МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ «КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Міжнародна науково-технічна конференція

Матеріали конференції

СТАЛИЙ РОЗВИТОК ПРОМИСЛОВОСТІ ТА СУСПІЛЬСТВА

Том 2

22-25 травня 2013 року

Кривий Ріг

УДК 550.831
П. О. МІНЕНКО,
д.ф.-м.н., професор
Криворізький педагогічний інститут
ДВНЗ «Криворізький національний університет»

ПРО ПРОБЛЕМУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ РІШЕНЬ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Усунено дві з основних причин, із-за яких виникла проблема регуляризації.

Як відомо, багато обернених задач (ОЗ) математичної фізики й економічної статистики приводяться до рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) виду

$$Ax=B, \tag{1}$$

де A – матриця з елементами a_{ij}, x – стовпчик із M невідомих фізичних параметрів x_i, B – стовпчик із N елементів вимірюваного поля b_j, $i=1,M;\ j=1,N$.

При ручних обчисленнях або малій оперативній пам'яті перших ЕОМ рішення СЛАР було складною проблемою. Багато років намагалися її вирішувати з різних позицій, але так і не визначилися, що найбільше заважає вийти на стійке або фізично змістовне рішення. Але, після експериментів автора на теоретичних моделях, прояснилося, що проблема є, насамперед, обчислювальною. В 1985 році автор виконав порівняльні розрахунки. При звичайній одинарній точності обчислень (7 знаків після коми) рішення СЛАР не досягалося вже при 100 невідомих через переповнення допустимого порядку чисел. З переходом на подвійну точність обчислень (16 знаків після коми) СЛАР вирішувалися точно на теоретичних прикладах з точною правою частиною B. Більше того, використовуючи для елементів матриці a_{ij} подвійну точність, а для елементів стовпчика поля b_j звичайну точність, автор одержав на теоретичних прикладах рішення, близькі до заданих параметрів обраної фізичної моделі (ФМ), але все ж таки такі, що істотно відрізнялися від них. Тому у всіх подальших дослідженнях автор проводив розрахунки на ЕОМ тільки з подвійною точністю. Таким чином, однією причиною некоректності рішення СЛАР стало менше. Однак, для ускладненої невеликими помилками δ_j правої частини $b_j+\delta_j$ рішення системи $x_i+\Delta_i$ могло приймати такі великі добавки Δ_i, що воно вже істотно відрізнялося від фізичних параметрів теоретичної моделі x_i й часто ставало фізично чи економічно незмістовним. Це означало, що перевірка рішення на стійкість не давала позитивних результатів у тих же межах. Таке явище відразу ж визначило наявність серйозної проблеми як у всій обчислювальній математиці, так і в теорії оптимізації технологічних процесів. Найбільш серйозно вирішувати цю проблему, задовго до автора й інших дослідників, уперше почав ще в 1943 році академік АН СРСР А. М. Тихонов. Але, як математик, він узявся вирішувати її в загальному вигляді, так ще й при відсутності обчислювальної техніки. Логічно він вирішив її правильно, використовуючи для регуляризації рішення другий доданок функціонала безумовної оптимізації (БО)

$$\Phi=\sum_j((a_{ij},x_i+\Delta_i)-b_j-\delta_j)^2+\alpha\sum_i(x_i+\Delta_i-x_{si})^2=min(x_i,\alpha); \tag{2}$$

де x_{si} – вектор наближеного рішення системи (1); α – параметр регуляризації.

У деяких випадках за допомогою цього прийому йому вдавалося одержати істотне поліпшення рішення СЛАР при невеликих M. Наприклад, у геофізиці А. М. Тихонов успішно вирішував ОЗ электророзвідки на постійному струмі й навіть один раз вирішив обернену лінійну задачу гравіметрії (ОЛЗГ) для 71 рівняння типу (1) при 7 невідомих. І хоча рішення для гравіметрії було набагато гірше, з низькою точністю, все ж таки воно було в геологічному й фізичному сенсі змістовним. Звичайно, це було великим кроком уперед. Однак, надалі, на шляху вирішення цієї проблеми в загальному вигляді, поліпшення не було, незважаючи на те, що нею займалися дуже багато вчених (академіки АН СРСР Лаврентьєв М. М., Марчук Г. І., Страхов В. М., академіки НАН України Старостенко В. І. і Мацевитий Ю. М., член-кореспондент АН СРСР Іванов В. К., доктори фізико-математичних наук Бакушинський А. Б., Гласко В. Б., Васильєв В. Г., Гончарський О. В., Леонов О. С., Морозов В. О., Танана В. П., Ягола А. Г. та ін.). Паралельно із цим, а іноді й тими ж ученими, інтенсивно розвивався, і також у загальному вигляді, інший науковий напрямок – градієнтних методів оптимізації, в основному, економічних і геофізичних задач. Історично склалося так, що майже всі задачі оптимізації вирішували прямими методами (ПМ) при невеликій кількості невідомих за критерієм мінімуму суми квадратів нев'язок поля (МСК НП)

