**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**Фізико-математичний факультет**
**Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»
В. о. завідувача кафедри
_________ Д. Є. Бобилєв
«___» ______________ 2019 р.

Реєстраційний № _______
«___» ______________ 2019 р.

# РОЗВИТОК АЛГЕБРАЇЧНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ У СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Кваліфікаційна робота студента
групи МІм-14
ступінь вищої освіти магістр
фізико-математичного факультету
спеціальності 014.04. Середня освіта
(Математика)
Васильєва Костянтина Івановича

Керівник: канд. пед. наук, доцент
Черних Лариса Олександрівна

Оцінка:
Національна шкала _________________
Шкала ECTS ___Кількість балів ______

Голова ЕК____________ ________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Члени ЕК ____________ ________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

____________ ________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

____________ ________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

____________ ________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кривий Ріг – 2019

# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність дослідження.** Сучасний шкільний курс математики складається з десяти змістових ліній, однією з яких є лінія рівнянь і нерівностей.

Основними завданнями курсу алгебри в середній школі є формування умінь виконання тотожних перетворень цілих і дробових виразів, розв’язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для свідомого їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язування на цій основі прикладних задач [53, с. 12].

Вивчення раціональних рівнянь та їх систем в школі відбувається поступово і пов’язане з такими видами діяльності:

– розв’язування раціональних рівнянь;

– розв’язування систем раціональних рівнянь;

– розв’язування задач на складання рівнянь та систем раціональних рівнянь.

Аналіз літератури, що присвячена методиці вивчення раціональних рівнянь та їх систем в основній школі, показав, що на сьогоднішній день є ціла низка досліджень, що розкривають різні її аспекти. Проте, незважаючи на значний позитивний досвід у розробці методики вивчення цієї теми, як показує практика: алгоритми розв’язування основних рівнянь засвоєні формально; учні не в повній мірі володіють основними знаннями та уміннями щодо математичного моделювання текстових задач, розв’язування яких зводиться до розв’язування раціонального рівняння чи їх системи.

Змістовна лінія рівнянь традиційно спрямована на нарощування арсеналу прийомів, які використовуються учнями для розв’язування задач. Природно, що в класах з поглибленим вивченням математики зростає як кількість методів і прийомів, так і їх складність. Проте важливо не тільки сформувати конкретні навички розв’язування, але й продовжити формування математичної культури учнів, зокрема алгебраїчної її складової.

Викладене вище обумовлює актуальність вибору теми роботи **«Розвиток алгебраїчної культури учнів при вивченні раціональних рівнянь та їх систем у середній школі»**.

**Мета дослідження:** розробити методику розвитку компонентів алгебраїчної культури учнів середньої школи при вивченні раціональних рівнянь та їх систем.

Відповідно до мети дослідження сформулюємо наступні **завдання**:

1) вивчити різні трактовки понять «математична культура учня» і «алгебраїчна культура учня», представлені в психолого-педагогічній та методичній літературі;

2) провести логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри з теми «Раціональні рівняння та їх системи»;

3) розробити методичні рекомендації щодо формування алгебраїчної культури учнів при вивченні раціональних рівнянь та їх систем;

4) розробити методику навчання учнів розв’язуванню текстових задач, що зводяться до раціональних рівнянь та їх систем.

**Об’єкт дослідження:** процес навчання алгебри у середній школі.

**Предмет дослідження:** методичні особливості навчання учнів розв’язуванню основних типів раціональних рівнянь та їх систем.

**Методи дослідження**, застосовані для реалізації поставлених завдань:

– *теоретичні*: вивчення і аналіз навчальної і методичної літератури з теми, узагальнення;

– *емпіричні*: вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння.

**Практичне значення роботи** полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами-практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

**Апробації дослідження.** За матеріалами дослідження опубліковано 2 тез «Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Раціональні рівняння»» у збірнику матеріалів VIII Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти (ПМО-2019)» [12] (м. Черкаси) та «Методичні рекомендації щодо навчання учнів розв’язуванню текстових задач на основі математичного моделювання» у збірнику матеріалів науково-практичної конференції «Інноваційні наукові дослідження: світові тенденції та регіональний аспект» [13] (м. Запоріжжя).

**Структура роботи.** Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел, що містить 80 найменувань та 3 додатків.

У вступі підкреслена актуальність дослідження. У першому розділі розкрито теоретичні основи формування алгебраїчної культури учнів, математичного моделювання при вивченні раціональних рівнянь та їх систем. У другому розділі описана методика формування компонентів алгебраїчної культури при вивченні різних видів раціональних рівнянь та їх систем.

# РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

## 1.1. Алгебраїчна культура як частина математичної культури учня

Проблеми формування математичної культури школяра викликають певну зацікавленість у сучасних дослідників. Так, наприклад, уперше проблемою формування математичної культури школярів цікавилися Н. Віленкін [16] і І. Яглом [79] ще в 1957 році. Комплекс питань, які пов'язані з математичною культурою особистості останні роки все більш привертають до себе увагу філософів (В. Асмус [2], А. Родін [66]), математиків-методистів (В. Арнольд [1], Г. Дорофєєв [25; 24], З. Слєпкань [68; 69]) та інших.

Математична культура – це не тільки система знань, умінь і навичок, вільне оперування ними в практичній діяльності, а й складна система, яка виникає як інтегративний результат взаємодії культур. Він відображає аспекти математичного розвитку:

– знання, самоосвіта, мовна культура;
– певний рівень сформованості математичного мислення;
– вміння грамотно пояснювати всі виконувані дії;
– наявність уявлень про поняття і операції, які специфічні для математики;
– можливості математики для сучасної науки і практики;
– розуміння внутрішніх зв'язків між різними розділами математики.

Спираючись на дослідження [40; 72; 73] до основних компонентів математичної культури слід віднести математичні знання та вміння, математичну самоосвіту, математичну мову, цілісний науковий світогляд, математичне мислення.

Математична культура – це не лише певна сукупність знань та навичок, вона є певним видом мислення [40, с. 24]. Терміном «математична культура» позначається специфіка взаємодії особи з математичними знаннями, вплив математики на внутрішній світ особистості.

Поняття математичної культури є багатогранним, воно трактується по-різному (С. Мациєвич, Є. Лодатко, О.Мельников та інші [40]).

Математична культура особистості – це інтегральна її характеристика, яка у всій повноті на даний момент часу фіксує здатність цієї особистості адекватно сприймати доступну її розумінню математичну складову наукової картини світу і вибудувати у відповідності з цим сприйняттям свою освітню, професійну, суспільну діяльність, творити морально-етичний та естетичний ідеали [73, с.152].

Як зазначає Є. Лодатко [40], математична культура суспільства являє собою складне соціальне утворення, яке формується під впливом математичних традицій суспільства. Тобто, від рівня розвитку математичної культури залежить ставлення суспільства до математичної діяльності, а також поширення математичних знань в сучасному суспільстві.

З різних підходів до культури найбільш важливими для математичної культури ми вважаємо герменевтичний, семіотичний й аксіологічний.

Аксіологічний (ціннісний) підхід проявляється у висловленні Ріккерта: «У всіх явищах культури ми завжди знайдемо втілення будь-якої визнаної людиною цінності, заради якої ці явища або створені, або ... виплекані людиною» [56, с. 70]. Від усвідомлення учнем цінності власних знань й умінь залежить, як він їх опановує, та чи стануть вони його надбанням.

Герменевтичний підхід (від грец. hermeneuticos – роз'яснюють, тлумачать) націлює на розуміння досліджуваних текстів (А. Брудний, Л. Веккер, В. Зінченко та ін.). Розуміння виступає невід'ємною умовою формування у школяра цілісного уявлення про математику, особистісно-ціннісного ставлення до знань, їх дієвості.

Семіотичний підхід включає в культуру тексти (Ю. Лотман), стиль їх вироблення та зберігання. У семіотиці розрізняють два типи культур: «культуру текстів» і «культуру граматик» (Ю. Лотман) залежно від того, що первинне – тексти чи правила їх створення [41]. «Культура текстів» – сума прецедентів, уживань. У ній правильно те, що існує. Основний принцип – звичай. «Культура граматик» – сукупність норм і правил. У ній існує те, що правильно. Основний принцип – закон. Рідна мова належить до «культури текстів», математична – до «культури граматик».

Математична культура, з точки зору семіотики, – це «культура граматик». Для того щоб стати надбанням учня, інформація повинна бути ним осмислена, зрозуміла (герменевтичний підхід). Для цього важливо, щоб учень розумів її цінність і значущість (аксіологічний підхід), засвоїв і правильно використовував мову математики, її знакові системи (семіотичний підхід).

Основними знаковими системами шкільної математичної мови є: природна мова (разом з науковими термінами), графічна мова (графічні схеми, креслення), символічна мова (логіко-математичні символи) [19, с. 12]. Виходячи з того, що математична мова та математичні тексти гранично формалізовані, оволодіння математичною культурою неможливе без спеціальної цілеспрямованої роботи з розуміння школярами досліджуваного матеріалу.

Під математичною культурою школярів також розуміють таку їх навчальну діяльність, яка спрямована на свідоме оволодіння математичними знаннями та вміннями, в тому числі загальнокультурного характеру; яка розвиває особистість (навчально-пізнавальну мотивацію, образне і логічне мислення, досвід творчої, в тому числі дослідницької діяльності); і організована з урахуванням необхідної суспільству культури [72, с. 125].

Складовими математичної культури учня є математична грамотність та навички математичного моделювання [76, с.103].

Погоджуємося з визначенням математичної грамотності, яке наводить С. Березін [9]: математична грамотність – уміння правильно застосовувати математичні терміни, наявність необхідних математичних знань і відомостей для виконання роботи (вирішення проблеми) в конкретній предметній області. Хоча, на наш погляд, дане поняття має включати в себе не тільки термінологічну грамотність, але й правильну математичну мову (усну чи письмову), обчислювальну, графічну, логічну та алгоритмічну культуру.

Загальновідомо, що математика має широкі можливості для розвитку логічного мислення людини, її алгоритмічної культури, уміння моделювати ситуації. Математичний апарат застосовується не лише при вивченні інших шкільних дисциплін, але й в ході професійної діяльності, зокрема, математичне моделювання широко використовують для розв'язування задач з різних галузей науки, економіки, виробництва. Про це зазначається й у програмах з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. Саме тому надзвичайно важливо, щоб у процесі навчання математики у школі приділялася увага формуванню математичної культури учнів, розвитку їх математичної грамотності.

Необхідною умовою успішного формування математичної культури школяра є свідоме розуміння суті та змісту математичних понять, походження нового терміна, знака [70, с. 100]. Невиконання її стає джерелом формального засвоєння учнями нових математичних знань. Якщо знання засвоєні формально, то при застосуванні нових елементів математичної мови учні не вміють відокремити зміст від даної знакової форми. Це проявляється при переході з природної мови на математичну, та навпаки – від однієї математичної моделі до іншої. Вказаний недолік можливо певною мірою попередити на рівні переходу від природної мови до мови наукових термінів, застосовуючи історико-генетичиий аналіз слова (символа), що дає можливість розповісти учням «біографію» нового терміна (символа), історію розвитку відповідного йому поняття, з’ясувати місце цього поняття в системі понять [70, с. 102]. Систематичне використання історико-генетичних відомостей при вивченні нових елементів математичної мови сприяє формуванню пізнавальних інтересів і водночас позитивних мотивів навчальної діяльності. При цьому встановлюється генетичний зв’язок поняття з реальною дійсністю. Форми цієї роботи, звичайно, мають узгоджуватись з віковими особливостями школярів. Ця робота продовжується в позаурочний час. З цією ж метою ефективно використовуються математичні газети, де поряд з іншим вміщують матеріал, що містить «біографії» понять, термінів і символів, що вивчаються [34, с. 10].

Термін «алгебраїчна культура» застосовуємо тоді, коли мова йде про формування математичної культури при вивченні шкільного курсу алгебри.

Упродовж вивчення курсу алгебри в учнів формуються необхідні математичні знання, уміння та навички, базові та спеціальні предметні компетенції. Завдання вчителя – не лише сформувати в учнів ті чи інші математичні поняття, постійно сприймати нову інформацію (символічну, графічну, схематичну, словесну тощо), осмислювати її, порівнювати з раніше сформованими уявленнями, поняттями, розрізняти істотні й неістотні ознаки, виділяти головне, зіставляти відоме й невідоме, узагальнювати, класифікувати та зводити в систему здобуті знання, використовувати їх у різних ситуаціях, але й навчити їх вільно відтворювати здобуті знання усно й письмово, за допомогою буквеної символіки та термінів тощо [18, с. 39].

Одним з показників алгебраїчної культури учнів є якісне уміння алгебраїчних обчислень, що характеризується наступними ознаками:

– міцне і усвідомлене знання законів арифметичних дій;

– впевнене володіння алгоритмами основних операцій над дійсними числами;

– уміння ефективно поєднувати усні, письмові та інструментальні обчислення;

– застосування раціональних прийомів обчислень;

– вироблення потреби і умінь здійснювати самоконтроль.

Іншим важливим показником алгебраїчної культури є володіння учнями алгоритмами розв’язування рівнянь та їх систем і рівень розвитку алгоритмічної культури в цілому.

Поняття «алгоритмічна культура» розглядається у науково-педагогічній літературі, починаючи з 70-х років XX століття. Проведений нами аналіз наукової літератури показав, що проблема формування алгоритмічної культури учнів у процесі навчання привертала увагу багатьох дидактів, психологів, вчителів-практиків.

Алгоритмічну культуру учнів розглядали під час вивчення окремих навчальних предметів (Ю. Бабанський, Н. Бібік [10], Л. Занков [28], Л. Ланда, І. Лернер, В. Паламарчук, М. Скаткін та ін.), у контексті вдосконалення процесу навчання математики засобами алгоритмізації (М. Бурда [33], В. Монахов [52; 51], М. Лапчик, А. Столяр, І. Тесленко та ін.), застосування алгоритмічних приписів різного рівня складності для управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів (Д. Богоявленський, П. Гальперін, С. Гончаренко, В. Давидов, Є. Кабанова-Меллєр [30], Л. Ланда [39], О. Леонтьєв, Ю. Машбиць та ін).

Формування алгоритмічної культури у контексті цілеспрямованого інтелектуального розвитку учнів характеризується рівнем розвитку логічного і алгоритмічного мислення особистості, передбачає розуміння учнями загальних способів алгоритмізації, алгоритмічної сутності і можливості автоматизації практичної сфери діяльності людини, здатністю організувати алгоритмічну діяльність у процесі розв'язування різноманітних задач. І хоча головна роль у формуванні логічного і алгоритмічного мислення відводиться математиці та інформатиці, сукупність знань, умінь та навичок роботи з алгоритмами формується у учнів під час вивчення майже усіх шкільних предметів, оскільки систематично і послідовно формуються такі прийоми розумової праці, як планування власної діяльності та пошук раціональних шляхів її виконання [57, с. 3].

З метою виявлення та теоретичного обґрунтування дидактичних умов ефективного формування алгоритмічна культура учнів уточнимо структуру алгоритмічної культури особистості.

Аналізуючи праці дослідників з даного напряму [31; 57], ми визначили, що формування алгоритмічної культури учнів здійснюється через становлення таких структурних компонентів: мотиваційного-ціннісного, знаннєво-пізнавального, діяльнісного та рефлексивного.

Усі чотири складові структури алгоритмічної культури особистості взаємопов'язані і є базовими у процесі її формування та представлені на рисунку 1.1.


Рис. 1.1. Компоненти алгоритмічної культури учнів

*Мотиваційно-ціннісний компонент алгоритмічної культури* учнів формується через розвиток інтересу до алгоритмічної діяльності й використання засобів інформаційних технологій, розуміння значимості процесу алгоритмізації під час розв’язування задач та характеризується сукупністю їхніх стійких поглядів, мотивів і спонукань, що визначають спрямованість динамічного, неперервного і гуманістичного процесу зростання внутрішньої потреби в особистісному перетворенні, постійному самовдосконаленні й інтелектуальному розвитку [57].

*Знаннєво-пізнавальний компонент алгоритмічної культури* учнів формується у процесі здобуття нових знань (знання алгоритмів, їх властивостей, базових алгоритмічних структур тощо) та проявляється в розумінні ними загальних способів алгоритмізації, цілеспрямованості, плануванні та покроковій деталізації алгоритмічний дій, що забезпечує оптимальне розв’язування задачі алгоритмічним способом [57].

*Діяльнісний компонент алгоритмічної культури* учнів включає активне продуктивне застосування здобутих знань у процесі розв’язування задач та характеризується розвитком алгоритмічних умінь і навичок. З позиції сучасних поглядів педагогічної психології і дидактики кінцевою метою навчання є не стільки здобуття знань, скільки формування способу цілеспрямованих дій, що реалізуються через уміння. Діяльнісний підхід до формування алгоритмічної культури учнів найкращою мірою задовольняє цим вимогам навчання – виявити і сформувати систему алгоритмічних умінь, якими повинні оволодіти учні під час розв’язування задач [57].

*Рефлексивний компонент алгоритмічної культури* учнів виявляється в оцінюванні власної алгоритмічної діяльності, що передбачає оволодіння уміннями самоконтролю, свідомому регулюванні своєї поведінки, збагаченні досвіду саморегуляції пізнавальної діяльності алгоритмічного змісту [57].

Формування алгоритмічної культури учнів – це складний динамічний процес, який потребує цілісної багатокомпонентної системи роботи вчителя, де потрібно враховувати кожний компонент, що входить до структури алгоритмічної культури. Шкільний курс алгебри, зокрема, тема «Раціональні рівняння та їх системи» має широкі властивості для формування алгоритмічної культури учнів на різних рівнях.

Наступним показником алгебраїчної культури є рівень розвитку математичної мови школярів. Грамотна математична мова є свідченням чіткого й організованого мислення, оволодіння цією мовою, розуміння точного змісту речень, логічних зв'язків між реченнями поширюється і на володіння природною мовою. Оскільки мова відіграє таку важливу роль в процесах сприйняття і мислення, то якісне просунення уперед в оволодінні математичними знаннями не можливе без розвитку математичного мовлення, а через нього удосконалення понятійного апарату учнів.

Більшість учителів вважає, що складності мови краще уникати, бо вважають дітей ще маленькими, оберігаючи їх від «страшних слів». При цьому незважаючи на те, що мовлення відображає рівень розвитку людини, якість словникового запасу показує світогляд дитини, який учитель і повинен намагатися  розвинути та розширити.

Л. Черних та Н.Богатинська вважають, що мова вчителя на уроці математики повинна бути строгою, точною, лаконічною. Причини неповного, неточного, неправильного розуміння учнями повідомлень вчителя полягають в особливостях мислительної діяльності учнів, в об’єктивних особливостях словесної мови [77, с. 242].

Вивчення математики в школі має сприяти формуванню загальнонавчальних умінь, культури мовлення, чіткості і точності думки, критичності мислення, здатності відчувати красу ідеї, методу розв'язання задачі або проблеми, таких людських якостей, як наполегливість, сила волі, здатність до переборення труднощів, чесність, працелюбство та ін.

Головне призначення математичної мови сприяти організації навчальної діяльності. При її організації на уроках математики слід опиратися на психолого-вікові особливості учнів. Кожне нове поняття дитина здатна засвоїти лише безпосередньо сприймаючи його (бачачи, торкаючись і т.д.), а також виконуючи з цим предметом практичні дії.

Все, що не проходить через мовний апарат дитини залишається неусвідомленим.

Виходячи з цього, потрібно організовувати навчання на уроках в такий спосіб, щоб діти працювали з дидактичним роздатковим матеріалом, виконували різноманітні вправи самі або за зразком. Відповідні мислительні операції мають виконуватись в ході практичних дій. При цьому потрібно вимагати від учнів всі свої дії пояснювати (проговорювати). Нові поняття включаються в активний словниковий запас учнів, тому питання і завдання потрібно ставити так, щоб учні не відповідали, а розповідали про свої дії оперуючи термінами.

Учні з більш-менш розвиненим математичним мовленням краще засвоюють новий матеріал, більш свідомо використовують теоретичні знання під час розв`язування задач і вправ. Тому потрібно впроваджувати на уроці такі види роботи, що давали б змогу учням краще:

- оволодівати термінологією,
- вільно оперувати математичними поняттями,
- свідомо використовувати нові і раніше набуті знання,
- спостерігати будову математики як науки,
- встановлювати взаємозв`язок між окремими її розділами,

– формувати уміння виділяти ті ознаки предметів, які найважливіші для їхнього пізнання.

У таблиці 1.1. наведемо приклади видів робіт (математичний диктант, створення понятійного модуля, коментування, мовні вправи з підручником), які можна використовувати на уроках математики для розвитку математичної мови учнів.

*Таблиця 1.1.*

**Приклади видів робіт для розвитку математичної мови**

| Вид роботи | Методичний коментар |
|---|---|
| математичний диктант | *1)Вставити слово або словосполучення, наприклад у формулювання означення або теореми*<br>Приклад 1. Лінійним рівнянням називається рівняння виду____________________________, де___________________.<br>Приклад 2. Якщо до обох частин рівняння додати ______________число чи вираз зі змінною, що не втрачає смислу ні за яких значень змінної, то дістанемо рівняння, _____________ даному. |
| | *2) Закінчити думку.*<br>Приклад 1. Якщо корені першого рівняння є коренями другого і, навпаки корені другого рівняння є коренями першого, то такі рівняння є ______________________________.<br>Такий диктант може бути проведений на етапах перевірки домашнього завдання, актуалізації знань, підведення підсумків уроку. Він сприяє розширенню активної математичної лексики, правильному її вживанню, а отже і розвитку математичного мислення, усвідомленню математичних понять, означень, тверджень. Під час перевірки диктанту можуть бути використані парна або групова форми роботи, а також робота консультантів. |
| створення понятійного модуля | Продовжуючи вивчення теми «Рівняння» у 6-му класі за допомогою наочності розміщення обох частин рівняння на вагах, доцільно вимагати від учнів уміння висловити спочатку своїми словами свої уявлення про додавання чи віднімання доданків з обох частин рівняння, а потім пропоную за підручником опанувати чіткі математичні властивості. Ясно, що кількість висловлень зростає поступово від уроку до уроку, тобто поступово створюється понятійний модуль. Важливою умовою його розширення є безумовне повторення попередніх знань про рівняння.<br>На кожному даному етапі можна проводити у формі гри «Хто більше?» (хто більше наведе висловлень з теми за одну хвилину). Зараховуються лише правильні твердження, облік яких ведуть учитель і самі учні. Окремі відповіді можуть бути оцінені. Школярі охоче беруть участь у такій грі, що водночас сприяє підвищенню їхньої навчальної активності. |

*Продовж. табл. 1.1.*

| | |
|---|---|
| мовні вправи з підручником | Цей вид роботи сприяє не тільки розвитку математичного мовлення, а і розвитку логічного мислення, формуванню уміння використовувати набуті знання, орієнтуватися в нових ситуаціях, практично мислити.<br>Приклад 1. Після вивчення теми «Рівняння та його корені», можна запропонувати учням переглянути завдання до всіх вправ даного пункту підручника і назвати номери тих вправ, де необхідно для відповіді на задане питання розв’язати рівняння.<br>Приклад 2. Перефразуйте завдання «розв’яжіть рівняння». Тут учні самі пригадують аналоги даного завдання: знайдіть корені рівняння;при яких значеннях змінних виконується рівність; при яких значеннях змінної дана рівність є правильною тощо. |
| коментування | Жодному учневі під час розв`язування завдання на дошці не дозволяється робити записи мовчки. Учні обов`язково повинні уголос наводити свої міркування, судження. Коментування можна використовувати і під час самостійного розв`язування вправ і завдань.<br>Спостерігаючи за роботою учнів, коли більшість з них пройшли черговий етап, можна пропонувати будь-кому оголосити проміжний результат. Якщо більшість учнів одержала таку саму відповідь, то клас продовжує працювати самостійно. В іншому випадку пропонувати будь-кому прокоментувати хід розв’язування завдання.<br>Такий методичний прийом дає можливість розвивати математичне мовлення учнів, а також вести своєчасну корекцію їхніх дій, знань, підтримувати єдиний темп роботи класу.<br>Організація роботи з розвитку математичного мовлення на етапі актуалізації знань має велике значення для свідомого сприйняття нового матеріалу. На підготовчому етапі перед вивченням нового матеріалу необхідні такі види і форми роботи, які б давали змогу кожному учневі пригадати і проговорити основні, базові поняття, означення, факти, з якими він зіткнеться в ході пояснення і опанування нової теми. Тут можлива робота в парах. На дошці написані основні терміни і питання для повторення. Поруч з кожним у дужках записано сторінку, до якої можна звернутися, у випадку необхідності, за допомогою.<br>Учні дають відповіді один одному на поставлені запитання, або разом працюють з підручником. |

Для розвитку мислення, для прискорення розумових процесів недостатньо лише розвитку мовлення. Необхідні такі види і форми роботи, що спонукали б учнів до розумової діяльності (змагання, дидактичні ігри, мозкові штурми, робота в парах, групах, тощо, а також заохочення і вмотивованість навчання). За умов контролю теоретичних знань учнів на репродуктивному рівні (сформулюй означення, правило, доведи теорему, тощо) учень менше усвідомлює, ніж намагається запам’ятати матеріал, плануючи розповісти його.

У цьому випадку спрацьовують лише механізми короткочасної пам’яті, вивчене дуже швидко забувається і засвоюється із значними труднощами.

Комплексне використання мовної роботи з предмету, а також інтерактивних форм і методів навчання забезпечує умови для самореалізації особистості відповідно до її здібностей, суспільних та власних інтересів.

Запобігання помилкам у мовленні потребує від учителя цілеспрямованої, різносторонньої роботи як над окремим математичним терміном, так і над цілим текстом. Це допоможе учневі зробити ще, нехай найменший, крок вперед до свідомого оволодіння математикою.

Перевірити наявність математичної культури дуже складно. Виокремимо деякі характеристики, що свідчать про її сформованість:

– наявність навчально-пізнавальної мотивації;

– розуміння навчального матеріалу та вміння застосовувати його в різних умовах;

– уміння бачити математичні питання цілісно, встановлювати зв’язки різного характеру та рівня, в тому числі й міжпредметні;

– уміння ставити та досліджувати проблеми, що пов’язані з застосуванням математики, узагальнювати, абстрагувати, планувати;

– уміння створювати та використовувати математичні моделі; застосовувати шкільну математичну мову, обґрунтовувати свої судження та дії;

– уміння бачити красу математики, її практичне застосування, проявляти інтерес до її історії, до етимології математичних понять;

– уміння легко виконувати базові математичні дії – обчислення, побудови, перетворення.

