МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_________ Д.Є. Бобилєв   Реєстраційний №_______
«____»________________2020 р.   «____»________________2020 р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ КУРСАХ З МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ХМАРНОГО СЕРЕДОВИЩА CoCalc

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-15
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Гудим Тетяни Юріївни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович
Оцінка:
Національна шкала ________________
Шкала ECTS ____ Кількість балів ____
Голова ЕК __________ _______________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК __________ _______________
(підпис) (прізвище, ініціали)

__________ _______________
(підпис) (прізвище, ініціали)

__________ _______________
(підпис) (прізвище, ініціали)

__________ _______________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

В умовах нестабільності сучасної економічної ситуації в світі різко підвищилася ціна, яку доводиться платити суспільству за недостатньо обґрунтовані економічні та соціальні рішення. Зростаючі вимоги до якості управління в різних сферах людської діяльності диктують необхідність виконання спеціальної аналітичної роботи в процесі прийняття рішень, здійснення якої передбачає використання математичного апарату. У зв'язку зі сформованою ситуацією потреба вивчення елементів методів оптимізації стає актуальною вже на етапі профільного навчання учнів. Профільна школа повинна забезпечити доступність для кожного старшокласника декількох профілів навчання, що відповідають їх схильностям і життєвим планам. Звідси випливає, що учням старшої школи, які бачать себе в якості майбутніх управлінців вже на етапі профільного навчання слід надати можливість вивчення принципів і методів оптимізації, методів розв'язання задач на знаходження оптимального розв'язку. Таким чином, в умовах існування потреби в розробці міжпредметних факультативних курсів з математики та інформатики в профільному навчанні і потреби у використанні математичного апарату для підтримки процесу прийняття рішень, розробка факультативного курсу «Задачі оптимізації» набуває особливого значення.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати та розробити методику використання хмарного сервісу CoCalc як засобу формування математичної та інформаційно-цифрової компетентностей учнів профільної школи на факультативних курсах та курсах за вибором.

У відповідності до мети дослідження поставлено такі **задачі**:

1) дослідити стан проблеми використання хмарних сервісів у навчанні учнів профільної школи;

2) виокремити математичні компетентності, які можна набути завдяки використанню CoCalc, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи;

3) виокремити інформаційно-цифрові компетентності, які можна набути завдяки використанню CoCalc, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи;

4) розробити методику використання хмарного сервісу CoCalc як засобу формування математичних компетентностей учнів профільної школи.

Об'єкт дослідження – процес формування математичної компетентності учнів профільної школи як ключової, та інформаційно цифрової, як предметної.

Предмет дослідження – методика використання хмарного сервісу CoCalc як засобу формування математичних та інформаційно-цифрових компетентностей учнів профільної школи.

Основні **методи дослідження**: аналіз філософської, психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження, аналіз шкільних програм, підручників і навчальних посібників, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду роботи вчителів математики.

Апробація дослідження. Результати дослідження оприлюднені на V Всеукраїнській науково-практичній конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи» (м. Полтава, 19-20 листопада 2019 р.) з публікацією тез доповіді «Розв'язування задач оптимізації, орієнтованих на розвиток особистості, засобами хмарного середовища CoCalc», на III Міжнародній дистанційній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2020» (м. Суми, квітень-травень 2020 р.) з публікацією тез доповіді «Розвиток інтелектуальних вмінь учнів на факультативних заняттях з лінійного програмування».

Практичне значення дослідження полягає в тому, що матеріал, представлений у роботі, може бути використаний студентами-практикантами і вчителями для організації позакласної роботи з математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 42 найменування, та додатків.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗАСОБАМИ ХМАРНИХ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. Вивчення поняття екстремуму в профільній школі

Введення профільного навчання в українське шкільництво співзвучне із світовими освітніми тенденціями і не суперечить їм, оскільки в усіх розвинених країнах світу старші ступені середньої школи профільовані. «Масова освіта в сучасних суспільствах нерозривно пов'язана з ідеалом рівності можливостей, – зазначає В. Огнев'юк, – згідно з яким люди можуть досягти суспільного становища відповідно до своїх талантів і здібностей» [25, с. 9].

Перші спроби побудови навчального плану старшокласників за нахилами і потоками були здійснені радянським вченим М. Гончаровим у праці «О введении фуркации в старших классах средней школы». Він, на думку Кушнір [25, с. 45-50; 38 с. 17-23], диференціював навчання за періодами:

І період дореволюційної школи (ІІ половина ХІХ – початок ХХ ст.):

- створення статуту двох типів семикласних гімназій у 60-тих роках ХІХ ст. Гончаров охарактеризував цей час, як «прогресивне перетворення середньої школи із станово-дворянської у буржуазно-класову»;
- 70 – 80-ті роки ХІХ ст. це час діяльності реальних училищ, у яких реалізувалась фуркація, тобто принцип побудови навчання за нахилами;
- на початку ХХ ст. були створені різні проекти шкільних реформ, в яких була запланована реалізація фуркації.

II період – це школа радянського періоду (1918 – кінець 1950-х рр.):

- у 1918 році вийшло положення про «Єдину трудову школу». В цьому положенні передбачалось розподіл старших класів середньої школи на відділення;
- у 20-х рр. XX ст. впровадили біфуркацію із сільськогосподарським та індустріальним нахилами. Профільна школа функціонувала як професійна і будувалась на основі проекту «Положення про єдину трудову школу Української РСР» та «Декларації Нарком освіти УРСР про соціальне виховання дітей»;
- у кінці 50-х рр. XX ст. впровадили орієнтацію партійної освітньої політики на необхідність зв'язку школи з життям. Сформували концепцію розвивального навчання, почали створювати школи з поглибленим вивченням окремих предметів [25, с. 45-50; 38, с. 17-23].

Взагалі, говорячи про розвиток профільного навчання в Україні, слід мати на увазі такі етапи [26, 33, 38]:

- I етап це професійно зорієнтоване навчання, яке охоплює період з XIX ст. до поч. XX ст. Навчання відбувалось у класичних гімназіях, які готували для вступу до університетів; у реальних училищах, де готували для навчання у технічних інститутах; у різноманітних професійних школах: середніх (технічних, медичних, педагогічних, комерційних, мистецьких, духовних, сільськогосподарських), початкових (ремісничих і промислово-технічних, сільськогосподарських, педагогічних, духовних, торгово-промислових, медичних, мистецьких). На початку XX ст. міністром освіти М. Боголєповим, була запропонована типологія таких навчальних закладів як гімназії з двома стародавніми мовами, однією латинською, гімназій з принципом індивідуалізації, тобто посиленим вивченням предмета, в якому ліцеїст досягає успіху, школи нового типу (додаткові заняття, для учнів схильних до вивчення мов або природничих наук) ;

- II етап починається з 20-х років XX ст. Навчання відбувалось у різноманітних професійних школах, таких як індустріально-технічні, сільськогосподарські, соціально-економічні, медичні, мистецькі, ремісничо-промислові, будівельні, транспортні. У цих школах відбувалась підготовка до майбутньої трудової діяльності. Вступити до таких професійних шкіл можна було після закінчення семирічної трудової школи. В професіних школах учні навчалися протягом 3-4-х років;
- III етап відбувався з другої половини 1930-х років. Тоді профільне навчання почало реалізовувалося школами фабрично-заводського учнівства та школами сільської молоді для підлітків, в яких навчання відбувалось 2-4 роки. Однак ці заклади не дали гарних результатів та виявилися тупиковим напрямом;
- IV етап розпочався після прийняття Закону "Про зміцнення зв'язку школи з життям та про дальший розвиток системи народної освіти в СРСР" (1958). Була запроваджена робота з обдарованих дітьми у спеціалізованих школах, в яких було поглиблене вивченням окремих предметів, таких як фізика, математика, музика, іноземні мови та ін.). Також була створена систему професійно-технічної освіти, було розгорнуто трудове і професійне навчання у навчально-виробничих комбінатах (60-80-ті роки XX ст.). У цей період у школах започаткували роботу класи з поглибленим вивченням окремих предметів, було введено факультативи;
- Новим V етапом стала організація наприкінці 1980-х – у 1990-х роках поглибленого вивчення окремих предметів у нових типах освітніх закладів (гімназіях, ліцеях, колежах), що орієнтували на подальше навчання у ВНЗ.

Як свідчить досвід, найбільш вдалою є модель організації профільного навчання, за якої загальноосвітній навчальний заклад має партнерські стосунки з професійно-технічним або вищим навчальним закладом, чи, навіть, входить до його структури [33].

Профілізація старшої школи в Україні відповідає загальному контексту розвитку старшої школи в зарубіжжі, яка в країнах світу є профільною. Кількість профілів/напрямів диференціації може варіюватися від 3 (Німеччина, Франція) до 17 (Швеція). Тривалість профільного навчання у середньому становить 2-4 роки [33].

На теперішній час в науковій літературі профільне навчання можна визначити як процес, який спрямований на реальне життєве та професійне самовизначення школярів, організований навчально-виховний процес, який враховує типові індивідуальні особливості учні. У цьому процесі в першу чергу розглядають основні запити і професійні плани учнів враховуючи структуру ринку праці та зайнятість для молоді.

У Концепції профільного навчання в старшій школі зазначено, що профільне навчання – вид диференційованого навчання, що передбачає врахування освітніх потреб, схильностей і здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у меті, змісті, структурі та організації навчального процесу [23, с. 3–16.].

Академік Національної академії педагогічних наук України О. І. Бугайов дає таке визначення профільного навчання: «Це тип диференціації та індивідуалізації навчання, що передбачає орієнтацію на певний вид професійної діяльності та врахування індивідуальних схильностей і здібностей учнів» [9, с. 31].

А. Самодрин дає таке визначення профільного навчання: «Це профільнодиференційована (за спорідненістю індивідуальних профілів), планомірна, організована, спільна двостороння діяльність учителів і учнів, спрямована на свідоме, міцне і глибоке опанування останніми системи профільноорієнтованих знань, умінь і навичок, під час якого поряд із загальною освітою (освітнім ядром) набувається особистісно зорієнтована допрофесійна підготовка (освітня периферія) – разом становить «зміст профільної освіти» [35, с. 36-37].

І. Якиманська вважає, що це «вид диференціації навчання у старших класах, що передбачає поглиблене вивчення учнями одного чи декількох предметів, спеціальних курсів, котрі відповідають вибраному профілю» [42, с. 34].

На думку Моторіної В. Г. профільне навчання можна розглядати, як форму організації навчального процесу, яка спрямована на реалізацію особистісно-орієнтованого навчання або ж як принцип, що забезпечить поглиблене вивчення дисциплін, програми повної загальної освіти, створить умови для значної диференціації змісту освіти школярів, сприяє встановленню рівного доступу до повноцінної якісної освіти, розширює можливості соціалізації учнів. Також профільне навчання можна розглядати і як засіб диференціації та індивідуалізації навчання, коли за рахунок змін у структурі, змісті й організації освітнього процесу повніше враховуються інтереси, здібності і схильності учнів, створюються умови для освіти старшокласників відповідно до їх професійних інтересів і намірів щодо продовження освіти [29, с.11].

Концепція профільної школи базується на законі України «Про освіту» [7]. Згідно з загальними положеннями здобуття профільної середньої освіти передбачає два спрямування: академічне і профільне. Академічне профільне навчання відбувається на основі суміщення змісту освіти, який визначено стандартом профільної середньої освіти, і поглибленого вивчення окремих предметів з урахуванням здібностей та освітніх потреб здобувачів освіти з орієнтацією на продовження навчання на вищих рівнях освіти. Професійне профільне навчання орієнтоване на ринок праці, на основі поєднання змісту освіти, визначеного стандартом профільної середньої освіти, та професійно орієнтованого підходу до навчання з урахуванням здібностей і потреб учнів [34].

Мета профільного навчання в старшій школі полягає в тому, щоб забезпечити умови для якісної освіти старшокласників в залежності від їх здібностей, можливостей та потреб. Згідно з наказом про затвердження «Концепції профільного навчання у старшій школі» профільне навчання має забезпечити професійну орієнтацію учнів на майбутню діяльність, яка користується попитом на ринку праці. Крім того метою профільного навчання є забезпечення можливостей постійного самовдосконалення особистості, формування інтелектуального та культурного потенціалу як найвищої цінності нації. [23]

Здобуття профільної середньої освіти за будь-яким спрямуванням не обмежує право особи на здобуття освіти на інших рівнях освіти.

Навчальна програма, яка призначена для організації математики, розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти. Мета навчання математики на профільному рівні рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Особливу увагу хочемо зосередити на темі екстремум. Для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у процесі навчання приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі. Так, у курсі Алгебри і початків аналізу 10-го класу профільної школи на тему «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» відводять 54 години, з яких 4-6 годин на вивчення поняття «екстремуму». Як результат учень вміє знаходити найбільше і найменше значення функції, розв'язує прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. Тож, аналіз діючої навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні, а також аналіз шкільних підручників та навчальних посібників дає підстави, щоб зробити наступний висновок: формування в учнів умінь математичного моделювання, в процесі розв'язування задач розроблено на низькому рівні, оскільки в методичній літературі недостатньо висвітлено це питання.

Оскільки досить мало часу відводиться у шкільному курсі на тему «Екстремум», на знаходження найбільшого та найменшого значення функції а також саме моделюванню задач, то з метою ефективного формування в старшокласників умінь математичного моделювання виникає потреба у додаткових заняттях. Одним із видів таких занять є факультативи.

Факультативи як нова форма навчання швидко посіли значне місце в навчально-виховному процесі і позитивно почали впливати на формування учнівських інтересів, сприяти розвитку їхнього творчого ставлення до науки. [27, с. 43-48]

Факультатив – це такий навчальний курс, який не є обов'язковим для школярів. Він спрямований на більш поглиблене вивчення предметів, міжпредметних зв'язків, професійної орієнтації учнів. Поглиблення реалізується на базі вивчення методів і прийомів розв'язування математичних задач, які потребують застосування високої логічної та операційної культури, розвиваючих наукове, теоретичне і алгоритмічне міркування здобувачів освіти.

Ефективність факультатива залежить і від актуальності вибраної теми, і від творчих здібностей вчителя, використання різних підходів, таких як проблемний, індивідуальний, робота у групах та інших.

1.2. Логіко-дидактичний аналіз теми лінійне програмування

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремальні задачі (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання. Такі задачі ще називають оптимізаційними. Особливим випадком математичного програмування є лінійне програмування [5, с. 10-15].

Мета дослідження операцій полягає в тому, щоб виявити оптимальний спосіб дій при розв'язанні задач керування системами [5, с. 10-15].

Предметом вивчення математичного програмування є задачі пошуку оптимальних управлінських рішень, що математично зводяться до задач знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних [5, с. 10-15].

Функцію, екстремальне значення якої необхідно знайти в умовах економічних можливостей, називають цільовою, показником ефективності або критерієм оптимальності. Економічну можливість формалізують у вигляді системи обмежень. Все це становить математичну модель.

Математична модель задачі – це відображення оригіналу у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей і т.п. Модель задачі математичного програмування, за думкою Акуліч І. Л, Гончаренко Я. В. Карманов В.Г., включає [3, 16, 20, 22]:

- Сукупність невідомих величин $x = (x_1;\ x_2; \dots; x_i; \dots; x_n)$, діючі на які, систему можна вдосконалити. Їх називають планом задачі (вектором управління, розв'язком, стратегією та ін.);
- Цільову функцію (функцію цілі, показник ефективності, критерій оптимальності, функціонал задачі). Цільова функція дозволяє вибрати кращий варіант із множини можливих. Кращий варіант - екстремальне значення цільової функції. Цільову функцію позначимо $Z = z(x)$.
- Умови (або система обмежень), які накладаються на невідомі величини. Ці умови виникають із обмеженості ресурсів, які наявні

в суспільстві у будь-який момент часу, із необхідності задовольняти насущні потреби, із умов виробничих і технологічних процесів. Обмеженими являються не тільки матеріальні, фінансові і трудові ресурси. Такими можуть бути можливості технічного, технологічного і взагалі наукового потенціалу. Не рідко потреби перевищують можливості їх задовольнити. Математичні обмеження виражаються у вигляді рівнянь і нерівностей. Їх сукупність утворює область допустимих розв'язків. Об'єднання всіх умов (обмежень), які накладені на невідомі величини x_i задачі позначимо Ω ($x_i \epsilon\ \Omega$).

Лінійне програмування – широко поширений метод оптимізації використовування обмежених ресурсів. На думку Б. Банді, методи лінійного програмування є ефективними для вирішення задач з області дослідження операцій. При чому під словом «програмування» Браян Банді має на увазі планування, що визначає характер розглядуваних додатків. Основні ідеї лінійного програмування виникли ще у часи другої світової війни, коли виникла потреба знайти оптимальну стратегію при ведені військових операцій. З тих часів лінійне програмування знайшло широке застосування в промисловості, торгівлі та управлінні – як у міських, так і в державних масштабах. Цими методами можна вирішити багато завдань, що пов'язані з ефективним використанням обмежених ресурсів. [6, с. 9-11]

На сьогоднішній день існує велика кількість діючих факультативів, які охоплюють тему «Лінійне програмування». Проаналізувавши ці факультативи ми виявили всі їх переваги та недоліки в наступному:

1. Прикладні задачі на екстремум

   Автор: *Попова Лариса Костянтинівна, вчитель математики Одеського ліцею «Приморський» Одеської міської ради Одеської області.*

   За мету Попова Л. поставила формування навичок застосування знань, які були набуті при вивчені шкільного курсу алгебри і початків аналізу, до розв’язування задач прикладного характеру. Крім того, однією із задач курсу є створення умов для оволодіння учнями методами розв’язування прикладних задач. Не менш важливим, на думку Попової, є також і розвиток дослідницьких здібностей учнів.

Вивчення курсу орієнтоване на учнів, які вивчають математику на поглибленому рівні, мають достатній рівень знань з фізики та інформатики, використовують ІКТ та застосовують метод математичного моделювання.

Програму розраховано на 35 годин, а сам зміст навчального матеріалу виглядає наступним чином [21, с. 157-160]:

Таблиця 1. 1.

Зміст програми «Прикладні задачі на екстремум»

Кіл-ть годин	**Тема**	**Зміст навчального матеріалу**
8	Дослідження функцій на екстремум	Екстремуми функцій. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. Нерівність Коші. Застосування похідної для дослідження функції. Найбільше і найменше значення тригонометричних функцій.
12	Розв’язування геометричних задач на екстремум	Схема зведення геометричних задач до задач на дослідження функції на екстремум та найбільше і найменше значення. Розв'язування задач планіметрії на найбільше і найменше значення. Многогранники в задачах на екстремум. Задачі на екстремум і тіла обертання.

Продовж. табл. 1. 2

7	Розв’язування технічних задач на найменше і найбільше значення	Побудова математичних моделей для розв'язування технічних задач. Розв'язування задач техніки на найбільше чи найменше значення.
8	Задачі лінійного програмування	Загальні відомості про лінійне програмування. Постановка задачі лінійного програмування. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування. Розв'язування прикладних задач.

На мою думку, перевагою такого факультативу є тісний зв’язок алгебри та геометрії. Учні поглиблюють свої знання та вдосконалюють вміння і навички з знаходження найбільшого та найменшого значень функції, використовують отримані знання для розв'язування задач планіметрії та стереометрії на знаходження найбільшого чи найменшого значення, розв’язування фізичних задач. Крім того значною перевагою є вміння учнів будувати математичні моделі, формулювати задачі лінійного програмування, розв’язувати практичні задачі застосовуючи отримані знання.

Проте значним недоліком є те, що факультативом не передбачено використання хмарних середовищ для спрощення процесу розв’язування задач лінійного програмування. Це робить значно вужчим коло прикладних задач, а також не дозволяє учням у повному обсязі навчитись моделювати приближенні до реального життя ситуації та задачі.

2. Економіко-математичне моделювання

Автори: *Франчук Тетяна Іванівна, вчитель математики Старокостянтинівського ліцею м. Старокостянтинів Хмельницької області*

Шевчук Ніна Володимирівна, вчитель математики Старокостянтинівського ліцею м. Старокостянтинів Хмельницької області

Тетяна Іванівна та Ніна Володимирівна розробили курс призначений для учнів 10-го класу економічного профілю. За мету було визначено формування знань, умінь та навичок учнів, необхідних для успішного вивчення профільних дисциплін, а також, успішної майбутньої кар'єри.

Цей курс спрямований на формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей учнів, їх економічне і громадянське виховання, сприяє профільній орієнтації школярів, а також кращому засвоєнню математичних знань.

Програму розраховано на 35 годин, а сам зміст навчального матеріалу виглядає наступним чином[21, с. 215-222]:

Таблиця 1. 3.

Зміст програми «Економіко-математичне моделювання»

Кіл-ть годин	**Тема**	**Зміст навчального матеріалу**
5	Загальні відомості про економіко-математичне моделювання	Поняття математичної та економічної моделей. Етапи економіко-математичного моделювання. Приклади економіко-математичних моделей. Елементи економічної моделі, що описуються математично (змінні, константи, рівняння, нерівності тощо). Складання найпростіших економіко-математичних моделей, їх класифікація за призначенням та характером математичних об'єктів. Розв'язування текстових задач економічного змісту за допомогою рівнянь та їх систем. Створення міні-проектів «Економіко-математична модель».

