МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
В.о. завідувача кафедри
________ Д.Є.Бобилєв
«___» _____________2019 р.

Реєстраційний № _______
«___» ____________ 2019р.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ У ПОГЛИБЛЕНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Кваліфікаційна робота студента
групи МІм-14
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 Середня освіта (Математика)
Гарізана Антона Андрійовича
Керівник:
кандидат педагогічних наук
Армаш Тетяна Сергіївна
Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _______ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

У наш час геометрія для учнів основної школи є обов'язковою дисципліною. Її вивчення сприяє розвитку раціонального стилю мислення школярів із характерними для нього рисами обґрунтованості, критичності, раціональності, алгоритмічності. Разом з тим, геометрична освіта має велике значення для розвитку уяви, інтуїції, які є основою творчої діяльності особистості.

Однією з базових тем курсу планіметрії є змістова лінія «Трикутники». Теорія та задачі, які пов'язані з трикутником пронизують весь курс планіметрії. На думку багатьох вчителів, методистів трикутники, з одного боку – одна із найпростіших тем, яка зазвичай не викликає в учнів проблем під час її вивчення; з іншого боку, учні недооцінюють складність і необхідність цієї теми. Певну кількість задач на розв'язування трикутників включено до Зовнішнього Незалежного Оцінювання. А саме: 13,18% від обсягу задач ЗНО з 2007 по 2018 роки включно, враховуючи додаткові сесії.

Тому проблема вивчення теми «Трикутники» є однією з актуальних проблем сьогодення.

В даний час існує велика кількість методичної літератури з вивчення в закладах середньої освіти теми «Трикутники». Часті зміни навчальних програм з математики призвели до того, що ця тема мало вивчена в методичному плані. Внаслідок чого, методика вивчення трикутників вимагає постійного вдосконалення. У зв'язку з цим виникає проблема дослідження, яка полягає в тому, щоб розробити методичні рекомендації до вивчення теми «Трикутники» в курсі основної школи. Це і зумовило вибір теми дослідження «Методика вивчення трикутників у поглибленому курсі геометрії основної школи».

Мета дослідження полягає у виявленні методичних особливостей вивчення теми «Трикутники» в курсі геометрії основної школи.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **завдання**:

1) розглянути значення теми «Трикутники» в курсі геометрії основної школи та провести логіко-математичний аналіз теми;

2) провести порівняльний аналіз підручників базового та профільного рівнів;

3) розробити методичні матеріали для навчання учнів під час розв'язування задач на обчислення, побудову, доведення та дослідження в темі: «Трикутники»;

4) розробити факультатив з теми «Трикутники в геометрії Лобачевського».

Об'єктом дослідження є процес навчання учнів геометрії в закладах середньої освіти.

Предмет дослідження – методика навчання учнів розв'язувати задачі на обчислення, доведення, дослідження і побудову в темі «Трикутники» у курсі геометрії основної школи.

Під час роботи були використані такі **методи** педагогічного дослідження:

- теоретичні: аналіз навчально-методичної і психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження;
- емпіричні: спостереження, бесіди з викладачами та вчителями, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду, анкетування.

Практичне значення дослідження: розроблена добірка завдань за типами задач, складені таблиці, що демонструють методичні особливості при вивчені теми «Трикутник» в курсі геометрії основної школи. Розроблені матеріали можуть бути використані вчителями, студентами для проведення уроків з математики з тем, які пронизує лінія геометричних фігур.

Апробація дослідження.

- публікація на сайті vseosvita.ua методичної розробки: «Конспект уроку з геометрії на тему «Рівність трикутників» 7 клас»;

- публікація на сайті vseosvita.ua методичної розробки: «Конспект уроку з геометрії на тему «Теорема косинусів» 9 клас»;

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

1.1. Особливості вивчення трикутників в курсі геометрії закладів середньої освіти

Мета базової загальної середньої освіти: розвиток та соціалізація особистості учнів, формування їхньої національної самосвідомості, загальної культури, світоглядних орієнтирів, екологічного стилю мислення і поведінки, творчих здібностей, дослідницьких навичок і навичок життєзабезпечення, здатності до саморозвитку та самонавчання в умовах глобальних змін і викликів [20].

Випускник основної школи – це патріот України, який знає її історію; носій української культури, який поважає культуру інших народів; компетентний мовець, що вільно спілкується державною мовою, володіє також рідною (у разі відмінності) й однією чи кількома іноземними мовами, має бажання і здатність до самоосвіти, виявляє активність і відповідальність у громадському й особистому житті, здатний до підприємливості та ініціативності, має уявлення про світобудову, бережно ставиться до природи, безпечно й доцільно використовує досягнення науки і техніки, дотримується здорового способу життя.

Курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності.

Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти. До них належать:

- формування *ставлення* до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу;
- забезпечення *оволодіння* математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- розвиток *умінь* працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;
- формування *здатності* оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації [20].

Крім цих загальних освітніх завдань в основній школі реалізуються такі специфічні для даного етапу навчання математики освітні завдання:

- розширення знань про число (від натуральних чисел до дійсних), формування культури усних, письмових, інструментальних обчислень;

- формування системи функціональних понять, умінь використовувати функції та їх графіки для характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів;
- забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебраїчних виразів, розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи, моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;
- забезпечення оволодіння мовою геометрії, розвиток їх просторових уявлень і уяви, умінь виконувати основні геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів (лінійки з поділками, транспортира, косинця, циркуля і лінійки);
- формування знань про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування уявлення про найпростіші геометричні фігури в просторі та їх властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях;
- ознайомлення зі способами і методами математичних доведень, формування умінь їх практичного використання;
- формування знань про основні геометричні величини (довжину, площу, об’єм, міру кута), про способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і найпростіших стереометричних фігур, а також уміння застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях;
- вивчення геометричних перетворень площини та їх найпростіших властивостей, а також розвиток в учнів функціональних уявлень на геометричному змісті [20].

Характеристика навчального змісту і особливостей його реалізації

Зміст математичної освіти в основній школі структурується за такими змістовими лініями: *числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; геометричні фігури; геометричні величини.* Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на цьому ступені шкільної освіти, в якому виокремлюються два основні етапи: 5-6 класи і 7-9 класи. Освітні завдання на першому етапі реалізуються у процесі вивчення єдиного курсу математики, на другому – двох курсів: алгебри і геометрії.

Курс математики 5-6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про окремі геометричні фігури на площині і в просторі. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому етапі вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання.

Зміст геометричного матеріалу включає початкові відомості про планіметричні (відрізок, промінь, пряма, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг) і стереометричні (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда) фігури. Учні набувають навичок вимірювання довжини відрізка й градусної міри кута, знаходження площ і об'ємів деяких фігур, побудови геометричних фігур за допомогою лінійки, косинця, транспортира і циркуля. Розширюються уявлення учнів про вимірювання геометричних величин на прикладах вимірювання і порівняння відрізків і кутів, побудови відрізків даної довжини і кутів із заданою градусною мірою, оперування формулами периметрів, площ і об'ємів геометричних фігур – знаходження невідомого компонента формули за відомими. Побудова кута за допомогою транспортира або косинця (прямого кута), прямої та відрізка за допомогою лінійки використовується при побудові трикутників, прямокутників, перпендикулярних і паралельних прямих.

Вивчення геометричних фігур має передбачати використання наочних ілюстрацій, прикладів із довкілля, життєвого досвіду учнів, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виділяти форму і розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (кутів, трикутників, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур спочатку обґрунтовуються дослідно-індуктивно, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів умінь доказово міркувати.

Основа інтеграції геометричного матеріалу з арифметичним і алгебраїчним – числові характеристики (довжина, площа) геометричних фігур. Узагальнюються знання учнів про одиниці вимірювання довжини, площі, і вміння переходити від одних одиниць до інших, оскільки ці знання і вміння використовуються у вивченні предметів природничого циклу і в трудовому навчанні.

Важливим є формування в учнів умінь подавати дані у вигляді таблиць, графіків і діаграм різних типів та на основі їхнього аналізу робити відповідні висновки.

Вивчення математики у 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

У 7–9 класах вивчаються два курси: алгебра і геометрія.

Головна лінія ***курсу геометрії –*** геометричні фігури та їх властивості. Основними поняттями курсу є: точка, пряма, площина, належати, лежати між. Перші три поняття – це основні геометричні фігури, а два останніх – основні відношення. Це неозначувані поняття – для них не формулюються означення, але їх зміст розкривається через опис, показ, характеристику. Інші поняття курсу визначаються, а їх властивості встановлюються шляхом доказових міркувань. Учень має усвідомити, що під час доведення теорем можна користуватися означеннями і раніше доведеними теоремами.

Фігури, що вивчаються на площині – точка, пряма, відрізок, промінь, кут, трикутник, чотирикутник, многокутник, коло, круг. Учень повинен формулювати означення планіметричних фігур та їх елементів, зображати їх на малюнку, класифікувати кути, трикутники, чотирикутники, правильні многокутники.

У 7 класі учні ознайомлюються з основами геометричної науки – означеннями, теоремами, основними методами доведення теорем, основними задачами на побудову. Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута.

Однією з основних задач, що вивчається в курсі геометрії, є розв’язування трикутників. У 8 класі розглядається задача розв’язування прямокутного трикутника. Для цього вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Дана тема продовжується в 9 класі – розв’язуються довільні трикутники. Це потребує введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теорем косинусів і синусів.

У 8 класі вводиться одне з найскладніших понять шкільного курсу – поняття площі. Вивчення формули для знаходження площі трикутника дає можливість розв’язувати низку прикладних задач.

В діючому підручнику з геометрії для учнів 7 класу базового рівня Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владимирова [12] розпочинають вивчення трикутників в Розділі 3 з теми «Трикутник і його елементи». В параграфі наведено означення трикутника, вершин трикутника, його сторін. Подається означення периметра трикутника, бісектриси, висоти та медіани трикутника. Описують нерівність трикутника, формулюють означення кутів трикутника та на основі них – види трикутників: прямокутний, гострокутний, тупокутний.

Далі пропонують розв’язати низку задач на знаходження периметра трикутника, задачі на побудову висоти, медіани, та бісектриси трикутника, задачі на доведення.

Наступна тема «Сума кутів трикутника», в якій формулюються та доводяться теореми про суму кутів трикутника, про зовнішній кут трикутника та наслідків з них. Автори підручника зазначають,що будь-яку фігуру можна розділити на певну кількість трикутників, що дає змогу визначити суму кутів будь-якого опуклого *n*-кутника. Задачі і вправи теми дають змогу учням знаходити кути трикутника.

В наступному параграфі розглядають перші дві ознаки рівності трикутників, доводять теорему про зв'язок медіани та бісектриси трикутника. Далі переходять до вивчення рівнобедреного трикутника. Подають означення рівнобедреного трикутника. Доводять теореми про рівність кутів при основі, бісектрису, проведену до основи трикутника та обернені до них. Наступним вивчають третю ознаку рівності трикутників та нерівність трикутника та доводять ці теореми. В подальшому вивчають прямокутний трикутник, ознаки рівності прямокутних трикутників та розв'язують низку задач на знаходження елементів трикутника.

В темі «Коло і трикутник» подають означення кола, описаного навколо трикутника, доводять теорему про існування та єдність кола, описаного навколо трикутника та виводять наслідки з цієї теореми; означення вписаного в трикутник кола, та доводять теорему про існування та єдність кола, вписаного в трикутник та виводять наслідки з цієї теореми; доводять теорему про центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника та наслідок з неї; розв'язують низку задач з даної теми.

В діючому підручнику з геометрії для 8-го класу М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова [17] починають вивчення трикутників в Розділі 1 з теми: «Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника», в якому доводять Теорему Фалеса та теорему про властивість середньої лінії трикутника, в ході розв'язування задач доводять, що:

- в рівносторонньому трикутнику всі середні лінії рівні;
- периметр даного трикутника вдвічі більший за периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями даного трикутника;

- середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники;
- точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника;
- три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

В Розділі 2, в темі: «Подібність трикутників» учні дізнаються:

- про подібні трикутники, їх властивості й ознаки;
- що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити;
- які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику;
- про основну властивість бісектриси;
- як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв'язування задач.

Також в даній темі учні доводять узагальнену теорему Фалеса.

В Розділі 3 «Розв'язування прямокутних трикутників» учні вивчають теорему Піфагора та наслідки з неї, дізнаються про синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами, про алгоритм знаходження за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника – гострих кутів та як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач прикладного змісту.

В темі «Площа трикутника» доводять теорему про площу трикутника, як половина добутку висоти на сторону, до якої її проведено, розв'язують задачу на доведення про площу трикутника як добуток півпериметра на радіус вписаного кола та розв'язують низку задач з даної теми[17].

В діючому підручнику з геометрії для учнів 9 класу базового рівня М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова [19] розпочинають вивчення трикутників в Розділі 3 «Розв'язування трикутників», в якому дізнаються:

- про співвідношення між сторонами й кутами трикутника (теорема синусів, теорема косинусів);

- про алгоритм знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами й кутами;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту;
- про нові формули обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв'язуванні задач[19].

Вивченню трикутників в курсі планіметрії присвячено чимало тем, а тому вони займають вагоме місце в кусі геометрії основної школи. Причому на різних рівнях вивчення математики навчання трикутникам відрізняється.

1.2. Порівняльний аналіз вивчення трикутників на базовому та поглибленому рівнях

Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів передбачає певні відмінності, ніж під час вивчення цієї ж програми, але для базового вивчення математики в 8-9 класах.

Щодо восьмого класу, тема «Подібні трикутники» багато років традиційно входила до теми «Перетворення подібності» і вивчалася в дев'ятому класі. Такий підхід значно звужував як теоретичне поле, в якому розглядаються трикутники у восьмому класі, так і кількість та тематику змістовних задач. Тому доцільним є виділення окремого класу подібних фігур, а саме, подібних трикутників, яким притаманні певні специфічні властивості, і їх вивчення здійснювати в курсі восьмого класу. Це дозволить, з одного боку, забезпечити належне підґрунтя для подальшого вивчення теми «Розв'язування прямокутних трикутників», а з іншого боку, сформувати початкові поняття про подібність фігур на прикладі трикутників як досить зручної геометричної фігури для дослідження властивостей подібності. Доцільність такого підходу підтверджує багаторічний досвід вивчення теми «Рівні трикутники» автономно від теми «Переміщення (Рух)». Таким чином, вивчення окремих випадків рівності і подібності фігур (на прикладі трикутників) можна трактувати як підґрунтя до впровадження понять рівності і подібності геометричних фігур дедуктивним шляхом, а від цього – до трактування рівності і подібності як результатів геометричних перетворень.

Підхід до вивчення теми «Розв’язування прямокутних трикутників» ґрунтується на визначенні метричних співвідношень у прямокутному трикутнику. За означенням, тригонометричні функції (синус, косинус, тангенс, котангенс) вводяться як співвідношення, що характеризують гострий кут прямокутного трикутника. Такий простий і наочний підхід, з одного боку, створює теоретичне підґрунтя для розв’язування значного класу задач, у тому числі практичного змісту, а з іншого – закладає основи для подальшого вивчення тригонометричних функцій у старших класах [17].

З підручників М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова [17] – базовий рівень та А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір [16] – поглиблений рівень виокремлено істотні відмінності у подачі та наповненні матеріалом теми.

Вивчення базового курсу геометрії суттєво відрізняється від вивчення поглибленого курсу.

Поглиблене вивчення курсу геометрії відрізняється тим, що в профільній школі курс починається з повторення вивченого матеріалу в попередньому класі, перш за все – повторення ознак рівності трикутника, суми кутів трикутника, розв’язують низку задач на знаходження елементів трикутника.

Основною відмінністю базового та поглибленого вивчення є теореми, що вивчаються на поглибленому рівні і не розглядаються в курсі базового рівня:

- Лема, про пряму, що перетинає дві сторони і паралельна третій.
- Теорема Птолемея.
- Теорема Менелая. Теорема Чеви.
- Теорема Ейлера. Коло дев’яти точок.
- Введення поняття котангенс гострого кута.

- Зовнівписане коло в трикутник [9].

Що стосується дев'ятого класу, то вивчення теми «Розв'язування трикутників» розширює і поглиблює відповідний матеріал, вивчений у восьмому класі. Поняття тригонометричних функцій (синус, косинус, тангенс, котангенс) застосовується до кутів, міри яких лежать в проміжку від 0° до 180°. Це дозволяє істотно розширити перелік формул для знаходження площі трикутника і чотирикутника та урізноманітнити коло відповідних задач [19].

Порівнюючи підручники з геометрії для 9-го класу М.І.Бурди, Н.А.Тарасенкової [19] для базового рівня та А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонського, М. С. Якіра [9] для профільного рівня виокремлено такі істотні відмінності у подачі та наповнені матеріалом теми.

В поглибленому курсі вивчення трикутників починають з вивчення означень синуса, косинуса, тангенса, котангенса довільного кута $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, що в свою чергу є відсутнім для базового курсу. В поглибленому надалі вивчають теорему косинусів та теорему про рівність добутку діагоналей паралелограма та суму квадратів всіх його сторін, в подальшому вивчаючи теорему синусів, що дещо відрізняється від вивчення в базовому курсі, де теорема про рівність добутку діагоналей паралелограма та суму квадратів всіх його сторін вивчають, як розв'язання певної задачі.

Доводять лему про хорду кола, що дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду та наслідок з неї, тригонометричну форму теореми Чеви, формулу Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного й описаного кіл трикутника [19].

Вивчення трикутників в планіметрії завершується темою «Розв'язування трикутників», розглянемо більш детально логіко-математичний аналіз цієї теми.

1.3. Логіко-математичний аналіз теми «Розв'язування трикутників»

За підручником «Геометрія» 9 клас авторів А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір [76]

Програмові вимоги до вивчення теми

Зміст навчального матеріалу:синус, косинус, тангенс і котангенс як функції кута від 0° до 180°. Тотожності: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, $sin(180^\circ - \alpha) = sin\alpha$, $cos(180^\circ - \alpha) = cos\alpha$, $tg(180^\circ - \alpha) = tg\alpha$, $ctg(180^\circ - \alpha) = ctg\alpha$. Теореми косинусів і синусів. Властивість сторін і діагоналей паралелограма. Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника. Застосування формули $2Rsin\alpha=a$. Розв'язування трикутників. Тригонометрична форма теореми Чеви. Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника для учнів з профільним вивченням геометрії. Формули для знаходження площі трикутника. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними.