Виокремимо шляхи розвитку математичної культури школярів.

1. Постійна турбота про мотивацію математичної діяльності, про розуміння учнями власного просування в засвоєнні математичних знань й умінь, усвідомленні їх цінності, включення емоційної складової математичної освіти.

2. Забезпечення розуміння математичних знань за рахунок самостійного

здобування, використання суб’єктного досвіду, переведення інформації з одного виду в інший, постійного творчого застосування.

3. Увага до засвоєння математичної мови, її алфавіту, синтаксису, а головне – семантики.

4. Цілеспрямоване використання моделювання, моделей різних видів, переведення інформації з одного виду в інший. Це сприяє розумінню досліджуваного й оволодінню основами математичного моделювання.

5. Відтворення в навчанні структури математичної діяльності: побудова моделі – робота з моделлю – інтерпретація результатів, отриманих на моделі.

6. Постійне включення учнів у творчу діяльність на математичному матеріалі, в тому числі в дослідну та проектну. Звичку до репродуктивної діяльності, яка гасить потребу в творчості, заважає усвідомленому засвоєнню матеріалу та знижує бажання вчитися, неможливо подолати в подальшому.

7. Використання диференціації у навчанні, причому не тільки рівневої, а й психологічної (з урахуванням особливостей сприйняття та перетворення інформації). Це забезпечує успішність засвоєння навчального матеріалу і є важливим мотивом діяльності.

8. Установлення змістових зв’язків між елементами знань, установлення зв’язків з життям (отримання та інтерпретація моделей), з досвідом учня, внутрішньопредметних і міжпредметних зв’язків; звернення до історії математики, етимології математичних термінів.

9. Розумне використання інформаційних комп’ютерних технологій з традиційними методами навчання.

### 1.2. Математичне моделювання як метод розв’язування прикладних задач

У програмі з математики для класів з поглибленим вивченням математики [43] зазначається, що вивчення математики у класах з поглибленим вивченням математики передбачає більш ґрунтовну порівняно з академічним рівнем підготовку учнів з математики в органічному поєднанні з міжпредметною інтеграцією на основі застосування математичних методів (зокрема, *методу математичного моделювання*).

Принциповою відмінністю мети навчання математики в класах з поглибленим вивченням математики є те, що ці учні мають бути орієнтовані на подальшу діяльність у сфері розвитку математичної науки (як теоретичної, так і прикладної), створення нових прийомів, моделей і алгоритмів, у тому числі й в аспекті прикладного застосування математичного апарату, тоді як для учнів інших профілів навчання провідною метою є навчання вибору і застосуванню методів існуючого математичного апарату. І також зазначається, що вивчаючи математику, учні мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розчленовується на три етапи:

1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї – до чітко сформульованої математичної задачі);

2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі;

3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та застосування його до вихідної ситуації.

Фундаторами сучасної методології математичного моделювання були В. Глушков, Б. Гнеденко [23], А. Колмогоров [32], А. Турбін, В. Остапенко, В. Скурихін [67] та інші. Ці вчені у 70-х роках XX століття, розуміючи неабияке значення для шкільного курсу математики пояснення прикладного характеру цієї дисципліни, дійшли до висновку про необхідність вивчення математичного моделювання учнями загальноосвітніх шкіл.

Б. Гнеденко зазначав, що готувати майбутнього вчителя математики слід так, щоб він міг «бачити, з одного боку, основний зміст сучасної математики, а з другого – її прикладні можливості» [23, с. 112].

Деякий час у підручниках та у програмах з математики нічого не говорилося про математичне моделювання у явному вигляді, проте це не означає, що воно не застосовувалося. Розв'язуючи текстові задачі, вчителі пояснювали хід розв'язання, проте не наголошували на тому, що науковою мовою цей процес називається математичним моделюванням.

Лише наприкінці 90-х років XX століття у шкільний курс математики для учнів 9-го класу була введена тема «Елементи прикладної математики». На вивчення даної теми відводилося 10 годин, а на вивчення математичного моделювання – 2 години. Таку ж кількість часу на вивчення даної теми запропоновано і у програмах для 12-річної школи.

У сучасних підручниках введено розділ «Елементи прикладної математики». Пропонується матеріал щодо історії питання, пояснюється важливість вивчення теми, повідомляються основні означення та етапи математичного моделювання, пояснюється важливість цієї теми.

Елементам математичного моделювання, до недавнього часу, приділялося недостатньо уваги у шкільному курсі математики. Здебільшого, учні вчили математику як деякий абстрактний предмет, що у більшості школярів викликали значні труднощі у розуміння цієї дисципліни.

А. Колмогоров, розглядаючи питання про сучасну математику та навчання її в школі, підкреслював [58, с. 14]: «Дивлячись у майбутнє, необхідно вже зараз будувати шкільний курс так, щоб учні були підготовлені до сприйняття нових аспектів прикладної математики… Завдання полягає у тому, щоб уже в школі переконливо показати, що «сучасна математика» дає змогу будувати математичні моделі реальних ситуацій і процесів, що вивчаються в застосуваннях, не тільки не гірше, але логічно послідовніше і простіше, ніж традиційна».

Прикладна спрямованість курсу математики – одна з постійно досліджуваних, але поки що не розв'язаних на належному рівні проблем навчання математики, хоча математика з самого початку зароджувалася як прикладна наука (людині необхідно було обчислювати площі полів, об'єми посудин тощо).

У підручнику з алгебри для 9 класу авторів А. Мерзляка, В. Полонського, М. Якіра [50] моделлю називають спеціально створений об'єкт, що відображає властивості досліджуваного об'єкта (modele – копія, зразок). Моделі можуть створюватися з різною метою. Мета – замінити об'єкт моделлю, щоб виконати деякі дії, які з самим об'єктом виконувати не дозволяється або не зручно. Моделі можуть бути матеріальними (многогранників, макети літаків, забудови житлового району) та символічними, тобто зображуватися за допомогою чисел, рівнянь, нерівностей та їх систем, формул, графіків.

У «Математичній енциклопедії» [44, с. 343] наводиться наступне означення математичної моделі: «Математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ зовнішнього світу, виражений через математичну символіку».

При складанні математичної моделі використовують загальні закони природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати пасивних та активних експериментів. Математичні моделі дозволяють передбачити хід процесу, розрахувати цільову функцію (вихідні параметри процесу), керувати процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками.

Математичне моделювання – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей [67, с. 11].

Під математичним моделюванням, у вузькому значенні слова, розуміють опис у вигляді рівнянь і нерівностей реальних фізичних, хімічних, технологічних, біологічних, економічних та інших процесів. Для того, щоб використовувати математичні методи для аналізу і синтезу різних процесів, необхідно вміти описати ці процеси мовою математики, тобто описати у вигляді системи рівнянь і нерівностей. Як методологія наукових досліджень, математичне моделювання, поєднує в собі досвід різних галузей науки про природу і суспільство, прикладну математику, інформатику і системне програмування для розв'язання фундаментальних проблем [55].

У широкому значенні слова, математичне моделювання – це заміна дій з реальними предметами діями з їх образами, моделями, муляжами, макетами, а також кресленнями, схемами тощо [75].

У «Математичній енциклопедії» математичним моделюванням називають процес вивчення явищ за допомогою математичних моделей [44].

У підручниках з алгебри для 9 класу [48; 50] автори пропонують наступне означення: «Математичне моделювання – це процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, що називається математичною моделлю».

В. Швець виділяє такі етапи розв’язування прикладної задачі у школі методом математичного моделювання [78, с. 17]:

1. *Створення математичної моделі* – переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, мовою математики.

2. *Дослідження математичної моделі* – розв'язування отриманої математичної задачі.

3. *Інтерпретація розв’язків* отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики мовою тієї галузі, де вона виникла.

Виокремлюють наступні етапи математичного моделювання [67, с. 32]:

*1. Попередній аналіз об'єкта дослідження.*

Всебічно і детально вивчається процес, що розглядається в задачі, визначаються головні параметри, суттєві і несуттєві зв'язки і залежності між головними характеристиками процесу, закони, яким він підлягає. На цьому етапі з'ясовуються також повнота, надлишковість, суперечливість даних.

*2. Побудова математичної моделі.*

Вибір (побудова) «еквівалента» об'єкта (явища, системи), що відображає в математичній формі найважливіші його властивості – закони, яким він підлягає, зв'язки, притаманні його складовим тощо, і є математичною моделлю.

*3. Вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі.*

Математична модель досліджується теоретичними методами, що допомагає отримати попередні знання про об'єкт. Далі відбувається уточнення, доопрацювання моделі, встановлюються межі її використання, суто математичними прийомами виявляються загальні властивості моделі та її розв'язків.

*4. Аналіз одержаного результату, з'ясування його відповідності тому об'єкту, який моделюється.*

Перекладання з мови математики мовою реальної дійсності. Визначається відповідність одержаних результатів розглянутій реальній ситуації, робиться перевірка моделі на відповідність за тими ознаками, що були відібрані як значущі.

Наприклад, два робітники, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому [47, с. 185]?

1. *Створення математичної моделі*

Оскільки об’єм виробничого завдання не вказано, то прийматимемо його за 1.

Далі подамо умову та дані задачі у вигляді таблиці:

| | Робота | Продуктивність | Час |
|---|---|---|---|
| І робітник | 1 | $\frac{1}{x+9}$ | $x+9$ |
| ІІ робітник | 1 | $\frac{1}{x}$ | $x$ |
| Разом | 1 | $\frac{1}{20}$ | 20 |

Нехай $x$ днів потрібно для виконання виробничого завдання ІІ робітнику, тоді $x+9$ – першому.

Отже, маємо рівняння:

$$\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x}=\frac{1}{20}.$$

*2. Дослідження математичної моделі.*

Розв’яжемо утворене рівняння:

$$\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x}=\frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x}-\frac{1}{20}=0,$$

$$\frac{20x+20x+180-x^2-9x}{20x(x+9)}=0,$$

$$\frac{-x^2+31x+180}{20x(x+9)}=0.$$

Оскільки дріб дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то переходимо до системи:

$$\begin{cases}-x^2+31x+180=0,\\ \quad 20x(x+9)\neq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-31x-180=0,\\ \quad 20x(x+9)\neq 0.\end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему, маємо:

$$x_1=36 \text{ та } x_2=-5.$$

*3. Інтерпретація розв'язків*

$x_2=-5$ – не задовольняє умову задачі (кількість днів не може бути від'ємною), тому 36 днів потрібно II робітнику для виконання виробничого завдання.

Відповідь: 45 днів і 36 днів.

Прикладне застосування математичного апарату до розв'язування задач сприятиме міжпредметній інтеграції та кращому усвідомлення методу математичного моделювання. Проходження усіх етапів розв'язування задачі зазначеним методом обов'язкове. Вони мають бути відображенні в розв'язанні, хоча вказувати їх назви не обов'язково.

### 1.3. Загальна характеристика рівнянь з однією змінною

Наведемо основні теоретичні положення стосовно рівнянь, їх видів та способів їх розв'язування.

Рівність із змінною, відносно якої треба встановити, для яких її значень (можливо таких значень і не існує) рівність перетворюється у правильну числову, називається *рівнянням* [5, с. 192].

Наприклад: $5x - x = 28$; $2(x+3) = 5x - 7$; $x^2 - 4 = 0$.

Якщо в рівності одна змінна, то це рівняння з однією змінною.

*Коренем (розв'язком) рівняння* з однією змінною називається значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність, або при якому змінна задовольняє рівнянню [57, с. 241].

*Розв'язати рівняння* – означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, що рівняння коренів не має [57, с. 241].

Якщо рівняння має один корінь, наприклад $x = 5$, то відповідь записують у формі: $x = 5$ або $\{5\}$ .

Якщо рівняння має декілька (скінченне число) коренів, то відповідь зручно записувати у вигляді перерахунку коренів, даючи кожному значенню х свій номер.

Наприклад, $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$ або $\{-2; 2\}$. Корені бажано розташовувати в порядку зростання.

Якщо рівняння зовсім не має коренів, то відповідь записується словами: коренів немає або $\emptyset$.

Два рівняння з однією змінною називаються *рівносильними*, якщо корені першого рівняння є коренями другого і, навпаки корені другого рівняння є коренями першого [49, с. 90].

Розв'язування рівняння з однією змінною передбачає два кроки:

– перетворення рівняння до стандартного (до одного з основних видів рівнянь з однією змінною);

– розв'язування стандартного рівняння.

Перетворення рівняння до стандартного (до одного з основних видів рівнянь з однією змінною) здійснюються за відомими формулами, які завжди можна відновити в пам'яті при допомозі довідників або ж просто їх пам'ятати.

Рівняння з однією змінною поділяються на: алгебраїчні та трансцендентні (рис. 1.2).

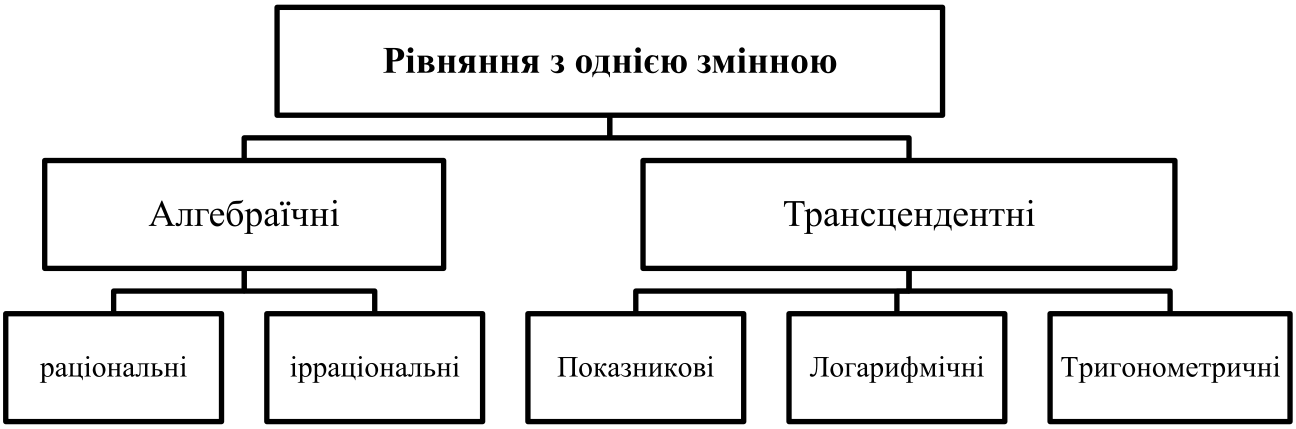



Рис. 1.2. Рівняння з однією змінною

*Алгебраїчні* – це рівняння, утворені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого додатного степеня і добування арифметичного кореня.

Алгебраїчні рівняння поділяють на раціональні (лінійні – $4x + 8 = 0$, квадратні – $2x^2 + 3x - 6 = 0$, *n*-го степеня), а ірраціональні ($\sqrt{x-2} = 3 - 7x$; $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$). Раціональні рівняння можуть бути як цілими ($2x^2 + 3x - 6 = 0$) так і дробовими $\left(\frac{x-2}{x+3} = 0\right)$.

Всі неалгебраїчні рівняння називаються *трансцендентними*. До них відносяться: показникові, логарифмічні, тригонометричні.

Виходячи з предмета нашого дослідження далі розглядатимемо раціональні алгебраїчні рівняння.

Основні види раціональних рівнянь з однією змінною:

– цілі раціональні рівняння – це рівняння, у якого ліва або права частина чи обидві – цілі вирази;

– дробово-раціональні рівняння – це рівняння, у якого ліва або права частина чи обидві – дробові вирази.

Розглянемо детально алгоритми розв’язування кожного з них.

*Лінійні рівняння* – рівняння виду $ax + b = 0$, де $a$ і $b$ − деякі дійсні числа, $x$ − невідоме [46, с. 12].

Якщо $a \neq 0$, то рівняння називається *рівнянням першого степеня з однією змінною* і $x = \frac{-b}{a}$ – єдиний корінь [49, с. 225];

Якщо $a = 0,\ b = 0$, то коренем рівняння буде будь-яке дійсне число [46, с. 13];

Якщо $a = 0,\ b \neq 0$, то рівняння не має коренів [46, с. 13].

У 5-му класі учні вчаться розв'язувати нескладні рівняння першого степеня на основі залежностей між компонентами арифметичних дій.

У таблиці 1.2 наведено приклад розв'язання ускладненого рівняння п'ятикласниками та методичний коментар до нього.

*Таблиця 1.2*

**Приклад розв'язання лінійного рівняння на основі залежностей між компонентами дій**

| **Приклад** | **Методичний коментар** |
|---|---|
| Дано рівняння<br>*(2430-x):17=102* | Бачимо, що *x* міститься у дужках. Отже, на даному етапі величина (2430-*x*) є невідомою.<br>Шукаємо її значення, міркуючи: «Яке число треба поділити на 17, щоб отримати 102?»<br>Щоб знайти невідоме ділене, потрібно частку помножити на дільник. |
| Наступний запис:<br>*2430-x=102·17*<br>*2430-x=1734* | На цьому етапі у нас вже дужок немає і множення на *x* також немає. Отже невідомою є величина *x*.<br>Шукаємо її значення, міркуючи: «Яке число треба відняти від 2430, щоб отримати 1734?»<br>Щоб знайти від'ємник, потрібно від зменшуваного відняти різницю. |
| *x=2430-1734*<br>*x= 696*<br>Відповідь: 696. | |

При цьому запис у зошиті матиме вигляд (зліва розв'язання, а справа необхідні обчислення):

*(2430-x):17=102,*

*2430-x=102·17,*

*2430-x=1734,*

| | | | |
|---|---|---|---|
| × | 1 | 0 | 2 |
| | | 1 | 7 |
| | 7 | 1 | 4 |
| 1 | 0 | 2 | |
| 1 | 7 | 3 | 4 |

*x=2430-1734,*

*x= 696.*

*Відповідь: 696*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| - | 2 | 4 | 3 | 0 |
| | 1 | 7 | 3 | 4 |
| | | 6 | 9 | 6 |

Інші приклади розв'язання рівнянь представлені у додатку Б.

У 6-му класі учні розв'язують рівняння першого степеня, використовуючи основні властивості рівнянь [71, с. 244]:

1) якщо до обох частин рівняння додати одне й теж саме число чи вираз зі змінною, що не втрачає смислу ні за яких значень змінної, то дістанемо рівняння, рівносильне даному. Звідси випливає, що можна переносити будь-який член рівняння з однієї його частини в іншу, змінюючи попередньо знак цього члена на протилежний;

2) якщо обидві частини рівняння помножити або розділити на одне й теж саме число, що не дорівнює нулю, чи вираз зі змінною, який не перетворюється на нуль ні за яких значень змінної і не втрачає смислу на множині допустимих значень змінної для даного рівняння, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

*Приклад 1.1*. Розв'язати рівняння: $5x + 2 = 12$.

*Розв'язання*

1. Визначаємо вид рівняння: лінійне з однією змінною ($a \neq 0$).

2. За властивістю рівнянь: від його обох частин віднімаємо 2.

$5x + 2 - 2 = 12 - 2$.

Маємо:

$5x = 10$.

3. За властивістю рівнянь: ділимо обидві частини рівняння на 5.

$x = 2$.

Відповідь: 2.

*Квадратне рівняння* – це ціле рівняння з одним невідомим, яке після розкриття дужок, перенесення всіх членів у ліву частину і зведення подібних членів набирає вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де $a \neq 0$, $b$, $c$ – довільні числа, $x$ – невідоме [4946, с. 225].

Якщо в рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоч один з коефіцієнтів $b$ або $c$ дорівнює нулю, то таке квадратне рівняння називають *неповним* [4946, с. 226].

Розглядають *три види неповних квадратних рівнянь* [4946, с. 226]:

$ax^2 + bx = 0$ – квадратне рівняння без вільного члена;

$ax^2 + c = 0$ – двочленне квадратне рівняння;

$ax^2 = 0$ – одночленне квадратне рівняння.

Подібні терміни часто вживаються в курсі вищої алгебри для рівнянь $n$-го степеня .

Щоб підкреслити, що дане квадратне рівняння не є неповним, вживають термін «*повне квадратне рівняння*». Так називають рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, в якому $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Не треба протиставляти повному квадратному рівнянню зведене. Зведеним може бути і повне квадратне рівняння, і неповне (при $a = 1$).

Розглядати їх найкраще в такій послідовності:

$$ax^2 + bx = 0, \quad ax^2 = 0, \quad ax^2 + c = 0.$$

Починати розгляд кожного виду краще з конкретного прикладу.

*Приклад 1.2.* Розв'язати рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

*Розв'язання.* Розклавши ліву частину цього рівняння на множники, дістанемо:

$$x\,(5x + 4) = 0.$$

Відомо, що добуток двох множників-многочленів дорівнює нулю, коли перший або другий з них дорівнює нулю. Маємо: $x = 0$ або $5x + 4 = 0$, звідки $x = – 0,8$.

Отже, дане рівняння має два корені: $x = 0$ і $x = – 0,8$.

Пишуть також: $x_1 = 0$; $x_2 = -0,8$.

*Перевірка:*

1) $5 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$;

2) $5 \cdot (–0,8)^2 + 4 \cdot (–0,8) = 3,2 - 3,2 = 0$.

*Відповідь.* $x_1 = 0$; $x_2 = -0,8$.

Варто таким самим способом розв'язати ще два рівняння з числовими коефіцієнтами, а потім узагальнити.

Так само можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння виду

$$ax^2 + bx = 0.$$

Розклавши ліву частину цього рівняння на множники, дістанемо:

$$x(ax + b) = 0.$$

Прирівнявши спочатку перший, а потім другий множник до нуля, знайдемо:

1) $x = 0$;

2) $ax + b = 0$, звідки $x = -\frac{b}{a}$.

Отже, кожне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Двочленні квадратні рівняння доцільно розв’язувати способом розкладання на множники:

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$(x-2)(x+2)=0$$

Отже, $x - 2 = 0$, звідки $x = 2$, або $x + 2 = 0$, звідки $x = -2$.

Таким чином, дане рівняння має два корені: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Цим способом зручніше розглядати загальний випадок рівняння $ax^2 + c = 0$. Перенесемо член $c$ в праву частину і поділимо всі члени здобутого рівняння на $a$. В результаті дістанемо:

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Якщо $a$ і $c$ мають різні знаки (одне додатне, а друге від'ємне), то число $-\frac{c}{a}$ додатне. Тоді $x$ – число, квадрат якого дорівнює $-\frac{c}{a}$, тобто $x$ дорівнює квадратному кореню з числа $-\frac{c}{a}$.

Таких квадратних коренів є два: $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

У цьому випадку дане рівняння має два корені:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Якщо $a$ і $c$ мають однакові знаки, то число $-\frac{c}{a}$ від'ємне, тому в цьому випадку дане рівняння не має жодного розв'язку.

Отже, неповне квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ не має жодного розв'язку, якщо коефіцієнти $a$ і $c$ мають однакові знаки, а якщо їх знаки різні, то це рівняння має два розв'язки $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Програми пропонують відразу після неповних квадратних рівнянь розглянути *зведені рівняння*. Можливі два способи їх вивчення:

1) зразу вивести формулу коренів, а потім, користуючись нею, розв'язувати різні конкретні зведені квадратні рівняння;

2) почати з розв'язування конкретних зведених рівнянь способом виділення повного квадрата, після чого учні самі зможуть вивести загальну формулу.

Другий спосіб (його можна назвати конкретно-індуктивним) має багато переваг порівняно з першим.

*Приклад 1.3.* Нехай треба розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 33 = 0$. Тут $x^2$ – квадрат шуканого числа. $8x$ можна розглядати як $2 \cdot x \cdot 4$, тобто як подвоєний добуток першого числа на 4. Додамо й віднімемо $4^2$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 33 = 0.$$

Три перші доданки становлять квадрат суми чисел $x$ і 4. Отже, здобуте рівняння можна записати так:

$$(x + 4)^2 - 16 - 33 = 0, \text{ або } (x + 4)^2 - 7^2 = 0.$$

Розкладемо на множники різницю квадратів, що в лівій частині:

$$(x + 4 - 7)(x + 4 + 7) = 0, \text{ або } (x - 3)(x + 11) = 0$$

Бачимо, що добуток двох виразів дорівнює нулю. Маємо:

$$x - 3 = 0, \text{ звідки } x = 3, \text{ або } x + 11 = 0, \text{ звідки } x = -11.$$

*Відповідь.* Рівняння має два корені: $x_1 = 3$, $x_2 = -11$.

Зрозуміло, що, діставши рівняння $(x + 4)^2 - 16 - 33 = 0$, далі можна розв'язувати інакше: $(x + 4)^2 = 49$.

Це – неповне квадратне рівняння виду $z^2 = 49$. Воно має розв'язки $z_1 = 7$, $z_2 = -7$. Отже,

$$x + 4 = 7, \text{ звідки } x = 3,$$

або

$$x + 4 = -7, \text{ звідки } x = -11.$$

Ці обидва прийоми розв'язання для учнів однаково зрозумілі.

Бажано, розв'язавши одне таке рівняння, виконати перевірку, а потім таким самим способом розв'язати ще кілька рівнянь. На наступному уроці можна зразу запропонувати учням розв'язати рівняння з буквеними коефіцієнтами $x^2 + px + q = 0$, тобто самостійно вивести формулу коренів для зведеного квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Формулу коренів квадратного рівняння загального виду $ax^2 + bx + c = 0$ (за умови, що $b^2 - 4ac \geq 0$), можна виводити багатьма різними способами. Якщо перед цим розглядати, як пропонує діюча програма, зведене квадратне рівняння, то рівняння загального виду діленням на $a$ $(a \neq 0)$ можна замінити зведеним:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Тоді, підставивши у формулу коренів зведеного рівняння $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, відразу дістанемо

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\,.$$

звідки при $a > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

а при $a < 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

В обох випадках маємо ті самі дві формули, які можна об'єднати в одну:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ця формула правильна при будь-яких $a \neq 0$.

Зауважимо, що таке виведення формули можна давати учням тільки тоді, коли вони:

1) знають формулу коренів зведеного квадратного рівняння

2) знають теорему про корінь з дробу.