Продовж. табл. 1.2.

11	Прогресії та математика фінансів	Поняття відсотка. Відсоткові розрахунки. Основні типи задач на відсотки. Арифметична прогресія та прості відсотки на капітал. Геометрична прогресія та складні відсотки на капітал. Математика фінансів. Рахунки накопичення, розрахунки ренти, погашення боргу. Різницеві рівняння та їх розв'язок. Різницеві рівняння в математиці фінансів. Складання та розв'язування різницевих рівнянь. Інтерпретація їх розв'язків.
8	Функції, рівняння і нерівності в задачах цінового та маркетингового аналізу	Задачі на складання рівнянь, що описують зв'язки між кількістю та ціною. Рівняння стану та рівноваги. Рівняння попиту та пропозиції, ціни та доходу, їх геометрична Інтерпретація. Задачі цінового та маркетингового аналізу. Визначення економічних показників (точки незбитковості, точки рівноваги, проміжки збитків та доходів тощо) на основі аналізу графіків та дослідження властивостей відповідних функцій. Розв'язування задач. Практична робота «Розв'язування задач цінового та маркетингового аналізу».
10	Лінійні нерівності з двома змінними та задачі лінійно-го програмування	Лінійні нерівності з двома змінними, зображення їх розв'язків на координатній площині. Геометрична Інтерпретація розв'язків системи нерівностей з двома змінними. Задачі лінійного програмування. Допустимі та оптимальні розв'язки задач лінійного програмування. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування. Розв'язування задач лінійного програмування за допомогою табличного процесора MS Excel.

Продовж. табл. 2.2.

		Практична робота «Розв'язування задач лінійного програмування за допомогою табличного процесора MS Excel». Семінарське заняття «Інші методи розв'язування задач лінійного програмування».
1	Підсумкове заняття	Конференція «Економіко-математичне моделювання: необхідність, доцільність, ефективність, перспективність».

На мою думку, перевагою такого факультативу є саме професійна орієнтація учнів, їх економічне та громадянське виховання. Цей курс надає можливість школярам набути такого досвіду застосування математики, який є необхідним у реальному житті, насамперед у сфері підприємництва, фінансів, економіки.

Також, прерогативою факультету є використання різноманітних організаційних форм навчання, таких як лекції, практичні заняття, ділові ігри, практикуми, проектне навчання тощо.

Крім того важливим є і використання у заняттях табличного процесору MS Excel, що значно спрощує розв’язування задач та дозволяє більше зосередитись саме на моделюванні ситуації. Проте недоліком є те, що у середовищі MS Excel не можна розв’язувати більш складні задачі, в яких багато змінних величин. Також до переліку недоліків можна віднести і обмеженість факультативу, який зосереджений саме на сфері економіки, та не дозволяє в повній мірі розкрити учням свої нахили та здібності.

3. Задачі лінійного програмування

Автори: *Бегерська Алла Володимирівна, вчитель математики Монастирищенської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №1 Монастирищенської районної ради Черкаської області*

Бойко Лариса Анатоліївна, вчитель математики

Монастирищенської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №5 Монастирищенської районної ради Черкаської області

Програма курсу розрахована на учнів 10-х класів економічного та технологічного профілів. За мету автори факультативу поставили формування в учнів знань, умінь і навичок для практичного застосування математичного апарату при розв'язуванні задач економіки. А також важливу роль відіграє і підготовка учнів до свідомого вибору професії.

Сам курс присвячений задачам лінійного програмування, за допомогою якого досліджуються задачі, що мають множину розв'язків, з яких треба вибрати оптимальний.

Курс розрахований на 34 години, а сам зміст навчального матеріалу виглядає наступним чином [21, с. 222-227]:

Таблиця 1. 4.

Зміст програми «Задачі лінійного програмування»

Кіл-ть годин	**Тема**	**Зміст навчального матеріалу**
1	Математична модель задачі лінійного програмування	Найтиповіші економічні задачі. Формулювання економічних задач математичною мовою
4	Задачі, що приводять до лінійного програмування	Задачі оптимального виробничого планування. Задачі на розкрій промислових матеріалів. Транспортні задачі та задачі спеціалізації й кооперування виробництва. Сільськогосподарські задачі.
3	Різні форми запису задачі лінійного програмування	Стандартна форма запису. Канонічна форма запису. Перехід від мінімуму до максимуму.
8	Методи розв'язування задач лінійного програмування	Графічний метод. Симплексний метод.

Продовж. табл. 1.3.

8	Транспортна задача	Постановка задачі та її математична модель. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі. Відкрита модель транспортної задачі. Метод потенціалів розв’язування транспортної задачі. Відкрита модель транспортної задачі. Застосування транспортної задачі до розв’язування деяких економічних задач. Транспортна задача за критерієм часу.
4	Творча робота	Розв’язування транспортної задачі лінійного програмування
6	Захист проектів	–

На мою думку, важливим у курсі є саме висвітлення практичного застосування екстремумів функції в задачах економіки. Це дозволяє учням розширити свої знання як з математики, так і з економіки.

Крім того, даним курсом передбачено роботу у групах під керівництвом вчителя, що дає можливість працювати спільно, контролювати роботу один одного. Саме у груповій роботі відбувається навчання рефлексії, тобто вміння подивитись на себе, на свою діяльність зі сторони, оцінити її.

Проте недоліком є те, що програмою курсу не передбачено розв’язку засобами ІКТ. Це не дозволяє учням розглянути більш складні задачі, в яких використовуються дані, що не можуть бути опрацьовані власноруч оскільки потребують великих обчислень.

Аналіз діючих факультативних програм з математики показав, що кожна з них безперечно має багато переваг, але і недоліки також є. Тому вони потребують удосконалення. Основним їх недоліком є те, що не використовуються СКМ, в цьому випадку розглядаються лише ті задачі, які можна обчислити вручну.

1.3. Формування математичної та інформаційно-цифрової компетентностей засобами оптимізаційних задач

Компетентісний підхід до освіти – це спроба звести у відповідність освіти і потреби ринку праці. Він не є чимось новим, штучно створеним, а гармонійно поєднує традиційний підхід викладання, головним завданням якого є формування сталих знань, вмінь та навичок і особистісно-орієнтовану форму навчання, метою якої є створення умов для розвитку та самореалізації кожного учня [36, с. 53-57].

Математична компетентність – це складна системна якість особистості, що передбачає володіння математичними знаннями, уміннями, навичками. Вона виявляється в готовності та здатності використовувати математичні знання для ефективного розв’язання задач, які можна розв’язати математичними методами [37, с. 138-143] .

На думку Головань М.С., математична компетентність, як інтегративне утворення особистості, має такі структурні компоненти:

- мотиваційний;
- когнітивний;
- діяльнісний;
- ціннісно-рефлексивний;
- емоційно-вольовий.

Всі ці структурні компоненти існують не ізольовано один від одного, а тісно взаємопов’язані між собою. [15, с. 35-39]

Розглянемо, як оптимізаційні задачі формують кожен компонент математичної компетентності:

Мотиваційним компонентом оптимізаційних задач є саме їх прикладна спрямованість. Оскільки більшість задач оптимізації є прикладними, то це означає що учні набувають тих знань, які необхідні їм у реальному житті, у їх майбутній професії. Крім того використовуючи сучасні онлайн-засоби опрацювання даних такі як CoCalc, Sage, Mathlab будь-яка людина зможе успішно досліджувати моделі різноманітних задач не уявляючи складності математичного апарату, який лежить в основі такого дослідження. Це дозволяє зосередити увагу учнів саме на моделюванні задачі.

Когнітивний компонент оптимізаційних задач, в сучасній математиці, включає в себе сукупність теоретичних і практичних знань з тем: «Дослідження функцій на екстремум», «Розв'язування практичних задач на екстремум» а також «Розв'язування задач лінійного програмування».

Діяльнісний компонент полягає в математичному моделюванні оптимізаційних задач, тобто учням потрібно підібрати до задач такі складові частини як цільова функція та система обмежень, які б у повній мірі відображали умови і вимоги поставленої перед ними задачі. В свою чергу лінійне програмування потребує дій за певним алгоритмом, наприклад: введення позначень; створення цільової функції та критерію; складання системи обмежень; розв'язання задачі, що також складає діяльнісний компонент.

Ціннісно-рефлексивний компонент полягає в постійній роботі учнів над собою, в роботі на розв'язуваннями задач, в умінні оцінити свій результат зі сторони та проаналізувати його. Також не менш важливим є і прагнення учнів до самоактуалізації, саморозвитку.

Емоційно-вольовий компонент закладається в цілеспрямованості учнів у роботі, прояв їх зусиль, думок, наполегливості у процесі розв'язування оптимізаційних задач. Не менш важливим є і виховування в учнях гідної поведінки у разі невдачі, яка може виникнути в процесі розв'язання математичних задач.

Сучасні реалії передбачають внесок педагогом у навчальний процес нових, перспективних методів подання інформації. Одним з таких методів в освіті є інформаційно-комунікаційні технології. ІКТ постають, як одні із важливих завдань сучасної освіти, які суттєво підвищують якість навчання і освіти. Тому впровадження інформаційно-цифрової компетентності в навчальний процес є необхідністю в сучасній освіті.

У своїй роботі ми передбачаємо використання ІКТ у вигляді хмарного середовища CoCalc. Для цього ми визначили, яким чином CoCalc формує компоненти інформаційно-цифрової компетентності.

Згідно теорії В.В. Краєвського, у складі інформаційно-цифрової компетентності можна виділити такі структурні компоненти:

- мотиваційно-цільовий;
- когнітивний;
- операційно-діяльнісний;
- рефлексивний. [40, с. 8-10]

Ціннісно-мотиваційний компонент використання хмарного середовища CoCalc включає в себе мотивацію і потребу до саморозвитку, шляхом викликаного інтересу до професійної діяльності в ІТ-сфері, вдосконаленню знань, умінь, навичок використання CoCalc.

Когнітивний компонент забезпечує вільне володіння засобами CoCalc, які передбачаються факультативом, а також міжпредметні зв'язки інформатики з математикою, фізикою, економікою, які реалізовані у факультативі.

Діяльнісний компонент це безпосередньо систематичне та активне використання хмарного середовища CoCalc в задачах оптимізації, які дозволяють учню розкрити свій творчий потенціал.

Рефлексивний компонент визначається здатністю учня до самооцінки, за результатами виконаних задач, розуміння власної значущості в групі, розвиток професійних навичок, які можуть бути використані у подальшій діяльності, через засіб хмарного середовища CoCalc.

Взагалі впровадження використання ІКТ в галузі освіти – це інструмент забезпечення успіху навчального процесу, оскільки інформаційно-комунікаційні технології розширюють можливості, як педагога, так і учнів, крім того оптимізують і сам процес навчання. [30, с.8].

Висновки до розділу 1

Профільне навчання – це процес, який спрямований на реальне життєве та професійне самовизначення школярів, організований навчально-виховний процес, який враховує типові індивідуальні особливості учні. У цьому процесі в першу чергу розглядають основні запити і професійні плани учнів враховуючи структуру ринку праці та зайнятість для молоді.

Концепція профільної школи базується на законі України «Про освіту», наказі про затвердження «Концепції профільного навчання у старшій школі» від 21.10.2013, галузевій концепції розвитку неперервної педагогічної освіти, Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, концепції розвитку інклюзивної освіти та ін.

Аналіз діючої навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні, а також аналіз шкільних підручників та навчальних посібників дає підстави, щоб зробити наступний висновок: формування в учнів умінь математичного моделювання, в процесі розв'язування задач розроблено на низькому рівні, оскільки в методичній літературі недостатньо висвітлено це питання.

З метою ефективного формування в старшокласників умінь математичного моделювання виникає потреба у додаткових заняттях. Одним із видів таких занять є факультативи. Факультатив – це такий навчальний курс, який не є обов'язковим для школярів. Він спрямований на більш поглиблене вивчення предметів, міжпредметних зв'язків, професійної орієнтації учнів.

Звісно, існує велика кількість різноманітних факультативів, присвячених темі «Лінійне програмування». Аналіз діючих програм з факультативних курсів математики показав, що кожна з них безперечно має багато переваг, але і недоліки також є. Тому вони потребують удосконалення. Нами виділено основний недолік: не передбачено розв'язання задач засобами інформаційно-комунікаційних технологій. Що не дозволяє учням розглянути більш складні задачі, в яких використовуються дані, що не можуть бути опрацьовані власноруч оскільки потребують великих обчислень.

Для того щоб побудувати власну програму факультативного курсу нами проаналізовано структуру математичної та інформаційно-цифрової компетентностей з метою вивчення оптимального впливу засобів (систем комп'ютерної математики) на формування математичної компетентності.

На думку Головань М.С., математична компетентність, як інтегративне утворення особистості, має такі структурні компоненти: мотиваційний; когнітивний; діяльнісний; ціннісно-рефлексивний; емоційно-вольовий [23].

Згідно теорії В.В. Краєвського, у складі інформаційно-цифрової компетентності можна виділити такі структурні компоненти: мотиваційно-цільовий; когнітивний; операційно-діяльнісний; рефлексивний [14].

Всі ці структурні компоненти існують не ізольовано один від одного, а тісно взаємопов'язані між собою. Також у першому розділі було розглянуто яким саме чином оптимізаційні задачі формують компоненти математичної та інформаційно-цифрової компетентностей.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ CoCalc ЯК ЗАСОБУ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

2.1. Аналіз переваг застосування CoCalc

В сучасному світі з кожним роком зростає необхідність у інформаційному просторі. Інформаційно-комунікаційні засоби наразі використовуються майже у всіх сферах сучасного життя, а особливо у сфері освіти. Тому дуже важливим для вчителів є оволодівання інформаційно-комунікаційних технологій, використання нових методів роботи, нових технологій, нових сервісів та програмних середовищ. Одним із засобів, які ефективно формують математичну та інформаційно-цифрову є використання систем комп'ютерної математики та використання хмарних технологій. У розробці нашого факультативу ми використовуємо хмарне середовище CoCalc.

CoCalc – безкоштовне та вільно поширюване хмарне програмне забезпечення, яке може бути використане для полегшення математичних обчислень. CoCalc створений, як доступна, безкоштовна та відкрита альтернатива таким математичним пакетам, як Matlab, Matcad, Maxima, Matematica. Офіційний сайт CoCalc: https://cocalc.com/.

Працюють у CoCalc безпосередньо у вікні веб-браузера, підключеного до мережі Інтернет, не встановлюючи при цьому ніяких додаткових програмних забезпечень.

Звичайно, нині існує велика кількість різноманітного відкритого програмного забезпечення, яке б відповідало вимогам нашого факультативу, тому доречним буде навести переваги використання хмарного середовища CoCalc.

Переваги використання CoCalc [18, 31, 41]:

1) Як ми вже зазначали ресурс є відкритим та безкоштовним, але є і платні послуги такі як якісніший хостинг, збільшення оперативної пам'яті, дискового простору, більша кількість одночасно запущених проектів та інші. Звісно, ці послуги дозволяють розв'язувати більш складні проблеми, дозволяють виконувати більшу кількість обчислень одночасно, але в рамках нашого факультативу ми обмежились безкоштовною версією;
2) Ваші проекти надійно збережені у вашому акаунті, у хмарі, тобто на різних комп'ютерах, телефонах, планшетах по всьому світу. В цьому випадку ризик втрати даних є набагато нижчим, ніж збереження проектів локально;
3) Робота з даним ресурсом не потребує завантаження додаткових програмних чи апаратних забезпечень;
4) Ресурс є дуже зручним у використанні. Можна отримати доступ до своїх проектів у будь-який час, з довільної точки світу, як з комп'ютера, так і зі смартфона або планшета, під'єднаних до мережі інтернет.
5) Можливість кооперативної технології виконання навчальних проектів, тобто користувачі ресурсу можуть ефективно взаємодіяти між собою, як в роботі безпосередньо над реалізацією проекту так і при використанні чата для обговорень;
6) Ще однією із переваг використання хмарного середовища CoCalc є можливість оцінювання навчальних досягнень учнів, а також зворотнього зв'язку між вчителем і учнями, шляхом коментування проектів;
7) Ви завжди можете повернутись до більш ранніх версій проекту, переглянути усі зміни, які відбувались над проектом;

CoCalc – це завжди широкий вибір засобів та потужний інструмент для розв'язування завдань із багатьох розділів математики. Ресурс підтримує всі базові математичні операції, багато математичних функцій, крім того містить в собі велику кількість різних програмних пакетів [18, с. 24-28].

Таблиця 2. 1.

Програмні пакети, що входять до CoCalc

Математичні пакети	
Алгебра	GAP, Maxima, Singular
Алгебраїчна геометрія	Singular
Арифметика довільної точності	GMP, MPFR, MPFI, NTL
Арифметична геометрія	PARI, NTL, mwrank, ecm
Математичний аналіз	Maxima, SymPy, GiNaC
Комбінаторика	Symmetrica, Sage-Combinat
Лінійна алгебра	Linbox, IML, GLPK
Теорія графів	NetworkX
Теорія груп	GAP
Чисельні розрахунки	GSL, SciPy, NumPy, ATLAS
Інші пакети	
Інтерфейс командного рядка	IPython
Бази даних	ZODB, Python Pickles, SQLite
Графічний інтерфейс	Sage Notebook, jsmath
Графіка	Matplotlib, Tachyon3d, GD, Jmol
Інтерпретатор команд	Python
Мережеві можливості	Twisted

Зареєструватись у CoCalc можна з використанням облікового засобу у Facebook, Github, Google, Twitter, або створивши новий обліковий запис. Розв'язування задач нашого факультативу передбачає використання пакету

GLPK – програмний пакет, призначення якого – розв'язування задач лінійного програмування, змішаного цілочисельного програмування. Це набір підпрограм, які можна викликати з бібліотеки. Програмний пакет GLPK, розроблений Махоріним Андрієм Олеговичем, вперше був опублікований у жовтні 2000 року.

2.2. Методичні особливості факультативного курсу «Задачі оптимізації» в профільній школі

За мету в нашому факультативі взято саме побудова моделі до поставлених оптимізаційних задач, оскільки саме темі моделювання в навчальному процесі виділяють недостатню кількість часу.

Процес моделювання сприяє розвитку критичного мислення, яке дозволяє людині аналізувати та розв'язувати окремі проблеми. Крім того факультативом передбачено і розвиток комунікаційних навичок учнів шляхом різних видів робіт: робота в групах, дискусії, евристичні бесіди, тощо. Все це сприяє розвитку учня, як особистості. Групова робота виховує в учнів відповідальність, оскільки внесок кожного, впливає на результат всієї групи; здатність учнів висловлювати свої думки та прислуховуватись до думок інших; безпосередня підтримка учнів один одного, з метою отримання спільного результату роботи.

Нами була розроблена програма інтегрованого математично-комп'ютерного факультатива для учнів 10-11 класів: *Задачі оптимізації з застосуванням CoCalc.*

Основна мета програми – практичне застосування математичного апарату та відповідного програмного забезпечення при розв'язуванні задач економіки та управління, підготовка учнів до свідомого вибору професії.

Програма розрахована на 70 години на рік. Основна організаційна форма його проведення – групова робота учнів під керівництвом учителя.

Програма містить такі теми:

Тема 1. Математичні моделі задач.

Тема 2. Методи розв'язування задач лінійного програмування.

Тема 3. Виробничі ситуації.Транспортна задача.

Тема 4. Застосування графів та методи їх дослідження для розв'язання економічних задач.

Тема 5. Використання хмарної системи комп'ютерної математики CoCalc.

Опис програми інтегрованого математично-комп'ютерного факультатива для учнів 10-11 класів:

Розробляючи модель математичного програмування, слід дотримуватись певних правил [4, 8, 17] :

- Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.
- У моделі потрібно враховувати все істотне, нехтуючи всім другорядним.
- Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на електронних обчислювальних машинах.
- Необхідно, щоб множина змінних була не порожньою.
- Різні форми запису задачі лінійного програмування (ЗЛП).

Лінійне програмування є особливим випадком математичного програмування.

Лінійне програмування – метод досягнення найліпшого виходу у математичній моделі чиї вимоги представленні через лінійні відношення.

Лінійне програмування є технікою для оптимізації лінійної цільової функції, що обмежена лінійними рівняннями і лінійними нерівностями. Її цільова функція є дійсно-значима. Алгоритм лінійного програмування знаходить точку на багатограннику де ця функція набуває найбільшого чи найменшого значення, якщо така точка існує [12, с. 25].

Задачами лінійного програмування називають задачі оптимізації, що мають такі особливості [16, с. 53]:

1. Критерій оптимізації є лінійною функцією від невідомих задачі
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обмеження, що накладаються на можливі розв'язки мають тип лінійних рівностей або нерівностей.
3. Змінні приймають не від'ємні значення.

