

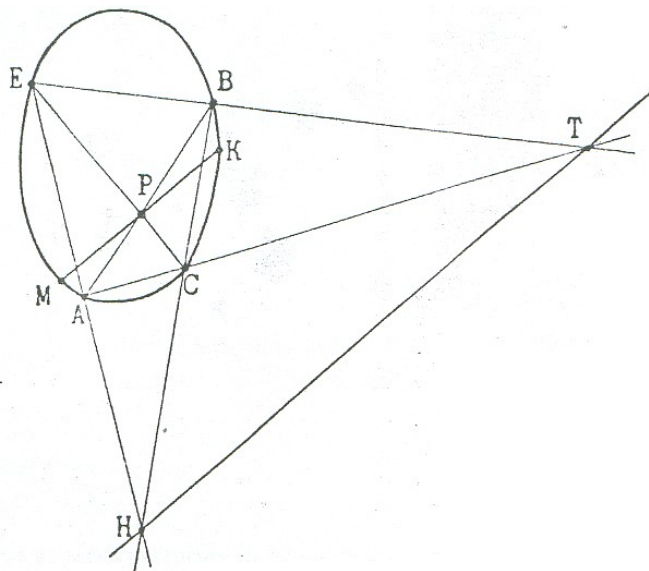
Міністерство освіти і науки України  
Криворізький державний педагогічний університет  
Кафедра математики

І.В.Лов'янова

## Вибрані питання елементарної математики

### Частина 1. Планіметричні задачі

Методична розробка для учнів 10 – 11 класів  
профільної школи



Кривий ріг  
2003

Рецензенти: *Гончарова Л.М.* – вчитель-методист, заступник директора з навчально-виховної роботи Криворізького обласного ліцею-інтернату для сільської молоді.

*Тишковець А.О.* – вчитель-методист, викладач математики Криворізького обласного ліцею-інтернату для сільської молоді.

*Друкується за рішенням кафедри математики  
Криворізького державного педагогічного університету  
(протокол №3 від 16 листопада 2003 року).*

Л 68 Лов'янова І.В. Вибрані питання елементарної математики. Частина 1. Планіметричні задачі. Методична розробка для учнів 10 – 11 класів фізико – математичного профілю. – Кривий Ріг; КДПУ, 2003. - 50 с.

Ірина Василівна Лов'янова

Вибрані питання елементарної математики

Видавничий відділ КДПУ

## Передмова

Вивчення розділу „Планіметричні задачі” триває 20 годин часу, відведеного на заняття спецкурсу „Вибрані питання елементарної математики” і за змістом включає наступні теми:

1. Планіметричні фігури, їх властивості;
2. Основні теореми планіметрії;
3. Задачі без додаткових побудов. На застосування однієї – двох теорем;
4. Задачі на властивості рівностороннього трикутника;
5. „Очевидна” і „Прихована” подібність;
6. Метод ключових задач: середини сторін чотирикутника ; медіана, яку проведено до гіпотенузи;
7. Метод ключових задач: співвідношення у прямокутному трикутнику; вписаний кут; формула  $a = 2R \sin \alpha$
8. Метод ключових задач: властивості хорд, що перетинаються; дотична і січна проведені до кола з однієї точки;
9. Метод допоміжного елемента: відрізок, площа, кут.
10. Метод допоміжного елемента: периметр, кола, центр кола.

В запропонованій методичній розробці задачі і теоретичний матеріал подано так, щоб як найбільше сприяти самостійній роботі учнів і розвитку математичного мислення. Задачі згруповані за методами розв’язування. Задачам кожної групи попереджують типові приклади. На початку кожного розділу і його підрозділів подано теоретичні відомості. Це дає змогу користуватися посібником незалежно від довідкової літератури. Серед поданих задач є як традиційні, на застосування вивчених у шкільному курсі формул і теорем. так і нестандартні, які сприяють розширенню кругозору учнів.

Посібник містить достатню кількість завдань для самостійної роботи, спрямованих на вироблення вмінь і навичок.

Зміст завдань відповідає дійсній програмі для шкіл, ліцеїв і гімназій з поглибленим вивченням математики.

Усі задачі розподілено за рівнями складності (що зазначено у нумерації завдань)

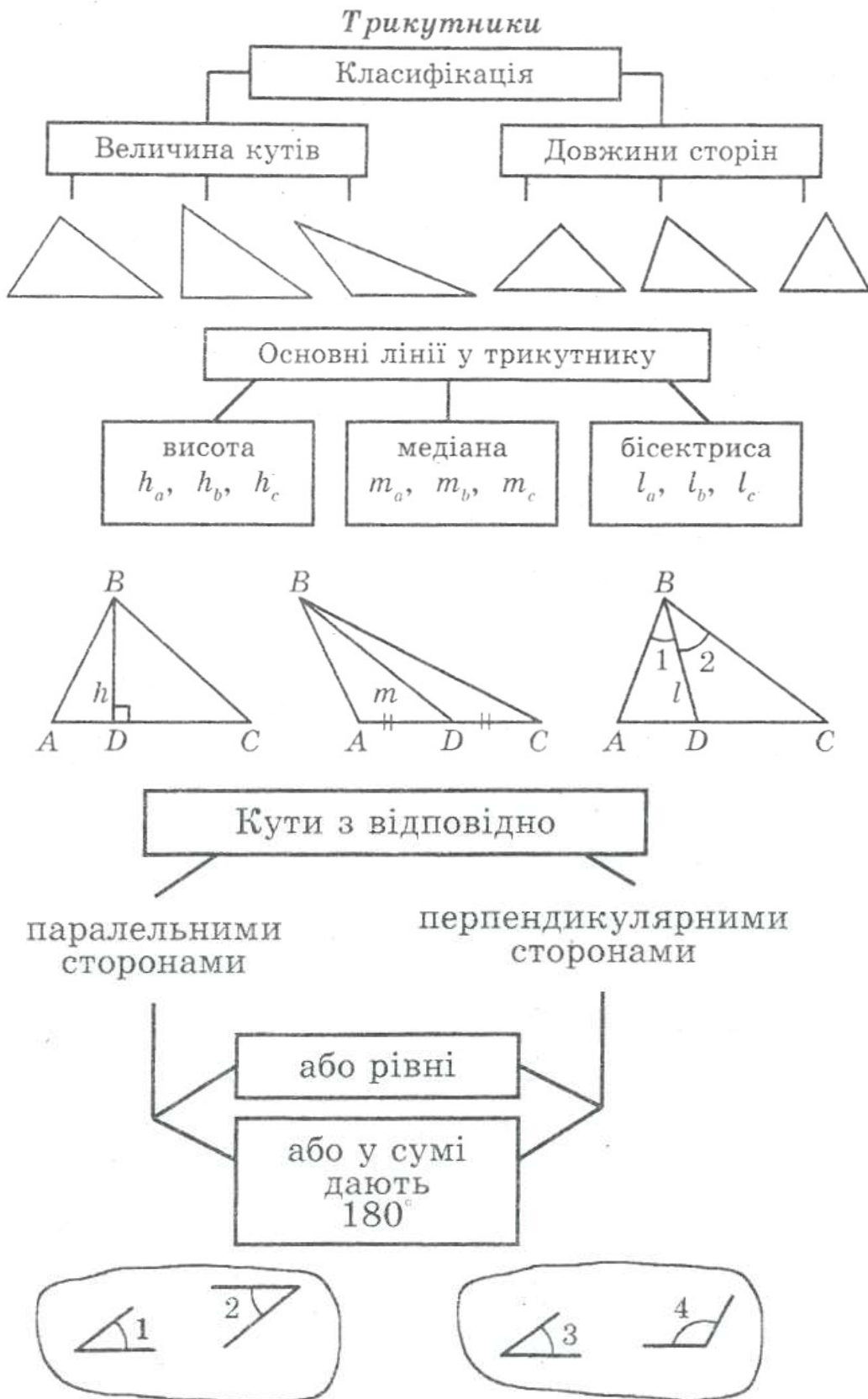
- середній ( I. 2. С )
- достатній ( I. 15. Д)
- високий ( I. 10. В)
- конкурсні задачі ( I. 99. К)

де I – номер розділу, 15 – номер задачі, Д – рівень складності.

Для учнів і вчителів старших класів шкіл, ліцеїв, гімназій з поглибленим вивченням математики, абітурієнтів, вступників до вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей.

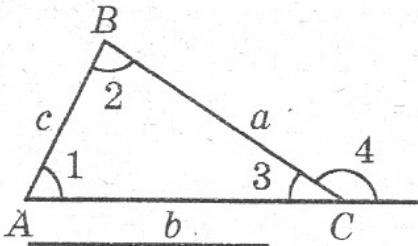
# Частина 1. Планіметричні задачі.

## Довідковий відділ. Трикутники.



$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ.$$

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2.$$



$$\begin{aligned} c + a &> b \\ a + b &> c \\ b + c &> a \end{aligned}$$

Сума внутрішніх кутів  $180^\circ$ .

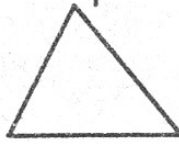
Зовнішній кут дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним.

Трикутник



прямокутний

один кут прямий



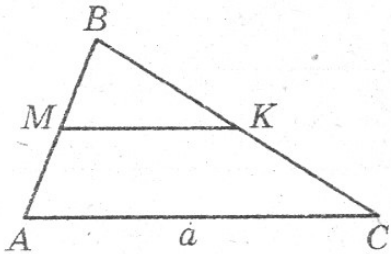
гострокутний

всі кути гострі



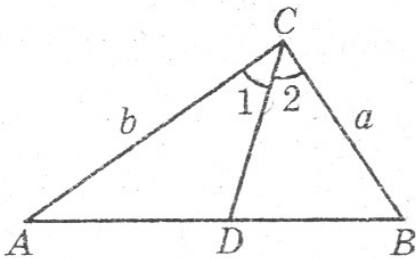
тупокутний

один кут тупий



1. Середня лінія трикутника — відрізок прямої, який з'єднує середини двох сторін.

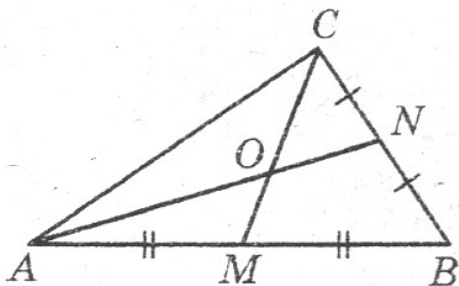
$$2. MK = \frac{1}{2} a, MK \parallel AC.$$



$$\angle 1 = \angle 2$$

CD — бісектриса.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

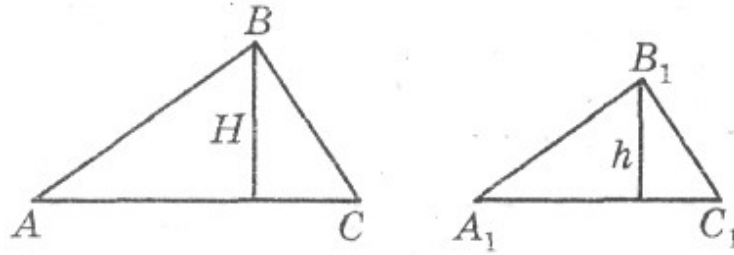


AN, CM — медіани.

$$MO = \frac{1}{3} CM$$

$$CO = \frac{2}{3} CM$$

Два трикутника називаються **подібними**, якщо кути одного трикутника відповідно рівні кутам іншого, а відповідні сторони пропорційні.



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ , якщо:

- 1) два кути першого дорівнюють двом кутам другого;
- 2) дві сторони першого пропорційні двом сторонам другого і кути, що містяться між цими сторонами, рівні між собою;
- 3) три сторони першого пропорційні трьом сторонам другого.

### Теорема

1. В подібних трикутниках відповідні сторони пропорційні

відповідним елементам:  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{H}{h}$ .

