Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

Лов'янова І. В.

ВИБРАНІ МЕТОДИ І ПРИЙОМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

(матеріали для факультативних занять та курсів за вибором)
11 КЛАС

методичний посібник

Черкаси
2014

УДК373.5.016:514
ББК 74.262

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, доцент, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

А. М. Капіносов – кандидат педагогічних наук, доцент, Криворізький педагогічний інститут ДВНЗ «Криворізький національний університет»

Б. Й. Окунєв – вчитель математики ЗОШ № 15, м. Черкаси

Рекомендовано до друку вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 6 від 27 березня 2014)

Л 68 Лов'янова І. В.
Вибрані методи і прийоми розв'язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 11 клас / І. В. Лов'янова; за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. – 2014. – 68 с.
ISBN

Посібник може бути використаний як в класах універсального профілю для проведення факультативних занять або курсів за вибором, так і учнями інших профілів для підготовки до ЗНО, самостійної роботи з вказаних тем, тощо.

Посібник призначений для вчителів математики ЗОШ, студентів вищих педагогічних навчальних закладів, аспірантів, учнів старшої школи.

УДК373.5.016:514
ББК 74.262

ISBN

Зміст

ПЕРЕДМОВА 4
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи методів розв’язування геометричних задач 5
§ 1. «Подовження» медіани 5
§ 2. Метод допоміжної площі 6
§ 3. Метод допоміжного кола 7
§ 4. Застосування геометричних перетворень до розв’язування задач: 11
а) застосування центральної симетрії 11
б) застосування осьової симетрії 12
в) застосування перетворення повороту 13
г) застосування гомотетії 14
§ 5. Метод координат 15
§ 6. Застосування векторів 17
РОЗДІЛ 2. Методичні рекомендації до занять курсів за вибором 20
§ 1. Тема «Метод допоміжного кола» 20
§ 2. Тема «Метод допоміжної площі» 29
§ 3. Тема «Метод «подовження» медіани» 32
§ 4. Тема «Застосування центральної та осьової симетрії » 38
§ 5. Тема «Застосування гомотетії та повороту» 44
§ 6. Тема «Метод координат. Векторний метод » 50
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 60
ДОДАТКИ 61

ПЕРЕДМОВА

Концепцією профільного навчання в старшій школі визначено, що профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання. Одним із основних критеріїв сучасного профільного навчання є «предметний» підхід до диференціації. Виходячи з нього сьогодні у школах використовують навчальний план трикомпонентної структури: базові навчальні предмети, профільні предмети і курси за вибором. Курси за вибором – це навчальні курси, які доповнюють навчальні предмети сприяють формуванню індивідуальної освітньої траєкторії школярів, орієнтують на усвідомлений та відповідальний вибір майбутньої професії. Курси за вибором надають можливості для організації творчої роботи учнів через систему індивідуальних завдань професійної спрямованості. Це форма організації навчання, що дозволяє реалізувати не тільки математичну підготовку учнів, а також і процес формування якостей особистості, є курси за вибором (курси, що учні вибирають із запропонованого набору у відповідності зі своїми інтересами і потребами). Основна функція курсів за вибором – профорієнтаційна. Вимоги до організації вивчення курсів: їх достатня кількість для визначення напряму профільного навчання; поступове введення за рахунок годин варіативного освітнього компоненту; поділ класу на групи, однорідні за підготовленістю та інтересами учнів.

Даний методичний посібник створено у відповідності із діючими програмами курсів за вибором та факультативів. Матеріали посібника містять теоретичні відомості щодо методів розв’язування задач: метод «подовженої» медіани, метод допоміжного кола, метод допоміжної площі, застосування центральної та осьової симетрії, застосування гомотетії та повороту, метод координат, векторний метод. А також розробки занять курсів за вибором в класах універсального профілю за програмою факультативного курсу для учнів 11 класів «Методи розв'язування геометричних задач» з аналогічних тем.

РОЗДІЛ 1.
Теоретичні основи методів розв'язування геометричних задач

§ 1. «Подовження» медіани

Додаткова побудова – один із найбільш ефективних прийомів розв'язання геометричних задач. Проте такі побудови найчастіше пов'язані з серйозними труднощами. Добре, коли умова задачі підказує, як доповнити креслення.

У багатьох задачах, пов'язаних із медіаною, її «подвоєння» або «подовження» на третину дає результат. Наведемо характерний приклад.

Задача.

У трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ M і N – середини основ BC і AD. $AC = \sqrt{15}$, $BD = 1$, $MN = 2$. Знайти площу трапеції.

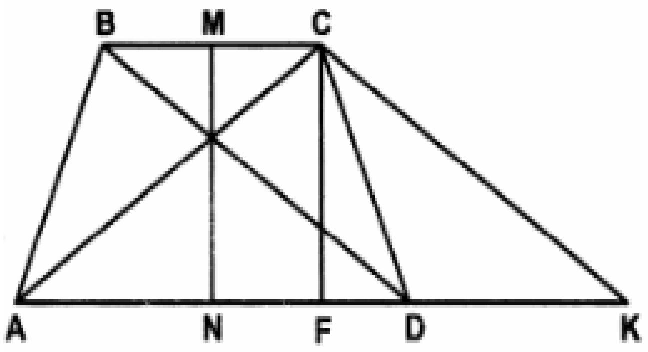

Рис. 1

Розв'язання.

На прямій AD (рис. 1) відкладемо відрізок $DK = BC$.

Оскільки $DBCK$ – паралелограм, то $BD = CK = 1$. Проведемо $CF \parallel MN$. Нескладно показати, що F – середина AK. Окрім того, $S_{BAC} = S_{DBC}$ (рівні основи і висоти). Тоді очевидно, що $S_{ABCD} = S_{ACK}$. Отже, задача звелася до пошуку площі трикутника ACK за двома сторонами $BD = 1$, $CK = 1$ і медіаною до третьої сторони $CF = 2$. «Подвоїмо» медіану CF (рис. 2). Оскільки $AF = FK$ і $CF = FT$, то $ACKT$ – паралелограм. За теоремою про сторони і діагоналі паралелограма

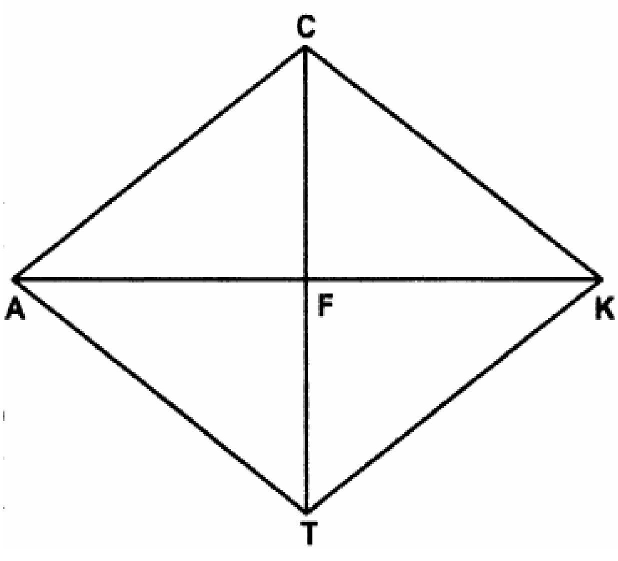

Рис. 2

$$AK^2 + CT^2 = 2\left(AC^2 + CK^2\right).$$

Звідси $AK = 4$.