Для вирішення задачі методом лінійного програмування необхідно, щоб описана в ній ситуація відповідала п'яти основним умовам [10, 19, 32]:

1. Вона повинна бути пов'язана з обмеженими ресурсами (тобто обмежена кількість робітників, продуктів харчування, матеріалів і т. д.).
2. Необхідно сформулювати точу ціль (максимізація чи мінімізація витрат).
3. Задача повинна характеризуватися лінійністю.
4. Задача повинна характеризуватися однорідністю.

Метод лінійного програмування базується на припущенні, що результати і ресурси можна поділити на частини.

Математична постановка задачі лінійного програмування в загальному випадку формулюється таким чином.

Нехай x_j – невідомі задачі, a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, b_i – обмеження, F – критерій оптимізації, c_j – коефіцієнти при невідомих у математичному формулюванні критерію оптимізації.

Цільова функція:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to opt$$

Система обмежень:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \{\ge\}\, b_i; (i = \overline{1,s}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; (i = \overline{s+1,m}), \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

Необхідно визначити такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, … , x_n, що задовольняють умовам (2.1), при яких лінійна функція F перетвориться в оптимум (мінімум або максимум у залежності від економічного змісту задачі).

Уперше постановка задачі лінійного програмування та один із методів її розв'язання були запропоновані Л. В. Канторовичем у роботі «Математические методы организации планирования производства» у 1939 році Дж. Данціг розробив симплекс-метод – один із основних методів розв'язування задач лінійного програмування. З тих пір теорія лінійного програмування бурхливо розвивалася і нині носить цілісний, в основному, закінчений характер [14, с. 24].

Зауважимо, що на розвиток теорії лінійного програмування суттєво впливало її застосування з оптимальним плануванням, організацією та управлінням у різноманітних сферах людської діяльності.

Задачі оптимізації, в яких цільова функція є лінійною функцією незалежних змінних (тобто має вигляд $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – константи, $x_1, x_2, \dots, x_n$змінні, n - довільне натуральна число), а умови, що визначають допустимі значення цих змінних, мають вигляд лінійних рівнянь і нерівностей, відносять до задач лінійного програмування.

Лінійне програмування розвинулось у зв'язку із задачами економіки, з пошуком способів оптимального розподілу і використання обмежених ресурсів. Розвиток і ускладнення економічних виробничих процесів, ефективної обчислювальної техніки стимулює ширше використання математичних методів в управлінні, сприяє зростанню ролі лінійного програмування як актуального розділу прикладної математики [7, 14].

Розглянемо задачу лінійного програмування, що дасть деяке уявлення про практичний характер і особливості математичної моделі таких задач.

Задача № 1. Завод додатково освоїв, крім основної продукції, випуск нової продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4. Для цього потрібна сировина чотирьох видів A_1, ,A_2, A_3, A_4, яку завод може щомісяця виділяти в обмеженій кількості. Щомісячне надходження потрібної сировини, витрати сировини на одиницю кожного виробу, а також прибуток від реалізації одиниці виробу подано в таблиці 2.2. [11, с.90]

Таблиця 2.2.

Види сировини	Щомісячне надходження сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Кількість продукції		x_1	x_2	x_3	x_4
Прибуток від реалізації одиниці виробу, крб.		8	10	12	18

Визначити, яку кількість кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B4 має випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Розв'язання. Складемо математичну модель цієї задачі. Позначимо через $x_1,\ x_2, x_3, x_4$ відповідно ті кількості продукції асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4, які треба випустити, щоб мати максимальний прибуток від їх реалізації. Тоді на випуск продукції B_1 буде витрачено $2x_1$ умовних одиниць сировини A_1, на випуск продукції B_2 – $4x_2$, на випуск продукції B_3 – $6x_3$, на випуск продукції B_4 – $8x_4$ умовних одиниць сировини A_1. Витрати сировини A_1 не повинні перевищувати 1260 умовних одиниць. Дістанемо таку лінійну нерівність: $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 1260$. За змістом задачі невідомі $x_1,\ x_2, x_3, x_4$ є невід'ємними величинами. Аналогічні міркування приводять до систем лінійних нерівностей, які накладають обмеження на значення невідомих x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 1260, \\ 2x_1 + 2x_2 + \qquad 6x_4 \leq 900, \\ \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 530, \\ x_1 + \qquad x_3 \qquad \leq 210 \end{cases} \tag{2.2}$$

і

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ x_4 \geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Прибуток від реалізації визначається так:

$$z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 18x_4 \to max. \tag{2.4}$$

Системи лінійних нерівностей (2.2) та (2.3) та лінійна функція (2.4) визначають математичну модель розглянутої задачі: знайти такі значення змінних $x_1,\ x_2, x_3, x_4$, що задовольняють системи лінійних нерівностей (2.2) і (2.3) та надають найбільшого значення лінійній функції (2.4).

Характерні особливості цієї задачі: додаткову продукцію B_1, B_2, B_3, B_4 завод може виготовляти при обмежених засобах; серед багатьох можливих варіантів плану випуску продукції B_1, B_2, B_3, B_4 треба вибрати найкращий, тобто той, який дає максимум прибутку.

Ці особливості властиві кожній задачі лінійного програмування.

Характерні особливості математичної моделі цієї задачі:

1) шукані значення змінних задовольняють систему лінійних рівнянь або нерівностей;

2) функція, найбільше (найменше) значення якої нас цікавить, лінійна;

З) шукані числові значення змінних невід'ємні.

Ці особливості характеризують математичну модель кожної задачі лінійного програмування. Відзначимо, що практичні задачі лінійного програмування досить громіздкі, їх математичні моделі містять, як правило, багато змінних, багато лінійних рівнянь або нерівностей. Тому такі задачі розв'язують на швидкодіючих електронних машинах. Звісно, ми не можемо обмежитись простими задачами, які можна розв'язувати обчислениям вручну, проте, для формування в учнів вмінь не лише побудови математичних моделей, а й розв’язування самих задач власноруч ми розглянемо найпростіші випадки.

Якщо задача лінійного програмування містить дві змінні x_1, x_2, то її можна розв'язати, використовуючи геометричну інтерпретацію лінійних рівнянь і нерівностей з двома змінними на площині.

Відомо, що будь-яке рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ з двома змінними є рівнянням прямої лінії на площині в прямокутній системі координат (рис. 2.1.). Якщо $b = 0$, то пряма проходить через початок координат. Кожна нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ з двома змінними геометрично визначає півплощину з межовою прямою $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Другу частину цієї півплощини визначає нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 < b$.

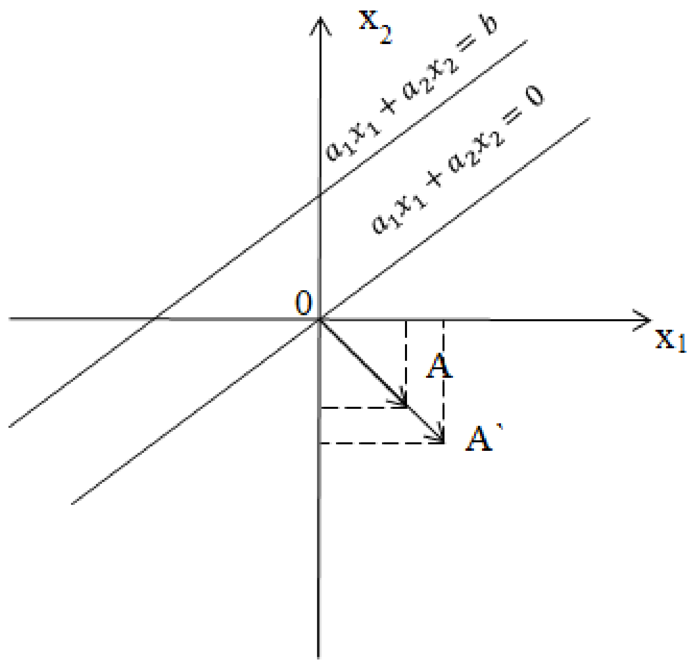


Рис. 2. 1. Рисунок до задачі 1

Переміщуючи пряму, що є зображенням рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, паралельно самій собі дістанемо прямі, рівняннями яких є рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ з різними значеннями вільного члена b, тобто з різними значеннями функції $z = a_1x_1 + a_2x_2$. Чи існує закономірність зростання і спадання цієї функції? Виявляється, напрям зростання функції z визначає вектор $\vec{a} = (a_1; a_2)$, побудований з її коефіцієнтів. Він називається нормальним вектором прямої, бо є перпендикулярним (нормальним) до неї.

Нехай, наприклад, $a_1 > 0$ і $a_2 < 0$, Візьмемо на прямій, яка визначається вектором *a,* точку $A` = (a_1`; a_2`)$, причому нехай $a_1` > a_1$, тобто точка $A`$ знаходиться далі від початку координат, ніж *A*; очевидно також, що $\left|\overrightarrow{a`}\right| > |\vec{a}|$. У точці *A* числове значення лінійної функції $z = a_1x_1 + a_2x_2$ дорівнює $z` = a_1^2 + a_2^2$, у точці $A` - z`` = a_1a_1` + a_2a_2`$. Враховуючи, що $a_1` > a_1$ і $\left|\overrightarrow{a_2`}\right| > |\overrightarrow{a_2}|$, дістанемо $z`` > z`$. Аналогічно розглядаються інші випадки для знаків коефіцієнтів a_1, a_2 функції z. Тоді, очевидно, вектор $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ показує напрям зменшення значень функції $z = a_1x_1 + a_2x_2$.

Прямі лінії на площині x_1Ox_2, паралельні прямій, що визначається рівнянням адх, $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, називають лініями рівнів лінійної функції $z = a_1x_1 + a_2x_2$.

Користуючись поняттям нормального вектора $\vec{a} = (a_1; a_2)$, можемо визначити розміщення півплощин $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ і $a_1x_1 + a_2x_2 > b$ на координатній площині x_1Ox_2. Півплощина $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ розміщена з того боку прямої $z = b$, куди показує нормальний вектор $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$. Аналогічно вектор $\vec{a} = (a_1; a_2)$ показує, де розміщена півплощина $a_1x_1 + a_2x_2 > b$ відносно прямої $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

Розглянемо тепер систему m лінійних нерівностей з двома змінними:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases}$$

Якщо ця система сумісна, то спільна частина m півплощин, що визначаються нерівностями цієї системи, геометрично визначатиме множину всіх її розв'язків, яка може бути обмеженою многокутною областю (многокутником разом з його внутрішністю) або мати складнішу будову.

Нас цікавитиме множина всіх невід'ємних розв'язків , тобто тих, які містяться в першій чверті координатної площини. Цю множину називають областю допустимих розв'язків.

Так, наприклад, множиною розв’язків системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

буде трикутна область ABC (рис. 2.2.). Областю допустимих розв’язків (розв’язків для яких $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$) буде п’ятикутна область ADEFK.

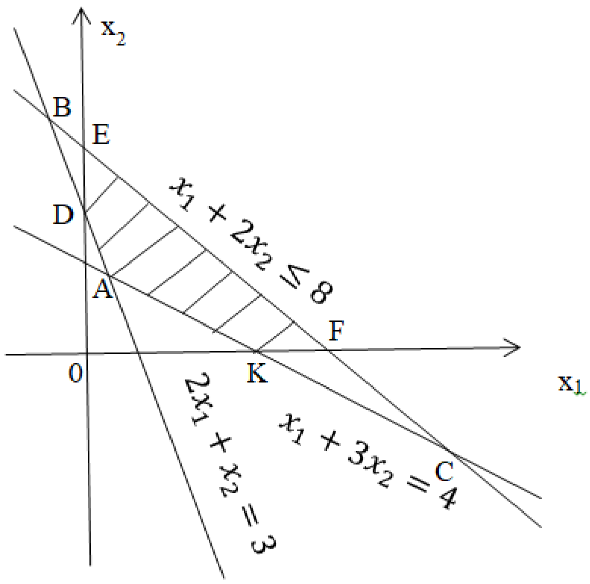


Рисунок 2. 2.

Розв’язати двовимірну задачу лінійного програмування означає – з множини допустимих розв’язків треба вибрати такий, який надає найменшого (найбільшого) значення цільовій функції $z = a_1x_1 + a_2x_2$.

Можна показати (ми на цьому не спиняємось), що, коли область допустимих розв’язків є обмеженою многокутною областю, то розв’язком задачі є координати деякої вершини многокутника, який обмежує область допустимих розв’язків.

Задача № 2. Знайдіть невід’ємні значення змінних x_1 і x_2 , які задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \end{cases}$$

і надають найменшого (найбільшого) значення цільовій функції $z = x_1 + 2x_2$ [11, с. 94]

Розв'язання. Побудуємо пряму $x_1 + 2x_2$ (рис. 2.3.), що проходить через початок координат, і вектор $\bar{c} = (1; 2)$, який показує напрям зростання значень функції $z = x_1 + 2x_2$. Конкретне значення цільової функції z показує певне положення відповідної їй прямої $x_1 + 2x_2 = b$, паралельної прямій $x_1 + 2x_2 = 0$. Переміщуватимемо пряму, що є зображенням прямої $x_1 + 2x_2 = 0$, паралельно самій собі в напрямі, показаному вектором $\bar{c} = (1; 2)$.

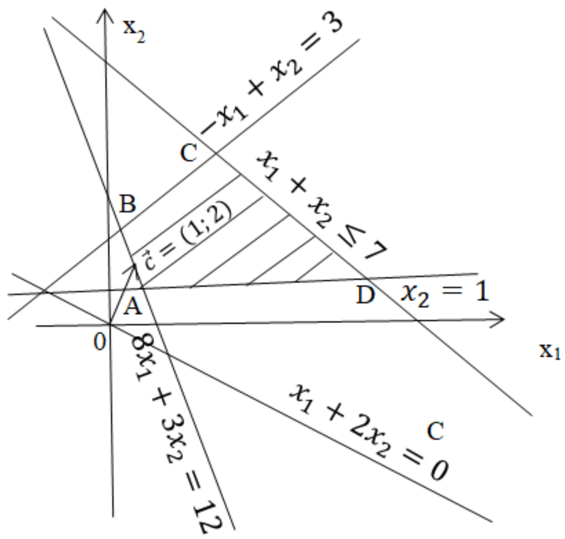


Рис. 2. 3. Рисунок до задачі 2

Вона проходитиме область допустимих значень даної задачі лінійного програмування; при цьому величина параметра b буде значенням цільової функції при допустимих значеннях x_1, x_2. Найменшого значення цільова функція досягає у вершині *A*, найбільшого – у вершині *C*. Щоб знайти ці значення, треба розв'язати дві системи рівнянь, які визначають положення точок *A* і *C*:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

З першої системи визначимо координати точки $A(\frac{9}{8}; 1)$, а з другої системи – координати точки $C(2; 5)$.

Отже найменшим значенням цільової функції буде $z_{min} = \frac{9}{8} + 2 \cdot 1 = \frac{25}{8}$, а найбільшим $z_{max} = 2 + 2 \cdot 5 = 12$.

Відзначимо, що умова розглянутої задачі допускає такий короткий запис:

$$\min(\max) z = x_1 + 2x_2 (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0),$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 7. \end{cases}$$

Як бачимо, задачі лінійного програмування з двома змінними в принципі розв’язуються просто. Говоримо в принципі, бо якщо лінійних нерівностей буде багато, то в цьому випадку будуть свої труднощі. А коли змінних більше трьох, то геометричне розв’язування вже неможливе, і слід звертатись до алгебраїчних методів.

Задачі для самостійного розв’язання [11, с.96-97]:

1. На чотирьох верстатах I, II, III, IV виготовляють деталі двох видів – A і B. Відомий час обробки кожної деталі на кожному з верстатів, час роботи верстатів протягом одного циклу виробництва і прибуток, одержаний від реалізації однієї деталі кожного виду (табл. 2.3). Скільки потрібно виготовляти деталей кожного виду, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний?

Таблиця 2.3.

Верстати	Час роботи верстатів протягом одного циклу виробництва, хв	Час обробки деталі на верстатах, хв	
		A	B
I	16	1	2
II	26	2	3

III	10	1	1
IV	24	3	1
Прибуток від реалізації однієї деталі, крб.		4	1

2. Для відгодовлі однієї тварини на тваринницькій фермі потрібно щодоби витрачати не менше 6 умовних вагових одиниць поживної речовини A_1, 8 умовних вагових одиниць речовини A_2 і 12 умовних вагових одиниць речовини A_3.

   Для відгодовлі тварин можна закупити три види кормів: I, II, III. Вміст кожної поживної речовини на один кілограм корму в кожному з видів кормів, добову потребу в речовинах, а також вартість 1 кг кожного виду корму подано в таблиці 2.4. Скласти такий план заготівля кормів, щоб забезпечити щодобову потребу в поживних речовинах при мінімальних витратах.

Таблиця 2.4.

Поживні речовини	Вміст поживної речовини на 1 кг корму, умовні вагові одиниці			Добова потреба в речовинах, умовні вагові одиниці
	I	II	III	
A_1	2	11	3	6
A_2	1	2	1,5	8
A_3	3	4	2	12
Вартість 1 кг кормів, коп	2	8	2,5	

Доцільно ввести поняття двоїстості в факультативному курсі. Двоїстість в математичному програмуванні є фундаментальним поняттям, на якому грунтується ряд підходів до розв’язування задач оптимізації. Наскільки важлива двоїстість свідчить той факт, що за її відкриття та застосування в оптимальному плануванні в 1975 році Л.В.Канторович (колишній СРСР) та Т.Купманс (США) були відзначені Нобелівською премією.

Задачі лінійного програмування мають ОДР завжди у вигляді опуклої фігури, тому вони є окремим випадком задач опуклого програмування.

Кожна задача опуклого програмування, включаючи також задачі лінійного програмування, має свій аналог, який називають двоїстою, або спряженою задачею.

Таким чином, практично завжди існує двоїста пара задач, одна з яких є прямою (або основною), а інша – двоїстою (або спряженою). З двох задач двоїстої пари будь – яку можна вважати прямою, а іншу – двоїстою, причому розв'язок однієї задачі цієї пари автоматично дає розв'язок іншої за допомогою теорем двоїстості.

Двоїста пара задач лінійного програмування буває двох типів:

- симетрична – обмеження як прямої, так і двоїстої задачі мають вид нерівностей. Змінні обох задач не можуть бути від'ємними;
- несиметрична – математична модель прямої задачі містить хоча б одне обмеження – рівняння, всі обмеження спряженої задачі є нерівностями. Змінні спряженої задачі можуть бути і від'ємними. (Типовим прикладом такої пари є транспортна задача) [24, с. 57-63].

Побудова математичної моделі двоїстої задачі. *Для складання математичної моделі двоїстої задачі* потрібно, щоб математична модель прямої задачі була зведена до, так званої, *стандартної форми*, а саме:

- якщо цільова функція прямує до мінімуму, то нерівності повинні мати знак "$\geq$";
- якщо цільова функція прямує до максимуму, то в обмеженнях повинен бути знак "$\leq$".

Таким чином, якщо якесь обмеження математичної моделі прямої задачі не задовольняє умові стандартної форми, то необхідно його помножити на (-1).

Розглянемо **_алгоритм побудови математичної моделі двоїстої задачі._**

1. Замість змінних x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ прямої задачі ввести змінні y_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ двоїстої задачі, які називають двоїстими оцінками (або тіньовими цінами) Кількість змінних y_i дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Скласти цільову функцію двоїстої задачі: вільні члени b_i прямої задачі стають коефіцієнтами цільової функції (W) двоїстої задачі, а напрямок цільової функції змінюється на протилежний, тобто якщо $F \to \min(\max)$, то $W \to \max(\min)$.
3. Коефіцієнти a_{ij} з обмежень прямої задачі зобразити у вигляді матриці коефіцієнтів: $A=\left\|a_{ij}\right\|$.
4. Транспонувати матрицю A (тобто рядки записати у відповідні стовпчики, а стовпчики, відповідно в рядки). Транспонована матриця позначається як A^T.

Початкова матриця

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Транспонована матриця

$$A^T=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

5. Скласти обмеження двоїстої задачі. Коефіцієнти в обмеження беруться з транспонованої матриці A^T, а вільними членами обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти цільової функції прямої задачі. Знак нерівності ставиться відповідно стандартній формі.

Математичні моделі симетричної двоїстої пари задач:

Пряма задача:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

Двоїста задача:

$$W=\sum b_i y_i \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i & \left(i = \overline{1,m}\right); \\ x_j \ge 0 & \left(j = \overline{1,n}\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge (\le) c_j & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ y_i \ge 0 & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

<u>Математичні моделі несиметричної двоїстої пари задач:</u>

Пряма задача: *Двоїста задача:*

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad W = \sum b_i y_i \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \left(i = \overline{1,m}\right); \\ x_j \ge 0 & \left(j = \overline{1,n}\right). \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge (\le) c_j & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ y_i - \textit{можуть} \quad \textit{бути} \quad \textit{будь-якими}. \end{cases}$$

Теореми двоїстості пов'язують між собою оптимальні розв'язки задач двоїстої пари, тому їх застосовують тоді, коли на основі відомого оптимального розв'язку однієї задачі лінійного програмування, необхідно знайти оптимальний розв'язок її двоїстої задачі. Така необхідність виникає тоді, коли є деякі труднощі у розв'язуванні однієї задачі з двоїстої пари. Крім того, обсяг обчислень при використанні симплекс – методу залежить від кількості обмежень, тому доцільно розв'язувати симплекс – методом ту задачу двоїстої пари, у якої менше обмежень, а оптимальний розв'язок іншої – знайти за теоремами двоїстості.

