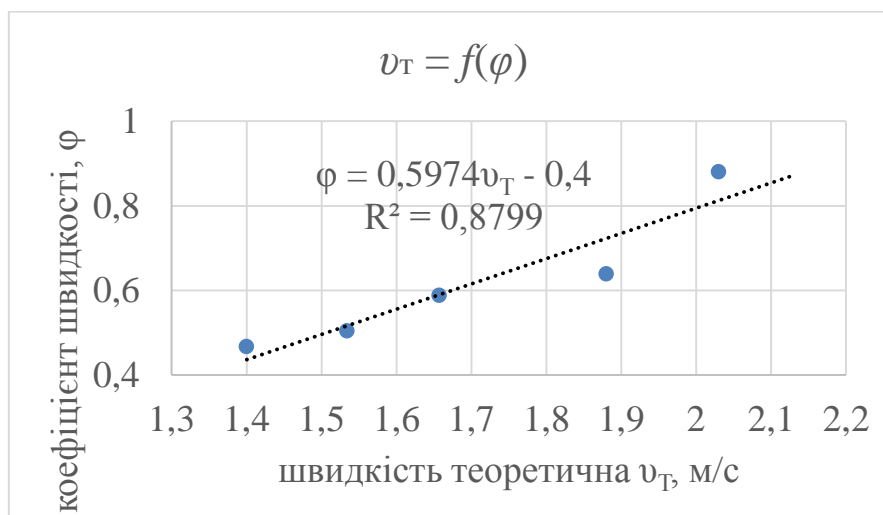


Рис. 5. Апроксимація експериментальних даних лінійною залежністю

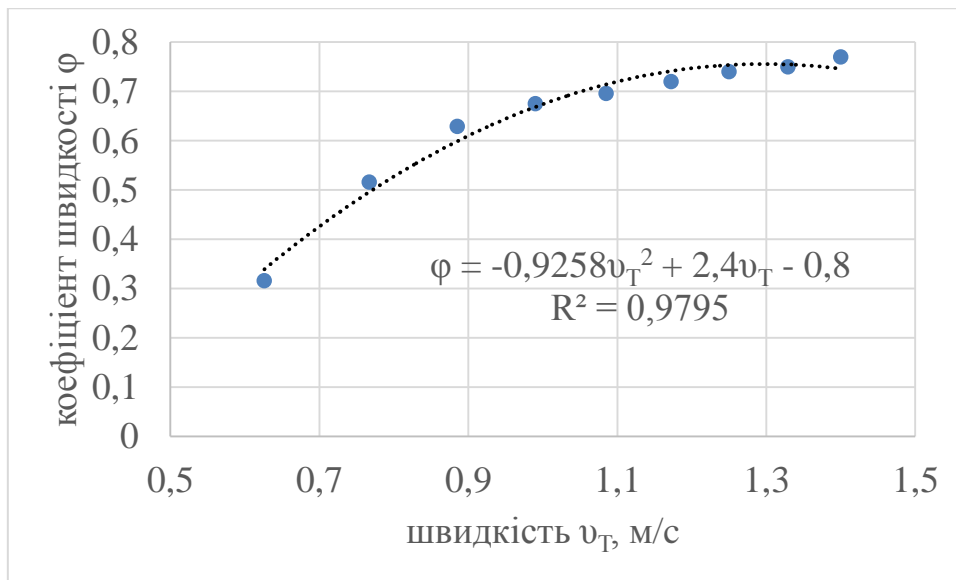


Рис. 6. Апроксимація експериментальних даних поліноміальною залежністю  $\varphi = f(v_T)$

Як видно з графіка рис. 4 залежність рівня води  $H$  від часу витікання майже прямо пропорційна. Нелінійність визначається невеликим коефіцієнтом 0,001 при  $x^2$ .

Як видно з графіка рис. 5 залежність коефіцієнта  $\varphi$  від швидкості води не може бути лінійною: експериментальні дані слабо корелюють з трендовою лінією –  $R^2 = 0,88$ .

Як видно з графіка рис. 6 експериментальні дані добре корелюють з трендовою поліноміальною залежністю:  $R^2 = 0,9795$ . Аналізуючи хід залежності коефіцієнта  $\varphi$  від швидкості води, обчисленої теоретично, його величина наближається до 0,8 в районі швидкості  $v_T \sim 1,5$  м/с. Це означає, що якщо теоретично розрахована швидкість більше м/с, тоді

$$v_{\text{факт}} = 0,8v_T. \quad (14)$$

Отже, в дослідах визначається інтервал швидкостей 0-1.5 м/с, при яких уже треба враховувати вплив режиму течії, внутрішнє тертя тощо. При швидкостях більших за 1.5 м/с фактичну швидкість витікання води можна розрахувати за формулою (14). Це важливий результат.

Всі досліди з визначенням втрат проводяться для постійного напору  $H$  і координаті  $Y = h$ . Результати експериментів занесені до табл. 2.

Таблиця 2

**Результати визначення коефіцієнта витрат та стиснення струменя**

Вимірювальна величина	Круглий отвір у тонкій стінці
Об'єм води $V, \text{ м}^3$	$1530 \cdot 10^{-6}$
Час відбору $t, \text{ с}$	300
Діаметр отвору $d, \text{ м}$	$3 \cdot 10^{-3}$
Площа отвору $S_0, \text{ м}^2$	$7 \cdot 10^{-6}$
Висота рівня $H, \text{ м}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$
Витрата дійсна $v_d, \text{ м}^3/\text{с}$	$5,1 \cdot 10^{-6}$
Витрата теоретична $v_T, \text{ м}^3/\text{с}$	$8,8 \cdot 10^{-6}$
Коефіцієнт витрат $\mu$	0,58
Коефіцієнт швидкості $\varphi$	0,47
Коефіцієнт стиснення струменя $\varepsilon$	1,26

Під час визначення коефіцієнту витрат та коефіцієнту стиснення  $\varepsilon$  кількість рідини, що поступила в приймальну посудину, вимірюється за допомогою мірного циліндра або цифрових вагів. Час витікання реєструється за допомогою мобільного додатку “Секундомір”. Отвір діаметром 3 мм було зроблено голкою, діаметр вимірювався штангельциркулем. Якщо нема штангельциркуля діаметр голки можна визначити за допомогою смартфона, сфотографувавши її на поверхні міліметрової лінійки.

## Обговорення результатів дослідів

Розглянемо більш уважливо графік залежності рівня води  $H$  від часу витікання  $t$  через отвір  $\varnothing 2$  мм (рис. 4). Починається він з відмітки  $H = 18$  мм. Це пов'язано з тим, що при меншому рівні води струмінь “прилипає” до поверхні пляшки й визначити дальність його падіння неможливо. Цей феномен ми розглянемо в наступній роботі.

Ще один дивний факт полягає в тому, що при досягненні рівня  $H$  близько 5 мм вода з отвору не ллється (рис. 7). Чому це так? Це питання можна задати студентам для обговорення фізики явища.



Рис. 7. Різні фази витікання рідини з отвору

## Висновки

Експериментально доведено, що залежність коефіцієнта швидкості  $\varphi$  під час витікання води скрізь отвір в боковій стінці посудини від її швидкості є поліноміальною залежністю типу:

$$\varphi = -0,9258v^2 + 2,4v - 0,8$$

Коефіцієнт кореляції експериментальних даних з теоретичним розрахунком склав величину  $R^2 = 0,9795$ .

В дослідях визначено інтервал швидкостей 0-1,5 м/с, при яких треба враховувати вплив режиму течії, внутрішнє тертя і т. і. Коефіцієнт швидкості при цьому збільшується від  $\varphi = 0,312$  до  $\varphi = 0,77$ ,

При швидкостях більших за 1,5 м/с фактичну швидкість витікання води можна розрахувати за формулою:

$$v_{\text{факт}} = 0,8v_{\text{т}}$$

Коефіцієнт об'ємних витрат склав величину  $\mu = 0,58$ , а коефіцієнт стиснення струменя  $\varepsilon = 1,26$ .



## 2. 6. Визначення в'язкості, середньої довжини вільного пробігу та ефективного діаметру молекул повітря

**Мета роботи:** використавши зв'язок між коефіцієнтом внутрішнього тертя в газах і середньою довжиною вільного пробігу молекул, визначити в'язкість, середню довжину вільного пробігу та ефективний діаметр молекул повітря.

**Прилади й матеріали:** прилад для визначення середньої довжини вільного пробігу молекул повітря, смартфон, термометр, барометр.

### Теоретичні відомості

Молекулярно-кінетична теорія дає змогу одержати формули, що зв'язують *макроскопічні* (тиск, об'єм, температура) і *мікроскопічні* (розміри і маса молекули, її швидкість, середня довжина вільного пробігу) параметри газу. Користуючись цими формулами, можна на основі вимірювання макроскопічних параметрів газу визначити його мікроскопічні параметри. Для визначення середньої довжини вільного пробігу молекул газу  $\bar{\lambda}$  використовують формулу залежності коефіцієнту внутрішнього тертя (в'язкості)  $\eta$  від  $\bar{\lambda}$  і  $\bar{v}$ :

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина газу,  $\bar{v}$  – середня арифметична швидкість молекул газу.

Густину газу можна визначити за рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad \text{звідки} \quad p\mu = \frac{m}{V} RT \quad \text{і густина дорівнює:}$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (2)$$

Середня арифметична швидкість молекул:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), одержимо:

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{p\mu}{RT} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (4)$$

Від коефіцієнту в'язкості  $\eta$  залежить об'єм газу, що проходить через капіляр під дією різниці тисків  $\Delta p$  на кінцях капіляру. Ця залежність визначається формулою Пуазейля:

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8Vl} \cdot \Delta p \tau. \quad (5)$$

де  $V$  – об'єм газу, що пройшов через капіляр довжиною  $l$  і радіусом  $r$  за час  $\tau$ .

Використовуючи (4) і (5), визначаємо середню довжину вільного пробігу молекул повітря:

$$\bar{\lambda} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi r^4 \Delta p \tau}{Vl p} \cdot \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}. \quad (6)$$

Знаючи  $\bar{\lambda}$ , можна визначити ефективний діаметр молекул повітря:

$$\bar{\lambda} = \frac{l}{\sqrt{2\pi} d^2 n}. \quad (7)$$

де  $n$  – число молекул в одиниці об'єму газу; з рівняння  $p = nkT$  визначимо

$n = \frac{p}{kT}$ . Після підстановки цього виразу в (7) і перетворень матимемо:

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2\pi} \bar{\lambda} p}}. \quad (8)$$

## Опис приладу

Прилад для визначення в'язкості, середньої довжини вільного пробігу та ефективного діаметра молекул повітря (див. рис. 1) складається з корпусу 20 мл шприця внутрішнім діаметром  $\varnothing 18,8$  мм, закритого зверху гумовою пробкою, через яку пропущено трубку голки калібра № 23 довжиною  $l = 35$  мм і внутрішнім діаметром  $\varnothing 0,337$  мм.



Рис. 1. Установка для дослідження: 1 поділка = 3,35 мм, діаметр внутрішньої трубки голки шприця (калібр 23G)  $\varnothing 0,337$  мм, довжина  $l = 35$  мм

В нижній частині шприця є випускний отвір, який використовується як кран. Поділki на бічній поверхні шприця є лінійкою для визначення рівня води, а також відліком для визначення об'єму води, що витікла. Для 20 мм шприця відстань між поділками складає 3,35 мм.

Як кріпильну стійку для приладу та збиральник води використовують невеличку поліетиленову пляшку з вирізом у боковій стінці для зручнішого фотографування процесу витікання води з випускного отвору шприця.

Для реєстрації часу використовують секундомір іншого смартфона, на фоні якого і відбувається фільмування процесу витікання води.

### Хід роботи

1. Випускний отвір шприця закрийте пальцем. Наповніть корпус шприця водою до відмітки дещо більшої 20 мл.
2. Гумову пробку з голкою-капіляром щільно вставте в отвір шприця. Кінчик голки не повинен торкатися води. Підготуйте камеру смартфона для фотографування процесу зміни рівня води в порожнині шприця. Включить секундомір.
3. Поставте корпус шприця на горловину пляшки-тримача, відкрийте випускний отвір і робіть фотографування кожен раз, коли рівень води зрівнюється з поділкою, нанесеною на бокову поверхню шприця.
4. Коли в шприці буде приблизно 5 мл води, зупиніть секундомір.
5. Використовуючи отримані фотографії відмітьте на секундомірі час та рівень води в посудині  $h_i$  на той час. Час, відображений на першій фотографії приміть за 0. Різницю разом з рівнем  $h_i$  на той час занесить у таблицю. Приклад вимірювання наведено в табл. 1.

## Приклад вимірювання

$t, \text{с}$	0	3,26	6,66	9,95	13,4	18,06	22,72	28,28	34,18	42,24	52,95	91,97
$h, \text{мм}$	59,3	54,3	50,3	46,9	43,6	40,2	36,9	33,5	30,2	26,8	23,5	20,1

6. Побудуйте графік залежності  $h = f(t)$  з відображенням рівняння лінії та коефіцієнта кореляції  $R^2$  (рис. 2). Рівняння, як видно на рис. 2, майже лінійне. Швидкість руху вільної поверхні води складає 1,2 мм/с.

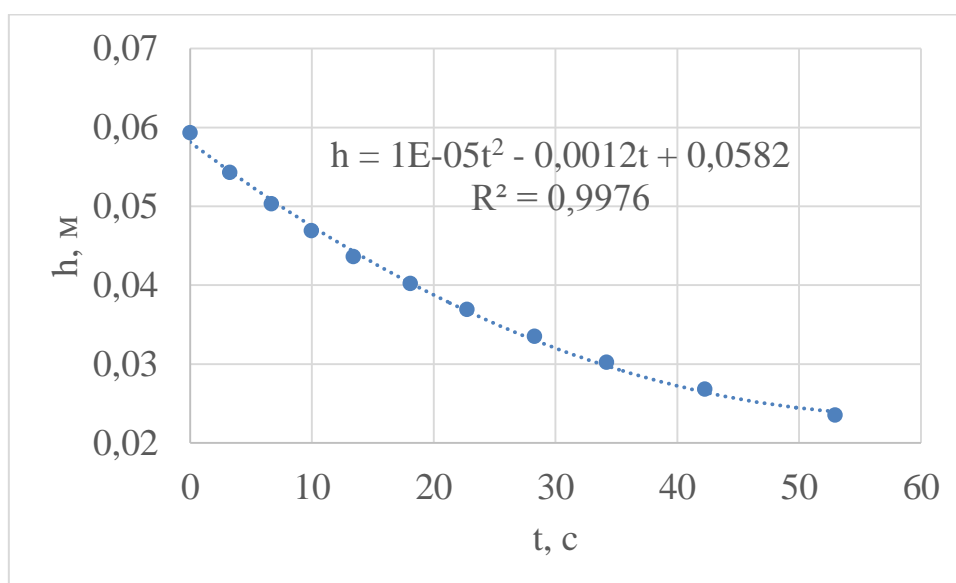


Рис. 2. Залежність висоти рівня води від часу (20 мл шприць)

7. Визначте об'єм води  $V$ , що витікла з посудини за час  $\tau$ . Цей об'єм дорівнює об'єму повітря  $V$ , що увійшов в порожнину шприця через капіляр. Наприклад, зміна рівня води між поділками 15 мл та 10 мл ( $V = 5$  мл), згідно даним табл. 1, відбулася за

$$\tau = 28,28 - 6,66 = 21,62 \text{ с.}$$

8. За формулою (5) обчисліть  $\bar{\eta}$ . Різниця тисків  $\Delta p = \rho_g g \frac{h_1 + h_2}{2}$ , де  $\rho_g$  – густина води при температурі дослідів,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Наприклад, для  $h_1 = 50,3\text{мм}$  та  $h_2 = 33,5\text{мм}$  різниця тисків повітря дорівнює:

$$\Delta p = 10^3 \times 9,81 \times \frac{(50,3 + 33,5) \times 10^{-3}}{2} = 411 \text{ Па.}$$

Тоді експериментально визначений коефіцієнт в'язкості дорівнює:

$$\eta_{\text{exp}} = \frac{\pi (0,17 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 411 \cdot 21,62}{8 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 10^{-3}} = 16,7 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

що відрізняється від табличного значення  $\eta_{\text{табл}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$  на 7,2%.

9. За формулою (6) обчисліть  $\bar{\lambda}$ . Довжина вільного пробігу молекул повітря для наведеного прикладу вимірювання, коли  $T = 295 \text{ К}$ , а атмосферний тиск  $p = 10^5 \text{ Па}$ , дорівнює:

$$\bar{\lambda} = \frac{3 \cdot \pi (0,17 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 411 \cdot 21,62}{16 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 8,31 \cdot 295}{29 \cdot 10^{-3}}} = 129 \text{ нм}.$$

10. За формулою (8) обчисліть ефективний діаметр молекули повітря:

$$d = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 295}{\sqrt{2} \pi \cdot 129 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5}} = 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

11. Дослід повторіть не менше трьох разів.

12. Результати вимірювань і обчислень подати у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

### Результати вимірювань

№ п/п	$\tau, \text{с}$	$h_1, \text{м}$	$h_2, \text{м}$	$\Delta p, \text{Па}$	$V, \text{м}^3$	$\bar{\lambda}, \text{м}$	$d, \text{м}$	$\eta, \text{Па} \cdot \text{с}$
1								
2								
3								
Середнє значення								

11. Обчисліть відносну похибку результатів вимірювання. Зробіть порівняння результатів вимірювання з табличними значеннями. Зробіть висновки.

*Параметри установки та константи*

$$l = 35 \text{ мм}, \quad 2r = 0,337 \text{ мм (див. рис. 3)}, \quad \mu = 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$



Рис. 3. Фото для визначення внутрішнього діаметру голки по зовнішньому діаметру

## **2.7. Дослідження параметрів самохідної системи, яка рухається проти сили тяжіння**

**Мета роботи:** визначення рівняння руху мильної плівки та динамічної в'язкості повітря.

**Прилади й матеріали:** мильна вода, воронка, трубка від кулькової ручки, смартфон, секундомір.

### **Теоретичні відомості**

Двома основними параметрами, пов'язаними з динамікою рідини, є в'язкість рідини, яка характеризує її опір течії, та поверхневий натяг. В'язкість рідини, як і поверхневий натяг, виникає від молекулярних ефектів. Динамічна в'язкість води приблизно в 50 разів більше в'язкості повітря, яка дорівнює  $\eta_a = 18,1 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$  при  $20^\circ\text{C}$ .

В роботі досліджується рух мильної плівки в скляному конусі, з'єднаному з капіляром – трубкою від кулькової ручки. Експеримент полягає у записі за допомогою смартфона руху вигнутої мильної плівки у воронці. Така плівка рухається по похилих сторонах воронки від її широкого отвору до її вузького кінця і, рухаючись, виштовхує повітря через горловину воронки і далі через капіляр. Руху повітря назовні чинить опір його динамічна в'язкість. Реєструючи цей рух, ми дізнаємося, з якою швидкістю повітря виштовхується, і, знаючи геометричні параметри воронки та поверхневий натяг повітря-рідина, знаходимо в'язкість повітря. Мильна плівка в цьому експерименті рухається по нахилу, а не по плоскій поверхні, а повітряний потік задовольняє закону Пуазейля, а не принципу Бернуллі. Експеримент можна розглядати як просту самохідну систему, за допомогою якої мильні плівки рухаються проти сили тяжіння (рис. 1).



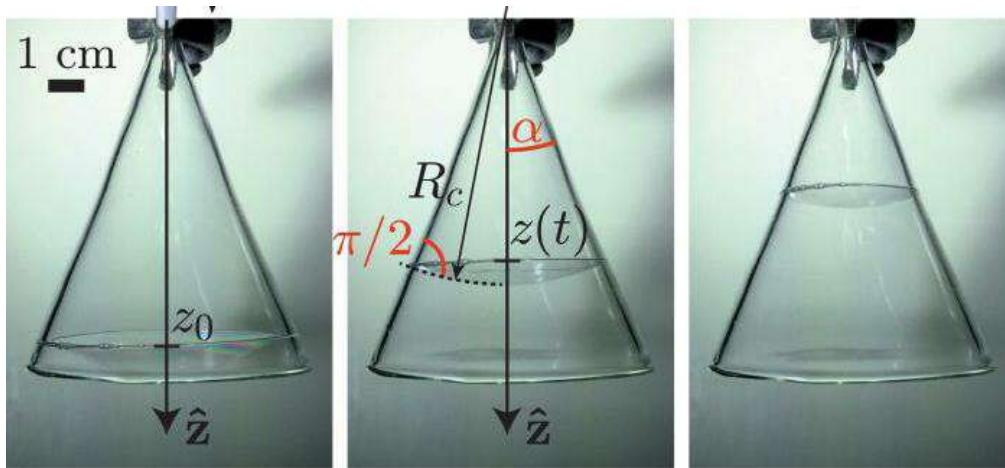


Рис. 1. Фото, зроблене камерою смартфона, що ілюструє рух мильної плівки з часом у скляній воронці у бік капіляра

Тривалість руху залежить від п'яти відомих геометричних і фізико-хімічних параметрів і лише однієї невідомої величини – в'язкості повітря. Потік повітря, що виривається з капіляра, є квазістатичним, ламінарним. Тому цей прилад можна використовувати для вимірювання динамічної в'язкості повітря за тривалістю руху мильної плівки у воронці. Рух плівки обумовлений її кривизною, тобто тиском Лапласа:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{Z}, \quad (1)$$

який є різницею тиску поперек вигнутої плівки від повітря з одного боку плівки до повітря з іншого;  $\sigma$  — поверхневий натяг повітря-рідина.

Рух плівки обмежується потоком повітря, який ми вважаємо одновимірним і з домінуванням в'язкості. Отже, розглянутий ламінарний потік повітря повинен задовольняти рівнянню Пуазейля, яке виглядає так:

$$\Delta p = R_{\text{кон}} q, \quad (2)$$

де  $q$  – витрата повітря,  $R_{\text{кон}}$  – опір конуса.