Далі просто $\left(\angle ACK = 90^\circ\right)$. Відповідь: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

§ 2. Метод допоміжної площі

Ключем до розв’язання багатьох задач є робота з поняттям, на яке в умові немає навіть натяку. Нерідко такою допоміжною величиною є площа.

Задача 1. У прямокутному трикутнику ABC $\left(\angle C = 90^0\right)$ CD – висота (рис.3). Радіус кіл, вписаних у трикутники ACD, DCB, відповідно дорівнюють r_1, r_2. Знайдіть радіус вписаного кола в трикутник ABC.

Розв’язання.

Нехай площі трикутників ACD, DCB, ABC відповідно дорівнюють S_1, S_2, S. Зрозуміло, що ΔACD подібний ΔABC і ΔCBD подібний ΔABC.

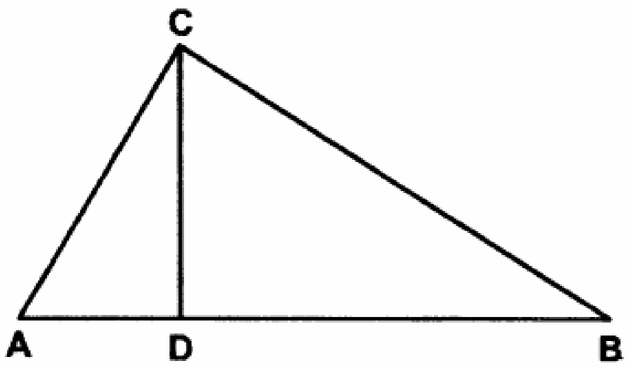

Рис. 3

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів. Маємо: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{r_1^2}{r^2}, \dfrac{S_2}{S} = \dfrac{r_2^2}{r^2}$, де r – радіус кола, вписаного в трикутник ABC. Звідси $\dfrac{S_1 + S_2}{S} = \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2}$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Задача 2. У трикутнику ABC вписано два кола, які дотикаються одне одного так, що одне дотикається сторін AB і AC, а інше – AB і BC. Довести, що сума радіусів цих кіл більша радіуса кола, вписаного в даний трикутник.

Розв’язання.

Проведемо дотичні CD_1 і CD_2 до даних кіл (рис. 4). Зрозуміло, що $S_{ABC} \le S_{ACD_2} + S_{BCD_1}$.Тоді

$pr \le p_1 r_1 + p_2 r_2$, де p, p_1, p_2, r, r_1, r_2 – півпериметри і радіуси вписаних кіл відповідно трикутників ABC, ACD_1, D_2CB.

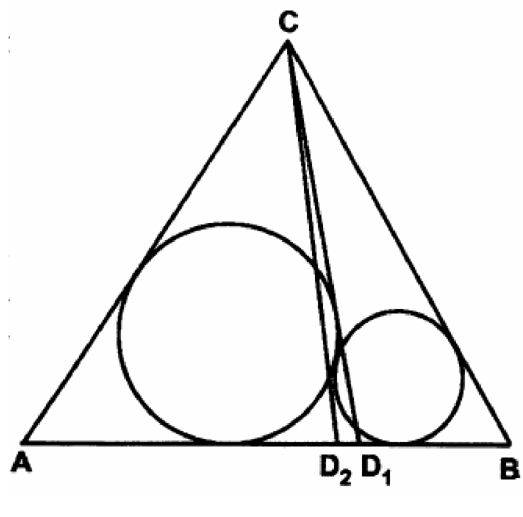

Рис. 4

Маємо $r \le \dfrac{p_1}{p} \cdot r_1 + \dfrac{p_2}{p} \cdot r_2$. Оскільки $p_1 < p$ і $p_2 < p$, то $\dfrac{p_1}{p} < 1$ і $\dfrac{p_2}{p} < 1$. Звідси $r < r_1 + r_2$.

§ 3. Метод допоміжного кола

Певно, допоміжне коло – одна з найбільш естетичних допоміжних побудов. Найімовірніше, це пов’язано з тим, що «побачити» коло там, де його немає, вже само собою нетривіально. Проте ми сподіваємося, що після вивчення цього параграфа у читача частіше виникатимуть «кола перед очима».

Ключова задача 1. Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює $180°$, то навколо нього можна описати коло.

Розв’язання.

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Побудуємо коло, яке проходить через точки A, B і C (це завжди можливо). Припустимо, що це коло не проходить через точку D, а перетинає сторону AD в точці D_1 – рис.5 (випадок, коли коло перетинає продовження сторони AD, розглядається аналогічно). Оскільки чотирикутник $ABCD_1$ вписаний у коло, то $\angle ABC + \angle AD_1C = 180°$. Звідси $\angle D_1 = \angle D$, чого бути не може, оскільки $\angle AD_1C$ – зовнішній для трикутника CDD_1. Отже, побудоване коло проходить через точку D.

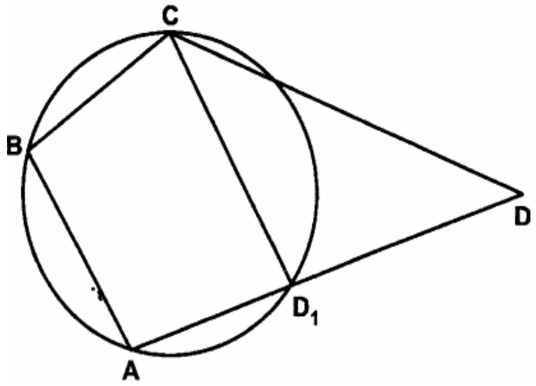

Рис. 5

Задача 1. Довести, що висоти AH_1, BH_2, CH_3 гострокутного трикутника ABC ділять навпіл кути трикутника $H_1H_2H_3$.

Розв’язання.

Оскільки $\angle AH_3H + \angle HH_2A = 180°$, то навколо чотирикутника AH_3HH_2 можна описати коло (рис. 6). Тоді $\angle H_3AH = \angle H_3H_2H$ як вписані, що спираються на одну дугу. Аналогічно доводять, що $\angle HH_2H_1 = \angle H_1CH$. Але $\angle BAH = \angle BCH$, оскільки вони доповнюють кут ABC до $90°$. Звідси $\angle H_3H_2H = \angle H_1H_2H$. Аналогічно доводять, що $\angle H_3H_1H = \angle H_2H_1H$ і $\angle H_1H_3H = \angle H_2H_3H$.

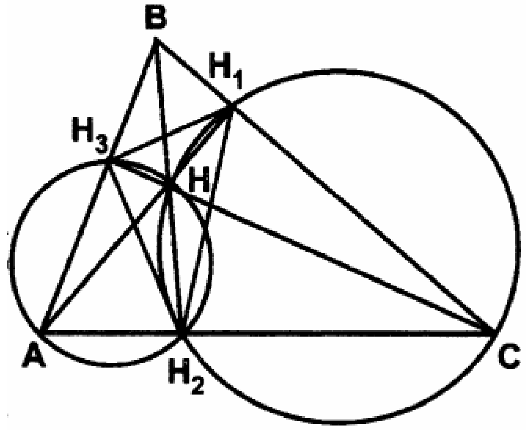

Рис. 6

Задача 2. У трикутнику ABC $\angle B = 60°$, AA_1 і CC_1 – бісектриси, що перетинаються в точці O (рис. 7). Доведіть, що $OA_1 = OC_1$.

Розв'язання.

$\angle C_1OA_1 = \angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120°.$

Отже, $\angle C_1BA_1 + \angle C_1OA_1 = 180°$, тобто навколо чотирикутника OC_1BA_1 можна описати коло. Оскільки O – точка перетину бісектрис трикутника, то $\angle C_1BO = \angle OBA_1$. Таким чином $\cup C_1O = \cup OA_1$, а рівні дуги стягують рівні хорди, тобто $OC_1 = OA_1$.