<u>Теорема 1</u>. *(теорема про існування): якщо пряма задача має оптимальний розв'язок, то має оптимальний розв'язок і її двоїста задача, при цьому має місце:*

$$\min(\max)\ F = \max(\min)\ W.$$

Це означає, що значення цільових функцій як прямої, так і двоїстої задач однакові.

<u>Теорема 2</u>. *(теорема про рівновагу): допустимий розв'язок двоїстої пари задач оптимальний тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right);$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Унаслідок цього, можна зробити висновок:

- якщо $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$ то $y_i \geq 0;$
- якщо $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,$ то $x_j \geq 0;$

Це означає, що якщо в обмеження математичної моделі прямої (двоїстої) задачі підставити відомі оптимальні значення змінних x_j (або y_i відповідно), то у випадку, коли виконується нерівність, змінна двоїстої (прямої) задачі обов'язково приймає нульове значення, тобто $y_i = 0$ (або $x_j = 0$ відповідно). За допомогою цього фактора знаходяться змінні, які приймають нульових значень

- якщо $x_j = 0,$ то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \neq c_j;$
- якщо $y_i = 0,$ то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \neq b_i.$

Це означає, що по відомим оптимальним значенням змінних x_j (або y_i відповідно) прямої (двоїстої) задачі, можна визначити знак обмеження двоїстої (прямої) задачі. А саме: якщо змінна прямої (двоїстої) задачі приймає нульове значення, то у відповідному обмеженні двоїстої (прямої) задачі знак нерівності зберігається, а якщо змінна ненульова, то у відповідному обмеженні ставиться знак “=”.

<u>Теорема 3</u>. (*теорема про оцінки): значення змінних y_i оптимального розв’язку двоїстої задачі оцінюють вплив зміни вільних членів обмежень b_i на величину F, тобто*

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i,$$

або

$$\Delta F = \Delta b_i y_i.$$

Алгоритми відшукання оптимальних розв’язків двоїстої задачі.

<u>1 випадок</u> (застосовується у випадку, коли відомі тільки оптимальні значення змінних x_j і значення цільової функції F прямої задачі.)

1. Підставити оптимальні значення x_j в обмеження прямої задачі і за допомогою 2 теореми двоїстості знайти ті змінні двоїстої задачі y_i, які дорівнюють нулю (якщо в обмеженні виконується нерівність).
2. За оптимальними значеннями x_j з’ясувати, який знак будуть мати обмеження двоїстої задачі, якщо в них підставити оптимальні значення y_i (якщо x_j=0, то в *j* – му обмеженні знак залишається, а якщо $x_j \neq 0$, то *j* – те обмеження – рівняння).
3. Поєднати в систему перетворені обмеження двоїстої задачі і розв’язати її. Розв’язок системи – оптимальні значення змінних y_i двоїстої задачі.
4. За допомогою 1 теореми двоїстості, знайти оптимальне значення цільової функції.

2 випадок (застосовується тоді, коли відома остання симплекс таблиця з оптимальним розв'язком прямої задачі).

1. Між основними змінними прямої задачі x_j і додатковими змінними двоїстої задачі y_{m+j} виконується відповідність:

$$x_j \leftrightarrow y_{m+j}.$$

2. Між додатковими змінними прямої задачі x_{n+i} і основними змінними двоїстої задачі y_i виконується теж відповідність:

$$x_{n+i} \leftrightarrow y_i.$$

3. Якщо $F \to \max$, то $y_i = \gamma_{n+i}$ $\quad y_{m+j} = \gamma_j$.

Якщо $F \to \min$, то $y_i = -\gamma_{n+i}$ $\quad y_{m+j} = -\gamma_j$.

В симплекс – таблиці 2.5. відповідність між змінними така:

Таблиця 2.5.

x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}	$\leftarrow$ Рядок змінних прямої задачі.
$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$	
y_{m+1}	$\dots$	y_{m+n}	y_1	$\dots$	y_m	$\leftarrow$ Індексний рядок симплекс таблиці.

Згідно з теоремою 2 можна виконати аналіз на дефіцитність тих чи інших ресурсів, які задані в задачі. Справді, якщо цілком використовується i-тий ресурс, то відповідне обмеження стає строгим рівнянням, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

У цьому разі, згідно з теоремою 2, відповідні змінні $y_i \neq 0$. Тому змінні y_i показують міру дефіцитності початкового i – го ресурсу: ресурс, який використовується повністю, має додатну оцінку y_i, а ресурс, який використовується не повністю має нульову оцінку y_i.

За допомогою теореми 3 можна проаналізувати вплив розміру початкових i – тих ресурсів на значення F в разі зміни значень b_i, не розв'язуючи її симплекс – методом заново.

Задача №3.

Побудувати математичну модель і знайти оптимальний розв'язок задачі, яка є двоїстою до задачі лінійного програмування для якої задана математична модель і її оптимальний розв'язок:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 9; \\ x_2 - x_1 \geq -3; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad \text{Оптимальний розв'язок:} \quad \left[\begin{array}{l} F = 9, \\ x_1 = 4, \\ x_2 = 1. \end{array} \right.$$

<u>Розв'язування:</u>

1. Побудуємо математичну модель двоїстої задачі. Для цього математичну модель заданої задачі зведемо до стандартного виду. Так як $F \to \max$, всі обмеження повинні мати знак "$\leq$". Цій умові не задовольняє перше і третє обмеження даної задачі, тому помножимо їх на (-1). Математична модель запишеться у вигляді:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 9; \\ -x_2 + x_1 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \quad \text{або:} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 9; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

- Так як пряма задача має три обмеження, то в двоїстій задачі буде три змінні: $y_1; y_2; y_3$.
- Цільова функція W має коефіцієнти: 6; 9; 3 (вільні члени обмежень прямої задачі) і прямує до мінімуму (так як цільова функція прямої задачі прямує до максимуму), а тому набуває вигляду:

$$W = 6y_1 + 9y_2 + 3y_3 \to \min .$$

- Матриця коефіцієнтів прямої задачі:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

- Матриця коефіцієнтів двоїстої задачі – транспонована матриці A:

$$A^T = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

- Обмеження двоїстої задачі:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Таким чином, математична модель двоїстої задачі:

$$W = 6y_1 + 9y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

2. Знайдемо оптимальні розв'язки двоїстої задачі, не розв'язуючи її.

- Підставимо в обмеження прямої задачі оптимальні значення $x_1 = 4$ і $x_2 = 1$

$$-4 + 3 \cdot 1 = -1 < 6 \text{, тому } y_1 = 0;$$

$$2 \cdot 4 + 1 = 9 = 9 \text{, тому } y_2 - ?;$$

$$4 - 1 = 3 = 3 \text{, тому } y_3 - ?.$$

- Так як $x_1 = 4 \neq 0$, тому перше обмеження двоїстої задачі – рівняння, якщо підставити оптимальні значення змінних y_1 і y_2, тобто:

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 = 2.$$

- Так як $x_2 = 1 \neq 0$, тому і друге обмеження – рівняння:

$$3y_1 + y_2 - y_3 = 1.$$

- Розв'яжемо систему отриманих рівнянь, враховуючи, що $y_1 = 0$:

$$\begin{cases} 2y_2 + y_3 = 2, \\ y_2 - y_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_2 = 3, \\ y_3 = y_2 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, *оптимальний розв'язок двоїстої задачі*:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 0, \;\; y_2 = 1, \;\; y_3 = 0, \\ W = 9 \end{array} \right.$$

3. Розглянемо випадок розв'язування двоїстої задачі, якщо відома остання симплекс – таблиця прямої задачі:

Таблиця 2.6.

			2	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	7	0	0	1	-2/3	7/3
1	x_2	1	0	1	0	1/3	-2/3
2	x_1	4	1	0	0	1/3	1/3
$F=9$			0	0	0	1	0
			$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} y_1=0,\ \ y_2=1,\ \ y_3=0, \\ W=9 \end{array}\right.$

Для поліпшення практичного спрямування курсу доцільно розглядати задачі практичного спрямування (виробничі задачі). У процесі розв'язування кожної виробничої ситуації необхідно виконати наступне:

1. Знайти "вузьке місце" для одержаного розв'язку виробничої ситуації;
2. Дати пропозиції щодо покращення результатів розв'язку виробничої ситуації;
3. Згідно з пропозиціями п.2 змінити початкові дані та зробити повторне розв'язування за додатковими умовами;
4. Проаналізувати повторний розв'язок та переконатися у правильному або помилковому висновку щодо розв'язку повторного рішення;

5. Зробити остаточні висновки та пропозиції згідно з аналізом знайдених розв'язків виробничої ситуації.

Кожна виробнича ситуація складається з комплексу задач оптимізації. Приведені блок-схеми взаємозв'язку задач. Після кожної виробничої ситуації розглянуто приклад її розв'язування, наведені висновки та рекомендації по поліпшенню розв'язку.

Для реалізації кожної наведеної виробничої ситуації необхідно самостійно сформулювати початкові дані згідно зі змістом взаємозв'язаного комплексу задач та знайти варіант розв'язку за цими вихідними даними.

У процесі розв'язування виробничої ситуації можливі випадки некоректності заданих початкових умов. Тому по ходу розв'язування виробничої ситуації припускається оперативне корегування вихідних даних, не порушуючи загальні виробничі умови даної ситуації.

Розв'язування виробничої ситуації в такій формі сприяє розвитку творчого мислення та володінню існуючими можливостями кожної складової задачі. Це дозволяє заздалегідь передбачити кінцевий розв'язок, або привести його до бажаних результатів.

1) Постановка виробничої ситуації

Завод виготовляє хімічну речовину за *к* технологіями ($k = \overline{1,K}$), причому витрати на виготовлення реактивів за *к*-ю технологією задаються як нелінійна залежність $f_k(x_k)$ з урахуванням можливостей складських приміщень a_k^{min} та a_k^{max}, де терміново накопичується кінцева речовина.

На завод матеріал постачається від n фабрик ($j = \overline{1,n}$) залізницею, причому можливості постачання сировині обмежені мережею залізниці з заданими пропускними спроможностями P_{jl}.

Фабрики використовують початкову сировину від m($i = \overline{1,m}$) регіональних складів, витрати на перевезення цієї сировини задаються нормативами C_{ij}.

Знайти план максимального випуску хімічної речовини за кожною технологією виробництва на заводі з мінімальними витратами та урахуванням усієї виробничо-постачальної лінії.

У постановці можливі застереження щодо особливих умов, за допомогою яких є змога покращити варіант розв’язування даної виробничої ситуації.

Загальна схема постачання сировини та виробництва речовини показана на рис. 2.4.

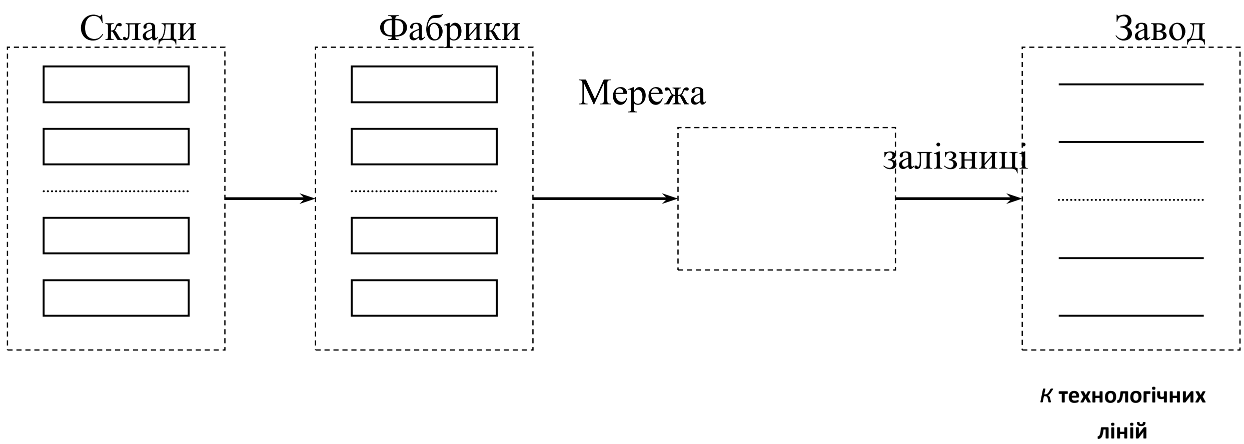


Рис. 2.4. до виробничої задачі

Умовні позначення :

i – індекс складів $\left(i=\overline{1,m}\right)$;

j – індекс фабрик $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

k – індекс технологій $\left(k=\overline{1,K}\right)$;

c_{ij} – транспортні витрати за одиницю сировини від i-го складу до j-ої фабрики ;

n – кількість фабрик ;

m – кількість складів ;

K – кількість технологічних ліній ;

A_i – обсяг i-го складу ;

b_j – попит j-ої фабрики на сировину ;

P_{jl} – пропускна спроможність (jl)-дуги мережі залізниці;

x_{jl} – розрахункова пропускна спроможність (jl)-дуги мережі залізниці;

V_{max} – максимальний обсяг перевезення сировини згідно з мережею залізниці;

b – обсяг сировини, який надходить до заводу ($b=V_{max}$);

x_k – обсяг сировини k-ої технологічної лінії;

$f_k(x_k)$ – витрати на виготовлення реактивів за k-ою технологією обробки сировини;

a_k^{min} , a_k^{max} – відповідно нижня та верхня межа обсягу переробки сировини k-ю технологічною лінією.

2) Загальна схема розв’язування

Виробнича ситуація відображує роботу чотирьох видів промислових одиниць (склади, фабрики, залізниця та завод), тому рішення загальноі виробничо-постачальної лінії треба розглядати у взаємозв’язку, розв’язуючи поетапно декілька задач оптимізацій. При цьому слід мати на увазі визначені резерви, зайві можливості, а також додаткові умови, які б дали якісний результат при розв’язуванні даної виробничої ситуації.

Наявність багатоваріантності виробничої ситуації потребує багаторазового процесу рішення, тому доцільно використовувати математичне забезпечення ЕОМ, особливо, коли розв’язування виробничої ситуації зводиться до розв’язку кількох взаємозв’язаних задач оптимізації:

- задачі розподілу сировини методом динамічного програмування;
- транспортної задачі;
- задачі про максимальний потік.

Послідовність розв'язування цих задач та умовні позначення величин наведені на рис.2.5.

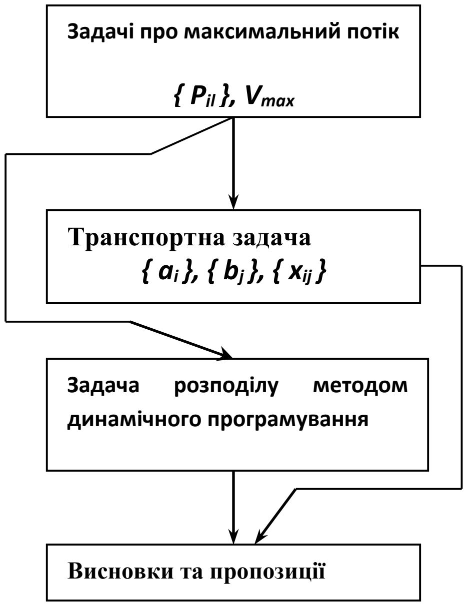


Рисунок 2.5.

3) Математичні моделі задач виробничої ситуації

Задача про максимальний потік :

$$F = V \to \max \;;\; \sum_j x_{j\ell} = \sum_S x_{\ell S} \;;\; 0 \le x_{j\ell} \le P_{j\ell} \;.$$

Транспортна задача :

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min \;;\; \sum_j x_{ij} = a_i \;;\; \sum_i x_{ij} = b_j \;.$$

Задача розподілу методом динамічного програмування :

$$F = \sum_k f_k(x_k) \to \min \;;\; \sum_k x_k = b \;;\; a_k^{\min} \le x_k \le a_k^{\max} \;.$$

4) Розв'язування задач виробничої ситуації

І етап.

Складається мережа залізниці з одним початком та однією кінцевою точкою. Для цього вводиться фіктивна початкова точка S. Пропускні спроможності фіктивних дуг від точки S до j-ї фабрики у вигляді P_{sj} складаються з спроможностей P_{jl} для дуг,які виходять з j-ї фабрики:

$$P_{Sj} = \sum_{\ell} P_{j\ell} \ , \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Потім розв'язується задача про максимальний потік і знаходиться величина V_{max}. Згідно з кінцевою матрицею X обчислюються усі значення b_j, тобто усі можливості перевезень від кожної j-ї фабрики:

$$b_j = x_{sj} \ (\ j = \overline{1,n} \ ).$$

Таким чином, величини b_j є попитом на сировину по кожній j-й фабриці. Загальний попит на сировину

$$b = V_{\max} = \sum_j b_j \ ,$$

тобто дорівнює максимальному потоку заданої мережі з її пропускними спроможностями.

II етап.

Розв'язується питання прив'язки складів до фабрик. Попит фабрик – це величини b_j, а можливості кожного i-го складу

$$a_i = \sum_j b_j \ .$$

Отже, на даному етапі розв'язується відкрита транспортна задача, у якій

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j$$

з початковими даними $\{ a_i \}$, $\{ b_j \}$, $|| C_{ij} ||$.

Для розв'язування цієї задачі вводиться фіктивний споживач (фіктивна фабрика), для якого

$$b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j \ , \ c_{i(n+1)} = 0 \, .$$

Після розв'язування транспортної задачі фіктивний споживач та прив'язані до нього фіктивні поставки виключаться з подальшого розв'язування.

Обсяги складів

$$A_i = \sum_j x_{ij} \ .$$

Транспортні витрати

$$F_{TP} = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \ .$$

III етап.

Згідно із заданими функціями витрат $f_k(x_k)$ за кожною k-ю технологією, загальною величиною постачання сировини b, а також обмеженнями на складські приміщення a_k^{min} та a_k^{max} розв’язується задача розподілу сировини методом динамічного програмування.

За наслідками розв’язування знаходять обсяги завантаження сировиною кожної k-ї технологічної лінії x_k та загальні витрати на виробництво реактивів F у цілому по заводу.

IV етап. Складається загальна схема постачання сировини та виробництва реактивів і визначаються загальні витрати:

$$F_o = F + F_{тр}.$$

V етап. Висновки та пропозиції щодо поліпшення розв’язку, повторне розв’язування виробничої ситуації. Остаточний розв’язок.

Задача № 3. Початкові дані наступні.

Мережа залізниці у вигляді зваженого графу показана на рис.2.6.

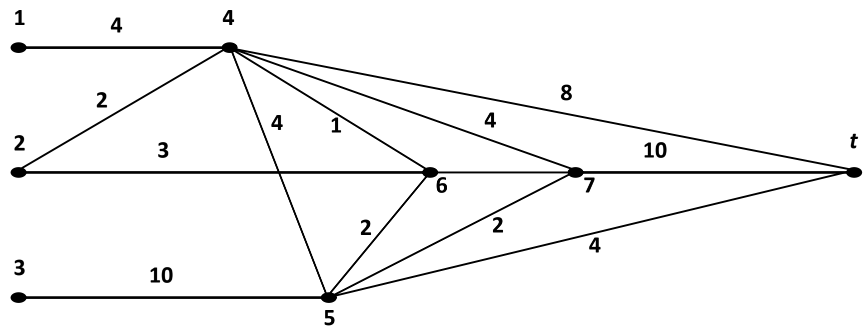


Рис. 2.6. Рисунок до задачі 3

Транспортні витрати на перевезення сировини

$$\left\| c_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Витрати на виробництво реактивів за кожною k-ю технологією

$$f_1(x_1) = \frac{2x_1^{\ 2} + 5x_1}{2} \ ; \quad f_2(x_2) = \frac{x_2^{\ 2} + 15x_2}{4} \ ,$$

умови $5 \le x_k \le 12$ та цілочисловий розподіл сировини.

Додаткові умови.

У разі необхідності можливо знизити нижню межу значень x_k до нуля, пропускні спроможності S_{5t}, S_{47} та S_{67} збільшити на дві одиниці, а спроможність S_{57} на чотири одиниці.

Розв'язування

Задану мережу залізниці доповнюємо однією фіктивною початковою вершиною S (рис.2.7).