Учень/учениця:

пояснює: що означає «розв'язати трикутник», основні алгоритми розв'язування трикутників;

формулює: означення: синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута від 0° до 180°; властивість медіани трикутника, сторін і діагоналей паралелограма; теорему: косинусів, синусів, про формулу для знаходження площі трикутника (Герона, за сторонами та кутом між ними, за сторонами та радіусом описаного кола, за півпериметром і радіусом вписаного кола), формулу для знаходження площі паралелограма за двома сторонами та кутом між ними, формулу для знаходження площі чотирикутника за його діагоналями та кутом між ними;

записує та пояснює тригонометричні тотожності і формули, зазначені у змісті;

обчислює: значення кутів від 0° до 180°, довжини відрізків та градусні міри кутів у трикутниках і чотирикутниках, площі трикутників і чотирикутників;

доводить: властивість медіани трикутника, сторін і діагоналей паралелограма; теорему: косинусів, синусів, про формулу для знаходження площі трикутника (Герона, за сторонами та кутом між ними, за сторонами та радіусом описаного кола, за півпериметром і радіусом вписаного кола), формулу для знаходження площі паралелограма за двома сторонами та кутом між ними, формулу для знаходження площі чотирикутника за його діагоналями та кутом між ними;

розв'язує задачі, що передбачають застосування: вивчених означень, властивостей і формул для обчислення значень тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°, знаходження площі трикутника (за формулою Герона, за двома сторонами і кутом між ними, за радіусом вписаного і описаного кіл), знаходження площі чотирикутника за його діагоналями та кутом між ними, знаходження довжини медіани за сторонами трикутника, алгоритмів розв'язування трикутників, у т.ч. для розв'язування прикладних задач.

В поглибленому курсі геометрії 9 класу вивчають окрему тему «Розв'язування трикутників», присвячену трикутнику, а також в усіх інших темах, які слідують за даною доповнюються і розширюються знання про трикутник, його елементи та їх властивості (табл. 1.1) [20]

Розглядувана тема має шість нових понять (які надалі будуть базовими поняттями в курсі алгебри старшої школи), понад сім нових фактів (на базовому рівні їх – чотири) та три нових способи діяльності.

Таблиця 1.1.

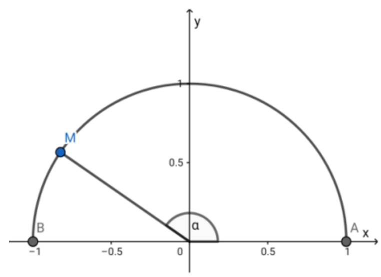
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

Поняття		Факти	Способи діяльності
Нові	• одиничне коло; • синус, косинус, тангенс, котангенс довільного кута; • тригонометрична функція.	• теорема косинусів та її наслідок; • теорема про рівність суми квадратів діагоналей паралелограма та суми квадратів всіх його сторін; • теорема синусів; • лема про хорду та наслідок з неї; • теорема Чеви; • теорема Ейлера; • формули знаходження площі трикутника.	• встановлення виду кутів; • існування кута, за заданими значеннями синуса, косинуса, тангенса, котангенса; • знаходження найбільшого кута трикутника.
Базові	• синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута; • трикутник; • прямокутний трикутник.	• теорема про суму кутів трикутника; • нерівність трикутника.	• елементарні геометричні побудови.

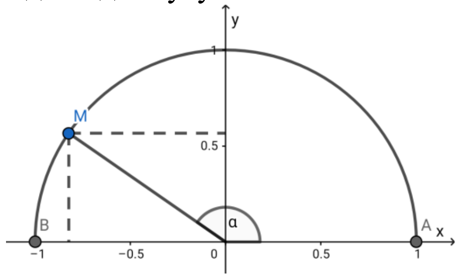
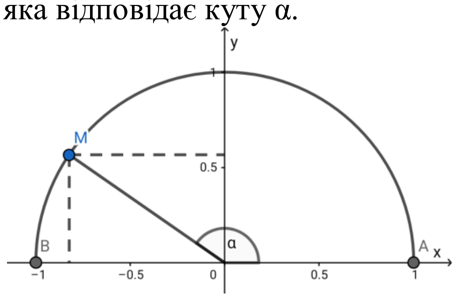
Означення нових понять теми даються або описово, або конструктивно (табл.1.2).

Таблиця 1.2.

Логіко математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характерні властивості
Одиничне коло	У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1. Таке коло називають одиничним. 	Описовий вид. Істотні властивості: півколо, радіуса 1.

Продовж. табл. 1.2.

Синус	Синусом кута α $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ називають відповідну ординату точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α. 	Конструктивний вид. Істотні властивості: значення ординати відповідної точки одиничного кола.
Косинус	Косинусом кута α $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ називають відповідну абсцису точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α. 	Конструктивний вид. Істотні властивості: значення абсциси відповідної точки одиничного кола.
Тангенс	Тангенсом кута α, *де* $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $\alpha \neq 90^\circ$,називають відношення $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, тобто $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$	Конструктивне. Істотні властивості: відношення ординати до абсциси.
Котангенс	Котангенсом кута α, де $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, називають відношення $\frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, тобто $$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$	Конструктивне. Істотні властивості: відношення абсциси до ординати.
Тригоно-метрична функція	Функції $f(\alpha) = sin\alpha$, $g(\alpha) = cos\alpha$, $h(\alpha) = tg\alpha$, $p(\alpha) = ctg\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають тригонометричними функціями кута α.	Описове. Функції, що містять значення синусу, косинусу, тангенса і котангенса довільного кута.

Найбільша кількість завдань запропонованих у підручнику присвячені тригонометричним функціям синус і косинус та спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

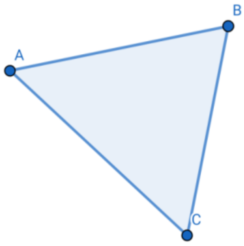
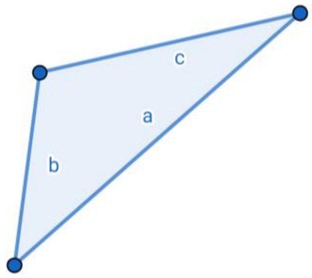
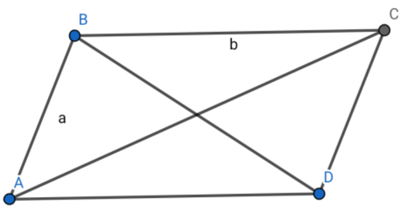
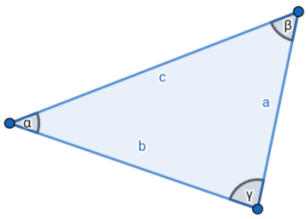
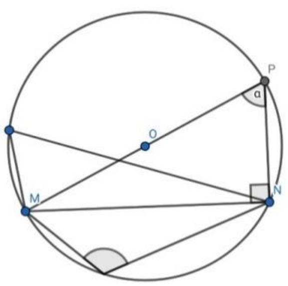
[76]

Види вправ	Номери з підручника					
	Одиничне коло	**Синус**	**Косинус**	**Тангенс**	**Котангенс**	**Тригонометрична функція**
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	-	2.20, 2.24 – 2.30	2.21, 2.24 – 2.30	-	-	-
Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	-	2.2,	2.2,	-	-	-
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	-	2.14	2.14	2.14	2.14	-
Вправи, для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	-	2.1, 2.5, 2.6	2.1, 2.5, 2.6	2.1, 2.7, 2.8	2.1, 2.7, 2.8	-
Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	-	2.3, 2.4, 2.9 – 2.13, 2.16 – 2.19, 2.22 – 2.23	2.3, 2.4, 2.9 – 2.13, 2.16 – 2.19, 2.22 – 2.23	2.3, 2.4, 2.9, 2.10, 2.12, 2.16 – 2.19, 2.22 – 2.23, 2.32	2.3, 2.4, 2.9, 2.10, 2.12, 2.16 – 2.19, 2.22 – 2.23, 2.31	-

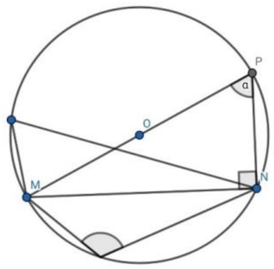
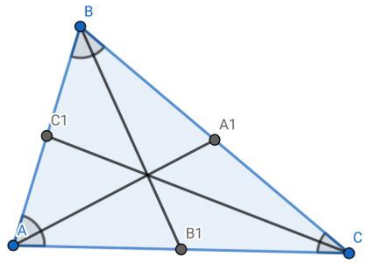
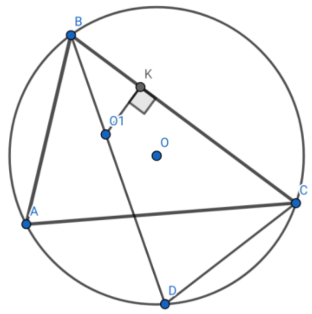
Математичні факти теми крім теорем косинусів і синусів та їх наслідків також мають чотири формули для обчислення площі трикутника (табл. 1.4).

Таблиця 1.4.

Представлення математичних фактів теми

Теорема косинусів	
	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot cosA$
Наслідок теореми косинусів	
	Якщо $a^2<b^2+c^2$, то трикутник гострокутний Якщо $a^2>b^2+c^2$, то трикутник тупокутний Якщо $a^2=b^2+c^2$, то трикутник прямокутний
Теорема про рівність суми квадратів діагоналей паралелограма та суми квадратів його сторін	
	$BD^2+AC^2=2a^2+2b^2$
Теорема синусів	
	$\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}$
Лема про хорду	
	$\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}=2R$

Продовж. табл. 1.4.

Теорема про радіус описаного навколо трикутника кола	
	$R = \dfrac{a}{2sin\alpha}$
Теорема Чеви	
	$\dfrac{AC_1}{C_1A} = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$
Теорема Ейлера	
	$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$
Формули для знаходження площі трикутника	
Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними	$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$
Площу трикутника зі сторонами a, b, c, можна обчислити за формулою $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p— його півпериметр.	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Площу трикутника зі сторонами a, b, c, можна обчислити за формулою $S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника.	$S = \dfrac{abc}{4R}$
Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.	$S = pr$

Проведемо логіко-математичний аналіз структури формулювання математичних тверджень теми за такою схемою: формулювання твердження;

встановлення виду твердження; виділення роз'яснювальної частини; виділення умови; виділення вимоги; формулювання твердження рівносильного даному (табл. 1.5 – 1.11).

Таблиця 1.5.

Теорема косинусів

Етап проведення аналізу	Результат
1.Формулювання твердження	Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник
4.Виділення умови	Многокутник є трикутником
5.Виділення вимоги	Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є трикутником, то квадрат сторони даного трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

Таблиця 1.6.

Наслідок з теореми косинусів

Етап проведення аналізу	Результат
1.Формулювання твердження	Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника, причому a – довжина його найбільшої сторони. Якщо $a^2<b^2+c^2$, то трикутник гострокутний. Якщо $a^2>b^2+c^2$, то трикутник тупокутний. Якщо $a^2=b^2+c^2$, то трикутник прямокутний.
2.Встановлення виду твердження	Умовна, складне.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник
4.Виділення умови	Многокутник є трикутником
5.Виділення вимоги	У гострокутному трикутнику $a^2<b^2+c^{2.}$ У тупокутному трикутнику $a^2>b^2+c^{2.}$ У прямокутному трикутнику $a^2=b^2+c^{2.}$
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є трикутником і при цьому$a^2<b^2+c^2$, то трикутник гострокутний. Якщо многокутник є трикутником і при цьому$a^2>b^2+c^2$, то трикутник тупокутний. Якщо многокутник є трикутником і при цьому$a^2=b^2+c^2$, то трикутник прямокутний.

Таблиця 1.7.

Теорема про суму квадратів діагоналей паралелограма

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Формулювання твердження	Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнюють сумі квадратів усіх його сторін.
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Паралелограм
4.Виділення умови	Многокутник є паралелограмом
5.Виділення вимоги	Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнюють сумі квадратів усіх його сторін
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є паралелограмом, то сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнюють сумі квадратів усіх його сторін

Таблиця 1.8.

Теорема синусів

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Формулювання твердження	Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник
4.Виділення умови	Многокутник є трикутником
5.Виділення вимоги	Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є трикутником, то сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів

Таблиця 1.9.

Теорема про радіус кола, описаного навколо трикутника

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Формулювання твердження	Радіус кола, описаного навколо трикутника, можна обчислити за формулою: $$R = \frac{a}{2sin\alpha}$$ де a— довжина сторони трикутника, α – величина протилежного цій стороні кута.
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник
4.Виділення умови	Коло, описане навколо трикутника
5.Виділення вимоги	Радіус кола, описаного навколо трикутника, можна обчислити за формулою: $$R = \frac{a}{2sin\alpha}$$ де a— довжина сторони трикутника, α – величина протилежного цій стороні кута.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо коло, описане навколо трикутника, то радіус даного кола можна обчислити за формулою: $$R = \frac{a}{2sin\alpha}$$ де a— довжина сторони трикутника, α – величина протилежного цій стороні кута.

Таблиця 1.10.

Теорема Чеви

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Формулювання твердження	Для того, щоб чевіани AA_1,BB_1, CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність: $$\frac{AC_1}{C_1A} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник

Продовж. табл. 1.10.

4.Виділення умови	В трикутнику ABC виконується рівність $$\frac{AC_1}{C_1A}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=1$$
5.Виділення вимоги	Чевіани AA_1,BB_1, CC_1 трикутника ABC перетинаються в одній точці
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо в трикутнику ABC виконується рівність $$\frac{AC_1}{C_1A}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$ де AA_1,BB_1, CC_1 – чевіани, то вони перетинаються в одній точці.

Таблиця 1.11.

Теорема Ейлера

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Формулювання твердження	Відстань d між центрами вписаного й описаного кіл трикутника обчислюються за формулою: $d=\sqrt{R^2-2Rr}$, де r і R – відповідно радіуси вписаного і описаного кіл.
2.Встановлення виду твердження	Просте
3.Виділення роз'яснювальної частини	Трикутник, вписане й описане кола
4.Виділення умови	d – відстань між центрами вписаного й описаного кіл трикутника
5.Виділення вимоги	$$d=\sqrt{R^2-2Rr}$$
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо d – відстань між центрами вписаного й описаного кіл трикутника, то вона обчислюється за формулою: $d=\sqrt{R^2-2Rr}$, де r і R – відповідно радіуси вписаного і описаного кіл.

Проаналізуємо форму, вид, спосіб доведення математичних фактів теми, за такими пунктами: форма доведення; вид доведення; метод доведення; спеціальний математичний метод доведення; основна ідея доведення; етапи доведення (табл. 1.12 – 1.14).

Таблиця 1.12.

Теорема косинусів

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Форма доведення	Дедуктивна
2.Види доведення	Пряме
3.Метод доведення	Аналітичний
4.Спеціальний математичний метод доведення	-
5.Основна ідея доведення	Провівши висоту в трикутнику та за допомогою означення синуса та косинуса і теореми Піфагора, виразити одну із сторін.
6.Етапи доведення	1)Проводимо висоту *BD*. 2)В одному з прямокутних трикутників виражаємо катети через синус та косинус відомого кута. 3)За теоремою Піфагора знаходимо третю сторону.

Таблиця 1.13.

Теорема про суму квадратів діагоналей паралелограма

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Форма доведення	Дедуктивна
2.Види доведення	Пряме
3.Метод доведення	Аналітичний
4.Спеціальний математичний метод доведення	-
5.Основна ідея доведення	Розбивши паралелограм на два трикутники та використавши теорему косинусів, отримаємо рівність, яка задовольняє умові теореми.
6.Етапи доведення	1)Розглядаємо два трикутники, які містять по одній діагоналі паралелограма. 2)Застосовуємо теорему косинусів до кожної з діагоналей та додаємо ці дві рівності.

Таблиця 1.14.

Теорема Чеви

Етап проведення аналізу	**Результат**
1.Форма доведення	Дедуктивна
2.Види доведення	Пряме
3.Метод доведення	Аналітичний
4.Спеціальний математичний метод доведення	-
5.Основна ідея доведення	Розглянувши отримані трикутники застосувати теорему синусів та отримати шукане співвідношення
6.Етапи доведення	1)Із трикутника AC_1C виразити $\frac{AC_1}{CC_1}$, із трикутника BC_1C виразити $\frac{CC_1}{C_1B}$, отримаємо $\frac{AC_1}{C_1B}$ 2)Аналогічно отримаємо $\frac{BA_1}{A_1C}, \frac{CB_1}{B_1A}$ 3)Перемноживши рівності та застосувавши необхідну і достатню умови конкурентності чевіан можна виразити шукану рівність.

Тема має чотири ключові задачі, довівши які, можна користуватися ними надалі (табл. 1.15).

Таблиця 1.15.

Факти, сформульовані в задачах [76]

№3.38	Про більшу діагональ, що лежить проти більшого кута паралелограма.
№3.41	Про відношення суми квадратів медіан трикутника до суми квадратів його сторін.
№6.10	Про відношення площі трикутника бути менше за пів добуток двох сусідніх сторін цього трикутника.
№6.32	Про обчислення довжини бісектриси трикутника.

Висновки до розділу 1

Тему «Трикутники» починають вивчати в 7 класі. Під час вивчення учні ознайомлюються з основами – основними означеннями, теоремами, основними методами доведення теорем, основними задачами на побудову та обчислення елементів трикутника. Починається вивчення з теми «Трикутник і його елементи», в якому вивчають означення трикутника, його вершин, сторін, периметра трикутника, бісектриси, висоти та медіани трикутника, розглядають нерівність трикутника. Доводять теорему про суму кутів трикутника, про зовнішній кут трикутника та наслідки з цих теорем. Розглядають ознаки рівності трикутника, доводять теорему про зв’язок медіани та бісектриси трикутника, вивчають рівнобедрений трикутник, доводять теореми про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. Окремо вивчають прямокутний трикутник, ознаки рівності прямокутних трикутників, розв’язують низку задач з кожної теми.

В темі «Коло і трикутник» вивчають означення кола вписаного в трикутник та описаного навколо трикутника, доводять теорему про цент кола, описаного навколо прямокутного трикутника та наслідок з неї.

При вивчені трикутників в восьмому класі доводять теорему про середню лінію трикутника. Під час розв’язування низки задач з даної теми доводять низку теорем: про рівність середніх ліній в рівносторонньому трикутнику, властивість медіан, перетин висот трикутника в одній точці. Також, в наступних розділах, вивчають подібні трикутники та їх властивості, основну властивість бісектриси, доводять узагальнену теорему Фалеса. Під час розв’язування прямокутних трикутників учні вивчають теорему Піфагора та наслідки з неї, вивчають синус, косинус, тангенс, гострого кута (для довільного кута, вивчають в 9 класі), алгоритм знаходження за однією із сторін прямокутного трикутника та гострим кутом двох інших сторін, за двома сторонами – гострі кути трикутника, та застосовують вивчені алгоритми до розв’язування задач. Вивчаючи трикутник в 9 класі учні дізнаються про співвідношення між сторонами й кутами трикутника (теорема синусів, теорема косинусів); про алгоритм знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами й кутами; як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту; про нові формули обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв'язуванні задач.