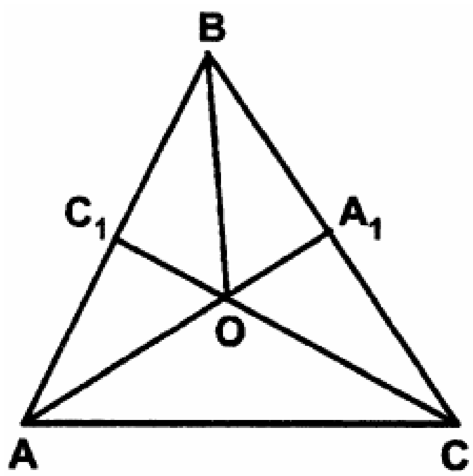

Рис. 7

Ключова задача 2. Якщо точки B і C лежать в одній на півплощині відносно прямої AD, причому $\angle ABD = \angle ACD$, то точки A, B, C і D належать одному колу. Довести.

Розв'язання.

Припустимо, що точка C не лежить на колі, описаному навколо трикутника ABD. Тоді можливі два випадки:

а) C лежить поза даним колом (рис. 8а) і $\angle ACD = \angle AKD - \angle CDK$. Але згідно з теоремою про вписаний кут

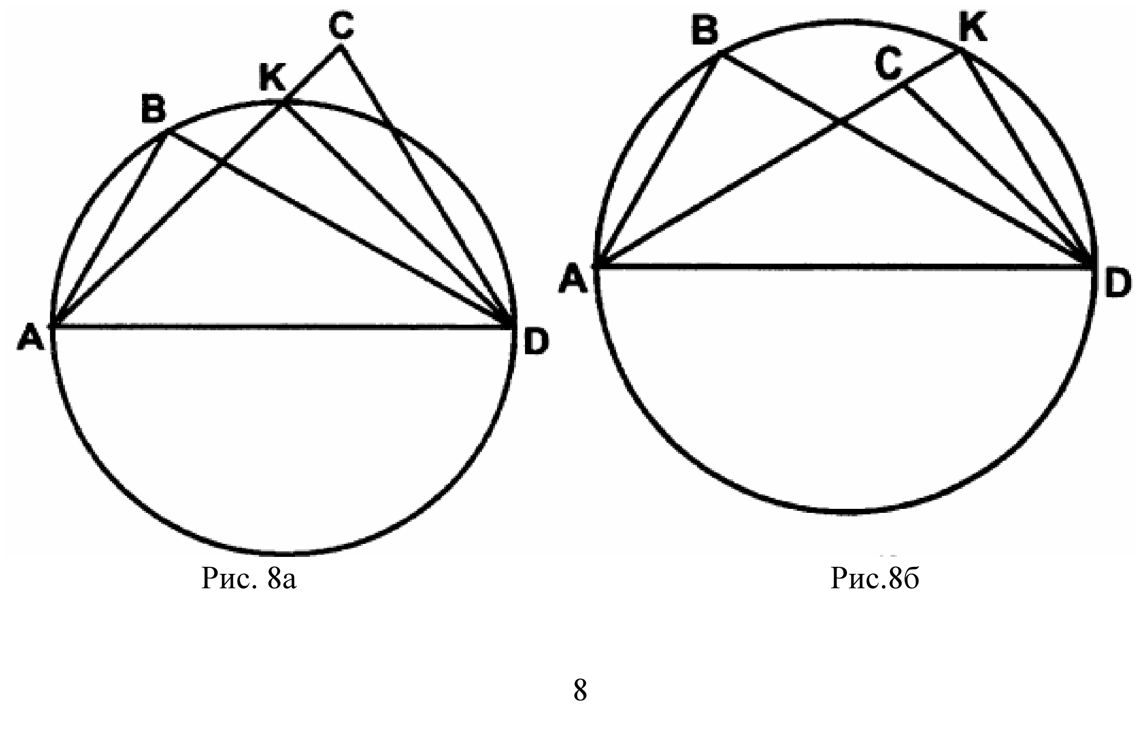

Рис. 8а

Рис.8б

$\angle ABD = \angle AKD$, отже, $\angle ACD < \angle ABD$. б) C лежить всередині кола (рис.8б). Тут $\angle ACD = \angle AKD + \angle CDK$ і $\angle ACD > \angle ABD$.

Одержані суперечності й доводять потрібне твердження.

Задача 3. На медіані AM трикутника ABC взято точку K так, що $\angle BKM = \angle ABC$ (рис. 9). Довести, що $\angle CKM = \angle ACB$.

Розв'язання.

«Подвоїмо» медіану AM (вже знайомий читачеві прийом). $\angle BCD = \angle ABC = \angle BKD$. Отже, точки C, K, B, D належать одному колу. Тоді $\angle CKD = \angle CBD$ (як такі, що спираються на спільну дугу CD), але $\angle CBD = \angle ACB$. Звідси $\angle CKD = \angle ACB$.

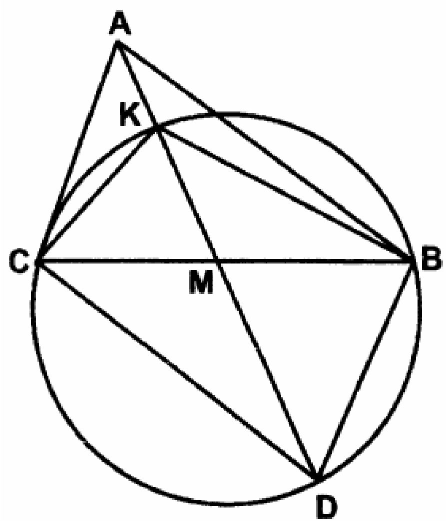

Рис. 9

Ключова задача 3. Довести: якщо точки O і C знаходяться в одній (у різних) півплощинах відповідно прямої AB, причому $OA = OB$ і $\angle AOB = 2\angle ACB$ $\left(\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)\right)$, то точки A, B і C лежать на колі з центром у точці O.

Доведення.

Розглянемо випадок, коли точки O і C лежать в одній півплощині. Припустимо, що точка C лежить поза колом з центром у точці O і радіусом $OA = OB$ (рис. 10). Тоді $\angle AOB = 2\angle AC_1B = 2(\angle ACB + \angle CAC_1)$. Якщо точка C лежить усередині кола (рис. 11), то $\angle AOB = 2\angle AC_1B = 2(\angle ACB - \angle CAC_1)$. Випадок, коли точки O і C лежать у різних півплощинах, розгляньте самостійно.

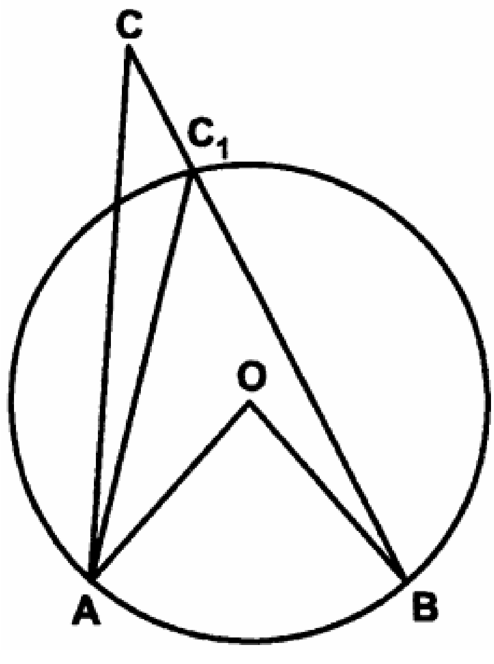

Рис. 10

Задача 4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = AD = 10$, $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$.