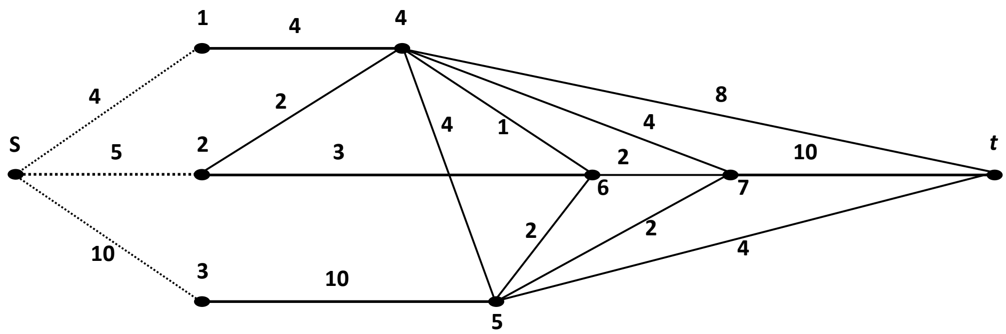


Рис. 2.7. Рисунок до задачі 3 (уточнена схема)

Знаходимо пропускні спроможності від *i*–ї вершини до кожної *j*–ї фабрики P_{sj}:

$$P_{S1} = P_{14} = 4 \ ,$$

$$P_{S2} = P_{24} + P_{26} = 2 + 3 = 5 \ ,$$

$$P_{S3} = P_{35} = 10 \ .$$

Внаслідок розв'язування задачі про максимальний потік по кінцевій матриці потоків, наведених у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7.

X =

	S	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	***t***
S	x	4	4	6					
1		x			4				
2			x		2		2		
3				x		6			
4					x				6
5						x		2	4
6							x	2	
7								x	4
t									x

будується мережа залізниці з розрахованими пропускними спроможностями x_{jl} (рис.2.8.).

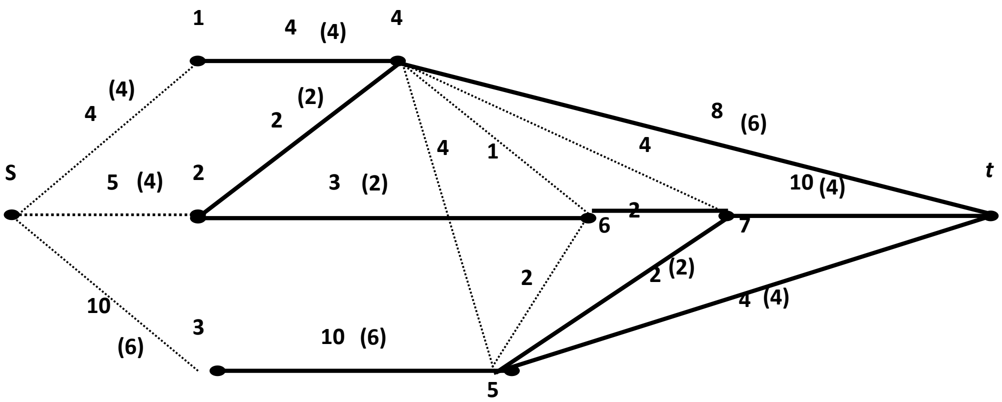


Рис. 2.8. Рисунок з розв’язком задачі 3

Таким чином, дуги (45), (46), (56), (47) – зайві, дуги (26), (35), (4*t*), (7*t*) – не повністю завантажені (у дужках фактичні спроможності P_{jl}). Жирні лінії – робоча мережа залізниці.

Отже, максимальний потік

$$V_{max} = b = x_{s1} + x_{s2} + x_{s3} = 4 + 4 + 6 = 14,$$

а попит на сировину по кожній фабриці

$$b_1 = x_{s1} = 4;$$

$$b_2 = x_{s2} = 4;$$

$$b_3 = x_{s3} = 6.$$

Для розв’язування транспортної задачі визначають можливості постачання складів

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 4 + 4 + 6 = 14,$$

а потім розв’язують транспортну задачу з початковими даними:

$$a_i = 14,\ 14,\ 14,$$

$$b_i = \ \ 4,\ \ 4,\ \ 6,$$

$$\left\| c_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \end{matrix} \right\|$$

Кінцевий результат наведений у таблиці 2.8.

Таблиця 2.8.

	I	II	III	IV	a_i
1		4		10	14
2			6	8	14
3	4			10	14
b_j	4	4	6	28	

Оскільки четвертий споживач фіктивний, тому що

$$\sum_i a_i - \sum_j b_j = 42 - 14 = 28 \ ,$$

то він не береться до уваги при знаходженні обсягів постачання сировини від складів:

$$A_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 + 4 + 0 = 4;$$

$$A_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0 + 0 + 6 = 6;$$

$$A_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} = 4 + 0 + 0 = 4.$$

Витрати на постачання сировини

$$F_{тр} = 6{\cdot}4 + 5{\cdot}6 + 5{\cdot}4 = 74 \text{ тис. грн.}$$

Схема прив'язки постачальників-складів до споживачів-фабрик показана на рис.2.9.

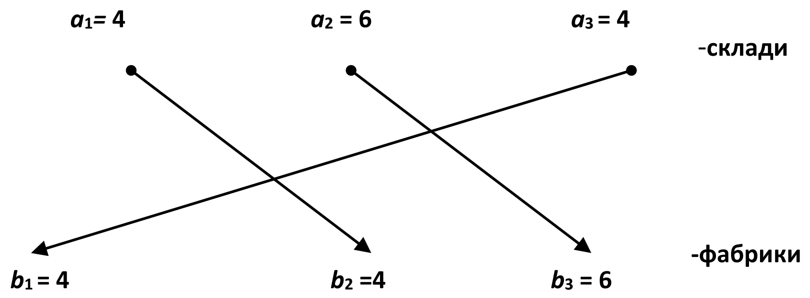


Рис. 2.9. Рисунок до задачі 3

Щоб знайти оптимальний розподіл сировини $b=14$ одиниць між k технологічними лініями, розв'язується задача розподілу методом динамічного програмування

$$F = f_1(x_1) + f_2(x_2) = \frac{2x_1^2 + 5x_1}{2} + \frac{x_2^2 + 15x_2}{4} \rightarrow \min \ ,$$

$$x_1 + x_2 = 14,$$

$$5 \le x_1 \le 12,$$

$$5 \le x_2 \le 12$$

з цілочисловими значенням x_k. Результатом розв'язку є наступна таблиця 2.9.:

Таблиця 2.9.

Δ	$x_1(\Delta)$	$\varphi_1(\Delta)$	$x_2(\Delta)$	$\varphi_2(\Delta)$
5	5	7,5	-	-
6	6	51,0	-	-
7	7	71,5	-	-
8	8	84,5	-	-
9	9	104,5	-	-
10	10	125,0	5	62,5
11	11	148,5	6	69,0
12	12	174,0	7	76,0
13	-	-	8	83,5
14	-	-	9	91,5

Отже, розв'язком задачі розподілу буде: $x_1 = 5$, $x_2 = 9$, $F = 91{,}5$ тис. грн.

Схема розподілу показана на рис.2.10.

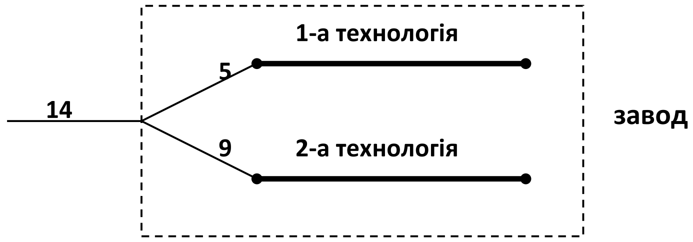


Рис. 2.10. Рисунок до задачі 3 (логістична схема)

Загальні витрати на виробництво хімічних речовин

$$F_0 = F + F_{тр} = 91,5 + 74,0 = 165,5 \text{ тис.грн.}$$

За результатами розв'язування даної виробничої ситуації схема постачання сировини та виробництва хімічних речовин зображена на рис.2.11.

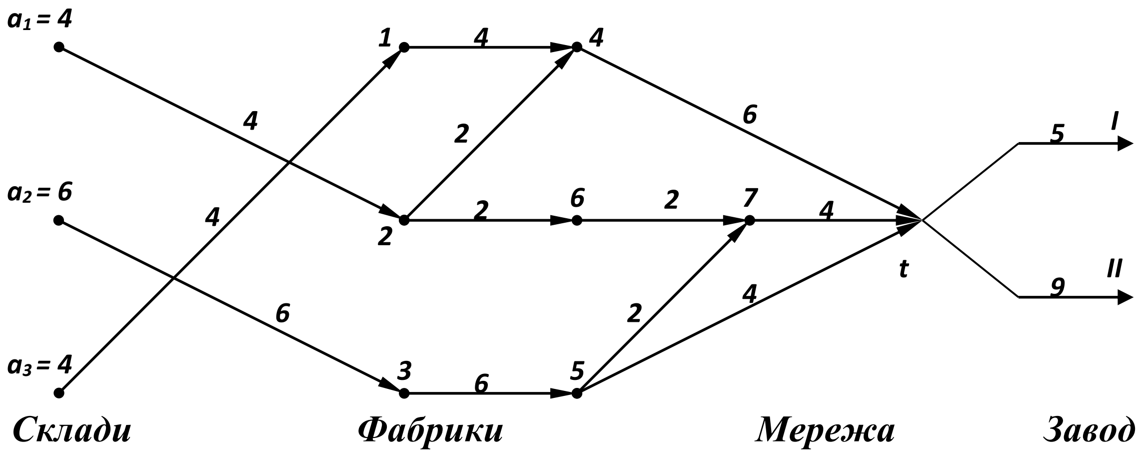


Рис. 2.11. Рисунок до задачі 3 (пропозиції)

Висновки та пропозиції

Згідно з додатковими умовами до прикладу доцільно буде зміна початкових даних:

перша технологічна лінія працює на нижній межі ($x_1 = 5$), тому що ефективність переробки сировини має гірший показник; цю лінію треба менше завантажувати, а по другій лінії вигідно збільшити виробництво. Це можливо передбачити, якщо

$$0 \leq x_1 \leq 12,$$

$$5 \le x_2 \le 12.$$

З такою зміною початкових умов ведеться повторне розв’язування виробничої ситуації, що дає наступний розв’язок:

$$F = 90{,}0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 12.$$

Загальні ватрати:

$$F_0 = F + F_{тр} = 90{,}0 + 74{,}0 = 164{,}0 \text{ тис. грн.},$$

що зменшило на 1.5 тис. грн. витрати на виробництво хімічної речовини.

Щоб збільшити обсяги виробництва, скористаємося додатковими умовами на збільшення перевезення сировини.

Спроможності дуг (47), (67) та (5t) можливо збільшити на дві одиниці, а дугу (57) – на чотири. Але дуга (47) зовсім не потрібна (немає сенсу збільшувати її спроможність), щодо інших, то їх спроможності можливо збільшити: $P_{67} = 4$, $P_{5t} = 6$, $P_{57} = 6$.

Якщо виробничу ситуацію повторно розв’язати за цими змінами, то оптимальний розв’язок наступний:

$$V_{max} = b = 19,$$

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 4,$$

$$b_1 = 4,\ b_2 = 5,\ b_3 = 10,$$

$$F_{тр} = 100,$$

$$F = 152{,}5,$$

$$x_1 = 7,\ \ x_2 = 12,$$

$$F_0 = F + F_{\text{тр}} = 100 + 152{,}5 = 252{,}5 \text{ тис.грн.}$$

Цей варіант розв’язку передбачає зміну $0 \le x_1 \le 12$, тобто для обсягу переробки сировини b=19 одиниць витрати оптмального варіанту дорівнюють 252,5 тис. грн., тобто гірші, ніж було одержано.

Планування складання опорних конструкцій.

Постановка виробничої ситуації. Цех веде складання опорних конструкцій; план виробництва дорівнює P конструкцій на місяць.

Кожна конструкція збирається з N типів кутків, кількість яких у кожній конструкціх дорівнює n_i.

Кутки для конструкцій цех одержує при розкрої початкових заготовок, які надходять до цеху різної довжини від кількох постачальників.

Складання конструкцій з кутків повинно починатись з r-го типу кутка. Збитки у процесі складання при переході від одного типу кутка до другого задаються матрицею C_n , у якій передбачаються також тільки можливі переходи у процесі складання конструкцій.

Вартість 1 м початкової заготовки задається величинами C_L; транспортні витрати на постачання заготовки на 1 км – матрицею C_T, а можливі маршрути постачання заготовок надаються транспортною мережею із зазначенням відстані P_{jl}.

Знайти варіант виконання плану складання опорних конструкцій з загальними мінімальними витратами. Зробити висновки та надати пропозиції до знайденого розв’язку виробничої ситуації.

Загальна схема постачання та складання збірних конструкцій показана на рис.2.12.

Умовні позначення:

і – *індекс кутка;*

n_i – кількість кутків;

N – тип кутків;

P – планове завдання на складання конструкцій;

L – *довжина заготовки;*

C_n – матриця збитків переходів збирання від одного до другого типу кутка;

C_L – вартість 1 м заготовки L-го типу;

C_T – транспортні витрати на постачання заготовок;

P_{jl} – відстані між j–ю та ℓ–ю точками транспортної мережі;

Мережа постачання

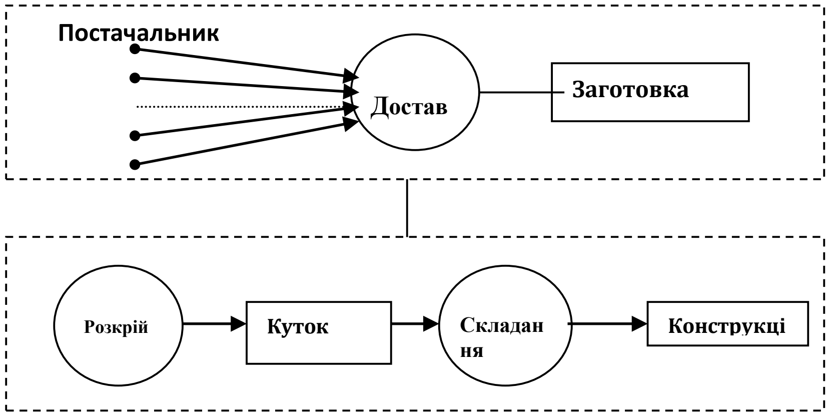


Рис. 2.12. Рисунок до другої виробничої ситуації

Така виробнича ситуація відображує двоетапний процес, який складається з мережі постачання початкової продукції з заданими параметрами та виробництва кінцевої конструкції згідно з умовами її складання. Виробничу ситуацію треба розв’язувати у тісному зв’язку з умовами постачання та виробництва, використання їх можливостей та резервів і знаходження загального ефективного розв’язку із застосуванням методів оптимізації та стандартного математичного забезпечення комп’ютера.

5) Загальна схема розв’язування

Виробнича ситуація складається з наступних взаємозв’язаних задач оптимізації:

– оптимальний розкрій матеріалів з позиції мінімізації відходів;
– транспортна задача з мінімізацією витрат на постачання заготовок;
– знаходження оптимального режиму складання конструкцій з мінімізацією простоїв цеху за причинами переналагодження обладнання у процесі складання.

У зв’язку з цим можливо використати наступні методи оптимізації:

– симплекс-метод;
– метод потенціалів;

– метод динамічного програмування (у мережній постановці);

– метод розгалужень та меж.

Для розв’язування даної виробничої ситуації пропонується один з наступних підходів знаходження оптимального процесу збирання опорних конструкції.

Схему послідовності розв’язування показано на рис.2.13.

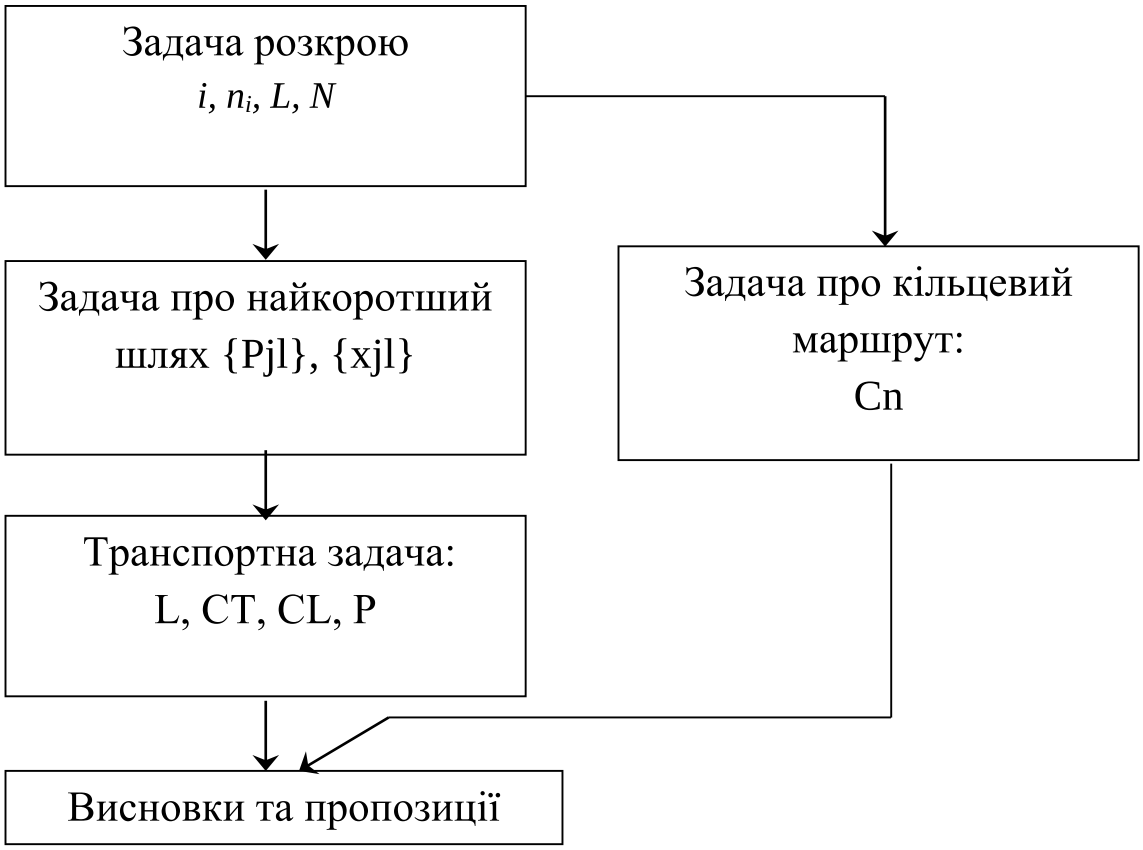


Рис. 2.13. Рисунок до другої виробничої задачі (схема розв’язання)

6) Математичні моделі задач виробничої ситуації

Кожна задача оптимізації, яка використовується при розв’язуванні даної виробничої ситуації, має наступні математичні моделі (згідно з прийнятими умовними позначеннями).

Задача розкрою:

$$F = \sum_k \Delta_k x_k \to \min \ , \quad \sum_k a_{ik} x_k = n_i \ ,$$

де k – індекс варіанта розкрою;

i – індекс кутка;

a_{ik} – кількість кутків i-го типу за k-м варіантом розкрою;

Δ_k – відходи заготовки за k-м варіантом розкрою;

x_k – кількість одиниць заготовок за k-м варіантом розкрою.

Задача про найкоротший шлях:

$$F = \sum_{(j\ell)\in U}\sum P_{j\ell} x_{j\ell} \to \min \ ,$$

$$\sum_{(1\ell)} x_{1\ell} = 1 \ , \qquad \sum_{(jt)} x_{jt} = 1 \ , \qquad \sum_{(jk)} x_{jk} = \sum_{(k\ell)} x_{k\ell} \ ,$$

де x_{jl} – набувають значення 0 або 1 залежно від наявності зв'язку;

U – множина дуг транспортної мережі.

Транспортна задача:

$$F = \sum_j \sum_\ell c_{j\ell} x_{j\ell} \to \min \ ,$$

$$\sum_\ell x_{j\ell} = a_j \ , \qquad \sum_j x_{j\ell} = b_\ell \ ,$$

де x_{jl} – обсяги постачання заготовок між j -м та l-м пунктами;

C_{jl} – транспортні витрати на 1 км між j-м та l-м пунктами;

a_j –обсяги можливостей постачання заготовок;

b_l – попит на заготовки.

Задача про кільцевий маршрут:

$$F = \sum_{P} \sum_{S} c_{PS} x_{PS} \rightarrow \min \ ,$$

$$\sum_{P} x_{PS} = 1 \ , \qquad \sum_{S} x_{PS} = 1 \ ,$$

$$x_{PS}(1 - x_{PS}) = 0 \ , \qquad c_{PS} = \infty \ (\mathrm{p} = \mathrm{s}),$$

де C_{ps} – збитки від переналагодження обладнання $C_n = \| C_{ps} \|$;

x_{ps} – набуває значення 0 або 1 залежно від наявності зв’язку.

7) Розв’язування задач виробничої ситуації

I етап.

За початковими даними L, N, n_i, та i складається таблиця з можливими варіантами розкрою. Кожен варіант розкрою відображується одним рядком, до якого записується кількість одиниць розкрою x_k для кожного j-го типу кутка, а також остача Δ від заготовки L- типу.

Таблиця 2.10.

Структура таблиці:

<table>
<tr><td rowspan="3">Тип загото-вок L</td><td rowspan="3">Варіант розкрою k</td><td>Індекс кутка i</td><td>1</td><td>2</td><td>.........</td><td></td><td>J</td><td rowspan="3">Остача Δ від L заготоовки k-го розкрою</td></tr>
<tr><td>Тип кутка N</td><td></td><td></td><td>.........</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Кількість заготовок x_k</td><td colspan="5">Значення a_{ik} кількості кутків</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>.........</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>.........</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Кількість кутків i-го типу n_i</td><td></td><td></td><td>.........</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Варіанти розкрою складаються тільки для випадків, які забезпечують виконання кількості n_i кутків.