Надалі вивчення теми узагальнюється і учні переходять до вивчення довільного трикутника, про що свідчать теореми, вивчені в 9 класі, наприклад теорема синусів та теорема косинусів.

Під час аналізу підручників базового та профільного рівнів було виявлено, що дещо відрізняється зміст поданого матеріалу, який більш глибокий та змістовний для профільного рівня, тому для вивчення теми в профільному класі виділяється більше часу на засвоєння нових знань.

В розділі було проведено логіко математичний аналіз основних понять, теорем, з теми «Розв'язування трикутника», а саме:

- теорема косинусів та її наслідок;
- теорема про рівність суми квадратів діагоналей паралелограма та суми квадратів всіх його сторін;
- теорема синусів;
- лема про хорду та наслідок з неї;
- теорема Чеви;
- теорема Ейлера;
- формули знаходження площі трикутника.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ

2.1. Методичні прийоми формування вмінь та навичок в учнів під час розв'язування задач на обчислення елементів трикутника

Під час розв'язування задач на обчислення довжин елементів трикутника, градусних мір кутів, площі трикутника тощо, учні мають можливість поглибити і систематизувати відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута, площу.

Однією з основних задач, що вивчається в курсі геометрії, є розв'язування трикутників. При вивчені теми «Трикутники» в 8 класі розглядається задача розв'язування прямокутного трикутника. Для цього вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Дана тема продовжується в 9 класі – розв'язуються довільні трикутники. Це потребує введення формул для знаходження синуса і косинуса довільного кута та доведення теорем косинусів і синусів. У 8 класі вводиться одне з найскладніших понять шкільного курсу – поняття площі. Вивчення формули для знаходження площі трикутника дає можливість розв'язувати низку прикладних задач.

Інструментом для підвищення пізнавального інтересу учнів в процесі розв'язування задач на уроках геометрії можуть стати прикладні задачі, оскільки вони мають важливе значення, насамперед для виховання в учнів інтересу до математики, за умови забезпечення мотивації навчання: кожне нове поняття чи положення повинно, за можливості, вводитися в задачах практичного характеру. Такі задачі переконуватимуть учнів у потребі вивчення нового теоретичного матеріалу і показуватимуть, що математичні абстракції виникають із задач, поставлених навколишнім середовищем.

Спочатку учнів зацікавлює розв'язування окремих задач, потім вивчення окремих тем, а згодом і вся наука [22].

Тому систематичне виховання учнівських інтересів є неодмінною умовою підвищення ефективності як кожного окремого уроку геометрії, так і всієї навчально-виховної роботи.

Виходячи з вищезазначеного пропонуємо систему задач прикладного характеру, що сприяють розвитку пізнавального інтересу учнів під час вивчення геометрії в 7-9 класах, розподілених за такими темами:

1) вписаний і описаний навколо кола трикутник (7 клас);
2) подібні трикутники (8 клас);
3) теореми синусів та косинусів (9 клас).

Вписаний і описаний навколо кола трикутник

1. Де на відкритій ділянці трикутної форми потрібно помістити ліхтар, щоб усі три кути її були освітлені однаково? (*Відповідь:* у центрі кола, описаного навколо трикутника)

2. Склареві доручили вирізати скло для вікна круглої форми. Що і як має виміряти скляр, користуючись лише рулеткою, щоб вирізати потрібне скло. (*Відповідь:* треба взяти три точки на краях вікна та виміряти відстань між ними. Побудований за трьома сторонами трикутник однозначно задає описане коло) [29].

Подібні трикутники

1. Тінь, що відкидається стовпом на поверхню землі, дорівнює 9 метрів. У той самий час стрижень висотою 2 *м* відкидає тінь 2,4 *м*. Знайти висоту стовпа. (*Відповідь:* 7,5 *м*)

2. Стовп висотою 15 *м* закривається монетою діаметра 2 *см*, якщо тримати її на відстані 70 *см* від ока. Знайти відстань від стовпа до спостерігача. (*Відповідь:* 525 *м*)

3. Як знайти висоту предмета, до основи якого можна підійти?

4. Як знайти висоту предмета, до основи якого не можна підійти?

5. Які завбільшки повинні бути букви на класній дошці, щоб учні,сидячи за партами, бачили їх так само виразно, як букви в своїх книжках (на відстані 25см від ока)? Відстань від парт до дошки взяти 5м. Ширина букви в книжці дорівнює 1мм.

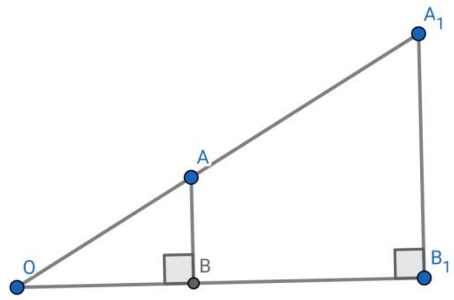


Рис.2.1.

Розв'язання

Розглянемо трикутник *OBA* і трикутник OB_1A_1. Кут *O* – спільний, так як *OB* – відстань до книжки від читача; OB_1 – відстань від читача до дошки. $AB \perp OB, A_1B_1 \perp OB_1$, то $AB \parallel A_1B_1$. $\Delta OBA \sim \Delta OB_1A_1$ (за основною теоремою подібності трикутників), звідси:

$$\frac{1}{x} = \frac{250}{5250}, x = 21 \text{ мм} = 2{,}1 \text{ см}$$

Відповідь: 2,1 *см*.

Теореми синусів та косинусів

1. Два пароплаву починають свій рух одночасно з одного порту та рухаються рівномірно по прямих, що перетинаються під кутом α. Швидкість першого пароплава – *a км/год*, іншого – *b км/год*. Обчислити, на якій відстані будуть знаходитися пароплави через *x* годин.

2. О сьомій годині ранку пасажирський літак вилетів з міста *A*. Після півгодинної зупинки в місті *B* о 8 годині 10 хвилин літак зробив поворот на 35° вправо та о 9 годині здійснив посадку в місті *C*. Знайти відстань між містами *A* та *C*, якщо середня швидкість літака на кожній ділянці польоту дорівнює 320 *км/год*. (*Відповідь:* 458 *км*)

3. Залізний стрижень довжиною a потрібно зігнути під прямим кутом так, щоб відстань між кінцями дорівнювала b. Де має знаходитись

точка згину? За яких умов задача має розв'язок? Розглянути цю задачу за умови, що кут згину дорівнює 60°, 120°.

4. З двох пунктів *A* та *B* виїжджають одночасно два потяги в відповідному напрямах *AD*та *BE*, що перетинаються в точці *C* під кутом 60°. Обидва потяги рухаються рівномірно зі швидкістю відповідно 20 і 30 *км/год*. Через скільки годин з моменту їх відправлення відстань *DE* між ними дорівнюватиме початковій, якщо *AC* = 50*км*, *BC* = 40 *км*? (*Відповідь:* 3 *год*)

5. На озері є невеликий острів *A*. Знайти відстань від острова *A* до пункту *B*, що знаходиться на березі. (Острів *A* прийняти за точку)

6. Зі спостережного пункту помічають під кутом $63{,}5^\circ$ літак, що пролітає над вежею, висота якої 79,5 *м*. Пряма, що сполучає спостережний пункт із верхівкою вежі, утворює з горизонтальною площиною кут $20^\circ 45'$. На якій висоті знаходиться літак? (*Відповідь:* 420,5 *м*)

7. З гелікоптера, що знаходиться над шосейною дорогою, була помічена колона машин, яка рухається по ній. Початок колони видно під кутом 75°, а кінець під кутом 70°. Знайти довжину колони, якщо вертоліт знаходиться на висоті 1650 *м*. (*Відповідь:* 1042 *м*)

8. Вершину гори з точки *A* видно під кутом $38^\circ 42'$, а при наближені до гори на 200 *м* вершину стало видно під кутом 42°. Знайти висоту гори . (*Відповідь:* 14325 *м*)

9. Судно йде на схід зі швидкістю 12 вузлів. О 13 годин 10 хвилин азимут напрямку на маяк дорівнював 70°, а о 13 годині 40 хвилин 20°. На якій відстані від судна знаходиться маяк о 13 годині? (Один вузол відповідає одній морській милі за годину). (*Відповідь:* 2,7 *милі*)

10. На горі стоїть вежа висотою 100 *м*. Біля підніжжя гори знаходиться одна людина, інша спостерігає спочатку з вершини вежі під кутом 60° до горизонту, а потім з її основи під кутом 30°. Знайти висоту гори. (*Відповідь:* 50 *м*)

11. Футбольний м'яч знаходиться в точці A футбольного поля на відстані 23 *м* і 24 *м* від точок B і C відповідно. Футболіст направив м'яч у ворота. Знайдіть кут влучання м'яча у ворота, якщо ширина воріт 7 м.

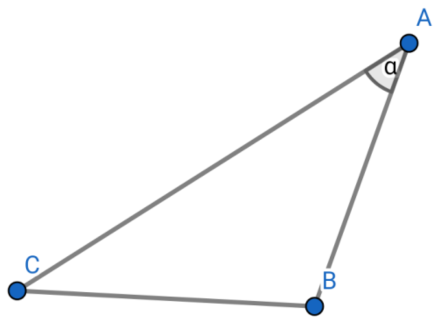


Рисунок 2.2. Задача 11

Розв'язання

За теоремою косинусів: $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC{\cdot}AB{\cdot}cos\alpha$. Звідси:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{CB}^2}{2{\cdot}\mathrm{AC}{\cdot}\mathrm{AB}}$$

$$\cos\alpha = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2{\cdot}24{\cdot}23}$$

$$\cos\alpha = 0{,}9565,$$

$$\alpha = 17^\circ.$$

Відповідь: $\alpha = 17^\circ$ [27].

Така система прикладних задач, дасть можливість підвищити пізнавальний інтерес учнів на уроках геометрії.

2.2 Формування вмінь та навичок розв'язувати задачі на побудову з теми «Трикутники»

Геометричні побудови одна з провідних змістових ліній шкільного курсу геометрії. Найпростіші геометричні побудови учні використовують в початковій школі та 5–6 класах: проводять прямі; кола; відрізки, рівні даним; будують кути заданої градусної міри, використовуючи транспортир; проводять паралельні і перпендикулярні лінійкою косинцем; зображують кути, трикутники, квадрати. В систематичному курсу геометрії спеціально виділяються задачі на побудову, які розв'язуються лише за допомогою циркуля і лінійки.

Ці задачі мають значну дидактичну цінність, оскільки, разом з формуванням практичних навичок виконання основних побудов, розвивають логічне мислення та формують евристичну діяльність.

Самостійна тема: «Геометричні побудови» згідно з програмами є останньою темою в курсі Геометрії 7 класу. Ця тема тісно пов'язана з ознаками рівності трикутників і паралельності прямих, властивостями кола, оскільки, побудова і доведення в багатьох задачах спирається на цей навчальний матеріал. В курсі геометрії 7 класу вводиться 5 основних побудов, поняття про геометричне місце точок і метод геометричних місць. Основна кількість задач на побудову зосереджена саме в цій темі.

У 8 класі задачі на побудову зустрічаються в темі «Трикутники». У наступних темах курсу планіметрії кількість задач на побудову різко зменшується. Основна мета вивчення геометричних побудов в школі – навчити учнів виконувати основні побудови циркулем та лінійкою та розв'язувати нескладні комбіновані задачі, які зводяться до виконання основних побудов. Учні повинні знати алгоритми використання основних побудов, вміти використовувати основні побудови, знаходити план побудови і доведення нескладних комбінованих задач [40].

Виконуючи задачі на побудову, які розв'язуються лише за допомогою циркуля і лінійки, необхідно з'ясувати і пам'ятати, які геометричні побудови можна виконати за допомогою кожного з цих інструментів.

Так лінійкою можна провести лише:

- довільну пряму;
- довільну пряму, що проходить через дану точку;
- пряму, що проходить через дві дані точки;

Циркулем можна лише описати коло з даним центром даного радіуса або відкласти на даній прямій від даної точки даний відрізок.

Задачі на побудову складають окремий вид математичних задач і містять специфічні для цього виду задач чотири етапи розв'язання:

1) аналіз задачі, мета якого – встановити зв'язки між шуканими і даними задачі, знайти план виконання побудови;

2) побудова, яка здійснюється за планом, обґрунтованим на етапі аналізу;

3) доведення, мета якого – з'ясування, що побудована фігура задовольняє умову задачі.

4) дослідження, мета якого – з'ясувати, за яких даних задача має розв'язки, скільки їх, чи є окремі випадки, які потребують спеціального розгляду.

Щодо кількості розв'язків задачі на побудову, то слід враховувати, що питання розв'язується по різному для позиційних і непозиційних задач.

В позиційних задачах вказується, як розташовані фігури стосовно інших даних фігур. В такому разі шукані побудовані рівні фігури вважаються різними розв'язками. В непозиційних задачах рівні фігури не вважаються різними розв'язками.

В шкільному курсі геометрії немає строгої вимоги, щоб учні виконували всі чотири етапи розв'язання задач з двох причин. По-перше, дослідження може бути складнішим ніж побудова і доведення та недоступним для учнів (особливо в задач, де є кути). По-друге, в найпростіших задачах на побудову учні зможуть знайти план побудови без будь-якого аналізу.

Евристичні схеми пошуку плану розв'язання задач корисно давати учням і при розв'язуванні планіметричних задач на побудову. У цих випадках евристичну схему можна дати перед розв'язанням задачі для того щоб відразу застосувати її.

Так схему розв'язання задачі методом геометричних місць можна подати у зв'язку з розв'язанням задачі: побудувати точки кута, які рівновіддалені від його сторін і знаходяться на відстані *r* від точки *M*, даної всередині кута.

Важливо звернути увагу учнів на те, що задачі, в яких треба знайти геометричне місце точок і, які задовольняють двом вимогам, розв’язуються за допомогою такої евристичної схеми:

1. Відкинути одну з вимог задачі і побудувати геометричне місце точок,що задовольняє другу умову.

2. Відкинути другу умову і побудувати геометричне місце точок,що задовольняє першу умову.

Шукані точки належать перерізу побудованих геометричних місць точок.

У наведеній вище задачі шукані точки – це точки перетину бісектриси даного кута і кола ($M;r$).У ній корисно провести дослідження розв’язку.

Метод геометричного місця точок

Якщо фігура задана шляхом вказання властивостей, яким володіють всі точки цієї фігури й тільки вони, то таку фігуру називають геометричним місцем точок (ГМТ), що володіє зазначеною властивістю.

Суть методу перетину ГМТ полягає в тому, що задачу зводять до побудови однієї точки *X* (основного елемента побудови), яка задовольняє деяким двом незалежним умовам, що випливають із постановки задачі.

Основними ГМТ на площині є:

1) ГМТ, яке знаходиться на заданій відстані *r* від даної точки *O*, є коло з центром у точці *O* радіусаr: $\omega(O;r)$;

2) ГМТ, рівновіддалених від точок *A* і *B*, є серединний перпендикуляр до [AB];

3) ГМТ, віддалених від даної прямої *AB* на відстань *r*, є сукупність двох прямих, паралельних до даної, які знаходяться на відстані *r* від неї;

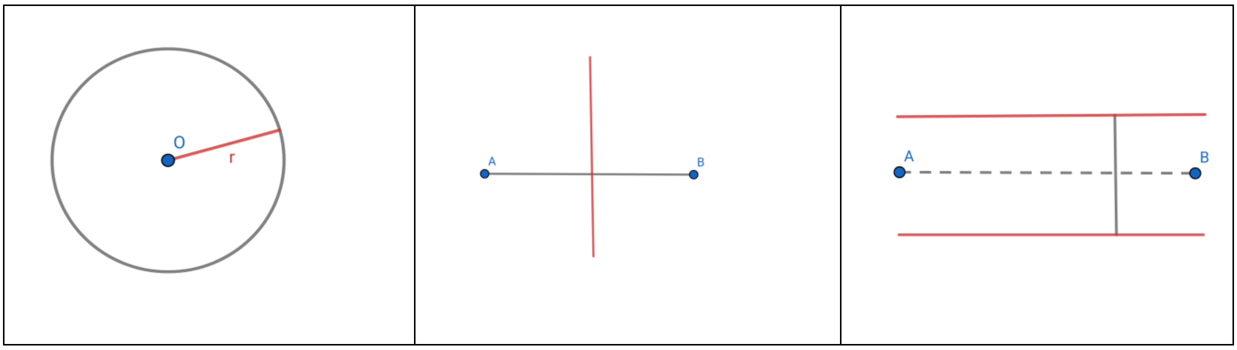


Рисунок 2.3. Основні ГМТ на площині 1)-3)

4) ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються, є сукупність двох перпендикулярних прямих – бісектрис кутів, утворених прямими;

5) ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих, є пряма, що до них паралельна, та є віссю симетрії;

6) ГМТ, з яких даний відрізок *AB* видно під кутом 90̊, є коло, яке побудоване на [*AB*], як на діаметрі, крім точок *A* і *B*.

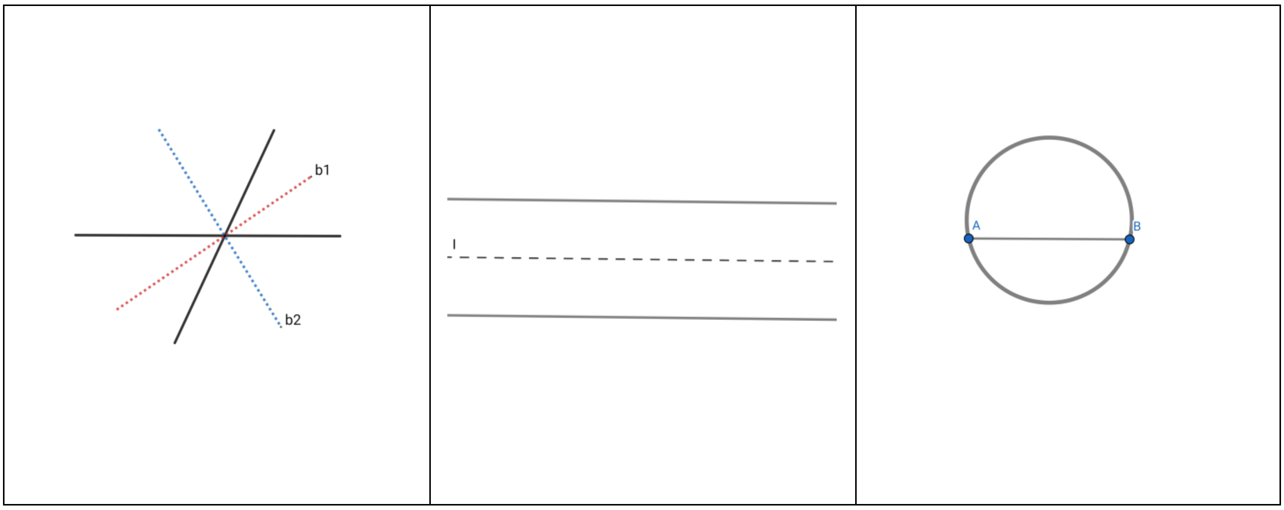


Рисунок 2.4. Основні ГМТ на площині 4)-6)

Розв’язання задачі на знаходження ГМТ складається звичайно з *аналізу, доведення, дослідження*, подібно тому, як це робиться при розв’язанні геометричної задачі на побудову [38].