Використовуючи рівняння (1) і (2), отримуємо:

$$R_{\text{кон}} = \frac{q\sigma}{Z}. \quad (3)$$

Гідродинамічний опір конуса повинен дорівнювати опорі капіляра:

$$R_{\text{кон}} = R_{\text{кап}}$$

Комбінація рівнянь (1) і (2) з урахуванням виразу для опору капіляра дає:

$$\frac{4\sigma}{Z} = \frac{8\eta_a l}{\pi a^4} q. \quad (4)$$

Швидкість потоку повітря визначається змінами загального об'єму  $dV = SdZ$ , де  $S = 2\pi Zh$  - площа сферичного сегмента,  $h$  - висота сегмента. Тобто,

$$q = -\frac{dV}{dt} = -2\pi Z^2 \frac{dZ}{dt} (1 - \cos \alpha), \quad (5)$$

і підставляючи цей вираз у рівняння (4), можемо записати

$$dt = -\frac{4\eta_a l(1 - \cos \alpha)}{\sigma a^4} Z^3 dZ. \quad (6)$$

Інтегрування рівняння (6) з врахуванням початкових умов ( $Z = Z_0$ , коли  $t = 0$ ) дає формулу, яка описує рух плівки:

$$\left(\frac{Z(t)}{Z_0(t=0)}\right)^4 = 1 - \frac{\sigma a^4}{\eta_a l Z_0^4 (1 - \cos \alpha)} t = 1 - \frac{t}{t_f} \quad (7)$$

де  $t_f = \frac{\eta_a l Z_0^4 (1 - \cos \alpha)}{\sigma a^4}$  – час фінішу, коли повітря вийшло з конуса і плівка досягла свого остаточного положення  $Z = Z_f$ .

Отже, знаючи геометричні параметри досліду, значення поверхневого натягу рідина–повітря та часу  $t_f$  визначаємо в'язкість повітря:

$$\eta_a = \frac{\sigma a^4 t_f}{l Z_0^4 (1 - \cos \alpha)}. \quad (8)$$

### Опис приладу та хід роботи

На рис. 1 показано обладнання, необхідне для проведення експериментів, а на рис. 2 – фото постановки. Висота внутрішнього конуса скляної воронки 78 мм, кут  $\alpha = 28,5^\circ$ , радіус капіляра  $a = 0,45$  мм, його довжина  $l = 15$  мм. Часові зміни положення плівки  $z(t)$  реєструються камерою смартфона на фоні секундоміра. Відлік початку руху плівки ( $t = 0$  с) починається при досягненні

плівкою положення  $z_0$  і закінчується через проміжок часу  $t_f$  при досягненні плівкою положення  $z_f = 7,7\text{мм}$ .

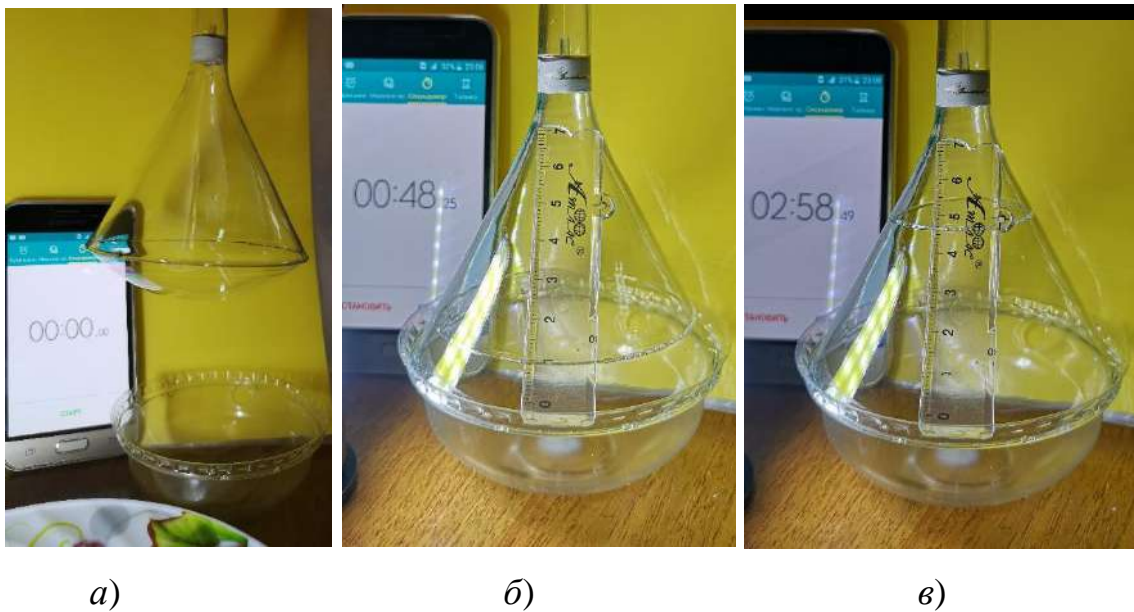


Рис. 2. Фото еволюції положення мильної плівки з часом: *а)* отримання мильної плівки, *б)* положення  $z_0$ , *в)* область уповільненого руху

Перед початком експерименту внутрішню стінку воронки змочують мильним розчином для миття посуду (2 мас. % Palmolive Original (Colgate-Palmolive) і 98 мас. % деіонізованої води). Після того, як внутрішня стінка воронки змочується, ширший кінець воронки занурюється в розчин на кілька міліметрів нижче вільної поверхні. Утворюється вигнута мильна плівка, як показано на рис. 2*а*. Воронку зручно через деякий час поставити на чашку.

Поверхневий натяг змушує вигнуту плівку самостійно рухатися до вузького кінця воронки (рис. 2 *б*, *в*). Рух плівки приводить в рух повітря, що знаходиться у воронці.

В експерименті за допомогою камери смартфона ми фіксуємо положення  $z$ , але аналіз виконуємо в термінах  $Z = z / \cos \alpha$ ; як показано на рис. 2,  $Z$  – відстань між вершиною конуса та точкою дотику плівки на стінці воронки, яка також дорівнює радіусу кривизни плівки  $R_c$ .

На рис. 3 наведено результати вимірювання: графік залежності  $Z$  від часу спостереження  $t$  та рівняння руху плівки.

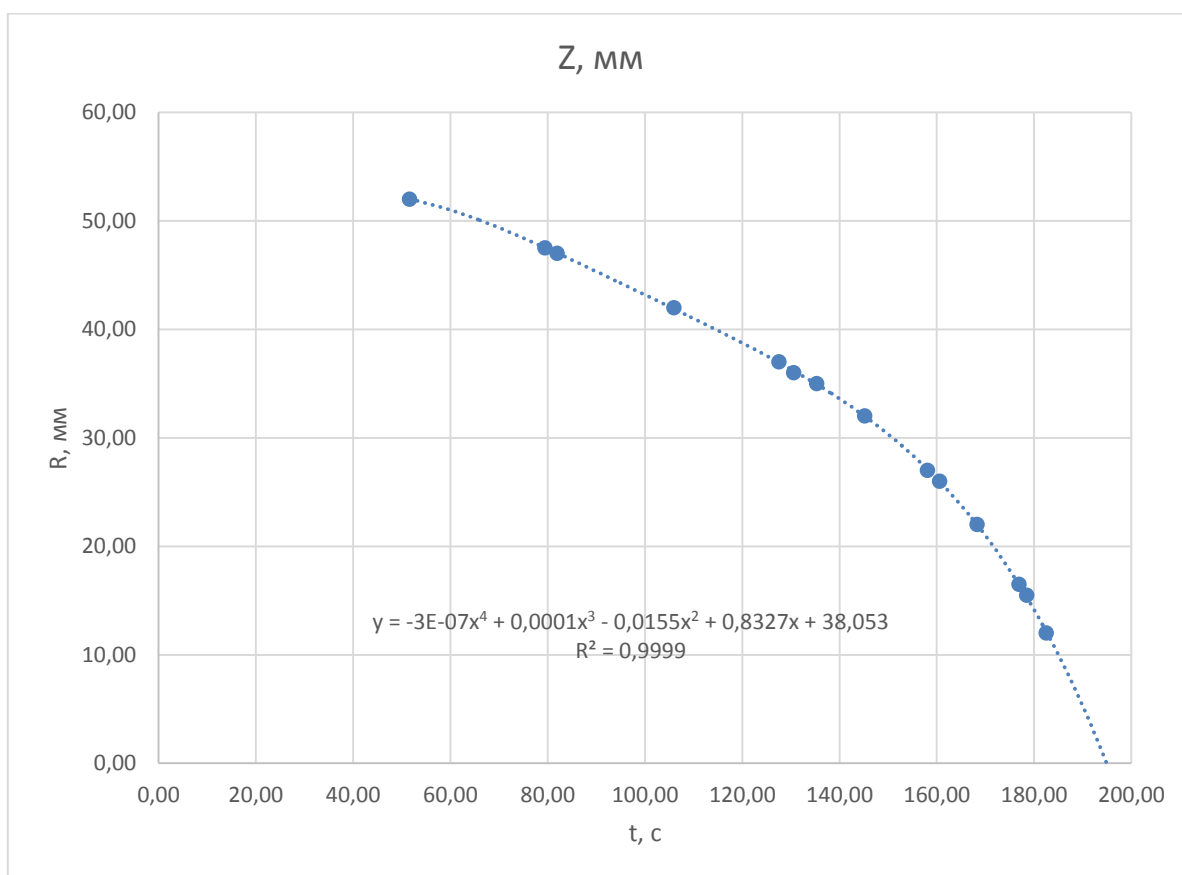


Рис. 3. Залежність  $Z$  від часу спостереження  $t$

Як видно з графіка час фінішу  $t_f = 195$  с, тому, з урахуванням того, що  $a = 0,55$  мм,  $\ell = 15$  мм,  $\alpha = 28,5^0$ ,  $z_0 = 62$  мм, а поверхневий натяг повітря–рідина для мильного розчину дорівнює  $\sigma = 25$  мН·м<sup>-1</sup>; значення в'язкості повітря буде:

$$\eta_a = 17,75 \text{ мкПа},$$

що узгоджується з табличним значенням динамічної в'язкості повітря  $\eta_a = 18,1$  мкПа·с для 20<sup>0</sup>С.

## Обговорення результатів експерименту

1. З'ясуємо чи можна вважати потік повітря у капілярі ламінарним. Як відомо потік можна вважати ламінарним при характеристичному числі Рейнольдса  $Re < 2000$ . У нашому експерименті ця безрозмірна величина визначається так:

$$Re = \frac{2a\rho v}{\eta_a},$$

де  $v$  – середня швидкість повітряного потоку, а  $\rho$  – густина повітря.

Швидкість  $v$  можна записати так:

$$v = q / (\pi a^2),$$

де витрата повітря

$$q = \frac{8\rho\sigma}{\pi a Z R_{\text{кап}} l}.$$

Отже,

$$Re = \frac{8\rho\sigma}{\pi a Z R_{\text{кап}} \eta_a}.$$

З урахуванням того, що опір  $R_{\text{кап}} = \frac{8\eta_\phi l}{\pi a^4}$ , число Рейнольдса має вигляд:

$$Re = \frac{\rho\sigma a^3}{\eta_a^2 Z l}. \quad (9)$$

На початку руху плівки  $Z = Z_0$ . В наших експериментах ця величина становить 0,06 м. Для мильного розчину поверхневий натяг повітря–рідина дорівнює  $\sigma = 25 \text{ мН} \cdot \text{м}^{-1}$ ; Отже, використовуючи рівняння (9), отримуємо:

$$Re = \frac{1,2 \cdot 25 \cdot 10^{-3} (0,55 \cdot 10^{-3})^3}{(18 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 0,06 \cdot 15 \cdot 10^{-3}} = 17,$$

що значно менше  $Re < 2000$ .

Отже, умова ламінарної течії повітря в капілярі для наших дослідів виконується.

2. Як видно з рівняння (8) час  $t_f$  дуже сильно залежить від радіуса капіляра  $a$  у порівнянні, наприклад, з його залежністю від довжини  $\ell$ . Тому вимірювати внутрішній радіус капіляра потрібно дуже ретельно. Щоб збільшити час руху плівки до зупинки на порядок, потрібно або збільшити довжину капіляра в 50 разів, або зменшити його радіус у 2 рази.

3. Згідно рівняння (7), відношення є лінійною спадною функцією часу, яка залежить від в'язкості, довжини та площі поперечного перерізу капіляра. Отже, рух плівки описується законом фільтрації газу, наприклад, порами гірської породи, який носить ім'я Дарсі.

4. Усі значення експериментальних даних знаходяться всередині 20% від табличного значення в'язкості повітря ( $\eta_a = 18.1 \mu \text{ Па с}$ ) для температури, при якій були отримані дані (20°C); більше ніж 80% даних знаходяться всередині 10% цього очікуваного значення. Також важливо зазначити, що середнє значення (17,75 мкПас) в'язкості повітря, отримане в експериментах, лише на 2,5% менше, ніж табличне значення. Також варто згадати, що стандартне відхилення  $\sigma_\eta = 1.54 \text{ мкПас}$ .

5. Визначимо, які припущення були зроблені при постановці цих експериментів.

По-перше, ми припустимо, що повітря нестисливе і що мильна плівка непроникна для цього газу під час експерименту; отже, маса та об'єм повітря зберігаються так, що об'ємна густина потоку  $q$  повітря в трубці визначається часовими змінами об'єму повітря, що захоплюється конусом.

По-друге, експерименти, проведені з однаковою геометрією, але різною товщиною нанесеної плівки (10–30 мкм у нашому дослідженні), демонструють однакову динаміку. Ефекти тяжіння (тобто оцінка ваги вигнутої мильної плівки

$$2 \pi Z_0^2 e (1 - \cos \alpha) \rho_l g$$

з прискоренням тяжіння  $g$ ) має домінувати над капілярною дією, тобто над сумарною капілярною силою в  $z$  –напрямку

$$4\pi Z_0 \sigma \sin \alpha,$$

коли товщина плівки  $e_c$  більша за поріг

$$e_c = 2\kappa^{-2}Z_0^{-1} \sin \alpha / (1 - \cos \alpha)$$

де  $\kappa^{-1} = \sqrt{\sigma / (\rho \ell g)}$  - довжина капіляра;  $e_c$  визначається як таке значення  $e$ , для якого вага плівки дорівнює капілярній силі. Використовуючи значення кута  $\alpha = 28,5^\circ$  і початкового положення  $Z_0 = 0,062$  м, порогова товщина більше  $700 \mu\text{м}$ , що в сотні разів більше за найтовстіші плівки, використані в нашому дослідженні ( $e = 1-10$  мкм). Отже, ми визначаємо, що гравітацією можна знехтувати, якщо порівнювати з поверхневим натягом у нашому дослідженні на початку експерименту. Щоб порівняти ці два ефекти, коли плівка рухається з часом, ми припустимо, що  $e$  залишається постійною між  $t = 0$  і  $t = t_f$ . Простіше кажучи, ми припустимо, що рідина витікає через меніск на змочену внутрішню стінку конічної геометрії, коли плівка рухається, а її ширина з часом зменшується. Оскільки наведені вище вирази ваги плівки та поверхневого натягу змінюються як  $Z^2$  і  $Z$ , відповідно, з  $Z$  зменшуючись з часом, поверхневий натяг переважає для всієї динаміки, і ефектами гравітації з часом можна знехтувати.

Результати змінюються, коли плівки рухаються в напрямку сили тяжіння, оскільки частина рідини рухається вздовж стінок геометрії та всередині трубки.

По-третє, ми розглядаємо ідеалізований рух мильних плівок у межах квазістатичної межі, яка нехтує в'язким опором, що діє на меніск, що зв'язує плівку зі стінкою конуса. Іншими словами, ми вважаємо, що кут торкання плівки з внутрішньою стінкою конуса дорівнює  $\pi/2$  в будь-який момент часу так, щоб радіус кривизни мильної плівки був  $R_c = Z$  (див. рис. 1). Експериментальні спостереження підтверджують це припущення.

По-четверте, ми вважаємо, що повітря міститься всередині повного конуса, а не зрізаного, прикріпленого до трубки. Іншими словами, ми моделюємо потік повітря з надлишковим об'ємом повітря  $\pi a^3 / (3 \tan \alpha)$  відповідний конусу висоти  $z_f = a / \tan \alpha$  і основою радіусом  $a$ , контур якої показаний пунктирними лініями на рис. 2. Отже, об'єм повітря дорівнює

$$V = (2\pi/3) Z^3 (1 - \cos \alpha).$$

Таке наближення видається розумним, оскільки надлишковий об'єм не є функцією часу та моделі потоку, оскільки використовуємо похідну за часом від об'єму, тобто швидкість потоку.

### Список літератури

1. N.-A. Goy, Z. Denis, M. Lavaud, A. Grolleau, N. Dufour, A. Deblais, and U. Delabre, "Surface tension measurements with a smartphone," *Phys. Teach.* 55, 498–499 (2017).
2. P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, New York, 2004).
3. L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, "Generating soap bubbles by blowing on soap films," *Phys. Rev. Lett.* 116, 077801 (2016).
4. R. M. Digilov and M. Reiner, "Weight-controlled capillary viscometer," *Am. J. Phys.* 73(11), 1020–1022 (2005).
5. Y. Shimokawa, Y. Matsuura, T. Hirano, and K. Sakai, "Gas viscosity measurement with diamagnetic-levitation viscometer based on electromagnetically spinning system," *Rev. Sci. Instrum.* 87, 125105 (2016).
6. M. Clerget, A. Delvert, L. Courbin, and P. Panizza, "Different scenarios of shrinking surface soap bubbles," *Am. J. Phys.* 89(3), 244–252 (2021).
7. For a short review on the pressure difference across a fluid interface (Laplace pressure), see for instance F. Behroozi and P. S. Behroozi, "Determination of surface tension from the measurement of internal pressure of mini soap bubbles," *Am. J. Phys.* 79(11), 1089–1093 (2011).
8. F. D. Dos Santos and T. Ondarcuhu, "Free-running droplets," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2972–2975 (1995).
9. Y. Sumino, N. Magome, T. Hamada, and K. Yoshikawa, "Self-running droplet: Emergence of regular motion from nonequilibrium noise," *Phys. Rev. Lett.* 94, 068301 (2005).



10. H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout, “Self-propelled Leidenfrost droplets,” *Phys. Rev. Lett.* 96, 154502–154504 (2006).
11. M. K. Chaudhury and G. M. Whitesides, “How to make water run uphill,” *Science* 256, 1539–1541 (1992).
12. E. Lorenceau and D. Quéré, “Drops on a conical wire,” *J. Fluid Mech.* 510, 29–45 (2004).
13. M. Reyssat, L. Courbin, E. Reyssat, and H. A. Stone, “Imbibition in geometries with axial variations,” *J. Fluid Mech.* 615, 335–344 (2008).
14. P. Renvoisé, J. W. M. Bush, M. Prakash, and D. Quéré, “Drop propulsion in tapered tubes,” *Europhys. Lett.* 86, 64003–64005 (2009).
15. E. Reyssat, “Drops and bubbles in wedges,” *J. Fluid Mech.* 748, 641–662 (2014).
16. L. Salkin, A. Schmit, R. David, A. Delvert, E. Gicquel, P. Panizza, and L. Courbin, “Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool,” *Phys. Rev. Fluids* 2, 063604 (2017).
17. L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, “Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films,” *Am. J. Phys.* 82(9), 839–847 (2014).
18. In our experiment, a surface bubble is a hemispherical bubble sitting on the liquid surface. The formation mechanisms of these bubbles and the variations of their size with the parameters of the experiment will be published elsewhere.
19. See <<https://imagej.nih.gov/ij/>> for “information about the free image processing software ImageJ”.
20. See <<http://www.gnuplot.info/>> for “information about the free graphing software Gnuplot”.
21. For a curved region of a fluid–fluid interface with typical length scale  $j_1$ , comparing an estimate of the Laplace pressure  $c_j$  to the hydrostatic pressure  $q'g_j$  gives the capillary length  $j_1^{1/4}$ . For length scales larger than  $j_1$ , gravity dominates. Otherwise, capillarity prevails over gravity.

22. D. J. Ferguson and S. J. Cox, “The motion of a foam lamella traversing an idealised bi-conical pore with a rounded central region,” *Colloids Surf., A* 438, 56–62 (2013).
23. W. R. Rossen, “Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media,” *J. Colloid Interface Sci.* 136, 1–16 (1990).
24. E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, and C. D. Matescu, *Physical Hydrodynamics*, 2nd ed. (Oxford U. P., Oxford, 2015).
25. H. Bruus, *Theoretical Microfluidics* (Oxford U. P., Oxford, 2008).
26. S. Gravelle, L. Joly, F. Detcheverry, C. Ybert, C. Cottin-Bizonne, and L. Bocquet, “Optimizing water permeability through the hourglass shape of aquaporins,” *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 110(41), 16367–16372 (2013).
27. L. Courbin and H. A. Stone, “Your wetting day,” *Phys. Today* 60(2), 84–85 (2007).
28. T. E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists* (Cambridge U. P., Cambridge, 1995).
29. D. P. Jackson and S. Sleyman, “Analysis of a deflating soap bubble,” *Am. J. Phys.* 78, 990–994 (2010).
30. L. Sibaiya, “Time of collapse of a soap bubble,” *Nature* 149, 527 (1942).
31. Georen Reamme, “Surface tension from deflating a soap bubble,” *Phys. Educ.* 32, 191–194 (1997).
32. A. Delvert, P. Panizza and L. Courbin. Measuring the viscosity of air with soapy water, a smartphone, a funnel, and a hose: An experiment for undergraduate physics students. *American Journal of Physics* 90, 64 (2022); <https://doi.org/10.1119/10.0006881>

## 2. 8. Гравітаційні коливання рідини в трубці

**Мета роботи:** дослідити ангармонійну природу згасаючого коливального руху рідини в трубці, занурену у посудину.

**Обладнання:** прозора скляна або пластикова ємність, вода, трубочка діаметром 10 мм довжиною 250 мм, харчовий барвник, смартфон з мобільним додатком “Мілісекундомір”.

### Теоретичні відомості

Схема експерименту наведена на рис. 1.