За таблицею складається математична модель задачі розкрою, а потім ця задача розв’язується на ПЕОМ симплексним методом.

Знайдені значення x_k вказують, скільки треба взяти заготовок L-типу, а значення F_{min} – загальні відходи оптимального варіанта:

$$F_{\min} = \Delta_0 = \sum_L \Delta_0^{(L)} .$$

Значення x_k треба округляти до найближчих більших цілих чисел. Потім визначається вартість відходів на виробництво однієї конструкції:

$$F' = \sum_L \Delta_0^{(L)} c_L$$

і вартість відходів згідно з планом на місяць: $F_P = F' \cdot P$.

II етап.

За заданою транспортною мережею з відстанями P_{jl} методом динамічного програмування знаходять найкоротші відстані від постачальників заготовок до цеху $\{ S_j \}$, на основі чого складається мережа постачання.

III етап.

Для розв'язування транспортної задачі ведеться підготовка даних:

– по кожній L-й заготовці визначається її потреба на одну конструкцію:

$$b_\ell^{(1)} = \sum_L x_k^{(L)} ;$$

– для P конструкцій потреба складає:

$$b_\ell = P \cdot b_\ell^{(1)} ;$$

– можливості одного постачання:

$$a_j = \sum_\ell b_\ell ;$$

– елементи заданої матриці C_T помножуються на відповідні значення відстані S_j (етап II) та вводиться нульова колонка длі фіктивного споживача, тому що транспортна задача має відкритий тип.

За даними a_j, b_l та C_T (скоригованої) розв'язується транспортна задача і знаходяться значення F_{mp} та $\{x_{jl}\}$.

IV етап.

На основі заданої матриці C_n, яка передбачає деякі заборони у послідовності, розв'язується задача про кільцевий маршрут, визначаються збитки на збирання конструкції $F'_{з.к}$ і послідовність збирання σ з заданого початкового r-го кутка.

Збитки за місяць

$$F_{з.к} = P \cdot F'_{з.к}.$$

V етап.

Визначаються загальні витрати на збирання Р конструкцій

$$F = F_p + F_{тр} + F_{з.к}$$

і будується загальна схема постачання заготовок та складання конструкцій цехом.

VI етап.

Висновки та пропозиції, повторне розв'язування виробничої ситуації та остаточний варіант розв'язку.

Задача № 4. Початкові дані.

Для заготовок та кутків:

$P = 20$; $n_i = (1, 3, 2.2)$;

$N = (120, 140, 100, 150)$; $L = (400, 320)$;

$C_L = (20, 15)$.

Мережа постачання з відстанями (рис.2.14.):

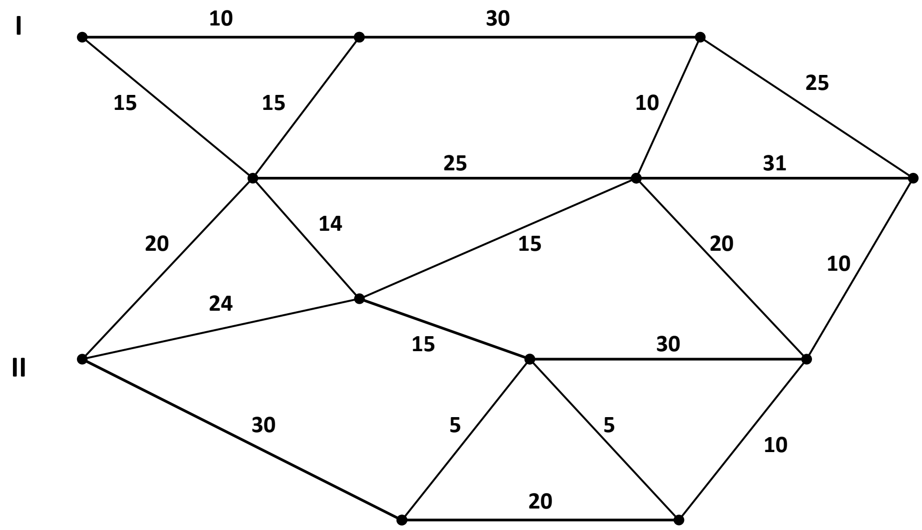


Рис. 2.14. Рисунок до другої виробничої ситуації (схема)

та матриця транспортних витрат:

$$C_T = \frac{1}{100}\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Матриця збитків від переналагодження обладнання

$$C_n = 0.25\cdot\begin{Vmatrix} \infty & 10 & 12 & 14 \\ 10 & \infty & 11 & \infty \\ 12 & 11 & \infty & 9 \\ 14 & \infty & 9 & \infty \end{Vmatrix}$$

та початковий тип кутка, з якого треба починати складання конструкції: $r = 2$.

Розв'язування

Згідно з даними n_i, L, N, i розв'язується задача розкрою. Для цього складається таблиця можливих варіантів розкрою:

Таблиця 2.11.

Таблиця можливий варіантів розкрою

L	K	i	1	2	3	4	Остача
		N_n	120	140	100	150	Δ
		X_k	a_{ik}				
400	1	x_1	1	2			0
	2	x_2	1	1	1		40
	3	x_3	1		2		80
	4	x_4	1		1	1	30
	5	x_5		2	1		20
	6	x_6		1	1	1	10
	7	x_7		1	2		60
	8	x_8			1	2	0
	9	x_9			2	1	50
	10	x_{10}				2	100
320	11	x_{11}	1	1			40
	12	x_{12}	1			1	30
	13	x_{13}		1	1		80
	14	x_{14}		1		1	30
	15	x_{15}		2			40
	16	x_{16}			1	1	70
	17	x_{17}	1		2		0
	18	x_{18}				2	20
n_i			1	3	2	2	

За цією таблицею складається математична модель:

Цільова функція:

$F = 0 \bullet x_1 + 40 \bullet x_2 + 80 \bullet x_3 + 30 \bullet x_4 + 20 \bullet x_5 + 10 \bullet x_6 + 60 \bullet x_7 + 0 \bullet x_8 + 50 \bullet x_9 + 100 \bullet x_{10} + 40 \bullet x_{11} + 30 \bullet x_{12} + 80 \bullet x_{13} + 30 \bullet x_{14} + 40 \bullet x_{15} + 70 \bullet x_{16} + 0 \bullet x_{17} + 20 \bullet x_{18} \rightarrow min$;

Система обмежень:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{11} + x_{12} + x_{17} = 1$;

$2 \bullet x_1 + x_2 + 2 \bullet x_5 + x_6 + x_7 + x_{11} + x_{13} + x_{14} + 2 \bullet x_{15} = 3$;

$x_2 + 2 \bullet x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2 \bullet x_7 + x_8 + 2 \bullet x_9 + x_{13} + x_{16} + 2 \bullet x_{17} = 2$;

$x_4 + x_6 + 2 \bullet x_8 + x_9 + 2 \bullet x_{10} + x_{12} + x_{14} + x_{16} + x_{18} = 2$.

Математична модель розв’язується симплексним методом (нецілочислові значення x_k закруглюються до цілих чисел):

$x_1 = 1$; $x_8 = 1$; $x_{13} = 1$; $F_{min} = 80$ см = 0,8м.

Вартість відходів:

$F^{`} = 0 \bullet 20 + 0 \bullet 20 + 0{,}8 \bullet 15 = 12$ грн. для однієї конструкції:

$F_p = 12 \bullet 20 = 240$ грн. для 20 конструкцій.

За методом динамічного програмування (у сітьовій постановці) розв’язується задача про найкоротший шлях і найкоротші відстані до цеху від кожного постачальника (рис.2.15).

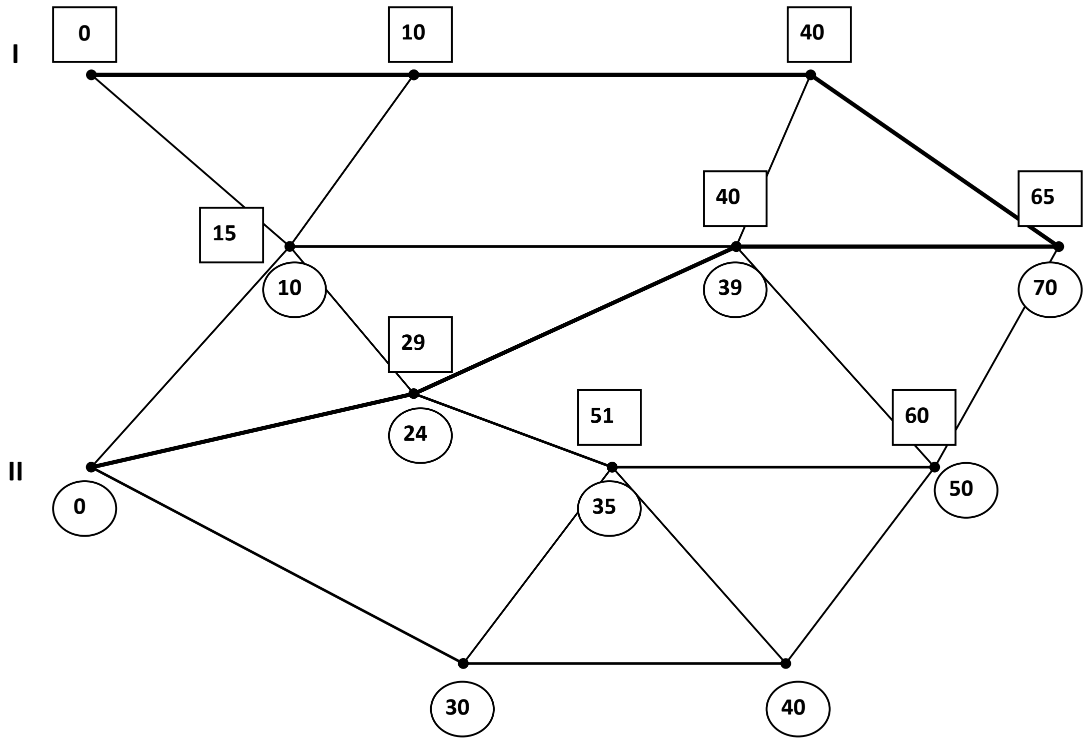


Рис. 2.15. Схема до другої виробничої ситуації

Позначкою вказані відстані від першого постачальника, а О – від другого постачальника до цеху при знаходженні найкоротшого шляху; жирними лініями – найкоротші відстані до цеху від постачальників.

Найкоротший шлях до цеху:

від І постачальника S_I = 65 км;

від ІІ постачальника S_I = 70 км.

Для розв’язування транспортної задачі формуємо початкові дані.

На одну конструкцію треба:

заготовки L = 4 м; $x_1 + x_8 = 2$ шт.;

заготовки L = 3,2 м; $x_{13} = 1$ шт.

тому що x_1 та x_8 відносяться до першого типу заготовки, а x_{13} – до другого (див. таблицю 2.11.).

Для 20 конструкцій потреба у заготовці буде такою:

$$b_1 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ шт.};$$

$$b_2 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ шт.}$$

Приймаємо можливості одного постачальника $b_1 + b_2 = 40 + 20 = 60$ шт., тобто $a_1 = 60$, $a_2 = 60$.

Через те що задача відкрита, то вводиться фіктивний споживач :

$$b_3 = \sum_j a_j - \sum_\ell b_\ell = 120 - 60 = 60 .$$

Матриця транспортних витрат C_m корегується згідно з найкоротшими відстанями постачання S_I та S_{II} :

$$C_T = \frac{1}{100} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{Vmatrix} \to \frac{1}{100} \cdot \begin{Vmatrix} (4 \cdot 65) & (2 \cdot 65) & 0 \\ (3 \cdot 70) & (6 \cdot 70) & 0 \end{Vmatrix} \to \frac{1}{10} \cdot \begin{Vmatrix} 26 & 13 & 0 \\ 21 & 42 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Задача розв’язується і знаходиться наступний варіант:

$x_{12} = 20$; $x_{13} = 40$; $x_{21} = 40$; $x_{23} = 20$; $F_{тр} = 110$ грн.

Збитки на складання однієї конструкції знаходяться за розв’язком задачі про кільцевий маршрут методом розгалужень та меж (рис.13.13).

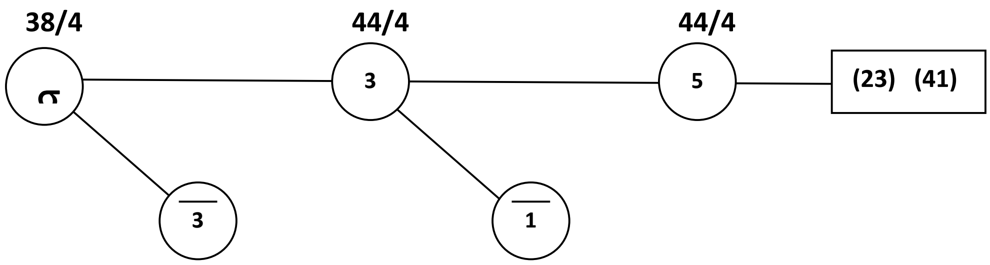


Рис. 2.16. Проміжний етап

Таким чином, $F'_{з.к} = 11$ грн., а при $r = 2$, $\sigma = (2\ 3\ 4\ 1\ 2)$.

Збитки за місяць

$$F_{з.к} = 20 \cdot 11 = 220 \text{ грн.}$$

Загальні витрати на збірку P конструкцій

$$F = 240 + 110 + 220 = 570 \text{ грн.}$$

Висновки та пропозиції

За результатами розв'язку виробничої ситуації можливо зробити висновок, що найбільші витрати спостерігаються у процесі складання конструкцій (220 грн.), тобто у роботі самого цеху. Цілком вірогідно, що цех має неефективне обладнання, а тому найважливими заходами до зниження загальних витрат є модернізація устаткування цеху.

Витрати при розкрої можливо запобігти, якщо заготовки поставлялися б довжиною 4 м та 2,4 м. Цей висновок дає схема розкрою заготовок ($x_1 = 1$, $x_8 = 1$, $x_{13} = 1$). Якщо постачальник буде згоден на такі поставки, то $F_p = 0$, тому що $F_{min} = 0$ при розв'язуванні задачі розкрою, а це зменшило б загальні витрати на 240 грн.

2.3. Використання CoCalc на факультативному курсі «Задачі оптимізації» в профільній школі

Розв'язання учнями оптимізаційних задач у хмарному середовищі CoCalc буде відбуватись за поданими шаблонами до кожного типу задач. Користуючись шаблонам, тепер учням пропонується зосередитись все ж таки саме на побудові математичних моделей до поданих задач.

```
%python3
from cvxopt.modeling import variable, op
import time
start = time.time()
x = variable(2,'x')
z=-(30*x[0] +1*x[1])
mass1 = (90*x[0] + 5*x[1]  <= 10000)
mass2 = (3*x[0] -x[1] == 0)
x_non_negative = (x >= 0)
problem =op(z,[mass1,mass2,x_non_negative])
problem.solve(solver='glpk')
problem.status
print ("Значення цільової функції")
print(abs(problem.objective.value()[0]))
print ("Значення змінних")
print(x.value)
stop = time.time()
print ("Час витрачений на розв'язання задачі")
print(stop - start)
```

```
Значення цільової функції
3142.857142857143
Значення змінних
[ 9.52e+01]
[ 2.86e+02]

Час витрачений на розв'язання задачі
0.03380441665649414
```

Рис. 2.17. Шаблон реалізації розв’язку у середовищі CoCalc

Задача №5.

Колгосп має можливість придбати не більше 19 автомашин вантажопідйомністю 3 тони і не більше 17 п'ятитонних. Відпускна ціна вантажівки для 3 тон – 4000 грн., для п’яти – 5000 грн. Колгосп може виділити для придбання автомашин 141 000 гривень. скільки потрібно придбати автомашин, щоб їх сумарна вантажопідйомність була максимальною [9]?

Для розв’язання поставленої задачі нам необхідно скласти модель. Введемо змінні x_1, x_2 – що позначатимуть кількість закуплених вантажівок для 3-х та 5-ти тон відповідно. Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

При цьому буде справедливою наступна система обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 141, \\ \quad 0 \leq x_1 \leq 19, \\ \quad 0 \leq x_2 \leq 17. \end{cases}$$

Реалізація розв’язку у CoCalc:

%python3

```
from cvxopt.modeling import variable, op
import time
start = time.time()
x = variable(16,'x')
z=-(3*x[1]+5*x[2])
mass1 = (x[1] < = 19)
mass2 = (x[2] < =17)
x_non_negative = (x >= 0)
problem =op(z,[mass1,mass2,x_non_negative])
problem.solve(solver='glpk')
problem.status
print ("Значення цільової функції")
print(abs(problem.objective.value()[0]))
print ("Значення змінних")
print(x.value)
stop = time.time()
print ("Час витрачений на розв'язання задачі")
print(stop - start)
```

Задача №6. У черзі чотири людини. Сара знаходиться між Барі і Мері. Мері стоїть перед двома іншими людьми, а Джон займає місце перед Мері. Хто в черзі перший, другий, третій і четвертий[28]?

Розв'язання:

Нехай x_{ij} – номер людини у черзі i, з ім'ям j. Де i- числа від 1 до 4, а j: 1-Сара, 2-Мері, 3-Барі, 4-Джон.

Нам потрібно мінімізувати функцію:

$$F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \to min$$

Запишемо обмеження:

$$\begin{cases} x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \\ x_{14} = 1 \end{cases}$$

і запишемо умову невід'ємності:

$$x_{ij} \geq 0;$$

Розв'яжемо отриману модель в хмарній системі комп'ютерної математики CoCalc за допомогою програмного пакету лінійного програмування GLPK. Наведем програмний код для розв'язування даної моделі:

```
%python3
from cvxopt.modeling import variable, op
import time
start = time.time()
x = variable(16,'x')
z=-
(x[0]+x[1]+x[2]+x[3]+x[4]+x[5]+x[6]+x[7]+x[8]+x[9]+x[10]+x[11]+x[12]+
x[13]+x[14]+x[15])
mass1 = (x[0]+x[1]+x[2]+x[3] == 1)
mass2 = (x[4]+x[5]+x[6]+x[7] == 1)
mass3 = (x[8]+x[9]+x[10]+x[11] == 1)
mass4 = (x[12]+x[13]+x[14]+x[15] == 1)
mass5 = (x[4] +x[8]== 1)
mass6 = (x[1]+x[5]  == 1)
mass7 = (x[3] == 1)
mass8 = (x[0]+x[4]+x[8]+x[12] == 1)
mass9 = (x[1]+x[5]+x[9]+x[13] == 1)
mass10 = (x[2]+x[6]+x[10]+x[14] == 1)
mass11 = (x[3]+x[7]+x[11]+x[15] == 1)
x_non_negative = (x >= 0)
```

```
problem =op(z,[mass1,mass2,mass3,
mass4,mass5,mass6,mass7,mass8,mass9,mass10,mass11,x_non_negative])
problem.solve(solver='glpk')
problem.status
print ("Значення цільової функції")
print(abs(problem.objective.value()[0]))
print ("Значення змінних")
print(x.value)
stop = time.time()
print ("Час витрачений на розв'язання задачі")
print(stop - start)
```

В результаті обчислення отримали такий розв'язок:

$x_{14}=1$, $x_{22}=1$, $x_{31}=1$, $x_{43}=1$.

З цього випливає, що черга має такий порядок: Джон, Мері, Сара, Барі.

Відповідь: Джон, Мері, Сара, Барі.

Задача №7. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим як 76, а вміст сірки не більш як 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонент, які змішуються, їх собівартості, октановому числі та вмісту сірки наведено в таблиці [13].

Таблиця 2.12.

Характеристики Компоненти бензину

Характеристики	Компоненти бензину			
	№1	№2	№3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Ресурс, т	700	600	500	300
Собівартість, гр.од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компоненту потрібно використати для того, щоб мати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова моделі задачі

Для розв’язання поставленої задачі нам необхідно скласти модель. Введемо змінні x_1, x_2, x_3, x_4 – що позначатимуть кількість тонн кожного компоненту бензину. Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \rightarrow min$$

При цьому буде справедливою наступна система обмежень:

$$\begin{cases} 700x_1 + 600x_2 + 500x_3 + 300x_4 \leq 1000, \\ 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76000, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}20x_4 \leq 300 \\ 0 \leq x_1 \leq 700, \\ 0 \leq x_2 \leq 600, \\ 0 \leq x_3 \leq 500, \\ 0 \leq x_4 \leq 300. \end{cases}$$

Задача № 8. Іграшковий магнат.

Уявіть, що ви – виробник іграшок і виготовляєте їх для розваги та задля отримання прибутку. Для останньої партії виробництва вам необхідно вирішити, яку кількість іграшок кожного виду виготовити. Три види іграшок, які ви виготовляєте, - це літаки, вертольоти та машини, що представлені на рисунку 2.19.