Можна пояснювати й інакше.

Помноживши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на $4a$, дістанемо рівносильне йому рівняння:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0,\ (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Тепер розглянемо два випадки.

1. Якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$, звідки

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. Якщо $b^2 - 4ac < 0$, то рівняння коренів не має.

Другий спосіб простіший. До того ж при таких міркуваннях відпадає потреба окремо розглядати випадки, коли $a > 0$ і коли $a < 0$.

Після того як виведено загальну формулу коренів квадратного рівняння, всі такі рівняння слід розв'язувати за цією формулою. Оформляти записи можна по-різному. Спочатку доведеться писати все повністю, підставляючи у формулу замість кожної букви її значення.

*Приклад 1.4.* Розвязати рівняння:

$$3x^2 - 2x = 1.$$

*Розв'язання.*

1) записати квадратне рівняння в стандартному вигляді:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

2) виписати коефіцієнти рівняння:

$$a = 3,\ b = -2,\ c = -1.$$

3) записати загальну формулу (або $D = b^2 - 4ac$, або $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$).

4) знайти $D$ та визначити кількість коренів:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16.$$

$D > 0$, рівняння має два корені.

5) знайти корені рівняння за формулами:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + 4}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

6) записати відповідь.

Відповідь. $-\frac{1}{3};\ 1.$

Пізніше можна пропонувати учням деякі з проміжних обчислень виконувати усно і писати, наприклад, так:

*1)* $x^2 + 8x + 12 = 0,$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2},$

$x_1 = -2,\ x_2 = -6.$

*2)* $2x^2 - 5x + 5 = 0,$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 40}}{4}.$

Розв'язків немає.

Можна рекомендувати також спочатку обчислювати дискримінант рівняння, наприклад:

$$71x^2 - 144x + 73 = 0,$$

$$D = 144^2 - 4 \cdot 71 \cdot 73 = 4(72^2 - 71 \cdot 73) = 4\,[72^2 - (72^2 - 1)] = 4,$$

$$x_{1,2} = \frac{144 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 71} = \frac{72 \pm 1}{71},$$

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{73}{71}.$$

Як видно з цього прикладу, в деяких випадках обчислення дискримінанта вдається спростити, використовуючи формули скороченого множення.

Бажано також показати учням раціональні способи перевірки знайдених розв'язків. Якщо, перевіряючи другий корінь, учень безпосередньо обчислюватиме значення кожного члена многочлена, що стоїть у лівій частині рівняння, це забере багато часу. Краще робити так:

$$71 \cdot \frac{73^2}{71^2} - 144 \cdot \frac{73}{71} + 73 = \frac{73}{71}(73 - 144 + 71) = 0.$$

Ще краще спочатку поділити обидві частини даного рівняння на $x$ (адже $x \neq 0$) і перевіряти, чи задовольняють знайдені корені рівняння

$$71x - 144 + \frac{73}{x} = 0,$$

еквівалентне даному.

Маємо:

$$71 \cdot \frac{73}{71} - 144 + \frac{73 \cdot 71}{73} = 73 - 144 + 71 = 0.$$

Вище йшлося про розв'язування квадратних рівнянь нормального виду. Але в школі доводиться розв'язувати більше таких рівнянь, які не зведені до нормального виду. Їх записують, наприклад, так:

$$6x + \frac{(3+5x)^2}{2} = \frac{8-2x}{5} - \frac{(x+3)(x+7)}{2},$$

$$60x+5(9+30x+25x^2)=2(8-2x)-5(x^2+10x+21),$$

$$60x + 45 + 150x + 125x^2 = 16 - 4x - 5x^2 - 50x - 105,$$

$$130x^2 + 264x + 134 = 0,$$

$$65x^2 + 132x + 67 = 0,$$

$$D = 132^2 - 4 \cdot 65 \cdot 67 = 4\,(66^2 - 65 \cdot 67) = 4,$$

$$x_{1,2} = \frac{-132 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 65} = \frac{-66 \pm 1}{65},$$

*Відповідь:* $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{67}{65}$ .

Корисно показати учням, що за формулою для повного квадратного рівняння можна розв'язувати і неповні. Наприклад:

$$4x^2 - 9 = 0,$$

$$x_{1,2}=\frac{0 \pm \sqrt{0+4\cdot 4\cdot 9}}{8}=\pm\frac{3}{2},$$

$$3x^2 + 4x = 0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-4 \pm \sqrt{16-0}}{6}=\frac{-4\pm 4}{6},$$

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{4}{3}$$

Діюча програма передбачає і графічне розв'язування квадратних рівнянь. Рівняння виду $x^2 + px + q = 0$ графічно можна розв’язувати так. Подаємо його у вигляді $x^2 = -px - q$ і будуємо на одній координатній площині графіки функцій $y = x^2$ і $y = -px - q$. Графіком першої функції є парабола, а другої — пряма. Абсциси точок перетину цих ліній будуть розв'язками даного рівняння, бо при цих значеннях $x$ вирази $x^2$ і $-px - q$ рівні між собою.

<u>*Приклад 1.5.*</u> Розв'язати графічно рівняння $x^2 - x - 3 = 0$.

*Розв'язання.*

Будуємо графіки функцій $y=x^2$ і $y = x + 3$.

Вони перетинаються в точках $M$ і N (рис. 1.3.), абсциси яких $x_1 \approx -1{,}3$ і $x_2 \approx 2{,}3$.

Це і будуть наближені значення коренів даного рівняння.

Перевірку можна зробити, безпосередньо підставивши здобуті значення x у дане рівняння:

$$(-1{,}3)^2 - (-1{,}3) - 3 = 1{,}69 + 1{,}3 - 3 = -0{,}01;$$

$$2{,}3^2 - 2{,}3 - 3 = 5{,}29 - 2{,}3 - 3 = -0{,}01.$$

Але можна розв'язати дане рівняння за відомою формулою і потім обчислити знайдені корені:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}\approx\frac{1\pm 3{,}606}{2},$$

$$x_1 \approx -1{,}303$$

$$x_2 \approx 2{,}303.$$

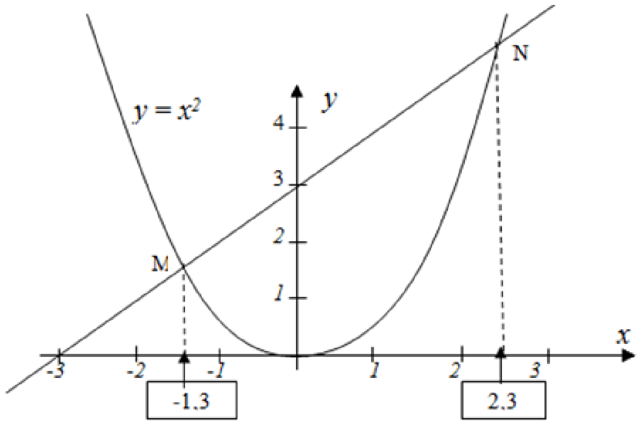



Рис.1.3.

На двох-трьох прикладах бажано ознайомити учнів з цим способом. При розв'язуванні інших рівнянь він буває дуже зручним і навіть єдино можливим.

Не треба думати, що, розв'язуючи таке рівняння графічно, слід будувати графіки функцій $y=x^2$ і $y=-px-$q. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна переписати і так: $x^2 + px = -q$. Тому досить на одній координатній площині побудувати графіки функцій $y = x^2 + px$ і $y = -$q. Можна рівняння переписати і так: $x^2 + q = -px$. У цьому разі на координатній площині треба побудувати графіки функцій $y = x^2 + q$ і $y = -px$. У кожному випадку абсциси точок перетину дорівнюватимуть (наближено) кореням даного рівняння.

На рис. 1.4 показано розв'язання рівняння $x^2 - x - 3 = 0$ двома іншими прийомами.

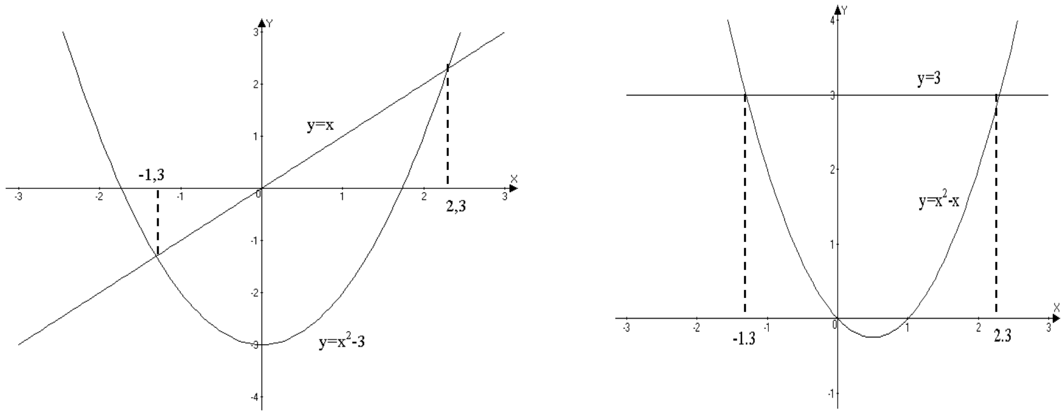



Рис. 1.4.

Нарешті, обидві частини даного рівняння можна поділити на $x$ (бо $x \neq 0$).

Тоді дістанемо рівняння $x-1=\frac{3}{x}$ , рівносильне даному. Графічне розв'язування його зводиться до побудови прямої $y = x - 1$ і гіперболи у $=\frac{3}{x}$ (рис. 1.5). Найкращий з описаних вище прийомів перший.

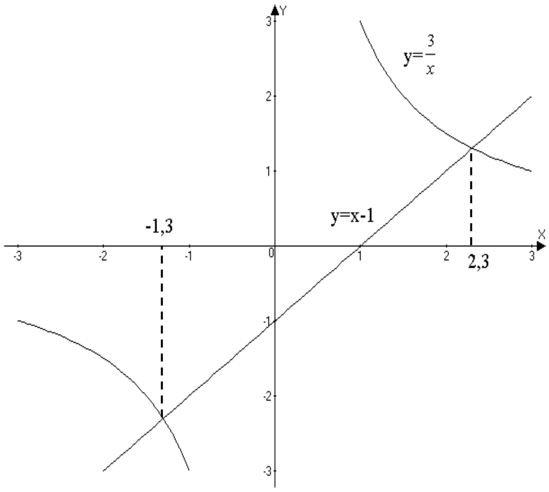



Рис. 1.5

Відомий і такий спосіб розв'язування квадратних рівнянь. Щоб розв’язати рівняння $x^2 + px + q = 0$, досить провести коло з центром у точці $C\ (-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2})$ яке проходило б через точку $M$ (0; 1). Це коло перетинає вісь OX у точках, абсциси яких дорівнюють кореням даного рівняння.

На рис. 1.6 і 1.7 таким способом розв'язано рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ і $x^2 - 2x - 5 = 0$.

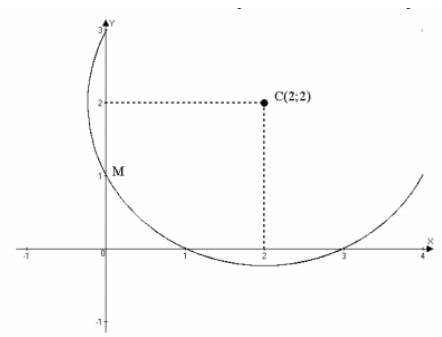



Рис. 1.6.

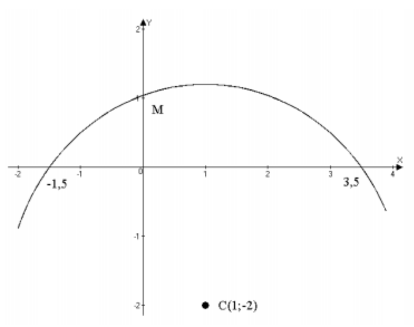



Рис. 1.7.

Цей спосіб розв'язування квадратних рівнянь можна розглянути на математичному гуртку. Обґрунтування його нескладне, учні самі можуть з ним справитись.

Корисною при розв’язанні зведених квадратних рівнянь може бути *теорема Вієта*. Як свідчить практика більшість учнів не використовують і навіть не знають цієї теореми.

Підвести учнів до цієї теореми краще на конкретних прикладах. Можна запропонувати таку вправу:

визначити суму і добуток коренів рівнянь:

1) $x^2 – 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 3x – 4 = 0$.

Після розв'язання вправи можна записати на дошці:

$$x^2 – 5x + 6 = 0,\ x_1 + x_2 = 5,\ x_1 x_2 = 6.$$

$$x^2 + 3x – 4 = 0,\ \ x_1 + x_2 = –3,\ x_1 x_2 = –4.$$

Цей запис безперечно спонукає учнів задуматися. Учителеві варто запитати, що помітили учні на розглянутих прикладах, запропонувати сформулювати гіпотезу, перевірити цю гіпотезу ще на одному рівнянні, наприклад $x^2 – 3x – 10 = 0$, а потім запропонувати довести теорему в загальному вигляді.

На дошці бажано записати:

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_1 + x_2 = –p,$$

$$x_1 x_2 = q.$$

Теорему Вієта не треба ототожнювати з оберненою їй.

*Теорема Вієта.* Якщо $x_1$ і $x_2$ – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = –p$ *і* $x_1 x_2 = q$ [4946, с. 241].

*Обернена теорема*. Якщо $x_1 + x_2 = –p$, $x_1 x_2 = q$, то числа $x_1$ *і* $x_2$ – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ [4946, с. 242].

Можна запропонувати й таке доведення оберненої теореми.

*Дано.* $x_1 + x_2 = – p$ і $x_1 x_2 = q$.

*Довести*. $x_1 x_2$ – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

*Доведення.* З першої рівності маємо $x_2 = – p – x_1$. Підставимо $– p – x_1$ замість $x_2$ в другу з даних рівностей:

$x_1(-p - x_1) = q$, звідки $x_1^2 + px_1 + q = 0$.

Отже, $x_1$ – корінь рівняння $x^2 + px + q = 0$. Якщо з першої рівності знайдемо $x_1$ і підставимо значення його в другу рівність, то дістанемо

$x_2(-p - x_2) = q$, звідки $x_2^2 + px_2 + q = 0$.

А це означає, що і число $x_2$ є коренем рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Після доведення теореми бажано запропонувати учням такі задачі:

«Довести, що коли один корінь рівняння $x^2 + px + q = 0$ є $c$, то другий корінь дорівнює $-p - c$».

«Довести, що коли один корінь рівняння $x^2 + px + q = 0$ є с, то другий корінь дорівнює $\frac{q}{c}$».

Це дуже легкі задачі, сформульовані в них твердження безпосередньо випливають з теореми Вієта.

Бажано показати учням, як, користуючись теоремою Вієта, можна перевірити правильність розв'язання квадратного рівняння. Наприклад, розв'язавши рівняння $x^2$ - 6,5x + 9 = 0, дістали $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = 2$. Перевірити, чи правильно розв'язано рівняння, можна так:

$$4{,}5 + 2 = 6{,}5; \quad 4{,}5 \cdot 2 = 9.$$

Дістали другий коефіцієнт з протилежним знаком і вільний член. Значить, рівняння розв'язано правильно. Користуючись теоремою Вієта, деякі зведені квадратні рівняння можна розв'язувати усно.

Нехай, наприклад, треба розв'язати рівняння

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Добуток його коренів дорівнює 6, а їх сума дорівнює 5. Неважко догадатись, що це числа 2 і 3. Отже, $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

Теорему, обернену до теореми Вієта, можна використовувати і при розв'язуванні вправ на складання квадратних рівнянь за даними коренями.

*Приклад 1.6.* Скласти квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3.

*Розв'язання.*

$$-p = 2 + 3 = 5, \quad q = 2 \cdot 3 = 6.$$

Шукане рівняння таке: $x^2 – 5x + 6 = 0$.

Пізніше можна буде пояснити учням, як такі задачі розв'язувати іншим способом. А тепер треба зауважити, що сформульована вище задача взагалі невизначена. Ми склали одне рівняння, що має корені 2 і 3, а таких квадратних рівнянь існує безліч:

$$2x^2 – 10x + 12 = 0; \quad 0{,}5x^2 – 2{,}5x + 3 = 0 \text{ і т.д.}$$

Щоб позбутися цієї невизначеності, формулювання задачі можна уточнити: «Скласти зведене квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3» або «Скласти квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3, щоб його перший коефіцієнт дорівнював 5».

У шкільному збірнику є багато і таких вправ, в яких вимагається скласти квадратне рівняння, корені якого були б зв'язані певною залежністю з коренями іншого рівняння.

*Приклад 1.7.* Не розв'язуючи даного рівняння, скласти квадратне рівняння, корені якого були б на 5 більші за корені рівняння $x^2 + 6x + 8 = 0$.

*Розв'язання.* Нехай корені даного рівняння $x_1$ *і* $x_2$;

$$x_1 + x_2 = –6;$$

$$x_1 x_2 = 8.$$

Корені шуканого рівняння на 5 більші від коренів даного, тобто

$$z_1 = x_1 + 5;$$

$$z_2 = x_2 + 5.$$

Отже,

$$– p = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + 10 = – 6 + 10 = 4,$$

$$q = z_1 z_2 = (x_1 + 5)(x_2 + 5) = x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) + 25 = 3.$$

*Відповідь*: $z^2 – 4z + 3 = 0$.

*Дробово-раціональне рівняння* – це рівняння, у якого ліва або права частина чи обидві – дробові вирази [49, с. 94].

Щоб розв’язати дробово-раціональне рівняння, треба:

1) Перенести всі члени рівняння у ліву частину, тобто подати рівняння у вигляді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

2) Скористатися тим, що дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто прирівняти до нуля чисельник і розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Із знайдених розв'язків виключити ті, що перетворюють на нуль знаменник.

<u>*Приклад 1.8.*</u> Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}.$$

*Розв'язання.* Перенесемо всі члени рівняння у ліву частину та розкладемо на множники знаменники:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} - \frac{4-x}{x(x+2)} = 0.$$

Зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = 0.$$

Після елементарних перетворень маємо:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)} = 0,$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)} = 0.$$

Оскільки, дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x(x-2)(x+2) \neq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$x^2-5x+6=0,$$

$$a=1,\ b=-5,\ c=6.$$

$$D = 25-24 = 1, \sqrt{D} = 1.$$

$$x_1 = \frac{-(-5)+1}{2\cdot 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-(-5)-1}{2\cdot 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Повертаємося до системи:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Отже, $x = 3$.

*Відповідь.* 3.

Можна також подати дробово-раціональне рівняння у вигляді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\varphi(x)}$ і скористатися умовою рівності дробів з однаковими знаменниками, тобто прирівняти чисельники і розв'язати здобуте ціле раціональне рівняння $f(x) = g(x)$. Із знайдених розв'язків виключити ті, що перетворюють на нуль знаменники.

<u>*Приклад 1.9.*</u> Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{x^2+5}{x^2-5x} = \frac{6x}{x^2-5x}.$$

*Розв’язання.* Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$x^2 - 5x \neq 0,$$

$$x(x-5) \neq 0,$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Скористаємося умовою рівності дробів з однаковими знаменниками:

$$x^2 + 5 = 6x,$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$a = 1,\ b = -6,\ c = 5.$$

$$D = 36 - 20 = 16, \sqrt{D} = 4.$$

$$x_1 = \frac{-(-6)+4}{2 \cdot 1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$x_2 = \frac{-(-6)-4}{2 \cdot 1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Вравуючи ОДЗ данного рівняння, $x = 5$ – сторонній корінь.

Отже, $x = 1$ – корінь рівняння.

*Відповідь.* 1.

Якщо дробово-раціональне рівняння представлене у вигляді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\psi(x)}$, то його можна розв'язати використовуючи правило:

$$\begin{cases} f(x) \cdot \psi(x) = \varphi(x) \cdot q(x), \\ \varphi(x) \neq 0, \\ \psi(x) \neq 0. \end{cases}$$

<u>*Приклад 1.10.*</u> Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{5x-3}{x-3} = \frac{5x}{x-2}.$$

*Розв'язання.* Скористаємось правилом наведеним вище, маємо:

$$\begin{cases} (5x-3) \cdot (x-2) = (x-3) \cdot 5x, \\ x-3 \neq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 10x - 3x + 6 = 5x^2 - 15x, \\ x \neq 3, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -6, \\ x \neq 3, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ x \neq 3, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

Отже, $x = -3$ – корінь рівняння.

*Відповідь.* $-3$.

## Висновки до I розділу

Оволодіння основами математичної культури допомагає кожному учневі розвивати навчально-пізнавальну мотивацію, мислення, творчі здібності; успішно оволодівати дійовими математичними знаннями та вміннями. Це сприяє застосуванню знань при вивченні інших предметів, в житті, продовженні освіти, можливості отримання або зміни професії, враховує вікові та індивідуальні особливості, напрями розвитку суспільства, його культури.

Серед різних трактовок поняття «математична культура» ми виходимо з розуміння математичної культури як навчальної діяльності учнів, яка спрямована на свідоме оволодіння математичними знаннями та вміннями, в тому числі загальнокультурного характеру; вона розвиває особистість і організована з урахуванням необхідної суспільству культури.

Шкільний курс алгебри володіє широкими можливостями для розвитку таких важливих компонентів математичної культури учня, як обчислювальна, алгоритмічна культура, володіння математичною мовою та методом математичного моделювання.

Рівняння та їх системи часто виступають математичними моделями реальних процесів, тому вивчення теми «Раціональні рівняння та їх системи» має носити світоглядний, прикладний характер.

Вивчення математичної та навчально-методичної літератури дозволило нам систематизувати відомості про різні види раціональних рівнянь та способів їх розв’язання.

# РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ КОМПОНЕНТІВ АЛГЕБРАЇЧНОЇ КУЛЬТУРИ ПРИ ВИВЧЕННІ РІЗНИХ ВИДІВ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

## 2.1. Логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу з теми «Раціоннальні рівння та їх системи»

Тема «Системи рівнянь і нерівностей» традиційно спрямована на нарощування арсеналу прийомів, які використовуються учнями для розв'язування задач. Природно, що в класах з поглибленим вивченням математики зростає як кількість методів і прийомів, так і їх складність. Проте важливо не тільки сформувати конкретні навички розв'язування, але й продовжити формування математичної культури учнів щодо таких понять, як рівносильність систем рівнянь і нерівностей, система, що є наслідком даної. Невід'ємною частиною засвоєного учнями математичного апарату має стати обґрунтування правомірності перетворень під час розв'язування систем, відстеження рівносильності або навпаки, звуження чи розширення множини розв'язків [54, с. 9].

У чинній програмі з математики [53] тема «Раціональні рівняння та їх системи» залишається однією з основних тем курсу алгебри. На її вивчення відведено 24 години у 8 класі, хоча залежно від обраного підручника та на розсуд вчителя часові рамки теми можуть несуттєво змінюватися.

В класах з поглибленим вивченням математики на цю ж тему відводиться 40 годин згідно навчальної програми [54].

Розглянемо, як пропонується вивчення теми «Раціональні рівняння та їх системи» у різних підручниках алгебри, рекомендованих Міністерством освіти України. За основу візьмемо підручники з алгебри для 8-го класу наступних авторських колективів: А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір [47]; Г. Бевз, В. Бевз [6]; О. Істер [29]; В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко [38].

Результати аналізу діючих підручників з теми «Раціональні рівняння та їх системи» занесені в таблицю (додаток А).

На нашу думку, у всіх підручника тема «Раціональні рівняння та їх системи» представлена досить добре. Теоретичний матеріал, представлений у них, добре структурований, виділено основні означення та властивості для запам’ятовування. Після цього представлені приклади розв’язування задач. Задачний матеріал можна підібрати для кожного учня: є завдання легкого рівня, середнього і підвищеної складності.

У всіх підручниках простежується диференціація навчального матеріалу (різні види складності представлених вправ), крім цього підібрано історичні відомості та вислови відомих математиків, їх біографії. Опорні факти, схеми властивості виділено для хорошого сприйняття.

Слід зазначити, що у підручнику алгебри авторського колективу Г. Бевза та В. Бевз представлено і приклад розв’язування системи раціональних рівнянь та системи для самостійного розв’язування. У інших підручниках такого немає.

Отже, підручники відповідають програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. Вони можуть бути використані у класах з різною математичною підготовкою учнів. Застосування знань в практичній діяльності здійснюється завдяки розміщеним в кінці кожного параграфа набору прикладних задач. А велика кількість практичних завдань у підручниках сприяє практичному усвідомленню навчального матеріалу, побудові математичної моделі реальних процесів.

У табл. 2.1 наведено витяг з навчальної програми з математики [53] щодо вивчення раціональних рівнянь.

*Таблиця 2.1.*

**Витяг з навчальної програми з математики для 5-9 класів**

| Клас | Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів | Зміст навчального матеріалу |
|---|---|---|
| 5 | Учень/учениця:<br>пояснює, що таке: рівняння; розв’язати рівняння;<br>розв’язує: рівняння на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій; текстові задачі. | Рівняння |
| 6 | розв’язує: рівняння з використанням правил, що ґрунтуються на основних властивостях рівняння; текстові задачі за допомогою рівнянь. | Рівняння. Основні властивості рівнянь. |

*Продовж. табл. 2.1.*

| | | |
|---|---|---|
| 7 | наводить приклади: рівняння з однією та двома змінними; лінійних рівнянь з однією та двома змінними; системи 2-х лінійних рівнянь з двома змінними;<br>пояснює: що таке система двох лінійних рівнянь з двома змінними; скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними;<br>формулює означення: лінійних рівнянь з однією та двома змінними; розв'язку рівняння з двома змінними; розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома змінними;<br>описує способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними;<br>характеризує випадки, коли система двох лінійних рівнянь з двома змінними має один розв'язок; має безліч розв'язків; не має розв'язків;<br>складає: рівняння та системи рівнянь за умовою текстової задачі;<br>розв'язує: лінійні рівняння з однією змінною і рівняння, що зводяться до них; текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, вказаними у змісті способами; текстові задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними | Лінійне рівняння з однією змінною.<br>Лінійне рівняння з двома змінними.<br><br>Система двох лінійних рівнянь з двома змінними.<br><br>Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: графічним способом; способом підстановки; способом додавання.<br><br>Лінійні рівняння та їх системи як математичні моделі текстових задач |
| 8 | розв'язує вправи, що передбачають: розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу<br>розв'язує вправи, що передбачають: розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу;<br>наводить приклади: квадратних рівнянь; квадратних тричленів;<br>формулює:означення квадратного рівняння та квадратного тричлена; кореня квадратного рівняння; теорему Вієта;<br>записує: формулу коренів квадратного рівняння; формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники;<br>складає квадратне рівняння за умовою текстової задачі;<br>розв'язує вправи, що передбачають: знаходження коренів квадратних рівнянь; розкладання квадратного тричлена на множники; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв'язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач | Раціональні рівняння.<br>Рівносильні рівняння.<br><br>Квадратні рівняння.<br><br>Формула коренів квадратного рівняння.<br>Теорема Вієта.<br>Квадратний тричлен.<br>Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.<br>Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.<br>Квадратне рівняння та рівняння які зводяться до квадратних, як математичні моделі прикладних задач |

Проведемо логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу (табл. 2.2) та логіко-математичний аналіз формулювань з теми «Раціональні рівняння» у 8 класі (табл. 2.3).