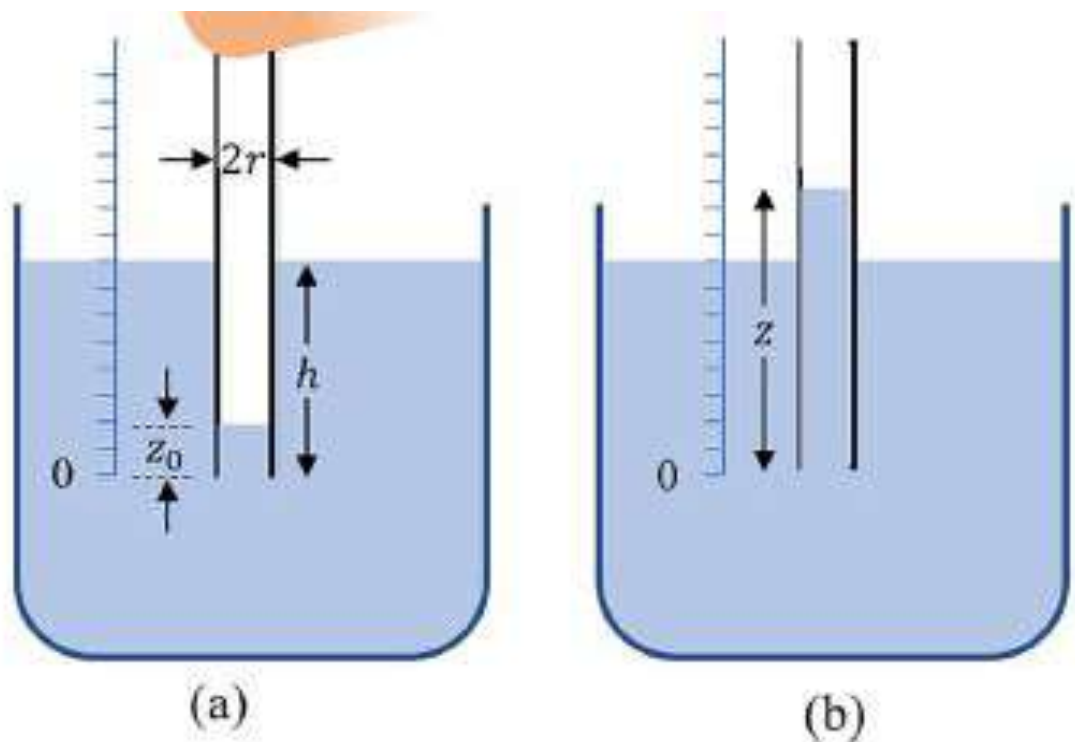


Рис. 1. (а) Трубка, закрита пальцем, занурена у посудину; (б) після звільнення отвору від пальця відбуваються коливання рівня рідини в трубці

Рідина після відкриття отвору вливається в порожнину трубки під впливом гідростатичного тиску знизу, внаслідок чого рівень рідини в трубці

швидко піднімається над поверхнею рідини у посудині, а потім зазнає кількох коливань, перш ніж зрівняється з рівнем рідини у посудині.

Використаємо II закон Ньютона щоб описати рух маси рідини в циліндричному стовпчику трубки. Наша модель процесу включає гідростатичний тиск з нижньої частини трубки, силу тяжіння, а також втрати енергії. Ефекти внутрішнього тертя трубки, шорсткість поверхні, ефекти довжини трубки, перехід течії до турбулентності або капілярні ефекти в моделі не будемо враховувати. Тоді рівняння руху для рівня рідини над дном трубки  $z$ , як показано на рис. 1, можна виразити так:

$$\frac{dp}{dt} = -F_g + F_p + F_{\text{опір}}$$

$$\dot{m}\dot{z} + m\ddot{z} = -mg + \rho ghS - b'\dot{z}, \quad (1)$$

де  $p = m\dot{z}$  – імпульс рідини в трубці,  $\rho$  – густина рідини,  $h$  – глибина дна трубки під поверхнею рідини у посудині,  $S = \pi r^2$  – площа поперечного перерізу трубки,  $b'$  – феноменологічний коефіцієнт загасання.

Важливим є те, що маса рідини в трубці змінюється під час зміни рівня рідини в часі. Можемо записати масу рідини в трубці так:

$$m = \rho zS \quad (2)$$

Рівняння (1) можна перегрупувати як звичайне диференціальне рівняння другого порядку, де  $\rho$  і  $S$  скорочуються:

$$\ddot{z} = -\frac{1}{z}(\dot{z}^2 + gz - gh + b'\dot{z}). \quad (3)$$

Тут феноменологічний коефіцієнт загасання перевизначено  $b' = b\rho S$ , щоб спростити остаточне рівняння. Розв'язавши рівняння (3) отримуємо залежність  $z = f(t)$ .

Спростивши рівняння (3) можна дослідити поведінку стовпчика рідини в трубці в межах малих зміщень рівня навколо поверхні рідини посудини. Для цього ми визначаємо  $y = z - h$  як рівень рідини в трубці відносно рівня поверхні посудини, а потім приймаємо  $y \ll h$  (і, отже, також невелике). Таким чином, рівняння (1) спрощується до

$$\ddot{y} = -\frac{g}{h} y. \quad (4)$$

який можна ідентифікувати як закон Гука, а власну частоту коливань  $f_0$  можна тепер визначити так:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2}. \quad (5)$$

### Хід роботи

1. Підготувати відеокамеру смартфона (120 або 240 кадрів в секунду) до зйомки процесу коливання.

2. Налити воду у посудину.

3. Верхній отвір трубки закрити пальцем та занурити у рідину.

4. Запустити мілісекундомір та включити відео.

5. Підніміть палець вгору – відкрийте верхній отвір трубки.

6. Після закінчення коливань виключите відеозйомку.

7. Запишіть у таблицю Excel величину рівня води в трубці в залежності від часу коливання.

8. Побудуйте графік залежності рівня води в трубці від часу. Визначте період коливання та коефіцієнт загасання.

9\*. Розв'яжіть чисельно рівняння (3), використовуючи умови експерименту ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $h$ ) і початкові умови:  $z_0$ ,  $\dot{z}_0 = 0$ . Порівняйте експериментальні дані з розв'язком рівняння (3) з введенням початкових умов і змінюючи лише феноменологічний коефіцієнт загасання  $b$ .

10\*. Проведіть дискретне перетворення Фур'є цього коливання, визначте спектр потужності.

11\*. Порівняйте частоту коливань із законом Гука для малих зміщень. Через обмеження точності відеообладнання вимірювання дуже малих коливань переміщення є складним завданням. За допомогою більш чутливого обладнання для спостереження, такого як моніторинг електричного опору дроту в трубці,

можна експериментально виміряти частоту коливань малого зміщення більш точно.

12. Повторіть п. 1-11 зі збільшеною концентрацією солей, або іншою рідиною, іншою формою трубки, іншим діаметром.

\* - пункти виконуються більш досвідченими студентами або студентами старших курсів.

Як приклад виконання роботи, на рис. 2 наведені осцилограми коливання рідини в трубці, а на рис. 3 спектр.

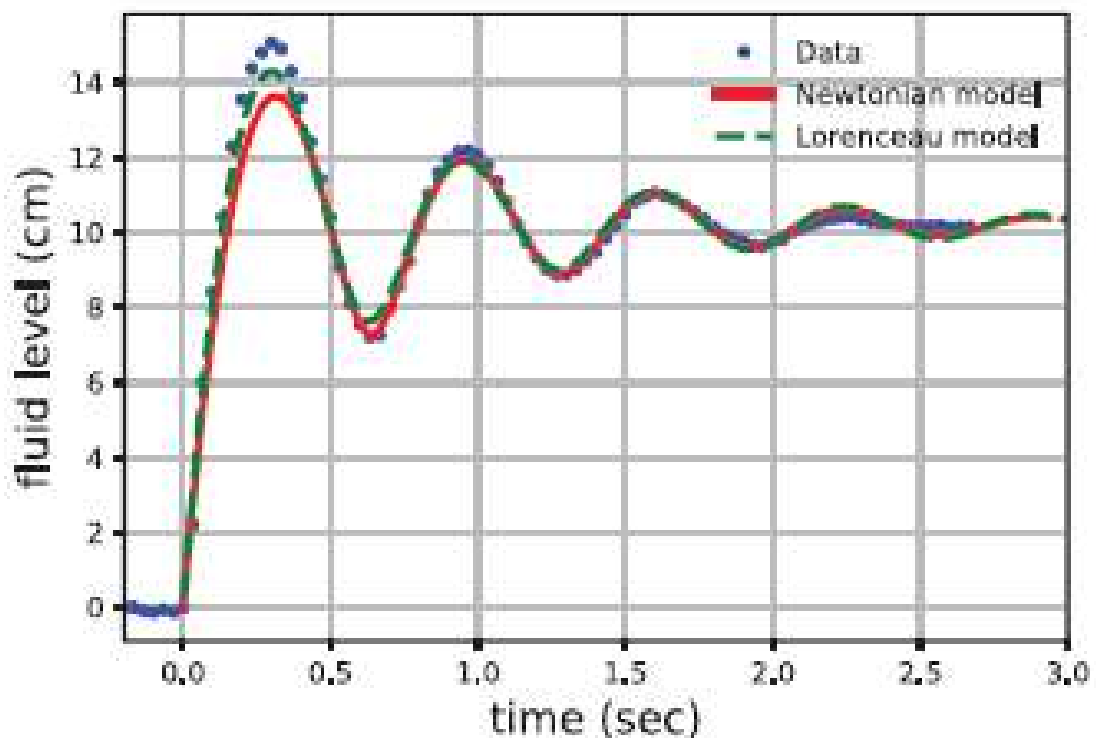


Рис. 2. Узгодження зареєстрованого затухаючого коливального руху рівня рідини з рішенням простої ньютонівської моделі (суцільна лінія), а також більш складної моделі Lorenceau et al. (пунктирна лінія)

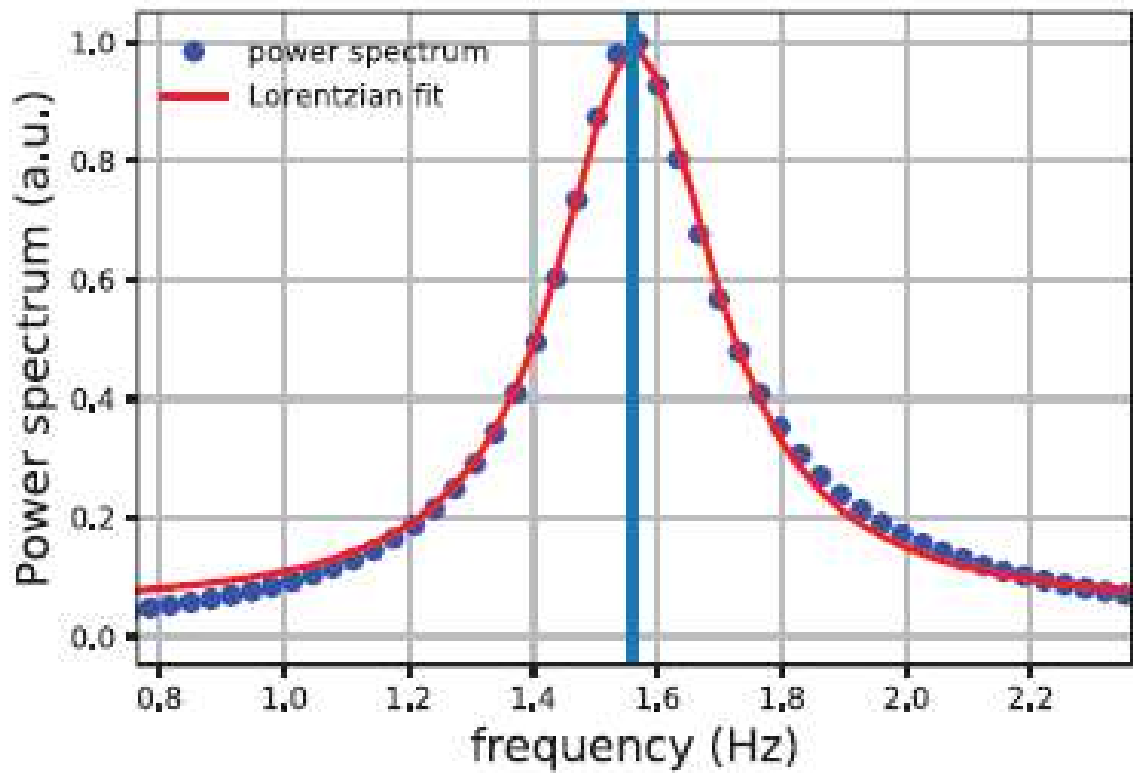


Рис. 3. Перетворення Фур'є коливальних даних, узгоджених з кривою Лоренца, дає власну частоту коливань, яка добре порівнюється з аналітичною оцінкою в межі малих переміщень (показано вертикальною лінією)

## Список літератури

1. E. Lorenceau, D. Quere, J. Y. Ollitrault, and C. Clanet, “Gravitational oscillations of a liquid column in a pipe,” *Phys. Fluids* 14, 1985–1992 (2002).
2. S. Shamim et al., “Investigating viscous damping using a webcam Investigating viscous damping using a webcam,” *Am. J. Phys.* 78, 433–436 (2010).
3. F. B. Morinigo, “Fluid Oscillations in a U Tube,” *Am. J. Phys.* 40, 350–351 (1972).
4. V. K. Gupta, G. Shanker, and N. K. Sharma, “Experiment on fluid drag and viscosity with an oscillating sphere,” *Am. J. Phys.* 54, 619–622 (1986).
5. S. Theodorakis and K. Paridi, “Oscillations of a candle burning at both ends,” *Am. J. Phys.* 77, 1049–1054 (2009).
6. R. Hauko, D. Andreevski, D. Paul, and R. Repnik, “Experiments teaching of the harmonic oscillator damped by a constant force: The use of analogy and experiments,” *Am. J. Phys.* 86, 657–662 (2018).
7. R. P. Smith, <[https://github.com/r31415smith/AdvLab/tree/master/fluid\\_osc](https://github.com/r31415smith/AdvLab/tree/master/fluid_osc)>, last accessed January 2, 2019.
8. J. R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, Sausalito, CA 2005).
9. Ryan P. Smith, and Eric H. Matlis. Gravity-driven fluid oscillations in a drinking straw. *American Journal of Physics* 87, 433 (2019); <https://doi.org/10.1119/1.5095945>



## 2. 9. Визначення величини коефіцієнта відновлення при зіткненні тіл: перевірка гіпотези Ньютона

Розглянемо методику проведення лабораторної роботи з фізики, яка використовує смартфон як вимірювальний комплекс для визначення величини коефіцієнта відновлення швидкості при падінні кульки на поверхню плити. Виконаємо перевірку гіпотези Ньютона щодо незалежності величини коефіцієнта від швидкості за допомогою розроблених мініатюрних мобільних дослідницьких установок у стилі технології BYOD. Для цього будемо використовувати мікрофон смартфона для реєстрації звуку під час зіткнення кульки з плитою, а також відеореєстрацію траєкторії руху в режимі slow motion.

Під час пандемії, або військового конфлікту, коли пересування студентів обмежено, виконувати очно лабораторні роботи з фізики стає неможливим. Тому вкрай важливо забезпечити студентів методичною та інструментальною підтримкою для проведення лабораторних робіт дистанційно. Ця робота і

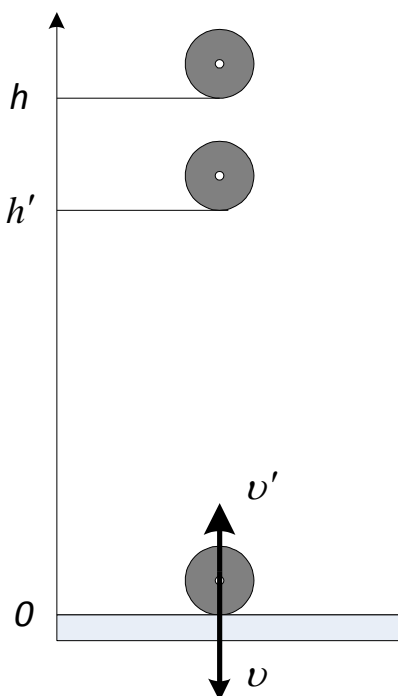


Рис. 1. Схема дослідження

присвячена саме розв'язанню цієї проблеми. Крім цього, є можливість студенту перевірити гіпотезу Ньютона щодо незалежності величини коефіцієнта відновлення від швидкості падіння кульки на поверхню плити. Розв'язок цього завдання може бути використано як теоретичну основу для розроблення мініатюрної дослідницької установки, яка дозволить проводити на уроках фізики лабораторну роботу "Визначення величини коефіцієнта відновлення при зіткненні тіл".

**Постановка завдання.** Розглянемо дослід: кулька падає у вакуумі зі стану спокою з висоти  $h_0$  на горизонтальну плиту, вдаряється об неї і відстрибує вертикально вгору (рис. 1). З законів кінематики відомо, що

швидкість кульки в момент удару дорівнює  $v = \sqrt{2gh_0}$ , де  $g$  - прискорення вільного падіння. Як показує досвід, швидкість  $v'$ , з якою кулька починає рухатись вгору після удару, буде меншою, ніж  $v$ . Як відомо, при непружному ударі кінетична енергія не зберігається, і тому швидкість кульки зменшується. В свій час Ньютон, аналізуючи подібні досліди з кульками, прийшов до висновку, що величина  $\varepsilon = \frac{v'}{v}$  – постійна для даної кульки і даної поверхні плити. Припущення щодо постійності величини  $\varepsilon$  називають гіпотезою Ньютона, а саму постійну  $\varepsilon$  – коефіцієнтом відновлення.

Під ударом розуміють сукупність явищ, які виникають при зіткненні тіл і супроводжуються повним або частковим переходом кінетичної енергії в їх деформації. Удар – це процес, при якому протягом дуже малого проміжку часу діють дуже великі сили. Вивчати удар почали з часів Леонардо да Вінчі. Відомо, що ще Галілей провів ряд дослідів для визначення законів, які описують зіткнення тіл. Ці досліди, насамперед, не привели його до конкретних висновків. Його сучасник, празький професор Марці, у 1639 році надрукував працю “De proportione motus”, де вказав, що тіло, яке пружно зіткнулося з таким же тілом, яке знаходиться у стані спокою, втрачає свою швидкість, передаючи її цьому тілу. Перше детальне дослідження законів удару було виконано у 1668 році за пропозицією Лондонського королівського товариства трьома видатними механіками та математиками того часу Валлісом, Кристофером Реном та Христианом Гюйгенсом. Саме на їх досліди робив посилання Ньютон у своїх знаменитих “Математичних началах натуральної філософії” (1687р.). Розглядав це питання і сам Ньютон. Модель удару Ньютона заснована на припущенні, що час удару нескінченно малий і переміщенням тіла в процесі удару можна знехтувати. І. Ньютон припустив, що коефіцієнт відновлення визначається матеріалом, з якого виготовлені тіла, і не залежить від швидкості зіткнення. Він розбив процес удару на два етапи: 1) фаза деформації; 2) фаза відновлення. Модель удару Ньютона не дозволяє

визначити багато важливих параметрів удару, його тривалість, максимальне значення сили взаємодії тіл, їх деформацію і т. і. Експериментальні дані спростовують припущення про постійність коефіцієнта відновлення і показують, що зі збільшенням швидкості зіткнення тіл коефіцієнт відновлення монотонно убуває. В теоретичних роботах доводиться, що для пружного удару коефіцієнт відновлення є монотонно спадною функцією швидкості зіткнення. Коли швидкість зіткнення прямує до нуля, коефіцієнт відновлення прямує до деякого максимального значення, яке менше одиниці, залежить тільки від постійної сухого тертя і зменшується з ростом її значення.

У складі будь-якого вступного курсу фізики є лабораторна робота по визначенню величини коефіцієнта відновлення. Це питання також розглядається у курсі теоретичної механіки. У наш час, виконуючи ці досліди студенти мають можливість обговорити закони механіки, математику і навіть трохи філософію. При всьому тому, питання справедливості гіпотези Ньютона при малих швидкостях зіткнення двох тіл залишається для студентів експериментально нез'ясованим.

З огляду на ці невирішені питання, метою даної роботи є висвітлення методики проведення лабораторної роботи з визначення функціональної залежності коефіцієнта відновлення від швидкості падаючої на плиту кульки та перевірки гіпотези Ньютона.

### Теоретичні відомості

Якщо припустити, що гіпотеза Ньютона правдива, то для визначення величини  $\varepsilon$  для даної кульки і даної поверхні достатньо провести лише один дослід. А саме, відпустити кульку з висоти  $h_0$  і виміряти максимальну висоту  $h_1$ , на яку вона піднімається після удару. Тоді передударна швидкість кульки буде

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}, \quad (1)$$

а після удару

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad (2)$$

тобто коефіцієнт відновлення

$$\varepsilon = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}. \quad (3)$$

Виникає питання: чи зберігає свою величину коефіцієнт відновлення при зміні швидкості удару? Для цього відпустимо кульку з висоти  $h_0$ , але на цей раз не будемо її ловити після першого удару, а дамо їй можливість необмежено відскакувати. Скільки часу буде тривати цей процес?

Якщо  $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$  – час падіння до першого зіткнення з плитою, а  $t_1 = \sqrt{2h_1/g}$  – час відскоку кульки до висоти  $h_1$  після першого зіткнення, тоді

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \frac{t_1}{t_0}.$$

Отже,  $t_1 = \varepsilon t_0$ . Ті самі дії можна повторити для всіх відскоків. З урахуванням того, що час, необхідний для підйому кульки, дорівнює часу падіння та припускаючи, що коефіцієнт відновлення  $\varepsilon$  однаковий для всіх відскоків, ми отримуємо

$$t_{n+1} = \varepsilon t_n. \quad (4)$$

Ми також можемо записати

$$t_n = \varepsilon^n t_0. \quad (5)$$

Якщо існує навіть нескінченна кількість відскоків, завдяки тому, що коефіцієнт  $\varepsilon$  менше одиниці, загальний час підстрибування  $T$  буде скінченний:

$$T = t_0 + 2\sum_1^{\infty} t_n = 2\sum_0^{\infty} t_n - t_0 = \left[ 2\left(\sum_0^{\infty} \varepsilon^n\right) - 1 \right] \cdot t_0 \quad (6)$$

Ряд в круглих дужках – це геометрична прогресія зі знаменником  $\varepsilon < 1$ , тому він збіжний. Сума такого ряду:

$$S = \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad (7)$$

Підставивши рівняння (7) в рівняння (6), ми отримуємо вираз для загального часу стрибання  $T$ :

$$T = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot t_0 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (8)$$

Коли  $\varepsilon \rightarrow 1$ , загальний час прямує до нескінченності, як і слід очікувати, оскільки в такому випадку відскоки є пружними, і куля ніколи не зупиниться. Розв'язавши вищенаведене рівняння для  $\varepsilon$ , ми отримуємо залежність:

$$\varepsilon = \frac{T-t_0}{T+t_0} = \frac{T-\sqrt{2h_0/g}}{T+\sqrt{2h_0/g}}. \quad (9)$$

Якщо прийняти  $\varepsilon = 0,90$ , і коли початкова висота  $h = 0,5$  м, то формула (8) дає  $T = 6$  с. Цей результат можна перевірити експериментально. Збільшення часу стрибків доведе студенту, що гіпотеза Ньютона не є вірною.