2. Периметри подібних трикутників відносяться як відповідні сторони:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

3. Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних

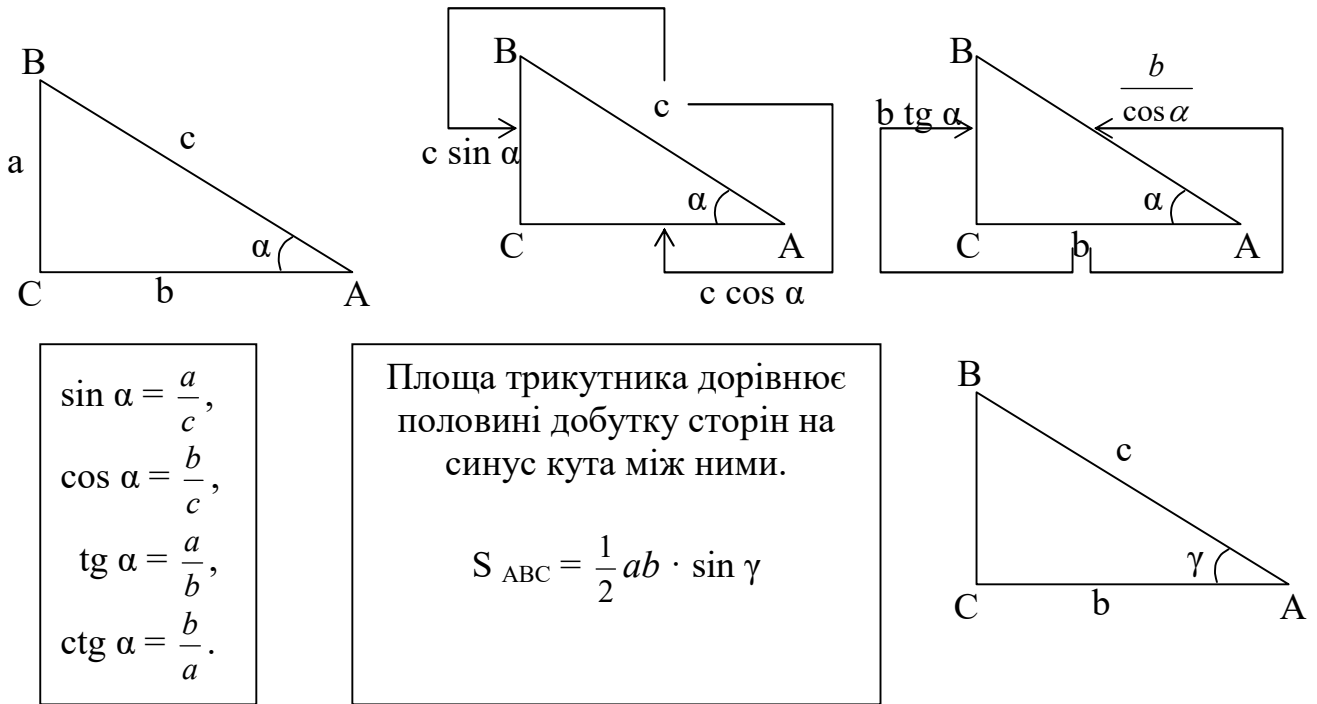
сторін:  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2}$

Відношення відповідних сторін називається *коефіцієнтом подібності*.

*гострокутний* – квадрат більшої сторони менший від суми квадратів двох інших сторін.

Трикутник – *прямокутний* – квадрат більшої сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін.

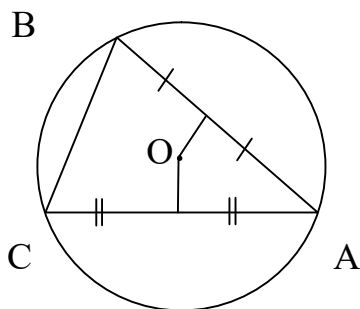
*тупокутний* – квадрат більшої сторони більший за суму квадратів інших сторін.



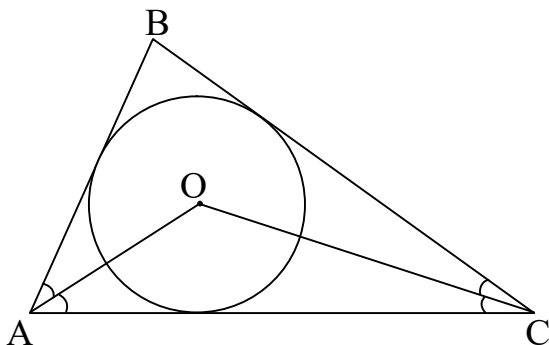
Центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис, а радіус вписаного кола визначається формулою  $r = \frac{S}{p}$ , де  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

Для прямокутного трикутника  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .

Центр описаного кола лежить у точці перетину перпендикулярів до середини сторін, а радіус описаного кола визначається формулою  $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ .



Центр кола, описаного навколо трикутника, лежить у точці перетину перпендикулярів, проведених до середин його сторін.

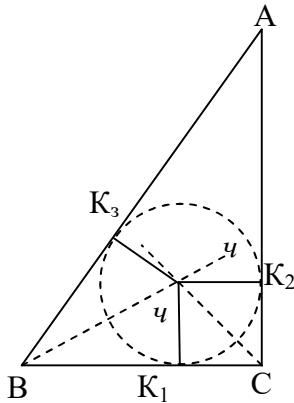


Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12 см. Знайти кути трикутника.

Розв'язання



Нехай коло вписане у прямокутний трикутник ABC, дотикається його сторін у точках  $K_1, K_2, K_3$ ,  $r$  – радіус цього кола.

Оскільки дотичні проведені до кола з однієї рівні, то  $BK_1 = BK_3 = 5$  см.,  $AK_2 = AK_3 = 12$  см.,  $CK_1 = CK_2 = r$ .

Застосовуючи теорему Піфагора, маємо

$$(5 + r)^2 + (12 + r)^2 = 17^2$$

звідки  $r = 3$  см.,  $BC = 8$  см.,  $AC = 15$  см.

Відповідь: 8 і 15 см.

Завдання для самостійного розв'язування

I.1.C. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, різниця двох сторін 4 см, а один із його зовнішніх кутів гострий. Знайти сторони трикутника.

I.2.C. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, бічна сторона менша основи на 1 см. Знайти висоту трикутника, проведену до основи.

I.3.C. Знайти бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його площа дорівнює  $108 \text{ см}^2$ , а основа 18 см.

I.4.C. Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 23 см, а кут при вершині  $60^\circ$ .

I.5.C. Кут між нерівними висотами рівнобедреного трикутника дорівнює  $130^\circ$ . Обчислити кути трикутника.

I.6.C. Один з кутів трикутника дорівнює половині суми двох інших, а другий дорівнює третій частині від суми двох інших. Обчислити кути трикутника.

I.7.C. Різниця двох сторін трикутника 1 см. Знайти ці сторони, якщо відомо, що вони лежать проти кутів  $45^\circ$  і  $30^\circ$ .

I.8.C. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза більша за інший катет на 8 см. Знайти гіпотенузу.

I.9.C. Знайти довжину медіани, проведені в прямокутному трикутнику до гіпотенузи, якщо катети дорівнюють 12 см, 9 см.



I.10.C. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 6 см. Знайти радіуси вписаного і описаного кіл.

I.11.C. В прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки довжиною 4 см і 5 см. Обчислити периметр.

I.12.C. В прямокутному трикутнику медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює одному з катетів. Обчислити найменший з кутів трикутника.

I.13.C. В прямокутний трикутник вписане коло. Гіпотенуза точкою дотику ділиться на відрізки довжиною 5 см і 12 см. Знайти площу трикутника.

I.14.C. У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута до гіпотенузи проведено медіану довжиною 50 см і опущено перпендикуляр довжиною 48 см. Обчислити периметр цього трикутника.

I.15.C. Знайти найменшу із висот трикутника, якщо його сторони мають довжини 15 см, 17 см, 8 см.

I.16.C. Знайти катери прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза рівна 5 см, а площа  $6 \text{ см}^2$ .

I.17.C. Дві сторони трикутника мають довжини 3 см і 4 см, а медіани, що проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти третю сторону трикутника.

I.18.C. Висота трикутника, що має довжину 6 см, ділить кут при вершині у відношенні 2:1, а основу трикутника - на відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайти сторони трикутника.

I.19.C В трикутнику довжина основи на 3 см більша від довжини висоти, а площа трикутника рівна  $35 \text{ см}^2$ . Знайти довжину основи.

I.20.C. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет на частини в 10 см і 26 см. Знайти гіпотенузу.

I.21.C. Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 18 см, а кути при основі  $45^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайти сторони трикутника.

I.22.C. Діагоналі ромба 12 см і 16 см. Визначити висоту ромба.

I.23.C. В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки 7 см і 1 см, рахуючи від вершини. Визначити основу трикутника.

I.24.C. В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, дорівнює 10 см; висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см. Визначити сторони трикутника.

I.25.C. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за один з катетів на 8 см і більша за інший на 1 см. Знайти сторони трикутника.

I.26.C. Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, ділить її на відрізки 8 см і 2 см, рахуючи від вершини. Знайти довжину цієї висоти і периметр даного трикутника.

I.27.C. Менша основа рівнобедреної трапеції дорівнює 11 м, а її периметр дорівнює 86 м. Діагональ трапеції ділить її тупий кут навпіл. Знайти висоту трапеції.

I.28.C. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона дорівнює 10 см. Визначити сторони трикутника, вершинами якого є основи висот даного.

I.29.C. Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут  $60^\circ$  і відповідно дорівнюють 2 см і 8 см.

I.30.C. Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут  $120^\circ$  і відповідно дорівнюють 8 см и 5 см.

I.31.C. Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут  $45^\circ$  і відповідно дорівнюють 8 см і 3 см.

I.32.C. Сторони трикутника відносяться між собою як 13 : 14 : 15, а висота, опущена на середню за величиною сторону, дорівнює 12 см. Знайти сторони трикутника.

I.33.C. Дві сторони трикутника відповідно дорівнюють 8 см й  $\sqrt{7}$  см, а кут, що лежить проти більшої з них, дорівнює  $60^\circ$ . Визначити третю сторону.

I.34.C. Одна з сторін трикутника дорівнює 13 см, а кут, що лежить проти цієї сторони, дорівнює  $120^\circ$ ; сума двох інших сторін трикутника дорівнює 15 м. Визначити сторони трикутника.

I.35.C. Основа трикутника дорівнює 14 см, а бічні сторони дорівнюють 15 см і 13 см. Визначити медіану основи.

I.36.C. У трикутнику  $ABC$ :  $AB = 13$  см,  $BC = 21$  см,  $AC = 20$  см. Визначити висоту, опущену на сторону  $BC$ .

I.37.C. Основа трикутника дорівнює 3 м, а прилеглі до неї кути дорівнюють  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Визначити бічні сторони трикутника.

I.38.D. Довести, що сума відстаней від точки, взятої всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

I.39.Д. Перпендикуляри, опущені з точки, яка лежить всередині рівностороннього трикутника зі стороною, яка дорівнює 24 см, на сторони трикутника, відносяться між собою як  $1 : 2 : 3$ . Знайти довжини цих перпендикулярів .

I.40.Д. Сума двох сторін трикутника дорівнює 15 см, а висоти, опущені на ці сторони, дорівнюють 2 см і 8 см. Визначити площу трикутника.

I.41.Д. Дві сторони трикутника дорівнюють 20 см і 28 см, а кут проти першої з них дорівнює  $45^\circ$ . Знайти площу трикутника.

I.42.Д. Визначити площу рівнобедреного трикутника, якщо основа дорівнює 15 см, а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см.

I.43.Д. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Визначити площі трикутників, на які розбивається даний трикутник висотою і медіаною, проведеними до середньої за величиною сторони.

I.44.Д. Визначити площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.

I.45.Д. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, опущена на основу, дорівнює 10 см, а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см.

I.46.Д. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 4 см і 3 см, в трикутнику дано точку на відстані 1 см від кожного катета. Знайти відстань від даної точки до гіпотенузи.

I.47.Д. Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 18 см, 15 см і 15 см. Знайти площу цього трикутника.

I.48.Д. Сторони трикутника відносяться між собою, як  $4 : 13 : 15$ , а площа дорівнює  $24 \text{ см}^2$ . Знайти сторони трикутника.

I.49.Д. Сторони трикутника дорівнюють 14 см, 13 см і 15 см. Всередині трикутника дано точку на відстані 5 см від першої сторони і на відстані 2 см від другої. Знайти відстань від даної точки до третьої сторони.

I.50.Д. Основа трикутника дорівнює 20 см, медіани бічних сторін дорівнюють 18 см і 24 см. Знайти площу трикутника.

I.51.Д. Медіана і висота прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

I.52.Д. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 10 см, а відстань між серединою гіпотенузи і основою висоти

трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

I.53.Д. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 8 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть сторони трикутника.

I.54.Д. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть сторони трикутника.

I.55.Д. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6см, а медіана, проведена до нього, - 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

I.56.Д. У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C=90^\circ$ ) катет  $AC$  дорівнює 5 см, а медіана  $AM$  - 13 см. Знайдіть гіпотенузу  $AB$ .

I.57.Д. Висота  $BD$  трикутника  $ABC$  ділить сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $CD$  так, що  $AD = 12$  см,  $CD = 4$  см. Знайдіть довжину сторони  $BC$ , якщо  $\angle A = 30^\circ$ .

I.58.Д. Висота  $AF$  ділить сторону  $BC$  трикутника  $ABC$  на відрізки  $BF$  і  $CF$ . Знайдіть довжину сторони  $AC$ , якщо  $CF = \sqrt{13}$  см,  $\angle ABC=60^\circ$ , а сторона  $AB$  дорівнює 18 см.

I.59.Д. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а різниця катетів - 14 см.

I.60.Д. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть площу трикутника.

I.61.Д. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а радіус описаного навколо нього кола — 17 см. Обчисліть площу даного трикутника.

I.62.Д. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, - 18,5 см. Обчисліть площу цього трикутника.

I.63.Д.  $AD$  - бісектриса трикутника  $ABC$ ,  $AD=l$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Знайдіть довжину відрізка  $BD$ .

I.64.Д. На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $D$ . Знайдіть довжину відрізка  $BD$ , якщо  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BAD = \beta$ ,  $AB = c$ .

I.65.Д Висота  $AM$  трикутника  $ABC$  ділить його сторону  $BC$  на відрізки  $BM$  і  $MC$ . Знайдіть довжину відрізка  $MC$ , якщо  $AB = 10\sqrt{2}$  см,  $AC=26$  см,  $\angle B=45^\circ$ .