*Таблиця 2.2.*

**Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми «Раціональні рівняння» у 8 класі**

| № | Поняття | Факти | Способи діяльності |
|---|---|---|---|
| 1. | Рівносильні рівняння | Властивості рівнянь з однією змінною | Знаходження рівносильних рівнянь, доведення рівносильності рівнянь |
| 2. | Раціональні рівняння | Схеми розв’язування раціональних рівнянь виду $\frac{A}{B} = 0$ та виду $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. | Розв’язування раціональних рівнянь різних видів;<br>- розв’язування задач на складання раціональних рівнянь. |

*Таблиця 2.3.*

**Логіко-математичний аналіз формулювань**

| № | Поняття | Формулювання означення | Вид означення, логічні зв’язки |
|---|---|---|---|
| 1. | Рівносильні рівняння | Два рівняння, які мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів | Словесне означення, через найближчий рід |
| 2. | Раціональні рівняння | Рівняння, ліва і права частина якого є раціональними виразами | Словесне означення, через найближчий рід |

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника алгебри для 8 класу [47], призначений для формування способів діяльності наведено в таблиці 2.4.

*Таблиця 2.4.*

**Логіко-математичний аналіз системи вправ**

| Способи діяльності | Завдання з підручника (авт. А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір) | | |
|---|---|---|---|
| | **Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності** | **Відпрацювання послідовності операцій, що входять у спосіб діяльності** | **Застосування способу діяльності (різні рівні)** |
| Знаходження рівносильних рівнянь, доведення рівносильності рівнянь | № 205 | №206 | №211 |
| Розв’язування раціональних рівнянь різних видів | №207 (1-3), №208 (1-2) | № 207 (4-7), №208 (3-5), №209 | № 212, № 217, №220, №221 |
| Розв’язування задач на складання раціональних рівнянь | №210 | №214 | №215, №216 |

Необхідність спеціальної роботи з формування в учнів умінь розв'язувати задачі за допомогою рівнянь врахована у побудові діючих підручників для 7-9-

х класів, де цьому питанню присвячено окремі пункти (стосовно лінійних рівнянь і їх систем, квадратних і раціональних рівнянь, систем рівнянь другого степеня).

Одночасно в підручниках чітко простежується використання задач як допоміжного засобу для формування нових понять. Наприклад, у 7-му класі за допомогою задачі вводиться поняття про систему рівнянь з двома змінними. [26].

Задача 2.1. Зошит і олівець разом коштують 96 к., причому зошит на 16 коп. дорожчий за олівець. Скільки коштує зошит і скільки олівець [45]?

Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (за допомогою дій) або склавши рівняння з однією змінною. Можна розв'язати її іншим способом.

*Розв'язання*

Нехай зошит коштує $x$ к., а олівець – $y$ к. За умовою задачі разом вони коштують 96 к., тобто

$$x + y = 96.$$

Оскільки зошит дорожчий за олівець на 16 к., то

$$x - y = 16$$

Маємо два рівняння з двома змінними. Щоб розв'язати задачу, треба знайти такі значення змінних $x$ і $y$, які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з рівнянь $x + y = 96$ і $x - y = 16,$ тобто знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою {. Складену за умовою задачі *систему лінійних рівнянь з двома змінними* записують так:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$ є розв'язком кожного з рівнянь системи, бо обидві рівності $56 + 40 = 96$ і $56 - 40 = 16$ правильні. Таку пару чисел називають *розв'язком системи* [3;26; 36].

У 8-му класі прикладом такого підходу може бути розгляд задачі, на основі якої вводиться поняття про розв'язування системи нерівностей з однією змінною.

Розв'язування задач складанням рівнянь сприяє кращому засвоєнню учнями понять «рівняння», «корінь рівняння», «система рівнянь», «розв'язок системи рівнянь» та усвідомленню прикладної спрямованості математики. Також забезпечується реалізація міжпредметних зв’язків та кращому розумінню методу математичного моделювання реальних процесів.

## 2.2. Дидактичні умови формування алгоритмічної культури учнів в процесі розвязування раціональних рівнянь та їх систем

Під дидактичними умовами формування алгоритмічної культури як складової алгебраїчної культури учнів ми розуміємо спеціально створені обставини процесу навчання, які є результатом системного відбору, конструювання, застосування елементів змісту, форм, методів та засобів навчання, завдяки яким процес буде успішним [57].

До дидактичних умов ефективного формування алгоритмічної культури учнів у процесі розв’язування різних видів раціональних рівнянь та їх систем, спираючись на дослідження Л. Осіпої [57] нами віднесено такі:

– створення позитивної мотивації учнів до навчально-пізнавальної діяльності, спрямованої на формування алгоритмічного мислення у процесі розв’язування різних видів раціональних рівнянь та їх систем;

– дидактичне конструювання змісту навчання, спрямованого на навчання розв’язуванню різних видів раціональних рівнянь та їх систем;

– здійснення навчального процесу на основі добору дидактично обґрунтованої системи обчислювальних задач, спрямованої на формування алгоритмічних вмінь і навичок;

– впровадження у навчальний процес інноваційних технологій навчання;

– реалізація міжпредметних зв’язків математики з іншими предметами природничо-математичного циклу;

– практична спрямованість змісту навчання та збільшення частки самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів;

– реалізація зворотного зв’язку та формування здатності до рефлексії у учнів.

Виявлені дидактичні умови є логічно пов’язаними і взаємозалежними і кожна з них є необхідною для ефективного формування алгоритмічної культури учнів. Відсутність або заміна однієї з умов унеможливлює успішне її формування учнів у процесі розв’язування різних видів раціональних рівнянь та їх систем. Обґрунтуємо кожну з наведених дидактичних умов.

*Створення позитивної мотивації учнів до навчально-пізнавальної діяльності, спрямованої на формування алгоритмічного мислення у процесі розв’язування різних видів раціональних рівнянь та їх систем.* Основним джерелом інтересу учнів до навчально-пізнавальної діяльності є, насамперед, її зміст. Досить часто зменшення інтересу до розв’язування задач з математики, фізики та інших предметів викликане прогалинами у знаннях певних питань, що накопичені за попередні роки навчання. Такі прогалини не дозволяють при вивченні нових понять повною мірою засвоїти їх зміст і, як наслідок, знижують мотивацію навчання та суттєво зменшують пізнавальну активність учнів на уроках. В більшості випадків це стосується суто технічних навичок, які не є головними під час розв’язування задачі. Широке використання педагогічних програмних засобів (ППЗ) зміщує акценти у доборі задач до багатьох тем у напрямку скорочення одноманітних, суто тренувальних вправ на закріплення тієї чи іншої операції, з одночасним збільшенням кількості обчислювальних задач практичного змісту, для розв’язування яких використовують різні типи алгоритмів. Це дає змогу залучати учнів до дослідницької роботи: здійснювати чисельний експеримент, досліджувати зміни результату в залежності від зміни умов задачі, перевіряти правильність висунутої гіпотези.

*Дидактичне конструювання змісту навчання, спрямованого на навчання розв’язуванню різних видів раціональних рівнянь та їх систем.* При доборі змісту слід дотримуватися таких вимог: зміст не повинен дублювати програмний матеріал з базового курсу математики; зміст має бути цікавим а його вивчення вмотивованим; зміст має реалізувати принцип пріоритету розвивальної функції, передбачати застосування активних методів навчання; зміст курсу має бути повним відносно проголошеної мети і завдань курсу; зміст має реалізовувати дидактичний принцип послідовності і систематичності, тобто вивчення нової теми має забезпечується знаннями з попередніх тем або тем базового курсу математики; мають бути діагностично визначені очікувані результати вивчення курсу та методика їх перевірки; зміст має бути реалістичним щодо застосування начально-методичних і матеріально-технічних засобів; відповідати віковим особливостям учнів; забезпечувати доступність навчання, орієнтуватися на зону найближчого розвитку.

*Здійснення навчального процесу на основі добору дидактично обґрунтованої системи обчислювальних задач, спрямованої на формування алгоритмічних вмінь і навичок.* Задачі відіграють важливу роль у розвитку мислення учнів, проте ефективність формування певних якостей особистості залежить від того, в якій мірі зміст задачі або системи задач відповідає сутності феномена, який формується. Тому, розглядаючи задачний підхід як одну з умов формування алгоритмічної культури учнів, ми добирали задачі, розв'язування яких активізує мисленнєві процеси, зокрема, сприяє розвитку логічного й алгоритмічного мислення учнів. Основою добору системи задач було визначено математичну структуру. Під час добору системи споріднених за математичним змістом предметних задач, для розв'язування яких слід використовувати конкретні математичні методи, ми дотримувались певних загально-методичних вимог та принципів: науковості, доступності, системності і послідовності, диференційованої реалізованості, наступності.

*Впровадження у навчальний процес інноваційних технологій.* Під час формування алгоритмічної культури учнів у процесі розв'язування обчислювальних задач ми використовували методи активного навчання, що інтенсифікують процес навчання (проблемне завдання, дискусія, «мозковий штурм»); орієнтують на розвиток самостійності учня як суб'єкта навчально-пізнавальної діяльності (самостійна робота, лабораторна робота); поєднують процес засвоєння знань і розв'язання практичних завдань (метод моделювання, пошукові методи тощо). Реалізація міжпредметних зв'язків математики з предметами природничо-математичного циклу. Розв'язування задач з використанням ППЗ, де комп'ютер розглядається як засіб підсилення здатності людини до опрацювання інформації (здійснення швидких розрахунків, моделювання реальних ситуацій та об'єктів, опрацювання результатів експерименту тощо).

*Практична спрямованість змісту навчання та збільшення частки самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів.* Поступове збільшення частки самостійності учнів під час розв'язування задач надає можливість вибору учнем темпу роботи у відповідності з індивідуальними особливостями та рівнем підготовки, що сприяє індивідуалізації, диференціації та гуманізації навчально-виховного процесу, розвиває в учнів вміння самостійно планувати власну навчальну діяльність, шукати раціональні шляхи її виконання (самостійно аналізувати можливості наявних ППЗ, добирати відповідні ППЗ для виконання поставленого завдання, будувати алгоритми розв'язування задачі у середовищі ІПЗ, критично оцінювати отриманні результати), що сприяє формуванню алгоритмічної культури учнів.

*Реалізація зворотного зв'язку та формування здатності до рефлексії у учнів.* Здатність особистості до рефлексії характеризується її готовністю до усвідомлення свого внутрішнього світу та світу іншої людини. Саме рефлексивна діяльність дає змогу учню проконтролювати і оцінити власний рівень сформованості алгоритмічної культури, щодо розв'язування різних видів раціональних рівнянь та їх систем. Цінність рефлексії з точки зору формування алгоритмічної культури учнів полягає в тому, що вона допомагає учням аналізувати та відповідно планувати власну діяльність.

Основними раціональними рівняннями з однією змінною, що вивчаються в курсі математики основної школи являються лінійні, квадратні та дробово-раціональні рівняння. Алгоритми розв'язування цих типів рівнянь наведемо нижче.

Під час розв'язування *лінійного рівняння* потрібно дотримуватися певного алгоритму.

*Алгоритм розв'язування лінійних рівнянь із однією змінною*

1) Якщо в рівнянні є вираз із дробовими коефіцієнтами, то треба помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.

2) Розкрити дужки.

3) Перенести всі доданки, що містять змінну, в одну частину рівняння, а ті, що не містять змінну, – в іншу.

4) Звести подібні доданки й звести рівняння до вигляду $ax = b$.

Зобразити цей алгоритм можна у вигляді такої схеми (рис.2.1):

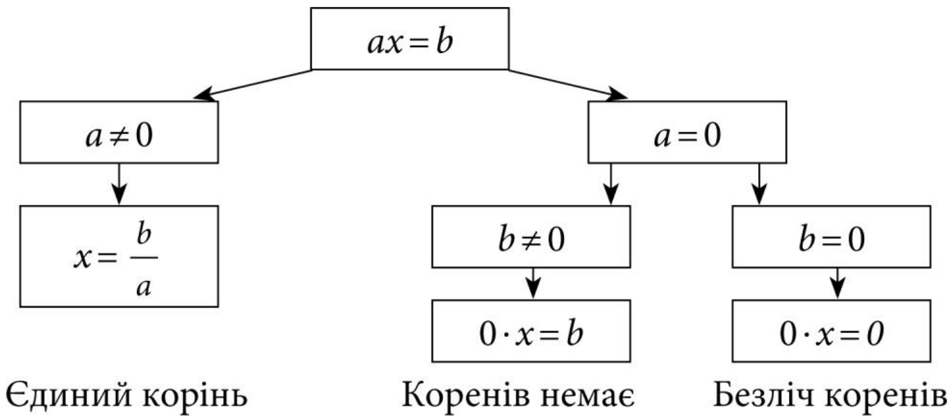



Рис. 2.1. Схема розв'язування лінійного рівняння з однією змінною

<u>*Приклад 2.1*</u>. Розв'яжіть рівняння $5(x+10)=2-x$.

*Розв'язання*

1) Розкриємо дужки: $5x+50=2-x$.

2) Перенесемо доданок $x$ у ліву частину рівняння, а доданок 50 — у праву частину, змінивши при цьому їхні знаки: $5x+x=2-50$.

3) Зведемо подібні доданки: $6x=-48$.

4) Розділимо обидві частини рівняння на 6: $x=-8$.

Відповідь: –8.

Застосовуючи тотожні перетворення й властивості рівнянь, ми послідовно заміняли одне рівняння на інше, рівносильне йому. Отже, коренем вихідного рівняння є число –8. У цьому прикладі вихідне рівняння було зведено до рівносильного йому лінійного рівняння $6x=-48$, у якому коефіцієнт при $x$ відмінний від нуля.

<u>*Приклад 2.2.*</u> Розв’яжіть рівняння $3x+10=3(x+3)$.

*Розв’язання*

$3x+10=3(x+3)$;

$3x+10=3x+9$;

$3x-3x=9-10$;

$0x=-1$.

Отримане рівняння не має коренів, отже, рівняння $3x+10=3(x+3)$ не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

<u>*Приклад 2.3.*</u> Розв’яжіть рівняння $(13x-15)-3(3+6x)=-5(x+4{,}8)$.

*Розв’язання*

$13x-15-9-18x=-5(x+4{,}8)$;

$13x-18x-15-9=-5x-24$;

$-5x+5x=15+9-24$;

$0x=0$.

Коренем цього рівняння є будь-яке число, отже, і коренем вихідного рівняння $(13x-15)-3(3+6x)=-5(x+4{,}8)$ є будь-яке число.

Відповідь: будь-яке число.

Розглянемо приклади розв’язування *квадратних рівнянь* різними способами та на їх основі сформулюємо загальний алгоритм розв’язування квадратних рівнянь.

*Розкладання лівої частини рівняння на множники*

<u>*Приклад 2.4.*</u> Розв’язати рівняння: $x^2+10x-24=0$.

*Розв’язання:* Розкладемо ліву частину рівняння на множники,

$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=x(x+12)-2(x+12)=$

$= (x + 12)(x - 2)$.

Отже, дане квадратне рівняння можна записати так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0.$$

Оскільки, добуток дорівнює 0, коли хоча б один із множників дорівнює 0, тому отримаємо:

$x + 12 = 0$ або $x - 2 = 0$,

$x = -12$ $\qquad$ $x = 2$.

Отже, $-12; 2$ є коренями рівняння.

Відповідь. $-12;\ 2$.

<u>*Приклад 2.5.*</u> Розв'язати рівняння: $x^2 - 21x + 98 = 0$.

*Розв'язання:* Розкладемо ліву частину рівняння на множники,

$x^2 - 21x + 98 = x^2 - 7x \cdot 3 - 14x + 98 = x(x - 7) - 14(x - 7) =$

$= (x - 7)(x - 14)$.

Отже, дане квадратне рівняння можна записати так:

$$(x - 7)(x - 14) = 0.$$

Оскільки, добуток дорівнює 0, коли хоча б один із множників дорівнює 0, то отримаємо:

$x - 7 = 0$ або $x - 14 = 0$,

$x = 7$ $\qquad$ $x = 14$.

Отже, 7 $i$ 14 є коренями рівняння.

*Відповідь*. 7; 14.

*Виділення повного квадрата*

<u>*Приклад 2.6.*</u> Розв'язати рівняння: $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

*Розв'язання:* Виділимо квадрат двочлена в лівій частині:

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 0,$$

$$(2x - 5)^2 = 0,$$

$$2x - 5 = 0,$$

$$2x = 5,$$

$$x = 2{,}5.$$

*Відповідь:* 2,5.

*Приклад 2.7.* Розв'язати рівняння: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

*Розв'язання:* Виділимо квадрат двочлена в лівій частині:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4.$$

Отже, дане квадратне рівняння можна записати так:

$$(x-3)^2 - 4 = 0,$$

$$(x-3)^2 = 4,$$

$x - 3 = 2$ або $x - 3 = -2$,

$x = 2 + 3$ $\quad$ $x = -2 + 3$,

$x = 5$ $\quad$ $x = 1$.

Отже, 1 і 5 є коренями рівняння.

Відповідь: 1; 5.

*Приклад 2.8.* Розв'язати рівняння, виділивши квадрат двочлена:

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$(x^2 - 2x \cdot 3 + 9) - 9 + 8 = 0$,

$(x-3)^2 - 1 = 0$,

$(x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = 0$,

$(x-4)(x-2) = 0$,

$x - 4 = 0$ або $x - 2 = 0$,

$x = 4$ $\quad$ $x = 2$.

*Відповідь.* 2; 4.

б) $5x^2 + 2x - 3 = 0.$ $| \times 5$.

$$25x^2 + 10x - 15 = 0$$

$(25x^2 + 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1) - 1 - 15 = 0$,

$(5x+1)^2 - 16 = 0$,

$(5x + 1 - 4)(5x + 1 + 4) = 0$,

$(5x-3)(5x+5) = 0$,

$5x - 3 = 0$ або $5x + 5 = 0$,

$5x = 3$ $\quad$ $5x = -5$,

$x = \frac{3}{5}$ $\quad$ $x = -1$.

*Відповідь.* $-1; \frac{3}{5}$.

*Розв'язування квадратних рівнянь за формулою*

Крім розв'язування квадратних рівнянь розкладанням лівої частини на множники та виділенням квадрата двочлена є ще інший спосіб – розв'язування рівнянь за формулою. Виведемо формулу коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помноживши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на $4a$, дістанемо:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 4axb + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 4axb + b^2 = b^2 - 4ac,$$

і далі, використавши формулу квадрата суми отримаємо:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називається *дискримінантом* і позначається $D$.

$D = b^2 - 4ac$ .

*Дискримінант* походить від латинського diskriminans – той, що *розрізняє* або *розрізняючий.* Дискримінант відіграє важливу роль. За його значенням можна визначити (розрізнити) скільки коренів має квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Встановимо залежність коренів від дискримінанта:

Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння рівносильне рівнянню

$$(2ax + b)^2 = D,$$

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2,$$

звідки

$$2ax + b = \sqrt{D},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

або

$$2ax + b = -\sqrt{D},$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

У цьому випадку дане рівняння має два дійсних корені, які відрізняються лише знаком перед $\sqrt{D}$. Коротко ці корені записують так:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідки $x = -\frac{b}{2a}$ – єдиний дійсний корінь (правильніше – два однакові дійсні корені)

Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має дійсних коренів. Але при цьому є можливість знайти два комплексних корені за формулою або, скориставшись наступною формулою, щоб не добувати корінь з від'ємного числа:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}.$$

*Приклад 2.9.* Розв'язати рівняння: $10x^2 - 7x - 3 = 0$.

*Розв'язання:* Маємо: $a = 10$, $b = -7$, $c = -3$, то

$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-3) = 49 + 120 = 196$, $D > 0$,

$$\sqrt{D} = \sqrt{196} = 14.$$

Рівняння має два різних корені: $x_{1,2} = \frac{7 \pm 14}{2 \cdot 10}$;

$x_1 = \frac{7-14}{20} = -\frac{7}{20}$, $x_2 = \frac{7+14}{20} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$.

Відповідь: $-\frac{7}{20}$; $1\frac{1}{20}$.

*Приклад 2.10.* Розв'язати рівняння: $x^2 + 5x - 3 = 0$.

*Розв'язання:* Маємо: $a = 1$, $b = 5$, $c = -3$, то

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$, $D > 0$, то $\sqrt{D} = \sqrt{37}$.

Отже, рівняння має два різних корені: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2 \cdot 1}$;

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

*Приклад 2.11.* Розв'язати рівняння: $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$.

*Розв'язання:* Маємо: $a = -0{,}5$, $b = 2$, $c = -2$, то

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0, D = 0,$ то

$\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0.$

Отже, дане рівняння має два однакових дійсних корені: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-0{,}5)}$; ;

$x_{1,2} = \frac{-2}{-1} = 2.$

*Відповідь:* 2 і 2.

<u>*Приклад 2.12.*</u> Розв'язати рівняння: $2x^2 - 3x + 2 = 0.$

*Розв'язання:* Маємо:

$a = 2, b = -3, c = 2,$ то

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 = -7, D < 0.$

Отже, дане рівняння дійсних коренів не має .

*Відповідь:* дійсних коренів не існує .

*Розв'язування квадратних рівнянь за формулою, якщо* b *– парне число*

Якщо другий коефіцієнт у рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$, $b = 2k$ – парне число, то дане рівняння матиме вигляд $ax^2 + 2kx + c = 0$. Знайдемо його дискримінант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Позначимо вираз $k^2 - ac$ через $D_1$ і, якщо $D_1 \geq 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння можна записати:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{тобто}$$

$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1 = k^2 - ac.$

<u>*Приклад 2.13.*</u> Розв'язати рівняння: $3x^2 - 14x + 16 = 0.$

*Розв'язання:* Маємо: $a = 3, b = -14, c = 16,$ то $k = -7,$ тоді

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1, D > 0,$ два різних корені:

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2, x_2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$

*Відповідь:* $2, 2\frac{2}{3}.$

<u>*Приклад 2.14.*</u> Розв'язати рівняння: $x^2 - 8x + 20 = 0.$

*Розв'язання:* Маємо: $a = 1, b = -8, c = 20,$ то $k = -4,$ тоді

$D = k^2 - ac = (-4)^2 - 1 \cdot 20 = 16 - 80 = -64, D < 0,$ рівняння дійсних коренів не має.

*Відповідь:* дійсних коренів не існує.

*Приклад 2.15.* Розв’язати рівняння: $-x^2 + 4x - 4 = 0$.

*Розв’язання:*

Маємо: Маємо: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$, то $k = 2$, тоді

$D = k^2 - ac = 2^2 - (-1) \cdot (-4) = 4 - 4 = 0$, $D = 0$, рівняння має два однакових дійсних корені: $x_{1,2} = \frac{-4}{-1} = 4$;

$x_{1,2} = 4$.

*Відповідь:* 4.

*Графічне розв’язування квадратних рівнянь*

Якщо в рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ перенести другий і третій члени в другу частину, то одержимо $ax^2 = -bx - c$.

Побудуємо графіки $y = ax^2$ та $y = -bx - c$. Графік першої функції парабола, що проходить через початок координат, а другої – пряма (рис. 2.2).

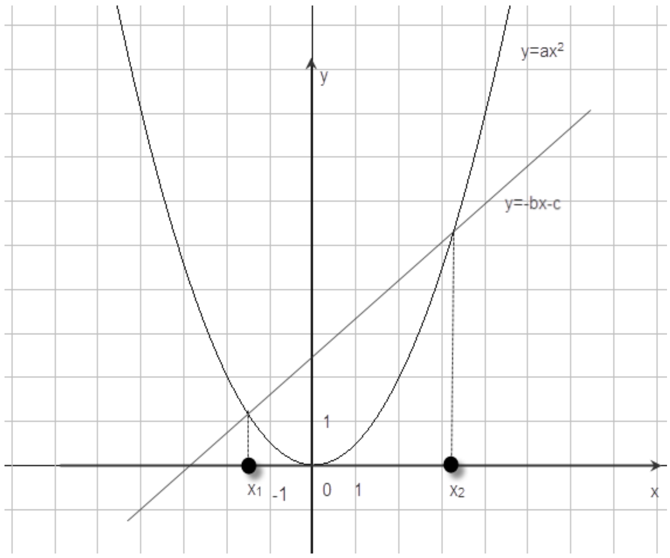



Рис. 2.2. Графіки функцій $y = ax^2$ та $y = -bx - c$

Можливі такі випадки:

– пряма і парабола можуть перетинатися в двох точках, абсциси точок перетину є коренями квадратного рівняння; (два корені).

– пряма і парабола можуть дотикатися в одній точці, абсциса якої є коренем квадратного рівняння; (один корінь)

– пряма і парабола не мають спільних точок, тобто квадратне рівняння не має коренів.

*<u>Приклад 2.16.</u>* Розв’язати рівняння: $2x^2 - x - 6 = 0$.

Перетворимо дане рівняння $2x^2 = x + 6$. Побудуємо графіки $y = 2x^2$ та $y = x + 6$.

Пряма і парабола перетинаються в двох точках з абсцисами $-1{,}5$ і 2 тому рівняння має два корені.