В таких дослідах студенти також можуть дати відповідь на питання як втрачається енергія: завдяки опору повітря, або під час зіткнення кулі з плитою.

Поставлена проблема вирішується за допомогою розроблених мініатюрних мобільних дослідницьких установок у стилі технології BYOD. Методологічно робота базувалася на відомих законах механіки, а її основні науково-практичні результати отримані з використанням реєстрації звуку під час зіткнення кульки з плитою (додаток Phyrphox“(не)пружне зіткнення”), відеореєстрації траєкторії руху за допомогою смартфона в режимі slow motion з подальшою обробкою відеосюжету комп'ютерною програмою “Tracker” та цифрових технологій оброблення результатів експериментів.

### **Результати дослідження**

Для демонстрації явища та дослідження характеристик руху й підтвердження зроблених раніше теоретичних висновків було виготовлено установку, схему якої наведено на рис. 2.

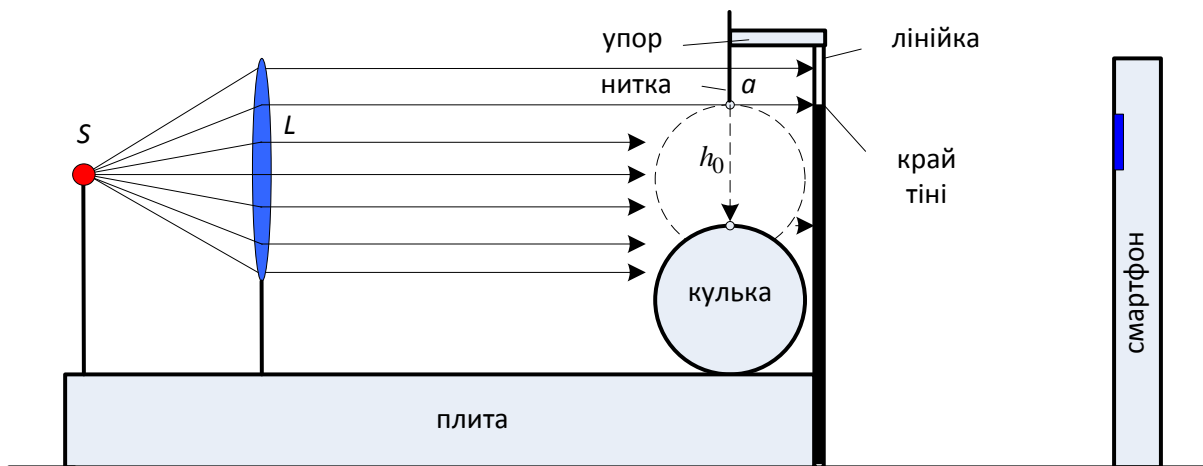


Рис. 2. Схема дослідної установки:  $S$  – джерело світла,  $L$  – лінза

Установка розроблялася для фронтального або дистанційного проведення лабораторної роботи студентами. Тому конструкція установки виготовлялася так, щоб студент міг самотужки повторити і зібрати цю установку. Сталева плита масою 200 г та розмірами  $50 \times 32 \times 16$  (Н)  $\text{мм}^3$  може кріпитися до дошки столу пружинними затискачами (binder clips). Рух кульки відбувається на тлі прозорої міліметрової лінійки, прикріпленої до плити та секундоміра іншого смартфона (точність вимірювання часу 0,001с). Для вимірювання та визначення кінематичних параметрів використовувався смартфон Huawei P20 Pro в режимі відео "slow motion" з частотою до 960 кадрів/с. Звук зіткнення кульки з плитою також реєструвався цим смартфоном. Для створення паралельного пучка світла у нашому випадку використовувалася лінза з точковим джерелом світла. У разі відсутності такої лінзи можна використовувати прямі промені Сонця. Реєстрація руху кульки та звуку її падіння проводилися одночасно, тому можна було порівняти можливості і точність методів. Вигляд фото під час знаходження кульки в верхніх точках траєкторії після підскоків наведено на рис. 3.

З цього можна зробити висновок, що положення кульки реєструється чітко та однозначно. Хоча ціна поділки 1 мм, але точність визначення положення нижньої частини кульки при необхідності можна збільшити за рахунок простого збільшення фото.

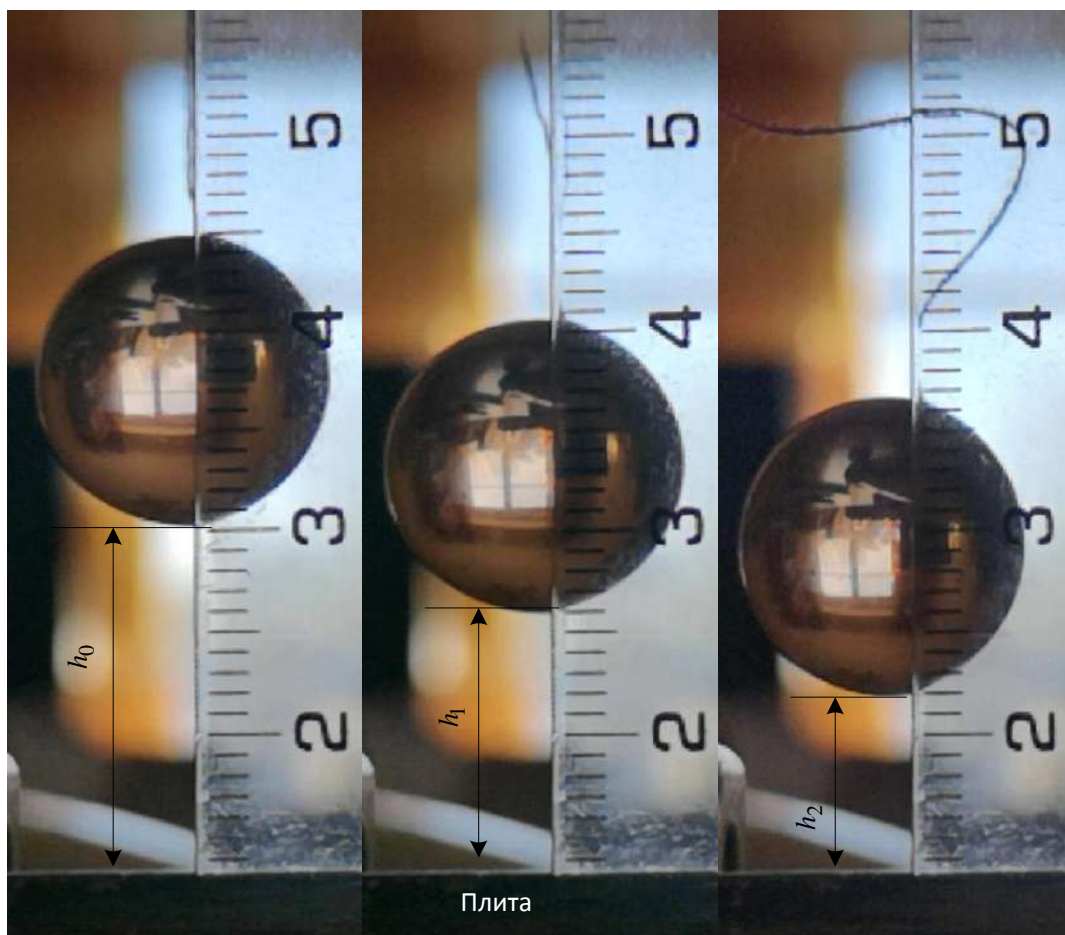


Рис. 3. Скріншоти відеофільму (960 кадрів/с) відскоків скляної кульки від сталюї плити

Отже, смартфон дозволяє вимірювати звуковим і оптичним методами швидкості падіння кулі майже до нуля і реєструвати одночасно інтервали часу з точністю 1 мс. Для дистанційного виконання цих дослідів це дуже важливо.

Для отримання більш надійних результатів під час проведення наших дослідів використовувався також осцилографічний метод реєстрації моменту і тривалості зіткнень металевих кулек зі сталюю плитою розмірами  $50 \times 32 \times 16$  (Н) мм<sup>3</sup>. Електрична схема вимірювань наведена на рис. 4.

Під час зіткнення сталюї кульки діаметром 11,6 мм з металюю плитою виникав контакт, тривалість якого й інтервал між якими залежали від швидкості падіння. Електричне коло на цей час замикалося і падіння напруги

на опорі  $R$  реєструвалося цифровим осцилографом.

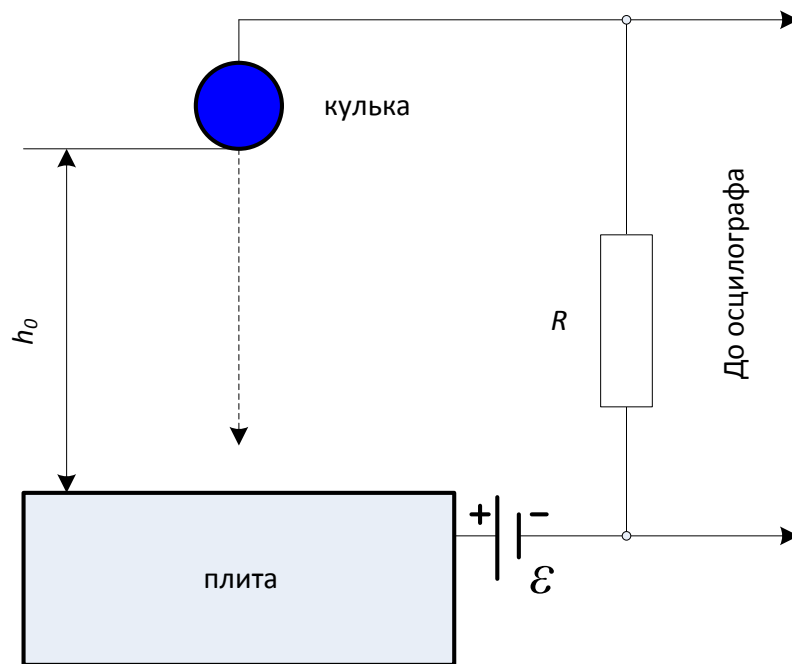


Рис. 4. Схема вимірювання  $\varepsilon$  за допомогою осцилографа

Вигляд типової осцилограми наведений на рис. 5. В досліді висхідна висота кульки над плитою  $h_0 = 50$  мм, тому швидкість падіння кульки перед першим ударом становить  $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 0,99$  м/с, а час падіння перед першим ударом дорівнює  $t_{01} = \sqrt{2h_0 / g} = 101$  мс.

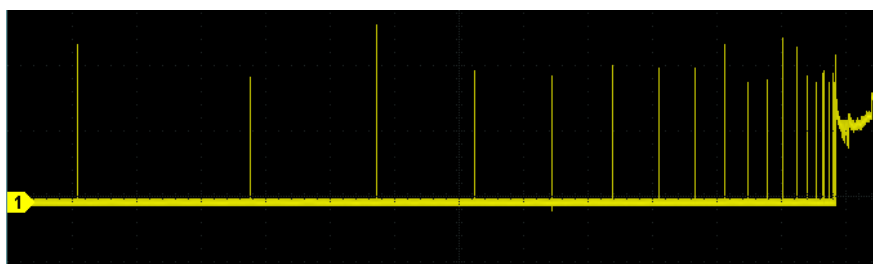


Рис. 5. Осцилограма контактів сталевій кульки  $\varnothing 11,6$  мм зі сталеву плитою

Кількість зареєстрованих на цій осцилограмі зіткнень – 18. Тривалість ударів склала величину – 588,43 мс. Для порівняння, тривалість процесу



відскоку металеві кульки, яка була виміряна смартфоном шляхом реєстрації звуку ударів, склала величину біля 370 мс, що в 1,6 разів менше. Отже, визначити коефіцієнт відновлення швидкості звуковим методом, використовуючи формулу (9) не можна. Час польоту кульки між ударами наведено в табл. 1.

Таблиця 1

**Результати вимірювань тривалості підскоків**

<i>N</i> <sub>0</sub>	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
<i>t</i> , мкс	134,8	98	75,6	60,4	46,8	28,5	22,4	18,24	15,04
<i>N</i> <sub>0</sub>	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19
<i>t</i> , мкс	12,48	10,48	8,64	7,02	5,32	4,22	2,7	1,6	0,78

Тривалість взаємодії кульки з плитою знаходилась в межах  $62 \pm 18$  мкс. Якщо вважати, що  $\varepsilon = \text{const}$ , тоді величина коефіцієнта відновлення за формулою (9) дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{T - \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}{T + \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} = \frac{588,43 - 100,96}{588,43 + 100,96} = 0,707. \quad (10)$$

Дослідимо, чи дійсно  $\varepsilon = \text{const}$  для кожного зіткнення? Для цього величину коефіцієнта відновлення для першого зіткнення визначимо так:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \frac{t_1}{t_0} = \frac{0,5 \cdot t_{12}}{t_0} = \frac{0,5 \cdot 134,8}{100,96} = 0,6676.$$

Величину коефіцієнта відновлення для другого, третього зіткнення і т.д. визначимо так:

$$\varepsilon_n = \frac{t_{n, n+1}}{t_{n-1, n}}.$$

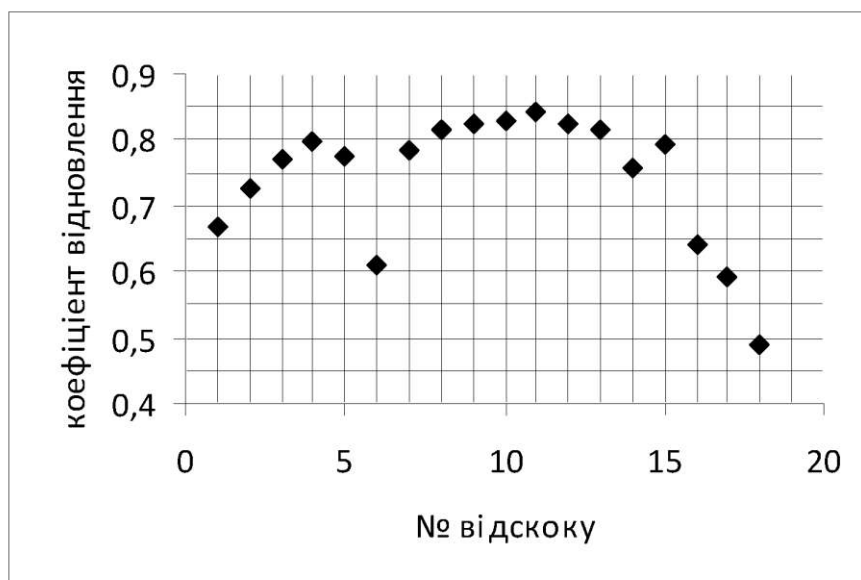


Рис. 6. Результати обчислень коефіцієнта відновлення швидкості  $\varepsilon$  за контактним методом

Результат обчислення  $\varepsilon$  наведено на рис. 6. Як видно з рис. 6 значення коефіцієнтів відновлення швидкості визначених контактним методом не є стабільними. Цьому є пояснення: якість контакту та рельєф поверхні плити впливає на результати вимірювання. Щоб запобігти цьому, діаметр сталеві кульки був збільшений до 25 мм, а в якості відбійника використано загартований бойок молотка  $\varnothing 30$  мм. Кількість зареєстрованих на цій осцилограмі ударів – більше 15. Тривалість ударів складала величину – 343 мс, що за формулою (8) дає величину

$$\varepsilon = \frac{T - t_0}{T + t_0} = \frac{343 - 111,52}{343 + 111,52} = 0,509.$$

Результати обчислень  $\varepsilon$  в залежності від швидкості кульки  $v$  наведено на рис. 7. З графіка на рис. 7 та отриманих даних видно, що коефіцієнт відновлювання зростає (з  $\varepsilon = 0,54$  до  $\varepsilon = 0,89$ ) зі зменшенням швидкості зіткнення кульки з плитою з  $v = 1,1$  м/с до значення  $v = 0,02$  м/с ( $h = 20$  мкм), а потім швидко зменшується до  $\varepsilon = 0,69$ . Це також можна пояснити впливом нерівностей поверхні.

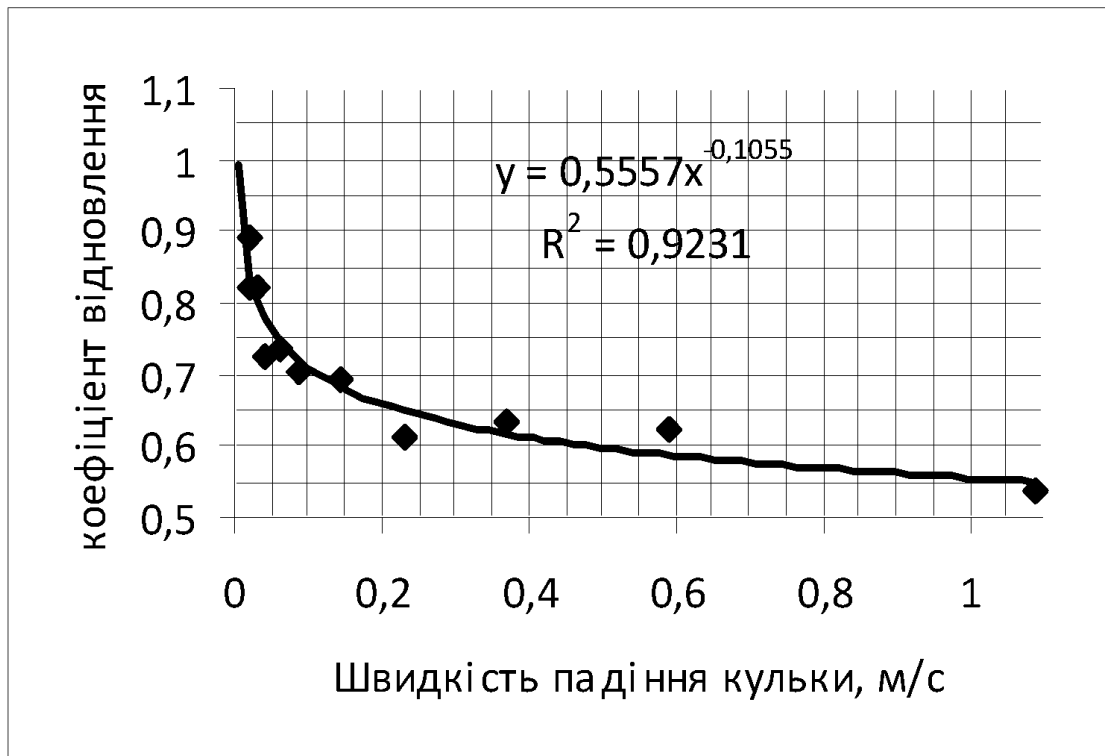


Рис. 7. Графік залежності коефіцієнта відновлення  $\varepsilon$  від швидкості сталеві кульки  $v$

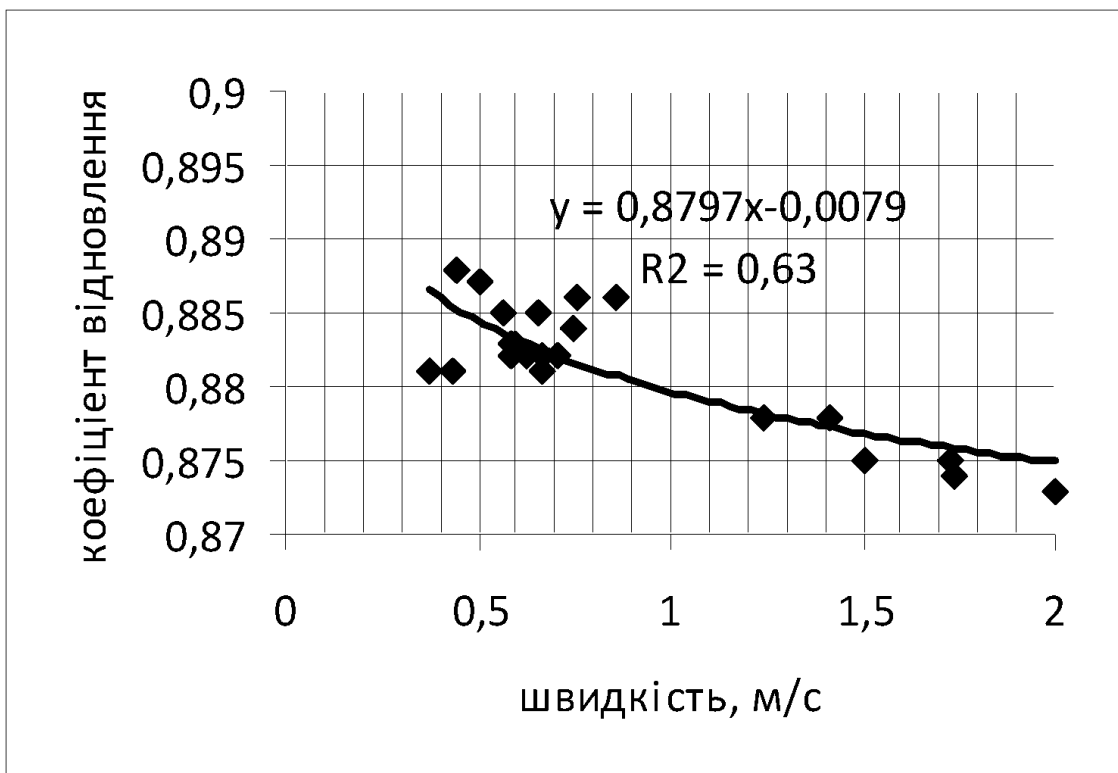


Рис. 8. Графік залежності коефіцієнта відновлення  $\varepsilon$  від швидкості кульки  $v$  (ДСП столу)

Отже, цими вимірюваннями доведено, що гіпотеза Ньютона спростовується: при малих швидкостях коефіцієнт відновлення залежить від швидкості.