I.66.Д. Висота  $NE$  трикутника  $FNP$  ділить його сторону  $FP$  на відрізки  $FE$  і  $PE$ . Знайдіть довжину відрізка  $NF$  якщо  $EP=8$ см,  $NP= 17$  см.  $\angle F=60^\circ$ .

I.67.Д. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

I.68.Д. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, як що висота, проведена, до основи, дорівнює 8 см.

I.69.Д. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і ділить її на дві частини, одна з яких, прилегла до вершини трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

I.70.Д. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу трикутника.

I.71.Д. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB=BC$ ) бісектриса кута  $A$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ , якщо  $\angle AMB=117^\circ$ .

I.72.Д. У рівнобедреному трикутнику  $MKE$  ( $MK=KE$ ) бісектриса кута  $E$  перетинає сторону  $MK$  у точці  $C$ . Знайдіть кути трикутника  $MKE$ , якщо  $\angle KCE=126^\circ$ .

I.73.Д. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до його основи як 5:6, а висота трикутника, опущена на основу, дорівнює 12 см. Обчисліть периметр трикутника.

I.74.Д. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8:3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Обчисліть периметр трикутника.

I.75.Д. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, - 9 см.

I.76.Д. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 72 см. а висота, проведена до основи, - 24 см. Знайдіть сторони трикутника.

I.77.Д. Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см. а радіус кола, описаного навколо нього - 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

I.78.Д. Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, - 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

I.79.Д. У трикутнику  $ABC$   $AC=BC$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$  см,  $\angle BAC=30^\circ$ ,  $AD$  - бісектриса. Знайдіть довжину відрізка  $AD$ .

I.80.Д. У трикутнику  $ABC$ .  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A=15^\circ$ ,  $AC=3\sqrt{3}$  см.  $CM$  - бісектриса. Знайдіть довжину відрізка  $AM$ .

I.81.Д. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота опущена на основу, - 15 см. Знайдіть площу трикутника.

I.82.Д. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 100 см. а висота, опущена на основу. 30 см. Знайдіть площу трикутника.

I.83.Д. Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до меншої сторони.

I.84.Д. Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до більшої сторони

I.85.Д. Знайдіть площу круга, вписаного в трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.

I.86.Д. Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см. 14 см і 15 см.

I.87.Д. Периметр трикутника  $ABC$ , описаного навколо кола, дорівнює 36 см. Точка дотику кола зі стороною  $BC$  ділить її у відношенні 2:5, рахуючи від точки  $B$ , а точка дотику зі стороною  $AC$  віддалена від точки  $A$  на 4 см. Знайдіть сторони трикутника.

I.88.Д. Периметр трикутника  $ABC$ , описаного навколо кола, дорівнює 30см. Точка дотику кола зі стороною  $AB$  ділить її у відношенні 3:2, рахуючи від точки  $A$ , а точка дотику зі стороною  $BC$  віддалена від точки  $C$  на 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

I.89.Д. Висота  $BD$  трикутника  $ABC$  ділить його сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $CD$ . Знайдіть довжину відрізка  $CD$ , якщо  $AB = 2\sqrt{3}$  см,  $BC=5$  см,  $\angle A = 60^\circ$ .

I.90.Д. Висота  $NF$  трикутника  $MNK$  ділить його сторону  $MK$  на відрізки  $MF$  і  $FK$ . Знайдіть довжину відрізка  $MN$ , якщо  $FK = 8$  см,  $\angle K=30^\circ$

I.91.Д. Одна із сторін трикутника дорівнює 35 см, а дві інші відносяться як 3:8 і утворюють кут  $60^\circ$ . Знайдіть невідомі сторони трикутника.

I.92.Д. Дві сторони трикутника відносяться як  $3\sqrt{2} : 7$ , а кут між ними дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона трикутника дорівнює 30 см.

I.93.В. а) Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів.

б) Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума півпериметра і радіуса вписаного кола дорівнює сумі катетів.

I.94.В. а) У трикутнику основа дорівнює 56 см, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно  $8\sqrt{37}$  і 48 см. Обчислити діаметр описаного кола.

б) У трикутнику дві бічні сторони дорівнюють 52 і 60 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 48 см. Обчислити діаметр вписаного кола.

I.95.В. а) У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює  $42\pi$  см.

б) У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює  $50\pi$  см.

I.96.В а) У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 40 см, основа дорівнює 48 см. Обчислити різницю радіусів вписаного і описаного кіл.

б) У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 12 і 25 см. Обчислити периметр трикутника.

I.97.В. а) Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить пополам кут між медіаною і висотою, проведеною з цієї вершини.

б) Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

I.98.В а) У трикутнику висота дорівнює 48 см.. Вона проведена до основи і ділить її на відрізки 20см і 36см. Обчислити діаметр описаного кола.

б) У трикутнику основа дорівнює 56 см. До неї проведені медіана і висота, відстань між основами яких, дорівнює 8 см, Більша бічна сторона дорівнює 60 см. Обчислити радіус вписаного кола.

I.99.В а) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 см, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см. Обчислити площу трикутника.

б) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 112 см, а медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Обчислити площу трикутника.

I.100.В. а) У ромбі діагоналі відносяться, як 3 : 4. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює  $24\pi$  см.

б) У ромбі різниця діагоналей дорівнює 10 см. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює  $24\pi$  см.

I.101.B. а) У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 55 см, а основа — 66 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи бісектрис даного трикутника.

б) У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 250 см, а основа — 300 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника.

I.102.B. а) Довести, що квадрат бісектриси кута при вершині трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків, на які ділить ця бісектриса основу.

б) Довести, що квадрат медіани, проведеної до основи трикутника, дорівнює різниці між половиною суми квадратів бічних сторін і квадратом половини основи.

I.103.B. а) У трикутнику з однієї вершини проведені висота, бісектриса, медіана. Відстані від другої вершини трикутника до основ висоти, бісектриси, медіани відповідно дорівнюють 42, 50 і 51 см. Обчислити периметр трикутника.

б) У трикутнику бічні сторони дорівнюють 159 і 156 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 144 см. Обчислити відрізки, на які ділить третю сторону бісектриса, що проведена до неї.

I.104.B. а) У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 60 см. Висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки у відношенні 7 : 18, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця висота.

б) У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 66 см. Бісектриса кута при основі ділить бічну сторону на відрізки, у відношенні 5 : 6, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця бісектриса.

I.105.B а) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 80 см, площа його дорівнює  $240 \text{ см}^2$ . Обчислити довжину описаного кола.

б) Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, довжина описаного кола дорівнює 17 см. Обчислити площу трикутника.

I.106.B. а) Сторони трикутника відповідно дорівнюють 75, 51 та 78 см. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його висота, проведена до найменшої сторони.

б) Сторони трикутника відповідно дорівнюють 78, 75 та 51 см. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його бісектриса найменшого кута.



I.107.B а) У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 80 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити радіуси вписаного і описаного кіл.

б) У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 24 і 50 см. Обчислити периметр трикутника.

I.108.B а) Катети прямокутного трикутника відносяться, як 5 : 12. Обчислити периметр трикутника, якщо різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 9 см.

б) Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відносяться, як 5 : 13. Обчислити площу цього трикутника, якщо сума радіусів вписаного і описаного кіл дорівнює 17 см.

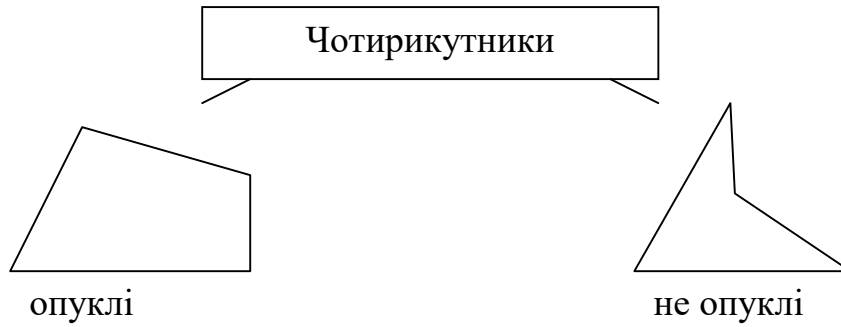
I.109.B а) Довести, що вписане в прямокутний трикутник коло ділить гіпотенузу на відрізки, добуток довжин яких дорівнює площі цього трикутника.

б) Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, яка проведена до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

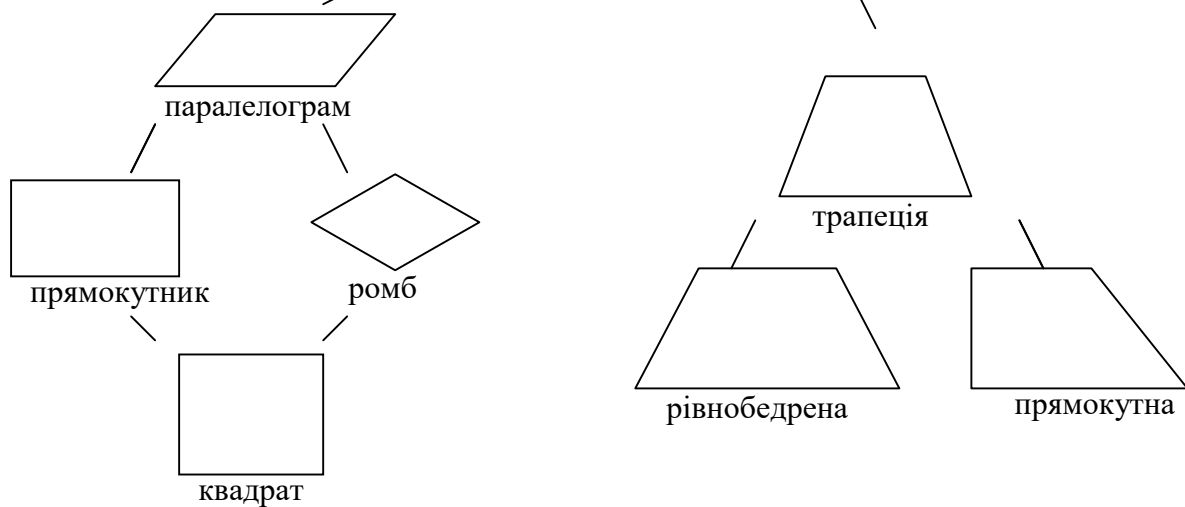
I.110.B. а) Одна із сторін трикутника дорівнює 40 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 36 і 48 см. Обчислити площу трикутника.

б) Медіани трикутника відповідно дорівнюють 48, 60 і 36 см. Обчислити площу трикутника.

## Довідковий відділ. Чотирикутники



### Класифікація опуклих чотирикутників

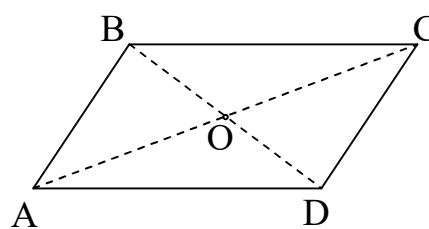


**Паралелограм** – чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

### Властивості

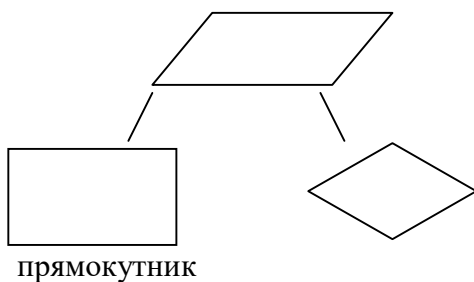
$$AB = CD, \\ AD = BC.$$

$$\angle A = \angle C, \\ \angle B = \angle D.$$



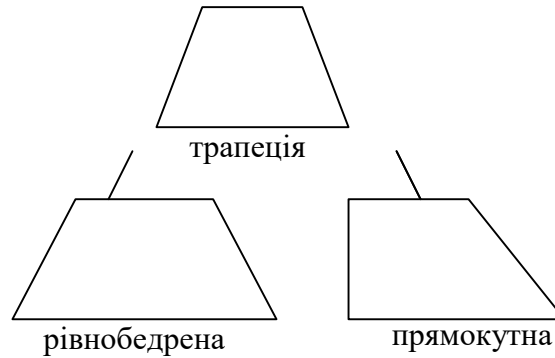
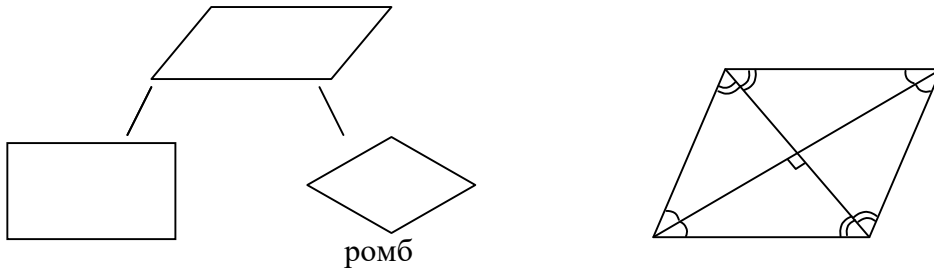
$$\angle A + \angle D = 180^{\circ}, \\ \angle A + \angle B = 180^{\circ}.$$

$$BO = OD, \\ AO = OC.$$



**Прямокутник** – паралелограм, у якого є прямий кут. Діагоналі прямокутника рівні між собою.

Ромб – паралелограм, у якого всі сторони рівні між собою. Діагоналі взаємно перпендикулярні й ділять кути навпіл.