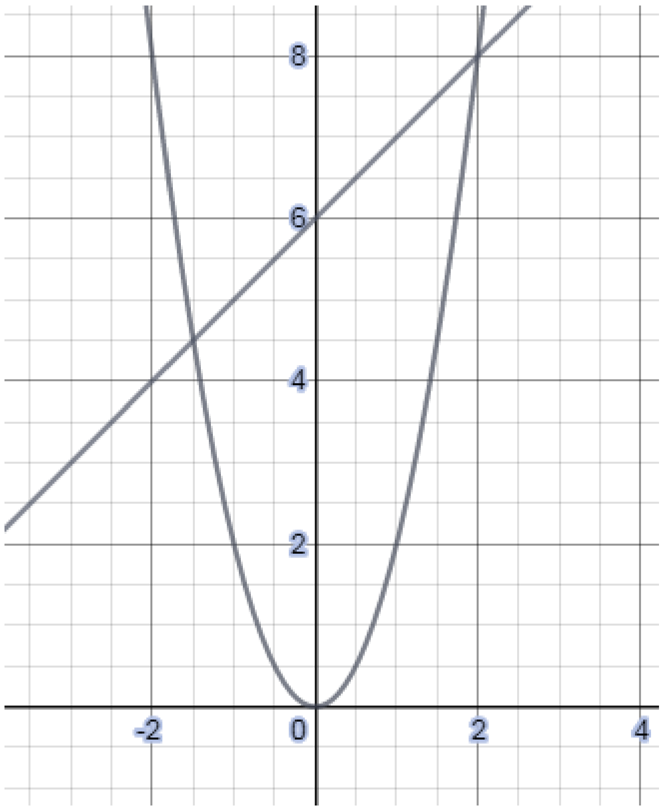



Рис. 2.3. Графіки функцій $y = 2x^2$ та $y = x + 6$.

*Відповідь:* $-1{,}5;\ 2$.

На основі розглянутих прикладів сформулювати узагальнений алгоритм розв’язування квадратних рівнянь:

1) перетворити рівняння, привівши його до стандартного вигляду;

2) виписати старший коефіцієнт $a$, другий коефіцієнт $b$ та вільний член;

3) в залежності від виду квадратного рівняння визначитись із способом його розв’язування (відповідні алгоритми продемонстровано на прикладах);\

4) сформулювати відповідь, розуміючи, що квадратне рівняння може мати два різних дійсних корені, два рівних дійсних коренів, не мати дійсних

коренів.

Для розв'язання дробово-раціонального рівняння доцільно діяти за наступним алгоритмом:

1) перенести всі доданки в один бік;

2) звести їх до спільного знаменника;

3) до одержаного рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, (де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі цілі вирази) застосувати умову рівності дробу нулю;

4) знайти корені чисельника;

5) перевірити, чи не дорівнює знаменник нулю при цих значеннях невідомого;

6) записати відповідь.

При розв'язуванні дробово-раціональних рівнянь виконуємо перетворення, що приводять їх до цілих, квадратних та алгебраїчних рівнянь вищих степенів.

Покажемо на прикладі використання цих перетворень.

*Приклад 2.17.* Розв'язати рівняння

$$\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)};$$

*Розв'язання.* Дане рівняння дробове. Щоб привести його до цілого виду, помножимо обидві частини на спільний знаменник всіх дробів:

$$x(x-1)^2(x+2)(x-3)$$

(так як $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$). Будемо пам'ятати, що отримаємо лиш наслідок вихідного рівняння:

$$3x(x-1)(x-3) = (x+2)(x-3) + 3(x-1)^2(x+2).$$

Після розкриття дужок і зведення подібних членів в кожній частині рівняння отримаємо:

$$3x^3 - 12x^2 + 9x = 3x^3 + x^2 - 10x.$$

Перенесемо тепер всі члени в ліву частину і зробимо зведення подібних членів, отримаємо:

$$-13x^2 + 19x = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$-x(13x - 19) = 0.$$

Отримаємо сукупність лінійних рівнянь:

$$-x = 0 \text{ і } 13x - 19 = 0, \text{звідси } \ x = 0, x = \frac{19}{13}.$$

Так як в процесі розв’язання ми використовували перетворення, які приводять до наслідків рівнянь, то необхідна перевірка. Підстановка до вихідного рівняння показує, що x = 0 являється по стороннім коренем (так як 0 не входить в область визначення рівняння), а $\frac{19}{13}$ задовольняє рівнянню.

Відповідь: $1\frac{6}{13}$

<u>*Приклад 2.18.*</u> Розв’язати рівняння

$$(x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0.$$

*Розв’язання.* Очевидно, що приведення лівої частини до стандартного виду многочлена лиш ускладнює рівняння. Тому необхідно шукати інші способи розв’язання.

*1-й спосіб:* Він оснований на розкладанні лівої частини рівняння на множники. Ліва частина рівняння дуже нагадує квадрат суми виражений $x^2$+$x$+4 і 4$x$. Але тоді третій доданок повинен бути на 15$x^2$, а 16$x^2$.

Це легко зробити слідуючим чином

$$(x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 - x = 0,$$

*або*

$$((x^2 + x + 4) + 4x)^2 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 5x + 4 - x)(x^2 + 5x + 4 + x) = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 6x + 4) = 0.$$

Отримаємо сукупність двох квадратних рівнянь:

$$x^2 + 4x + 4 = 0;$$

$$x^2 + 6x + 4 = 0.$$

Розв’язавши їх знайдемо множину коренів:

$$x_1 = -2; \ \ x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{5}.$$

*2-й спосіб* заснований на підстановці

$$x^2 + x + 4 = y$$

Тоді вихідне рівняння приймає вид:

$$y^2 + 8xy + 15x^2 = 0.$$

Цей квадратний тричлен легко розкласти на множники:

$$(y + 5x)(y + 3x) = 0.$$

Звідси знаходимо, що $y = -5x$ або $y = -3x$.

Підставляємо отримані вирази замість $y$ і отримаємо ті ж два квадратні рівняння.

Найбільші труднощі, з якими зустрічаються учні під час розв'язування рівнянь, виникають в першу чергу із-за невміння інтенсивно, зосереджено працювати. Не маючи достатнього досвіду в розв'язуванні рівнянь, вони не вкладаються в відведений час, не встигають проаналізувати всі запропоновані і реалізовані методи розв'язування.

Відомо, що багато рівнянь допускають декілька різних прийомів розв'язання. Можна дати будь-яке правильне розв'язання.

Відсутність чіткого уявлення про рівносильність рівнянь часто приводить до загублених коренів в процесі розв'язання рівнянь, або до одержання сторонніх коренів. Часто ліва і права частина рівняння множиться на спільний множник, що містить змінну, але якщо не врахувавши при цьому , що коли цей множник в області допустимих значень (ОДЗ) змінної перетворюється в нуль, то таке множення приводить до загублених коренів.

В багатьох немає чіткого уявлення про те, в яких випадках потрібно перевірка при розв'язуванні рівнянь, а в яких ні. Потрібно пам'ятати, що призначення перевірки – відкинути сторонні корені, які частіше всього проявляються при:

1) скороченні дробів на множники, що містять змінну.

Наприклад, скоротивши на ($x$+2) дробову частину рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} + x + 6 = 0$ і розв'язуючи його, одержимо $x = -2$ – це сторонній корінь;

2) взаємне спрощення подібних членів, що містить змінну в знаменнику дробу, під знаком радикалу, чи під знаком логарифма. Наприклад , відкинувши $-\frac{1}{x^2}$ і $\frac{1}{x^2}$, під час розв'язання рівняння $2x-\frac{1}{x^2}+x^2+\frac{1}{x^2}=0$, одержимо $2x+x^2=0$, звідки знайдемо $x_1=0$, $x_2=-2$ (нуль тут сторонній корінь).

Сторонні корені з'являються при розширенні ОДЗ невідомого, що входить в рівняння. Виявити їх можна перевіркою . Таким чином, процес розв'язання будь-якого рівняння потребує уважного аналізу. Під час переходу до кожного наступного запису рівняння потрібно вияснити, чи рівносильне це нове рівняння попередньому. Якщо ні, то до чого приведе перетворення.

Змістово-методична лінія рівнянь та нерівностей пронизує весь шкільний курс алгебри. В подальшому розв’язування ірраціональних та трансцендентних рівнянь буде зводитися до розв’язування раціональних рівнянь. Саме тому вміння розв’язувати їх основні типи (лінійні, квадратні, дробово-раціональні) повинно бути сформульовано на алгоритмічному рівні.

## 2.3. Методика навчання учнів розв’язуванню текстових задач на складання рівнянь та їх систем

Задачі є й метою, і засобом навчання та математичного розвитку школярів. З цієї характеристики ми й виходимо, розглядаючи розв'язування задач складанням рівнянь. Роль і призначення таких задач – допомогти учням оволодіти методом рівнянь, який є своєрідною формою аналітичного методу мислення. Адже розв'язуючи задачу за допомогою складання рівняння, ми починаємо міркувати з невідомого – з того, що нам треба знайти, а це характерна ознака застосування аналітичного способу розв'язування.

Важливе світоглядне значення таких задач полягає у тому, щоб у процесі їх розв’язування учні можуть ознайомитись з методом математичного моделювання.

Програма орієнтує на необхідність засвоєння учнями апарату рівнянь і нерівностей як основного засобу математичного моделювання прикладних задач. Треба мати на увазі, що складання рівнянь чи нерівностей за умовою задачі є прикладом конструювання простішої математичної моделі. Тому задачі виступають як мета навчання.

Необхідність спеціальної роботи з формування в учнів умінь розв'язувати задачі за допомогою рівнянь врахована у побудові діючих підручників для 7-9-х класів, де цьому питанню присвячено окремі пункти (стосовно лінійних рівнянь і їх систем, квадратних і раціональних рівнянь, систем рівнянь другого степеня) [5; 8; 26; 68].

Одночасно в підручниках чітко простежується використання задач як допоміжного засобу для формування нових понять. Наприклад, у 7-му класі за допомогою задачі вводиться поняття про систему рівнянь з двома змінними [3; 36].

У 8-му класі прикладом такого підходу може бути розгляд задачі, на основі якої вводиться поняття про розв'язування системи нерівностей з однією змінною [4; 37].

Розв'язування задач складанням рівнянь сприяє кращому засвоєнню учнями понять «рівняння», «корінь рівняння», «система рівнянь», «розв'язок системи рівнянь», «математична модель».

При такій організації роботи частина учнів розв'язують задачі в своїх зошитах самостійно, звіряючи свої відповіді з тими, що на дошці, а частина списує з дошки все розв'язання. У цьому є цінність, бо ті учні, які не зрозуміли пояснень учителя або забули попередній матеріал, списуючи з дошки, вчаться розв'язувати. Але в цьому і недолік такої роботи, бо завжди є такі учні, які при цьому вчаться тільки списувати. Тому розв'язувати задачі лише таким способом недоцільно. Час від часу треба давати задачі і для самостійного розв'язування.

Для зміцнення навичок подання допоміжних невідомих через основне невідоме доцільно продовжити тренування учнів у встановленні двобічних зв'язків між величинами, що фігурують в умові задачі: якщо одна величина більша від другої на якесь число (у кілька разів), то друга – менша від першої на це саме число (у стільки ж разів). З цього починається навчання учнів побудові математичної моделі.

З цією метою треба використовувати задачі з підручника. Наприклад, учитель пропонує перефразувати задачу так, щоб замість слова «більше» вживалося слово «менше», а зміст задачі не змінювався [26].

<u>*Задача 2.2.*</u> У трьох цехах заводу працює 1274 робітники. У першому цеху на 70 робітників менше, ніж у другому, а в другому – на 84 робітники менше, ніж у третьому. Скільки робітників працює в кожному цеху [45]?

*Розв'язування*

*Складаємо математичну модель задачі. Визначаємо невідому величину, що позначатимемо через х. Доцільно через х позначити число робітників у другому цеху, накласти умову, що* $x > 0$.

*Позначивши через х число робітників у другому цеху, записуємо вирази, що характеризують число робітників у першому та третьому цехах.*

*Аналізуючи умову задачі, складаємо рівняння та розв'язуємо його:*

Дістанемо рівняння:

$x + (x – 70) + (x + 84) =1274,$

$x + x – 70 + x + 84 = 1274,$

$3x + 14 = 1274,$

$3x = 1260$

$x = 420.$

*Обов'язково потрібно перевірити отримані розв'язки.*

*Далі записати відповідь (в кожному цеху скільки робітників).*

Відповідь: 350 робітників працює у І цеху, 420 робітників – у ІІ цеху, 504 робітники – у ІІІ цеху.

Доцільно дати учням домашнє завдання за варіантами відносно вибору основного невідомого. Наприклад, за *x* позначити число робітників другого цеху, а іншому варіанту – число робітників третього цеху.

Завдання перевіряється за заздалегідь підготовленою вчителем таблицею, яку після розбору учні записують у зошити.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **І цех** | $x$ | $x - 70$ | $x - 84 - 70$ |
| **ІІ цех** | $x + 70$ | $x$ | $x - 84$ |
| **ІІІ цех** | $x + 70 + 84$ | $x + 84$ | $x$ |

Записуються також відповідні рівняння.

Далі з’ясовується питання, яке ж невідоме доцільніше вибрати за основне. Мабуть, учні скажуть, що через $x$ доцільно було позначити кількість робітників ІІ цеху.

Учитель підкреслює, що під час розв'язування задач на поділ числа на нерівні частини у різницевому чи в кратному відношеннях для зручності беруть за основне невідоме найменшу величину (якщо це можливо). Проте це необов'язково.

Типовим недоліком при введенні методу рівнянь для розв'язування задач є поспішність, ігнорування того факту, що частина учнів не усвідомлює матеріалу на належному рівні. Розв'язання однієї задачі кількома способами буває значно корисніше, ніж розв'язання одним способом кількох задач. Після розв'язання задачі кількома способами чи введення якихось нових елементів важливо підводити підсумок проведеної роботи, акцентувати увагу учнів на необхідність засвоєння тих прийомів, які будуть потрібні їм у наступній діяльності.

У процесі розв'язування задач складанням рівнянь необхідно привчати учнів до поетапного самоконтролю і повторного аналізу всіх елементів розв'язування. Ці навички особливо важливі під час розв'язування задач за допомогою системи рівнянь другого степеня, бо тут учні іноді втрачають частину розв'язків. Знайдена ними відповідь може задовольняти умову задачі, але це не означає, що задача розв'язана правильно, бо розглянуто не всі випадки значень шуканих величин.

Само по собі рівняння, складене за умовою задачі, не є повною математичною моделлю реальної ситуації, відображеної в умові задачі. Воно не враховує фізичні властивості предметів і явищ, про які йдеться в задачі, реальних співвідношень між допустимими значеннями відповідних фізичних величин. Тому розв'язки рівняння можуть не відповідати дійсності, і треба обов'язково перевірити, чи задовольняють корені рівняння умову задачі, чи враховують змістовні обмеження для значень розглядуваних величин. Отже, відповідь, що дістали за складеним рівнянням, необхідно перевірити за змістом задачі. Для цього досить при значенні невідомого, яке дорівнює кореню рівняння, обчислити по черзі значення величин, що входять у задачу. Якщо значення якоїсь величини виходить за межі допустимого за змістом задачі, то випробуваний корінь не може бути розв'язком задачі. Щоб корінь рівняння був розв'язком задачі, він має задовольняти всім змістовним обмеженням величин, введених у задачу (явно чи неявно).

*Задача 2.3.* Човен, власна швидкість якого 18 км/год., пройшов 40 км за течією і 16 км проти течії річки, витративши на весь шлях 3 год. Яка швидкість течії, якщо відомо, що вона менша за 4 км/год [7]?

*Розв'язання*

Позначимо швидкість течії $x$ км/год і систематизуємо дані та умову задачі у вигляді таблиці.

| **Вид руху** | ***S*, км** | ***v*, км/год** | ***t*, год** |
|---|---|---|---|
| За течією | 40 | $18 + x$ | $\frac{40}{18+x}$ |
| Проти течії | 16 | $18 - x$ | $\frac{16}{18-x}$ |

Маємо рівняння за умовою задачі:

$$\frac{40}{18+x}+\frac{16}{18-x}=3.$$

Розв'язавши його, дістанемо $x_1 = 2$; $x_2 = 6$. Оскільки за умовою задачі $x<4$, то другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

У задачах, розв'язуваних за допомогою рівнянь, розглядаються найрізноманітніші залежності між різними величинами. Ось чому намагання методистів знайти і дати учням якесь загальне, універсальне правило для складання рівняння за умовою задачі не дали очікуваного результату. Інший підхід полягає в тому, що в розв'язуванні задач методом рівнянь виділяють два етапи, кожний з яких передбачає застосування певних методичних підходів.

Перший етап – складання алгебраїчних виразів на основі залежностей, даних у задачі, другий – складання самого рівняння. Обидва етапи мають свої специфічні труднощі, для подолання яких треба застосовувати особливі прийоми, використовувати додаткові вправи [26].

За діючою програмою з математики учні 5-6-х класів набувають певного досвіду складання буквених виразів, що виражають різноманітні залежності між величинами. Ця робота продовжується і в курсі алгебри, зокрема на матеріалі про функцію. Проте, як свідчить практика, набуті учнями навички складання виразів у багатьох випадках недостатні для розв'язування задач, вони потребують корекції і вдосконалення. Виникає необхідність спеціального тренування школярів у складанні буквених виразів, які є типовими для певних груп задач, за допомогою відповідно дібраних вправ.

Найбільшої уваги потребує подання в алгебраїчній формі величини, що знаходиться у даному різницевому або кратному відношенні з другою величиною.

Частина учнів ще і в 7-му класі відчуває труднощі при переведенні на мову алгебри залежностей «на стільки - то більше, менше», «у стільки-то разів більше, менше». З цими учнями необхідно додатково розв’язувати вправи такого, наприклад, змісту:

1. Число $x$ більше від числа 7 на 3. Складіть рівність.

($x - 7 = 3; \quad x - 3 = 7; \quad x = 7 + 3$).

2. Складіть рівність, якщо $a$ більше від 5 у 4 рази.

3. Сума двох чисел дорівнює 15. Одне з них $a$. Запишіть друге число.

4. Дано числа $x$ і $y$. На скільки перше число більше за друге? Друге більше від першого?

5. В одному кошику $c$ яблук, у другому у 2 рази, а в третьому у 4 рази більше, ніж у першому. Скільки яблук у другому кошику, у третьому, у трьох

кошиках разом?

6. У п'ятому класі $x$ учнів; у шостому на 3 учні більше, ніж у п'ятому, а в сьомому на 2 учні менше, ніж у шостому. Скільки учнів у сьомому класі?

7. На верхній полиці лежить $m$ книжок, на середній удвоє, а на нижній утроє більше, ніж на верхній. Скільки книжок на усіх трьох полицях?

8. В одному кошику $x$ груш, у другому на 12 груш більше, а в третьому на 25 груш більше, ніж у другому. Скільки груш у всіх трьох кошиках?

Використання подібних вправ для роботи на уроках залежить від рівня підготовки класу в цілому і наявності в ньому учнів, у знаннях яких є істотні прогалини. Відповідно організується фронтальна робота з класом, групова або індивідуальна робота. В окремих випадках виникає необхідність розгляду вправ пропедевтичного характеру в спеціально відведений час на початку або в кінці уроку поза зв'язком їх з основною темою. Найбільший ефект дає диференційована індивідуальна допомога учням, що відчувають труднощі в оволодінні програмним матеріалом.

У 7-му класі значну питому вагу мають задачі, зміст яких переважно полягає в тому, що даються дві нерівні однорідні величини, які підлягають певним змінам. Складаючи вирази на основі залежностей, даних в умові, учні повинні подати алгебраїчною мовою зміни, яких зазнавали дані величини.

Підготовчими тут можуть бути вправи такого змісту:

1. У двох паралельних класах по $x$ учнів. З одного класу перевели в другий двох учнів. Скільки учнів стало в кожному класі?

2. В одному ящику 20 кг гвіздків, а в другому 30 кг. Скільки кілограмів гвіздків буде в кожному ящику, якщо з другого перекласти в перший $x$ кг?

3. В одній пачці $a$ зошитів, у другій у 2 рази більше. Скільки зошитів буде в кожній пачці, якщо з більшої перекласти в меншу 10 зошитів?

Підготовчі вправи, спрямовані на актуалізацію необхідних знань, мають бути максимально наближені до змісту задач, які розв'язуватимуться в певному розділі.

Розглянемо це питання стосовно до задач з відсотковими розрахунками і відповідно задач з використанням запису числа у вигляді суми розрядних доданків та деяких інших.

Треба нагадати учням, що відсоток – це одна сота частина. Якщо якусь величину позначено через $x$, то один її відсоток становить 0,01 $x$, 25 % становлять $0{,}25x$, 130 % – відповідно $1{,}3x$ і т. п. Якщо число $a$ збільшили на 45 %, то це записують як $1{,}45a$, якщо число *в* зменшили на 18 %, то воно становить 0,82 свого попереднього значення, тобто дорівнює 0,82*в*. Цей останній випадок потребує особливої уваги, бо учні іноді неправильно визначають основне число в задачах з «нарощеним числом».

Проаналізуємо цей помилковий підхід на прикладі задачі, розв'язаної складанням системи двох лінійних рівнянь [26].

*Задача 2.4.* Токар і його учень повинні були виготовити за зміну 90 деталей. Завдяки тому, що токар перевиконав план на 20 %, а учень на 10%, вони виготовили 105 деталей. Скільки деталей виготовляли токар і його учень щодня [45]?

Діючи за шаблоном, деякі учні вибирають за невідомі кількості деталей, які треба знайти, тобто

$x$ − кількість деталей, що їх щоденно виготовляв токар,

$y$ − кількість деталей, що їх щоденно виготовляв учень.

Далі міркують так: після підвищення продуктивності праці токар став виготовляти щоденно $x$ деталей, отже, спочатку він виготовляв їх на 20% менше, тобто $0{,}8x$, а учень відповідно $0{,}9y$.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 105, \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 90. \end{cases}$$

дістають $x$ = 45, $y$ = 60, де $x$ – це кількість деталей, що їх щоденно виготовляв токар, а $y$ – кількість деталей, що їх щоденно виготовляв учень. Цей розв'язок суперечить здоровому глузду. Правильне розв'язання задачі дістанемо тоді, коли за основні невідомі вибрати «ненарощені числа», тобто кількості деталей, які виготовляв токар і його учень до підвищення продуктивності праці.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ 1{,}2x + 1{,}1y = 105. \end{cases}$$

дістанемо $x = 60$, $y = 30$, тобто $x + y = 90$. Після підвищення продуктивності праці маємо:

$$1{,}2x = 72;$$

$$1{,}1y = 33,$$

тобто

$$1{,}2x + 1{,}1y = 105 \text{ [74]}.$$

Під час розв'язування задач доводиться виконувати допоміжні відсоткові розрахунки з відомими числами: знаходити кілька відсотків від числа, число за його відсотками, обчислювати відсоткове відношення двох чисел. Усі такі розрахунки треба проводити, подаючи відсотки у вигляді дробів.

Розв'язуючи задачі з відсотками в класі або задаючи їх учням для домашньої роботи, учитель повинен щоразу думати про допомогу, яку треба надати учням (вказівку, застереження), щоб запобігти зайвих ускладнень і помилок.

Звернемося до задач, перед розв'язуванням яких учням треба нагадати особливості десяткового запису чисел, подання чисел у вигляді суми розрядних доданків. Щоб скласти рівняння для розв'язування таких задач, учні повинні знати, як зміниться число, якщо до нього дописати нуль, дописати справа одну цифру, дописати до даного числа одну цифру зліва.

Якщо до задуманого числа $x$ дописати справа нуль, то воно збільшиться у 10 раз, тобто дорівнюватиме $10x$. Якщо ж до задуманого числа $y$ дописати справа одну цифру, наприклад 5, то його запис буде $10y + 5$. Нарешті, якщо до даного трицифрового числа $x$ дописати зліва одну цифру, наприклад 7, то його запис буде мати вигляд $7000 + x$. Для розв'язування ряду інших задач треба вміти записати у вигляді суми розрядних доданків двоцифрові, трицифрові і т. д. числа.

Недостатній досвід оперування цими відомостями не дозволяє учням «з ходу» розв'язувати подібні задачі. Треба актуалізувати їх знання про десятковий запис чисел, виконати ряд вправ такого, наприклад, змісту:

1. Скільки одиниць містить число, яке має *а* десятків і *в* одиниць? Скільки одиниць буде в числі, яке дістанемо, коли в даному числі переставимо цифри десятків і одиниць?

2. Скільки одиниць у числі, що складається з *а* сотень, *в* десятків і *с* одиниць? Скільки буде одиниць, якщо цифри даного числа напишемо у зворотному порядку?

3. Як зміниться дане число, якщо до нього справа приписати два нулі, цифру 6?

4. На скільки збільшиться дане двоцифрове число, якщо до нього зліва приписати цифру 3? Те саме для трицифрового, чотирицифрового чисел.

Вміщені в кожному розділі задачі мають узгоджуватися з тими теоретичними відомостями, які вивчаються в певний час. Ці вимоги в основному додержані в діючих підручниках, проте труднощі, які відчувають учні під час самостійного розв'язування задач методом рівнянь, переконують в необхідності спеціальної роботи над деякими типовими залежностями, що фігурують в задачах.

Серед основних типів текстових уваги заслуговують так звані задачі на рух. Цим задачам відведено значне місце в 3–6-х класах, і учні набувають певного досвіду в їх розв'язуванні.

У підручниках 7-9-х класів задачі на рух представлені у всіх розділах, пов'язаних з розглядом рівнянь, нерівностей та їх систем. Завдання вчителя полягає в тому, щоб озброїти учнів міцними навичками в складанні математичних виразів для залежностей, типових для задач на зустрічний рух, рух у протилежних напрямках і в одному напрямку. Особливої уваги потребує розв'язування задач на рух за допомогою раціональних рівнянь у 8-му класі, бо ці задачі викликають в учнів труднощі. Вкажемо на необхідність певної підготовчої роботи до розв'язування задач на рух, де використовуються поняття «рух за течією», «рух проти течії», «швидкість човна у стоячій воді», «власна швидкість теплохода» тощо.

Учні, спираючись на власний життєвий досвід, без труднощів усвідомлюють відповідні залежності, але їх треба своєчасно розглянути.