Задача. Побудувати трикутник за його гострим кутом при вершині, радіусом описаного кола й сумою квадратів бічних сторін.

<u>Аналіз</u>. Нехай ABC – шуканий трикутник, $\omega(O, R)$ – описане навколо нього коло, кут $A = \alpha$ – даний кут, $AB^2 + AC^2 = d^2$, де d – даний відрізок (рис.2.5) [18].

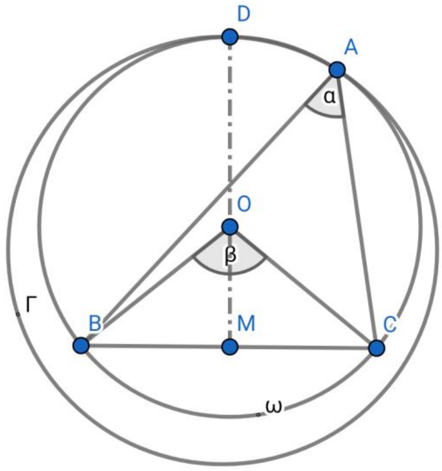


Рисунок 2.5. Побудова шуканого трикутника

Величина хорди BC визначається з умови, що вона проведена через деяку точку кола ωпід даним кутом α, а отже, із центра O під кутом β (рівним центральним кутам відповідають рівні хорди).

Що стосується точки A, то вона визначається двома умовами:

1) вона лежить на колі ω;

2) вона належить ГМТ, для яких сума квадратів відстаней від точок B і C дорівнює d^2.

<u>Побудова</u>. Будуємо послідовно:

1) коло $\omega(O, R)$ із центом у довільній точці O;

2) два радіуси OB й OC кола під кутом β один до іншого;

3) відрізок BC і його середину M;

4) коло Γ, що служить ГМТ таких точок P, для яких $BP^2 + CP^2 = d^2$;

5) будуємо точку A перетин кіл ω і Γ;

6) відрізки AB та AC. Трикутник ABC – шуканий.

Дослідження. Коли кого *Г* існує і має спільну точку з дугою *BDC* кола ω(рис.2.5), то задача має єдиний розв'язок. У іншому випадку розв'язків немає.

Метод подібності

Метод подібності знаходить застосування звичайно у випадках, коли серед даних лише одне є відрізком, а всі інші дані – або кути, або відношення відрізків.

Звичайно доцільно допоміжну фігуру будувати так, щоб вона була подібна не тільки шуканій, але й подібно розташована з нею. Успіх розв'язання залежить у цих випадках від вибору центра подібності [29].

При розв'язанні задач на побудову методом подібності часто корисно скористатися таким зауваженням: якщо дві фігури подібні, то коефіцієнт подібності дорівнює відношенню будь-яких двох відповідних відрізків. Якщо відрізкам $a, b, c, \ldots$ фігури F відповідають відрізки $a_1, b_1, c_1, \ldots$ подібної фігури F_1, то коефіцієнт подібності дорівнює відношенню:

$$\frac{a_1 + b_1}{a + b}, \quad \frac{a_1 - b_1}{a - b}, \quad \frac{a_1 + b_1 - c_1}{a + b - c}$$

Задача. У даний гострокутний трикутник *ABC* вписаний квадрат так, щоб дві вершини квадрата лежали на основі трикутника, а дві – на бічних сторонах.

Аналіз. Потрібно побудувати квадрат, що задовольняє наступним умовам:

1) дві його вершини повинні лежати на *AB*;
2) одна вершина на *AC*;
3) одна вершина на *BC*.

Зауважимо, що легко побудувати квадрат, що задовольняє першим двом умовам. Нехай це буде квадрат$K_1L_1M_1N_1$.

Зрозуміло, що при перетворенні із центром *A* і будь-яким коефіцієнтом подібності квадрат $K_1L_1M_1N_1$перетвориться у квадрат $K_2L_2M_2N_2$, який також задовольняє умовам 1) і 2). При цьому точка M_2 виявиться на прямій AM_1.

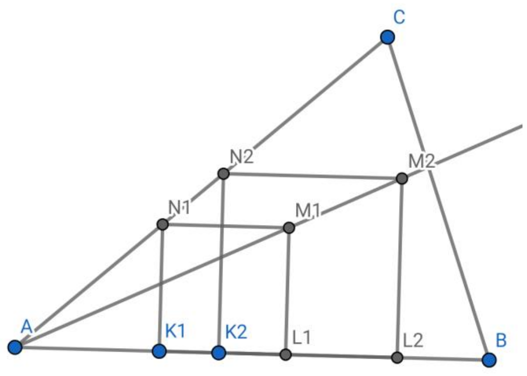


Рисунок 2.6. Побудова квадрата, вписаного в трикутник

Щоб розв'язати задачу, потрібно серед квадратів $K_2L_2M_2N_2$подібних до квадрата $K_1L_1M_1N_1$, вибрати той, у якого точка M_2 лежить на BC.

У такому випадку точка M_2 виявиться точкою перетину прямих AM_1 і BC. Звідси випливає побудова.

Побудова.

1. Будуємо довільний квадрат $K_1L_1M_1N_1$, що задовольняє умовам 1) і 2) (рис.2.6).

2. Будуємо пряму AM_1 й позначаємо точку M її перетину зі стороною BC.

3. Через точку M проводимо пряму, паралельну M_1N_1 і позначаємо точку N, у якій вона перетинає AC.

4. З M і Nопускаємо на AB перпендикуляри MLй NK. Отриманий прямокутник $KLMN$– шуканий квадрат.

5. Справді, $KLMN$ квадрат, тому що з побудови він подібний до квадрата $K_1L_1M_1N_1$. Крім того, він задовольняє всім іншим вимогам задачі.

6. Задача розв'язана.

Розв'язання задач на побудову методом паралельного перенесення і повороту

Евристичні схеми пошуку плану розв'язання задач на побудову методами паралельного перенесення і повороту схожі:

1) припустити, що задача розв'язана. Один з даних елементів задачі перенести паралельно собі у певному напрямі на дану відстань (або повернути навколо даної точки на певний кут). У результаті цього перетворення одержують допоміжну фігуру, яку можна побудувати за даними задачі;

2) побудувати допоміжну фігуру і оберненим паралельним перенесенням (поворотом) виконати побудову шуканої фігури.

Пропонуємо приклади додаткових задач до основних геометричних побудов в курсі геометрії 7-9 класів:

До основних побудов відносять такі:

1. Побудова трикутника за даними сторонами.
2. Побудова кута, що дорівнює даному.
3. Побудова бісектриси даного кута.
4. Побудова перпендикулярної прямої.
5. Поділ відрізка навпіл.

Методисти підручників з математики М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова, В.Г.Бевз, Г.П. Бевз [17] уточнюють деякі з основних побудов, варіюючи їх кількість від чотирьох до семи:

а. Побудова трикутника за трьома сторонами;

б. Побудова кута рівного даному;

в. Побудова середнього перпендикуляра;

г. Побудова прямої перпендикулярної даній;

- Через точку, що лежить на прямій;
- Через точку, що прямій не належить.

д. Побудова бісектриси кута;

е. Побудова прямої, паралельної даній.

Побудова трикутника за трьома сторонами

Задача. Нехай потрібно побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють даним відрізкам.

Дано:

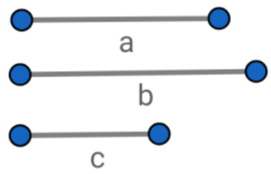


Рисунок 2.7. Задані сторони трикутника

Побудувати:

трикутник *ABC: AB=c, BC=a, AC=b.*

Аналіз. Припустимо, що такий трикутник побудовано. Позначимо через *A, B, C*, вершини цього трикутника, які лежать відповідно проти сторін *a, b, c.*

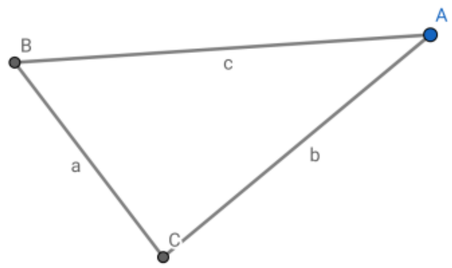


Рисунок 2.8. Аналіз задачі

Точка *C* розміщена на відстані *b* від точки *A* і на відстані *a* від точки *B*. Отже точка *C* є точкою перетину двох кіл, одне з радіусом *b*, з центром в точці *A*, інше, з радіусом *a*, з центром в точці *B*. Виходячи з цього діяти будемо за таким способом.

Побудова:

1) Через будь-яку точку *A* проведемо будь-яку пряму *m*. Проведемо коло з центром в точці *A* і радіусом *c*, одну з двох точок перетику кола і прямої *m* позначимо *B*.

2) Проведемо два кола: одне радіусом *b* з центром в точці *A*, інше радіусом а з центром в точці *B*, позначимо через *C* одну з точок перетину цих кіл.

3) Проведемо відрізки *AC* і *BC*.

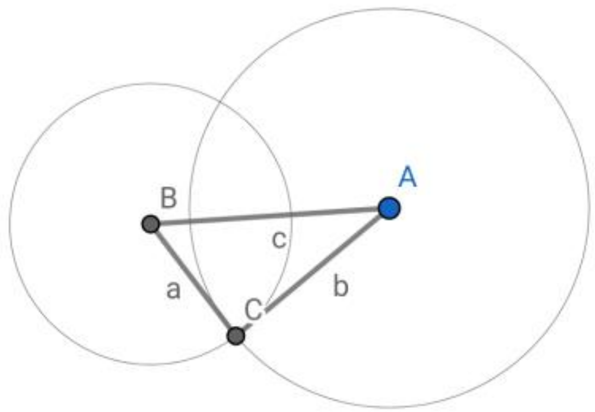


Рисунок 2.9. Побудова шуканого трикутника

Доведення.

Трикутник *ABC* – шуканий, оскільки його сторони, за побудовою, дорівнюють *a*,*b*,*c*. Виконана побудова наочно пояснює зміст нерівності трикутників.

Якщо $c > a + b$, то коло з радіусом a і b не перетнуться в цьому випадку. В цьому випадку трикутник побудувати неможливо.

Розв'язання майже кожної геометричної задачі не можливе без побудови рисунка, що відповідатиме умові задачі. Правильно побудований рисунок до задачі гарантує те, задача буде розв'язана правильно. Розглянемо як розв'язувати задачі на доведення з теми трикутники.

2.3 Методичні особливості навчання учнів розв'язуванню задач на доведення в темі «Трикутники»

Одним із сучасних методологічних підходів до розробки методики навчання доведенню виступає єдність логіки та евристики.

Під час вивчення теорем і розв'язування задач на доведення у методиці викладання математики виділяються ті самі основні етапи, що і для процесу формування понять: підведення до розуміння задачі, формування навичок, застосування теорем у процесі розв'язання нескладних базових задач і включення їх у різні зв'язки з іншими теоремами та поняттями у процесі розв'язування складніших і прикладних задач.

Наведемо приклади систем питань, які приводять до доведення теорем.

Приклад 1. Доведення теореми про суму кутів трикутника.

На рисунку 2.10 пряма BDпаралельна до прямої AC. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – *внутрішні кути трикутника ABC. Дати відповіді на запитання 1-7.*

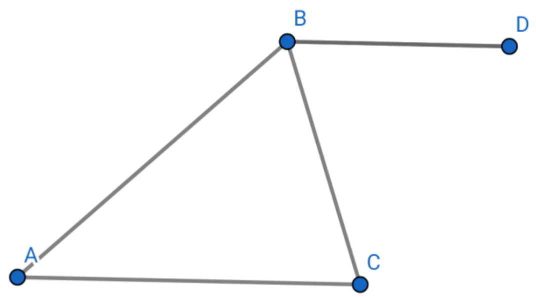


Рисунок 2.10. До прикладу 1

1) Як називаються кути *A* і *ABD*при прямих *CA* і *BD* та січній *AB*?

а) внутрішніми різносторонніми;

б) внутрішніми односторонніми;

в) відповідними.

2) Чому дорівнює сума кутів *A* і *ABD*–внутрішніх односторонніх при паралельних прямих *AC* і *BD* та січній *AB*?

а) 200°;

б) 100°;

в) 180°;

г) неможливо визначити.

3) На які два кути розбивається кут *ABD*променем *BC*?

4) Чому дорівнює сума кутів *A*, *ABC*, *CBD*?

а) 200°;

б) 100°;

в) 180°;

5) Як називаються кути *C* і *CBD* при прямих *AC* і *BD* та січній *BC*?

а) внутрішніми різносторонніми;

б) внутрішніми односторонніми;

в) відповідними.

6) Якою є градусна міра кутів *C* і *CBD* при паралельних прямих *AC* і *BD* та січній *BC*?

а) нерівними;

б) рівними;

7) Чому дорівнює сума кутів *A*, *B* і *C*, якщо $\angle C = \angle CBD$?

а) 200°;

б) 100°;

в) 180°;

8) Чому дорівнює за доведенням сума кутів довільного трикутника?

9) Властивість яких кутів використовується при доведенні теореми про суму кутів трикутника?

а) вертикальних і суміжних;

б) внутрішніх односторонніх і внутрішніх різносторонніх при паралельних прямих і січній;

Приклад 2. Доведення теореми про зовнішній кут трикутника.

На рисунку 2.11 вершина C трикутника ABC належить прямій AD, . ∠A, $\angle$B, $\angle$C *– внутрішні кути трикутника ABC. Дати відповіді на запитання 1-5.*

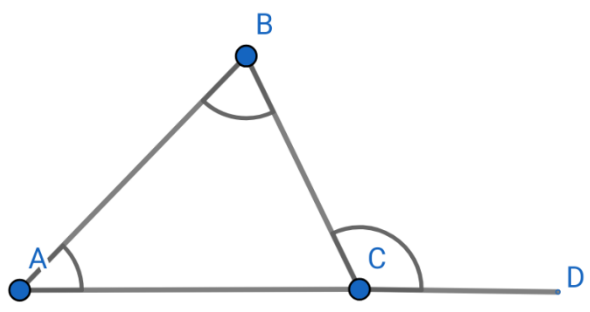


Рисунок 2.11. До прикладу 2

1) Як називається кут *BCD* для трикутника *ABC*?

а) зовнішнім кутом при вершині *C*;

б) внутрішнім кутом при вершині.

2) Якими є внутрішній кут *C* трикутника *ABC* і зовнішній кут *BCD* трикутника *ABC* при вершині *C*?

а) вертикальними;

б) суміжними;

в) відповідними.

3) Чому дорівнює сума внутрішнього кута *C* і зовнішнього кута *BCD* трикутника *ABC*?

а) 200°;

б) 90°;

в) 180°;

г) неможливо визначити.

4) Чому дорівнює сума градусної міри кута *C* разом із сумою градусних мір двох інших кутів *A* і *B*?

а) 200°;

б) 90°;

в) 180°;

г) неможливо визначити.

5) Якими є градусні міри зовнішнього кута *BCD* при вершині *C* і сума градусних мір внутрішніх кутів при двох інших вершинах *B* і *A* трикутника *ABC*?

а) нерівними;

б) рівними;

в) неможливо визначити.

6) Доповнити запис теореми про зовнішній кут трикутника. Зовнішній кут трикутника дорівнює …

а) сумі суміжного з ним внутрішнього кута і одного внутрішнього несуміжного з ним;

б) суміжному з ним внутрішньому куту;

в) сумі двох внутрішніх кутів, несуміжних з ним.

7) Які з наведених тверджень використовуються при доведенні теореми про зовнішній кут трикутника?

а) теорема про вертикальні кути;

б) теорема про суміжні кути;

в) теорема про суму кутів трикутника;

г) ознаки рівності трикутників.

8) Чому дорівнює сума двох внутрішніх кутів трикутника?

Наведені системи завдань можуть використовуватися як в фронтальному навчанні в усній формі вираження, так і для індивідуального самостійного письмового виконання [25].

Наведемо приклади завдань на відтворення, закріплення доведень теорем і наступного логічного, змістовно-оперативного аналізу.

Приклад 3. Доведення теореми про суму кутів трикутника.

Доповнити записи, що складають доведення теореми про суму кутів трикутника (рис.2.12)

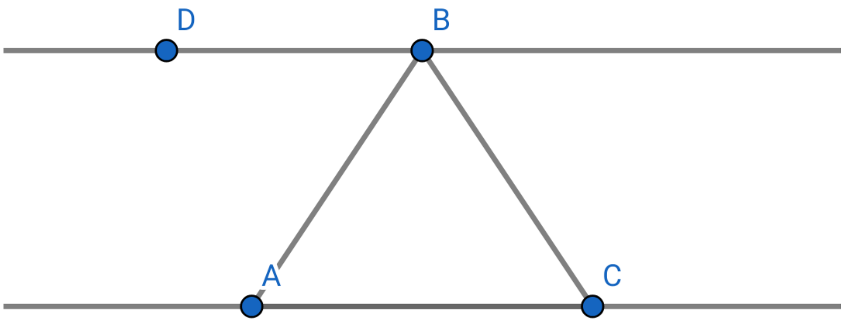


Рисунок 2.12. До прикладу 3

Дано: трикутник ABC.

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Доведення

1) Проведемо пряму BD, паралельну прямій AC (точка Dточка C лежать по різні боки прямої АВ).

2) $\angle DBC$ і $\angle C$ – внутрішні_________________ при паралельних прямих _____________ і січній ________.

$\angle DBC$ і $\angle C =$__________ за властивістю паралельних прямих.

Введення нової аксіоми, теореми проходить звичайно більш організовано і з більшою самостійністю і активністю учнів у тих випадках, коли використовується метод доцільних задач, який Я.Груденов [27] відносить до одного з видів евристичного методу.