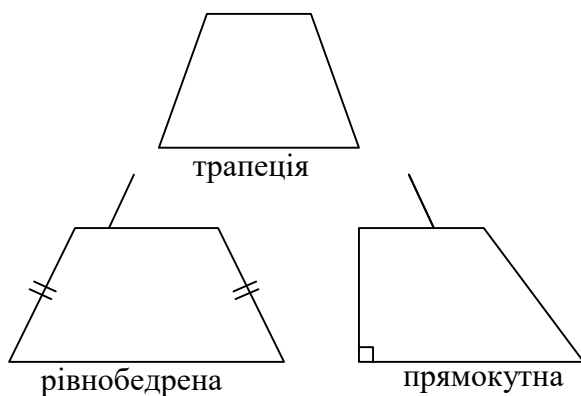


**Трапеція** - чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

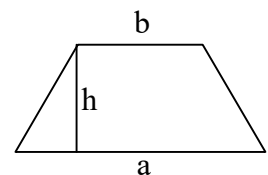
Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює  $180^\circ$ .

Середня лінія дорівнює півсумі основ. У рівнобедреній трапеції кути при основі рівні між собою.

Якщо кути при основі рівні між собою, то трапеція рівнобедрена.

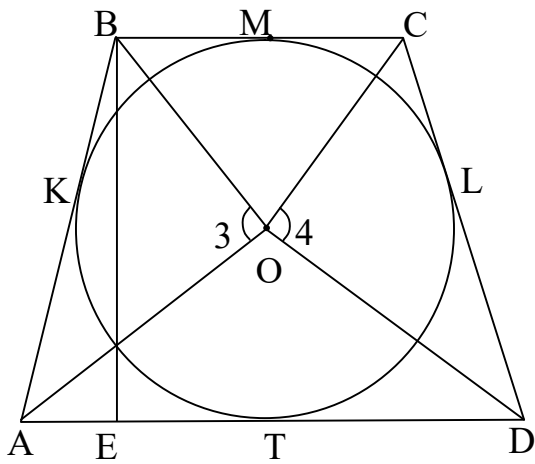


$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

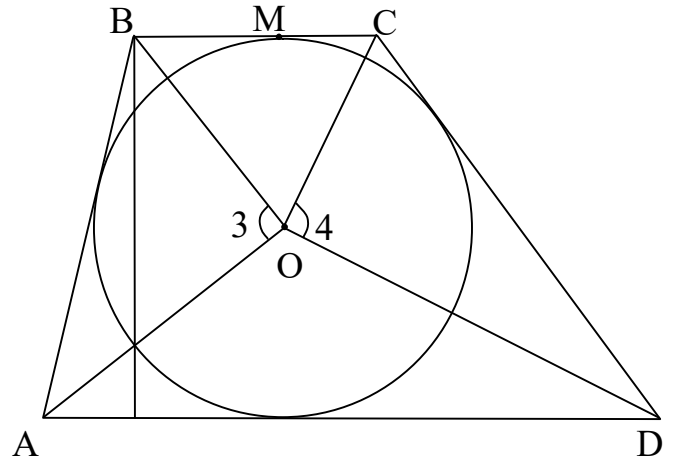


Трапеція

різностороння



$$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ, \\ ED = AB$$



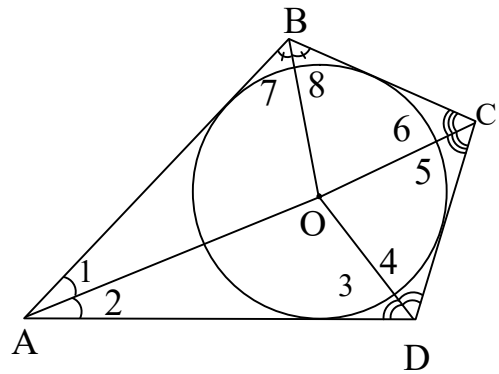
$$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$$

Доведення

$$\left( \begin{array}{l} \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ \\ BO \text{ і } AO - \text{бісектриси} \end{array} \right) \\ \Downarrow \\ (\angle OAB - \angle OBA = 90^\circ) \\ \Downarrow \\ (\angle 3 = 90^\circ)$$

$$\left( \begin{array}{l} BK = BM = ET \\ KA = LD = DT \end{array} \right) \\ \Downarrow \\ (BK = ET; KA = DT) \\ \Downarrow \\ (ED = AB)$$

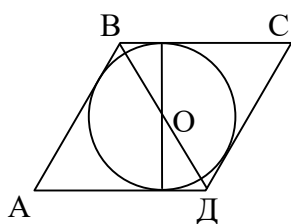
$$AB + CD = AD - BC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \\ \angle 5 = \angle 6 \\ \angle 7 = \angle 8$$



Приклади розв'язування задач.

Задача 2. У ромбі, який ділиться своєю діагоналлю на два рівносторонніх трикутники, вписано коло радіуса 2. Знайти сторону ромба.

Розв'язання.



Оскільки діаметр кола співпадає з висотою ромба, то задача зводиться до знаходження сторони трикутника АВД за його висотою.

Виходячи з формули  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  і позначивши сторону ромба через  $x$ , одержимо  $4 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ , звідси  $x = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .

Відповідь  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ .

Завдання для самостійного розв'язування

I.111.С Сторони даного паралелограма відповідно дорівнюють 3 см і 5 см, а діагоналі відносяться як  $7 : \sqrt{19}$ . Визначити довжини діагоналей.

I.112.С. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 11 см, а бічні сторони 3 см і 4 см. Визначити висоту трапеції.

I.113.С. Сторони прямокутника 2 см і 24 см. Знайти сторони рівновеликого йому прямокутника, якщо їх відношення дорівнює 3:1.

I.114.С. Сторона прямокутника відноситься до його діагоналі, як 4 : 5, а інша сторона дорівнює 6 см. Знайти площу прямокутника.

I.115.С. Периметр прямокутника дорівнює 28 м, а площа  $48 \text{ м}^2$ . Знайти діагональ цього прямокутника.

I.116.С. Висоти паралелограма відносяться, як 2 : 3, його периметр дорівнює 20 см, а гострий кут  $30^\circ$ . Визначити площу паралелограма.

I.117.С. Площа паралелограма дорівнює  $36 \text{ см}^2$ , а відстані від точки перетину діагоналей до сторін відповідно дорівнюють 1 см й 3 см. Знайти периметр паралелограма.

I.118.С Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з його діагоналей дорівнює 15 см. Знайти площу ромба.

I.119.С. Знайти діагональ прямокутника, якщо його периметр дорівнює 14 см, а площа  $12 \text{ см}^2$ .

I.120.C. Сторони прямокутника відносяться як  $7 : 3$ , а його площа дорівнює  $525 \text{ см}^2$ . Обчислити сторони цього прямокутника.

I.121.C. Обчислити площу прямокутника, якщо відомо, що бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить його діагональ на відрізки  $20 \text{ см}$  і  $15 \text{ см}$ .

I.122.C. Діагональ прямокутника має довжину  $8 \text{ см}$  і ділить прямий кут у відношенні  $1 : 2$ . Обчислити сторони прямокутника.

I.123.C. Сторони паралелограма відносяться як  $2 : 3$ , гострий кут дорівнює  $30^\circ$ . Обчислити площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює  $50 \text{ см}$ .

I.124.C. Одна із сторін паралелограма в  $3$  рази більша за висоту, що проведена до неї. Знайти їх довжини, якщо площа паралелограма  $108 \text{ см}$ .

I.125.C. Діагоналі паралелограма дорівнюють  $24 \text{ см}$  і  $28 \text{ см}$ , а сторони відносяться як  $7 : 11$ . Обчислити периметр паралелограма.

I.126.C. Обчислити площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють  $6 \text{ см}$  і  $8 \text{ см}$ , а кут між ними  $45^\circ$ .

I.127.C. Діагональ паралелограма, яка рівна  $13 \text{ см}$ , перпендикулярна до сторони паралелограма, рівній  $12 \text{ см}$ . Знайти площу паралелограма.

I.128.C. Знайти кут ромба, якщо його діагоналі рівні  $23 \text{ см}$  і  $2 \text{ см}$ .

I.129.C. Знайти сторону ромба, якщо його діагоналі рівні  $10 \text{ см}$  і  $24 \text{ см}$ .

I.130.C. Периметр ромба дорівнює  $16 \text{ см}$ , висота  $2 \text{ см}$ . Обчислити кути ромба.

I.131.C. Знайти сторону ромба, якщо його гострий кут  $30^\circ$ , а площа дорівнює  $18 \text{ см}^2$ .

I.132.C. Сторона ромба дорівнює  $17 \text{ см}$ , а одна із діагоналей  $30 \text{ см}$ . Знайти довжину іншої діагоналі.

I.133.C. Знайти площу ромба, якщо його сторона рівна  $10 \text{ см}$ , а одна із діагоналей  $12 \text{ см}$ .

I.134.C. В трапеції бічні сторони дорівнюють меншій основі, а діагональ утворює з основою кут  $30^\circ$ . Обчислити кути трапеції.

I.135.C. У рівнобічної трапеції основи дорівнюють  $50 \text{ см}$  і  $30 \text{ см}$ , а бічна сторона  $26 \text{ см}$ . Обчислити площу трапеції.

I.136.C. Обчислити периметр рівнобічної трапеції, якщо один із його кутів дорівнює  $60^\circ$ , а основи рівні  $15 \text{ см}$  і  $49 \text{ см}$ .

I.137.C. В трапеції основи дорівнюють 5 см і 8 см, бічні сторони 3,6 см і 3,9 см. Точка  $M$  є точкою перетину продовження бічних сторін. Обчислити відстань від точки  $M$  до кінців меншої основи.

I.138.C. В рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Периметр трапеції дорівнює 132 см, а основи відносяться як 2:5. Обчислити довжину середньої лінії трапеції.

I.139.C. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її менша основа дорівнює 18 см, висота 9 см і гострий кут  $45^\circ$ .

I.140.C. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 16 см і 30 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

I.141.C. Бічні сторони і менша основа прямокутної трапеції дорівнюють 8, 10 і 10. Знайти більшу основу.

I.142.D. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на частини завдовжки 3 см і 5 см, рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює  $60^\circ$ .

I.143.D. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на частини завдовжки 6 см і 2 см, рахуючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює  $30^\circ$ .

I.144.D. Через середину діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $BC$  і  $AD$  прямокутника в точках  $M$  і  $K$  відповідно,  $AC=15$  см,  $AK=4$  см,  $KD=8$  см. Обчисліть площу чотирикутника  $AMCK$ .

I.145.D. Через середину діагоналі  $BD$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $BC$  і  $AD$  прямокутника, в точках  $M$  і  $K$  відповідно,  $BD=10$  см,  $BM=6$  см,  $MC=2$  см. Обчисліть площу чотирикутника  $AMCK$ .

I.146.D. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними -  $60^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.

I.147.D. Сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 30 см, а кут між його висотами -  $30^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.

I.148.D. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см і одна з них перпендикулярна до сторони.

I.149.D. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

I.150.D. На стороні  $EC$  квадрата  $ABCD$  позначено точку  $M$  так, що  $\angle DAM=60^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $MD$ , якщо  $AB= \sqrt{3}$  см.

I.151.Д. На стороні  $CD$  квадрата  $ABCD$  позначено точку  $K$  так, що  $\angle ABK = 60^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $AK$ , якщо  $BC = \sqrt{6}$  см.

I.152.Д. На стороні  $AB$  квадрата  $ABCD$  позначено точку  $K$ , а на стороні  $CD$  - точку  $M$  так, що  $AK : KB = 1 : 2$ ,  $DM : MC = 3 : 1$ . Знайдіть сторону квадрата, якщо  $MK = 26$  см.

I.153.Д. На стороні  $MN$  квадрата  $MNFK$  позначено точку  $A$ , а на стороні  $FK$  - точку  $B$  так, що  $MA : AN = 2 : 13$ ,  $KB : BF = 2 : 1$ . Знайдіть сторону квадрата, якщо  $AB = 34$  см.

I.154.Д. На стороні  $BC$  прямокутника  $ABCD$  позначено точку  $M$ . Знайдіть площу чотирикутника  $AMCD$ , якщо  $AM = 13$  см,  $AB = 12$  см,  $BO = 20$  см.

I.155.Д. На катеті  $AC$  прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) позначено точку  $K$ . Знайдіть площу трикутника  $KBC$ , якщо  $AK = 8$  см,  $BK = 17$  см,  $BC = 25$  см.

I.156.Д. Більша діагональ ромба дорівнює  $d$ , а гострий кут -  $\alpha$ . Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

I.157.Д. Сторона ромба дорівнює  $a$ , а гострий кут -  $\beta$ . Знайдіть діагоналі ромба.

I.158.Д. Площа ромба дорівнює  $120 \text{ см}^2$ , а його діагоналі відносяться як  $5 : 12$ . Знайдіть периметр ромба.

I.159.Д. Периметр ромба дорівнює  $120$  см, а його діагоналі відносяться як  $3 : 4$ . Знайдіть площу ромба.