Розв'язуючи задачі на рух за допомогою рівнянь у 5-6-х класах, учні набули певного досвіду встановлення залежностей між даними і шуканими величинами в таких задачах. І все ж розв'язування дещо ускладнених задач на рух у курсі алгебри викликає в частини учнів значні труднощі. Тут можуть допомогти настанови, що розкривають ці залежності в загальному вигляді. Слід підкреслити учням, що, формулюючи ці закономірності, ми маємо на увазі «ідеальні умови», за яких здійснюється рух: швидкості рухомих тіл сталі на всьому проміжку шляху, тобто їх рух рівномірний, рух відбувається по прямій, зустріч відбувається в точці тощо [5; 26; 68; 74].

Розв'язуючи з учнями задачі за допомогою рівнянь, учитель може зустрітися і з іншими залежностями між величинами, які або невідомі учням, або недостатньо усвідомлені в попередні роки. У кожному такому випадку необхідно своєчасно реагувати на труднощі, що виникають [5; 26].

Зустрічний рух

1) якщо два тіла рухаються назустріч одне одному з двох пунктів, то до зустрічі вони разом проходять усю відстань між цими пунктами;

2) при одночасному виході тіл з двох пунктів час їх руху до моменту зустрічі однаковий для обох тіл;

3) за одиницю часу рухомі тіла зближаються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (з розрахунку на цю саму одиницю часу).

Рух в одному напрямку

1) одне рухоме тіло може догнати друге лише тоді, коли швидкість його більша за швидкість тіла, яке рухається попереду:

2) якщо два тіла, відокремлені певною відстанню, рухаються в одному напрямку, ця відстань з кожною годиною (хвилиною, секундою) зменшується і перетворюється в нуль, коли тіло з більшою швидкістю доганяє тіло, яке має меншу швидкість. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу дорівнює

різниці швидкостей тіл;

3) при одночасному виході з одного й того самого пункту й рухові в одному напрямку тіл, що мають неоднакову швидкість, відстань між ними з кожною годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між рухомими тілами за одиницю часу дорівнює різниці їх швидкостей;

4) одне тіло дожене або випередить друге за стільки годин (хвилин, секунд), скільки разів різниця між швидкостями цих тіл міститься у відстані, що їх розділяє.

Ці залежності стануть зрозумілішими учням, якщо вдатися до графічних ілюстрацій, які виготовляють самі школярі з допомогою вчителя.

У задачах на рух в більшості випадків рухаються: два тіла назустріч один одному, два тіла в одному напрямі, одне тіло за і проти течії річки, рух по колу [26].

<u>*Задача 2.5.*</u> Швидкий потяг за розкладом повинен був пройти залізничний перегін AB без зупинки за 4 год. Але на відстані 150 км від A його затримали на 20 хв. Щоб прибути на станцію B за розкладом, потяг пройшов решту шляху з швидкістю на 15 км/год. більшою, ніж початкова. Знайти довжину перегону AB [45].

*Розв'язування*

*Спочатку учні, аналізуючи умову задачі, визначають який з видів руху представлено у задачі та будують її математичну модель. Далі визначають, яку величину позначатимуть через x.*

Нехай $x$ км – довжина перегону. Тоді швидкість потяга за розкладом $\frac{x}{4}$ км/год, а після зупинки він рухався із швидкістю $\left(\frac{x}{4}+15\right)$ км/год.

Отже, до зупинки він рухався $150 : \frac{x}{4} = \frac{600}{x}$ (год), а після зупинки –

$(x-150)\!:\left(\frac{x}{4}+15\right)=\frac{4(x-150)}{x+60}$ (год)

З урахуванням часу, затраченого на зупинку, потяг пройшов залізничний перегін за ($\frac{600}{x} + \frac{4(x\quad 150)}{x+60} + \frac{1}{3}$) (год), що за умовою дорівнює 4.

*Враховуючи умову задачі учні самостійно або за допомогою вчителя складають рівняння.*

Складемо рівняння:

$$\frac{600}{x} + \frac{4(x \quad 150)}{x+60} + \frac{1}{3} = 4.$$

*Далі розв'язують утворене рівняння (біля дошки чи в зошитах).*

Розв'яжемо його:

$$\frac{600}{x} + \frac{4(x \quad 150)}{x+60} - \frac{11}{3} = 0,$$

$3(600x + 36000 + 4x^2 - 600x) - 11x^2 - 660x = 0,$

$x^2 - 660x + 108000 = 0,$

$x_1 = 300,\ x_2 = 360.$

*Проводять перевірку отриманих коренів, врахувавши умову задачі.*

Перевірка показує, що обидва корені рівняння задовольняють умову задачі.

*Учні записують відповідь.*

Відповідь: 300 км або 360 км.

Під час вивчення раціональних рівнянь учні зустрінуться з так званими задачами «на спільну роботу» («на обернені величини»). Задачі цього типу звичайно містять відомості про виконання деякими суб'єктами певної роботи, об'єм якої не вказується і не являється шуканим. Припускаємо, що виконувана робота проводиться рівномірно, тобто з однаковою для кожного суб'єкта продуктивністю. Так як величина виконуваної роботи нас не цікавить, то об'єм всієї роботи приймаємо за одиницю.

Корисно знать стандартну схему розв'язування типових задач.

Нехай один робітник виконає деяку роботу за $x$ годин, та другий - за $y$ годин. Тоді за один час вони виконають відповідно $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{y}$ частин роботи. Разом за одну годину вони виконають $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ частину роботи. Звідси, якщо вони будуть працювати разом , то вся робота буде виконана за $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

У вирази, які складають для розв'язання цих задач, невідомі входять у знаменники, і для складання рівняння доводиться брати величини, обернені даним у задачі. Учителям відомі труднощі, що виникають в учнів під час розв'язування таких задач. І тут потрібні підготовчі вправи, які б наштовхнули учнів на правильний шлях міркувань.

Доцільно розпочати з розгляду задачі: один учень може зібрати огірки з дослідної ділянки за 20 хв, а другий з цієї самої ділянки може зібрати урожай за 30 хв. За який час вони зберуть огірки з цієї ділянки, працюючи разом?

Як правило, учні називають відповідь 25 хв. Тоді вчитель звертає їх увагу на те, що один учень може виконати цю роботу за коротший час — 20 хв. Чому ж при спільній роботі часу витрачатиметься більше? Так створюється проблемна ситуація, у розв'язанні якої важлива роль належить самому вчителю. Використовуючи при потребі наочні ілюстрації, він пояснює учням, що під час розв'язування задач на спільну роботу треба обов'язково визначати, яка частина роботи виконується за одиницю часу.

Далі учні розв'язують усні вправи такого змісту:

1. Робітник може виконати деяку роботу за 5 год. Яку частину роботи він виконає за 1 год?

2. Учень може прочитати книжку за $a$ год. Яку частину книжки він прочитає за 1 год?

3. Один трактор може зорати поле за $x$ днів, а другий на 2 дні швидше. Яку частину роботи виконає другий трактор за один день?

4. Бригада може виконати деяку роботу за $y$ днів. Яку частину роботи вона виконає за 3 дні, за $a$ днів?

5. Робітник може виконати половину (третину, четверту частину) дорученої йому роботи за $x$ днів. За скільки днів він виконає всю роботу, якщо працюватиме з однаковою продуктивністю?

Розв'язуючи задачі на спільну роботу, необхідно ще раз нагадати учням про «ідеальні умови», за яких розглядаються залежності, подані в цих задачах. Зокрема, коли йдеться про спільну дію двох труб чи про спільну роботу двох людей (механізмів), то вважають, що обсяг роботи, яку буде виконано за одиницю часу при заданій пропускній спроможності труб (продуктивності праці), залишається тим самим, незалежно від того, чи труби (робітники, механізми) діятимуть окремо чи разом.

## 2.4. Застосування програмних засобів при вивченні раціональних рівнянь та їх систем

Розвиток та вдосконалення сучасних інформаційних технологій та їх поступове проникнення в освітню сферу впливає на зміст, методи, засоби навчання. Останнім часом все частіше на уроках у середній школі використовують комп’ютер, зокрема на уроках математики використовують педагогічні програмні засоби: Gran1, «Алгебра 7-9 клас», «ТерМ» та інші. Програми можна використовувати практично на всіх заняттях математики, зокрема під час вивчення теми «Розв’язування рівнянь та їх систем».

Рекомендуємо у процесі моделювання уроку з ІКТ-супроводом врахувати методичні аспекти:

– цілеспрямованість (відповідність мети і завдань уроку проектованим результатам);

– оптимальність (оптимальний підбір змістового матеріалу та педагогічного програмного забезпечення);

– технологічність (дієвість та доцільність вибраних методів, форм, засобів);

– логічність (логіка пізнання та відпрацювання алгоритмічних процедур досягнення результату з використанням ІКТ);

– цілісність (наявність структурних зв’язків і залежностей між усіма етапами уроку).

У процесі використання ІКТ-супроводу, як засобу підвищення теоретичного рівня змісту уроку математики, необхідно враховувати:

– відповідність поставленої мети і завдань проектованим результатам;

– структуризацію теоретичного матеріалу;

– раціональність використання педагогічного програмного засобу;

– доцільність застосування ІКТ в діяльності вчителя та учнів;

– результативність використання ІКТ;

– технологічність формування предметної компетенції учнів.

Розглянемо можливості деяких ППЗ, що можна використовувати під час вивчення досліджуваної теми.

За допомогою програмного засобу *GRAN1* [64] можна графічно розв'язувати рівняння з однією змінною. Алгоритм розв'язування даного типу завдань складається з трьох етапів:

1. Побудувати графік залежності.

2. Відмітити на координатній площині точку перетину графіка функції з віссю *Ox*.

3. Визначити координати вказівника, які відображаються у верхньому рядку вікна *Графік*. Це і буде наближеним коренем рівняння. Отримані у такий спосіб значення є наближеними. Похибка виникає за рахунок того, що переміщення вказівника на *Робочому полі* має свій крок.

Наприклад, розв'язати рівняння $x^3 - 2x + 6 = 0$ графічним способом в середовищі педагогічного програмного засобу GRAN1 (рис. 2.4).

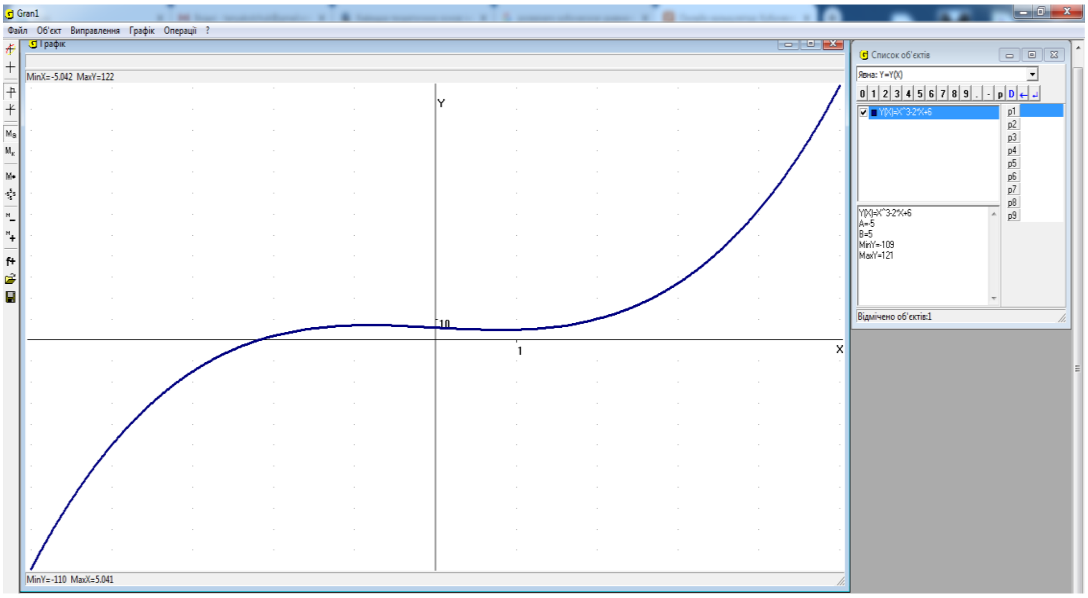



Рис. 2.4. Знімок з екрану ППЗ «GRAN1» при побудові графіка

Спочатку будуємо графік $y = x^3 - 2x + 6$, для цього:

– обираємо вид задання функції «явна»;

– створюємо новий об'єкт: $y(x) = x^3 - 2 * x + 6$;

– натискаємо «будувати графік».

Далі визначаємо координати вказівника, які відображаються у верхньому рядку вікна Графік, маємо $x \approx -2{,}174$ (рис. 2.5).

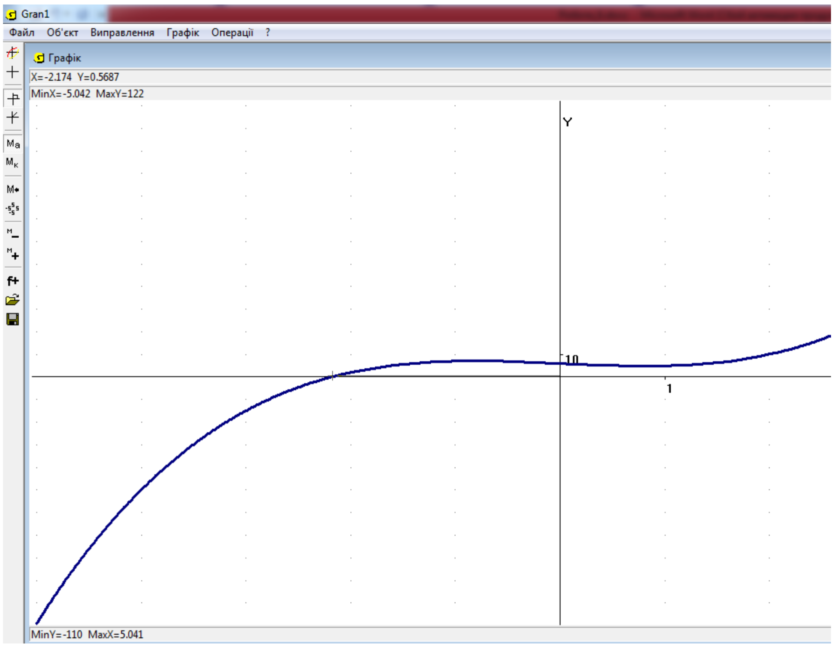



Рис. 2.5. Знімок з екрану ППЗ «GRAN1» при визначенні розв'язку рівняння

Для системи рівнянь алгоритм знаходження наближеного розв'язку виглядатиме так:

1. Побудувати графіки кожного з рівнянь системи.

2. Відмітити на координатній площині точки перетину побудованих графіків.

3. Визначити координати вказаних точок.

Наприклад, розв'яжемо систему рівнянь графічним способом:

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Для цього спочатку:

– обираємо вид задання функції «неявна»;

– створюємо два нові об'єкти: $x + 3 * y - 9 = 0$ та $2 * x - y - 4 = 0$;

– будуємо їх графіки (рис. 2.6).

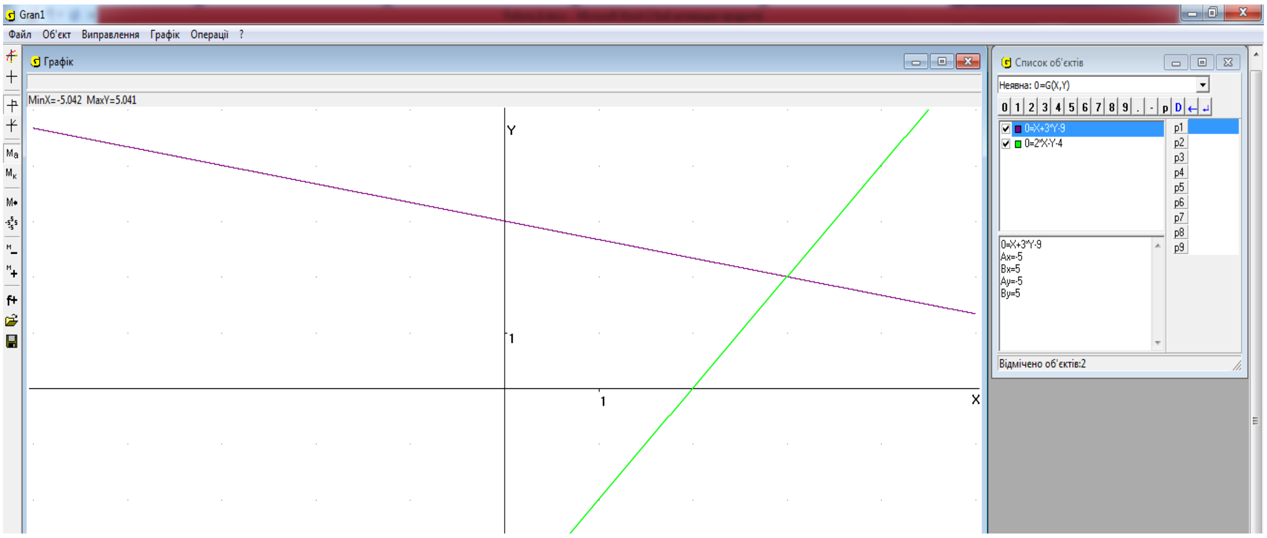



Рис. 2.6. Знімок з екрану ППЗ «GRAN1» при побудові графіків обох рівнянь системи

Далі визначаємо координати вказівника, що встановлений на точку перетину обох графіків, маємо наближений розв’язок системи $x \approx 3$, $y \approx 2$, (рис. 2.7).

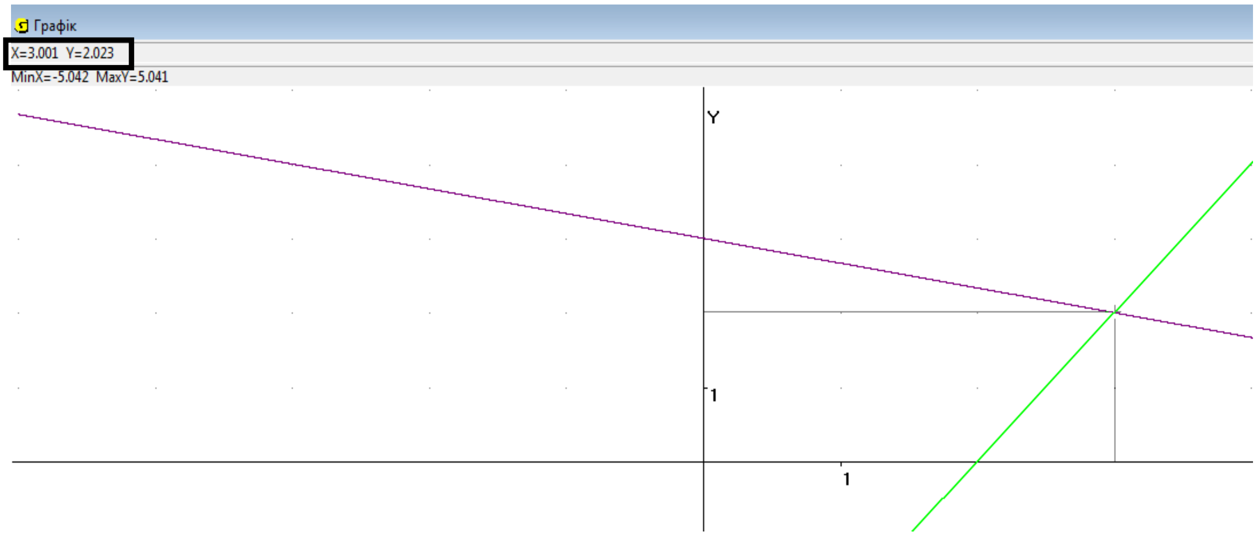



Рис. 2.7. Знімок з екрану ППЗ «GRAN1» при визначенні розв’язку системи рівнянь

Основне призначення *педагогічного програмного засобу «Системи лінійних рівнянь»* – комп'ютерна підтримка занять з алгебри при вивченні відповідної теми, а також при розв’язуванні арифметичних, фізичних і інших задач, математична модель яких є системою лінійних рівнянь. У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання для розв’язання практичних задач. Цим вирішується задача формування необхідних вмінь та навичок з даної теми. Система має декілька режимів роботи: виходу із тупікових ситуацій (експерт), режим покрокового розв’язування. Останній режим має дві системи команд: перша – спрямована на закріплення логіки розв’язування за допомогою певного способу. Наприклад, для способу підстановки передбачені команди типу:

– виразити з першого рівняння невідоме *x*;
– підставити отриманий вираз у друге рівняння;
– виразити з першого рівняння невідоме *y*;
– підставити отриманий вираз у друге рівняння;
– виразити з другого рівняння невідоме *x*;
– підставити отриманий вираз у перше рівняння;
– виразити з другого рівняння невідоме *y*;
– підставити отриманий вираз у перше рівняння.

Друга система команд більш розширена, яка, крім команд стосовно способу розв’язування, доповнена командами типу: розкрити дужки, привести подібні, перенести невідоме х в ліву частину рівняння і т.і. Таким чином, етапи розв’язування систем лінійних рівнянь не відрізняються від звичних для учня, який вказує послідовність дій, а всі обчислення виконує комп’ютер.

ППЗ «Системи лінійних рівнянь» підтримує всі способи, які вивчаються в загальноосвітній школі, а також розв’язування СЛР методом Крамера (для спеціалізованих класів і факультативних занять з математики) та текстових задач.

*Бібліотеку електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас»* [59] призначено для використання на уроках алгебри у 7-9 класах. За тематикою та змістом програмний засіб повністю забезпечує наочністю проведення уроків математики, якісно посилюючи дидактичні можливості вчителя як під час викладання теоретичного матеріалу, так і під час розв’язання задач.

Педагогічний програмний засіб дає можливість застосування усіх видів інтерактивних, аудіовізуальних та екранно-звукових засобів навчання, спрямованих на підвищення позитивної мотивації учнів до вивчення алгебри [60]. Це веде до посилення пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх мислення, формування активної позиції особистості в сучасному інформатизованому суспільстві.

Конспект уроку математики з використанням даного засобу наведено у додатку В.

*Програмно-методичний комплекс (ПМК) «ТерМ VII»* [62] призначений для комп'ютерної підтримки уроків алгебри у 7-му класі, активної математичної діяльності користувача. У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання, надбані на попередніх етапах навчання, для розв'язування практичних задач.

На рисунку 2.8 наведено знімок екрану ПМ Середовища розв'язування з ходом розв'язування квадратного рівняння.

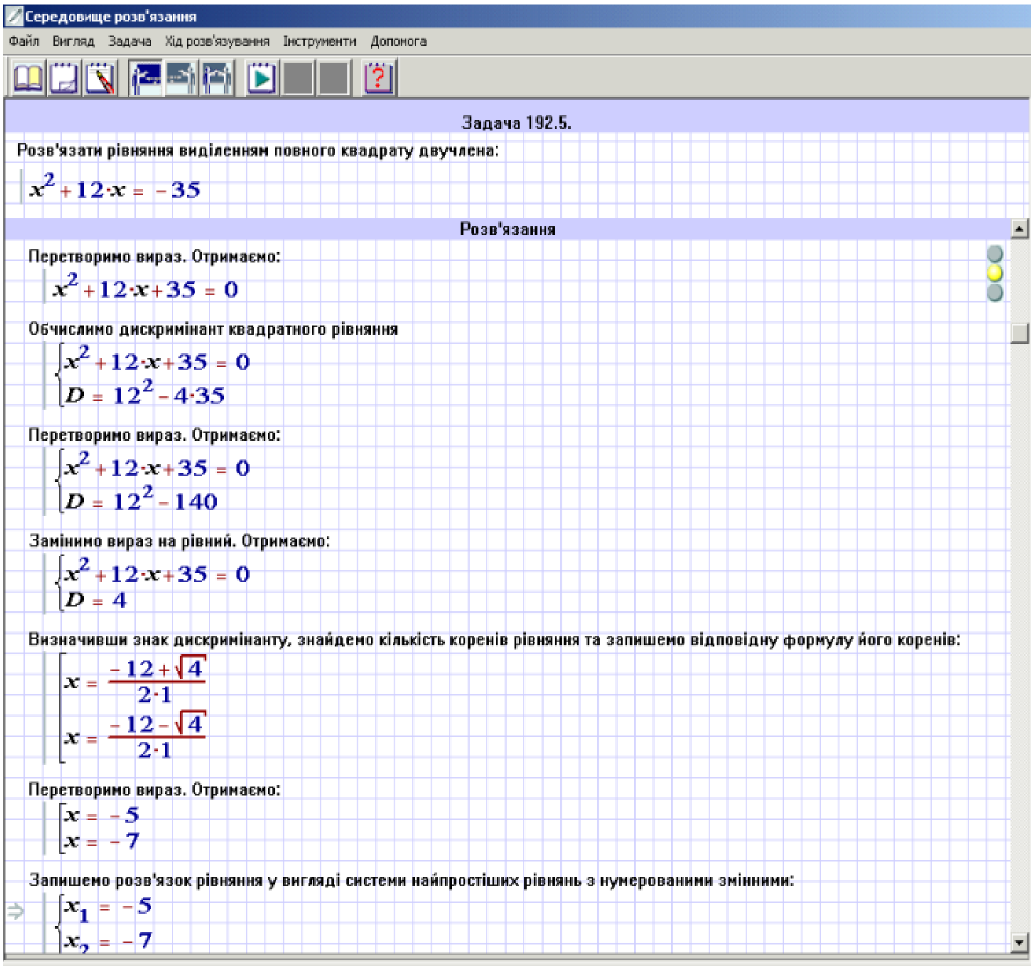



Рис. 2.8. Знімок екрану Середовища розв'язування з ходом розв'язування квадратного рівняння

ПМК містить програмні модулі (математичні інструменти) – Розв’язувач і Графіки. Модуль Розв’язувач призначений для розв’язування стандартних задач з алгебри. Модуль Графіки призначений для ілюстрації графічних методів розв’язування алгебраїчних задач [63].

*Розв’язування задач з математики онлайн* – це збірка онлайн програм для розв'язування рівнянь та їх систем. Наприклад, *онлайн калькулятор* [14] для розв’язування квадратних рівнянь працює за наступною схемою:

– спочатку треба ввести коефіцієнти в поля форми та натиснути кнопку розв’язати квадратне рівняння;

– переглянути отримане розв’язання.

За допомогою онлайн калькуляторів можна розв'язувати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними методом підстановки і способом додавання.

Використання вище наведених педагогічних програмних засобів забезпечує розвиток творчих здібностей учнів і бажання займатися самостійною роботою.