З огляду на те, що у студентів немає вдома осцилографів, в подальших дослідженнях використовувалися (і порівнювалися) лише звуковий та відео-методи. Результати вимірювання  $\varepsilon = 0,93 \pm 0,01$  за допомогою звукової реєстрації (додаток Phyphox“ (не)пружне зіткнення”) та методу відеореєстрації в режимі “slow motion” (240 кадрів/с) падіння тонкостінної сфери (тенісної кульки) на залізну плиту довели їх рівнозначність. Але розкид величини  $\varepsilon$  під час наближення швидкості полібутадієнової кульки до 0,5 м/с ( $h \sim 13$  мм) також довів, що звуковий метод має границю застосування (рис. 8).

Тому для вимірювання коефіцієнта відновлення  $\varepsilon$  при менших швидкостях необхідно застосовувати метод відеореєстрації з частотою кадрів 240 кадрів/с, а краще – 960 кадрів/с (див. рис. 3). Дійсно, краще один раз побачити ніж 100 разів почути.

### **Обговорення результатів дослідження**

Підстрибуюча кулька є складовою частиною багатьох фізичних експериментів. Вона володіє багатьма “професіями”: її можна використати для дослідження траєкторії руху тіл в полі тяжіння, вимірювання прискорення, доведенні законів збереження енергії тощо. У нашому випадку вона дозволяє провести не виходячи з дому ряд ексклюзивних досліджень і навіть посперечатися з великим Ісааком Ньютоном. Додавши до мініатюрної установки, яку студенти самотужки можуть побудувати, сучасні мобільні вимірювальні лабораторії – смартфони – вони взмозі не тільки самостійно провести дослід, а й використати їх як відкриття для себе багато чого нового і цікавого. Залучення студентів до азів науки є кропітким процесом і ця робота сприяє цьому. Подолавши першу сходинку теорії удару – модель Ньютона –

студент обов'язково познайомиться і з іншими моделями: Кельвина-Фойхта, Герца, об'єднаною моделлю удара Герца-Ханта-Кросслі тощо.

## Висновки

Доведено, що розроблені мініатюрні установки надають можливість фронтального та дистанційного проведення лабораторної роботи "Визначення величини коефіцієнта відновлення швидкості при зіткненні тіл".

Висновки, які можна зробити з виконаних дослідів полягають в наступному:

1. Метод відеореєстрації в режимі "slow motion" дозволяє прослідкувати за допомогою смартфона залежність коефіцієнта відновлення  $\varepsilon$  від швидкості до величини  $v \approx 0,02$  м/с і довести, що гіпотеза Ньютона при малих швидкостях спростовується.

2. Для визначення границь працездатності звукового методу досліджувалось падіння на сталюну плиту кульок, виготовлених з різних матеріалів: скла, сталі, полібутадієна, пластмаси. Кульки при падінні видавали звуки різного спектрального складу, тому нереальні значення висот, які визначала програма, іноді їх збільшення при відскоках, дозволяють зробити висновок про непридатність мобільного додатка Phyphox "(не)пружне зіткнення", реєструвати відскокі на малих висотах. Виявилось, що найбільш стабільні результати можна отримати звуковим методом, якщо використовувати тенісні кульки діаметром 40 мм. Порівняння звукового методу з одночасною відеореєстрацією падіння тенісної кульки на сталюну пліту довело, що результати узгоджуються та оба методи дають однакову величину коефіцієнта відновлення:  $\varepsilon = 0,93 \pm 0,01$ . Але спостерігається постійне перевищення висоти  $h_0$  звуковим методом на величину 1-3 мм від фактичного, а висоти менше 15-20 мм не реєструються. Отже, використовувати цю програму для перевірки гіпотези Ньютона не можна.

Перспективи подальшого дослідження полягають у вивченні впливу різних факторів на параметри в'язкоупругопластичної моделі удару та визначенні залежності розмірів плями контакту двох тіл від часу взаємодії.

### Список використаних джерел

1. Боровин Г.К., Лапшин В.В. Обобщенная модель удара Герца — Ханта — Кроссли. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2018. № 6. С. 18–30. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-18-30.
2. Кочетков А.В., Федотов П.В. Некоторые вопросы теории удара. *Науковедение*. 2013. № 5. URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf>
3. Павловський М.А. *Теоретична механіка*: навч. вид. Київ. Техніка. 2002. 511 с.
4. De Luca, M. Di Mauro, and A. Naddeo. Bouncing Balls and Geometric Progressions. *The Physics Teacher*. 2020. Vol. 58. P. 513 – 515. <https://doi.org/10.1119/10.0002075>
5. David Marasco. Teaching an Old Ball New Tricks: Another Look at Energetics, Motion Detectors, and a Bouncing Rubber Ball. *The Physics Teacher*. 2020. Vol. 58, P. 62-66. doi: 10.1119/1.5141977
6. Tracker (комп'ютерна програма): <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

## 2. 10. Хто виграє перегони: дослідження законів руху тіл з тертям ковзання та кочення

Гонки між рухомими об'єктами є цікавим способом заохочення студентів до більш глибокого вивчення механіки. Використання похилої стільниці стола як змагального поля дозволяє крім емоційної складової отримати відповідь на нетривіальне питання: яке з двох однакових за масою тіл, що запускаються одночасно з нижньої точки похилої площини вгору повернеться першим, якщо коефіцієнт тертя ковзання у одного більше нуля, а у іншого  $\mu = 0$ ? Хоча тіло, що має ненульове тертя ковзання, рухається повільніше на тій самій висоті, ніж тіло, що котиться, це не гарантує, що тіло, що котиться, виграє перегони, оскільки воно піднімається до більш максимальної висоти, ніж тіло, яке рухається з тертям ковзання. Хто виграє ці перегони?

**Метою роботи** є теоретичне визначення умов, при яких одне тіло фінішує скоріше іншого, та експериментальне доведення правильності розрахунків.

**Прилади й матеріали:** похила площина, тіла, складені з трьох однакових кульок, з'єднаних трикутником та послідовно, смартфон в режимі відео "slow motion" та мобільні додатки "Секундомір", "Датчик нахилу".

### Теоретичні відомості

Розглянемо два тіла, кожне масою  $m$ , одне з яких рухається вгору вздовж шорсткої частини похилої площини, а друге вздовж ділянки без тертя поруч з нею. Схема руху першого тіла, що ковзає вгору і вниз по площині наведена на рис. 1. Силу тертя можна змінювати, змінюючи кут нахилу  $\theta$  для фіксованого коефіцієнта кінетичного тертя  $\mu$ . Опором повітря нехтуємо. Сила реакції опори  $N$ , перпендикулярна поверхні площини і дорівнює:

$$N = mg \cos \theta, \quad (1)$$

де  $g = 9,8 \text{ м / с}^2$  - величина прискорення вільного падіння.

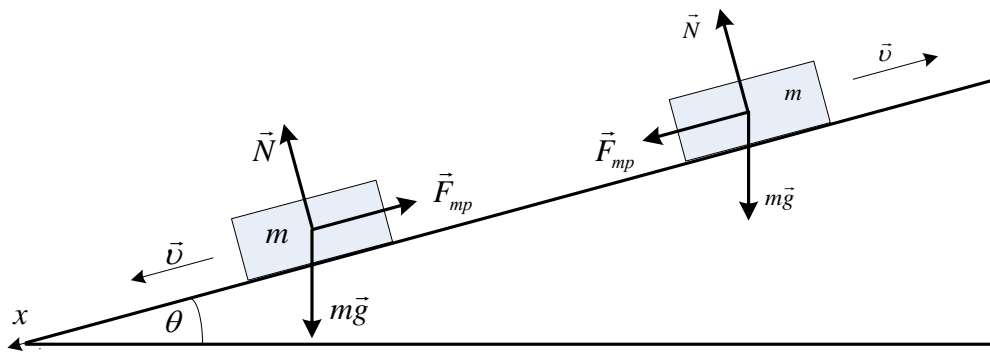


Рис. 1. Схема сил, які діють на тіло, що ковзає вгору і вниз по площині з нахилом  $\theta$  до горизонту

Прискорення першого тіла, коли воно рухається вгору по нахилу, має постійне значення:

$$a_x = g (\sin \theta + \mu \cos \theta) \quad (2)$$

так що час руху тіла до зупинки, коли йому задана початкова швидкість  $v_0$ , становить:

$$t_{\text{вгору}} = \frac{v_0}{g (\sin \theta + \mu \cos \theta)} = \frac{v_0}{g \sin \theta (1 + \mu \operatorname{ctg} \theta)}. \quad (3)$$

Відстань, на яку тіло підніметься вгору по нахилу за цей час буде дорівнювати:

$$l = \frac{v_0^2}{2g \sin \theta (1 + \mu \operatorname{ctg} \theta)}. \quad (4)$$

Якщо  $\mu < \operatorname{tg} \theta$  (нехтуючи різницею між статичним та кінетичним коефіцієнтами тертя), тіло далі буде ковзати вниз по нахилу до початкової точки. Прискорення під час цього спуску буде дорівнювати:

$$a_x = g (\sin \theta - \mu \cos \theta). \quad (5)$$

Знак перед  $\mu$  перевернуто тут порівняно з рівнянням (2), породжуючи помітну зміну прискорення візка, по відношенню до прискорення, коли тіло рухається вгору. Час спуску отримаємо за допомогою рівнянь (4) та (5):



$$t_{\text{вниз}} = \sqrt{\frac{2l}{a_x}} = \frac{v_0}{g \sin \theta \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}}. \quad (6)$$

Встановивши  $\mu = 0$  в будь-якому рівнянні (3) або (6) визначаємо, що за відсутності тертя час підйому або спуску по площині дорівнює:

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g \sin \theta}. \quad (7)$$

Отже, співвідношення загального часу подорожі з тертям і без нього дорівнює:

$$\eta = \frac{T_{\text{тертя}}}{T_{\text{без тертя}}} = \frac{t_{\text{догори}} + t_{\text{вниз}}}{t_{1/2} + t_{1/2}} = \frac{1}{2} \left[ (1 + \mu \operatorname{ctg} \theta)^{-1} + (1 - \mu^2 \operatorname{ctg}^2 \theta)^{-1/2} \right]. \quad (8)$$

Встановивши це відношення рівним 1, отримаємо критичний кут  $\theta_c$ , при якому час руху тіла з тертям та без нього стає однаковим. Розв'язком цього рівняння є вираз:

$$\mu \operatorname{ctg} \theta = 1/\sqrt{2}, \quad (9)$$

що можна перевірити, підставивши це значення у рівняння (8).

Отже, теорія передбачає, що тілу з коефіцієнтом тертя  $\mu = 0$ , яке котиться вгору і вниз по нахилу, знадобиться стільки ж часу, щоб повернутися до точки запуску, як і тілу з коефіцієнтом тертя  $\mu > 0$ , якщо кут нахилу площини обраний таким, щоб мати критичне значення:

$$\theta_c = \operatorname{arctg}(\mu\sqrt{2}). \quad (10)$$

Цей кут задовольняє обмеженню  $\operatorname{tg} \theta_c > \mu$ , тому тіло не залишається в стані спокою в точці повороту в найвищій точці траєкторії руху і продовжує рухатися вниз.

Коефіцієнт тертя  $\mu$  визначається статичним методом – за тангенсом найменшого кута нахилу площини  $\theta_{\min}$ , при якому тіло починало рухатися вниз з верхньої точки траєкторії після зупинки.

## Постановка експериментів. Результати дослідження

Кожне тіло складалося з 3 скляних кульок діаметром  $10,33 \pm 0,05$  мм масою 1,47 г кожна. Між собою кульки склеювалися у вигляді рівностороннього трикутника (тіло з тертям ковзання) та вздовж прямої лінії (тіло з тертям кочення). На рис. 2 наведені стартові положення тіл, на рис. 3 – обладнання для проведення дослідів, на рис. 4 – графік залежності відношення  $\eta$  від кута нахилу площини  $\theta$  згідно рівнянню (8) та експериментальні точки на графіку рис. 5.

Для вимірювання часу руху тіл використовувався мобільний додаток для Android “Секундомір”, який дозволяв це робити з точністю до мілісекунди. Для вимірювання нахилу площини використовувався мобільний додаток на смартфон з датчиком нахилу “Physics Toolbox”.

Відеореєстрація руху тіл на фоні екрана смартфонів з секундоміром та датчиком нахилу велася в режимі “slow motion” 240 кадрів/с. Таке поєднання приладів дозволило експериментально визначити залежність співвідношення загального часу подорожі тіл з тертям і без нього  $\eta$  від кута нахилу площини  $\theta$  (рис. 5).

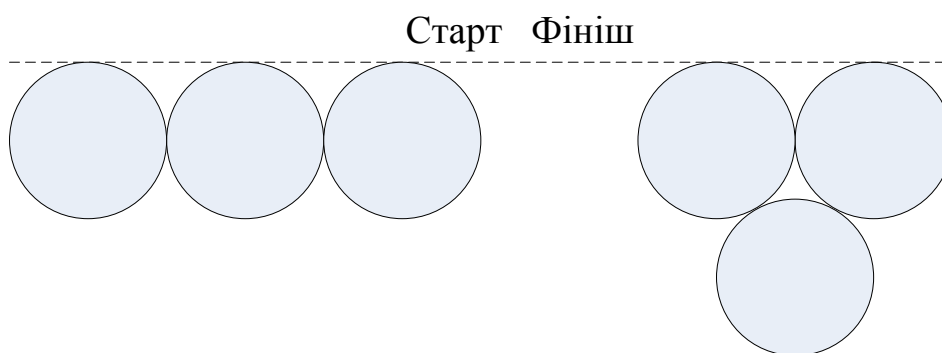


Рис. 2. Стартові положення тіл

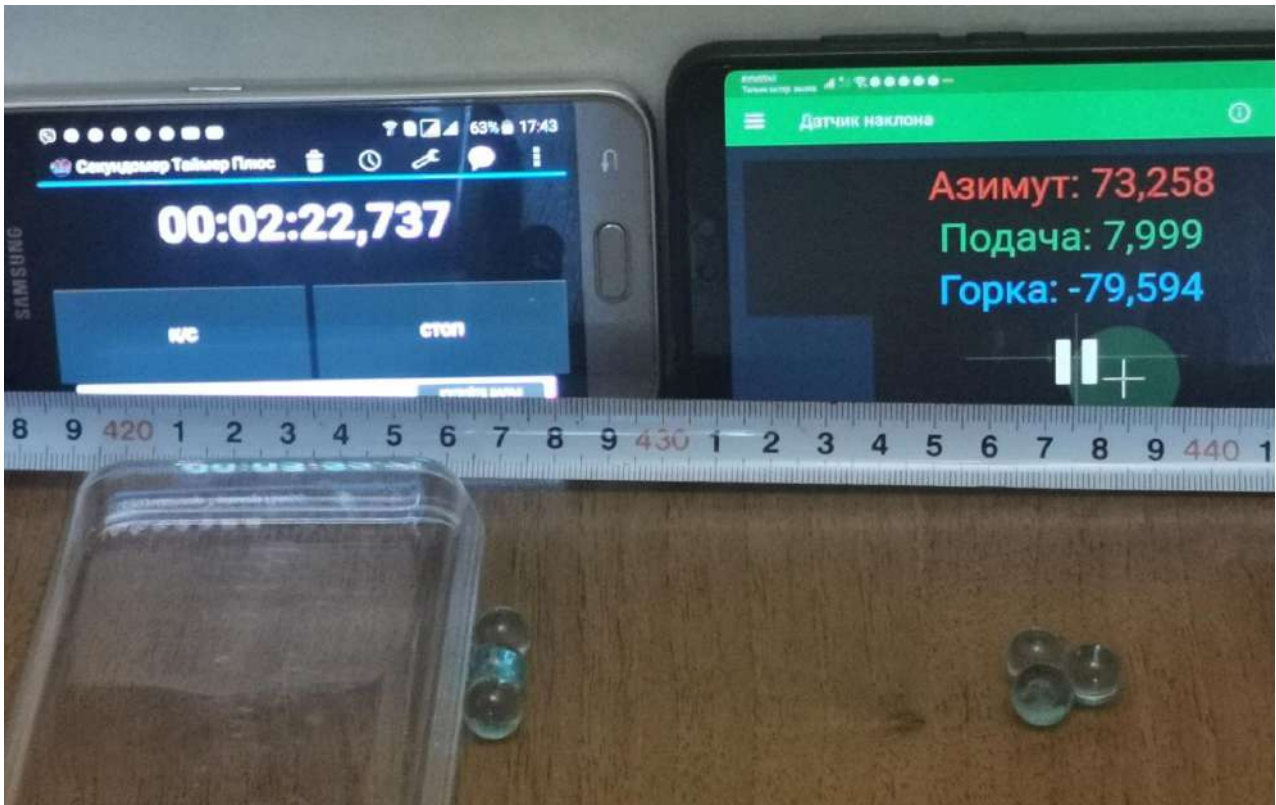


Рис. 3. Обладнання для дослідів: 1 – похила площина (стілниця стола), 2 – тіло, що котиться, 3 – тіло, що має тертя ковзання, 4 – лінійка, 5 – стартова колодка, 6 – смартфон з секундоміром, 7 – смартфон з датчиком нахилу

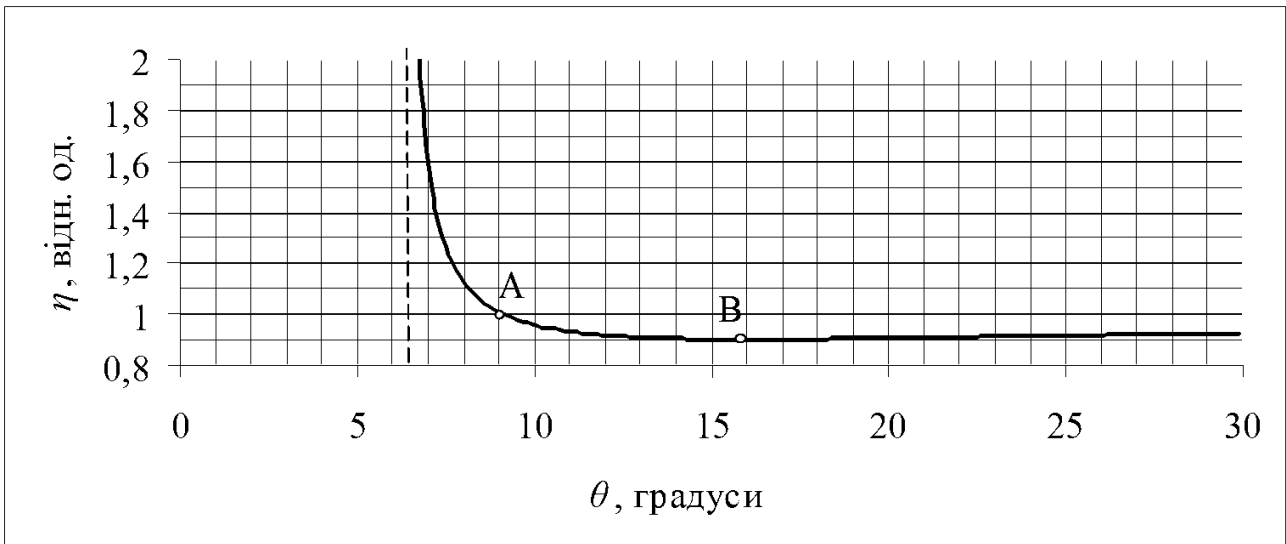


Рис. 4. Графік залежності відношення  $\eta$  від кута нахилу площини  $\theta$  згідно рівняння (8) для  $\mu = 0,13$  ( $\theta_0 = 6,5^\circ$ )

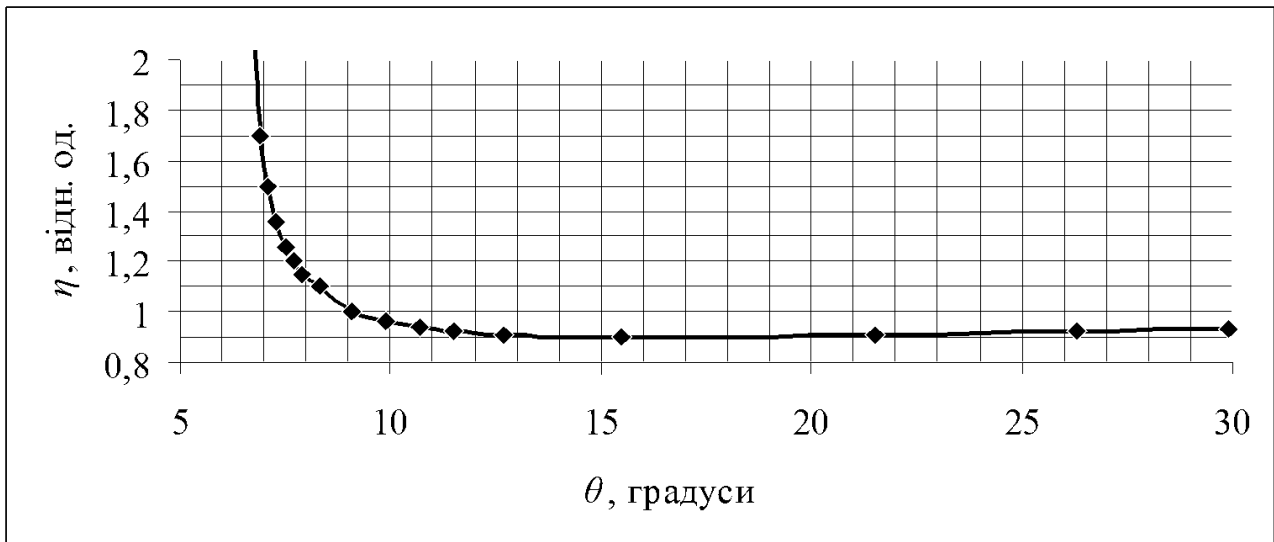


Рис. 5. Експериментальний графік залежності відношення  $\eta$  від кута нахилу площини  $\theta$  для  $\mu = 0,13$  ( $\theta_0 = 6,5^0$ )

### Обговорення результатів дослідження

Як видно з графіка на рис. 4, рис. 5, якщо кут нахилу площини буде в межах  $\theta = 6,5^0 \div 9,1^0$ , тоді першим прибуде на фініш тіло №1, що котиться ( $\mu = 0$ ): його час повернення на місто старту буде меншим ніж у тіла №2, яке має тертя. З графіків також видно, що при наближенні кута нахилу площини до  $\theta_0 = 6,5^0$  співвідношення загального часу подорожі тіл з тертям і без нього  $\eta$  прямує до нескінченності.