I.160.Д. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює  $15$  см, а сума діагоналей -  $42$  см.

I.161.Д. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює  $25$  см, а різниця діагоналей -  $10$  см.

I.162.Д. Довжини діагоналей ромба відносяться як  $\sqrt{3} : 1$ . Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює  $40$  см.

I.163.Д. Довжини діагоналей ромба відносяться як  $\sqrt{5} : 2$ . Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює  $36$  см.

I.164.Д. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки  $3$  см і  $12$  см. Знайдіть діагоналі ромба.

I.165.Д. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки  $4$  см і  $25$  см. Знайдіть діагоналі ромба.



I.166.Д. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18см і 12см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

I.167.Д. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

I.168.Д. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  основа  $BC$  дорівнює 6 см, висота  $CE = 2\sqrt{3}$  см, а бічна сторона утворює з основою  $AD$  кут  $60^\circ$ . Знайдіть основу  $AD$  трапеції.

I.169.Д. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  основи  $AD$  і  $BC$  відповідно дорівнюють 18см і 12см. Бічна сторона утворює з основою кут  $30^\circ$ . Знайдіть діагональ трапеції.

I.170.Д. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

I.171.Д. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6см і 12см. Знайдіть периметр трапеції.

I.172.Д. Сторона  $AB$  трикутника  $ABC$  дорівнює 12 см. Сторону  $BC$  поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні  $AB$ . Знайдіть довжини відрізків цих прямих, які знаходяться між сторонами трикутника.

I.173.Д. У трикутнику  $ABC$  сторона  $AC$  поділена на три рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні  $AB$  трикутника. Менший із відрізків цих прямих, що знаходяться між сторонами трикутника, менший за сторону  $AB$  на 8 см. Знайдіть сторону  $AB$  трикутника.

I.174.Д. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона –  $4\sqrt{3}$  см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює  $120^\circ$ .

I.175.Д. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота –  $3\sqrt{3}$  см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює  $150^\circ$ .

I.176.Д. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

I.177.Д. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

I.178.Д. У рівнобічній трапеції  $ABCD$   $AB = CD = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $AD = 12$  см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута  $A$  трапеції.

I.179.Д. У прямокутній трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ,  $\angle A = 90^\circ$ )  $AB = 4$  см,  $BC = 7$  см,  $AD = 10$  см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута  $D$  трапеції.

I.180.Д. У рівнобічній трапеції  $FKPE$   $FK = EP = 9$  см,  $FE = 20$  см,  $KP = 8$  см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута  $F$  трапеції.

I.181.Д. У прямокутній трапеції  $KDMT$  ( $DM \parallel KT$ ,  $\angle D = 90^\circ$ )  $DM = 16$  см,  $KT = 21$  см,  $MT = 20$  см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута  $T$  трапеції.

I.182.Д. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і ділить другу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які ділить точка перетину діагоналей першу діагональ.

I.183.Д. Одна з діагоналей трапеції та її основи дорівнюють відповідно 40 см, 18 см і 30 см. Знайдіть відрізки, на які ділить точка перетину діагоналей дану діагональ.

I.184.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $K$ . Менша основа  $BC$  дорівнює 4 см,  $BK = 5$  см,  $AB = 15$  см. Знайдіть більшу основу трапеції.

I.185.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $E$ . Більша основа  $AD$  трапеції дорівнює 12 см,  $AE = 15$  см,  $BE = 5$  см. Знайдіть меншу основу трапеції.

I.186.Д. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $AMFK$  так, що кут  $A$  в них спільний, а вершина  $F$  належить стороні  $BC$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $AB = 10$  см,  $AC = 15$  см.

I.187.Д. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $CMKD$  так, що кут  $C$  у них спільний, а вершина  $K$  належить стороні  $AB$ . Знайдіть сторону  $BC$ , якщо  $AC = 12$  см, а довжина сторони ромба 4 см.

I.188.Д. Відомо, що  $O$  - точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$  трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ). Знайдіть довжини відрізків  $BO$  і  $OD$ , якщо  $AO:OC = 7:6$  і  $BO = 39$  см.

I.189.Д. Відомо, що  $O$  - точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$  трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Знайдіть довжини відрізків  $BO$  і  $AO$ , якщо  $AD:BC = 3:2$ ,  $OD = 9$  см,  $CO = 8$  см.

I.190.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть  $AM$ , якщо  $AB = 6$  см і  $BC:AD = 3:4$ .

I.191.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $F$ . Знайдіть  $AB$ , якщо  $AF = 10$  см і  $BC:AD = 2:5$ .

I.192.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ ,  $DC:CM=3:5$ ,  $BC$  - менша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює 26 см.

I.193.Д. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $F$ ,  $AB:BF=3:1$ ,  $AD$  - більша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 6 см.

I.194.Д. Пряма, яка паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає його сторону  $AB$  у точці  $M$ , а сторону  $BC$  - у точці  $K$ ,  $BM=4$  см,  $AC=8$  см,  $AM=MK$ . Знайдіть  $AB$ .

I.195.Д. Пряма, яка паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає його сторону  $AB$  у точці  $M$ , а сторону  $BC$  - у точці  $K$ ,  $BK=2$  см,  $AC=12$  см,  $MK=KC$ . Знайдіть  $BC$ .

I.196.В. а) У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців бічної сторони дорівнюють 75 і 100 см, а до кінців меншої основи — 65 і 75 см. Обчислити площу цієї трапеції.

б) Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см, а від кінців бічної сторони — 156 і 65 см. Обчислити площу цієї трапеції.

I.197.В. а) Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і ділить кожен із двох інших його сторін на відрізки 2 і 23 см. Обчислити радіус кола.

б) Коло радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата з стороною 18 см. Обчислити відрізки, на які ділить коло кожен з двох інших сторін квадрата.

I.198.В. а) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 13 : 5, починаючи від вершини гострих кутів. Визначити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 32 см.

б) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів в точці перетину діляться у відношенні 3 : 13, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 48 см.

I.199.В. а) Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 41 і 57 см. Різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см. Обчислити діагоналі паралелограма.

б) Перпендикуляр, проведений із вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 36 і 12 см. Периметр паралелограма дорівнює 192 см. Обчислити діагоналі паралелограма.

I.200.В. а) Висота ромба дорівнює 24 см, а одна з діагоналей дорівнює 40 см. Обчислити площу ромба.

б) Одна із діагоналей ромба дорівнює 30см, а - довжина вписаного кола дорівнює  $24\pi$  см. Обчислити площу ромба.

I.201.В. а) У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців меншої основи на відстані 65 і 75 см. Менша основа трапеції дорівнює 70 см. Обчислити площу трапеції.

б) У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см. Довжина більшої основи дорівнює 224 см. Обчислити площу трапеції.

I.202.В. а) Основи трапеції дорівнюють 60 і 20 см, а бічні сторони дорівнюють 13 і 37 см. Обчислити площу трапеції.

б) Основи трапеції дорівнюють 142 і 89 см, а діагоналі — 120 і 153 см. Обчислити площу трапеції.

I.203.В. а) Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 24 і 36 см. Кут між цими висотами дорівнює  $30^\circ$ . Обчислити площу паралелограма.

б) Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 10 і 24 см. Кут між цими висотами дорівнює  $150^\circ$ . Обчислити площу паралелограма.

I.204.В. а) Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони відповідно на 75 і 100 см. Обчислити площу трапеції.

б) Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від більшої бічної сторони на 12 см. Менша основа трапеції дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції.

I.205.В. а) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 54 і 96 см, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції.

б) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 64 і 36 см, починаючи від вершин гострих кутів. Обчислити периметр трапеції.

I.206.B. а) У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює  $30^\circ$ , ділить протилежну сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити площу паралелограма.

б) У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює  $150^\circ$ , ділить протилежну сторону на відрізки 50 і 30 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити площу паралелограма.

I.207.B. а) Сума діагоналей ромба дорівнює 70 см. Довжина вписаного кола дорівнює  $24\pi$  см. Обчислити периметр ромба.

б) Різниця діагоналей ромба дорівнює 10 см. Площа вписаного круга дорівнює  $144\pi$  см<sup>2</sup>. Обчислити площу ромба.

I.208.B. а) Довести, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює сумі квадрата бічної сторони та добутку основ.

б) Довести, що у довільній трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

I.209.B. а) У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції.

б) У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції.

I.210.B. а) Більша основа трапеції дорівнює 42 см. Вписане в трапецію коло ділить одну із бічних сторін на відрізки 8 і 18 см. Обчислити площу трапеції.

б) Одна із бічних сторін трапеції дорівнює 60 см, а друга бічна сторона точкою дотику вписаного до неї кола ділиться на відрізки 16 і 36 см. Обчислити площу трапеції.

I.211.B. а) У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює  $60^\circ$ , ділить протилежну сторону на відрізки 33 і 55 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.

б) У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює  $120^\circ$ , ділить протилежну сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса більшу діагональ паралелограма.

I.212.B. а) До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник - з основою 12 см і висотою 8 см, проведена дотична, паралельна основі. Обчислити довжину відрізка дотичної, який знаходиться між сторонами трикутника.

б) Із однієї точки поза колом проведені до нього дві дотичні. Довжина кожної дотичної дорівнює 12 см, а відстань між точками дотику — 14,4 см. Обчислити радіус кола.

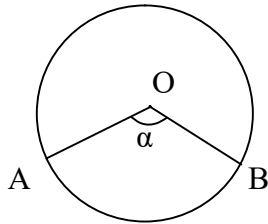
I.213.B. а) У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 24 і 25 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції.

б) У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 35 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції.

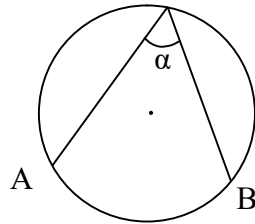
I.214.B. а) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а медіана, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити площу описаного круга.

б) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити довжину вписаного кола.

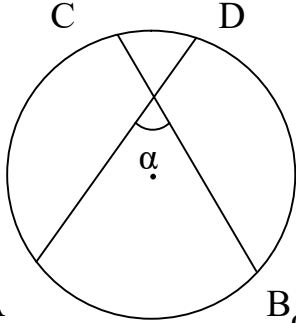
**Довідковий відділ . Коло**



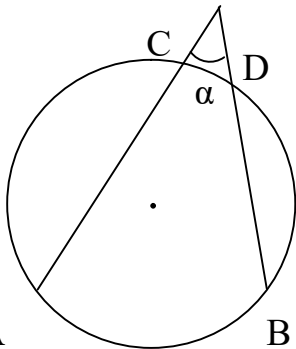
$$\alpha = \cup AB$$



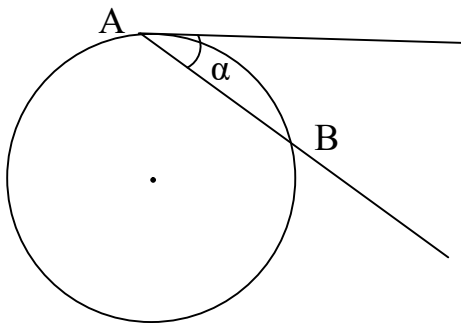
$$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$$



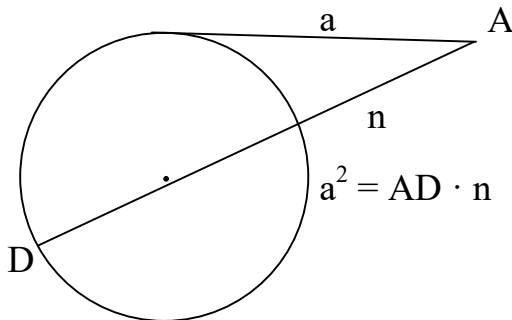
$$B_{\alpha} = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup CD)$$



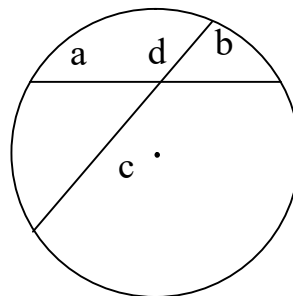
$$B_{\alpha} = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup CD)$$



$$= \frac{1}{2} \cup AB$$



$$a^2 = AD \cdot n$$



$$a \cdot b = c \cdot d$$

Центральний кут вимірюється дугою, на яку спирається.

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається.

Кут, вершина якого лежить всередині круга, вимірюється напівсумою двох дуг, одна із яких міститься між його сторонами, а друга між продовженнями сторін.

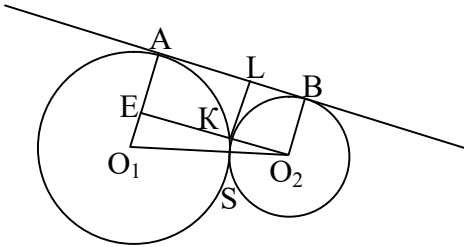
Кут, вершина якого лежить поза кругом, вимірюється напіврізницею двох дуг, що міститься між його сторонами.

Кут, утворений дотичною й хордою, вимірюється половиною дуги, яка міститься всередині його.

Приклади розв'язування задач.

Задача 3. Два кола радіусів  $R = 3$  і  $r = 1$  дотикаються зовні. Знайти відстань від точки дотику кіл до їхньої спільної зовнішньої дотичної.