Знайти довжину діагоналі AC.

Розв'язання.

Зазначимо, що $2(180° - \angle BCD) = 100° = \angle BAD$ Тоді точки B, D і C лежать на колі з центром у точці A.

Відповідь: $AC = 10$.

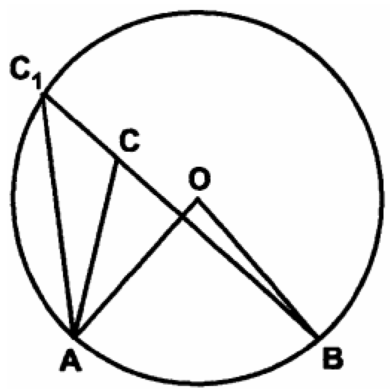

Рис. 11

Зручно, коли деякий клас задач об'єднує одна ключова ідея. Нажаль, така чітка класифікація можлива не завжди. Часто виручають досвід, інтуїція і кмітливість. Гадаємо, що набути такого досвіду читачеві допоможуть подальші приклади і вправи.

Задача 5. У чотирикутнику три тупих кути. Довести, що з двох його діагоналей більша та, яку проведено з вершини гострого кута.

Розв'язання.

Побудуємо на позначеній діагоналі як на діаметрі коло. Тоді інші будуть лежати всередині кола, і відрізок, що їх сполучає, менший, ніж діаметр.

Задача 6. У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 на сторонах AB і BC обрано відповідно точки P і Q так, що периметр трикутника PBQ дорівнює 2. знайдіть величину кута PDQ.

Розв'язання.

Проведемо коло з центром у точці D радіуса 1. очевидно, що воно дотикається сторін квадрата в точках A і C (рис. 12). Будь-яка дотична до дуги AC відсікає від квадрата трикутник, периметр якого дорівнює 2. Нехай PQ не дотикається проведеного кола. Якщо PQ не має спільних точок із колом, то проведемо дотичну $P_1Q_1 // PQ$. Периметр трикутника P_1BQ_1 більший, ніж периметр трикутника PBQ – очевидно. З іншого боку, їх

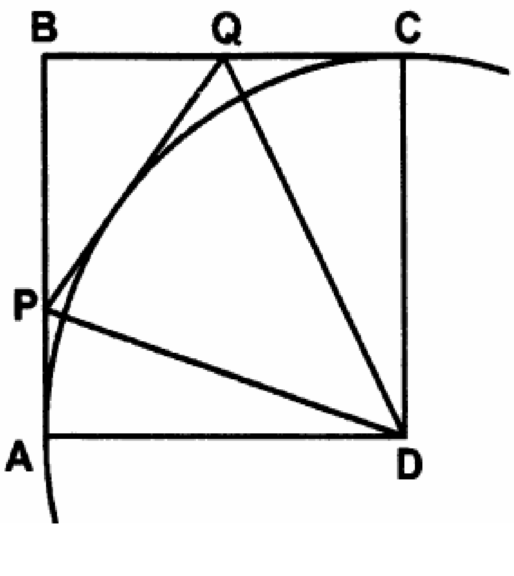

Рис. 12

периметри дорівнюють 2. Аналогічно можна одержати суперечність, якщо відрізок PQ перетинає коло. Отже, точка D є центром зовнівписаного кола трикутника PBQ. Маємо $\angle PDQ = 180° - \frac{1}{2}(\angle APQ + \angle PQC) = 180° - \frac{1}{2}\,270° = 45°$.

§ 4. Застосування геометричних перетворень до розв'язування задач

а) застосування центральної симетрії

Нагадаємо деякі означення і властивості.

1. Точки A і A_1 називаються **симетричними** відносно точки O, якщо O – середина відрізка AA_1.

2. Перетворення фігури, коли кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої точки O, називаються **центральною симетрією** з центром O.

3. Центральна симетрія є рухом. Отже, симетричні фігури рівні.

4. Обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

5. Якщо прямі l_1 і l_2 симетричні відносно точки O, то $l_1 // l_2$.

6. Якщо чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограм.

Задача 1. Два кола перетинаються в точці M. Провести через M пряму, яка перетинає коло в точках A і B так, що $AM = MB$.

Розв'язання.

Зауважимо, що при симетрії кола S_1 (рис. 13) відносно точки M точка B переходить у точку A. Отже, точку A можна одержати як перетин кіл S_2 і S_1'. B – точка перетину S_1 і прямої AM.

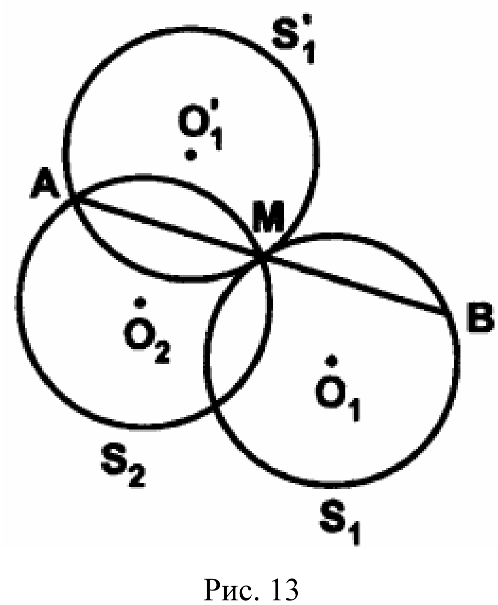

Рис. 13

Задача 2. Коло перетинає сторони BC, CA, AB трикутника ABC в точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 відповідно. Доведіть: якщо перпендикуляри до сторін трикутника, проведені через точки A_1, B_1 і C_1, перетинаються в одній точці, то й перпендикуляри, проведені до сторін через A_2, B_2 і C_2, також перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

Перпендикуляри, проведені в точках A_1, B_1 і C_1, симетричні перпендикулярам відповідно в точках A_2, B_2 і C_2 відносно центра кола O (доведіть). Отже, фігури, утворені цими трійками перпендикулярів, симетричні відносно точки O. Тобто перпендикуляри в точках A_2, B_2 і C_2 перетинаються в точці, симетричній M (M – перетин перпендикулярів у точках A_1, B_1 і C_1) відносно O.

б) Застосування осьової симетрії

1. Точки A і A' називають **симетричними** відносно прямої l, якщо пряма l перпендикулярна відрізку AA' і проходить через його середину.

2. Перетворення фігури, завдяки якому кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої прямої l, називається **осьовою симетрією** з віссю l.

3. Осьова симетрія є рухом, отже, симетричні фігури рівні.

Задача 3. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ медіана $AM = m$ проведена до меншого катета й утворює з більшим кут $15°$. Знайти площу трикутника.

Розв'язання.

Побудуємо точку K, симетричну точці M відносно прямої AC (рис. 14). Тоді $\Delta KAC = \Delta MAC$ і $S_{KAC} = S_{MAC}$.