## Висновки до II розділу

Методика вивчення раціональних рівнянь та їх систем може бути побудована на основі алгоритмічного підходу. Зокрема, тема «Квадратні рівняння» дозволяє організувати алгоритмічну діяльність учнів на різних рівнях. Важливо для учнів усвідомлювати, що загальна формула коренів квадратного рівняння містить в згорнутому вигляді алгоритм розв’язання довільного квадратного рівняння.

Реалізовуючи прикладну спрямованість шкільного курсу алгебри,слід серйозну увагу приділити навчанню учнів розв’язуванню текстових задач різних типів. Саме на цьому матеріалі учитель може ознайомити учнів з методом математичного моделювання, що в свою чергу сприятиме мотивації вивчення математики.

Існує великий арсенал програмних засобів, що можуть бути використані при вивченні теми «Раціональні рівняння та їх системи». Завдання вчителя – розробити доцільну та ефективну методику їх використання в навчальному процесі.

# ВИСНОВКИ

Сучасна шкільна математична освіта покликана виховати грамотну та компетентну особистість, здатну реалізувати свій потенціал у виробничій та творчій діяльності у дорослому житті, зокрема розвиток у школярів вміння створювати та використовувати нескладні математичні моделі (навички математичного моделювання). Проведене дослідження дає змогу зробити наступні висновки.

Процес формування математичної культури школярів дуже складний та різноплановий. Проведене вивчення і аналіз навчальної та методичної літератури показав, що єдиного трактування щодо даного поняття та його складових не існує.

Під математичною культурою школярів розумітимемо таку їх навчальну діяльність, яка спрямована на свідоме оволодіння математичними знаннями та вміннями (в тому числі загальнокультурного характеру) яка розвиває особистість (навчально-пізнавальну мотивацію, образне і логічне мислення, досвід творчої, в тому числі дослідницької діяльності); і організована з урахуванням необхідної суспільству культури.

До поняття математичної культури відноситимемо: математичну грамотність (термінологічна грамотність, обчислювальна культура, графічна культура), логічну та алгоритмічну культуру, навички математичного моделювання (ключовим завданням математичної освіти є навчити учня інтерпретувати будь-яку подію чи ситуацію мовою символів та розв'язання її математичними засобами).

В результаті логіко-дидактичного аналізу навчального матеріалу курсу математики 5-6 класів та алгебри 7-9 класів було визначено, що його вивчення направлено на використання учнями різних етапів математичного моделювання, а саме: попередній аналіз об'єкта дослідження; побудова математичної моделі; вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі; аналіз одержаного результату, з'ясування його відповідності тому об'єкту, який моделюється.

Основними раціональними рівняннями з однією змінною, що вивчаються в курсі математики основної школи являються лінійні, квадратні та дробово-раціональні рівняння, тому доцільно вивчати алгоритми розв'язування цих типів рівнянь, таким чином формуючи алгоритмічну культуру учнів.

У 5-6 класах істотне місце у вивченні курсу математики займають текстові задачі, основними функціями яких є розвиток логічного мислення учнів та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Під час розв'язування текстових задач учні також вчаться використовувати математичні моделі.

У 7-9 класах значне місце відводиться застосуванню рівнянь до розв'язування різноманітних задач. Ця робота пронизує всі теми курсу. Важливе значення надається формуванню умінь застосовувати алгоритм розв'язування задачі за допомогою рівняння.

Також у дослідженні розроблено критерії підготовленості учнів до самостійної реалізації першого етапу розв'язування прикладної задачі методом математичного моделювання є сформованість у них відповідних умінь: виділяти істотні факти, що визначають досліджуване явище (процес); визначати основні взаємозв'язки між компонентами досліджуваної проблеми; аналізувати повноту даних, які є в умові задачі; вибирати математичний апарат для побудови моделі тощо.

Розроблено методичні рекомендації щодо формування в учнів умінь створення математичної моделі під час розв'язування прикладної задачі. Для цього доцільно дотримуватись такої послідовності дій: за допомогою допоміжних моделей виділити взаємозв'язки та істотні властивості об'єктів, що досліджуються в умові задачі; за допомогою знаково-символічних моделей створити неформальну модель задачі; створити математичну модель задачі.

Для організації ефективної навчальної діяльності учнів із розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання потрібно використовувати евристичні запитання; абстрагуватись від властивостей об'єкта, несуттєвих для побудови математичної моделі; допомагати учням чітко вказувати на відмінності між об’єктом та його моделлю; формулювати умову і вимогу прикладної задачі мовою математики.

У процесі розв'язування задач методом математичного моделювання необхідно привчати учнів до поетапного самоконтролю і повторного аналізу всіх елементів розв'язування.

Окрема увага в роботі приділялась методичним особливостям застосування програмних засобів Gran1, «Алгебра 7-9 клас», «ТерМ» та інших при вивченні раціональних рівнянь та їх систем. Оскільки їх використання забезпечує комп'ютерну підтримку уроків алгебри при розв’язуванні арифметичних, фізичних і інших задач, математична модель яких є раціональним рівнянням чи їх системою. У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання для розв’язання практичних задач.

Всі завдання дослідження виконано.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Арнольд В.И. Антинаучная революция и математика // Весник Российской академии наук. – 1999. – №6. – С. 553-558.
2. Асмус В. Ф. Проблема интуации в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.) – Москва: Мысль, 1965. – 312 с.
3. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2007. – 224 с.
4. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2008. – 288 с.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: посібник / Г. П. Бевз. – К. : Вища шк., 1977. – 376 с.
6. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 254 с.
7. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Зодіак-ЕКО, 2009. – 288 с.
8. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Випуск 8 / Г. П. Бевз, А. С. Білий. – К. : Радянська школа, 1972. – 208 с.
9. Березін С. Математична грамотність. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.confdbt.2007/theses/Berezin.pdf.
10. Бібік Н.М. Компетентнісний підхід: рефлексивний аналіз застосування / Н.М. Бібік //Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики /Під заг. ред. О.В. Овчарук. – К.: “К.І.С.”, 2004. – С. 47-52.
11. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 9 клас / М. І. Бурда, О. П. Вашуленко. Н. С. Прокопенко. – Х. : Гімназія, 2010. – 256 с.
12. Васильєв К. І. Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Раціональні рівняння» // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. – С. 58-60.

13. Васильєв К. І. Методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язуванню текстових задач на основі математичного моделювання» / К. І. Васильєв // «Інноваційні наукові дослідження: світові тенденції та регіональний аспект» (м. Запоріжжя, 29-30 листопада 2019 р.) – Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. – С. 4-8.

14. Вивчення математики онлайн. Онлайн калькулятор. Розв'язування квадратних рівнянь. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ua.onlinemschool.com/math/assistance/equation/quadratic.

15. Вигівська Л. Розв'язування задач за допомогою рівнянь. Алгебра, 7 клас / Л. Вигівська // Математика. – К. : Пед. преса, 2006, №16 (364). – С. 3-5.

16. Виленкин Н. Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты / Н. Я. Виленкин // Математика в школе. – 1998. - №4. – С. 7-14.

17. Власенко О. І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посібник. / О. І. Власенко. – К. : Вища шк., 1974. – 208 с.

18. Воронина Л.В. Математическая культура / Л.В. Воронина, Л.В. Моисеева // Педагогическое образование в России. – 2012. – № 3. – С. 37-44.

19. Гибш И.А. Развитие речи в процессе изучения школьного курса математики / И.А. Гибш // Математика в школе. – 1995. − № 6. –С. 12-15.

20. Глейзер Г.Д. Повышение эффективности обучения математике в школе: Книга для учителя: Из опыта работы / Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1989. – 240 с.

21. Глущенко Л. Задачі на відсотки / Любов Глущенко // Математика. – К. : Пед. преса, 2008, №23 (467). – С. 5- 9.

22. Глущенко Л. Розв′язування текстових задач / Любов Глущенко // Математика. – К. : Пед. преса, 2008, №31-32 (475- 476). – С. 22-48.

23. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. – М.: Наука, 1965 – 524 с.

24. Дорофеев Г. В. Гуманитарно ориентированное обучение математике: концептуальный аспект // Образование: Традиции и инновации в условиях

социальных перемен. – М.: ИОСО РАО, 1997. – С. 234-250.

25. Дорофеев Г.В. Математика для каждого / Г.В. Дорофеев. – М.: Аякс, 1999. – 292 с.

26. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: посібник для вчителя / О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек. – К. : Рад. шк.., 1991. – 254 с.

27. Забранський В.Я. Формування вмінь математичного моделювання як науково-методична проблема навчання математики в профільній школі / В.Я. Забранський, М.І. Голубенко // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 352 с.

28. Занков Л.В. Избранные педагогические труды. / Л.В. Занков. – М.: Педагогика, 1990. – 424 с.

29. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / О. С. Істер. – К. : Генеза, 2016. – 272 с.

30. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е.Н. Кабанова-Меллер. – М., 1981. – 96с.

31. Каратаєва Н.Г. Дидактические особенности применения нестандартних заданий для формирования основ алгоритмической культури учащихся: автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец: 13.00.01, Ростов на Дону: ЮФУ, 2011. – 21с.

32. Колмогоров А. Н. О понятии алгоритма // Успехи математических наук. – Российская академия наук, 1953. – Т. 5, № 4 (56). – С. 175-176.

33. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О.І.Глобін, М.І. Бурда, Д.В. Васильєва, В.В. Волошена, О.П. Вашуленко, Н.Д. Мацько, Т.М. Хмара. — К.: Педагогічна думка, 2015. – 245с.

34. Король Я.А. Піднесення культури математичної мови / Король Я.А. // Початкова школа. – 1995. – №1. – С. 10-12.

35. Костевська Л. Задачі на спільну роботу. Алгебра, 8 клас / Л. Костевська // Математика. – К. : Пед. преса, 2005, №10 (310). – С. 14-15.

36. Кравчук В. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 223 с.

37. Кравчук В. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 228 с.

38. Кравчук В. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. – 256 с.

39. Ланда Л. Н. Алгоритмизация в обучении / Под ред. и вступ. ст. Б.В. Гдедко. – М.: Просвещение, 1966. – 252 с.

40. Лодатко Є. О. Математична культура як феномен сучасного інформаційного суспільства / Є.О.Лодатко // Рідна школа. – 2004. – №9. – С. 24-26.

41. Лотман Ю.М. Семиосфера / Ю.М. Лотман. – СПб.: Искусство-СПБ, 2000. – 48 с.

42. Львов М. Шкільна система комп’ютерної алгебри ТерМ 7-9. Принципи побудови та особливості використання. / М. Львов // Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова, серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім.Драгоманова. – 2005. – №3 (10). – С. 160-168.

43. Математика. Програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах / М.І. Бурда, М.Ф. Городній та ін. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf.

44. Математический энциклопедический словарь. – М: Научное издательство «Большая российская энциклопедия», 1995. – 520 с.

45. Мерзляк А. Г.Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 8 класу. / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С.– Харків:

Гімназія, 2008. – 96 с.

46. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 256 с. : іл.

47. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 240 с. : іл.

48. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 272 с. : іл.

49. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 384 с. : іл.

50. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 416 с. : іл.

51. Монахов В. М. Особенности формирования алгоритмической культуры школьника при обучении алгебре / В. М. Монахов. – М. – 141 с.

52. Монахов В.М. Формирование алгоритмической культуры школьника при обучении математике. Пособие для учителей / В.М. Монахов, М.П. Лапчик, Н.Б. Демидович, Л.П. Червочкина. – М.: «Просвещение», 1978. – 94 с.

53. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/

54. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів / [М.І. Бурда, М.Ф. Городній, Д .А. Номіровський та ін.]. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://osvita.ua/doc/files/news/8/800/8.pdf.

55. Неуймин Я. Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика / Я. Г. Неуймин. – Л.: Наука, 1984. – 189 с.

56. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в

процессе обучения математике: кн. для учителя / В.Н. Осинская. – К.: Рад. школа, 1989. – 192 с.

57. Осіпа Л. В. Дидактичні умови формування алгоритмічної культури старшокласників у процесі розв’язування обчислювальних задач з використанням інструментальних програмних засобів / Л. В. Осіпа. - [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lib.iitta.gov.ua/6629/1/СтаттяДид_Суч.pdf.

58. Панченко Л. Математичне моделювання як метод наукового дослідження і навчального пізнання / Лариса Панченко // Математика в школах України. – 2008. – № 11-12. – С. 12-18.

59. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів України», версія 1. – Херсон, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см.

60. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9», версія 1.5. Методичні рекомендації вчителям. За редакцією М. С. Львова, В. А. Крекніна. – Випуск 1. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2006. – 59 с.

61. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9», версія 1.5. Настанова користувача. Версія 1 / За редакцією М. С. Львова, В. А. Крекніна. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2006. – 69 с.

62. Програмний засіб «Програмно-методичний комплекс Терм VII підтримки практичної навчальної математичної діяльності». Версія 2.0, реліз 03. Методичні рекомендації вчителям / За редакцією М. С. Львова, В. А. Крекніна, Н. А. Кушнір. – Випуск 2. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2004. – 24 с.

63. Програмний засіб «Програмно-методичний комплекс Терм VII підтримки практичної навчальної математичної діяльності». Версія 2.0, реліз 03. Інструкція користувача. – Випуск 2. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2004. – 78 с.

64. Програмний комплекс для підтримки навчання математики GRAN. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.zhaldak.npu.edu.ua/prohramnyi-zasib-gran.

65. Решение задач по математике онлайн. – [Електронний ресурс]. –

Режим доступу: https://www.math-solution.ru/math-task/sys-lin-eq.

66. Родин О. Концепция организационной культуры: происхождение и сущность / О. Родин // Менеджмент. – 1998. – № 7. – С. 67-77.

67. Скурихин В.И. Математическое моделирование / В.И. Скурихин, В.Б.Шифрин, В.В. Дубровский. – К.: Техника, 1983. – 270 с.

68. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. – 2-ге вид., доповн. і переробл. / З. І. Слєпкань. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.

69. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи / З.І. Слєпкань // Математика в школі. – №9. – 2003. – С. 3-4.

70. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики / Н.А. Тарасенкова. – Черкаси.: «Відлуння-Плюс», 2002. – 400 с.

71. Тарасенкова Н.А. Математика : підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закладів / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2014. – 304 с.

72. Теплицька А.О. Формування математичної культури учня як цільовий орієнтир в інноваційній шкільній освіті / А.О. Теплицька // Вісник Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія». Педагогічні науки, 2016. – № 1 (11) – С. 123-128.

73. Третяк М.В. До питання про математичну культуру / М.В. Третяк // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 352 с.

74. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи. Пособие для учащихся. 2-е изд., перераб. і доп. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – М. : Просвещение, 1984. – 175 с.

75. Целищева И.И. Моделирование при обучении решению текстовых задач / И.И. Целищева, С.А. Зайцева // Математика в школе. – 2008. – № 5. –

С. 36-44.

76. Чашечникова О.С. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів / О.С.Чашечникова, М.В.Мельникова, Л.В.Носаченко, Н.О.Шевченко, Ю.М.Тверезовська : Матеріали Всеук. наук.-метод. конф. (3-4 грудня 2009 р., м. Суми) [«Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики»]. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2009. – С. 103-105.

77. Черних Л.О. Мова вчителя математики як засіб формування навчально-комунікативних умінь учнів / Л.О. Черних, Н.В. Богатинська // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2011. – 352 с.

78. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.

79. Яглом И.М. Математика и культура // Информатика и культура. – Новосибирск, 1990. – С. 23-25.

80. Яценко С. Є. Аналіз стану проблеми особистісно зорієнтованого навчання у психолого-педагогічній літературі / С. Є. Яценко, Л.В. Спусканюк Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – №5 (12). – С. 45-50.

# ДОДАТКИ

## Додаток А

### Аналіз діючих підручників алгебри з теми «Раціональні рівняння»

| Складові | **«Алгебра», 8 клас, А.Мерзляк, В. Полонський, М. Якір** | **«Алгебра», 8 клас, Г. Бевз, В. Бевз** | **«Алгебра», 8 клас, О. Істер** | **«Алгебра», 8 клас, В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко** |
|---|---|---|---|---|
| **Загальне представлення теми** | | | | |
| *Структурні особливості теми* | *Матеріал в підручниках з заданої теми* | | | |
| | *§1. Раціональні вирази*<br>1. Раціональні дроби<br>2. Основна властивість раціонального дробу<br>3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками<br>4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками<br>5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня<br>6.Тотожні перетворення раціональних виразів<br>7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння. | *Раціональні вирази*<br>§ 1. Ділення степенів і одночленів<br>§2. Ділення і дроби<br>§3. Основна властивість раціонального дробу<br>§4. Раціональні вирази<br>§5. Додавання і віднімання дробів<br>§6. Множення дробів<br>§7. Ділення дробів<br>§8. Перетворення раціональних виразів<br>§9. Раціональні рівняння | *Розділ 1. Раціональні вирази*<br>§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби<br>§2. Основна властивість раціонального дробу<br>§3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками<br>§4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками<br>§5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня<br>§6. Ділення дробів<br>§7. Тотожні перетворення раціональних виразів<br>§8. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння | *§1. Раціональні вирази*<br>1. Раціональні вирази. Раціональні дроби<br>2. Основна властивість дробу<br>3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками<br>4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками<br>5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня<br>6. Ділення дробів<br>7.Тотожні перетворення раціональних виразів<br>8. Раціональні рівняння. |
| | *Представлення теоретичного матеріалу* | | | |
| | *§1. Раціональні вирази*<br>- означення дробового і раціонального виразів, допустимого | *Раціональні вирази*<br>- правило ділення виразів;<br>- правило ділення одночлена на одночлен;<br>- означення дробу, | *Розділ 1. Раціональні вирази*<br>- означення дробового раціонального та раціонального виразів; | *§1. Раціональні вирази*<br>- означення дробового раціонального та раціонального виразів; |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | значення змінних, раціонального дробу;<br>- означення тотожно рівних виразів, тотожності;<br>- основна властивість раціонального дробу;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками;<br>- правила множення і ділення та піднесення до степеня раціональних дробів;<br>- означення рівносильних рівнянь та їх властивості;<br>- означення раціонального рівняння та алгоритм його розв'язування. | звичайного та раціонального дробів;<br>- означення допустимого значення змінних;<br>- означення тотожно рівних виразів, тотожності;<br>- основна властивість раціонального дробу та наслідки з неї, скорочення дробів;<br>- означення дробового і раціонального виразів,<br>- алгоритм розв'язування найпростіших раціональних рівнянь;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками;<br>- правила множення і ділення та піднесення до степеня раціональних дробів;<br>- означення раціонального рівняння, рівняння-наслідку, рівносильного рівняння;<br>- алгоритм розв'язування раціональних рівнянь на основі основної властивості | - означення дробу, раціонального дробу;<br>- означення допустимого значення змінних та області допустимих значень змінних;<br>- основна властивість раціонального дробу;<br>- правило скорочення дробів;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками;<br>- означення спільного знаменника;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками;<br>- правила множення і ділення та піднесення до степеня раціональних дробів;<br>- означення рівносильних рівнянь та їх властивості;<br>- означення раціонального рівняння та алгоритми його розв'язування. | - означення допустимого значення змінних;<br>- означення тотожно рівних виразів, тотожності, тотожних перетворень виразів;<br>- основна властивість дробу;<br>- правило скорочення дробів та зведення дробів до спільного знаменника;<br>- правила зміни знаку чисельника та знаменника;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками;<br>- правила додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками;<br>- правила множення і ділення та піднесення до степеня раціональних дробів;<br>- означення рівносильних рівнянь та їх властивості;<br>- означення раціонального рівняння та алгоритм його розв'язування. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | пропорції;<br>- приклад розв’язання системи раціональних рівнянь. | | |
| | У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено жирним шрифтом і курсивом. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладом розв’язування задач. | Кожен параграф починається рубрикою «Використовуємо набуті компетентності», в якій представлені означення, властивості і твердження, які необхідно пригадати для ефективного сприймання і засвоєння нового матеріалу. Слова, надруковані жирним курсивом – нові алгебраїчні терміни. Виділені жирним шрифтом речення, позначені стрілочкою, є основними означеннями. Жирний текст в квадратних дужках – це властивості, правила та інші важливі твердження. У кожному параграфі підручника є рубрика «Хочете знати більше?», що містить додаткові теоретичні відомості. | Теоретичний матеріал виділено жирним шрифтом і червоною рамкою зі знаком оклику, також виокремленні запитання і завдання до вивченого матеріалу. У рубриці «Розв’яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» розміщені відомості, що необхідні для вдалого засвоєння нового матеріалу. Є і додатковий теоретичний матеріал для «неледачих учнів». | Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше». |
| | *Представлення системи задач з теми* | | | |
| | До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв’язування. Є прості, середні за складністю та важкі задачі. Є рубрика «Коли зроблено | Містить вправи різних видів складності: для усного розв’язування та рівнів А і Б. Є «відкриті задачі» для розвитку | Усі вправи розподілено відповідно чотирьох рівнів: початковий, середній, низький, достатній, високий. Є окремо завдання для «Домашньої | Рубрика «Приклади розв’язання вправ» допоможе ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв’язування та навчить правильно |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | уроки» зі складними задачами. | логічного мислення, дослідницьких умінь та творчості. У рубриці «Виконаємо разом» наведено зразки розв’язань важливих видів задач. Рубрику «Готуємося до тематичного оцінювання» складено у форматі ЗНО. | самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу». | записувати розв’язання. У кожному пункті систему вправ поділено на три види складності: А, Б та В. Рубрика «Вправи для повторення» призначена для періодичного повторення основних видів вправ та підготовки вивчення нового теоретичного матеріалу. Є задачі, що потребують нестандартних кроків розв’язування. У рубриці «Поміркуйте» є вправи для повторення, завданння для самоперевірки чотирьох видів складності. |
| | *Інші структурні особливості теми* | | | |
| | При викладі матеріалу використовується різний колір і шрифт. | Є рубрика «Скарбничка досягнень», використовуючи яку можна проаналізувати, повторити та покращити набуті знання та вміння. Матеріал для запам’ятовування виділено різним кольором, шрифтом, рамками. | При викладі матеріалу використовується різний колір і шрифт, позначки. | При викладі матеріалу використовується різний колір, шрифт, рамки. |
| *Методичні особливості теми* | *Характер викладу тем* | | | |
| | Спочатку вводиться теоретичний матеріал, який надалі пояснюється на прикладах. Отже, матеріал підручника викладений | Теоретичний матеріал розглядається спочатку на конкретних прикладах, а потім робляться | Спочатку вводиться теоретичний матеріал, який надалі пояснюється на прикладах. Отже, матеріал підручника викладений | Спочатку вводиться теоретичний матеріал, який надалі пояснюється на прикладах. Отже, матеріал підручника викладений |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | дедуктивним методом. | узагальнення. Отже, матеріал підручника викладений конкретним індуктивним методом. | дедуктивним методом. | дедуктивним методом. |
| | *Виділення матеріалу для заучування* | | | |
| | Основний матеріал, який необхідно знати виділений жирним шрифтом. | Основний матеріал, який необхідно знати виділено жирним шрифтом і фіолетовим прямокутником. | Основний матеріал, який необхідно знати надрукований у рожевому прямокутнику жирним шрифтом і виділений знаком оклику. | Основний матеріал, який необхідно знати виділений жирним шрифтом і вертикальною синьою лінією з відповідним записом «Означення» тощо. |
| | *Використання наочності* | | | |
| | Наочність застосовується для представлення і пояснення деяких завдань і теоретичного матеріалу: рисунки, схеми, таблиці. | Є схеми, рисунки для наочного уявлення теоретичного і задачного матеріалу. | Для представлення і пояснення деяких завдань застосовуються рисунки, таблиці. | Для представлення і пояснення деяких завдань застосовуються креслення, схеми, рисунки. |
| | *Інші методичні особливості теми* | | | |
| | Містяться позначення початку і закінчення розв'язування задачі, завдання «Перевір себе». Завдання виділені різним кольором (за рівнем складності). Є рубрика «Учимося робити нестандартні кроки» | Містяться позначення початку і закінчення розв'язування задачі, обґрунтування теорем. На початку параграфа «Використовуємо компетентності». В кінці кожного параграфа подано контрольні запитання, рубрика «Скарбничка досягнень». | У кінці кожного пункту містяться вправи для повторення та контрольні питання. Є рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих». | Є приклади розв’язань задач і вправ, у кінці кожного пункту містяться вправи для повторення та контрольні питання. Є рубрика «Поміркуйте» з логічними задачами. |
| **Висновки** | | | | |
| | Підручник наочний, кольоровий. Виклад характеризується чіткістю, алгоритмічністю, виділяються основні етапи міркувань з | Підручник наочний, кольоровий, чітко виділений основний матеріал. Багато історичних відомостей та висловів відомих математиків. Достатньо малюнків | Підручники наочні, кольорові, чітко виділений основний матеріал. Досить багато малюнків і креслень. Тема представлена детально, міститься велика кількість | Підручники наочні, чітко виділений основний матеріал. Достатньо малюнків і креслень. Є приклади розв’язання вправ. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | фіксацією уваги читача на виділених етапах. | і креслень. Тема представлена детально з розглядом великої кількості прикладів. | завдань на різні рівні складності. | |

## Додаток Б

### Методичні рекомендації щодо розв’язувань рівнянь в 5-му класі

Рівняння розв'язане тоді, коли знайдена невідома величина (її як правило позначають літерою ***x***). Якщо запис рівняння містить дужки в яких є ***x***, дії множення на ***x*** або ділення з ***x***, то на кожному етапі розв'язування вважаємо невідомою ту частину виразу, яка містить дужки в яких є ***x***, дії множення на ***x*** або ділення з ***x.***

Розглянемо детально приклади, що наведені в таблиці Б.1.