Розв'язання.



Нехай  $A$  і  $B$  – точки дотику кіл і дотичної,  $O_1$  і  $O_2$  – центри кіл,  $S$  – точка дотику кіл,  $SL \perp AB$ . Проведемо  $O_2E \parallel AB$ , тоді  $KL = r$ ,  $\triangle O_2KS \sim \triangle O_2EO_1$

$$\text{Звідси } \frac{KS}{EO_1} = \frac{O_2S}{O_2O_1}, \quad KS = \frac{EO_1 \cdot O_2S}{O_1O_2}$$

$$KS = \frac{(R-r)r}{R+r} = \frac{(3-1) \cdot 1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad LS = LK + KS = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Відповідь :  $\frac{3}{2}$

Завдання для самостійної роботи.

I.215.C.В крузі дано дві взаємно перпендикулярні хорди, кожна з яких ділиться іншою на два відрізки в 9 см і 5 см. Знайти відстань до кожної хорди від центра.

I.216.C Хорда перетинає діаметр під кутом  $30^\circ$  і ділить його на два відрізки в 9 см і 5 см. Знайти відстань від хорди до центра.

I.217.C. 3 однієї точки кола проведено взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на 6 см і на 12 см. Визначити їх довжини.

I.218.C. В колі, радіус якого дорівнює 24 см, визначити відстань від центра до хорди, що стягує дугу в  $120^\circ$ .

I.219.C. Бокова сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 3 см, кут при вершині дорівнює  $120^\circ$ . Визначити діаметр описаного кола.

I.220.C. Менша сторона прямокутника дорівнює 3 м, гострий кут між діагоналями дорівнює  $60^\circ$ . Знайти радіус описаного кола.

I.221.C. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 12 см і 9 см. Визначити радіус вписаного кола.

I.222.C. Радіус кола дорівнює 25 см, а дві паралельні хорди цього кола відповідно дорівнюють 14 см і 40 см. Визначити відстань між хордами.

I.223.C. В коло радіусом 9 см вписано прямокутний трикутник так, що один з катетів вдвічі ближчий до центра, ніж інший. Визначити катети.



I.224.C. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 15 см і 20 см. Визначити відстань між центрами кіл, якщо довжина їх спільної хорди дорівнює 24 см.

I.225.C. У рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 10 м і 6 м, а висота дорівнює 4 м. Визначити радіус описаного навколо цієї трапеції кола.

I.226.C. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 м і 6 м. Визначити радіус вписаного кола.

I.227.C. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 6 см. Визначити радіус кола, що дотикається до катетів цього трикутника і має центр на гіпотенузі.

I.228.C. Обчислити площу круга, якщо довжина його кола рівна  $\sqrt{\pi}$ .

I.229.C. Круговим кільцем називається частина площини, обмежена двома концентричними колами. Знайти площу кругового кільця, якщо його внутрішній і зовнішній діаметри відповідно дорівнюють 3 см і 5 см.

I.230.C. В колі радіусом 13 см проведено хорду довжиною 24 см. Обчислити довжину відрізка, що з'єднує середину хорди і центр кола.

I.231.C. Знайти площу круга, якщо його хорду довжиною 6 см буде видно із центра круга під кутом  $120^\circ$ .

I.232.C. Обчислити площу квадрата, вписаного в коло радіусом 8 см.

I.233.C. Навколо прямокутника зі сторонами 8 см і 5 см описано коло. Обчислити радіус цього кола і сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

I.234.C. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 34 см, а більша основа 50 см. Обчислити площу круга, вписаного в цю трапецію.

I.235.C. Сума двох сторін описаного чотирикутника дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола 5 см. Обчислити площу чотирикутника.

I.236.C. Обчислити довжини діагоналі і бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо відомо, що центр описаного навколо трапеції кола лежить на більшій основі.

I.237.C. Радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює 2 см. Знайти радіус кола, описаного навколо нього.

I.238.C. Обчислити довжину кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, якщо її основи мають довжини 40 см і 14 см.

I.239.C. Основи рівнобічної трапеції відносяться, як 4:9. Обчислити периметр трапеції, якщо довжина вписаного в неї кола дорівнює  $24\pi$ .

I.240.C. Коло описане навколо трикутника зі сторонами 14 см, 30 см, 40 см. Обчислити площу круга.

I.241.C. Сторони вписаного в коло чотирикутника дорівнюють 1 см, 4 см, 7 см, 8 см. Знайти його площу.

I.242.C. Периметр ромба 40 см, а відношення його діагоналей дорівнює 0,75. Обчислити довжину кола, вписаного в ромб.

I.243.C. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки, один з яких в 4 рази більший за інший. Обчислити площу ромба, якщо довжина цього кола 16 см.

I.244.Д. У колі проведено хорди  $AB$  і  $CD$ , які перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть довжину відрізка  $AC$ , якщо  $CM=3$  см,  $BM=9$  см,  $BD=12$  см.

I.245.Д. У колі проведено хорди  $AK$  і  $BM$ , які перетинаються в точці  $C$ . Знайдіть довжину відрізка  $KM$ , якщо  $AB=4$  см,  $BC=2$  см,  $KC=8$  см.

I.246.Д. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $AKPE$  так, що кут  $A$  у них спільний, а вершина  $P$  належить стороні  $BC$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $AB=6$  см,  $AC=3$  см.

I.247.Д. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $DMNA$  так, що кут  $A$  у них спільний, а вершина  $M$  належить стороні  $BC$ ,  $CM=6$  см,  $BM=4$  см,  $AB=20$  см. Знайдіть сторону ромба.

I.248.Д. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см, а відстань між їх центрами - 13 см. Знайдіть довжину їх спільної зовнішньої дотичної.

I.249.Д. Радіуси двох кіл дорівнюють 10 см і 2 см, а довжини їх спільної зовнішньої дотичної - 15 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

I.250.Д. Два кола з центрами  $O_1$  і  $O_2$ , радіуси яких дорівнюють 10 см і 16 см відповідно, мають зовнішній дотик у точці  $C$ . Пряма, що проходить через точку  $C$ , перетинає коло з центром  $O_1$  у точці  $A$ , а інше - в точці  $B$ . Знайдіть довжини хорд  $AC$  і  $BC$ , якщо  $AB = 39$  см.

I.251.Д. Два кола з центрами  $O_1$  і  $O_2$  - мають зовнішній дотик у точці  $C$ . Пряма, що проходить через точку  $C$ , перетинає коло з центром  $O_1$  у точці  $A$ , а інше коло - в точці  $B$ . Хорда  $AC$  дорівнює 12 см, а хорда  $BC$  - 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо  $O_1O_2 = 20$  см.

I.252.Д. У кут, величина якого становить  $60^\circ$ , вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них, якщо радіус меншого дорівнює 6 см.

I.253.Д. У кут, величина якого становить  $60^\circ$ , вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус меншого з них, якщо радіус більшого дорівнює 12 см.

I.254.В. а) 3 однієї точки до кола проведені січна й дотична. Сума їх дорівнює 15 см, а зовнішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчислити січну й дотичну.

б) 3 однієї точки проведено до кола січну й дотичну - Обчислити довжину зовнішнього і внутрішнього відрізків січної, якщо дотична дорівнює 18 см, а січна — 24 см.

I.255.В а) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну і січну. Дотична більша від внутрішнього і зовнішнього відрізків січної відповідно на 2 і 4 см. Обчислити довжину січної.

б) 3 однієї точки поза колом проведено до нього січну й дотичну. Сума їх дорівнює 30 см, а внутрішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчислити довжину січної й дотичної.

I.256.В. а) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити дотичну, якщо вона на 5 см більша від зовнішнього відрізка січної і на стільки ж менша від її внутрішнього відрізка.

б) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити їх довжину, якщо дотична на 20 см менша від внутрішнього відрізка січної і на 8 см більша від її зовнішнього відрізка.

I.257.В. а) Дотична й січна, що виходять з однієї точки, відповідно дорівнюють 20 і 40 см. Січна віддалена від центра на 8 см. Обчислити радіус кола.

б) Обчислити відстань від центра до тієї точки, з якої виходять дотична і січна, якщо вони відповідно дорівнюють 4 і 8, а січна віддалена від центра на 12 см.

## Відповіді. Вказівки. Розв'язки.

Частина 1. Планіметричні задачі.

**I.1.C.** 7см, 7см, 11см. **I.2.C.** 4см. **I.3.C.** 12см. **I.4.C.** 4см. **I.5.C.** 80°,50°,50° **I.6.C.** 60°,45°,75°. **I.7.C.**  $2+\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}+1$ . **I.8.C.** 13см. **I.9.C.** 7,5см. **I.10.C.** 2 см, 5 см.  
**I.11.C.** 36 см. **I.12.C.** 30° **I.13.C.** 60 см<sup>2</sup>. **I.14.C.** 240 см. **I.15.C.**  $7\frac{1}{17}$ . **I.16.C.** 4 см,  
 3 см. **I.17.C.**  $\sqrt{5}$  см. **I.18.C.**  $3\sqrt{5}$ ; 10 см; 11 см. **I.19.C.** 10 см. **I.20.C.** 39 см. **I.21.C.**  
 (18+6 $\sqrt{3}$ ) см; 18 $\sqrt{2}$  см; 12 $\sqrt{3}$ . **I.22.C.** 9,6 см. **I.23.C.** 4 см. **I.24.C.** 12,5 см; 12,5 см;  
 15 см. **I.25.C.** 5 см, 12 см, 13 см. **I.26.C.** 6 см, (20+20 $\sqrt{10}$ ) см. **I.27.C.** 24 м. **I.28.C.**  
 6 см, 6 см, 3,36 см. **I.29.C.** 2 $\sqrt{13}$  **I.30.C.**  $\sqrt{129}$  **I.31.C.**  $\sqrt{73-24\sqrt{2}}$  см. **I.32.C.** 13см,  
 15 см, 15 см. **I.33.C.** 12 см. **I.34.C.** 7 см, 8 см. **I.35.C.** 2 $\sqrt{37}$  см. **I.36.C.** 12  
 см. **I.37.C.** 3( $\sqrt{3}-1$ ) см,  $\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$  см. **I.38.Д.** 4 см, 8 см, 12 см. **I.40.Д.** 12 см<sup>2</sup>  
**I.41.Д.** 224 см<sup>2</sup> або 168 см<sup>2</sup>. **I.42.Д.** 75 см<sup>2</sup>. **I.43.Д.** 30 см<sup>2</sup>, 12 см<sup>2</sup>, 42 см<sup>2</sup>. **I.44.Д.**  
 270 см<sup>2</sup>. Вказівка. доповнити трикутник до паралелограма. **I.45.Д.** 75 см<sup>2</sup>.  
**I.46.Д.** 1 см. **I.47.Д.** 144 см<sup>2</sup>. **I.48.Д.** 4 см, 13 см, 15 см. **I.49.Д.** 4,8 см. **I.50.Д.** 288  
 см<sup>2</sup>. **I.51.Д.** (26 + 10 $\sqrt{13}$ ) см. **I.52.Д.** (20 + 12 $\sqrt{5}$ ) см. **I.53.Д.**  $\frac{34}{3}$  см. **I.54.Д.** 12 см,  
 16 см. **I.55.Д.** 2 $\sqrt{13}$  см. **I.56.Д.**  $\sqrt{601}$  см. **I.57.Д.** 8 см. **I.58.Д.** 16 см. **I.59.Д.** 120  
 см<sup>2</sup>. **I.60.Д.** 294 см<sup>2</sup>. **I.61.Д.** 240 см<sup>2</sup>. **I.62.Д.** 210 см<sup>2</sup>. **I.63.Д.**  $\frac{L \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$  **I.64.Д.**  
 $\frac{C \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}$  **I.65.Д.** 24 см. **I.66.Д.** 10 $\sqrt{3}$  см. **I.67.Д.** 18 см. **I.68.Д.** 10 см. **I.69.Д.**  
 4 $\sqrt{5}$  см. **I.70.Д.** 4 $\sqrt{10}$  см. **I.72.Д.** 84°, 12°. **I.73.Д.** 48 см. **I.74.Д.** 144 см. **I.75.Д.** 15  
 см. 24 см. **I.76.Д.** 26 см, 20 см. **I.77.Д.** 4 $\sqrt{13}$  см. **I.78.Д.** 4 $\sqrt{5}$  см. **I.79.Д.** 2 см.  
**I.80.Д.** 3 $\sqrt{2}$  см. **I.81.Д.** 300 см<sup>2</sup> **I.82.Д.** 480 см<sup>2</sup> **I.83.Д.** 20 см. **I.84.Д.** 20 см.  
**I.85.Д.**  $\frac{9\pi}{4}$  см<sup>2</sup>. **I.86.Д.**  $\frac{4225\pi}{64}$  см<sup>2</sup>. **I.87.Д.** 14 см, 14 см, 8 см. **I.88.Д.** 10 см, 11 см,  
 9 см. **I.89.Д.** 4 см. **I.90.Д.** 10 см. **I.91.Д.** 15 см. **I.92.Д.** 18 $\sqrt{2}$  см. **I.111.C.** 7 см,  
 $\sqrt{19}$  см. **I.112.C.** 2,4 см. **I.113.C.** 4 см, 12 см. **I.114.C.** 48 см<sup>2</sup>. **I.115.C.** 10 см.  
**I.116.C.** 12 см. **I.117.C.** 48 см. **I.118.C.** 150 см<sup>2</sup>. **I.119.C.** 5 см. **I.120.C.** 15 см,  
 35 см. **I.121.C.** 588 см<sup>2</sup> **I.122.C.** 4 см, 4 $\sqrt{3}$  см. **I.123.C.** 75 см<sup>2</sup>. **I.124.C.** 6 см, 18  
 см. **I.125.C.** 72 см. **I.126.C.** 12 $\sqrt{2}$  **I.127.C.** 156 см<sup>2</sup>. **I.128.C.** 60°, 120°. **I.129.C.**  
 13 см. **I.130.C.** 30°, 150°. **I.131.C.** 6 см. **I.132.C.** 16 см. **I.133.C.** 96 см<sup>2</sup>. **I.134.C.**