$$r_j = (a_{ij}, x_i) - b_j,$$

хоча об'єктом пошуків були фізичні параметри, що створюють поле, тобто шукали одне, а використовували для пошуків інше та, як пізніше з'ясувалося, ще й не найкраще. Свідченням цьому була відсутність протягом довгого часу випробуваних і перевірених у роботі ітераційних поправок (ІП) для ітераційних методів (ІМ) рішення СЛАР, хоча в літературі приводилися в загальному вигляді (академік АН СРСР Самарський О. А., Гулін О. В., Ніколаєв Є. С.) ІМ без прикладів їхнього використання, в основному, через слабкі, на той час, потужності обчислювальної бази. У цей же час позначився істотний розрив між математиками й практичними дослідниками через високу складність обчислювальних схем, описуваних у літературі незрозумілою для багатьох мовою функціонального аналізу із множиною витончених деталей, застосовуваних для обґрунтування методів вибору єдиного регуляризуючого параметра α. Але, швидше за все, слабкою була й математична база методу регуляризації (МР). Дійсно, з (2) виходить, що

$$(a_{ij}, \Delta_i) = \delta_j; \quad x_i + \Delta_i = x_{si}; \quad (a_{ij}, x_{si} - x_i) = \delta_j;$$

$$(a_{ij}, x_{si}) = b_j + \delta_j,$$

а це означає, що будь-який довільно обраний вектор x_{si} є точним рішенням СЛАР (1) при наявності погрішностей виміру поля в його правій частині. Таким чином, одними лише математичними методами ця задача не вирішувалася, бо вона була неоднозначною і вимагала залучення до методу розв'язку ОЗ додаткових даних про ФМ. Перший прорив по цій проблемі авторові вдалося зробити в 1987 році. Вирішуючи СЛАР на ЕОМ ПМ з подвоєною точністю для некоректних ОЛЗГ при 100-200 невідомих (значно більше, ніж у інших), автор установив причину, через яку рішення некоректних задач було нестійким і геологічно незмістовним. Нестійкість створювали ті рівняння, у яких діагональні елементи матриці (ЕМ) були набагато менші, ніж в інших рядках. Оскільки ЕМ є функціонально залежними від координат точок ФМ, то максимальні ЕМ відповідають розташуванню точок виміру поля (ТВП) над збурюючими об'єктами (ЗО). І навпаки, для точок, під якими немає ЗО, ЕМ мізерно малі. Для компактного розташування ЗО, ТВП розміщуються в області, представленій проекцією об'єктів на земну поверхню. У цьому випадку ОЛЗГ є коректно поставленою (КП) й має стійке й геологічно змістовне рішення. ТВП, розташовані за межами цієї області, роблять ОЛЗГ некоректно поставленою (НКП), а тому під ними треба створити додаткові збурюючи об'єкти з майже нульовими, але невідомими параметрами x_i. Для статистичних задач ЕМ беруться з виробничих звітів, а тому вони не є функціональними. Для перетворення такої задачі в КП треба із матриці вилучити всі рядки, в яких максимальні елементи в 2-3 рази менші, ніж ряд найбільших елементів всієї матриці. При такому відборі рядків будь-яка задача (2) вирішується стійко (при α =0) з більш простим функціоналом безумовної оптимізації

$$\Phi = \sum((a_{ij}, x_i) - b_j)^2 = min(x_i).$$

Таким чином, і друга причина прояву некоректності рішення СЛАР була усунута. Але слабким місцем залишалося рішення систем рівнянь прямими методами. Практично, за винятком Старостенка В. І. і Оганесяна С. М., навіть неоптимізованими ІМ простої ітерації системи рівнянь майже ніхто не вирішував, хоча їхня перевага в тім, що обчислювальний процес можна вести невеликими етапами по декілька ітерацій і контролювати його результати. Є й інші причини некоректності, які будуть повідомлені в доповіді.