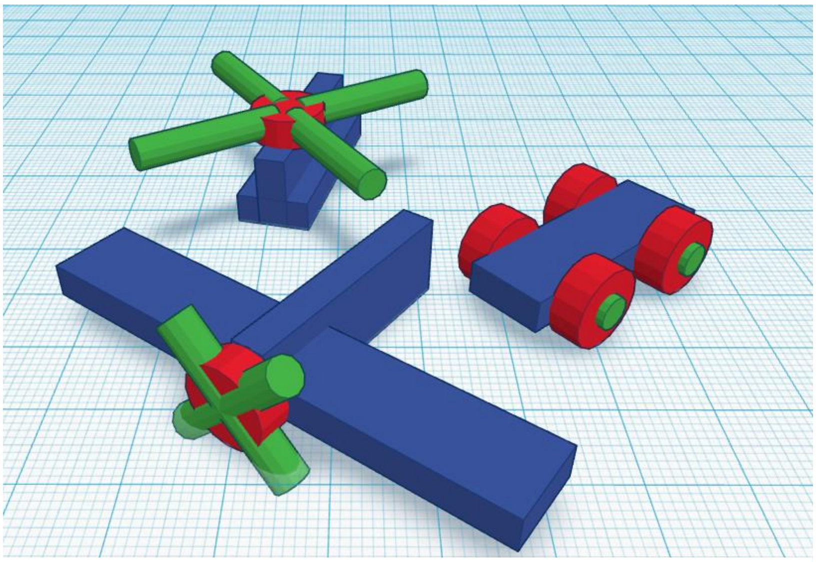


Рисунок 2. 19.

Для побудови літака вам необхідно: 3 сині блоки, 2 зелені стрижні та 1 червоне колесо. Щоб побудувати вертоліт потрібно 2 блакитні блоки, 4 зелені стрижні та 1 червоне колесо. Для того, щоб сконструювати автомобіль вам знадобиться 1 синій блок, 2 зелені стрижні та 4 червоних колеса.

Ваша норма прибутку для кожної іграшки така: літак – 7$, вертоліт - 8$, автомобіль – 5$.

Доступні вам деталі: 25 синіх блоків, 29 зелених стрижнів та 30 червоних коліс. При цьому можливий залишок деталей.

Який максимальний прибуток ви можете досягти [2]?

Побудова моделі задачі

Для розв'язання поставленої задачі нам необхідно скласти модель. Введемо змінні x_1, x_2, x_3 – що означатимуть кількість виготовлених літаків, вертольотів та автомобілів відповідно. Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow max$$

При цьому буде справедливою наступна система обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 25, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 29, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 30. \end{cases}$$

Розв'язок у CoCalc

```
%python3
from cvxopt.modeling import variable, op
import time
start = time.time()
x = variable(16,'x')
z=-(7*x[1]+8*x[2] +5*x[3])
mass1 = (3*x[1] +2*x[2]+x[3] < = 25)
mass2 = (2*x[1]+4*x[2]+2*x[3] < = 29)
mass3 = (x[1]+x[2]+4*x[3] <= 30)
x_non_negative = (x >= 0)
problem =op(z,[mass1,mass2,mass3,x_non_negative])
problem.solve(solver='glpk')
problem.status
print ("Значення цільової функції")
print(abs(problem.objective.value()[0]))
print ("Значення змінних")
print(x.value)
stop = time.time()
print ("Час витрачений на розв'язання задачі")
print(stop - start)
```

Отримаємо наступний розв’язок:

Максимальний прибуток: 76$

При цьому буде виготовлено:

5 літаків

2 вертольоти

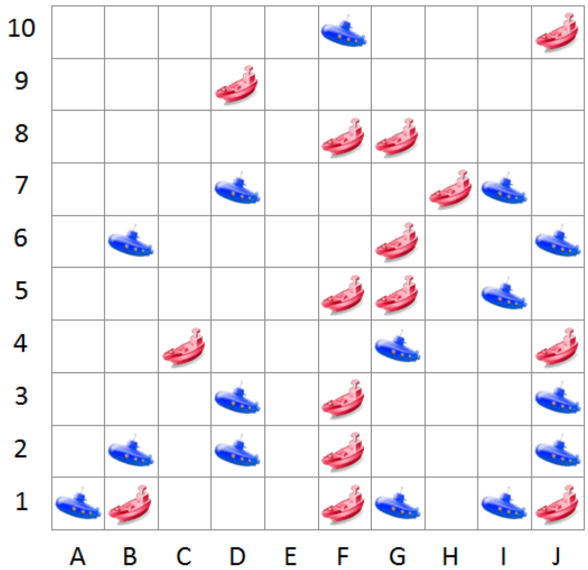
5 автомобілей

На залишку 2 сині деталі, 1 – зелена і 3 червоні.

Задача №9. Морський бій.

Військово-морська битва - це складне завдання оскільки як дружні, так і ворожі кораблі мають певні переваги та недоліки. Важливим є вирішення питання про те, хто має напасти, яким буде критичне рішення, що може визначити результат бою.

На рисунку 2.20 показана карта з 15 блакитних, привітних підводних човнів та 15 червоних, ворожих лінкорів. Ваша мета – перемістити кожен підводний човен так, щоб він займав ту саму клітинку, що і ворожий лінкор. Коли підводний човен займає ту саму клітину, що і червоний корабель, то лінкор знищується. Кожен підводний човен може знищити лише один броненосець. Бойові кораблі не можуть рухатися.



Використовуйте теорему Піфагора для обчислення відстані між клітинами. Наприклад, відстань між клітинами A1 та B3 становить 2,236 км.

Запитання: Яку мінімальну загальну відстань необхідно пройти підводним човнам, щоб знищити всі лінійні кораблі [1]?

Побудова моделі задачі

Для розв'язання поставленої задачі нам необхідно скласти модель. Обчислимо коефіцієнти α_{ij}, де $i=\overline{1,15}$, $j=\overline{1,15}$, що будуть рівними відстані між *i-тим* підводним Рисунок 2. 20. човном та *j-тим* ворожим лінкором.

Введемо змінні x_{ij}, $i=\overline{1,15}$, $j=\overline{1,15}$, які набувають одного з двох значень $\{0,1\}$. $x_{ij}=1$, якщо α_{ij} – мінімальна відстань між *i-тим* підводним човном та *j-тим* ворожим лінкором, $x_{ij}=0$ – в іншому випадку.

$$F=\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\alpha_{ij}x_{ij}\to min$$

При цьому буде справедливою наступна система обмежень:

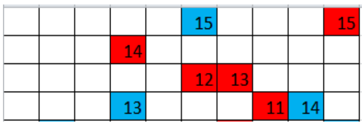
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{115}=1, \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{215}=1, \\ \ldots, \\ x_{151}+x_{152}+\cdots+x_{1515}=1, \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{151}=1, \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{152}=1, \\ \ldots \\ x_{115}+x_{215}+\cdots+x_{155}=1. \end{cases}$$

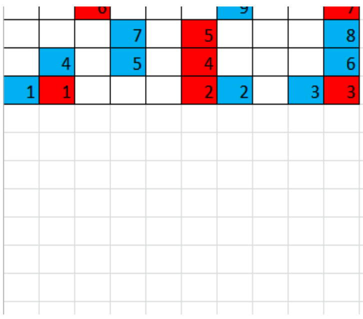
Матриця відстаней:

Учням доцільно запропонувати такі задачі для самостійного розв’язання:

Задача №10. Самостійне водіння автомобілів.

Автомобільні машини, що керують автотранспортом, - це машини, які можуть керувати собою без людини за кермом. Ця технологія повинна бути





	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	5	9	5,4	5,8	3,8	10,6	7	8	8,4	9,8	10	10,4	10,2	11,4
2	6	1	3	1,4	2,4	5,2	4,2	4,4	4	5	6,4	7,4	7	9,2	10,2
5	2,4	2,4	6,4	2	2,4	2,4	6,8	3,8	4,2	5,2	6,6	6,8	7,2	7	10,4
6	9,4	4,4	1	4	4,4	7,8	2	5,2	4,2	5,2	5,8	7,6	7,2	9,4	8
7	2,8	2,8	5,8	2,4	1	1,4	7,4	2,8	3,8	4,2	5,6	5,8	6,2	6	9,4
8	8,8	4,8	2	4,4	4	7,4	1	4,8	3,8	4,2	4,8	6,6	6,2	8,4	7
9	6,2	3,4	4,2	2,4	1,4	4	3	1,4	1	2	2,4	3,4	4	6,2	6,2
10	8,6	5,2	4,4	4,2	3,8	6,4	1,4	3	2	2,4	2,4	4,2	3,8	6,6	5,4
11	5	6,6	10	5,6	5,2	2,4	8,8	4,4	5,4	5	6,4	4,8	5,8	3,8	9,6
12	10	6,6	5	5,6	5,2	7,8	2	4,4	3,4	3	2,4	4,8	3,8	7,2	4
13	6,8	6,8	8,4	5,8	4,8	3,4	7,2	2,8	3,8	3,4	4	2,4	3,4	2	7,2
14	9,4	7,2	7,4	6,2	5,2	7,2	3,4	3,8	2,8	2,4	1	3,4	2,4	5,8	3,4
15	10,6	9	11,6	8	7	7,2	7,6	5	5,4	4,4	3,8	2	2,4	2,4	4

Рисунок 2. 21.

доступна в не надто віддаленому майбутньому. Потрібно розробити нові алгоритми, які допоможуть маршрутизувати ці машини для того, щоб ефективно перевозити своїх пасажирів до бажаного місця призначення.

На рисунку 2.21 показано 10 людей, які потребують перевезення. Їх поточне місце розташування (точка збору) позначається значком людини, а їхнє бажане місце призначення (місце розташування крапель) позначається піктограмою будівлі. Фіолетова стрілка вказує шлях від місця підбору до місця випадання. Ваше завдання - замовити пасажирів таким чином, щоб їх забрали в порядку, який мінімізує загальну відстань, яку проїхав автомобіль, що самостійно керує автомобілем.

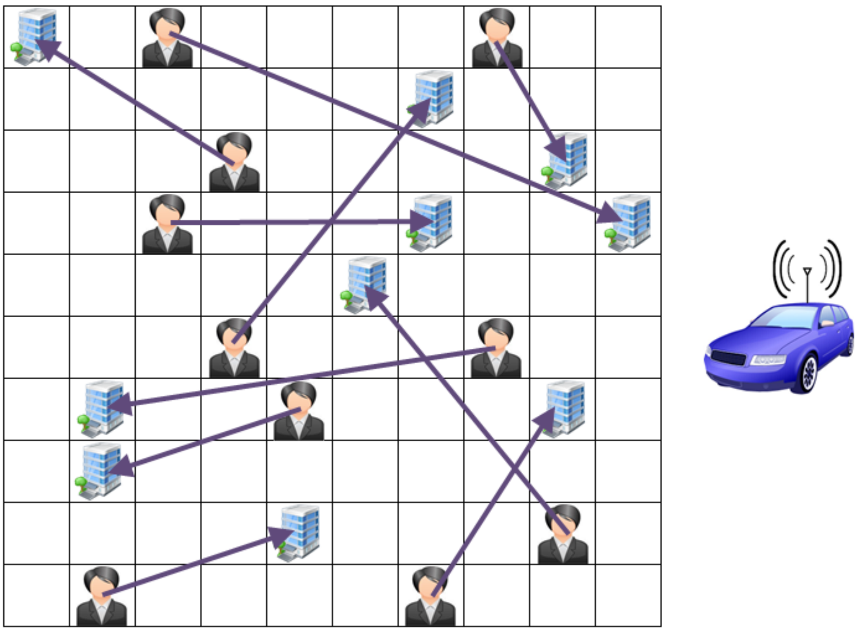


Рис. 2. 21. Рисунок до задачі 10

Автомобіль може стартувати в будь-якому пункті збору. Ви можете одночасно перевозити одну людину. Машині не потрібно повертатися до своєї початкової точки після того, як остання людина висаджена. Для користування доступний лише один автомобіль на самому водінні. Використовуйте теорему Піфагора для обчислення відстані між клітинами. Наприклад, відстань між людиною, що знаходиться найближчим до нижнього лівого кута, та її точкою випадання - 3,162 км.

Запитання: Яка мінімальна відстань, яку повинен проїхати автомобіль, щоб перевезти всіх пасажирів від пунктів підйому до пунктів перекидання?

Задача № 11. Колонізація нової планети

Колонізація нової планети, де умови непередбачувані і суворі, ніколи не буває простою. Першочерговою проблемою при виборі місця висадки для першої колонії є близькість до природних ресурсів. Доступ до цих цінних ресурсів визначає, процвітатиме чи не загине нова колонія.

На рисунку 2.22 представлені вигляд спереду та ззаду нещодавно відкритої планети. Планета була розділена на 20 областей, кожна з яких є потенційним місцем посадки для створення нової колонії. Деякі райони містять цінні ресурси (представлені кольоровими піктограмами), необхідні для виживання нової колонії. Їжа представлена зеленим колосом, кисень – червоним О2, вода - синьою краплею, а енергія - помаранчевою блискавкою.

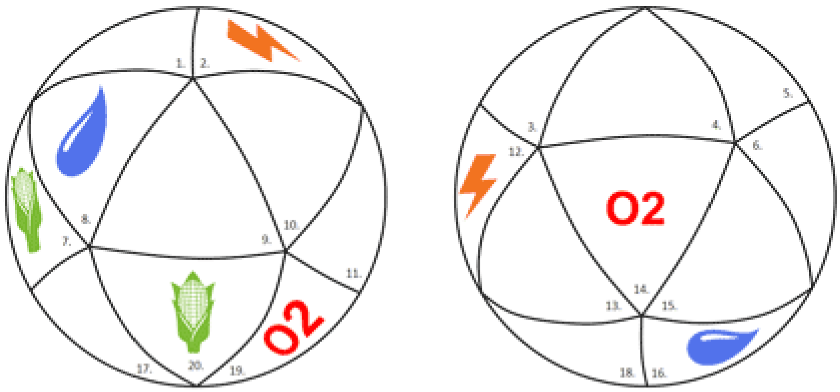


Рис. 2.22. Рисунок до задачі 11

Вибираючи місце посадки, найкраще мінімізувати відстань між цим майданчиком та чотирма необхідними ресурсами. Відстань обчислюється за кількістю одиниць, необхідних для потрапляння до ресурсу. Наприклад, якби місцем посадки було обрано область 9, загальна відстань подорожі, необхідна для досягнення всіх чотирьох ресурсів, становила б 6 одиниць (2 для енергії, 1 для їжі, 1 для води та 2 для кисню).

Питання: Яка з 20 областей є найкращим місцем посадки, щоб мінімізувати загальну відстань, яку вам доведеться проїхати до всіх чотирьох ресурсів?

Висновки до розділу 2

Сучасний світ вже ніяк не може обійтись без інформаційного простору, тому для вчителів є надважливим оволодівання інформаційно-комунікаційними технологіями. Одним із способів , які ефективно формують математичну та інформаційно-цифрову є використання систем комп’ютерної математики та використання хмарних технологій. У розробці нашого факультативу ми використовуємо хмарне середовище CoCalc.

У другому розділі кваліфікаційної роботи були визначені переваги використання хмарного середовища CoCalc. Також була описана та розроблена програма інтегрованого математично-комп’ютерного факультатива для учнів 10-11 класів: Задачі оптимізації з застосуванням CoCalc.

У роботі, ми не обмежились простими задачами, які можна розв'язувати обчислениям вручну, проте, для формування в учнів вмінь не лише побудови математичних моделей, а й розв’язування самих задач власноруч ми розглянули найпростіші випадки задач, які можна розв’язати власноруч.

ВИСНОВКИ

Під час написання кваліфікаційної роботи ми виконали теоретичний аналіз навчально-методичної літератури з теми дослідження, внаслідок якого було розглянуті поняття «профільна школа», «факультатив», «компетентність» та її основні складові, було проаналізовано законодавчу базу та дослідження Т. Л. Архіпової, В. Ю. Бикова, Д. Бланк (D. Blank), Т. В. Зайцевої, У. П. Когут, І. В. Лов'янової, Ю. Г. Лотюк, В. Г. Моторіної, М. В. Попель, К. І. Словак, С. В. Шокалюк та ін., присвячені присвячені профільному навчанню в школі та застосуванню хмарних сервісів у процесі навчання математики в профільній школі, розкрито сутність компетентнісного підходу в сучасній освіті та, зокрема, у навчанні математики, виокремлені поняття «математична компетентність» і «інформаційно-цифрова», розглянуто її складові.

Також було проаналізовано навчальну програму з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні. Аналіз діючих програм з факультативних курсів математики показав, що кожна з них безперечно має багато переваг, але і недоліки також є. Тому вони потребують удосконалення. Нами виділено основний недолік: не передбачено розв'язання задач засобами ІКТ. Що не дозволяє учням розглянути більш складні задачі, в яких використовуються дані, що не можуть бути опрацьовані власноруч оскільки потребують великих обчислень.

Результати дослідження надали підстави зробити такі висновки: У результаті аналізу стану проблеми запровадження у навчальний процес профільного навчання хмарних сервісів на основі вітчизняного і зарубіжного досвіду виявлено, що нині вже існують хмарні версії різних систем комп'ютерної математики, що породжує тенденції розвитку програмного забезпечення математичного призначення, що полягають у переході до використання хмаро орієнтованих платформ його постачання, віртуалізації сервісів, а також використання їх як послуги.

Виокремлені напрями використання сервісу CoCalc у процесі навчання математичних дисциплін, зокрема, підтримування індивідуальних та групових форм організації навчальної діяльності; забезпечення наочності; підвищення часової та просторової мобільності та ін.;

Обґрунтовано переваги використання хмарних сервісів: економія ресурсів, мобільність доступу, еластичність на факультативних заняттях з математики.

Таким чином, мета кваліфікаційної роботи досягнута, а завдання виконані у повній мірі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. The PuzzleOR (Subs vs. Battleships). – Режим доступу: http://puzzlor.com/ (дата звернення 30.09.2019) – Назва з екрана.
2. The PuzzleOR (Toy Builder). – Режим доступу: http://puzzlor.com/ (дата звернення 30.09.2019) – Назва з екрана.
3. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / Иван Людгович Акулич. – Москва : Высш. школа, 1986. – 319 с.
4. Ашманов С. А. Линейное программирование : учебное пособие для студентов обучающихся по специальности «Прикладная математика» / Станислав Александрович Ашманов. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 340 с.
5. Балашевич В. А. Основы математического программирования : учеб. пособ. для инж. экон. и экон. спец. / В. А. Балашевич. – Минск : Высш. шк., 1985. – 173с.
6. Банди Б. Основы линейного программирования / Брайан Банди ; пер. с англ. О. В. Шихеевой и др. – Москва : Радио и связь, 1989. – 176 с.
7. Бартіш М. Я. Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник / М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 168 с.
8. Бодров В.І. Математичні методи прийняття рішень : Навчальний посібник / В. І. Бодров, Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартем'янов. – Тамбов : Тамбо. держ. тех. ун-ту , 2004. – 124 с.
9. Бугайов О. І., Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі : методичні рекомендації / О. І. Бугайов, Д. І. Дейкун – Київ : Освіта., 1992. – 31 с.
10. Бугір М. К. Посібник по розв'язуванню задач з математичного програмування: навчальний посібник для студ. екон. спец. вищ. навч.

закладів / М. К. Бугір, Ф. П. Якімов ; Тернопільська академія народного господарства. – Тернопіль : [б.в.], 1996. – 208 с.

11. Вивальнюк Л. М. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл. / Л. М. Вивальнюк, О. І. Соломенко, Ю. В. Костарчук та ін. – Київ : Рад. шк., 1991. – 175 с.
12. Гасс С. Линейное программирование (Методы и программирование) / С. Гасс. – пер. с англ. Е. Г. Гольштейна, М. И. Сушкевича ; под ред. Д. Б. Юдина. – Москва : Физматгиз, 1961. – 303 с. – (Физико-математическая библиотека инженера).
13. Гельман В. Я. Рішення математичних задач засобами Excel: Практикум. / В.Я. Гельман. – СПб : Питер, 2003. – 237 с.
14. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : навч. посіб. для студ. економічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. Д. Гетманцев. – Київ : Либідь, 2001. – 256 с.
15. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / Микола Степанович Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – № 1. – С. 35–39.
16. Гончаренко Я. В. Математичне програмування / Яніна Володимирівна Гончаренко. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 184 с.
17. Демиденко М. А. Математичне програмування: Навч. посібник / Михайло Андрійович Демиденко. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 110 с.
18. Душкевич О. О. Використання СКМ Sage у професійній підготовці майбутніх вчителів математиків / Олена Душкевич // Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. – № 5. – Частина 1. – С. 24-28.

19.Жильцов О. Б. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. Для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов, В. Р. Кулян, О. О. Юнькова; За ред. О. О. Юнькової. – Київ : МАУП, 2006. – 184 с.

20.Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник / О.Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – 7-ме вид., перероб. і допов. – Київ: «Центр навчальної літератури», 2006. – 688 с.

21.Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частних). Ч ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О.В. Єргіна. – Харків : Ранок, 2011. – 384 с.

22.Карманов В. Г. Математическое программирование : учеб. пособ. для вузов по спец. "Прикладная математика" / Владимир Георгиевич Карманов – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1986. – 288с.