$60^\circ, 120^\circ$ . **I.135.C.**  $960 \text{ cm}^2$ . **I.136.C.**  $132 \text{ cm}$ . **I.137.C.**  $6 \text{ cm}, 6,5 \text{ cm}$ . **I.138.C.**  $42 \text{ cm}$ . **I.139.C.**  $243 \text{ cm}^2$  **I.140.C.**  $529 \text{ cm}^2$  **I.141.C.**  $16 \text{ cm}$ . **I.142.Д.**  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$  **I.143.Д.**  $24 \text{ cm}^2$ . **I.144.Д.**  $36 \text{ cm}^2$ . **I.145.Д.**  $12 \text{ cm}^2$ . **I.146.Д.**  $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . **I.147.Д.**  $360 \text{ cm}^2$ . **I.148.Д.**  $96 \text{ cm}^2$ . **I.149.Д.**  $108 \text{ cm}^2$  **I.150.Д.**  $\sqrt{7-2\sqrt{3}} \text{ cm}$ . **I.151.Д.**  $\sqrt{14-4\sqrt{3}} \text{ cm}$ . **I.152.Д.**  $24 \text{ cm}$ . **I.153.Д.**  $30 \text{ cm}$ . **I.154.Д.**  $162 \text{ cm}^2$ . **I.155.Д.**  $90 \text{ cm}^2$ . **I.156.Д.**  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ . **I.157.Д.**  $2a \cos \frac{\beta}{2}, 2a \sin \frac{\beta}{2}$ . **I.158.Д.**  $52 \text{ cm}$ . **I.159.Д.**  $864 \text{ cm}^2$ . **I.160.Д.**  $216 \text{ cm}^2$ . **I.161.Д.**  $600 \text{ cm}^2$ . **I.162.Д.**  $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . **I.163.Д.**  $36\sqrt{5} \text{ cm}^2$ . **I.164.Д.**  $12\sqrt{5} \text{ cm}, 6\sqrt{5} \text{ cm}$ . **I.165.Д.**  $10\sqrt{29} \text{ cm}, 4\sqrt{29} \text{ cm}$ . **I.166.Д.**  $90\sqrt{3} \text{ cm}^2$  **I.167.Д.**  $195 \text{ cm}^2$ . **I.168.Д.**  $10 \text{ cm}$ . **I.169.Д.**  $2\sqrt{57} \text{ cm}$ . **I.170.Д.**  $80 \text{ cm}$ . **I.171.Д.**  $60 \text{ cm}$ . **I.172.Д.**  $8 \text{ cm}$ . **I.173.Д.**  $12 \text{ cm}$ . **I.174.Д.**  $56\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . **I.175.Д.**  $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . **I.176.Д.**  $128\sqrt{6} \text{ cm}^2$ . **I.177.Д.**  $45\sqrt{15} \text{ cm}^2$ . **I.178.Д.**  $\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 2\sqrt{2}$ . **I.179.Д.**  $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ . **I.180.Д.**  $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}$ . **I.181.Д.**  $\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{15}$  **I.182.Д.**  $10 \text{ cm}, 18 \text{ cm}$ . **I.183.Д.**  $15 \text{ cm}, 25 \text{ cm}$ . **I.184.Д.**  $16 \text{ cm}$ . **I.185.Д.**  $4 \text{ cm}$ . **I.186.Д.**  $6 \text{ cm}$ . **I.187.Д.**  $6 \text{ cm}$ . **I.188.Д.**  $18 \text{ cm}, 21 \text{ cm}$ . **I.189.Д.**  $6 \text{ cm}, 12 \text{ cm}$ . **I.190.Д.**  $24 \text{ cm}$  **I.191.Д.**  $6 \text{ cm}$ . **I.192.Д.**  $10 \text{ cm}, 16 \text{ cm}$ . **I.193.Д.**  $14 \text{ cm}, 20 \text{ cm}$ . **I.194.Д.**  $8 \text{ cm}$ . **I.195.Д.**  $6 \text{ cm}$ . **I.215.C.**  $2 \text{ cm}$ . **I.216.C.**  $1 \text{ cm}$ . **I.C.**  $12 \text{ cm}$  і  $24 \text{ cm}$ . **I.218.C.**  $12 \text{ cm}$ . **I.219.C.**  $6 \text{ cm}$ . **I.220.C.**  $3 \text{ m}$ . **I.221.C.**  $3 \text{ m}$ . **I.222.C.**  $39 \text{ cm}$  або  $9 \text{ cm}$  **I.223.C.**  $\frac{18}{\sqrt{5}} \text{ cm}$  і  $\frac{36}{\sqrt{5}} \text{ cm}$ . **I.224.C.**  $25 \text{ m}$ . **I.225.C.**  $5 \text{ m}$ . **I.226.C.**  $2 \text{ m}$ . **I.227.C.**  $4 \text{ cm}$ . **I.228.C.**  $16$  **I.229.C.**  $4\pi \text{ cm}^2$ . **I.230.C.**  $5 \text{ cm}$ . **I.231.C.**  $12 \text{ cm}^2$ . **I.232.C.**  $128 \text{ cm}^2$ . **I.233.C.**  $5 \text{ cm}, 5\sqrt{3} \text{ cm}$ . **I.237.C.**  $4 \text{ cm}$ . **I.238.C.**  $50 \text{ cm}$ . **I.239.C.**  $104 \text{ cm}$ . **I.240.C.**  $625\pi \text{ cm}^2$ . **I.241.C.**  $18 \text{ cm}^2$ . **I.242.C.**  $2,4\pi \text{ cm}$ . **I.243.C.**  $640 \text{ cm}^2$ . **I.244.Д.**  $4 \text{ cm}$ . **I.245.Д.**  $16 \text{ cm}$ . **I.246.Д.**  $2 \text{ cm}$ . **I.247.Д.**  $12 \text{ cm}$ . **I.248.Д.**  $12 \text{ cm}$ . **I.249.Д.**  $17 \text{ cm}$ . **I.250.Д.**  $15 \text{ cm}, 24 \text{ cm}$ . **I.251.Д.**  $8 \text{ cm}, 12 \text{ cm}$ . **I.252.Д.**  $18 \text{ cm}$ . **I.253.Д.**  $4 \text{ cm}$ .

## Список використаної та рекомендованої літератури.

1. Генденштейн Л.Є., Єршова А.П. Наочний довідник з геометрії. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1997. – 96 с.
2. Геометрія 7 – 11. Планіметрія. Стереометрія. Збірник задач / Гайштут О.Г. – К.: КІМО, 1999. – 144 с.
3. Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних шкіл, ліцеїв і гімназій / Литвиненко Г.М., Собко М.С. – К.: Освіта, 1993. 80 с.
4. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас. За редакцією З.І. Слєпкань. Харків: Гімназія, 2002. – 176 с.
5. Кушнір І.А., Фінкельштейн Л.П. Математика в задачах і прикладах: 101 порада абітурієнту. – К.: Факт, 2001. - 304 с.
6. Педагогіка та психологія : завдання та тести. посібник – довідник для вступників до вищих навчальних закладів. К.: Генеза, 1993. – Ч.1. 208 с. Ч.2. – 90 с.
7. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навч. – методичний посібник. – К.: Магістр – S, 1998. – 256 с.
8. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И.Сканави. – Минск.: Высшей. шк., 1990. - 528 с. (на укр. яз.)

## ДОДАТКИ

Додаток А

Програма спецкурсу  
**"Вибрані питання елементарної математики"**  
 для учнів 10-11 класів із профільним та поглибленим вивченням математики

Програма спецкурсу  
 Фізико-математичний, технічний профіль

10 клас      70 годин

№	Розділ	Кількість годин
1.	Планіметричні фігури та їх властивості. Залік.	32
2.	Числові послідовності. Прогресії.	12
3.	Цілі раціональні рівняння з параметрами. Залік.	26

11 клас      70 годин

№	Розділ	Кількість годин
1.	Метод математичного моделювання. Задачі на складання рівнянь.	20
2.	Задачі оптимізації. Залік.	12
3.	Побудова графіків функцій за правилами перетворення. Залік.	12
4.	Конкурсні задачі для абітурієнтів. Залік.	26

Педагогічний профіль

11 клас      35 годин

№	Розділ	Кількість годин
1.	Планіметричні фігури та їх властивості.	7
2.	Числові послідовності.	4
3.	Цілі раціональні рівняння з модулем та параметрами. Залік.	4 1
4.	Метод математичного моделювання. Задачі на складання рівнянь.	6
5.	Побудова графіків функцій за правилами перетворення. Залік	6 1
6.	Конкурсні задачі для абітурієнтів.	6

## Календарне планування занять спецкурсу 10 клас

### Розділ 1. Планіметричні фігури та їх властивості. Залік. 32 години.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
1.	лекція	Основні теореми й формули планіметрії.	2
2.	лекція/ практичне	Трикутник. Види трикутників: рівнобедрений, рівносторонній, прямокутний.	2
3.	практичне	Задачі без додаткових побудов, на застосування однієї-двох теорем.	2
4.	лекція/ практичне	Особливі точки в трикутнику: центр кола, описаного навколо трикутника; центр кола, вписаного в трикутник; центр позавписаного кола; точка перетину меридіан; точка перетину висот.	4
5.			
6.	лекція/ практичне	Особливі лінії в трикутнику: середня лінія трикутника; точка Ейлера; коло дев'яти точок.	2
7.	практичне	Магічні трикутники та їх властивості.	2
8.	практичне	Метод допоміжного елемента при розв'язанні планіметричних задач: відрізок, площа, кут, периметр.	2
9.	лекція/ практичне	Перетворення подібностей, його властивості. Застосування подібності у процесі розв'язування задач. "Очевидна" і "прихована" подібність.	2
10.	практичне	Поняття площі фігури. Знаходження площ фігур.	2
11.	лекція/ практичне	Цікаві теореми геометрії: різні доведення теореми Піфагора, узагальнення теореми Піфагора. Теореми Стюарта, Чеви, Менелая та Птоломея.	4
12.			
13.	практичне	Застосування теорем у процесі розв'язування задач.	2
14.	лекція/ практичне	Коло в задачах планіметрії. Властивості хорд, що перетинаються; дотична й січна, проведені до кола з однієї точки.	2
15.	практичне	Метод допоміжного кола.	2
16.	практичне	Залік.	2

### Розділ 2. Числові послідовності. Прогресії. 12 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
17.	лекція/ практичне	Історія розвитку поняття про число. Несумірні відрізки та ірраціональні числа. Від'ємні числа й нуль. Дійсні числа. Поняття комплексного числа.	2
18.	практичне	Числові послідовності.	2
19.	лекція/ практичне	Прогресії: арифметична й геометрична.	2
20.	практичне	Текстові задачі на прогресії.	2
21.	практичне	Текстові задачі на прогресії.	2
22.	практичне	Конкурсні задачі підвищеної складності на прогресії.	2



## Розділ 3. Цілі раціональні рівняння з параметрами. Залік. 26 годин

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
23.	лекція	Параметр. Рівняння з параметрами. Основні поняття.	2
24.	лекція/ практичне	Лінійні рівняння. Аналітичні методи розв'язання рівнянь з параметрами.	2
25.	практичне	Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами.	2
26.	практичне	Квадратні рівняння. Розв'язування квадратних рівнянь. Дослідження квадратного тричлена.	2
27.	лекція/ практичне	Квадратні рівняння з параметрами. Аналітичні способи розв'язування рівнянь.	2
28.	практичне	Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами.	2
29.	практичне	Комплексні задачі з теми: "Квадратні рівняння з параметрами".	4
30.			
31.	лекція/ практичне	Графічні методи розв'язування рівнянь із параметрами.	2
32.	практичне	Розв'язування конкурсних задач підвищеної складності, що містять параметр.	4
33.			
34.	практичне	Розв'язування задач. Узагальнююче заняття.	2
35.	практичне	Залікове заняття.	2

*11 клас*

## Розділ 4. Метод математичного моделювання на складання рівнянь. 20 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
1.	лекція	Метод математичного моделювання. Приклади математичних моделей.	2
2.	лекція/ практичне	Основні типи задач на складання рівнянь: задачі з однойменними й різнойменними величинами; задачі на суміші й сплави; задачі на рух і спільну роботу. Різні способи розв'язування задач.	4
3.			
4.	практичне	Задачі на залежність між компонентами арифметичних дій.	2
5.	лекція/ практичне	Задачі на рух тіл.	4
6.			
7.	лекція/ практичне	Задачі на спільну роботу.	4
8.			
9.	практичне	Графічні моделі задач на рух і на спільну роботу.	2
10.	практичне	Конкурсні задачі підвищеної складності на складання рівнянь.	2