Вчитель заздалегідь готує і чітко формулює спеціально підготовлені задачі. Ці задачі вчителю краще складати самому, враховуючи специфіку роботи в своїх класах. Підготовчі задачі, на основі яких учні самостійно відкривають і формулюють нові теореми, викликають у них великий інтерес. Під час введення, наприклад, геометричних теорем часто застосовуються вправи на побудову відповідних фігур. Таким чином даний евристичний прийом передбачає створення послідовності таких задач, які, по-перше, можуть бути розв'язані учнями самостійно, по-друге, націлюють їх на успішний пошук необхідного доведення, здійснює доступний зв'язок між відомими знаннями та новими, тобто дає змогу включити нові знання до системи за рахунок самостійної роботи учнів.

Одним із методів, який допомагає учням виявити елементи ініціативи при створенні доведення і під час розв'язування задач, які готують до подальшого застосування методів, що надають великі можливості виявити творчі здібності, є евристична бесіда. За зовнішньою формою цей метод полягає в тому, що вчитель, доцільно добираючи питання, веде клас до того шляху, який необхідний для доведення. Учні успішно долають у доведенні один крок за іншим, відкриваючи таким шляхом усе доведення і навчаючись у процесі роботи загальним евристичним прийомам мислення: аналізу, порівнянню, виокремленню головного, узагальненню.

Наступним етапом під час вивчення теорем є аналіз своєї діяльності у процесі пошуку доведення. необхідно скласти план пошуку, зробити висновки, розглянути інші способи доведення, довести необхідність кожної умови, побудувати контрприклади.

При цьому можливе використання програми «Задача-метод» з системи евристико-дидактичних конструкцій, як засобу усвідомлення і глибокого розуміння власне процесу доведення теореми.

Для забезпечення всіх видів і форм навчання важливо чітко бачити роль задачі. Доцільно підбирати їх так, щоб вони несли певне навчальне навантаження. Важливу роль в організації навчання розв'язування задач на доведення відіграє система задач, які несуть нову інформацію. Вони можуть бути різних видів.

2.4 Формування вмінь та навичок розв'язувати задачі на дослідження з теми «Трикутники»

Як зазначалось раніше, задачі на дослідження викликають у дітей підвищений інтерес, адже в таких задачах є певна несподіванка.

Багато можливостей для розгляду таких задач дає геометричний матеріал. Доцільно підбирати блоки споріднених завдань, об'єднаних однією математичною ідеєю або проблемою. Приведемо приклади такого підходу до навчання.

Система дослідницьких завдань з теми «Трикутники»

Сума кутів трикутника. Рівнобедрений трикутник

Проблема: скільки розв'язків має задача?

1. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 74°. Знайти решту кутів трикутника.

Відповідь. Якщо даний кут лежить при основі, то інші кути дорівнюють 74° і 32°. Якщо даний кут є кутом між бічними сторонами, то інші кути дорівнюють по 53°.

2. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 91°. Знайти решту кутів трикутника.

Аналізуючи умову, учні мають відкинути випадок, коли даний кут є кутом при основі, оскільки він суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

3. Сума двох кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100°. Знайти різницю цих кутів трикутника.

Відповідь. 60° або 0°.

4. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо різниця двох його кутів дорівнює 45°.

Відповідь. 45°, 45°, 90° або 75°, 75°,30°.

5. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо сума двох із них дорівнює 104°.

Відповідь. 76°, 76°, 28° або 52°, 52°, 76°.

6. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо сума двох із них дорівнює 86°.

Відповідь. 43°, 43°, 94°.

7. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо два з них відносяться як 4:7.

Відповідь. 48°, 48°,84° або 70°, 70°,40°.

8. Сума двох кутів рівнобедреного трикутника менша від 90°.0020ому дорівнює різниця цих кутів?

Відповідь. 0°.

9. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника у 3 рази більше від його внутрішніх кутів. Знайти внутрішні кути трикутника.

Під час розв'язування цієї задачі необхідно розглянути 4 випадки:

1) Зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами в 3 рази більший від внутрішнього, суміжного з ним;
2) Зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами в 3 рази більший від внутрішнього, не суміжного з ним кута;
3) Зовнішній кут при вершині кута при основі в 3 рази більший від внутрішнього, суміжного з ним;
4) Зовнішній кут при вершині кута при основі в 3 рази більший від внутрішнього кута між бічними сторонами.

Один з чотирьох випадків виявляється неможливим, а три інші приводять до результатів.

Відповідь. 67,5°, 67,5° і 45° або 45°, 45°, 90° або 72°, 72° і 36°.

10. Кут між висотою і бісектрисою рівнобедреного трикутника, проведений з вершини кута при основі, дорівнює 30°. Знайти кут між бічними сторонами трикутника.

11. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює α. Знайдіть решту кутів.

12. Один з кутів трикутника дорівнює 50°. При якій умові цей трикутник буде рівнобедрений?

13. Один з кутів трикутника дорівнює α. При якій умові цей трикутник буде рівнобедрений?

14. Один з зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°. При якій умові цей трикутник буде рівнобедреним.

15. Один з зовнішніх кутів трикутника дорівнює α. При якій умові цей трикутник буде рівнобедреним.

16. Кут між бісектрисами двох кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Знайдіть кути цього трикутника. Розгляньте різні варіанти вибору бісектрис.

17. Складіть і розв’яжіть задачу, аналогічну попередній якщо кут між бісектрисами дорівнює 120°.

18. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 4см і 5 см. Знайти його периметр.

Оскільки в умові не сказано, яка сторона є бічною, а яка – основною, то учні розглядають два випадки:

1. Якщо більша сторона є основою, то:

   $P = 5+4\cdot2=13$(см);

2. Якщо менша сторона є основою, то:

   $P = 4+2\cdot5=14$(см)

19. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Знайти його периметр.

На перший погляд, як і в попередній задачі маємо два розв’язки, але трикутник з бічною стороною 3 см і основною 7 см не існує, бо 3+3<7. Отже, розв’язок у цій задачі один, хоча обов’язково слід розглянути обидва випадки.

20. Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а інша в 12 рази більша від неї. Знайти периметр трикутника.

Відповідь. 25,6 см або 27,2 см.

21. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 56 см, а дві його сторони відносяться як 2:3. Знайти сторони трикутника.

Відповідь. 16 см, 16 см, 24 см або 21 см, 21 см, 14 см.

22. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 54 см, а дві його сторони відносяться як 5:2. Знайти сторони трикутника.

Відповідь 22,5 см, 22,5 см, 9 см.

23. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см. Одна сторона більше від другої на 3 см. Знайти сторони трикутника [26].

Відповідь. 5 см, 5 см, 8 см або 7 см, 7см, 4 см.

24. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12,6 см. Знайти сторони трикутника, якщо вони відносяться, як 8:5.

Відповідь. 4,8 см, 4,8 см, 3 см або 3,5 см, 3,5 см, 5,6 см.

25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см. Одна сторона більше від другої на 5 см. Знайти сторони трикутника.

Відповідь. $7\frac{1}{3}$ см, $7\frac{1}{3}$ см, $2\frac{1}{3}$см.

Теорема про суму кутів трикутника. Властивість катета, що лежить проти кута 30°

Проблема: вимірювання одних елементів трикутника веде до змін інших його елементів. Які закономірності при цьому можна помітити?

1. Будемо змінювати кут *C* трикутника *ABC*, залишаючи при цьому незмінний кут *A* і сторону *AC:* кут $A=30^\circ$, $AC=b$. Зміна кута *C* викликає зміну трикутника *ABC:* його сторін *AB, BC* і кута *B*. В яких межах може змінюватися величина кута *C*? Чи може кут *C* дорівнювати 150°, 160°, 120° ?
2. Чи правильна для даного трикутника *ABC* рівність: $\angle B=150^\circ - \angle C$.
3. Користуючись попередньою рівністю, з'ясуйте:
   a. якщо величина кута *C* прямує до нуля, то до якого значення прямує величина кута *B*?
   b. якщо величина кута *C* прямує до 150°, то до якого значення прямує величина кута *B*?
4. В яких межах змінюється величина кута *B*?
5. Як змінюється довжина сторони *AB*?
6. Обчисліть найменше значення сторони *BC*.
7. Виконайте попереднє завдання, якщо кут *A* дорівнює 45°.
8. Складіть і розв'яжіть аналогічну задачу.

Проблема: чи завжди за стороною і двома прилеглими до неї кутами можна побудувати трикутник *ABC*?

Головна особливість завдань *1-8* полягає в тому, що трикутник *ABC* в них розглядається в динаміці, в ході їх виконання відбувається цілісне, свого роду систематичне дослідження трикутника. Задачі на дослідження дозволять школярам відчути себе дослідниками, що сприяє підвищенню їх пізнавального інтересу. Використання ІКТ на уроках, теж підвищує інтерес учнів.

2.5. Використання комп'ютера в навчальному процесі

Особливого значення у створені та розробці методик навчання набувають сучасні засоби навчання, зокрема, персональні комп'ютери (ПК) та їх програмне забезпечення. При цьому можна виділити два типи педагогічних програмних засобів(ППЗ):

1) ППЗ, розраховані на зменшення часу спілкування учня і вчителя, або і навчання зовсім без вчителя;

2) ППЗ, розраховані на якомога інтенсивніше спілкування учня і вчителя, за рахунок ефективного використання засобів інформаційно-комунікативних технологій (ІКТ) та звільнення учня від необхідності витрачати вільний час на виконання технічних, рутинних операцій, коли вони практично спілкуються з вчителем.

При цьому вивільнений час міг би бути використаний на постановку проблем, з'ясування разом з вчителем сутності досліджуваних процесів і явищ, розробки їх інформаційних моделей, встановлення причинно-наслідкових зв'язків і закономірностей, порівняння різноманітних проявів закономірності, їх аналізу і синтезу, узагальнюючих висновків, абстрагування від окремих несуттєвих фактів і ознак, що має важливе значення для фундаменталізації знань, так і для надання результатам навчання прикладного, практично-значимого характеру [35].

Очевидно, обидва розглядувані типи ППЗ являють собою дві нероздільні та доповнюючи одна одну протилежності. Вони повинні, в тій чи іншій мірі, використовуватися в різних видах навчальної діяльності, зокрема, при вивчені нового матеріалу, формуванні знань, умінь та навичок, самоконтролю тощо.

Використання ППЗ дає значний ефект при розгляді задач на побудову. Оскільки, для того, щоб побачити розв'язок такої задачі, важлива точність виконання побудов за допомогою циркуля та лінійки, то учні досить часто або дуже повільно проводять даний етап розв'язування, або ж переробляють побудови кілька разів. Це сповільнює темп навчального процесу. І, хоча, у вивчені геометричних побудов важливим є вміння будувати алгоритм геометричних побудов, ніж власне, побудова, але саме на останні відводиться значна частина часу. Тому в школах при розв'язуванні задач на побудову практично нехтуються такі етапи розв'язування, як доведення та дослідження та й складність виконаних вправ незначна. Використання графічних редакторів на уроці не дозволить думати над тим, як тримати ніжку циркуля так, щоб побудувати коло заданого радіуса, або ж як тримати правильно лінійку і олівець, щоб провести відрізок точно через дві задані точки тощо. Тож, розроблений на Україні М.І.Жалдаком та О.В.Вітюком пакет GRAN дозволяє підліткові зосередитися на творчій стороні розв’язування задачі. Оскільки, власне, побудови можуть бути виконанні значно швидше, з’являється час на проведення етапів доведення та дослідження розв’язків задач. Це дозволяє також ускладнити завдання для більш сильних учнів [48].

Один з потенціалів – це використання інформаційних технологій на уроках геометрії. Воно робить навчання більш змістовним, видовищним, сприяє розвитку самостійності і творчих здібностей учня, істотно підвищує рівень індивідуалізації навчання. Для перевірки засвоєння знань учнів можна використовувати комп’ютерні тести. Особливість їх у тому, що учень, в разі помилки, може бачити зразок правильної відповіді. Комп’ютерні тести добре використовувати не тільки для контролю знань, але і для самоконтролю, як при підготовці до контрольних робіт, так і для повторення раніше вивченого матеріалу, знання якого потрібне при вивчені нової теми. Учнями середніх класів можна використовувати ці тести для повторення матеріалу перед контрольними роботами. Особливо примітним є той факт, що ті учні, які психологічно не справляються над письмовими контрольними роботами, дуже успішні при виконанні робіт за допомогою тестів.

Важливу роль відіграють при вивчені геометрії уроки-презентації. На таких уроках реалізуються принципи доступності, наочності. Уроки ефективні своєю естетичною привабливістю, також між вчителем і учнем існує посередник – комп’ютер, що сприяє ефективній взаємодії. Урок-презентація також забезпечує великий обсяг інформації і задач за короткий період. Завжди можна повернутися до попереднього слайду.

Важливим позитивним ефектом застосування комп’ютерної техніки на уроці є підвищення мотивації навчання. При цьому особливо яскраво видно вплив нових комп’ютерних засобів викладання на «слабких» учнів; для багатьох з них робота з комп'ютером виявляється тією єдиною сходинкою до відродження інтересу до навчання, можливістю домогтися успіху. Учні охоче створюють презентації, використовуючи додатковий матеріал, можливості Інтернет мережі, власні знання з інформатики та геометрії. Застосування ІКТ при вивчені різних предметів, в першу чергу, вимагає високої підготовки вчителя, який знайомий з даними програмами і вміє з ними працювати. По-друге, уроки із застосуванням комп'ютера дозволяють виконати більший обсяг задач, операцій, дій і при цьому якісно. Можливості програмного забезпечення ростуть з кожним днем, комп'ютер все більше впроваджується в усі сфери суспільства. Тому кожному вчителю необхідно навчитися використовувати інформаційні технології в освіті.

Задача. Пряма, що перетинає середину основи рівнобедреного трикутника і проходить через протилежну вершину ділить цей трикутник на два. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників рівні [40].

Зазвичай розв'язування даної задачі базується на застосуванні формул. Рисунок при цьому відіграє другорядну функцію і використовується як звичайна наочна опора, яка може і не використовуватися. Отже, маємо просту задачу на відпрацювання знань, вмінь, навичок на добре відомому рівнобедреному трикутнику.

Виконаємо побудову рисунку до задачі у динамічному середовищі ППЗ GRAN 2D. А саме, побудуємо рівнобедрений трикутник *ABD* і пряму*BC* так, щоб вона задовольняла вимогам задачі. Побудуємо також за допомогою ППЗ GRAN 2D центри кіл, описаних навколо трикутників *ADC*і *DBC*. Можна побачити. що початкову умову задачі доцільно доповнити, зробивши її більш цікавою, наприклад, так:

Пряма, що перетинає середину основи рівнобедреного трикутника і проходить через протилежну вершину ділить цей трикутник на два.

1. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників, рівні.

2. Знайдіть відстань між центрами цих кіл, якщо у даному трикутнику відомі основа і кут при ній.

Знову скористаємося «інструментами» ППЗ GRAN 2D і побудуємо радіуси кіл, описаних навколо трикутників*ADC* і *DBC*. Виділені радіуси окреслюють нову фігуру *EDFC*. Вимірявши за допомогою ППЗ GRAN 2D довжини сторін чотирикутника *EDFC* можна зробити припущення, що цей чотирикутник – ромб.

Тоді умову задачі можна доповнити таким чином:

Пряма, що перетинає середину основи AB рівнобедреного трикутника ADB у точці C проходить через протилежну вершину D ділить цей трикутник на два трикутники ADC і DBC.

1. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ADC і DBC – рівні

2. Знайдіть радіуси описаних кіл, якщо у трикутнику ADB відомі: кут при основі, довжина основи AB.

3. Доведіть, що чотирикутник EDFC – ромб (де E і F – центри кіл,описаних відповідно навколо трикутників ADC і DBC).

За умовою задачі точка *C* перетину прямої з основою трикутника *ADB* лежить на середині сторони *AB* використовуючи динамічні можливості ППЗ GRAN 2D почнемо змінювати положення точки *C* на стороні *AB*.

Виконане дослідження дозволяє висунути гіпотезу відносно того, що властивості чотирикутника *EDFC* не змінюються, він залишається ромбом. Отже, дану задачу можна переформулювати таким чином, розглянувши таку особистісно-орієнтовану педагогічну ситуацію, спрямовану на учнів:

Пряма, що перетинає основу AB (або її продовження) рівнобедреного трикутника ADB у точці C, проходить через протилежну вершину D ділить цей трикутник на два довільних трикутникиADC і DBC. За допомогою ППЗ GRAN 2D дослідіть і висуньте гіпотези:

1) Щодо радіусів кіл, описаної навколо трикутників ADC і DBC;

2) Щодо виду чотирикутника EDFC, де E і F – центри кіл,описаних відповідно навколо трикутників ADC і DBC.

Доведіть сформульовані гіпотези.

Як показує шкільна практика, подібні дослідження сприяють підвищенню рівня розвитку загальних просторовий уявлень і просторового мислення учнів, що є одним із показників математичного розвитку особистості. Застосування такого підходу на базі ІКТ при розв’язувані задач на доведення дає цілу низку переваг перед традиційним навчанням. Застосування ППЗ робить задачу на доведення більш цікавою для учня; виникає можливість експериментувати, досліджувати об’єкти в новому ракурсі, відшукувати приховані можливості об’єкта, які майже неможливо побачити при традиційному зображені їх у підручнику або зошиті. Програмний засіб може бути використаний для пошуку закономірностей, на підставі яких можна висувати ґрунтовні гіпотези щодо цілого класу об’єктів, які пов’язані спільними геометричними, конструктивно-технічними особливостями. Графічне зображення об’єкта може відображати як загальний випадок, який відповідає умові задачі, так і частинний випадок, тобто не можна посилатися на рисунок, як на очевидний факт без доведення; виникає можливість побачити динамічні властивості об’єкта.

2.6. Факультативні заняття з теми: «Трикутники в геометрії Лобачевського»

Ми пропонуємо орієнтований план тематики проведення факультативних занять з теми «Трикутники в геометрії Лобачевського». В даному плані орієнтований розподіл уроків можна зробити за такими пунктами, що відповідатимуть урокам:

1-2 уроки: «Історичні аспекти. Порівняння геометрії Лобачевського з іншими геометріями»;

3-4 уроки: «Аксіоматика геометрії Лобачевського»;

5-6 уроки: «Теорема Лежандра, про суму внутрішніх кутів трикутника. Розв’язування задач»

7-8 уроки: «Теорема про суму кутів трикутника на площині Лобачевського. Розв’язування задач»

При наповненні кожного з факультативних занять, можна скористатися таким матеріалом.

Побудова геометрії, при якій з усіх її тверджень виділено аксіоми, а всі теореми доведено на основі аксіом і вже доведених теорем, називається *аксіоматичною*. Аксіоматична побудова геометрії – завдання складне. Аксіоматичний метод побудови був усвідомлений математиками давно. Вже у V – IV ст. до н.е. з’являються роботи старогрецьких математиків (Гіппократ, Февдій та ін.), які розв’язували завдання такої побудови. У III ст. до н.е. старогрецький математик Евклід написав роботу з геометрії під назвою «Начала», в якій вдало виділив аксіоми і продумано розмістив теореми в ланцюг логічних виведень. Протягом двох тисяч років робота Евкліда лишалася неперевершеним зразком аксіоматичної побудови геометрії [36].