23.Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – Київ : Педагогічна преса. – 2003. – № 24, грудень. – 32 с.

24.Кузнецов А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович , Н. И. Холод. – Минск: Высш. школа, 1994. – 286 с.

25.Кушнір В. М. Профільне навчання в історії розвитку вітчизняної школи (друга половина ХІХ-ХХ ст.) : монографія / Валентина Миколаївна Кушнір. – Умань: Видавець «Сочінський», 2016. – 418 с.

26. Лов’янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі : теоретичний аспект : монографія / Ірина Василівна Лов’янова. – Черкаси : Чабаненко Ю. А., 2014. – 368 с.

27.Логвіненко Н. Факультативи як форма організації диференціації та індивідуалізації навчання старшокласників [Електронний ресурс] / Наталя Логвіненко // Українська література в загальноосвітній школі. -

2011. - № 9. - С. 43-48. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Ulvzsh_2011_9_13

28. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач / Константин Никитович Лунгу. – Москва : Физматлит, 2005. – 128 с.

29. Моторіна В.Г. Професійна компетентність учителя математики профільної школи : навчальний посібник для студентів природничо-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ / Валентина Григорівна Моторіна. – Харків : ХНПУ, 2014. – 267 с.

30. Нова українська школа. [Електронний ресурс] : Концептуальні засади реформування середньої школи : ухвалено рішенням колегії МОН України 27.10.2016 р. // Урядовий портал : єдиний веб-портал органів виконавчої влади України. – Текст. дані. – Київ, 2016. – Режим доступу: https://www.kmu.gov.ua/storage/app/media/reforms/ukrainska-shkola-compressed.pdf. – Назва з екрана.

31. Попель М. В. Організація навчання математичних дисциплін у SageMathCloud : навчальний посібник / М. В. Попель // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2015. – Том XIII. – Випуск 1 (35) : спецвипуск «Навчальний посібник у журналі». – 111 с.

32. Попов Ю. Д. Линейное и нелинейное программирование: Учеб. Пособие / Юрий Дмитриевич Попов. – Москва : Изд-во КГУ, 1988. – 120с.

33. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі : Наказ Міністерства освіти і науки України від 21.10.2013 р., № 1456 [Електронний ресурс] / МОН України. – Режим доступу : https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v1456729-13. – Назва з екрану.

34. Про освіту : Закон України від 17.09.2020 р. № 910-IX [Електронний ресурс] / Відомості Верховної Ради України. – Режим доступу : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19. – Назва з екрану.

35. Самодрин А. П. Вступ до профільного навчання : навч. посібник / Анатолій Петрович Самодрин. – 2-е вид., випр. – Кременчук : ПП Щербатих, 2006. – 188 с.
36. Сафонова І. Я. Компетентнісний підхід до навчання математики старшокласників [Електориний ресурс] / І. Я. Сафонова // Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія. – 2014. – № 21. – С.53–57 – Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Potip_2014_21_12.
37. Селевко Г. К. Компетентности и их классификация / Г. К. Селевко // Народное образование. – 2004. – № 4. – С. 138–143.
38. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.
39. Толок А. В. Применение аппарата R-функций для решения оптимизационных задач математического программирования в системе ранок / А.В. Толчок, А. М. Мыльцев, В.Л. Корогод // Вісник Запорізького національного університету: Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2008. – № 1. – С. 180-187.
40. Цифрова компетентність сучасного вчителя нової української школи: зб. тез доповідей учасників всеукр.наук.-практ.семінару / за заг.ред., О.В.Овчарук. – Київ : Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України, 2019. – 108 с.
41. Шокалюк С. В. Основи роботи в Sage / С. В. Шокалюк ; за ред. академіка АПН України М. І. Жалдака ; передм. С. О. Семеріков ; Міністерство освіти і науки України, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – 64 с.
42. Якиманская И. С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе / Ираида Сергеевна Якиманская. – Москва: Сентябрь, 1996. – 96 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ: ГРАФІЧНИЙ МЕТОД

Методичні рекомендації

Графічний метод розв’язування загальної задачі лінійного програмування використовується для двомірних задач або задач, для яких виконується умова $n - m \leq 2$, де n – кількість змінних, m – кількість обмежень математичної моделі.

Розв’язування задачі виконується в два етапи:

- будування області допустимих розв’язків;
- знаходження оптимальних точок.

Послідовність розв’язування задачі графічним методом показана на рис.2.1, а зміст кожного блоку такий:

Бл.1. Формування початкової математичної моделі задачі.

Бл.2. Кожне обмеження-нерівність записується у вигляді строгого рівняння і по двом довільним точкам будується пряма, яка є межею допустимої та недопустимої півплощин.

Бл.3. По обидва боки кожної прямої вибираються довільні точки і їх координати підставляються в задане обмеження. Точка, координати якої не порушують знак нерівності, находиться в допустимій півплощині.

Бл.4. Перетин збудованих півплощин усіх обмежень моделі є загальною областю допустимих розв’язків.

Бл.5. Пряма градієнту цільової функції проходить через початок координат і прямує через точку, координати якої є коефіцієнти при відповідних змінних цільової функції. Перпендикулярно збудованому градієнту розміщається пряма цільової функції.

Бл.6. Аналіз напрямку цільової функції.

Бл.7. Якщо $F \to min$, то екстремальна точка знаходиться в найближчій точці дотику прямої цільової функції з областю допустимих розв'язків.

Бл.8. Якщо $F \to max$, то екстремальна точка відповідає найдальшій точці дотику прямої цільової функції з областю допустимих розв'язків.

Бл.9. Складання системи рівнянь, які утворюють екстремальну точку.

Бл.10. Розв'язування збудованої системи рівнянь і знаходження x_1 та x_2.

Бл.11. Значення x_1 та x_2 підставляються у вигляд цільової функції і знаходиться її екстремальна величина.

Бл.12. Розв'язок задачі.

Особливі випадки.

1. Відкрита область допустимих розв'язків з одного боку: існує тільки одна точка оптимуму або зовсім не існує розв'язку.

2. Область допустимих розв'язків зводиться до однієї точки: точка мінімуму та точка максимуму збігаються.

3. Альтернативний оптимум: точка дотику прямої цільової функції одночасно по усій стороні області допустимих розв'язків; у цьому випадку має місце нескінчена множина оптимальних розв'язків, тобто по усій стороні дотику області допустимих розв'язків.

Кожний оптимальний варіант знаходиться за допомогою відрізка прямої

$$x_j^{(t)} = t \cdot x_j^{(A)} + (1-t)x_j^{(B)},$$

$$0 \le t \le 1,$$

де A та B – кінцеві точки відрізка дотику області допустимих розв'язків.

Знайти точки мінімуму та максимуму цільової функції в наступних задачах лінійного програмування.

Як треба змінити математичну модель, щоб задача мала альтернативний оптимум?

Практичні заняття

2.2.1.

$$F = 5x_1 - x_2 \to ext$$
$$-x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$4x_1 + x_2 \ge 0$$
$$4 \le x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0$$

2.2.2.

$$F = 8x_1 + 3x_2 \to ext$$
$$6x_1 + 5x_2 \ge 32$$
$$2{,}5x_1 + 3x_2 \le 27$$
$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 7$$

2.2.3.

$$F = 3x_1 + x_2 \to ext$$
$$-x_1 + x_2 \le 4$$
$$0 \le x_1 \le 6$$
$$0 \le x_2 \le 7$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 + 0{,}8x_2 \le 8$$

2.2.4.

$$F = 3x_1 + 5x_2 \to ext$$
$$2x_1 + 6x_2 \le 45$$
$$x_1 - x_2 \ge 0$$
$$3x_1 + 1{,}2x_2 \ge 9$$
$$0 \le x_1 \le 16$$
$$0 \le x_2 \le 4$$

2.2.5.

$$F = -x_1 + 5x_2 \to ext$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_2 \le 3$$
$$2x_1 - x_2 \ge 0$$
$$6x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 + 0{,}6x_2 \ge 3$$
$$x_{1_1} \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

2.2.6.

$$F = -2x_1 + 3x_2 \to ext$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 20$$
$$0 \le x_2 \le 10$$
$$-x_1 + 0{,}5x_2 \le 1$$
$$0 \le x_2 \le 8$$
$$-2x_1 + 3x_2 \ge 4$$

Індивідуальні завдання

2.3.1.

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to ext$$
$$-6x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_2 \geq 4$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$5x_1 - x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

2.3.2.

$$F = 1{,}6x_1 - 2x_2 \to ext$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$6x_1 + 5x_2 \geq 24$$
$$10x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$x_{1_1} \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

2.3.3.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to ext$$
$$-x_1 + x_2 \geq 0$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 48$$
$$0 \leq x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0$$

2.3.4.

$$F = 4x_1 + x_2 \to ext$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 40$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 24$$
$$-12x_1 + x_2 \leq 0$$
$$0 \leq x_1 \leq 6$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3.5.

$$F = 3x_1 + x_2 \to ext$$
$$-5x_1 + 8x_2 \geq 16$$
$$x_2 \geq 4{,}5$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_{1_1} \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3.6.

$$F = -x_1 + 3x_2 \to ext$$
$$2x_1 + 3{,}8x_2 \leq 16$$
$$8x_1 + 2{,}7x_2 \geq 16$$
$$0{,}5x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_{1_1} \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3.7.

$F = -x_1 + 3x_2 \to ext$
$5x_1 + 4x_2 \le 16$
$2x_1 - x_2 \le 2$
$6x_1 + x_2 \ge 6$
$3x_1 - 2x_2 \ge 0$
$x_{1_1} \ge 0$
$x_2 \ge 0$

2.3.8.

$F = -x_1 + 2x_2 \to ext$
$-2x_1 + x_2 \ge -4$
$3x_1 + 11x_2 \ge 33$
$9x_1 + 5x_2 \le 45$
$6x_1 + 7x_2 \le 42$
$x_{1_1} \ge 0$
$x_2 \ge 0$

2.3.9.

$F = 2x_1 + 5x_2 \to ext$
$x_1 + x_2 \ge 6$
$3x_1 - 3{,}6x_2 \ge 0$
$2{,}5 \le x_2 \le 6$
$x_1 \ge 0$

2.3.10.

$F = -2{,}3x_1 + x_2 \to ext$
$-1{,}5x_1 + x_2 \ge 3$
$x_2 \ge 3$
$x_1 \le 3$
$1{,}5x_1 + x_2 \ge 3$
$x_1 \ge 0$

2.3.11.

$F = 3x_1 - x_2 \to ext$
$2x_1 - x_2 \le 2$
$x_1 - x_2 \ge 0$
$0 \le x_1 \le 2$
$x_2 \ge 0$

2.3.12.

$F = 3x_1 - x_2 \to ext$
$5x_1 + 15x_2 \ge 30$
$15x_1 + 11x_2 \ge 60$
$x_1 - x_2 \ge 0$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1 \ge 0$

2.3.13.

$F = -2x_1 + x_2 \to ext$
$x_1 + x_2 \ge 2$
$x_1 + 2{,}6x_2 \le 8$
$4x_1 - x_2 \ge 0$
$x_1 - x_2 \ge 0$
$x_1 \ge 0$

2.3.14.

$F = -2x_1 + x_2 \to ext$
$3x_1 - x_2 \ge 2$
$0 \le x_2 \le 4$
$5 \le x_1 + x_2 \le 7$
$x_1 \ge 0$

2.3.15.

$F = 2{,}5x_1 + 4{,}5x_2 \to ext$
$24x_1 + 3x_2 \geq 24$
$24x_1 + 4x_2 \geq 12$
$x_1 \geq 3$
$x_1 - 4x_2 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

2.3.16.

$F = 3{,}5x_1 + 2{,}4x_2 \to ext$
$30x_1 - 24x_2 \geq 0$
$-3x_1 + 10x_2 \leq 30$
$x_1 + 1{,}7x_2 \leq 12$
$5x_1 - 1{,}6x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

2.3.17.

$F = 5x_1 + x_2 \to ext$
$x_1 - x_2 \geq 0$
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$

2.3.18.

$F = -x_1 + 2x_2 \to ext$
$3x_1 + 8x_2 \leq 24$
$4{,}5x_1 + 3x_2 \geq 9$
$-3x_1 + 4{,}5x_2 \geq 9$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$

2.3.19.

$F = 5x_1 + x_2 \to ext$
$8x_1 + 3{,}5x_2 \leq 32$
$3x_1 - x_2 \leq 0$
$0 \leq x_2 \leq 5$
$3x_1 + 3{,}5x_2 \geq 12$
$x_1 \geq 0$

2.3.20.

$F = x_1 - 3x_2 \to ext$
$x_1 + 4x_2 \geq 20$
$x_1 \geq 3$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$-x_1 + 2x_2 \geq 2$
$x_2 \geq 0$

2.3.21.

$F = 4x_1 + x_2 \to ext$
$x_1 + x_2 \geq 6$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$-2x_1 + 6x_2 \leq 12$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

2.3.22.

$F = -x_1 - 2x_2 \to ext$
$3x_1 + 4x_2 \geq 12$
$-x_1 + x_2 \leq 3$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$3x_1 - 4x_2 \geq 0$
$1{,}5 \leq x_2 \leq 4{,}5$
$x_1 \geq 0$

2.3.23.

$$F = -x_1 - 3x_2 \to ext$$
$$2{,}5x_1 - 3x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 1{,}5$$
$$0 \leq x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0$$

2.3.24.

$$F = 2x_1 + x_2 \to ext$$
$$2{,}4x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$3x_1 + 6{,}2x_2 \geq 12$$
$$4x_1 - x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3.25.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to ext$$
$$3{,}2x_1 - 5{,}5x_2 \geq 15$$
$$3x_1 - 12x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3.26.

$$F = x_1 + 3x_2 \to ext$$
$$x_1 - x_2 \geq 2$$
$$2 \leq x_1 + x_2 \leq 5$$
$$0 \leq x_1 \leq 2$$
$$x_2 \geq 0$$

Додаток Б

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ: СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Алгоритм розв’язування математичної моделі симплексним методом показано на рис.3.1, а зміст кожного блоку наступний:

Бл.1. Складання початкової математичної моделі за умовами задачі.

Бл.2. Перетворення початкової математичної моделі до стандартної форми за допомогою додаткових та штучних змінних.

Бл.3. Формування першого базисного розв’язку шляхом складання першої симплексної таблиці.

Бл.4. Знаходження оцінок γ_j, за допомогою яких можна проводити аналіз одержаного розв’язку на оптимальність.

Бл.5. Оптимальним вважається розв’язок, якщо при

$$1) \quad F \to \min \qquad \forall \gamma_j \le 0;$$

$$2) \quad F \to \max \qquad \forall \gamma_j \ge 0.$$

Бл.6. При виконанні умови оптимальності з одержаної симплексної таблиці добувається оптимальний розв’язок.

Бл. 7-10. Вибір ключового стовпця j_k.

Бл.11-12. Вибір ключового рядка i_k.

Бл.13. Вибір дозволяючого елемента a_{ikjk}.

Бл.14. Розрахунки елементів наступної симплексної таблиці.

Бл.15. Складання нової сукупності базисних змінних з наступним аналізом одержаного варіанту на оптимальність в бл.5.

Особливі випадки

1. Якщо вільна зміна має нульову оцінку γ_j, то задача має альтернативний оптимум. Щоб знайти інші оптимальні розв’язки необхідно побудувати другий базисний оптимальний розв’язок, прийнявши за j_k стовпець вільної змінної з γ_j=0, а потім за допомогою відрізка прямої

$$x^{(t)} = t \cdot x_j^{(1)} + (1-t)x_j^{(2)},$$

$$0 \le t \le 1$$

знайти інші оптимальні розв’язки.

2. Якщо в ключовому стовпці j_k усі $a_{ijk} \le 0$, то треба вибрати інший ключовий стовпець, у якому γ_j порушує умови оптимальності. У випадку, коли для усіх вибраних стовпців j_k елементи a_{ijk} <0, то задача не має розв’язку.

Розв’язати задану математичну модель лінійного програмування симплексним методом, використовуючи додаткові та штучні змінні. Провести аналіз одержаного розв’язку.

Практичні заняття

3.2.1.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$-2x_1 + x_2 \le 4$$
$$6x_1 + 5x_2 \le 40$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 0$$

3.2.2.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$-x_1 + x_2 \le 5$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$0 \le x_1 \le 2$$
$$x_2 \ge 0$$

3.2.3.

$$F = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$-x_1 + x_2 + 4x_3 \le 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4$$
$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 2$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.2.4.

$$F = x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 = 12$$
$$2x_1 + 8x_2 \ge 15$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.2.5.

$F = x_1 + 3x_2 \to \max$
$x_1 - 3x_2 = 0$
$4x_1 + x_2 \le 12$
$x_1 + 5x_2 \le 8$
$3x_1 + 4x_2 \le 10$
$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,2})$

3.2.6.

$F = 3x_1 - x_2 \to \max$
$-x_1 + 5x_2 \ge 5$
$x_1 + x_2 \le 14$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$0 \le x_1 \le 8$
$0 \le x_2 \le 5$

3.3. Індивідуальні завдання

3.3.1.

$F = 7x_1 + x_2 \to \min$
$-2x_1 + 3x_2 \le 6$
$0 \le x_2 \le 7$
$x_1 + x_2 = 12$
$x_1 \ge 10$

3.3.2.

$F = x_1 + 4x_2 \to \max$
$10x_1 + 3x_2 \ge 30$
$-x_1 + x_2 \ge -3$
$0 \le x_2 \le 5$
$0 \le x_1 \le 8$
$x_1 \ge 0$

3.3.3.

$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$
$-5x_1 + 3x_2 \le 15$
$3x_1 + 4x_2 \ge 12$
$3x_1 + 8x_2 \le 72$
$0 \le x_1 \le 9$
$x_2 \ge 0$

3.3.4.

$F = x_1 - 4x_2 \to \min$
$2x_1 - x_2 \ge -2$
$4x_1 + 2x_2 \ge 2$
$x_1 + x_2 \le 8$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1 \ge 0$

3.3.5.

$F = -x_1 - x_2 \to \min$
$x_1 + 7x_2 \ge 7$
$6x_1 + 5x_2 \le 30$
$-x_1 + 2x_2 \ge -2$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1 \ge 0$

3.3.6.

$F = -7x_1 - x_2 \to \max$
$3x_1 + 2x_2 \ge 6$
$x_1 - 2x_2 \ge -2$
$x_1 - x_2 \le 1$
$0 \le x_1 \le 4$
$x_2 \ge 0$

3.3.7.

$$F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$x_2 + 3x_3 \geq 8$$
$$x_1 - x_2 \leq 0$$
$$-x_1 + 3x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.8.

$$F = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$
$$-3x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$$
$$x_2 - x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.9.

$$F = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$-4x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0$$
$$5x_1 - x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.10.

$$F = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = -4$$
$$3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -18$$
$$-x_1 + x_3 \leq 5$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.11.

$$F = -3x_1 + x_2 - 5x_3 \to \min$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 1$$
$$-8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 0$$
$$-7x_1 + x_3 \geq -10$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.12.

$$F = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \leq 3$$
$$-x_1 + x_3 \leq -2$$
$$x_j \geq 0 \qquad \left(j = \overline{1,3}\right)$$

3.3.13.

$$F = 4x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 15$$
$$-3x_1 + 4x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.14.

$$F = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$
$$x_1 - 5x_2 - x_3 \leq 2{,}5$$
$$3x_1 - x_2 \geq 4$$
$$2x_1 - x_3 \geq 4$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.15.

$$F = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$-7x_1 + x_2 + x_3 \le -3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 0$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.16.

$$F = 3x_1 - x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.3.17.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$-2x_1 + x_2 \le 4$$
$$6x_1 + 5x_2 \le 40$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.3.18.

$$F = -3x_1 - 4x_2 \to \min$$
$$7x_1 + 5x_2 \ge 35$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 12$$
$$0 \le x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0$$

3.3.19.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$-4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$6x_1 + 7x_2 \le 42$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.3.20.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$3x_1 + 8x_2 \ge 12$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 - x_2 \ge 3$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.3.21.

$$F = -x_1 - 4x_2 \to \min$$
$$8x_1 + 3x_2 \ge 24$$
$$5x_1 + 8x_2 \le 40$$
$$x_2 \le 2$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 10$$
$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

3.3.22.

$$F = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 32$$
$$11x_1 + 15x_2 + 20x_3 \le 80$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_3 \ge 1{,}5$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,3})$$

3.3.23.

$$F = 25x_1 + 30x_2 \to \min$$
$$35x_1 + 4x_2 \geq 60$$
$$15x_1 + 75x_2 \leq 75$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

3.3.24.

$$F = 1{,}8x_1 + x_2 \to \min$$
$$5x_1 + x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$1{,}5x_1 + 4x_2 \leq 32$$
$$-x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

3.3.25.

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1{,}3})$$

3.3.26.

$$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$
$$-4x_1 - x_2 + x_3 \leq -3$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1{,}3})$$

3.3.27.

$$F = 3x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$$
$$-3x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 0$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1{,}3})$$

3.3.28.

$$F = -3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 9$$
$$4x_1 - 2x_3 = -15$$
$$x_2 - x_3 \leq 0$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1{,}3})$$