*Таблиця Б.1.*

**Приклади та методичні рекомендації щодо розв’язування рівнянь в 5-му класі**

<table>
<tr><th>Приклади</th><th>Методичний коментар</th><th>Запис в зошиті</th></tr>
<tr><td>Дано рівняння<br>9(143 - 13x)=234</td><td>Бачимо, що x міститься у дужках. Отже, на даному етапі величина (143 – 13x) є невідомою. Шукаємо її значення, міркуючи: «Яке число треба помножити на 9, щоб отримати 234?»</td><td rowspan="4">9(143 - 13x)=234<br>143 - 13x=234:9<br>143 - 13x=26<br>13x=143-26<br>13x= 117<br>x = 117:13<br>x = 9<br>Відповідь: 9.</td></tr>
<tr><td>Наступний запис:<br>143 - 13x=234:9<br>143 - 13x=26</td><td>На цьому етапі у нас вже дужок немає, але є від'ємник, що містить множення на х. Вираз містить від'ємник 13х. Отже на цьому етапі невідомою є величина 13x. Шукаємо її значення, міркуючи: «Яке число треба відняти від 143, щоб отримати 26?»</td></tr>
<tr><td>Наступний запис:<br>13x=143-26<br>13x= 117</td><td>Тепер невідомою величиною є x. Так як запис 13х означає, що 13 помножили на х, то міркуючи «Яке число треба помножити на 13, щоб отримати 117?», записуємо:</td></tr>
<tr><td>x = 117:13<br>x = 9<br>Відповідь: 9</td><td></td></tr>
<tr><td>Дано рівняння<br>17x-x+5x-19 = 170</td><td>Бачимо, що вираз в лівій частині рівняння містить подібні величини: 17x, x, і 5x. Дії над ними ми можемо виконати 17x-x+5x = 21x.</td><td>17x - x + 5x - 19 = 170<br>21x - 19 = 170<br>21x = 170 + 19<br>21x= 189<br>x = 189:21<br>x = 9<br>Відповідь: 9</td></tr>
</table>

*Продовж. табл. Б.1.*

| | | |
|---|---|---|
| *Наступний запис:*<br>*21x - 19 = 170* | На цьому етапі у нас є зменшуване, що містить множення на *x*. Вираз містить зменшуване 21*x*. Отже на цьому етапі невідомою є величина 21*x*. Шукаємо її значення, міркуючи: «Від якого числа треба відняти від 19, щоб отримати 170?» | |
| *Наступний запис:*<br>*21x = 170 + 19*<br>*21x= 189* | Тепер невідомою величиною є *x*. Так як запис 21*x* означає, що 21 помножили на *x*, то міркуючи «Яке число треба помножити на 21, щоб отримати 189?», записуємо: | |
| *x = 189:21*<br>*x = 9* | | |
| *Відповідь: 9* | | |

## Додаток В

## Конспект уроку алгебри в 8 класі з поглибленим вивченням математики

**Тема уроку.** Розв’язування раціональних рівнянь, що зводяться до квадратних.

**Мета уроку:**

**навчальна**: повторити розв‘язування квадратних рівнянь методом розкладання на множники, методом виділення квадрата двочлена, графічним методом, із застосуванням формул та теореми, оберненої до теореми Вієта; відпрацювати навички та вміння розв‘язувати раціональні рівняння, що зводяться до квадратних методом тотожних перетворень та методом введення нової змінної; навести приклади застосування квадратних рівнянь під час розв‘язування нестандартних завдань із зовнішнього незалежного оцінювання;

**розвиваюча:** розвивати алгебраїчну культуру, увагу, вміння знаходити та виправляти помилки, аналізувати різні способи розв‘язання та обирати найбільш раціональні;

**виховна:** виховувати почуття взаємодопомоги.

**Тип уроку.** Урок застосування знань, вмінь та навичок.

**Література:** 1) Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 384 с. : іл.

2) Мерзляк А. Г. Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 8 класу. / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. – Харків: Гімназія, 2008. – 96 с.

### Хід уроку.

**І. Організаційний етап.**

Доброго дня! Сідайте. Я рада сьогодні бачити ваші допитливі очі, чути ваші відповіді, а часом і питання. Тому побажаймо кожен собі , щоб на цьому уроці були:

«У» – усміхненими;

«С» – спокійними;

«П» – посидючими;

«І» – ініціативними;

«Х» – хоробрими.

Іншими словами я бажаю вам успіху!

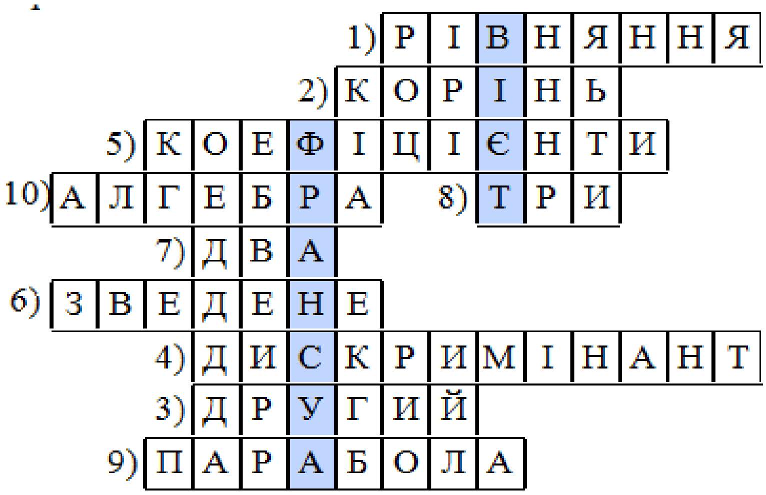
**II. Перевірка домашнього завдання**

Оскільки домашня робота була за зразком класної, то учні перевіряють домашнє завдання сусіда по парті за названими вчителем правильними відповідями.

**III. Актуалізація опорних знань.**

*1. Фронтальна робота з учнями.*

Повторення основних понять, пов’язаних з квадратними рівняннями шляхом заповнення кросворду, створеного за допомогою програми Microsoft PowerPoint.




1) Рівність, яка містить невідоме (рівняння)

2) Число, яке задовольняє рівняння (корінь)

3) Степінь квадратного рівняння (другий)

4) Вираз $b^2–4ac$ для квадратного рівняння (дискримінант)

5) Параметри *a, b* і *c* у квадратному рівняння (коефіцієнти)

6) Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює одиниці (зведене)

7) Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант додатний (два)

8) Скільки є видів неповних квадратних рівнянь (три)

9) Графік функції $y=x^2$ (парабола)

10) Наука, яка багато століть розвивалась як наука про рівняння (алгебра)

*2. Історичне повідомлення, підготовлено групою учнів. Презентація про Франсуа Вієта.*

Знаменитий французький математик Франсуа Вієт народився 1540 р. у містечку Фонтеней. Його батьки були заможними людьми. Вони мріяли, що син стане адвокатом. Після закінчення юридичної школи з 1559 р. Вієт почав свою адвокатську діяльність.

Вієт добився значних успіхів у галузі алгебри. Недарма його вважають творцем алгебраїчних формул та алгебраїчної символіки і навіть називають «батьком алгебри».

У той час алгебраїсти не користувалися сучасною символікою, а залежності між величинами встановлювали переважно геометричними засобами. Це дуже ускладнювало дослідження та обмежувало розвиток самої алгебри як науки. Вієт, вивчаючи твори італійських математиків Тартальї і Кардано, все більше переконувався у необхідності створити загальні методи у підході до вдосконалення теорії рівнянь.

Віет позначав великими буквами не тільки невідомі довільні числа, а й такі, яким у різних окремих випадках можна було надавати різних значень. Перші він позначав голосними, інші – приголосними.

Запровадивши позначення коефіцієнтів рівнянь буквами, Вієт розробив ряд важливих питань теорії рівнянь 1-4 степенів. Він сформулював і довів кілька теорем про взаємозв'язки між коренями і коефіцієнтами рівнянь, зокрема й теорему про зведене квадратне рівняння (теорема Вієта, відома зараз кожному учневі).

**IV. Повідомлення теми, мети та завдань уроку**

Тема нашого уроку: «Розв'язування рівнянь, що зводиться до квадратних». Його мета: повторити відомості про квадратне рівняння, щоб навчитися розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних.

**V. Застосування знань, умінь та навичок**

*1. Розв‘язування квадратних рівнянь різними способами.* Учням пропонується п’ять квадратних рівнянь. Діти аналізують коефіцієнти запропонованих рівнянь та вирішують, яким способом більш раціонально розв’язати те чи інше рівняння. Біля дошки працює одночасно декілька учнів.

1) Метод розкладання на множники.

$x^2+5x-14=0,$

$x^2+7x-2x-14=0,$

$x(x+7)-2(x+7)=0,$

$(x+7)(x-2)=0,$

$x=-7$ або $x=2$.

2) Метод виділення квадрата двочлена.

$x^2+10x-1=0,$

$x^2+10x+25-25-1=0,$

$(x+5)^2-26=0,$

$(x+5)^2=26,$

$x+5=\sqrt{26}$ або $x+5=-\sqrt{26},$

$x=\sqrt{26}-5,$ $x=-\sqrt{26}-5.$

3) Застосування формул коренів квадратного рівняння.

$3x^2+5x-2=0,$

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot3\cdot(-2)=25+24=49,$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2.$$

4) Графічний метод.

$x^2-x-2=0,$

$x^2=x+2$.

Для побудови графіків функцій $y=x^2$, $y=x+2$ та знаходження абсцис точок їх перетину застосувати програмний педагогічний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» (рис.В.1).

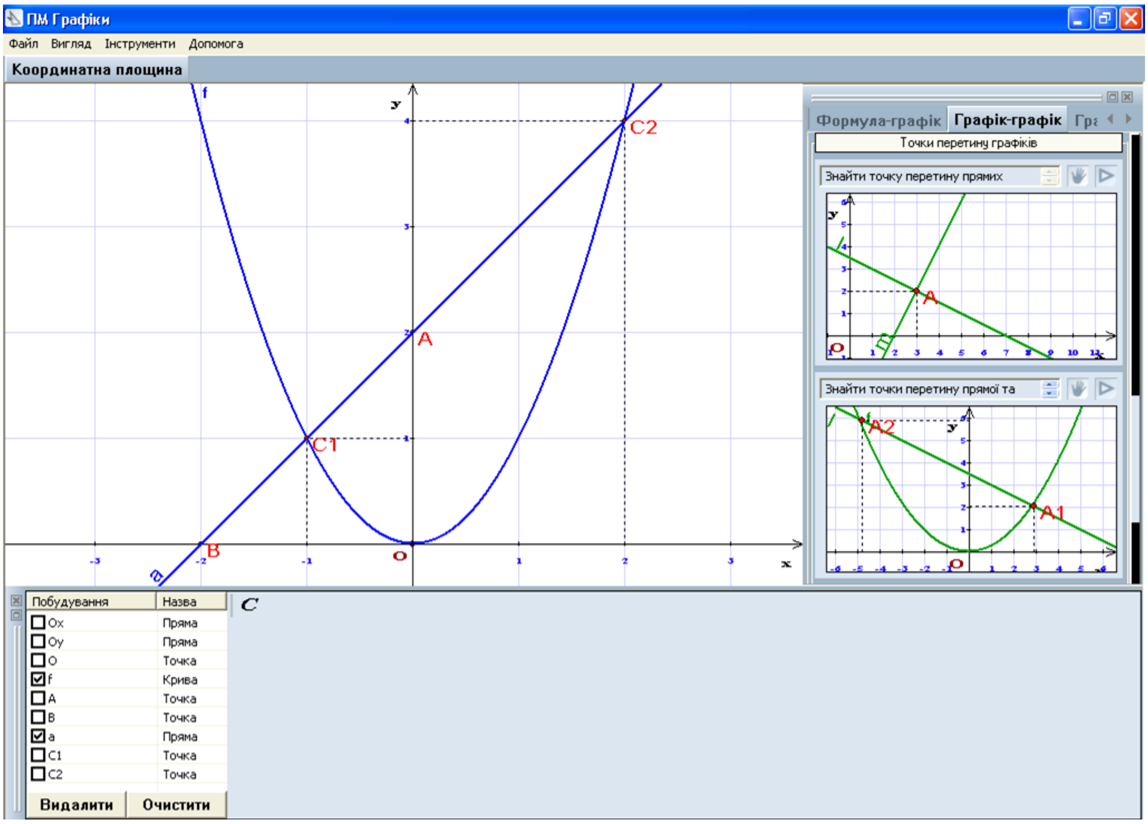



Рис. В.1. Знімок з екрану ППЗ «Алгебра 7-9 клас» при графічному розв'язанні рівняння

5) Застосування теореми, оберненої до теореми Вієта.

$x^2–x–2=0$.

Числа –1 та 2 будуть коренями даного рівняння, бо –1+2=1=–b, –1·2=–2=c.

Учитель: зараз попрацюємо з підручником. Розглянемо рівняння, що зводяться до квадратних. Один учень працює біля дошки, інші в зошитах.

1. Дробові раціональні рівняння.

***№36.7(7) на стор. 258*** підручника

$$\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25};$$

$$\frac{4}{(x-5)^2}-\frac{1}{x+5}-\frac{10}{(x-5)(x+5)};$$

$$\frac{4(x+5)-(x-5)^2-10(x-5)}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\frac{4x+20-(x^2-10x+25)-10x+50}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\frac{4x+20-x^2+10x-25-10x+50}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\frac{-x^2+4x+45}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-4x-45=0, \\ (x-5)^2(x+5)\neq 0; \end{cases}$$

1) $x^2-4x-45=0,$

$x^2-9x+5x-45=0,$

$x(x-9)+5(x-9)=0,$

$(x-9)(x+5)=0,$

$x=9,\quad x=-5.$

2) $(x-5)^2(x+5)\neq 0,$

$x\neq 5,\quad x\neq -5.$

Відповідь. x=9.

2. Цілі раціональні рівняння.

***№37.1(5) на стор. 266*** підручника

$$4x^4-9x^2+2=0.$$

Біля дошки працює два учні, розв’язуючи задане рівняння двома способами.

Розв‘язування біквадратного рівняння методом розкладання на множники:

$4x^4-9x^2+2=0,$

$4x^4-8x^2-x^2+2=0,$

$4x^2(x^2-2)-(x^2-2)=0,$

$(x^2-2)(4x^2-1)=0,$

$x^2=2,\qquad x^2=\frac{1}{4},$

$x = \pm\sqrt{2} \qquad x = \pm\frac{1}{2}.$

Розв‘язування біквадратного рівняння методом введення нової змінної:

$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0.$

Позначимо $x^2 = t$.

$4t^2 - 9t + 2 = 0,$

$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81 - 32 = 49,$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{9 + 7}{8} = \frac{16}{8} = 2,$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{9 - 7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Якщо $t = 2$, то

$x^2 = 2, x = \pm\sqrt{2}.$

Якщо $t = \frac{1}{4}$, то

$x^2 = \frac{1}{4}, x = \pm\frac{1}{2}.$

***№37.7(1) на стор. 267*** підручника

$(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0.$

Позначимо $x^2 - 2 = t$.

$t^2 - 8t + 7 = 0,$

$t^2 - 7t - t + 7 = 0,$

$t(t - 7) - (t - 7) = 0;$

$(t - 7)(t - 1) = 0,$

$t = 7, \quad t = 1.$

| Якщо t=7, то | Якщо t=1, то |
|---|---|
| $x^2 - 2 = 7,$ | $x^2 - 2 = 1,$ |
| $x^2 = 9,$ | $x^2 = 3,$ |
| $x = \pm 3.$ | $x = \pm\sqrt{3}.$ |

**VI. Самостійна робота**

Самостійну роботу учні виконують в парах. Із запропонованих трьох рівнянь різного рівня складності учні кожної пари самостійно обирають одне та записують на картці його розв‘язання. Потім здають картки для перевірки вчителю. Протягом уроку учні мають можливість збільшити кількість балів за рахунок відповідей біля дошки або усних доповнень.

***Завдання із збірника:***

***№158 (5) на стор. 31*** $4x^4-13x^2+3=0$ ***(на 7 балів)***

Метод розкладання на множники:

$$4x^4-13x^2+3=0,$$
$$4x^4-12x^2-x^2+3=0,$$
$$4x^2\left(x^2-3\right)-\left(x^2-3\right)=0,$$
$$\left(x^2-3\right)\left(4x^2-1\right)=0,$$
$$x=\pm\sqrt{3},\quad x=\pm\frac{1}{2}.$$

Метод введення нової змінної:

Позначимо $x^2=t$.

$$4t^2-13t+3=0,$$
$$D=b^2-4ac=\left(-13\right)^2-4\cdot4\cdot3=169-48=121,$$
$$t_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-\left(-13\right)+\sqrt{121}}{2\cdot4}=\frac{13+11}{8}=\frac{24}{8}=3,=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$
$$t_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-\left(-13\right)-\sqrt{121}}{2\cdot4}=\frac{13-11}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Якщо $t=3$, то

$$x^2=3,$$
$$x=\pm\sqrt{3}.$$

Якщо $t=\frac{1}{4}$, то

$$x^2=\frac{1}{4},$$
$$x=\pm\frac{1}{2}.$$

***№159 (5) на стор. 31*** $\frac{14}{x^2-2x}-\frac{21}{x^2+2x}=\frac{5}{x}$ ***(на 8 балів)***

$$\frac{14}{x^2-2x}-\frac{21}{x^2+2x}=\frac{5}{x},$$
$$\frac{14}{x\left(x-2\right)}-\frac{21}{x\left(x+2\right)}-\frac{5}{x}=0,$$

$$\frac{14(x+2)-21(x-2)-5(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=0,$$
$$\frac{14x+28-21x+42-5(x^2-4)}{x(x-2)(x+2)}=0,$$
$$\frac{-7x+70-5x^2+20}{x(x-2)(x+2)}=0,$$
$$\frac{-5x^2-7x+90}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\begin{cases}5x^2+7x-90=0,\\ x(x-2)(x+2)\neq 0;\end{cases}$$

1) $5x^2+7x-90=0,$

$$D=b^2-4ac=7^2-4\cdot 5\cdot(-90)=49+1800=1849,$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-7+\sqrt{1849}}{2\cdot 5}=\frac{-7+43}{10}=\frac{36}{10}=3{,}6;$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-7-\sqrt{1849}}{2\cdot 5}=\frac{-7-43}{10}=\frac{-50}{10}=-5.$$

2) $x(x-2)(x+2)\neq 0,$

$x\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq -2.$

Відповідь. –5 або 3,6.

***№160 (7) на стор. 32*** $(x^4-5x^2)^2-2(x^4-5x^2)=24$ ***(на 9 балів)***

$(x^4-5x^2)^2-2(x^4-5x^2)=24$

Позначимо $x^4-5x^2=t$.

$t^2-2t=24,$

$t^2-2t-24=0,$

$t^2-6t+4t-24=0,$

$t(t-6)+4(t-6)=0,$

$(t-6)(t+4)=0,$

$t=6,\quad t=-4.$

| | |
|---|---|
| Якщо $t=6$, то | Якщо $t=-4$, то |
| $x^4-5x^2=6,$ | $x^4-5x^2=-4,$ |
| $x^4-5x^2-6=0,$ | $x^4-5x^2+4=0,$ |
| $x^4-6x^2+x^2-6=0,$ | $x^4-4x^2-x^2+4=0,$ |

$$x^2(x^2-6)+(x^2-6)=0,$$
$$(x^2-6)(x^2+1)=0,$$
$$x^2=6, \qquad x^2=-1,$$
$$x=\pm\sqrt{6}, \qquad \textit{коренів немає.}$$

$$x^2(x^2-4)-(x^2-4)=0,$$
$$(x^2-4)(x^2-1)=0,$$
$$x^2=4, \qquad x^2=1,$$
$$x=\pm 2, \qquad x=\pm 1.$$

**VII. Підведення підсумків уроку**

1. Розглянути рівняння, які пропонуються в програмному педагогічному засобі «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» (рис. В.2).

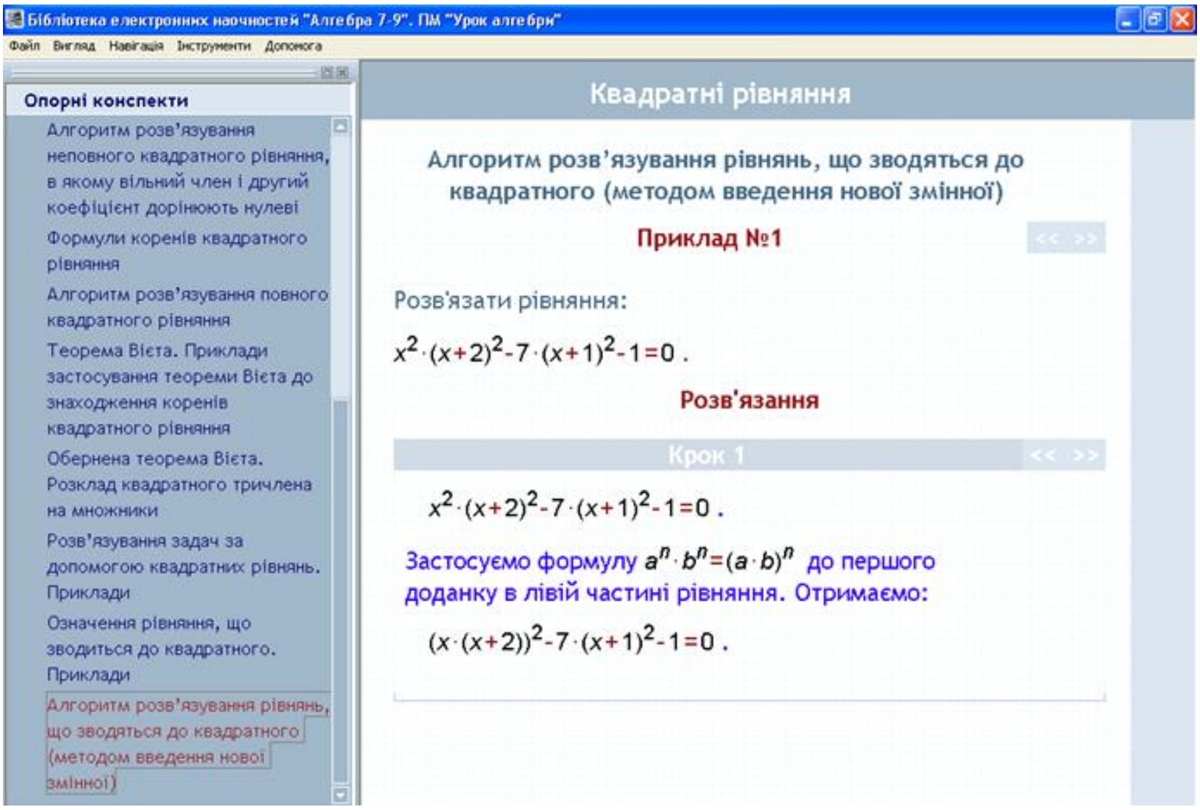



Рис. В.2. Приклад розв'язання рівняння в ППЗ «Алгебра 7-9 клас»

Спочатку проаналізувати крок 1, крок 2 та крок 3 розв‘язання рівняння (рис.В.3):

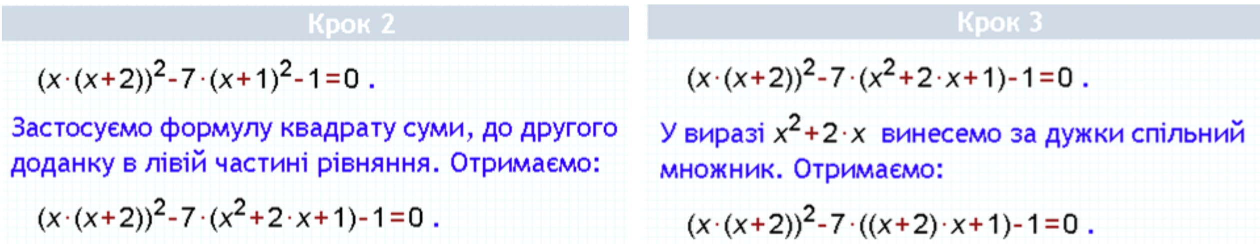



Рис.В.3. Приклад розв'язання рівняння в ППЗ «Алгебра 7-9 клас»

Далі запропонувати учням позначити $x(x+2)=t$ та продовжити розв‘язання даного рівняння на дошці:

$$t^2-7(t+1)-1=0,$$
$$t^2-7t-7-1=0,$$
$$t^2-7t-8=0,$$
$$t^2-8t+t-8=0,$$
$$t(t-8)+(t-8)=0,$$
$$(t-8)(t+1)=0,$$
$$t=8,\quad t=-1.$$

Якшо $t=8$, то

$$x(x+2)=8,$$
$$x^2+2x-8=0,$$
$$x^2+4x-2x-8=0,$$
$$x(x+4)-2(x+4)=0,$$
$$(x+4)(x-2)=0,$$
$$x=-4,\quad x=2.$$

Якшо $t=-1$, то

$$x(x+2)=-1,$$
$$x^2+2x+1=0,$$
$$(x+1)^2=0,$$
$$x+1=0,$$
$$x=-1.$$

2. Розглянути рівняння, яке пропонувалося випускникам 11-х класів під час зовнішнього незалежного оцінювання.

Група учнів отримала завдання знайти в Інтернеті тести для ЗНО та вибрати приклади з рівняннями, які зводяться до квадратних. Цей фрагмент уроку проводять самі учні (пропонують своїм однокласникам розв’язати рівняння, викликають до дошки, аналізують можливі помилки, виставляють бали за відповідь).

Укажіть корінь рівняння $\left|x^2-6x\right|=9$, який належить проміжку $(-2;1]$.

| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|---|---|---|---|---|
| $4-2\sqrt{2}$ | $2$ | $1$ | $3-\sqrt{2}$ | $3-3\sqrt{2}$ |

$$\left|x^2-6x\right|=9,$$

$$x^2-6x=9 \quad \textit{або} \quad x^2-6x=-9,$$
$$x^2-6x-9=0, \qquad x^2-6x+9-0,$$
$$x^2-6x+9-9-9=0, \qquad (x-3)^2=0,$$
$$(x-3)^2=18, \qquad x-3=0,$$
$$x-3=\pm\sqrt{18}, \qquad x=3.$$
$$x=3\pm\sqrt{18},$$
$$x=3\pm3\sqrt{2}.$$

Відповідь. $3-3\sqrt{2}$.

**VIII. Повідомлення домашнього завдання.**

Повторити § 6 п. 36, 37.

***№ 36.12 (1) стор. 259*** $\dfrac{3x+2}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+39}{x^3-8}=\dfrac{5}{x-2},$

***№ 37.2 (4) стор. 267*** $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$,

***№ 37.16 (3) стор. 268*** $10x^2(x-2)^2 = 9\left(x^2 + (x-2)^2\right)$ (до розв‘язання даного рівняння ознайомитися з вказівкою на стор. 350).