В історії геометрії V постулат Евкліда зіграв важливу роль. Нагадаємо його: *«Через точку, яка не лежить на прямій, проходить не більше, ніж одна пряма, паралельна заданій прямій»* [37].

Через даний постулат лежав шлях для створення нової геометрії – геометрії Лобачевського, яка змінила наші погляди на геометрію реального фізичного простору і на геометрію як на абстрактну математичну науку [45].

Протягом 2000 років після Евкліда важко вказати великого математика, який не намагався би довести V постулат. Його доводили Поседоній (I ст. до н.е.), Птолемей (III ст. до н.е.), Прокл (410–475), Д.Валліс (1616–1703), Ламберт (1728–1777), *Лежандр* (1752–1833), В.Больяї (1775–1856), Д.Саккері (1666–1733) та інші. Над ними працювали в свій час і творці нової геометрії – Гаус (1777–1855), І.Больяї (1802–1860) та Микола Іванович Лобачевський (1793–1856) [45].

Повне виділення аксіом та аксіоматична побудова геометрії були здійснені тільки в кінці XIX – на початку XX століття. Відкрита М.І.Лобачевським і незалежно від нього Я.Больяї та К.Гауссом нова геометрія, яка називається *геометрією Лобачевського*, поклала початок розвиткові *неевклідових геометрій* [37].

Велика заслуга в створенні аксіоматичної побудови геометрії належить німецьким математикам М.Пашу, Д.Гільберту, Г.Вейлю, італійським математикам Д.Пеано, Пієрі та ін. [37].

До абсолютної геометрії відносять поняття про суміжні вертикальні кути; деякі теореми про стороні та кути три кутника; теорему про зовнішній кут(«зовнішній кут більший від будь-якого внутрішнього, не суміжного з ним»); теореми про рівність трикутників; про властивість фігур, вписаних в коло та інші [36].

Таким чином, можна сказати, що спроби доведення V постулату зводяться до отримання його як логічного слідування абсолютної геометрії. З однієї тільки абсолютної геометрії вивести V постулат не можливо. Цим пояснюється те, що багато коментаторів Евкліда вводили нові припущення, після введення яких V постулат можна довести. Такі припущення називаються *еквівалентними (рівносильними)* V постулату.

Існування доведень, що нас цікавлять, зводились до введення припущень, що еквівалентні V постулату. Але такого роду припущень неможна розглядати як доведення V постулату – мається на увазі заміна V постулату іншими, еквівалентними йому постулатам.

Окрім таких доведень існували й інші, основані на помилках та неправильних міркуваннях.

Наведемо два приклади доведення V постулату [36].

1. Доведення, що ґрунтується на припущеннях Прокла.
2. Доведення, що ґрунтується на припущеннях Валліса.

Система аксіом геометрії Лобачевського відрізняється від системи аксіом геометрії Евкліда лише аксіомою паралельності, яка називається аксіомою Лобачевського. Інші аксіоми такі, як в геометрії Евкліда – це аксіоми I–IV груп.

Оскільки в обох геометрія однакові основні поняття та відношення і однакові аксіоми I–IV груп, то в них однаковими будуть і всі теореми, які є наслідками спільних аксіом. Це теореми про належність точок прямим, про порядок точок на прямій і площині, ознаки конгруентності трикутників, про перетин прямої з колом та двох кіл, теореми Архімеда, Кантора, Саккері-Лежандра та ін. відрізняються геометрії тими теоремами, при доведенні яких, треба виходити з відповідної аксіоми паралельності або її наслідку.

Ту частину геометрії, яка є наслідком з I–IV груп аксіом, іноді називають *абсолютною геометрією*. Схематичний зв'язок геометрії Евкліда та Лобачевського можна показати за такою схемою:

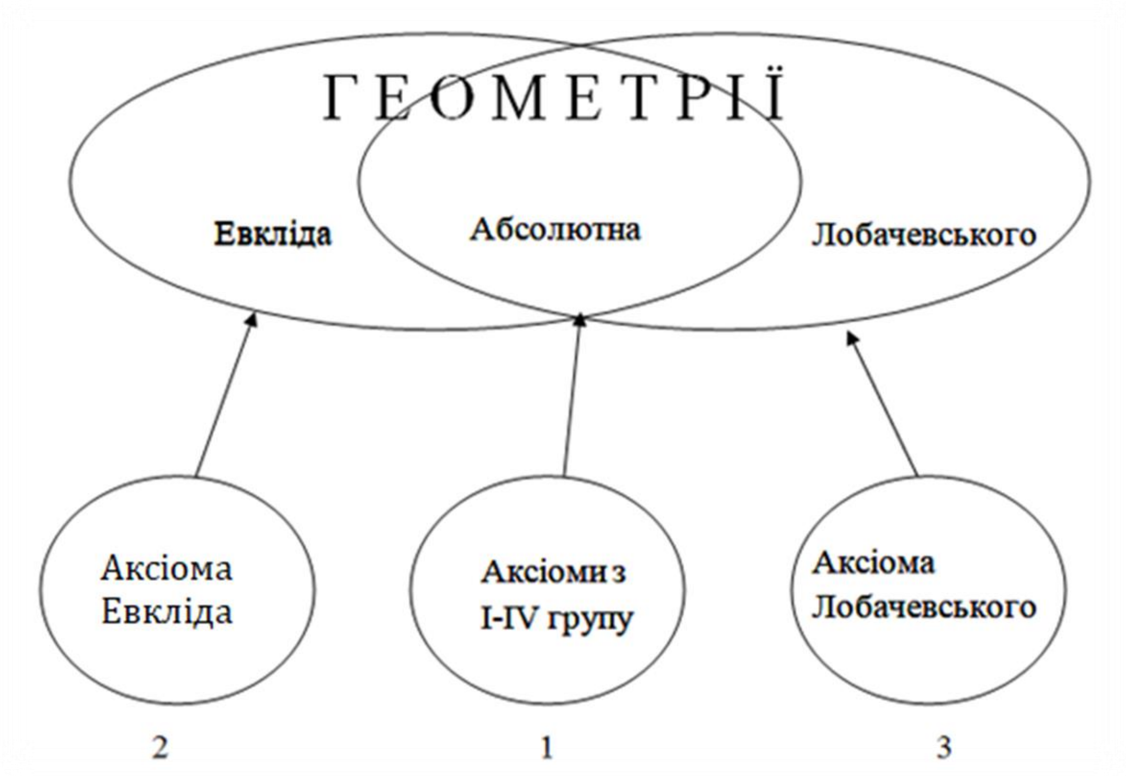


Рисунок 2.13. Аксіоматична основа двох геометрій

На цій схемі нижніми кругами зображена аксіоматична основа двох геометрій, при чому, круги 1 і 2 (тобто аксіоми з I–IV групу та аксіома Евкліда) становлять основу геометрії Евкліда, а круги 1 і 3 (тобто аксіоми з I–

IV групу та аксіома Лобачевського) становлять основу геометрії Лобачевського. З цих аксіом як логічні наслідки випливають, відповідно, геометрія Евкліда і геометрія Лобачевського.

На схемі видно спільну частину двох геометрій – абсолютну геометрію – та її логічну основу – аксіоми з I–IV групи. Видно також, що відрізняються ці дві геометрії тими теоремами, які доводяться на підставі аксіом паралельності. За своїм змістом аксіома Лобачевського є запереченням аксіоми паралельності Евкліда. Сформулюємо її:

Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести більше, ніж одну пряму, яка не перетинає заданої прямої.

Наслідок. Безпосередньо з аксіоми Лобачевського (та аксіом з I–IV груп) випливає, що *через точку, яка не лежить на прямій, проходить безліч прямих, які не перетинають заданої прямої* [37].

Розглянемо різні способи доведення теореми про «Суму внутрішніх кутів трикутника».

1. В абсолютній геометрії справедлива теорема Лежандра: «Сума внутрішніх кутів трикутника не перевищує *2d*, тобто дорівнює *2d* або менше *2d*».

Доведення.

1. Позначимо суму внутрішніх кутів довільного трикутника *ABC* через *S(ABC)*. Тоді потрібно довести, що $S(ABC) \leq 2d$.

2. Нехай дано $\Delta A_1B_1A_2$

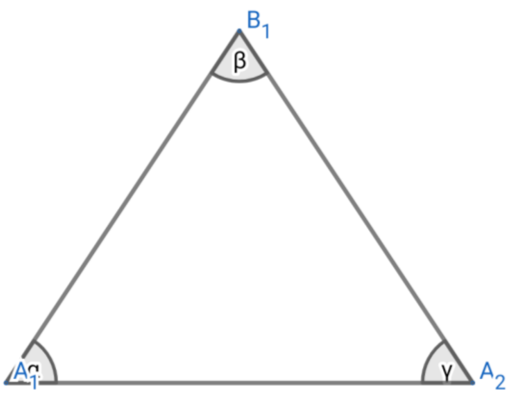


Рисунок 2.14. До теореми

3. Будемо доводити теорему методом від супротивного. Нехай сума кутів $\Delta A_1B_1A_2$ більше $2d$, тобто $\alpha + \beta + \gamma > 2d$.

4. Від т.A_2 на прямій A_1A_2 відкладемо $n - 1$ відрізків, що дорівнюють A_1A_2:

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_nA_{n+1}$. На отриманих рівних відрізках побудуємо трикутники, які рівні трикутнику $A_1B_1A_2$. Отримаємо в результаті n рівних трикутників.

5. З'єднаємо вершини всіх трикутників відрізками

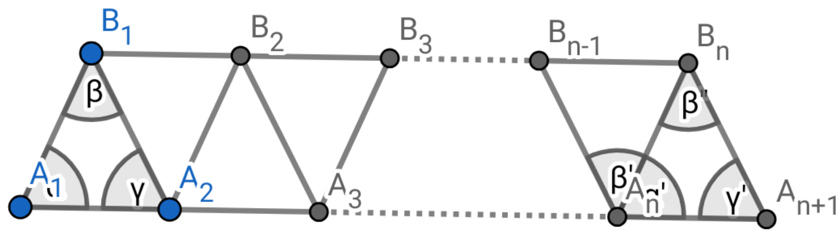


Рисунок 2.15. До доведення теореми (пункт 4)

6. Отримаємо, таким чином, додатково до тих, що маємо трикутники: $n - 1$ трикутників: $\Delta A_2B_1B_2$, $\Delta A_3B_2B_3$, … , $A_nB_{n-1}B_n$.

7. $\Delta A_2B_1B_2$, $\Delta A_3B_2B_3$, … , $A_nB_{n-1}B_n$будуть рівними (за двома сторонами та кутом між ними).

8. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.

9. Порівняємо величини кутів $A_1B_1A_2$ і $B_1A_2B_2$ тобто β і β'.

10.Порівняємо відрізки A_1A_2 і A_1B_1. $A_1A_2 > B_1B_2$, так як $\beta > \beta'$.

11. Зауважимо, що $A_1B_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_{n+1} > A_1A_{n+1}$, так як довжина ламаної більше відстані між її кінцями.

12. Останню нерівність можна записати так: $A_1B_1 + (n-1)*B_1B_2 + B_nA_{n+1} > n*A_1A_2$.

13. Або $A_1B_1 + n*B_1B_2 - B_1B_2 + B_nA_{n+1} > n*A_1A_2$.

14. Замінимо B_nA_{n+1} на B_1A_2 ($B_nA_{n+1} = B_1A_2$).

15. Згрупуємо тепер члени останньої нерівності $n*(A_1A_2 - B_1B_2) < A_1B_1 - B_1B_2 + B_1A_2$.

16. Остання нерівність показує протиріччя, оскільки ліва частина величина змінна, а права – постійна.

17. Отримана суперечність говорить про те, що сума кутів трикутника не може перевищувати *2d*, тобто $S(ABC) \leq 2d$ [45].

2. Розглянемо тепер, чому дорівнює сума кутів трикутника, розташованого в площині Лобачевського. Легко бачити, що дана сума менше *2d*. Насправді, якби ця сума дорівнювала *2d*, то звідси витікав би V постулат Евкліда *про паралельні*, але ми маємо справу з площиною Лобачевського, так як і на площині Евкліда, сума кутів трикутника більше за два прямі (*2d*) бути не може то, вона менше ніж *2d*. Окрім цього легко вивести, що сума кутів трикутника на площині Лобачевського в різних трикутниках – різна. Іншими словами ця сума при переході від трикутника до трикутника величина змінна, так як, якби ця сума була однакова в усіх трикутниках, то звідси витікав би V постулат Евкліда. З цього слідує, що на площині Лобачевського має місце така теорема: якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Якщо такі трикутники не були б рівними, то вони були б подібними, але за теоремою Валліса з цього слідував би постулат Евкліда, а на площині Лобачевського постулат Евкліда не справедливий. Отримана суперечність і доводить теорему. Ми бачимо, що в теоремі Лобачевського з’являється ще одна ознака рівності трикутників, якої немає на площині Евкліда. Із теореми Валліса також слідує, що на площині Лобачевського немає подібних фігур. А звідси маємо вкрай важливий факт: великі фігури площини Лобачевського при малих зображеннях зобразити без спотворення неможливо. Аналогічно і з простором Лобачевського [45].

3. Сума внутрішніх кутів трикутника не може бути сталою величиною для всіх трикутників.

Доведення. Припустимо, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює тій самій величині k.

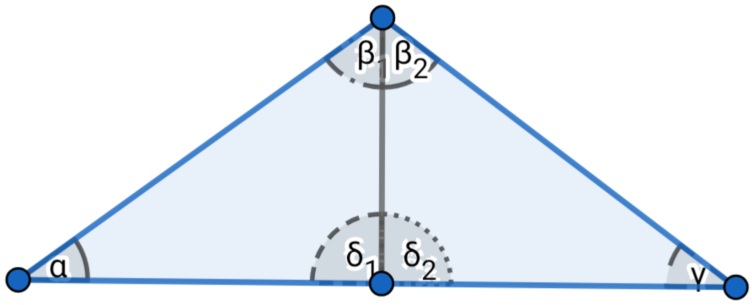


Рис.2.16. До доведення теореми

В ΔABC з кутами α, β,γ з'єднаємо вершину B з довільною точкою D основи AC

Маємо такі рівності:

$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = k$,

$\gamma + \beta_2 + \delta_2 = k$.

Додамо ці дві рівності почленно. Враховуючи, що $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$, а

$\alpha + \beta + \gamma = k$, матимемо: $\alpha + \beta + \gamma + 180^\circ = 2k$, або $k = 180^\circ$. Але сума внутрішніх кутів трикутника в геометрії Лобачевського не може дорівнювати двом прямим кутам, отже, вона не може бути сталою величиною. Різні трикутники в площині Лобачевського, мають різні суми внутрішніх кутів [37].

Побудований таким чином факультативний курс дозволить поглибити знання учнів, підвищити їх пізнавальний інтерес до вивчення математики.

Також він буде цікавим та важливим для учнів, що приймають участь в олімпіадах, під час написання творчих робіт і т.д.

Висновки до розділу 2

Уміння розв'язувати задачі є одним з основних показників математичного розвитку, глибини засвоєння навчального матеріалу. Тому будь-який іспит з математики, будь-яка перевірка знань містить в якості основної і, мабуть, найбільш важкою її частини розв’язання задач.

Виявляється, що багато учнів не можуть показати достатні вміння при розв’язані завдань, особливо геометричних.

Досить часто зустрічаються випадки, коли учень показує гарні знання в галузі теорії, знає всі необхідні означення і теореми, але заплутується при розв’язанні нескладної задачі. Формування навичок пошуку розв’язання повинно розглядатися як один з основних аспектів навчально-виховного процесу.

Розв’язання задач має на меті не тільки показати учням значення вивченої теорії на практиці, а й глибше усвідомити вивчену теорію, сприяє розвитку мислення. При розв’язані задач і вправ учні мають можливість більшою мірою проявити самостійність, ініціативу, ніж при вивчені теоретичного матеріалу.

Виконаний аналіз навчальних програм, навчальної та навчально-методичної літератури з геометрії, в ході якого знайдені подібності та відмінності з даної теми. Розглядаючи підручники, можна відзначити, що в них розглядаються як стандартні, складні так і елементарні задачі.

Розглянуто основні етапи розв’язання задач на побудову, обчислення, доведення, дослідження, які точно відповідають етапам будь-якого логічного міркування, кожен з яких є важливим і потребує належної уваги при розв’язанні задач.

Розроблено методичні рекомендації з навчання розв’язання задач. Розглянуто основні методи розв’язання геометричних задач. Зазначимо, що необхідно знайомити учнів з самими методами і вчити визначати, яким із них можна розв’язати запропоновану задачу.

Крім того, відзначимо, що:

1) необхідно приділяти більше уваги вивченню розв’язанню задач, так як при грамотному використані вони є потужним засобом розвитком логічного мислення учнів;

2) геометричні задачі не потрібно розглядати як щось окреме. Процес навчання розв'язування задач та вивчення геометрії нерозривно пов'язані. При чому зв'язок повинен бути двостороннім, тобто необхідно не тільки навчати розв'язанню задач, використовуючи раніше отримані знання, а й навпаки, використовувати конструктивні задачі при вивчені геометрії.

ВИСНОВКИ

В результаті дослідження підтверджено правильність твердження, що знання, уміння і навички є лише засобом навчання, в той час, як метою освіти стає вільний розвиток особистості учня, створення умов для саморозвитку і самореалізації особистості.

Саме навчання математики і, зокрема, розв’язування задач, сприяє інтелектуальній та вольовій підготовленості учнів. Інтелектуальна підготовленість учня характеризується розумінням поставлених навчальних (теоретичних і практичних) завдань, достатністю обсягу пам’яті, здатністю порівнювати, аналізувати, систематизувати адекватним сприйняттям нової інформації, вмінням користуватися навчальною і довідковою літературою, раціональним плануванням діяльності, зокрема спільної з іншими людьми.

Рівень вольової підготовленості проявляється через прагнення поставити навчальні завдання, уважне ставлення до слів учителя і до педагогічної ситуації, товариську взаємодію з іншими учнями, бажання виконувати задачі з високим рівнем складності, вибір темпу виконання задач, успішне подолання психологічних і пізнавальних труднощів, здатність задавати питання і отримувати допомогу. Велику низку задач учні розв’язують на уроках геометрії, зокрема під час вивчення теми «Трикутники».

Підготовча робота вчителя при такому технологічному підході містить у собі: вивчення структури й змісту збірників задач; визначення автономних груп задач; вибір типових представників із кожної групи; розв’язання відібраних задач; розробку методики розв’язання задач.