## Розділ 5. Задачі оптимізації. Залік. 12 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
11.	лекція/ практичне	Поняття найбільшого, найменшого значення функції на відрізку. Типи екстремальних задач.	2
12.	практичне	Алгебраїчні задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2
13.	практичне	Планіметричні задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2
14.	практичне	Текстові задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2
15.	практичне	Задачі практичного та фізичного змісту на знаходження оптимальних значень.	2
16.	практичне	Залік.	2

## Розділ 6. Побудова графіків функцій за правилами перетворень. Залік. 12 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
17.	лекція	Функції. Способи задання, графіки, властивості функції. Правила перетворень графіків функцій.	2
18.	практичне	Побудова графіків функцій за правилами перетворення.	2
19.	практичне	Лінійні і квадратичні функції, що містять знак модуля. Побудова графіків функцій за правилами перетворення.	2
20.	практичне	Побудова графіків складних функцій за правилами перетворення: тригонометричні, показникові, логарифмічні функції.	4
21.			
22.	практичне	Залік.	2

## Розділ 7. Конкурсні задачі для абітурієнтів. Залік. 26 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кількість годин
23.	лекція	Основні змістовні лінії шкільного курсу математики: числа, тотожності, функції.	2
24.	лекція/ практичне	Рівняння й нерівності у шкільному кірсі математики. Класифікація рівнянь, основні способи розв'язання окремих видів рівнянь. Метод інтервалів – універсальний спосіб розв'язування нерівностей.	4
25.			
26.	практичне	Типові варіанти вступних екзаменів до вузів. Комплексна контрольна робота.	2
27.	практичне	Варіанти вступних завдань для вступників на фізико-математичні спеціальності педагогічних вузів.	4
28.			
29.	практичне	Варіанти конкурсних завдань з математики для абітурієнтів економічних спеціальностей вузів.	4
30.			
31.	практичне	Варіанти конкурсних завдань з математики для абітурієнтів технічних вузів	4
32.			
33.	практичне	Розв'язування конкурсних задач.	2
34.	практичне	Розв'язування конкурсних задач.	2
35.	практичне	Залік.	2

## Список використаної та рекомендованої літератури

До першого розділу:

- 1.1. Лов'янова І.В. Вибрані питання елементарної математики. Ч.1. Планіметричні задачі. – Кр. Ріг, 2003. – 34 с.
- 1.2. Фінкельштейн Л.П. Математика в задачах і прикладах: 101 порада абітурієнту. – К.: Факт, 2001. – 304 с.
- 1.3. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії Навч.-метод. посібник. – К.: Магістр-S, 1998. – 256 с.
- 1.4. Газета "Математика" № 42-2000, № 12-2000, № 3-2000.

До другого розділу:

- 2.1. Агєєв Ю.О., Вінниченко Л.Ф. Навчально-методичний посібник з математики (6-11 клас).Збірник задач та прикладів. – Дніпропетровськ, 2001. – 224 с.
- 2.2. Газета "Математика" № 1-2002, № 3-2002, № 47-2000.

До третього розділу:

- 3.1. Ястребинецький Г.А. Задачі с параметрами. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.
- 3.2. Маслай Г.С., Гоголева Л.О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами // Математика. – 2000. – № 21-22 (вкладка).
- 3.3. Газета "Математика" № 6-1999, № 39-2002, № 4-2001, № 17-2001, № 19-2002.
- 3.4. Газета "Математика" (рус.) № 42-1994.
- 3.5. Журнал "Математика в школі" № 10-2003 с. 36, № 3-2002 с. 39, № 5-2002 с. 21, № 3-2000 с. 18.

До четвертого розділу:

- 4.1. Горстко А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М.: Знание, 1991. – 160 с.
- 4.2. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.
- 4.3. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
- 4.4. Газета "Математика" № 43-2001, 44-2001, 45-2001, 9-2002, 7-2000, 4-1999, 13-1999, 39-2001.
- 4.5. Газета "Математика" (рус.) № 14-1997.
- 4.6. Журнал "Математика в школі" № 6-2003.

До п'ятого розділу:

- 5.1. Мерзляк А.Г. и др. Учимся решать задачи по началам анализа. – К.: Магістр-S, 1998. – 416 с.

До шостого розділу:

- 6.1. Агєєв Ю.О., Вінниченко Л.Ф. Навчально-методичний посібник з математики (6-11 клас).Збірник задач та прикладів. – Дніпропетровськ, 2001. – 224 с.

До сьомого розділу:

- 7.1. Турчин В.М., Турчина Н.В. Математика. Досвід вступних іспитів в ДДУ у 1999 році. – Дніпропетровськ, 2000.
- 7.2. Мерзляк А.Г. та інші Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів і абітурієнтів. – Харків: "Гімназія", "Ранок", 1998. – 320 с.
- 7.3. Варіанти вступних іспитів до КДПУ.
- 7.4. Журнал "Математика в школі" (варіанти вступних іспитів у ВУЗи).

**Збірники задач:**

1. Збірник задач з математики для вступників до вузів / За ред. М.І.Сканові. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учебное пособие / Под ред. А.И. Прилипко. – М.: Высшая школа, 1989. – 271 с.
3. Лурье М.В. Задачи на составление уравнений. – М.: Наука, 1980. – 96 с.
4. Математика. Середня школа: підсумкова перевірка знань і вмінь учнів. Екзаменаційні завдання. Ч. 2. Укладач: Капіносов А.М. – Дніпропетровськ, 1997.
5. Екзаменаційні завдання з математики для шкіл, ліцеїв та гімназій з поглибленим вивченням математики. – Тернопіль, 1996. – 72 с.
6. Литвиненко Г.М. та інші Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. – Харків, 1999. – 172 с.

**Календарне планування занять спецкурсу  
"Вибрані питання елементарної математики"  
на 2004-2005 навчальний рік**

Розділ 1. Планіметричні фігури та їх властивості. Залік. 32 години.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
1.	лекція	Основні теореми й формули планіметрії.	2			
2.	лекція/ практичне	Трикутник. Види трикутників: рівнобедрений, рівносторонній, прямокутний.	2			
3.	практичне	Задачі без додаткових побудов, на застосування однієї-двох теорем.	2			
4.	лекція/ практичне	Особливі точки в трикутнику: центр кола, описаного навколо трикутника; центр кола, вписаного в трикутник; центр позавписаного кола; точка перетину меридіан; точка перетину висот.	4			
5.						
6.	лекція/ практичне	Особливі лінії в трикутнику: середня лінія трикутника; точка Ейлера; коло дев'яти точок.	2			
7.	практичне	Магічні трикутники та їх властивості.	2			
8.	практичне	Метод допоміжного елемента при розв'язанні планіметричних задач: відрізок, площа, кут, периметр.	2			
9.	лекція/ практичне	Перетворення подібності, його властивості. Застосування подібності у процесі розв'язування задач. "Очевидна" і "прихована" подібність.	2			
10.	практичне	Поняття площі фігури. Знаходження площ фігур.	2			
11.	лекція/ практичне	Цікаві теореми геометрії: різні доведення теореми Піфагора, узагальнення теореми Піфагора. Теореми Стюарта, Чеви, Менелая та Птоломея.	4			
12.						
13.	практичне	Застосування теорем у процесі розв'язування задач.	2			
14.	лекція/ практичне	Коло в задачах планіметрії. Властивості хорд, що перетинаються; дотична й січна, проведені до кола з однієї точки.	2			
15.	практичне	Метод допоміжного кола.	2			
16.	практичне	Залік.	2			

## Розділ 2. Числові послідовності. Прогресії. 12 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
17.	лекція/ практичне	Історія розвитку поняття про число. Несумірні відрізки та ірраціональні числа. Від'ємні числа й нуль. Дійсні числа. Поняття комплексного числа.	2			
18.	практичне	Числові послідовності.	2			
19.	лекція/ практичне	Прогресії: арифметична й геометрична.	2			
20.	практичне	Текстові задачі на прогресії.	2			
21.	практичне	Текстові задачі на прогресії.	2			
22.	практичне	Конкурсні задачі підвищеної складності на прогресії.	2			

## Розділ 3. Цілі раціональні рівняння з параметрами. Залік. 26 годин

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
23.	лекція	Параметр. Рівняння з параметрами. Основні поняття.	2			
24.	лекція/ практичне	Лінійні рівняння. Аналітичні методи розв'язання рівнянь з параметрами.	2			
25.	практичне	Розв'язування лінійних рівнянь з параметрами.	2			
26.	практичне	Квадратні рівняння. Розв'язування квадратних рівнянь. Дослідження квадратного тричлена.	2			
27.	лекція/ практичне	Квадратні рівняння з параметрами. Аналітичні способи розв'язування рівнянь.	2			
28.	практичне	Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами.	2			
29.	практичне	Комплексні задачі з теми: "Квадратні рівняння з параметрами".	4			
30.						
31.	лекція/ практичне	Графічні методи розв'язування рівнянь із параметрами.	2			
32.	практичне	Розв'язування конкурсних задач підвищеної складності, що містять параметр.	4			
33.						
34.	практичне	Розв'язування задач. Узагальнююче заняття.	2			
35.	практичне	Залікове заняття.	2			

**11 клас****Розділ 4. Метод математичного моделювання на складання рівнянь. 20 годин.**

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
1.	лекція	Метод математичного моделювання. Приклади математичних моделей.	2			
2.	лекція/ практичне	Основні типи задач на складання рівнянь: задачі з однойменними й різнойменними величинами; задачі на суміші й сплави; задачі на рух і спільну роботу. Різні способи розв'язування задач.	4			
3.						
4.	практичне	Задачі на залежність між компонентами арифметичних дій.	2			
5.	лекція/	Задачі на рух тіл.	4			
6.	практичне					
7.	лекція/	Задачі на спільну роботу.	4			
8.	практичне					
9.	практичне	Графічні моделі задач на рух і на спільну роботу.	2			
10.	практичне	Конкурсні задачі підвищеної складності на складання рівнянь.	2			

**Розділ 5. Задачі оптимізації. Залік. 12 годин.**

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
11.	лекція/ практичне	Поняття найбільшого, найменшого значення функції на відрізку. Типи екстремальних задач.	2			
12.	практичне	Алгебраїчні задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2			
13.	практичне	Планіметричні задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2			
14.	практичне	Текстові задачі на відшукування найбільших (найменших) значень.	2			
15.	практичне	Задачі практичного та фізичного змісту на знаходження оптимальних значень.	2			
16.	практичне	Залік.	2			

## Розділ 6. Побудова графіків функцій за правилами перетворень. Залік. 12 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
17.	лекція	Функції. Способи задання, графіки, властивості функції. Правила перетворень графіків функцій.	2			
18.	практичне	Побудова графіків функцій за правилами перетворення.	2			
19.	практичне	Лінійні і квадратичні функції, що містять знак модуля. Побудова графіків функцій за правилами перетворення.	2			
20.	практичне	Побудова графіків складних функцій за правилами перетворення: тригонометричні, показникові, логарифмічні функції.	4			
21.						
22.	практичне	Залік.	2			

## Розділ 7. Конкурсні задачі для абітурієнтів. Залік. 26 годин.

№ п/п	Вид заняття	Тема заняття	Кільк. годин	Календарні строки		
23.	лекція	Основні змістовні лінії шкільного курсу математики: числа, тотожності, функції.	2			
24.	лекція/ практичне	Рівняння й нерівності у шкільному кірсі математики. Класифікація рівнянь, основні способи розв'язання окремих видів рівнянь. Метод інтервалів – універсальний спосіб розв'язування нерівностей.	4			
25.						
26.	практичне	Типові варіанти вступних екзаменів до вузів. Комплексна контрольна робота.	2			
27.	практичне	Варіанти вступних завдань для вступників на фізико-математичні спеціальності педагогічних вузів.	4			
28.						
29.	практичне	Варіанти конкурсних завдань з математики для абітурієнтів економічних спеціальностей вузів.	4			
30.						
31.	практичне	Варіанти конкурсних завдань з математики для абітурієнтів технічних вузів	4			
32.						
33.	практичне	Розв'язування конкурсних задач.	2			
34.	практичне	Розв'язування конкурсних задач.	2			
35.	практичне	Залік.	2			



## Зміст

Передмова . . . . .	3
I.1. Трикутники . . . . .	4
- довідковий відділ . . . . .	4
- приклади розв'язування задач . . . . .	8
- завдання для самостійного розв'язування . . . . .	8
I.2. Чотирикутники . . . . .	16
- довідковий відділ . . . . .	16
- приклади розв'язування задач . . . . .	19
- завдання для самостійного розв'язування . . . . .	19
I.3. Коло . . . . .	27
- довідковий відділ . . . . .	27
- приклади розв'язування задач . . . . .	28
- завдання для самостійного розв'язування . . . . .	28
Відповіді. Вказівки. Розв'язки. . . . .	31
Список використаної та рекомендованої літератури . . . . .	33
Додатки . . . . .	34

І.В.Лов'янова

**Вибрані питання елементарної математики**

**Частина 1. Планіметричні задачі**

Методична розробка для учнів 10 – 11 класів  
профільної школи