На рис. 4 помічено точку переходу  $A$  від одного результату перегонів між тілами до іншого: якщо кут нахилу площини  $\theta_c = 9,2^0$ , тоді тіла перетнуть фініш одночасно.

Якщо кут нахилу площини  $\theta > 9,2^0$ , тоді першим прибуде на фініш тіло №2, що має  $\mu > 0$ . Якщо горизонтальну вісь розтягнути праворуч до  $90^0$ , крива графіка буде повільно наближатися до  $\eta = 1$ , оскільки нормальна сила  $N$  на рис. 1 (а отже, і сила тертя) стає нульовою в цих границях. Графік залежності

відношення  $\eta$  від кута нахилу площини  $\theta$  має, як видно з графіків, мінімум  $\eta_{\min}$ . Коли кут  $\theta_0 = 6,5^0$  ( $\mu = 0,13$ ), тоді  $\eta_{\min} = 0,9$  (точка  $B$ ), яка відповідає куту  $\theta_{\min} = 16^0$  ( $\mu \cdot \text{ctg } \theta_{\min} = 0,396$ ). Отже, тіло з тертям № 2 буде швидше повертатися на фініш, ніж тіло № 1 у більшості випадків, коли  $90^0 > \theta > 9,2^0$ .

Збільшення коефіцієнта тертя  $\mu$  (збільшення кута  $\theta_0$ ) призводить до зміщення точки переходу  $A$  у бік більших кутів. Так, якщо  $\theta_0 = 10^0$ , тоді кут  $\theta_c = 14^0$ . При цьому відношення  $\eta$  зростає повільніше, коли кут  $\theta < \theta_c$  та наближається до  $\theta_0$ . Таким чином, для беззаперечної перемоги у змаганні тіла без тертя над тілом з тертям потрібно використовувати тіла з  $\mu \approx 0,1$ .

Отже, функція  $\eta$  є досить складною за формою, тому гонки між рухомими об'єктами на похилій площині дійсно є цікавим способом заохочення учнів до більш глибокого вивчення механіки.

Як видно з графіка на рис. 5, результати проведених експериментів підтвердили залежність (8).

## Висновки

1. В роботі аналітично показано, що співвідношення загального часу подорожі вздовж похилої площини тіл з тертям і без нього дорівнює:

$$\eta = \frac{T_{\text{тертя}}}{T_{\text{без тертя}}} = \frac{t_{\text{догори}} + t_{\text{вниз}}}{t_{1/2} + t_{1/2}} = \frac{1}{2} \left[ (1 + \mu \text{ctg } \theta)^{-1} + (1 - \mu^2 \text{ctg}^2 \theta)^{-1/2} \right],$$

тобто залежно від кута нахилу площини  $\theta$  будь-яке тіло може виграти гонку.

2. Теоретична залежність експериментально перевірена за допомогою спеціально сконструйованих тіл шляхом відеореєстрації їх руху смартфоном. Для похилої площини у вигляді стільниці стола визначено кут нахилу площини, коли відбувається перехід від одного результату перегонів між скляними

кульками до іншого: якщо кут нахилу площини  $\theta_c = 9,2^0$ , тоді тіла перетнуть фініш одночасно.

3. Розроблена постановка дослідів дозволяє робити подібні перегони самим учням під час дистанційного навчання, або проводити ефективні демонстрації законів механіки під час проведення занять з фізики.

### Список використаних джерел

1. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики: уч. пособ. М.: Наука, 1973, 464 с.
2. Лакур П., Аппель Я. Историческая физика. Т. 1. М.-Л: Госиздат., 1929, 470 с.
3. Mungan C. E. A race between rolling and sliding up and down an incline. *The Physics Teacher*. 2021. Vol. 59, P. 247-249. <https://doi.org/10.1119/10.0004147>
4. Гельфгат И.М., Генденштейн, Кирик Л.А. 1001 задача по физике с решениями: уч. пособие. Харьков: Рубикон, 1995, 595 с.

## 2.11. Слідство у справі "Пізанська вежа"

Є цілий ряд "простих" питань, які ставлять школярів (і студентів-фізиків) в глухий кут. Здавалося б, очевидний факт: історія про експерименти Галілея на Пізанській вежі увійшла в науковий фольклор, про це написано в самих різних підручниках!



Рис. 1. Пізанська вежа

Як приклад наведемо задачу, розв'язану здавалося б раз і назавжди Галілеєм, який за словами Вінченцо Вівіані (подумки за деякими даними) кидав кулі різної маси з Пізанської вежі в 1589 році. Мета експериментів - демонстрація неосвіченій публіці того факту, що час падіння не залежить від

маси кулі. Тим самим спростовувалась теорія Аристотеля, яка стверджувала, що швидкість падіння пропорційна масі тіла.

Галілей так описує цей експеримент в книзі "Про рух": *уявіть собі* (курсивом виділено авторами книги) два предмети, один з яких важче іншого, які з'єднані мотузкою один з одним, і скиньте цю зв'язку з вежі. Якщо ми припустимо, що важкі предмети дійсно падають швидше, ніж легкі і навпаки, то легкий предмет повинен буде сповільнювати падіння важкого. Але оскільки дана система в цілому важче, ніж один важкий предмет, то вона повинна падати швидше нього. Таким чином, ми приходимо до протиріччя, з якого випливає, що початкове припущення (важкі предмети падають швидше, ніж легкі) - невірно.

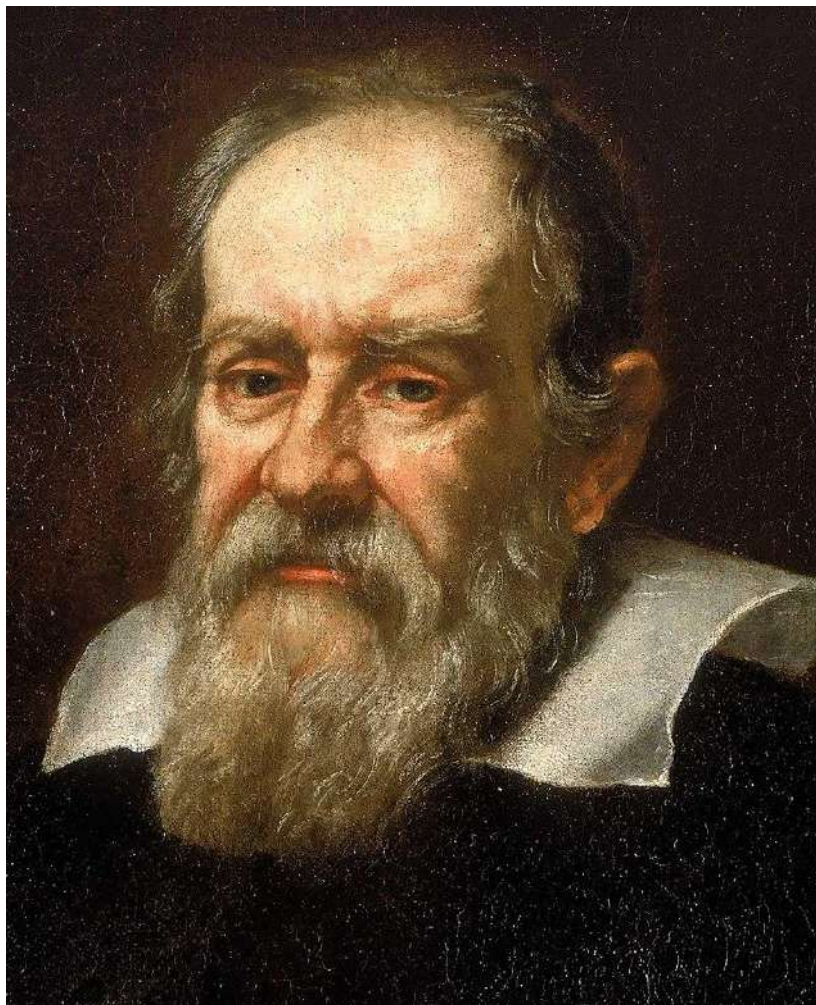


Рис. 2. Галілео Галілей



Через недосконалість вимірювального обладнання того часу вільне падіння тіл вивчати було майже неможливо. Зараз же кожен школяр може зняти відео падіння тіла в уповільненому темпі (режим *slow motion*) і легко експериментально визначити яке тіло впаде швидше. Чому ж на питання: яка зі зв'язаних мотузкою кульок однакового діаметра в дослідах Галілея впаде швидше - легка чи важка - більшість людей інтуїтивно відповість - важка! І, головне, будуть праві! Якби Галілей дійсно проводив свої досліди на Пізанській вежі, він теж переконався б, що важка куля перша торкнеться землі!

Проведемо слідство у справі про Пізанську вежу з позиції фізика і відповімо на питання: а чи проводив дослід Галілей?

Ця ситуація (Галілей не правий!?) повинна застерегти будь-якого викладача від спокуси просто і швидко пояснювати процес падіння своїм учням без обґрунтування припущень і моделей, що лежать в основі його пояснення.

Те, що Галілео Галілей точно досліджував відомо достеменно: з метою зменшення швидкості руху Галілей замінив вільне падіння куль на кочення по похилій поверхні, де були значно менші швидкості й опір повітря. Було відмічено, що з часом швидкість руху зростає - тіла рухаються з прискоренням. Був зроблений висновок, що швидкість і прискорення не залежать ні від маси, ні від матеріалу кулі.

Галілей переконався, що отримані ним закони скочування не залежать від кута нахилу площини, і, отже, їх можна поширити на випадок падіння. Припустивши, що сталося б у разі вільного падіння тіл у вакуумі, Галілей встановив закони падіння тіл для ідеального випадку:

- 1) всі тіла при падінні рухаються однаково: почавши падати одночасно, вони рухаються з однаковою швидкістю;
- 2) рух відбувається з постійним прискоренням.

Остаточний висновок Галілея з останньої його книги: швидкість падіння наростає пропорційно часу, а шлях - пропорційно квадрату часу

Здамося питанням: чи правильні ці закони на практиці під час руху куль однакових розмірів, але з різними масами, в повітрі?

Нехай перша кулька має масу  $m_1$ , а друга  $m_2 > m_1$ . Кулі нехай будуть з'єднані нерозтяжною ниткою, масою якої можна знехтувати, і довжина якої

значно перевищує діаметри кульок. Відпустимо кулі одночасно з одного і того ж рівня. Як відомо, на кулі буде діяти сила тяжіння і сила опору повітря  $F$  (рис. 3).

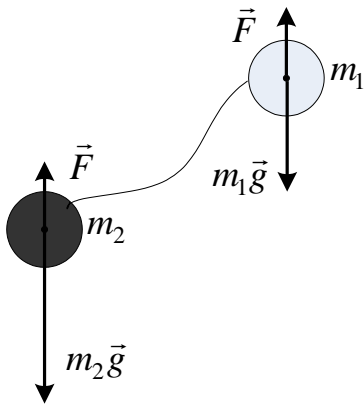


Рис. 3

Застосуємо до кожної кулі другий закон Ньютона, записаний в проекції на вісь руху:

$$\begin{aligned} m_2 g - F &= m_2 a_2, \\ m_1 g - F &= m_1 a_1. \end{aligned}$$

Прискорення куль будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned} a_2 &= g - \frac{F}{m_2}, \\ a_1 &= g - \frac{F}{m_1}. \end{aligned}$$

Оскільки  $m_2 > m_1$ , тоді прискорення  $a_2 > a_1$  і важка кулька буде обганяти легку кульку до тих пір, поки нитка, що зв'язує їх, не натягнеться. Таким чином, кульки далі падатимуть з однаковою швидкістю, причому важка кулька буде перебувати нижче.

Швидкість зв'язки з плином часу буде збільшуватися, а разом з нею і сила опору, яка, врешті-решт, врівноважить силу тяжіння. Прискорення стане рівним нулю. Доведемо цей висновок. Для цього розглянемо задачу про падіння кульки в повітрі з малою, порівняно з радіусом Землі, висоти. Тоді діючу на тіло силу тяжіння  $\vec{P}$  і густину повітря  $\rho$  можна вважати величинами постійними. Вважаємо, що при падінні тіло рухається строго вертикально. Висота Пізанської вежі, як відомо, 56,7 метрів. Час вільного падіння тіла в вакуумі  $t_{free} = 3,4$  с, тобто швидкість біля підніжжя вежі у вакуумі була би  $v_{vak} \approx 33,35$  м/с.

Запишемо другий закон Ньютона для рухомої кульки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}, \quad (1)$$

де  $\vec{F}$  - сила опору повітря.

На початку руху (при малих швидкостях кульки) сила опору

$$F = 6\pi\eta r v,$$

де  $r$  - радіус кульки,  $v$  - швидкість кульки,  $\eta$  - в'язкість повітря.

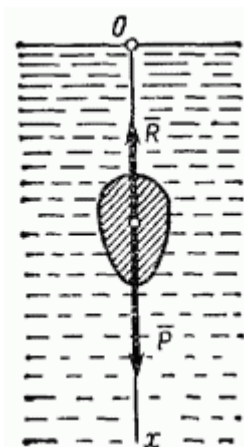
Лінійна залежність сили Стокса  $F$  від швидкості кульки спостерігається експериментально до значень числа Рейнольдса:

$$Re = \rho v d / \eta \approx 1,$$

тобто до швидкостей  $v \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$  м/с при діаметрі кульки  $d = 10$  мм. Таким чином, ламінарна течія середовища зміниться на турбулентну протягом часу  $t \sim 0,14$  мс, що значно менше  $t_{free} = 3,4$  с. Сила опору під час подальшого руху буде описуватися законом Ньютона для тіл, що рухаються у в'язкому середовищі:

$$F = c_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

де  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup> – густина повітря,  $c_x$  - коефіцієнт опору, який залежить від форми тіла і числа Рейнольдса (для кулі мінімальне значення  $c_x = 0,25$ ),  $S = \pi d^2 / 4$  - площа поперечного перерізу кулі.



Направивши координатну вісь  $Ox$  вертикально вниз (рис. 4), знайдемо, як буде змінюватися швидкість падіння в залежності від пройденого шляху  $x$ , вважаючи, що рух починається з точки  $O$ , де  $v_0 = 0$ .

Рис. 4

Згідно другого закону Ньютона (1):

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = \frac{P}{g} v_x \frac{dv_x}{dx} = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v_x^2. \quad (2)$$

Якщо ввести позначення  $v_x = v$ ,  $\frac{2mg}{c_x \rho S} = k^2$ , то рівняння (2) набуде вигляду:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} = g \left( 1 - \frac{v^2}{k^2} \right),$$

або після поділу змінних

$$-\frac{v dv}{k^2 - v^2} = -\frac{g}{k^2} dx.$$

Взявши від обох частин рівності інтеграл, знаходимо

$$\ln(k^2 - v^2) = -2 \frac{g}{k^2} x + C_1.$$

За початковими даними при  $x = 0$  швидкість  $v = 0$ , отже,  $C_1 = \ln k^2$

Підставляючи це значення  $C_1$  отримаємо

$$\ln \left( \frac{k^2 - v^2}{k^2} \right) = -2 \frac{g}{k^2} x$$

або

$$\frac{k^2 - v^2}{k^2} = e^{-\frac{2g}{k^2} x}.$$

Звідси остаточно знаходимо

$$v = k \sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{k^2} x}}. \quad (3)$$

Ця формула виражає закон зміни швидкості падаючого в повітрі тіла в залежності від пройденого шляху. Із зростанням  $x$  швидкість падіння зростає, прагнучи в межі до постійної величини  $k$ , яку називають граничною швидкістю падіння:

$$v_{zp} = \sqrt{\frac{2mg}{c_x \rho S}}. \quad (4)$$

Отже, при  $v_0 = 0$  падаюче в повітрі тіло не може отримати швидкості, більшої, ніж  $v_{zp}$ . Гранична швидкість падіння зростає зі збільшенням маси тіла

і зі зменшенням величин  $c_x, \rho, S$ . Наприклад, для сталеві кульки діаметром 10 мм величина граничної швидкості  $v_{gp} \approx 0,52$  м/с, тобто досягти  $v_{вак} \approx 33,35$  м/с кулька не може.

Знайдемо, як швидко швидкість падаючого тіла наближається до граничної. Для цього звернемося до рис. 5, на якому дана залежність величини

$$Y = \frac{v}{v_{gp}} \text{ від } X = \frac{g}{v_{gp}^2} x :$$

$$Y = \sqrt{1 - e^{-X}} .$$

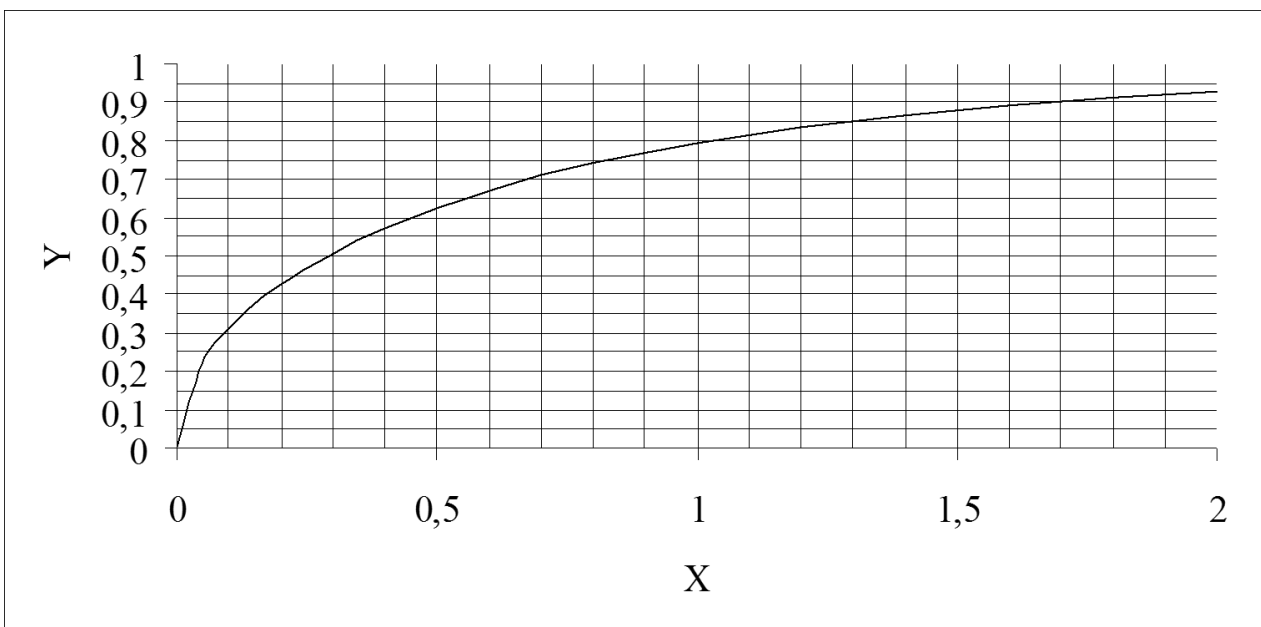


Рис. 5. Графік залежності  $Y = \frac{v}{v_{gp}}$  від  $X = \frac{g}{v_{gp}^2} x$

З графіка випливає, що при  $X = 2$  досягається швидкість  $v = 0,93v_{gp}$ . Для кульки

діаметром 10 мм  $v_{gp} = 0,52$  м/с досягається вже через  $x = \frac{2v_{gp}^2}{g} = 5,5$  см після

старту. Далі кулька буде рухатися без прискорення. Важливо, що граничні швидкості кульок залежать від маси, тому більш важка кулька буде деякий час

віддалятися від легкої кульки поки не натягнеться нитка, що пов'язує їх. Тоді вихідні рівняння руху будуть виглядати так:

$$\begin{aligned}m_2 g - T - F &= 0, \\m_1 g + T - F &= 0.\end{aligned}$$

Сила натягу нитки буде дорівнювати:

$$T = \frac{(m_2 - m_1)g}{2}.$$

Отже, результатом розв'язання цього завдання є висновок про те, що першою землі торкнеться більш важка кулька! Це було підтверджено нами експериментально (рис. 10) і цю частину роботи кожен студент може виконати самостійно та дистанційно.

### Експериментальна частина

Для дослідження руху кульок була виготовлена експериментальна установка, яка складалася зі стартових електромагнітів, встановлених на вершині лінійки. Для дослідів використовувалися дві пари кульок. Кульки першої пари були виготовлені з пінопласту діаметром 8 см, вага однієї з кульок складала 11 г, а другої – 56 г за рахунок того, що всередину був вставлений сталевий циліндр. Другу пару складали пласмасові кульки від пінг-понга діаметром 30 мм, які мали однакий об'єм, але різну масу  $m_1 = 35$  г,  $m_2 = 6,5$  г. Одна з кульок була заповнена водою, а інша порожня. До кульок приклеювалися невеликі сталеві диски, завдяки яким кульки утримувались магнітами у верхньому стартовому положенні (рис. 6).

Різниця в діаметрах кульок першої та другої пар дозволяла простежити залежність опору повітря від діаметра кульок. Для калібрування реєструючої апаратури використовувалися також маленькі сталеві кульки.