Проблема визначення ролі задач у навчанні геометрії та вдало організованої роботи щодо навчання розв’язувати задачі на трикутники є актуальною для кожного вчителя математики.

Вивчення теми «Трикутники» пронизує весь курс геометрії основної школи. Логіко-математичний аналіз був зроблений з теми «Розв'язування трикутників» (9 клас), яка є завершальною темою в планіметрії, що стосується трикутників.

Основною відмінністю вивчення трикутників на базовому на поглибленому рівнях навчання математики є нові факти: лема про хорду та наслідок з неї;теорема Чеви; теорема Ейлера.

Для виділених задач на обчислення, побудову, доведення і дослідження, розглянуті типові ситуації, з якими стикаються учні і вчителі під час вивчення трикутників, продемонстровано застосування евристичних елементів навчання, представлені системи вправ, які підвищать пізнавальний інтерес учнів, представлені приклади їх розв'язання. Застосування ІКТ теж підвищить ефективність роботи на уроках геометрії і дозволить перевірити знання учнів за допомогою комп'ютерного тестування.

Розроблений факультативний курс з теми «Трикутники в геометрії Лобачевського», що стане у нагоді вчителю та учням, які хочуть вивчати математику більш поглиблено або готуються до олімпіад та математичних конкурсів різних рівнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Апостолова Г. В. Геометрія: [підручник для 8 класу загальноосвітніх начальних закладів] / Галина Вадимівна Апостолова. - К.: Генеза, 2008. – 270 с.

2. Атанасян Л.С. Геометрия. Учеб. для 7-9 кл. сер. шк./Л.С.Атанасян,В.Ф. Бутузов, С.В.Кадомцев – М.: Просвещение, 1992. – 606 с.

3. Атанасян Л.С. Геометрия: Ч. II. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов./Л.С.Атанасян. – М.: Просвещение, 1976. – 447с.

4. Аташе Г. А. Деятельностный подход в обучении / Г. А. Аташе. – Донецк: ЕЛИ-Пресс, 2001. - 160 с.

5. Бабанский Ю. К. Оптимизация процесса обучения /Юрий Константинович Бабанский. - М.: Педагогика, 1977.1347 с.

6. Балл Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект /Георгий Алексеевич Балл. — М.: Педагогика, 1990. — 184 с.

7. Бараболин М. П. Методические основы развивающего обучения / М. П. Бараболин. – М.: Высш. шк., 1991. – 232 с.

8. Бевз В. Г. Використання історичного матеріалу у навчанні елементарної математики майбутніх вчителів / В.Г.Бевз // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між нар. зб. наук. робіт. – Вип. 22. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2004. – С. 62- 68.

9. Бевз Г. П. Методика викладання математики: [навч. посіб.] / Г.П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.

10. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник /Г.П. Бевз. –[3-тє вид.перероб. і допов.]. – К.:Вища школа, 1989. – 367с.

11. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. / Г.П. Бевз. – К.:Вища шк.., 1989. – 367 с.

12. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова. – К.: Вежа, 2008. – 208 с.

13. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова. – К.: Вежа, 2008. – 256 с.

14. Безкин Н.М. Методика геометрии:[учеб. для пед. инст-тов]/Н.М.Безкин. – М.: Учпедгиз, 1947. – 276с.

15. БеспалькоВ.П. Слагаемые педагогической технологии. / В.П. Беспалько – М.: Педагогика, 1989 – 192 с.

16. Бурда М. І. Вивчення геометрії у 8 класі: [метод, посібник] / М. І. Бурда. –К.: Рад. шк.,1989. – 112с.

17. Бурда М.І. Геометрія: підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова– К.: Зодіак- ЕКО, 2007. – 208 с.

18. Бурда М.І. Геометрія: підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова– К.: Зодіак- ЕКО, 2007. – 240 с.

19. Бурда М.І. Геометрія: підр. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова– К.: Зодіак- ЕКО, 2007. – 240 с.

20. Бурда М.І. Математика. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів для 5–9-х класів ЗНЗ [Електронний ресурс]. / М.І.Бурда, Є.П. Нелін, Д.А. Номировський, Н.А. Тарасенкова, М.В. Чемерис, М.С. Якір. – К., 2017. – 40с. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy–5–9–klas/matematika–algebra–geometriya.pdf (дата звернення: 22.10.2019)

21. БурдаМ. І. Геометрія: [підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. –К.: Зодіак-ЕКО, 2008. – 239 с.

22. БурдаМ. І. Дидактичні матеріали для тематичного оцінювання з геометрії. 8 клас / М. І.Бурда,А. М.Капіносов,Л. Ю. Рибалко – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 152 с.

23. БурдаМ. І. Геометрія: [підручник для 7 класу загальноосвітніх

навчальних закладів] / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. –К.: Зодіак-ЕКО, 2010. – 206 с.

24. Бурлев Ю. А. Формирование обобщенных дедуктивных умений в курсе геометрии 6-8 классов: автореф. дис. на получение нач. степени канд. пед. наук / Ю. А. Бурлев. – М., 1985. – 17 с.

25. Возняк Г.М. Прикладні завдання для мотивації навчання /Г.М.Возняк// Математика в школі. – №2 – 1990. – С.5-8.

26. Возняк Г.М. Прикладні завдання для мотивації навчання/ Г.М.Возняк// Математика в школі. – №2 – 1990. – С.5-8.

27. Дементій О. І. Навчаючі задачі з геометрії: [посіб. Для 7-9 кл.] / О.І. Дементій, С.В. Дементій. – К.: Торгсин, 1998. – 210 с.

28. Єршова А.П. Геометрія. 8 клас;[підруч. для загальноосвіт. навч. закл.] ' А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов. – Х.: АН ГРО ПЛЮС, 2008. – 256 с.

29. Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання з геометрії для 7 класу / Мерзляк А. Г., Іолонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2007. – 112 с.

30. Карелина Т.М. О проблемных ситуациях на уроках геометрии/ Т.М. Карелина // Математика в школе. – № 6 – 1999. – С. 8-11.

31. Клепиков В. Н. Ценностно-смысловое освоение математических понятий в учебно-познавательной деятельности учащихся / В. Н. Клепиков // Педагогика. – 2011. - № 3. – С. 31-37 .

32. Колмогоров А. Н. О системе основных понятий и обозначений для школьников курса математики / А. Н. Колмогоров // В кн.: на путях обновления школьного курса математики. – М., 1978. – С. 88-97.

33. КоменскийЯ.А.Избранные педагогические сочинения: Том 2/Я. А. Коменский. – М.: Педагогика, 1982. – 576 с.

34. Концепція загальної середньої освіти як базової в єдиній системінеперервної освіти. – К.: МО України, 1992. – 177 с.

35. Корсак К. Школа і шкала оцінок / К. Корсак // Управління освітою. – 2001. - № 1. – С. 3-8 .

36. Костин В.И. Основания геометри / В.И.Костин. – М.:Ленинград, 1946. – 304с.

37. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометри / Б.В.Кутузов. – пособие для учителей средней школы. – М.: Просвещение, 1955. – 152с.

38. Литвиненко Г. М. Математика. Основна школа: Екзаменаційні завдання для тестової перевірки умінь і навичок / Г. М. Литвиненко, А. М. Капіносов. – Дніпропетровськ, 1994. – 84 с.

39. Лиходєєва Г. В. Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні елементів стохастики / Г. В. Лиходєєва // Проблеми математичної освіти. ПМО-2010. – 2010. –С. 100-101.

40. Лоповок Л. М. Сборник задач по геометрии для 6-8 кл / Под ред. И. Ф. Тесленко. – К.: Рад. шк., 1987. – 104 с.

41. Математика: посібник для факультативних занять у 8-мкл./ Л. М. Вивальнюк, В. Н. Боровик, І. Ф. Тесленко та ін. – К.: Рад. шк.,1995. – 207 с.

42. Мерзляк А.Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибленим вивчення математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2017. – 304 с.

43. Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А.В. Прус, В.О. Швець. – Житомир : Рута – 2011. – 388 с.

44. Семенець С.П. Методика формування математичних понять (розвивальних підхід)/ С.П. Семенець //Навчання математики: проблеми та перспективи. – № 37 – 2012. – С.68-73.

45. Силин А.В. Открываем неевклидову геометрию/А.В.Силин, Н.А.Шмакова. – Книга для внеклассного чтения учащихся 9–10 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1988. – 126с.

46. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. мат. спеціальност.пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

47. Фокіна В.І. Розвиток в учнів пізнавального інтересу під час вивчення геометрії / В.І. Фокіна // Математика в школах України. – 2014. – №13. – С. 17.

48. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. / Т.И.Шамова – М.: Педагогіка, 1982. – 208 с.

49. Шевченко В.Є. Аксіоматичний метод і елементи геометрії Лобачевського/ В.Є.Шевченко. – К: Вища школа, 1973. – 92с.

50. Шумигай С.М. Відображення історії науки у шкільних підручниках /С.М. Шумигай // Математика в школі, 2010. – № 7-8. – С. 49-55.

51. Шумигай С.М. Історія науки на уроках геометрії у 7-9 кл./ С.М. Шумигай // Маематика в школі. – 2011. – № 11-12. – С.14-21.

52. Шумигай С.М. Розвиток пізнавального інтересу учнів / С.М. Шумигай // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між нар. зб. наук. робіт. – Вип. 33. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2010. – С. 76-82.

53. Щукина Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе / Г.И. Щукина. – М.: Просвещение, 1979. – 219 с.

54. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательного интереса учащихся / Г.И. Щукина. – К.: Педагогика, 1988. – 237 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Розробки конспектів уроків з теми «Трикутники»

Покажемо практичну реалізацію розроблених основ формування дослідницької компетентності на прикладі вивчення теми «Трикутники» в курсі геометрії 7-го класу. На розроблених уроках ми використаємо евристичні ситуації.

Урок № 1

Тема уроку. *Рівність трикутників*

Мета уроку: *сформувати вміння записувати рівності для відповідних елементів рівних трикутників, а також за деякими відомими елементами рівних трикутників знаходити відповідні рівні їм елементи.*

Тип уроку: *засвоєння знань, умінь, навичок.*

ХІД УРОКУ

І. Організаційний момент

Учитель перевіряє готовність класу до уроку.

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Обговорює виконання домашніх вправ.

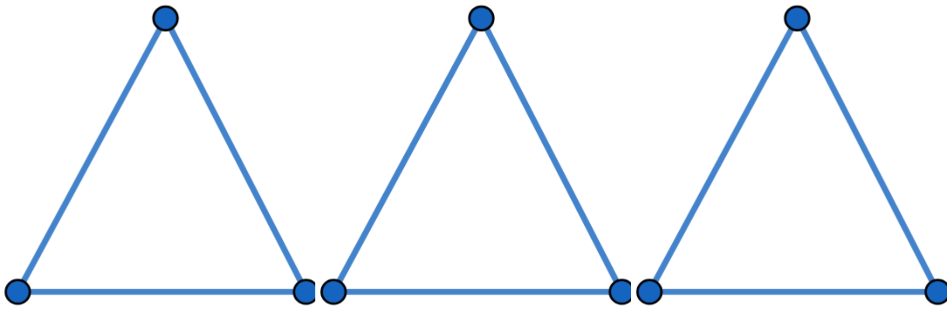
ІІІ. Мотивація навчальної діяльності учнів. Формування мети й завдання уроку

Вчитель може наголосити на тому, що геометрія, окрім властивостей геометричних фігур, вивчає ще й відношення між фігурами (як, наприклад, відношення паралельності, перпендикулярності). Серед таких відношень між фігурами відношення рівності посідає чільне місце. Тому цей урок присвячено першому знайомству з поняттям рівності трикутників і головне завдання, яке ставимо перед учнями,- зрозуміти означення рівних трикутників та навчитися ним користуватися.

Для того щоб учнів зацікавити і з орієнтувати на вивчення цієї теми використаємо такі усні вправи.

Використання усних вправ

1. Покладіть сірники так, як показано на рис.А.1. Маємо три рівні трикутники. Перекладіть два сірники так, об отримати чотири рівних трикутники.



РисунокА.1.

2. Чи правильні твердження:«Якщо довжини відрізків рівні, то рівні й відрізки», «Якщо рівні відрізки, то рівні й їх довжини»?

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

1.У $\Delta\ MNK$ назвіть:

а) трійки його елементів;

б) кути, прилеглі до NK;

в) сторону, що лежить проти кута M;

г) чому дорівнює периметр.

2.Відомо, що у $\Delta\ ABC$ і $\Delta DEFAB=DE$; $BC=EF$; $AC=DF$. $P_{\Delta ABC}$=36см. Чому дорівнює P_{DEF} ?

3.Як перевірити, чи рівні відрізки дроту має слюсар, якщо в нього є тільки ці відрізки (не має вимірювальних інструментів)? Відповідь поясніть.

4. Як побудувати зображення бісектриси кута на паперовій моделі кута, якщо є тільки ця модель (немає жодного вимірювального інструмента)?

V. Засвоєння нових знань

План вивчення нового матеріалу

1. Поняття рівних фігур. Позначення рівних фігур.

2. Означення рівних трикутників. Відповідність елементів різних трикутників.

3. Символічне позначення рівних відрізків – елементів рівних трикутників.

Означення рівних фігур

Учитель пропонує учням накреслити два відрізки: *AB*= 3см і *CD*=3см, подумки поєднати один із них з іншим. Учні роблять висновок, що рівні відрізки *AB* і *CD* можна сумістити накладанням(рис.А.2) визначають, що й кути можна сумістити. У такий спосіб вони формують поняття рівних фігур:

Дві геометричні фігури рівні, якщо їх можна сумістити накладанням

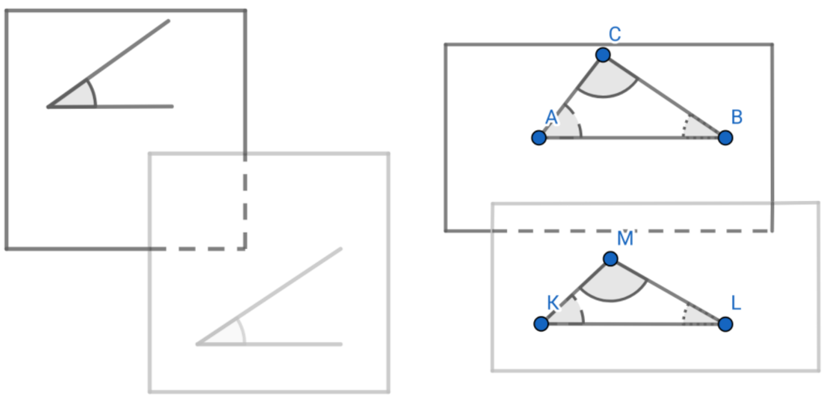


Рисунок А.2.

Рівні трикутники. Відповідність елементів трикутника.

Розглянемо рівні трикутники на рис.А.2. При накладанні вони можуть повністю збігатися. При цьому попарно збігаються вершини *A* і *K*, *B* і *L*, *C* і *M*, а також їх сторони *AB* і *KL*,*AC* і *KM*,*BC* і *LM* і кути *A* і *K*, *B* і *L*, *C* і *M*. Таким чином, якщо трикутники рівні, то і їх відповідні елементи теж рівні. Для позначення рівних трикутників використовують звичайний знак рівності:

$\Delta ABC=\Delta KLM$. Варто звернути увагу учнів на той факт, що має значення порядок запису вершин трикутника. Запис $\Delta ABC=\Delta KNM$ означає, що $\angle A= \angle K$, $\angle B=\angle N$, $\angle C=\angle M$, $AB=KN$; $BC=NM$; $AC=KM$. Рівні відрізки на рисунку, як правило позначають однією, двома або трьома рисками, а рівні кути – однією, двома або трьома дугами.

VI. Первинне усвідомлення нового матеріалу

Виконання усних вправ

1. Відомо, що $\Delta MAC = \Delta BDF$. Як заповнити пропуски (...), щоб утворені рівності стали правильними?

MC = …; BD =…; AC =…;

$\angle MCA$=…; $\angle BDF$ =…; $\angle CMA$ =…;

2. Для двох трикутників виконуються рівності:

$\angle NME = \angle KPF$; $\angle MNE = \angle PKF$; $\angle MEN = \angle PFK$;

$MN = PK$; $NE = KF$; $ME = PF$.

Навіть рівні трикутники.

3.Трикутники кожної пари рівні (див. рис. А.3.). Виконайте відповідні записи

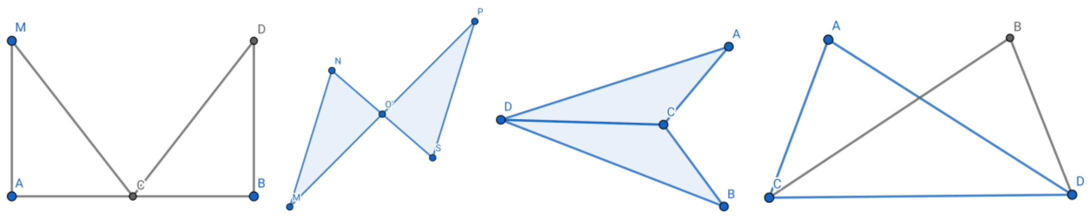


Рисунок А.3.

Виконання письмових вправ

Рівень А

1. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta KMN$. Знайдіть:

а) кут N, якщо $\angle C$=125°;

б) сторону AB, якщо KM =11см;

в) периметр трикутника KMN, якщо AB = 11см, MN = 8 см, KN = 7см.

2. На рисунку (рис.А.3.) трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точка P, Q, R. Закінчіть рівність $\Delta ABC = \Delta$ …

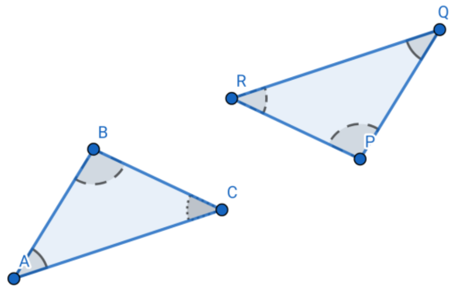


Рисунок А.4.

3. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta KMN$, причому

$\angle A = 45°, \angle F = 80°, \angle M = 55°$.

Знайдіть невідомі кути цих трикутників.

Рівень Б

1.Чи можуть бути рівними трикутники, в яких найбільші кути не рівні? Відповідь обґрунтуйте.

2. Якщо периметри двох трикутників не рівні, то й самі трикутники не є рівними. Доведіть.

3. Яку властивість має трикутник *ABC*, якщо правильна рівність:

а) $\Delta ABC = \Delta BAC$ б)$\Delta ABC = \Delta CAB$

VII. Підсумки уроку

1.Використавши шаблон трикутника, побудуйте два рівні трикутники так, щоб кожна сторона не була в них спільною.