Маємо

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = S_{KAM} = \frac{1}{2}m^2 \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$

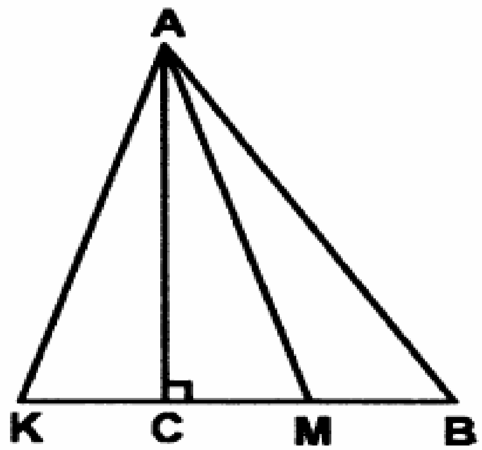

Рис. 14

Задача 4. Дано пряму AB і точки C і D з одного боку від неї. На прямій AB побудувати таку точку X, щоб $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

Розв’язання.

Відобразимо точку C симетрично відносно прямої AB, одержимо точку C_1.

На відрізку DC_1 як на діаметрі будуємо коло. Воно перетинає пряму AB в точках X_1 і X (рис. 15), які і є шуканими. Покажемо це.

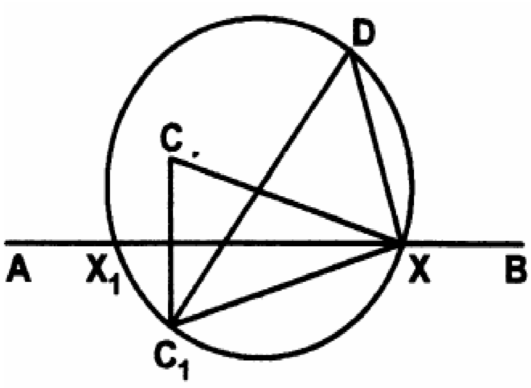

Рис. 15

$90° = \angle C_1XD = \angle C_1XA + \angle AXD = \angle AXC + 180° - \angle DXB$, тобто $90° = 180° + \angle AXC - \angle DXB$, $\angle DXB - \angle AXC = 90°$.

Для точки X_1 міркування аналогічні.

в) Застосування перетворення повороту

1. Перетворення фігури F на фігуру F^1, коли кожна точка X фігури F переноситься в таку точку $X^{'}$ фігури F^1, що $X^{'}O = XO$ і $\angle X^{'}OX = \alpha$, де O – задана точка і α – даний кут, $0 < \alpha < \pi$, називають **перетворенням повороту фігури** F навколо точки O на кут α.

2. Якщо точка $X^{'}$ – образ точки X при повороті навколо точки O на кут α, то цей факт будемо записувати так: $R_O^{\alpha}\left(X\right) = X^{'}$.

3. Перетворення повороту є рух.

Задача 5. На стороні BC рівнобічного трикутника ABC позначено точку D і на відрізку CD як на стороні побудовано рівнобічний трикутник CDE поза трикутником ABC. Точки K і M – відповідно середини відрізків AD і BE. Доведіть, що трикутник CKM – рівнобічний.

Розв’язання.

Розглянемо перетворення повороту з центром у точці C на кут $60°$ (рис. 16). Тоді $R_C^{60^\circ}(B) = A$, $R_C^{60^\circ}(E) = D$. Звідси образом відрізка BE за цим перетворенням буде відрізок AD.

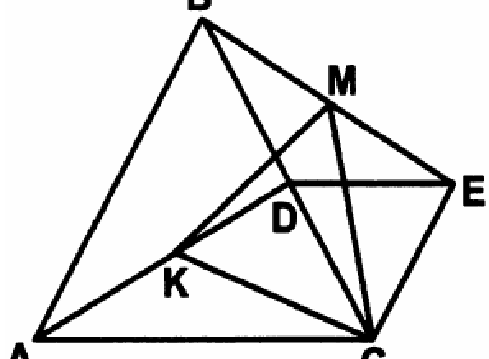

Рис. 16

Оскільки M і K – середини цих відрізків, то $R_C^{60^\circ}(M) = K$. Отже, $CK = CM$, $\angle KCM = 60°$, тобто трикутник CKM – рівнобічний.

Задача 6.

На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Довести, що $AE = ED + BF$.

Розв'язання.

Розглянемо поворот із центром A на кут $90°$. Тоді $R_A^{90^\circ}(D) = B$, $R_A^{90^\circ}(E) = E_1$, причому E_1 лежить на BC (рис. 17). Тоді $DE = BE_1$ (нагадуємо, що поворот є рух, отже, переводить фігуру в рівну їй). Маємо: $E_1F = E_1B + BF = DE + BF$. Оскільки $\angle E_1AB = \angle EAD$, то $\angle E_1AF = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle BFA$, отже, $\angle E_1AF = \angle E_1FA$. Звідси $AE_1 = E_1F = DE + BF$.

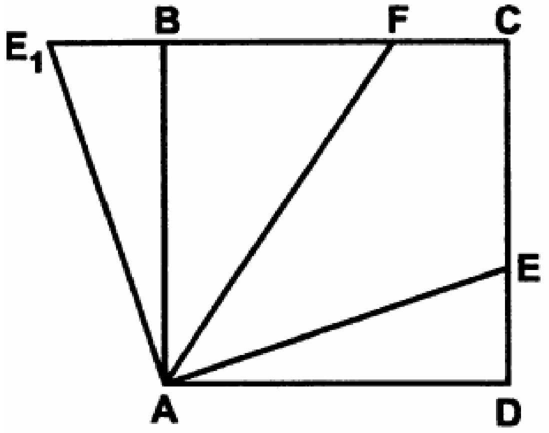

Рис. 17

г) застосування гомотетії

1. **Гомотетія** з центром O і коефіцієнтом k (який відрізняється від нуля) – це перетворення, коли кожній точці X ставиться у відповідність така точка X', що $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

2. Гомотетія відрізок переводить у відрізок.

3. Гомотетія зберігає величину кута.

4. При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.

Задача 7. На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q, R так, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайти S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$.

Розв'язання.

Зауважимо, що $\frac{OP}{AO} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{5}{4}$ (рис. 18). Це означає, що трикутник PQR гомотетичний трикутнику ABC з коефіцієнтом гомотетії $k = -\frac{5}{4}$. Тоді $S_{PQR} = \frac{25}{16}$, $S_{ABC} = \frac{25}{16}$.

Відповідь: $\frac{25}{16}$.

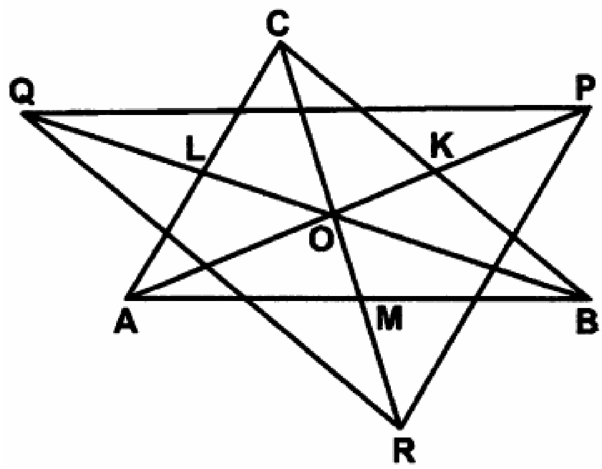

Рис. 18

Задача 8. AA_1, BB_1, CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC. Довести, що радіус кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$ вдвічі менший, ніж радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Розв'язання.

Нехай M, N, і P – точки перетину висот із колом, описаним навколо трикутника ABC (рис. 19). Доведемо, що $HA_1 = A_1M$.