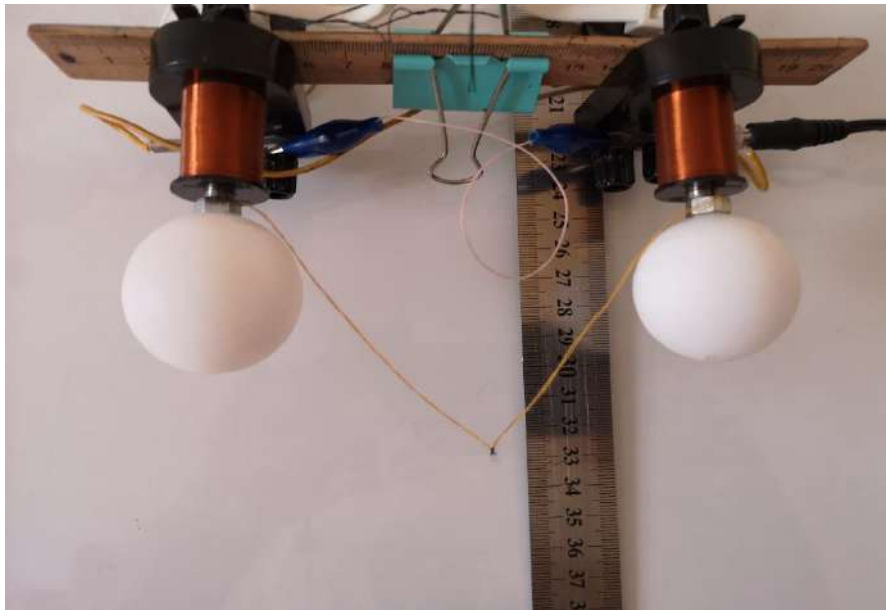


Рис. 6. Стартова позиція кульок

Реєстрація руху кульок велась за допомогою смартфона Huawei 20 Pro у режимі slow motion (уповільнена зйомка з частотою 960 кадрів / с). Як показав аналіз відеокадрів більш важка кулька відривається від магніта раніше легкої кульки (рис. 7).



Рис. 7. Перші миті після старту кульок

Тому для виконання одномоментного старту кульок була вибрана інша схема пуску (рис. 8).

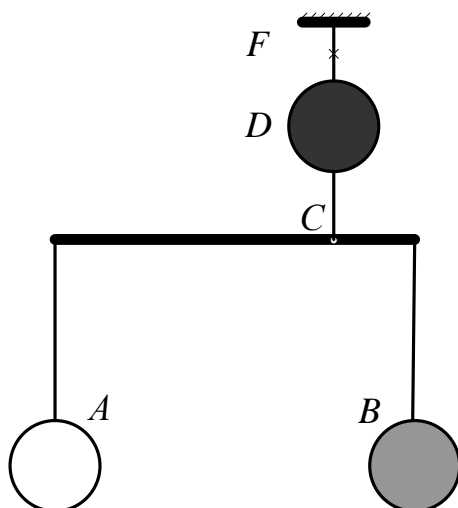


Рис. 8. Схема досліду

Кульки чеплялися нитками до перекладки, а перекладка у свою чергу чеплялася у точці  $C$ , де знаходиться центр ваги, до металевої кульки  $D$  вагою 117 г та діаметром  $\varnothing$  30 мм, яка підвішувалася на нитці до нерухомої опори. Під час старту нитка  $DF$  перепалювалася вогником. Кулька  $D$  потрібна для порівняння руху майже вільно падаючого тіла з тілом, для якого опір повітря треба враховувати. Результати дослідів наведено в табл. 1, де  $S_{\text{пін}}$  – шлях, пройдений пінопластовою кулькою,  $S_{\text{Fe}}$  – сталевий.

Таблиця 1

**Дані експеримента з кульками**

$t$ , мс	0	132,5	142,5	190	200	237,5	245
$S_{\text{пін}}$ , мм	0	85	100		200		300
$S_{\text{Fe}}$ , мм	0	100		200		300	

Аналіз падіння кульок I пари показав, що більш важка пінопластова кулька випереджає легку кульку на дистанції 0,3 м на 2 см (рис. 9). За той же час сталева кулька подолала шлях 32 см. Це повністю підтверджує висновки теорії, яка представлена раніше.





Рис. 9. Фото досліду: ліворуч – стартова позиція, праворуч – сталеву кульку подолали шлях 320 мм, пінопластова кулька (56 г) – 300 мм, пінопластова кулька (11 г) – 280 мм

Для більш ретельного вивчення руху 11 г пінопластової кульки діаметром 8 см в повітрі і порівняння з майже вільним рухом важкої сталеві 117 г кульки діаметром 3 см був проведений дослід, постановка якого наведена на рис. 10, а результати відображені на графіках рис. 11.

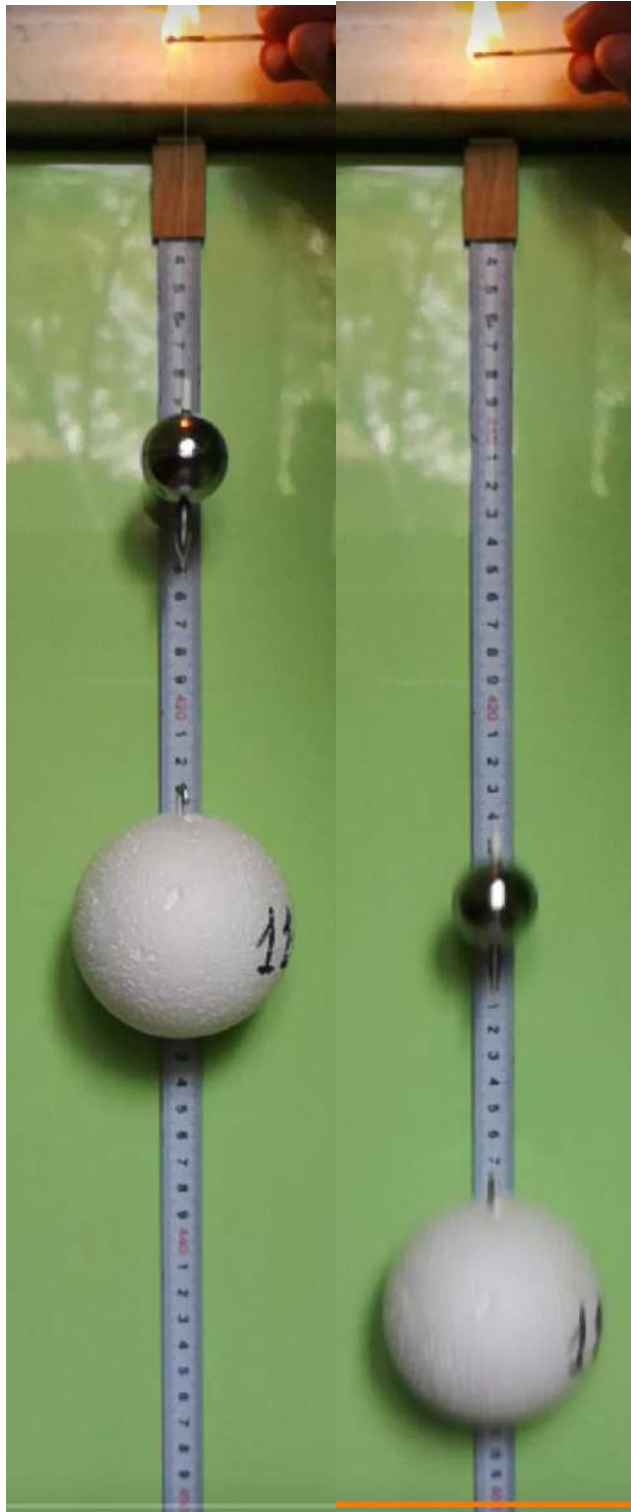


Рис. 10. Фото досліду: ліворуч - стартова позиція, праворуч - сталевая куляка подолала шлях 165 мм, пінопластова куляка (11 г) – 145 мм

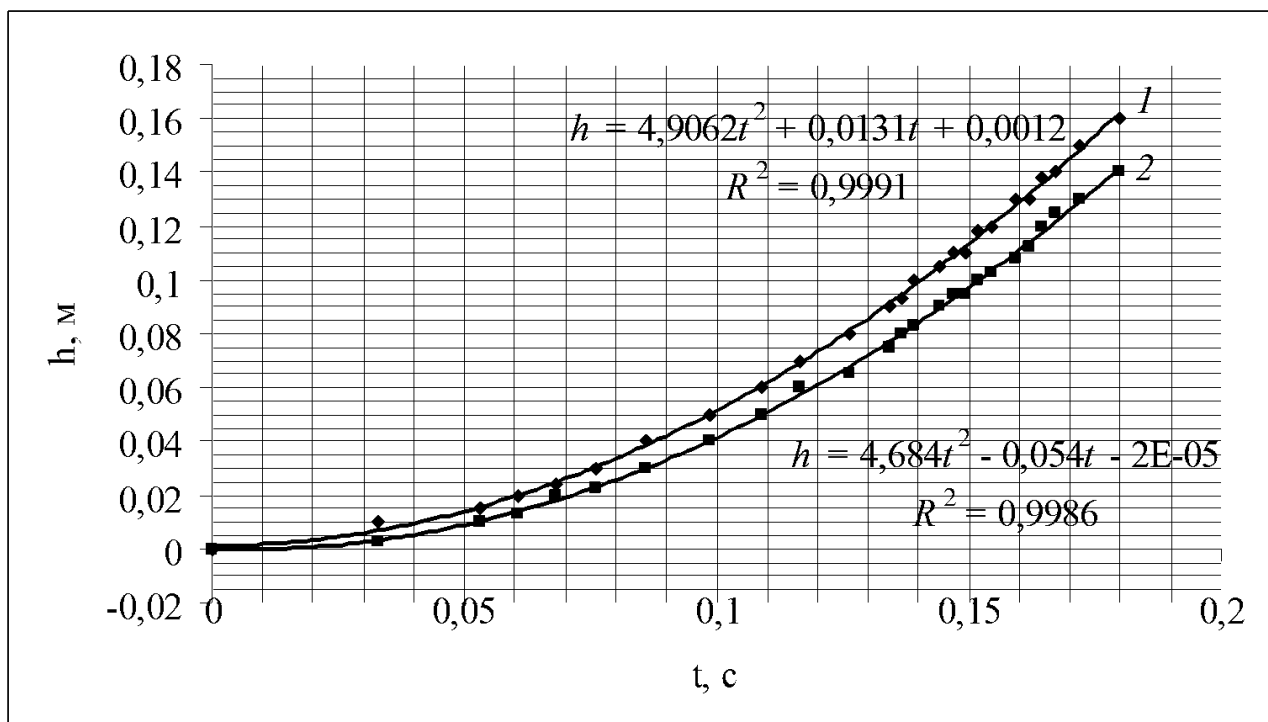


Рис. 11. Графіки руху сталевій (1) та пінопластовій (2) кульок у повітрі

Зауважимо, що коефіцієнти при  $t^2$  у рівняннях апроксимації на рис. 11 дорівнюють  $g/2$ . Тобто прискорення, з яким рухається сталеві кулька, дорівнює  $9,81 \text{ м/с}^2$ , як і повинно бути при вільному падінні тіла, а прискорення, з яким рухається пінопластова кулька, дорівнює  $9,36 \text{ м/с}^2$ . Величина достовірності апроксимації для сталевій кульки складає  $R^2 = 0,9991$ , пінопластовій кульки  $R^2 = 0,9986$ .

Отже, після проведеного теоретичного та експериментального розслідування наш вердикт такий: Галілей *не проводив* свої дослід на Пізанській вежі, інакше він би побачив, що важка куля перша падає на землю і не зміг би сформулювати свої закони, отримані тільки з дослідів з кульками, які скочуються з похилих площин.

## Список літератури

1. Засекіна Т.М., Засекін Д.О. Фізика. Оріон, 2017.
2. Седов Л. И. Механика сплошних сред. М.: Наука, 1983.

## 2.12. Лабораторна робота “Петльовий маятник”

**Мета роботи** – визначення коефіцієнта тертя ковзання гнучкого тіла по нерухомому циліндру та кінематичних параметрів петльового маятника.

**Прилади й матеріали:** дослідницька установка, смартфон, мобільний додаток “Секундомір”.

### Теоретичні відомості

Розв’язання Ейлером задачі щодо ковзання гнучкого тіла по нерухомому циліндру розглядається при викладанні фізики як класичний приклад розв’язування завдань механіки аналітичним методом. Розв’язок цього завдання може бути використано як теоретичну основу для розроблення мініатюрної дослідницької установки, яка дозволить проводити на уроках фізики лабораторну роботу "Визначення коефіцієнта тертя гнучких тіл при ковзанні по циліндру" і "Петльовий математичний маятник зі змінною довжиною нитки" дистанційно. Важливо, що на одній і тій же установці вирішуються два тематичні завдання. Під час виконання першої лабораторної роботи студенти експериментально визначають величину коефіцієнта тертя при ковзанні гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомляться з законом тертя гнучких тіл, який відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне й пропонується підтвердити студентам. Виконання другої лабораторної роботи дозволяє дослідити кінематичні параметри петльового математичного маятника зі змінною довжиною нитки, складовою частиною якого є оборотний маятник.

**Постановка завдання №1** (рис. 1а): якщо з’єднати легкий і важкий вантажі невагомою ниткою та перекинути її через горизонтальний нерухомий циліндр, опустивши вниз вантажі, то після звільнення легкий вантаж почне

рухатися вгору, а важкий – вниз з прискоренням  $a$ . Процес руху тягарців можна зареєструвати використовуючи смартфон на відео в уповільненому режимі разом з показаннями секундоміра і, після відповідного оброблення, визначити кінематичні параметри процесу руху, коефіцієнт тертя та інші параметри.

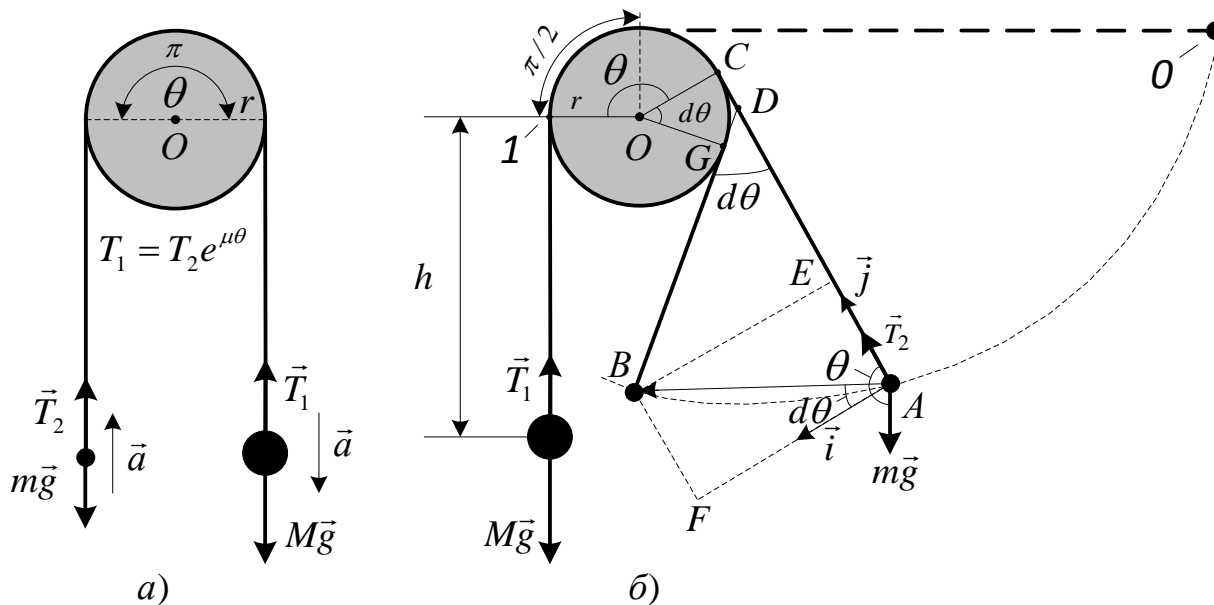


Рис. 1 Розрахункова схема

**Постановка завдання №2** (рис. 1б): якщо з'єднати легкий і важкий вантажі невагомою ниткою та перекинути її через горизонтальний нерухомий циліндр, опустивши вниз важкий вантаж, а легкий, відвівши на деякий кут, відпустити, то після звільнення вантажів легкий вантаж почне обертатися навколо циліндра й незабаром зупинить падіння важкого вантажу. Мета досліджень полягає в тому, щоб зрозуміти, чому маленький вантаж, обертаючись навколо циліндра, при своєму падінні, зупиняє більш важкий тягар і які параметри обертання маленького вантажу як оберотного маятника.

У задачі №1 на кожен вантаж діє сила натягу з боку нитки й сила тяжіння. Величина сил натягу на вантажі різна, оскільки між ниткою і циліндром є тертя. Натяг нитки по обидва боки циліндра пов'язані формулою Ейлера:

$$T_1 = T_2 e^{\mu\theta}. \quad (1)$$

У відповідності з другим законом Ньютона, з урахуванням того, що стартовий кут  $\theta = \pi$ :

$$Ma = Mg - T_1 = Mg - Te^{\mu\pi}, \quad (2)$$

$$ma = T_2 - mg. \quad (3)$$

Тоді прискорення вантажу з більшою масою буде визначатися формулою:

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} = g \frac{M - me^{\mu\pi}}{M + me^{\mu\pi}} = g \frac{\gamma - e^{\mu\pi}}{\gamma + e^{\mu\pi}},$$

а величина коефіцієнта тертя ковзання:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{M(g-a)}{m(g+a)} \right] = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \gamma \cdot \frac{g-a}{g+a} \right]. \quad (4)$$

Як бачимо, закон тертя гнучких тіл відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне й пропонується підтвердити студентам на експериментальній установці. Якщо вимірювання проводити, коли прискорення  $a = 0$ , але вантажі при найменшому поштовху починають рух, тоді коефіцієнт тертя дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{M}{m} \right] = \frac{1}{\pi} \ln \gamma, \quad (5)$$

у разі  $\theta = \pi$  рад, а в разі  $\theta = 3\pi$  рад коефіцієнт тертя дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{3\pi} \ln \left[ \frac{M}{m} \right] = \frac{1}{3\pi} \ln \gamma. \quad (6)$$

Отже, вимірюючи відношення мас тягарців  $M/m = \gamma$ , при якому починається рух, експериментально можна визначити коефіцієнт тертя  $\mu$ .

Тепер будемо розв'язувати завдання №2, використовуючи схему установки, зображеної на рис. 1б. Рух легкого вантажу можна поділити на дві стадії: 1) обертання навколо циліндра до зупинки важкого вантажу, і 2) обертання після його зупинки. Проведемо теоретичний аналіз першої стадії. На розрахунковій схемі рис. 1б початок декартових координат знаходиться в центрі циліндра  $O$ , радіус якого  $r$ . Вісь  $X$  направимо по горизонталі праворуч,

вісь  $Y$  – униз. Важкий вантаж  $M$  зв'язаний з легким вантажем  $m$  ниткою довжиною  $L$ . Припустимо, що в момент часу  $t$  легкий вантаж знаходиться в точці  $A$ , як показано на рис. 1b. У цій точці розміщуємо додаткову систему координат, орти  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  якої орієнтовані так, як наведено на рис. 1b. Вантаж  $M$  за цей час пройшов шлях  $h$ , а нитка, що утримує вантаж  $m$ , контактує з циліндром у точці  $C$ . Довжина нитки, яка контактує з поверхнею циліндра, дорівнює  $\theta \cdot r$ . За короткий час  $dt$  легкий вантаж  $m$  зміщується в точку  $B$ , а точка дотику нитки  $C$  – у точку  $G$ . Тобто, точка дотику подолає кутовий шлях  $d\theta$ , а вантаж  $M$  впаде на відстань  $dh$ .

Отже, миттєва швидкість зміщення вантажу  $m$ :

$$\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{dt} = \frac{AF}{dt} \vec{i} + \frac{AE}{dt} \vec{j}.$$

Як видно з рис. 1b,  $AC = L - \theta r - h$ ,  $BG = (L - \theta r - h) - (dh + rd\theta)$ ,  $CD = GD = r \operatorname{tg}(\theta/2)$ . Зміна кута  $d\theta$  така мала, що можна вважати  $DB \perp AB$ . Тому  $AF = (BG + GD) \sin(d\theta)$ ,  $AE = AC - CD - BD \cos(d\theta)$ . Урахувавши, що  $d\theta = \sin(d\theta) = 2 \operatorname{tg}(d\theta/2)$ ,  $\cos(d\theta) = 1$ , отримаємо  $AF = (L - \theta r - h) d\theta$  та  $AE = dh$ . Отже, миттєва швидкість легкого вантажу в точці  $A$  буде дорівнювати:

$$\frac{\vec{AB}}{dt} = (L - \theta r - h) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \frac{dh}{dt} \vec{j} \quad (7)$$

Прискорення в точці  $A$  буде дорівнювати:

$$\vec{a}_A = \left[ -2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (L - \theta r - h) \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{i} + \left[ (L - \theta r - h) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2h}{dt^2} \right] \vec{j} \quad (8)$$

Запишемо другий закон Ньютона для важкого вантажу  $M$  вздовж осі  $Y$ :

$$Mg - T_1 = M \frac{d^2h}{dt^2}, \quad (9)$$

а для легкого вантажу  $m$  у двох взаємно перпендикулярних напрямках уздовж  $\vec{j}$  та  $\vec{i}$  так:

$$T_2 - mg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = m \left[ (L - \theta r - h) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \quad (10)$$

$$mg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = m \left[ -2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (L - \theta r - h) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \quad (11)$$

З формули Ейлера  $T_1 = T_2 e^{\mu\theta}$  та рівнянь (9), (11) отримаємо прискорення більш важкого вантажу:

$$\begin{aligned} a_M = \frac{d^2 h}{dt^2} &= \frac{Mg + me^{\mu\theta} \left[ g \cos\theta - (L - \theta r - h) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]}{M + me^{\mu\theta}} = \\ &= \frac{\gamma g + e^{\mu\theta} \left[ g \cos\theta - (L - \theta r - h) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]}{\gamma + e^{\mu\theta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

та кутове прискорення легкого вантажу  $m$ :

$$\varepsilon = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \left[ \frac{g \sin\theta + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dh}{dt} + r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{L - \theta r - h} \right]. \quad (13)$$

Проаналізуємо другу стадію руху. Важок  $M$  зупинився, пройшовши відстань  $h_0$ . Довжина нитки, яка намотана на циліндр, дорівнює  $\theta_0 r$ . Кутова швидкість вантажу  $m$  на цей час дорівнює  $d\theta/dt = \omega_0$ . Довжина нитки від вантажу  $m$  до точки дотику до циліндра  $l_0 = L - h_0 - \theta_0 r$ . Значення  $h_0, \theta_0, \omega_0$  отримуємо, розв'язавши рівняння (12) та (13).