2. Позначте вершини здобутих трикутників так, щоб утворилась рівність $\Delta ABM = \Delta NDE$.

Перевірте свій рисунок. Чи справджується рівність?

3. Задано два рівних трикутники $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. На сторонах *AB* і A_1B_1 позначено точками MіM_1 відповідно так, що $AM = A_1M_1$. На сторонах *BC* і B_1C_1 позначено точки *N* і N_1. Доведіть, що $MN = M_1N_1$.

VIII. Домашнє завдання

Усно виконати вправи.

1. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Чи означає це, що:

а) $\Delta CAB = \Delta C_1A_1B_1$; б) $\Delta ABC = \Delta A_1C_1B_1$?

2. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta DEF$. Назвіть:

а) кут, який у результаті накладання трикутників суміститься з кутом E;

б) сторону, яка в результаті накладання трикутників суміститься зі стороною AC;

в) кут, який дорівнює куту C;

г) сторону, що дорівнює стороні DE.

Письмово розв'язати задачі.

1.Відомо, що $\Delta BAC = \Delta EFK$

а) Навіть найбільший кут трикутника BAC, якщо найбільший кут трикутника EFK є протилежним стороні EF .

б) Назвіть найменшу сторону трикутника EFK, якщо $AB>BC>AC$.

в) Назвіть трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

2. Трикутник ABC дорівнює трикутнику з вершинами в точках X, Y, Z. Запишіть рівність цих трикутників, якщо $AB = YZ$, $BC = ZX$, $AC = YX$.

3. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta\ DEF = \Delta\ KMN$, причому AB =9 см, MN =8 см, $P_{\Delta DEF}$ = 24см. Знайдіть невідомі сторони цих трикутників.

4. (на повторення). На сторонах рівних кутів B і B_1відкладено рівні відрізки $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$. У результаті накладання кути B і B_1 та відрізки BA і B_1A_1 сумістилися. Чи сумістяться в результаті такого накладання відрізки BC і B_1C_1 ?

Додаток Б.

Урок № 2

Тема уроку. *Рівність трикутників*

Мета уроку:*систематизувати та узагальнити знання учнів про зміст основних понять теми «Рівність трикутників» повторити, систематизувати та узагальнити вміння й навички застосовування знань для розв'язування задач*

Тип уроку: *систематизація та узагальнення знань й умінь.*

ХІД УРОКУ

Найбільш ефективною формою проведення уроків узагальнення та систематизації знань й умінь є групова форма роботи, під час якої:

а) учні самостійно (або в малих групах) опрацьовують довідковий матеріал (поповнення знань) та самостійно розбивають його на блоки, встановивши певну логіку (систематизація, узагальнення знань), тобто з'ясувавши логічні зв'язки між блоками та їх елементами (сюди можна віднести складання схем, таблиць або логічних ланцюжків);

б) узагальнивши та систематизувавши знання, учні систематизують та узагальнюють уміння, наприклад, складають загальний алгоритм розв'язання задач, що відносяться до певного блоку, з подальшою корекцією.

На цьому уроці можна застосувати ту ж саму схему, наповнивши її новим змістом (тема «Рівність трикутників»).

Якщо вчитель хоче зоб його учні самостійно відкривали деякі властивості, які впливають з розв'язанням нестандартних задач, то потрібно використовувати таку форму навчання, як евристичні ситуації.

Тому на цьому уроці доцільно буде об'єднати ці форми навчання.

I. Організаційний момент.

Учитель перевіряє готовність класу до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання

Математичний диктант

1. Сторони одного трикутника відповідно дорівнюють 30 см, 40 см, 0,5 м, а з іншого – 3 дм, 4 дм, 5дм. Чи рівні ці трикутники? Чому?

2. Скільки пар рівних сторін треба знайти, доводячи рівність двох трикутників:

а) за означенням;

б) за першою ознакою;

в) за другою ознакою;

г)за третьою ознакою?

3. У трикутниках *ABC* і *POTAB =PO*, *BC =OT*. Яку ще умовно треба знайти, щоб установити рівність цих трикутників за третьою ознакою?

4. Чи можуть бути рівними прямокутний і тупокутний трикутник? А прямокутний і гострокутний?

5. Яких даних не вистачає в умові задачі, для того щоб зробити висновок про рівність зроблених трикутників: *ABC* і *CBD*, *ABC* і *DBM*, *ABC* і *ADC*? (див. рис.Б.1.)

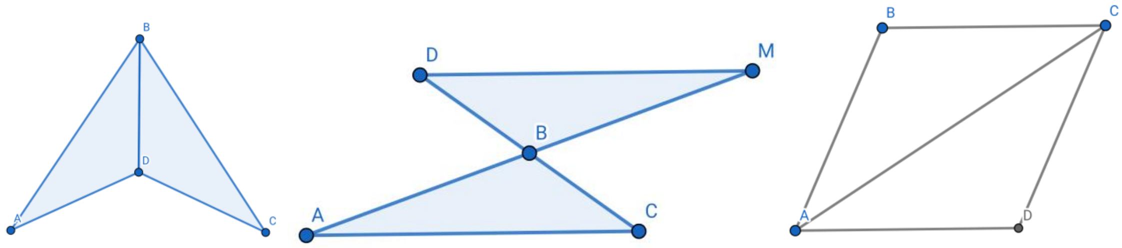


Рисунок Б.1.

III. Мотивація навчальної діяльності учні. Формулювання мети й завдання уроку

Основна мета уроку цілком логічно випливає з місця уроку в темі, тому учні навіть самі зможуть сформулювати її. Вчитель тільки корегує і конкретизує завдання.

IV. Повторення, систематизація та узагальнення знань.

1. Робота з літературою.

2. Розподіл вивчених тем за блоками.

3. Складання узагальнюючих схем або таблиць.

V. Повторення, систематизація та узагальнення умінь.

Робота в групах проводиться за таким планом:

1) складання алгоритмів (кожна група свій) розв'язування типових задач кожного блоку;

2) розв'язування нетипових задач (нестандартних або їх називають евристичних);

Виконання усних вправ

1. На рисунках знайдіть пари рівних трикутників і доведіть їх рівність (див. рис.Б.2).

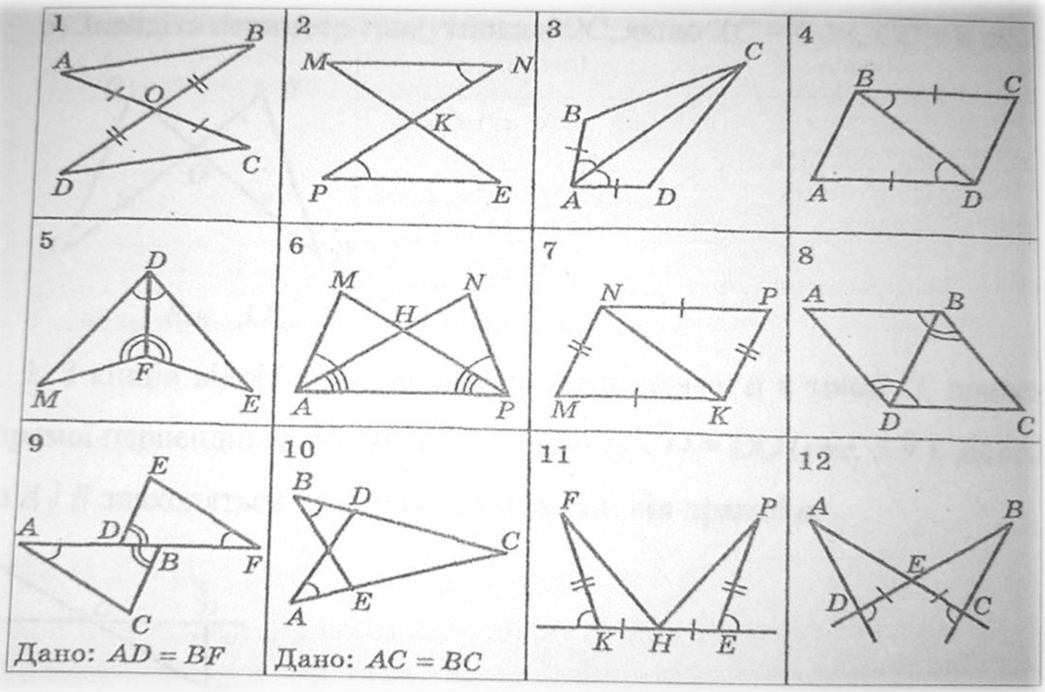


Рисунок Б.6.

Виконання письмових вправ

1.Доведіть рівність двох трикутників:

а) за двома сторонами і медіаною, проведеної до однієї з них;

б) за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони;

в) за медіаною і кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

2. Доведіть, що якщо всі медіани трикутника рівні, то він рівносторонній. Висуньте і доведіть гіпотезу у випадку, якщо в трикутнику дві медіани рівні.

VI. Підсумок уроку

Кожен учень має усвідомити, який з блоків вимагає додаткового опрацювання.

VII. Домашнє завдання.

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 105 см, а бічна сторона відноситься до основи як 7:3. Знайдіть сторони трикутника.

2. Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O*, причому *AO* =*DO*, *CO* =*BO* (рис.Б.3.)

а) Доведіть рівність трикутників *AOC* і *DOB*.

б) Знайдіть периметр трикутника *AOC*, якщо *AC* = 4 см, *CD* = 8см.

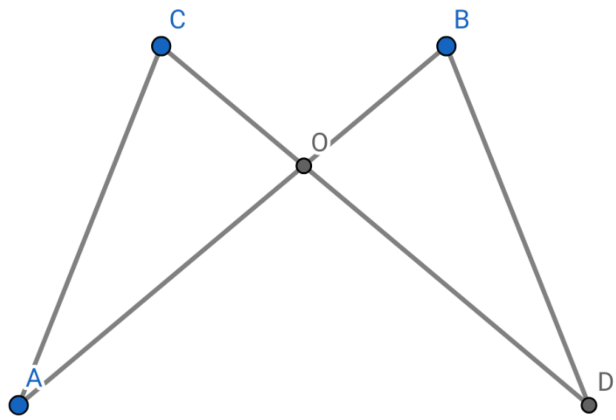


Рисунок Б.3.

3. З кінців відрізка *AB*, який перетинає пряму *a* в точці *O*, проведемо до цієї прямої перпендикуляри *AC* і *BD*, причому *CO* = *DO* (рис.Б.4.). Доведіть, що точки *A* і *B* знаходяться на однаковій відстані від прямої *a*.

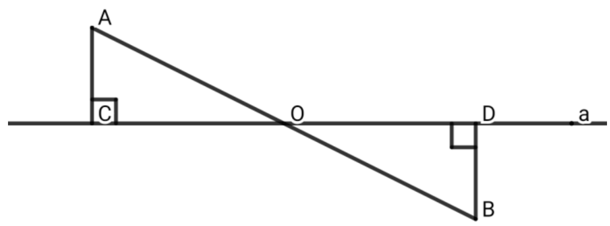


Рисунок Б.4.

4. Трикутник *AOB* рівнобедрений з основою *AB*, *AC* =*BD* (рис.Б.5.). Доведіть, що трикутник *COD* також рівнобедрений.

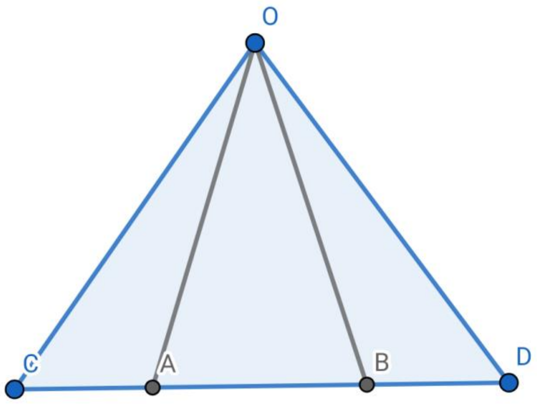


Рисунок Б.5.

5. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за основою та периметром.

6. У трикутнику *ABC* висота *BH* ділить сторону *AC* навпіл. Бісектриса трикутника *AD* дорівнює 15 см. Знайдіть довжину бісектриси *CE* цього трикутника.

Додаток В

Урок №3

Тема уроку. *Рівність трикутників*

Мета уроку: *перевірити рівень засвоєння знань та сформованості вмінь учнів з теми.*

Тип уроку:*перевірка знань, навичок, умінь.*

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель збирає на перевірку зошити учнів зі виконаною домашньою контрольною роботою.

III. Перевірка знань учнями матеріалу

Варіант 1

Початковий рівень

1. Побудуйте нерівнобедрений трикутник *ABC* і проведіть медіану *BM*, висоту *BH* та бісектрису *BL*. Укажіть пари рівних відрізків, рівних кутів. Який відрізок зображує відстань від точки *B* до прямої *AC*?

Середній рівень

2. У трикутниках *ABC* і $A_1B_1C_1$ (див. рис.В.1.) $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AC = A_1C_1$ = 6см, *BC* = 2см, A_1B_1 = 7 см. Доведіть рівність трикутників *ABC* і $A_1B_1C_1$ і знайдіть периметр трикутника *ABC*.

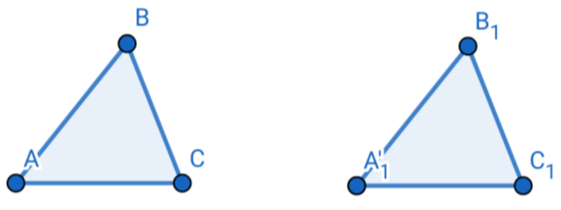


Рисунок В.1.

Достатній рівень

3. Периметр трикутника ABC дорівнює 51 см, AB = 18 см, BC:AC = 5:6. Доведіть, що $\angle B = \angle C$

Високий рівень

4. У трикутнику ABC висота BD ділить кут ABC навпіл. Медіана CE дорівнює знайдіть 12 см. Знайдіть довжину медіани AF.

5. Доведіть, що якщо медіани трикутників рівні й відповідні кути, на які розбивають медіани кути трикутників, теж рівні, то ці трикутники рівні.

Варіант 2

Початковий рівень

1. Побудуйте нерівнобедрений трикутник LMN і проведіть медіану MA, висоту MB та бісектрису MC. Укажіть пари рівних відрізків, рівних кутів. Який відрізок зображує відстань від точки M до прямої LN?

Середній рівень

2. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (див. рис.В.1.) $AB = A_1B_1$ = 5 см, $\angle A = \angle A_1, AC = A_1C_1$ = 7см, BC = 4 см. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ ізнайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$.

Достатній рівень

3. Периметр трикутника MNK дорівнює 64 см, NK = 24 см, а сторона MKв 1,5 рази менша, ніж MN. Доведіть, що $\angle M = \angle K$.

Високий рівень

4. У трикутнику ABC медіана BD перпендикулярна до сторони AC. Бісектриса AF дорівнює 24 см. Знайдіть довжину бісектриси CE.

5. Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеної до однієї з них.

Варіант 3

Початковий рівень

1. Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC з основою AC і тупим кутом та проведіть у ньому три висоти.

Середній рівень

2. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, сторона AB на 3 см більша ніжAC, і на 3 см більша, ніж A_1C_1, а сторона AC на 3 см менша від сторониA_1B_1.Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 25 см.

Достатній рівень

3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 112 см, а дві його сторони відносяться як 2:3. Знайдіть сторони трикутника. Скільки розв'язків має задача?

Високий рівень

4. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (див. рис.В.2.). Довести: ΔBOC – рівнобедрений.

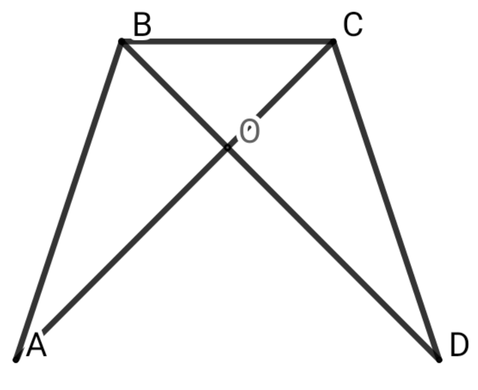


Рисунок В.2.

5. Доведіть, що рівнобедреному трикутнику відрізок, який з'єднує кінці бісектрис(медіани, висоти), проведені з вершини основи рівні.

Варіант 4

Початковий рівень

1. Побудуйте прямокутний трикутник *ABC* з прямим кутом *B* і проведіть у ньому три висоти.

Середній рівень

2. У трикутниках *ABC* і $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, сторона *AB* на 2 см більша ніжB_1C_1, і на 1 см більша, ніж A_1C_1, а A_1B_1 на 2 см більша від *BC* і на 1 см більша від *AC*. Знайдіть периметр трикутника *ABC*, якщо периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 18 см.

Достатній рівень

3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 168 см, а одна зі сторін у 1,5 рази більше, ніж інша. Знайдіть сторони трикутника. Скільки розв'язків має задача?

Високий рівень

4. Дано: *AB = CD, AC = BD* (див. рис.В.3.). Довести: Δ *AOD* – рівнобедрений .

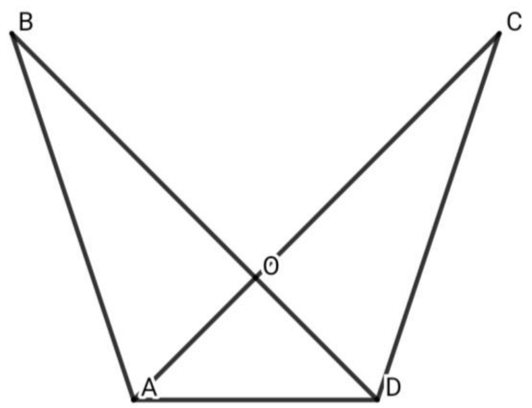


Рисунок В.3.

IV. Підсумки уроку

Підсумки можна підбити під час оголошення вчителем правильних відповідей

V. Домашнє завдання

Аналіз контрольної роботи – домашня самостійна робота зі розв'язаннями, що вчитель роздав учням на аркушах.

Розв'язання задачі на повторення.

1. Визначте, які з наведених тверджень правильні:

а) дві прямі, перпендикулярні до третьої, перпендикулярні;

б) дві прямі, паралельні третій, паралельні;

в) через будь-яку точку площини можна провести пряму, паралельну даній;

г) через будь-яку точку площини можна провести не більше ніж одну пряму, паралельну даній.

2. Через точку C, яка не належить жодній із прямих a $і$ b, проведено пряму c. Визначте взаємне розміщення прямих b і c, якщо:

а) $a \parallel b, a \parallel c$

б) $a \perp b, a \perp c$

Чи зміняться відповіді, якщо точка C лежить на прямій b?