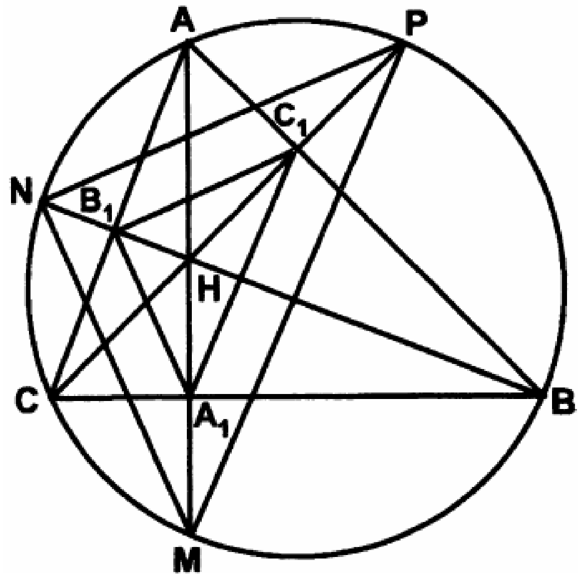

Рис. 19

Справді, $\angle C_1CB = \angle BAA_1 = 90° - \angle ABA_1$.

Але кути BAA_1 і MCB рівні як вписані, що спираються на спільну дугу MB. Тоді $\angle MCA_1 = \angle HCA_1$ і оскільки $CA_1 \perp HM$, то трикутник HCM рівнобедрений і $HA_1 = A_1M$. Так само $HB_1 = B_1N$ і $HC_1 = C_1P$. Тепер зрозуміло, що трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику MNP з коефіцієнтом гомотетії $k = 2$ і $R_{HNP} = R_{ABC} = 2R_{A_1B_1C_1}$.

§5. Метод координат

1. Якщо точка A має координати x_1 і y_1, B – x_2 і y_2, то $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2. Якщо точка M – середина відрізка AB, то її координати $\frac{x_1 + x_2}{2}$ і $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

3. Рівняння кола з центром у точці $K(a;b)$ і радіусом R має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

4. Загальне рівняння прямої $ax+bx+c=0$, де $a^2+b^2\neq 0$.

5. Рівняння невертикальної прямої $y=kx+l$.

Задача 1. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини – точки C.

Розв'язання.

У задачах на метод координат важливо вдало, а точніше, вигідно обрати систему координат. У нашій задачі зручно взяти середину відрізка AB – точку O – як початок відліку і «покласти» відрізок AB на вісь абсцис (рис. 20). Виберемо одиничний відрізок так, щоб $A(-1;0)$ і $B(1;0)$. Нехай координати точки $C(a;b)$, а точка $M(x;y)$ належить шуканому ГМТ. Тоді $MA^2+MB^2=MC^2$. Причому останнє можна вважати необхідною і достатньою умовою належності точки M шуканому ГМТ. Маємо

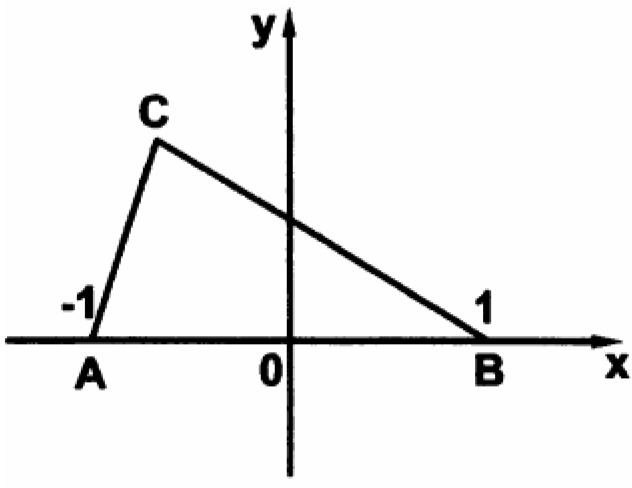

Рис. 20

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=2\left(a^2+b^2-1\right).$$

Тепер зрозуміло: якщо $a^2+b^2<1$, то шукане ГМТ – порожня множина.

Якщо $a^2+b^2=1$, то $(x+a)^2+(y+b)^2=0$, і ГМТ складається з однієї точки $D(-a;-b)$, симетричної точці C відносно початку координат.

Якщо $a^2+b^2>1$, то маємо коло з центром у точці $D(-a;-b)$ і радіусом $\sqrt{2a^2+2b^2-2}$.

Задача 2. У трикутнику ABC $\angle ACB = 60°$, а радіус кола, описаного навколо цього трикутника, дорівнює $R = 2\sqrt{3}$. На стороні AB взято точку D так, що $AD = 2DB$ і при цьому $CD = 2\sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

Розв'язання.

Маємо $AB = 2R\sin 60° = 6$.

Тоді $AD = 4$, $DB = 2$. оберемо систему координат як у попередній задачі (рис. 21). Тоді координати точки $D(1;0)$. Оскільки $\angle AOB = 120°$, то $OE = \sqrt{3}$, а координати точки $O\left(0;\sqrt{3}\right)$. Нехай координати точки $C(x;y)$. Вона лежить на двох колах: одне з центром у точці O і радіусом $2\sqrt{3}$, друге – з центром у точці D радіусом $\sqrt{2}$. Маємо систему

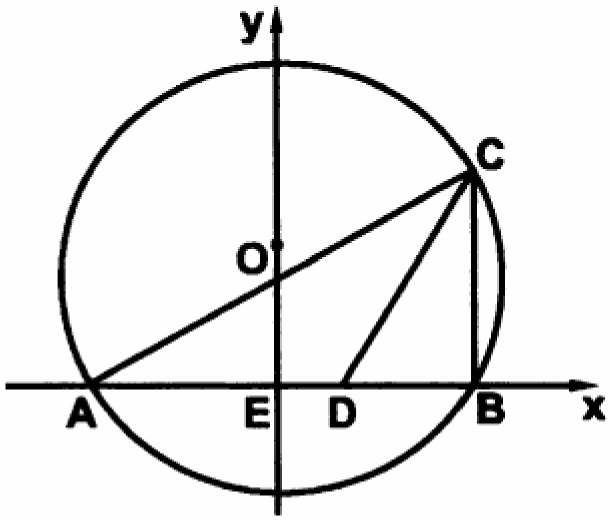

Рис. 21

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 12, \\ \left(x - 1\right)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$. Зауважимо, що $|y|$ – це довжина висоти, яка виходить з точки C трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2} AB \cdot |y| = 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

§6. Застосування векторів

1. Якщо M – середина відрізка AB, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

2. Для того, щоб точки A, B і C належали одній прямій, необхідно і достатньо $\overrightarrow{XB} = \alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XC}$, де X – довільна точка, а $\alpha + \beta = 1$.

3. Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC, а X –

довільна точка, то

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).$$

4. Щоб із попарно неколінеарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

5. Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були перпендикулярними, необхідно і достатньо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Задача 1. Доведіть, що з медіан трикутника можна скласти трикутник.

Розв'язання.

Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – медіани трикутника ABC (рис. 22). Тоді

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right),$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right),$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\right).$$

Звідси $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

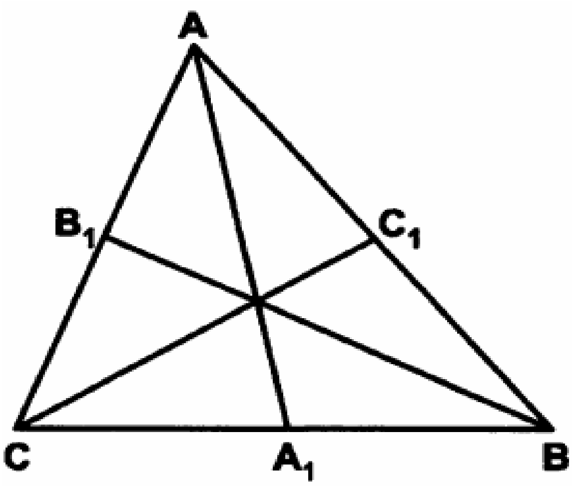

Рис. 22

Задача 2. На площині дано точки A і B. Знайти таку множину точок C цієї площини, що медіани трикутника ABC, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.

Розв'язання.

Введемо систему координат так, що $A(0;0)$, $B(1;0)$ (рис. 23). Нехай $C(x;y)$.

Тоді $A_1\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$ і $B\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$.

Маємо $$\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right),$$

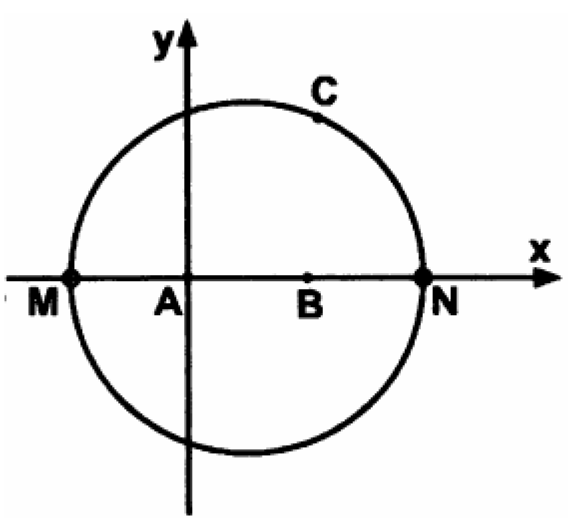

Рис. 23

$\overrightarrow{BB_1} = \left(\dfrac{x-2}{2}; \dfrac{y}{2} \right)$. З умови перпендикулярності медіан одержуємо

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0.$$

Звідси $\left(x - \dfrac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}.$

Отже, точка C належить колу з центром у середині відрізка AB і радіусом $\dfrac{3}{2} AB.$

Доведення того, що кожна точка (за винятком M і N) кола задовольняє умову, ми залишаємо читачеві.

РОЗДІЛ 2.
Методичні рекомендації до занять курсів за вибором

§ 1. Тема «Метод допоміжного кола»

На вивчення теми відводиться одна година занять курсів за вибором. З методом допоміжного кола пов'язано три ключових задачі, тому запропоновані до теми задачі розподілено у відповідності із ключовими задачами. Зрозуміло, що всі задачі за одне заняття розв'язати не можливо, тому розраховуємо на те, що певна кількість задач буде винесена на самостійну роботу, може бути запропонована зацікавленим учням для проведення досліджень з теми, тощо. Більшість задач супроводжується вказівками і відповідями, які для зручності організації самостійної роботи подано одразу після кожної задачі.

Вправи до першої ключової задачі

1. З точки P, розміщеної всередині гострого кута BAC, проведено перпендикуляри PC_1 і PB_1 відповідно на прямі AC і AB. Доведіть, що $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

2. Дано прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$. На катеті BC вибрано довільну точку M. З точки M проведено перпендикуляр MN на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle ANC = \angle AMC$.

3. Усередині трикутника ABC довільно взято точку O. З неї проведено перпендикуляри OM, OF і OP відповідно на сторони AB, BC і AC. Доведіть, що $\angle AOC = \angle AMP + \angle PFC$.

4. У прямокутник $ABCD$ вписано рівнобічний трикутник APK так, що вершина K лежить на стороні BC, а P – на CD. KH – висота цього трикутника. Доведіть, що трикутник BHC – рівнобічний.

Вказівка: навколо чотирикутників $ABKH$ і $HKCP$ можна описати кола.

5. Вершини A і B трикутника ABC з прямим кутом C ковзають по сторонам прямого кута з вершиною P. Доведіть, що точка C при цьому переміщується на відрізку.

Вказівка: доведіть, що величина кута CPB постійна.

6. Дано кут α з вершиною в точці A і точку M всередині кута. B і C – основи перпендикулярів, проведених з точки M на сторони кута. $MB = a$, $MC = b$. Знайдіть AM.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Вказівка: знайдіть CB. AM – діаметр кола, описаного навколо чотирикутника $ACMB$.

7. З довільної точки M всередині даного кута з вершиною A проведено перпендикуляри MP і MQ на сторони кута. З точки A проведено перпендикуляр AK на відрізок PQ. Доведіть. що $\angle PAK = \angle MAQ$.

Вказівка: $\angle APQ = \angle AMQ$.

8. Відстань між основами двох висот BM і BN ромба $ABCD$ вдвічі менша, ніж діагональ BD. Знайдіть кути ромба.

Відповідь: $30°$ і $150°$.

Вказівка: опишіть коло навколо чотирикутника $MBND$.

9. Дано прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$. На його гіпотенузі побудовано квадрат $ABFD$, M – його центр. Доведіть, що $\angle ACM = \angle MCB$.

Вказівка: навколо чотирикутника $ACBM$ можна описати коло.

10. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ протилежні кути A і C – прямі. На діагональ AC проведено перпендикуляри BE і DF. Доведіть, що $CE = FA$.

Вказівка: нехай $\angle BDC = \alpha$, $\angle BDA = \beta$. Виразіть довжини відрізків CE і AF через радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, і кути α і β.

11. Усередині кута AOB взято точку M, проекціями якої на сторони кута є точки M_1 і M_2. Доведіть, що $S_{OM_1M_2M} \le \frac{1}{2} OM^2 \sin\angle AOB$.

Вказівка: $M_1M_2 = OM \cdot \sin\angle AOB$.

12. Дано квадрат $ABCD$, O – його центр, K – середина BC, M – середина OD. Знайдіть $\angle AMK$.

Відповідь: $45°$.

Вказівка: нехай KO перетинає сторону AD в точці F (рис. 24). Очевидно, що $ABKF$ – прямокутник. FM – середня лінія трикутника AOD, отже,

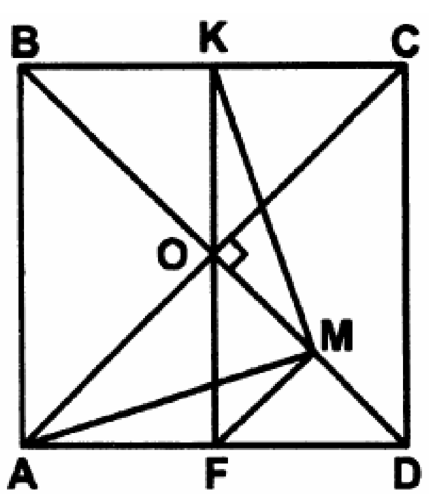

Рис. 24

$\angle FMO = 90°$. Тоді точки A, B, K, M і F лежать на одному колі.

13. Дано трикутник ABC. BH – його висота. У трикутник вписано на півколо з центром O на AC. M і N – точки дотику зі сторонами AB і BC. Доведіть, що $\angle MHB = \angle BHN$.

Вказівка: навколо чотирикутника $OMBN$ можна описати коло. $\cup MB = \cup NB$.

14. До кола проведено дві дотичні. Довести, що довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки кола на хорду, яка з'єднує точки дотику, є середнім пропорційним між довжинами перпендикулярів, проведених із цих точок на дотичні.