Щоб уникнути плутанини з аналізом руху на першому етапі, ми додаємо індекс 1 до кожної фізичної величини на другій стадії. Тобто  $BG$  змінюється на  $B_1G_1 = (L - h_0 - \theta r) - rd\theta$ , значення інших величин ( $A_1C_1, A_1D_1$ , та ін.) узгоджуються з аналізом для першого етапу. Опускаючи величини другого



порядку малості, ми можемо отримати  $A_1 F_1 = (L - h_0 - \theta r) d\theta - r d\theta$ ,  $l_0 = L - h_0 - \theta r$  та  $A_1 E_1 = 0$ . Отже, миттєва швидкість вантажу  $m$  у точці  $A$  є:

$$\frac{\vec{A_1 B_1}}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}. \quad (14)$$

а прискорення легкого вантажу в точці  $A$  можна обчислити як:

$$\vec{a}_{A_1} = \left[ -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{i} + \left[ l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{j}. \quad (15)$$

Компоненти сили для вантажу  $m$  вздовж напрямку нитки та перпендикулярно їй (рис. 1б) запишемо як:

$$T + mg \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (16)$$

$$mg \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = m \left[ -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right], \quad (17)$$

де  $T$  – сила тяги. Спростивши рівняння (16) та (17), отримуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g \sin\theta + r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{l} \quad (18)$$

і

$$T = m \left[ -g \cos\theta + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]. \quad (19)$$

Якщо припустити, що відстань між легким вантажем і центром циліндра є  $S(\theta)$ , тоді:

$$S^2(\theta) = l^2 + r^2. \quad (20)$$

З рівняння (20) випливає, що, як тільки значення  $l_0$  і  $\theta_0$  стають відомими (значення радіуса циліндра  $r$  відомо), тоді траєкторія легкого вантажу на другій стадії руху легко визначається. Крім цього, кутова швидкість  $\omega_0$  легкого вантажу на початку другого етапу буде визначати тривалість його обертання.

## Результати експериментів

Для демонстрації явища та дослідження характеристик петльового маятника й підтвердження зроблених раніше теоретичних висновків було виготовлено установки, фото яких наведено на рис. 2.



Рис. 2. Фото: *а)* демонстраційний стенд, *б)* дослідницька установка

Установка на рис. 2а розроблялася як демонстраційний стенд для вчителя, а зображена на рис. 2б – для дистанційного проведення лабораторної роботи студентами. Установка кріпиться до торця дошки столу пружинними

затискачами (binder clips). Рух тягарців відбувається на тлі сантиметрової лінійки, прикріпленої до тумби стола та секундоміра іншого смартфона (точність вимірювання часу 0,001с). Для вимірювання та визначення кінематичних параметрів використовувався смартфон Huawei P20 Pro в режимі відео "slow motion" з частотою до 960 кадрів / с.

Циліндр стенда вчителя діаметром  $D = 30,4$  мм, навколо якого обертався тягарець петльового маятника, кріпився співвісно круговому транспортеру  $\varnothing 350$  мм. Пластмасовий циліндр дослідних установок (частина корпусу шприця) мав діаметр  $D = 21,5$  мм і кріпився по центру кругового транспортера  $\varnothing 90$  мм. Довжина нитки, яка з'єднувала тягарці в наших дослідах, дорівнювала  $L = 0,79$  м. Тягарцем маятника була пластмасова намистина  $\varnothing 15,7$  мм масою  $m = 2,6$  г. Як інший більш важкий вантаж використовувався корпус пластмасового яйця масою  $M_0 = 3,95$  г, у порожнину якого наливалася при необхідності вода. Маса вантажів вимірювалася електронними вагами. Спочатку було визначено коефіцієнт тертя нитки  $\mu$  об нерухомий циліндр. Для цього порожній корпус тягарця заповнювався водою до моменту початку його руху ( $a = 0$ ). Далі маса  $M$  циліндра з водою вимірювалася на вагах з точністю не менше 0,01 г і за формулою (4) визначалася величина коефіцієнта тертя  $\mu$  (табл. 1).

Таблиця 1

**Результати вимірювання коефіцієнта тертя нитки  $\mu$  об циліндр**

$D$ , мм	$\theta$ , рад	$m$ , г	$M$ , г	$M / m$	$\mu$
30,4	$\pi$	2,6	6	2,69	0,266
	$3\pi$	2,6	32	12,3	0,266

Середнє значення коефіцієнта тертя за результатами численних експериментів склало величину  $\mu = 0,266$ .

Для порівняння було визначено величину цього ж коефіцієнта при вертикальному русі тягарців з прискоренням  $a = 5,6 \text{ м/с}^2$ . Результати вимірювання відображено на рис. 3 і в табл. 2.

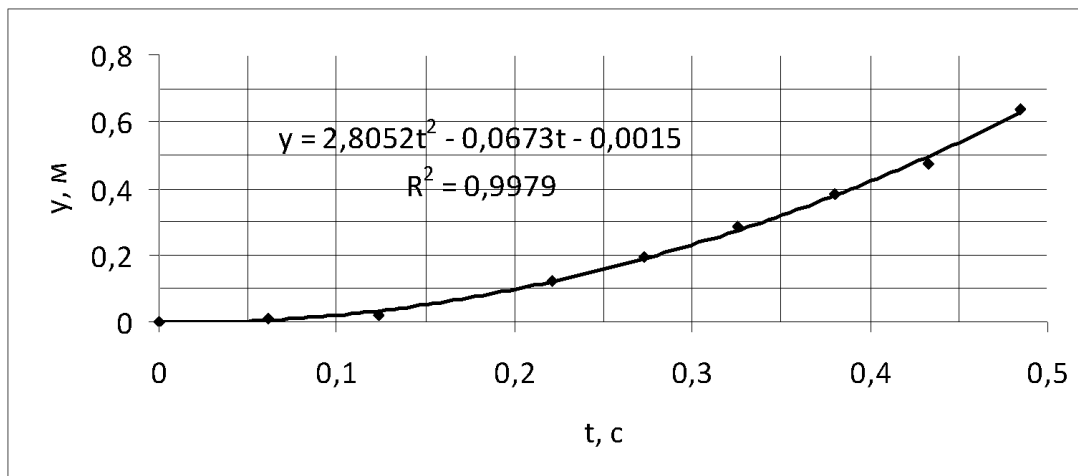


Рис. 3. Графік залежності координати  $y$  від часу падіння вантажу  $M$

Таблиця 2

**Результати вимірювання коефіцієнта тертя нитки  
об циліндр під час руху вантажів**

$M, \text{ г}$	$m, \text{ г}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\mu$
22,65	2,6	5,6	0,276

Величина достовірності апроксимації даних становить 0,9979. Значення  $\mu = 0,276$  узгоджується з величиною раніше визначеного коефіцієнта тертя  $\mu = 0,266$ . Величина коефіцієнта тертя нитки об циліндр  $\mu = 0,27$  у подальшому використовувалася для вимірювань кінематичних параметрів петльового маятника, вихідні дані якого наведено в табл. 3, а результати вимірювань – у табл. 4 і на графіках рис. 4, 5.

Таблиця 3

**Вихідні дані петльового маятника**

$M, \text{ г}$	$m, \text{ г}$	$M/m$	$L, \text{ м}$	$r, \text{ мм}$	$S_0, \text{ м}$	$y_0, \text{ м}$	$\mu$	$\theta_0$ град	$\omega_0, \text{ с}^{-1}$
----------------	----------------	-------	----------------	-----------------	------------------	------------------	-------	-----------------	----------------------------

22,65	2,6	8,71	0,79	15,2	0,685	0,081	0,27	90	0
-------	-----	------	------	------	-------	-------	------	----	---

$L$  – довжина нитки,  $r$  – радіус стрижня,  $S_0$  – початкова довжина маятника,  $y_0$  – початкова координата тягарця,  $\theta_0$  – початковий кут між точками дотику нитки маятника й нитки тягарця,  $\omega_0$  – початкова кутова швидкість.

Таблиця 4

### Результати дослідів

$t, c$	$\Delta t, c$	$Y^{смарт}$ мм	$Y^{факт}$ м	$S^{факт}$ , м	$\theta$ , град
5,380	0,000	0,106	0,081	0,685	90
5,435	0,055	0,115	0,090	0,676	92
5,488	0,108	0,130	0,105	0,659	97
5,541	0,161	0,150	0,125	0,637	104
5,594	0,214	0,215	0,190	0,572	110
5,647	0,267	0,310	0,285	0,473	120
5,700	0,320	0,385	0,360	0,394	135
5,753	0,373	0,450	0,425	0,324	155

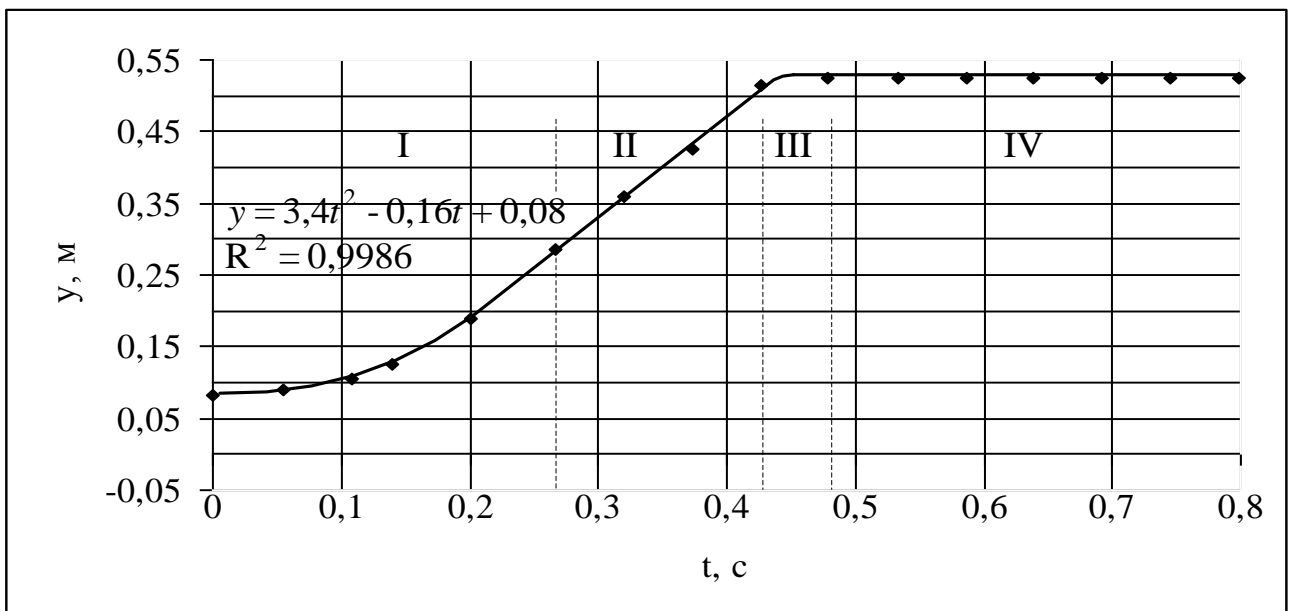


Рис. 4. Графік залежності координат  $y$  від часу падіння вантажу  $M$

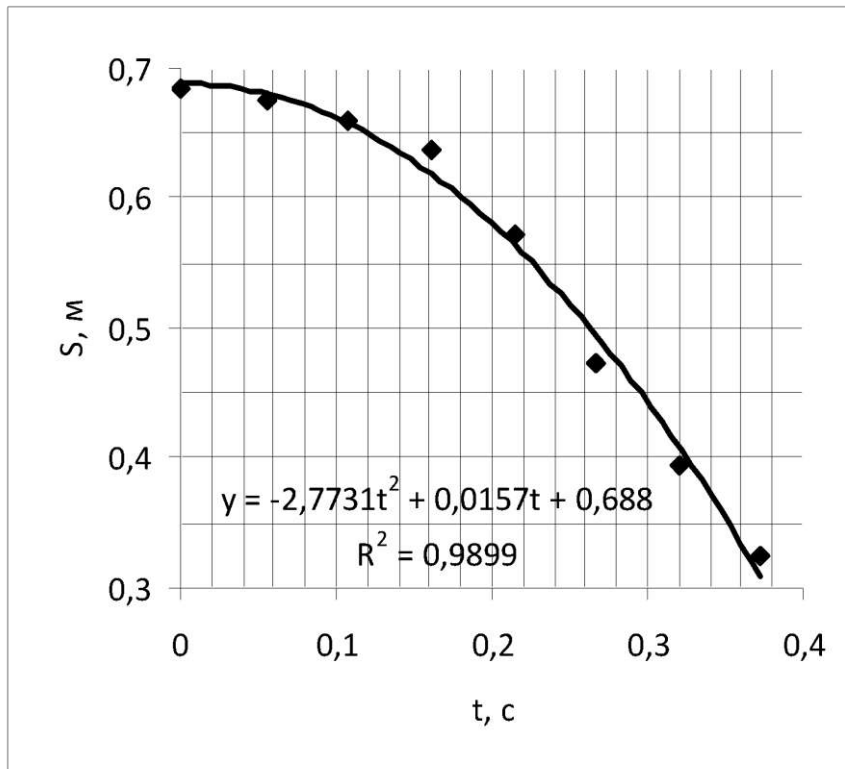


Рис. 5. Графік зміни довжини маятника  $S$  від часу  $t$

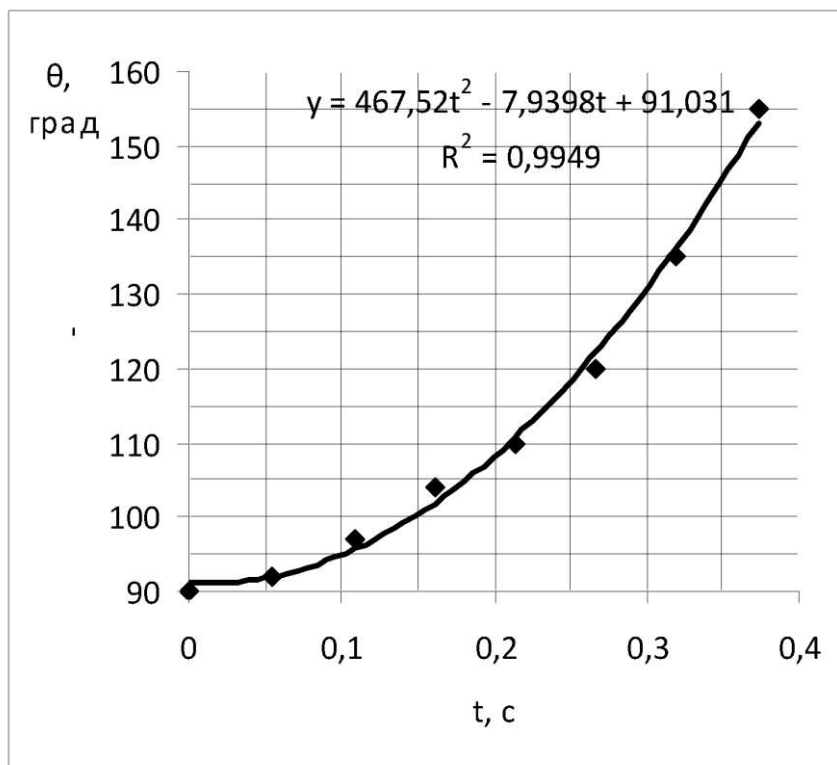


Рис. 6. Графік зміни кута  $\theta$  від часу  $t$

## Обговорення результатів дослідів

Аналіз даних дозволив виділити чотири етапи руху тягарця  $M$ : на ділянці I, коли кут  $\theta$  змінювався від  $90^\circ$  до  $120^\circ$ , прискорення складало величину  $a_2 = 6,8 \text{ м/с}^2$ , що більше прискорення  $a_1 = 5,6 \text{ м/с}^2$ , коли кут  $\theta = 180^\circ$  був незмінним (див. рис. 4). В області II, коли кут змінювався від  $120^\circ$  до  $240^\circ$  і сила тертя зростала, швидкість стабілізувалася і складала величину  $1,43 \text{ м/с}$ . На ділянці III відбувалося гальмування вантажу з прискоренням  $46 \text{ м/с}^2$  після чого (на часовій ділянці IV) вантаж переставав рухатись.

У той же час на етапі I менший вантаж мав також прискорення  $a_m = 5,6 \text{ м/с}^2$ , як це видно з рівняння руху вантажу  $m$ , наведеного на рис. 5. Графік зміни кута  $\theta$  від часу  $t$  на цій часовій ділянці I наведено на рис. 6. У сукупності ці два графіка дають можливість визначити траєкторію руху важка петльового маятника масою  $m$  (рис. 7).

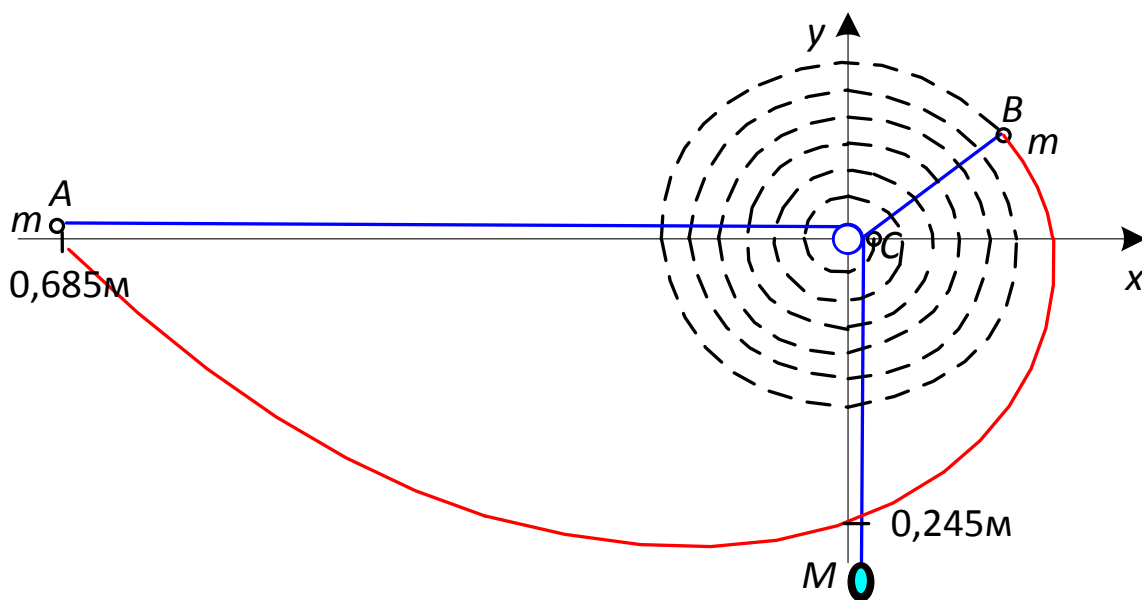


Рис. 7. Траєкторія руху петльового маятника

Стартує тягарець масою  $m$  з позиції, яка позначена на рис. 7 точкою  $A$ . За рахунок руху більш важкого тягарця масою  $M$  він наближається до центрального циліндра по траєкторії у вигляді логарифмічної спіралі поки не досягне точки  $B$ . В цій точці важкий тягарець  $M$  зупиняється, а легкий описує спіральну траєкторію до точки зупинки  $C$ . Кожен оборот зменшує довжину нитки обертового маятника на  $2\pi r$ .

Отже, розроблена мініатюрна дослідницька установка "Петльовий маятник" та методика її використання дає змогу дистанційного проведення лабораторних робіт "Визначення коефіцієнта тертя гнучких тіл при ковзанні по циліндру" і "Петльовий математичний маятник зі змінною довжиною нитки" на уроках фізики. Важливим є те, що для реєстрації кінематичних параметрів руху використовуються смартфони в режимі відео "slow motion" та "секундомір". Це розв'язує проблему забезпечення навчальних закладів сучасним лабораторним обладнанням. Крім того, розширюються межі навчального процесу: студенти можуть отримати доступ до лабораторних установок у комфортний для них та викладача час і проводити експерименти дома.

Отже, розроблені мініатюрні установки надають можливість дистанційного проведення лабораторних робіт з використанням формули Ейлера. Студенти при проведенні експериментів визначають величину коефіцієнта тертя при ковзанні гнучких тіл по нерухомому циліндру та знайомляться з законом тертя гнучких тіл, який відрізняється від закону тертя ковзання твердих тіл по плоскій поверхні. Цей висновок власне і пропонується підтвердити студентам за допомогою експериментальної установки, де теоретично отримані залежності повністю узгоджуються з результатами експериментів.

Для найбільш досвідчених студентів перспективи подальшого дослідження полягають у вивченні впливу різних факторів на траєкторію руху тіла, а саме: зміни маси маятника під час руху, залежність висоти падіння та швидкості падіння з часом при зміні величини співвідношення мас  $M/m$ , або зміни



довжини нитки  $L$ , значень кутів вивільнення  $\theta_0$ . Крім цього студентам можна запропанувати розробити комп'ютерну програму, яка забезпечить теоретичне моделювання траєкторії руху маятника. Щодо вдосконалення методики реєстрації траєкторії руху, необхідно додати імпортування відео в програмне забезпечення Tracker, а також зробити вантажі й нитку маятника світловипромінюючими.

### Список використаних джерел

1. GetAClass. Петлевой маятник.  
<https://www.youtube.com/watch?v=B0JSbnOZr38&t=82s>
2. Исследование движения петлевого маятника. <https://ppt-online.org/463856>
3. Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г. *Теоретична механіка. Ч.І. Статика. Кінематика*. Київ: Агроосвіта, 2013. 576 с.
4. Лубенец Н.А. Альтернативный формуле Эйлера закон реализации тягового усилия трением. *Науковий вісник НГУ*. 2008. № 11. С. 67–70.
5. Тарг С.М. *Краткий курс теоретической механики*: учеб. для втузов. Москва: Высшая школа, 2010. 416 с.
6. Zhou Yu-bo, Yang Ming-duo, Zhang Min, Fan Dai-he, Liu Qi-jun, Chang Xiang-hui, Jia Xin-yan, Wei Yun. Research on the Looping Pendulum Phenomenon. *European Journal of Physics*. 2020. Vol. 41. №2. P. 1-16. DOI: 10.1088/1361-6404/ab5e68