Вказівка: навколо чотирикутників $MAXC$ і $CXBN$ (рис. 25) можна описати коло. Доведіть, що ΔAXC~ΔCXB за першою ознакою.

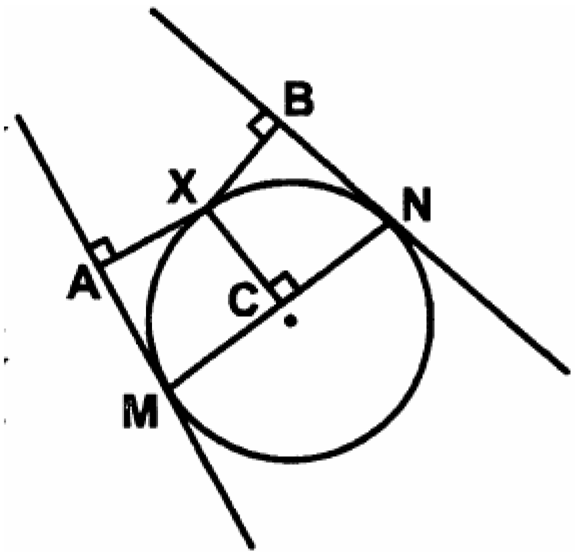

Рис. 25

15. Усередині прямокутника $ABCD$ обрано точку M так, що $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Знайдіть суму кутів BCM і MAD.

Відповідь: $90°$.

Вказівка: побудуйте трикутник AM_1D, який дорівнює трикутнику BMC, так, щоб точка M_1 лежала поза прямокутником.

16. У трикутнику ABC $(\angle ACB = 120°)$. H – точка перетину висот, O – центр описаного кола, M – середина дуги ACB. Довести, що $HM = MO$.

Вказівка: $\angle AOB = 120°$, $\angle AHB = 60°$. Навколо чотирикутника $AOBH$ можна описати коло. Знайдіть його центр.

17. Дано квадрат $ABCD$. Точки P і Q лежать відповідно на сторонах AB і BC, причому $BP = BQ$. Нехай H – основа перпендикуляра, проведеного з точки B на відрізок PC. Знайдіть кут DHQ.

Відповідь: $90°$.

Вказівка: нехай BH перетинає сторону квадрата в точці F. Доведіть, що $AF = BQ$. Точки F, H, Q, C, D лежать на одному колі. Знайдіть його діаметр.

18. На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ взято точки K і E так, що $BK = CE$. З точки K проведено перпендикуляр KO на діагональ AC. Знайдіть кут BOE.

Відповідь: $90°$.

19. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC взято відповідно точки D, E, F, для яких $DE = BE$ і $FE = CE$. Довести, що центр кола, описаного навколо трикутника ADF, лежить на бісектрисі кута DEF.

Вказівка: нехай O – центр описаного кола трикутника ADF. $\angle DOF = 2\angle A$. Доведіть, що $\angle FED = 180° - 2\angle A$.

Вправи до другої ключової задачі

20. Визначити площу трапеції, у якої довжини основ дорівнюють 10 і 26, а діагоналі перпендикулярні бічним сторонам.

Відповідь: 216.

21. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, проведених з даної точки A на прямі, що проходять через дану точку B.

Відповідь: Коло з діаметром AB, виключаючи точку A.

22. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ проведено діагоналі AC і BD. Відомо, що $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, і відстань між точками перетину бісектрис трикутників ABD і ACD дорівнює $\sqrt{2}$. Знайти довжину сторони BC.

Відповідь: $\sqrt{3}$.

Вказівка: доведіть, що $\angle AED = \angle AFD = 135°$ (E і F – точки перетину бісектрис трикутників ABD і ACD), звідси – точки A, E, F і D лежать на одному колі.

23. У гострокутному трикутнику ABC CC_1 і AA_1 висоти. Довести, що серединний перпендикуляр до C_1A_1 проходить через середину AC.

Вказівка: точки A, C, C_1, A_1 належать колу з діаметром AC.

24. У гострокутному трикутнику ABC CC_1 і AA_1 висоти. З точок A і C на пряму A_1C_1 проведено перпендикуляри AF і CK. Довести, що $FC_1 = KA_1$.

Вказівка: відрізок MN – середня лінія трапеції $AFKC$.

25. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено два промені, які утворюють кут $45°$. Один перетинає сторону BC в точці E, діагональ BD – в точці P, другий – сторону CD в точці F, а діагональ BD – в точці Q. Довести, що $S_{AEF} = S_{APQ}$.

Вказівка: $\angle EAQ = \angle QBE = 45°$ (рис. 26), отже, навколо $BAQE$ можна описати коло і $\angle AQE = 90°$. Тоді з прямокутного трикутника AQE $AE = \sqrt{2}AQ$. Аналогічно $AF = \sqrt{2}AP$.

26. У трикутнику ABC проведено бісектрису BE і висоту AH. $\angle BEA = 45°$. Довести, що $\angle EHC = 45°$.

Вказівка: проведіть бісектрису HM трикутника AHB (рис. 27). Тоді $\angle AEQ = \angle AHQ = 45°$ і, отже, навколо чотирикутника $HEAQ$ можна описати коло. Ділі використайте, що $\angle HEQ = \angle HAQ$.

27. Коло, вписане в дельтоїд $ABCD$ $(AB = BC, \quad CD = AD)$, дотикається його сторін AB, BC і AD відповідно в точках K, M і N. Діагональ AC перетинає відрізок MN в точці P. Довести, що точки A, K, P, N лежать на одному колі.

Вказівка: зауважте, що $\angle AKM = \angle KMN = \angle NPA$ (рис. 28).

28. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено точки C_1, A_1, B_1 відповідно. З'ясувалося, що $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CB_1}{B_1A}$ і $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

Вказівка: проведіть $C_1A_2 // AC$ (рис. 29). Тоді $\dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{CA_2}{A_2B}$ і $B_1A_2 // AB$. Звідси $\angle C_1AB_1 = \angle C_1A_2B_1$ і точки C_1, A_1, A_2, B_1 належать одному колу. Не забудьте розглянути випадок, коли A_1 належить відрізку CA_2.

29. На стороні AB трикутника ABC поза трикутником побудовано квадрат із центром у точці O. На стороні AC побудовано квадрат всередині трикутника з центром у точці M. Довести, що точки O, M і D (D – основа висоти до сторони BC) лежать на одній прямій.

Вказівка: описавши коло навколо чотирикутників $OADB$ і $ADMC$, покажіть, що $\angle ODA = \angle CMD = 45°$.

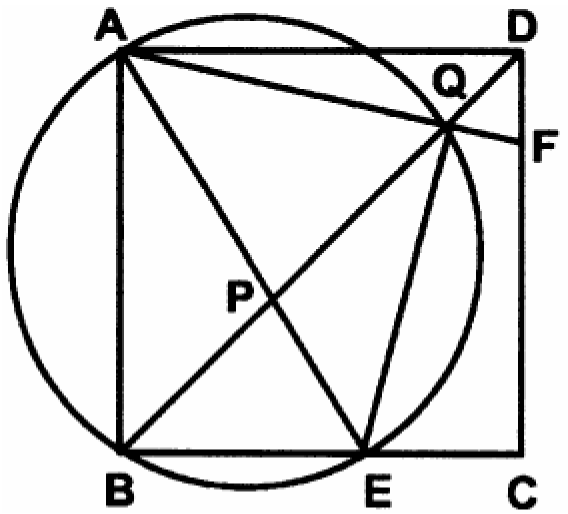

Рис. 26

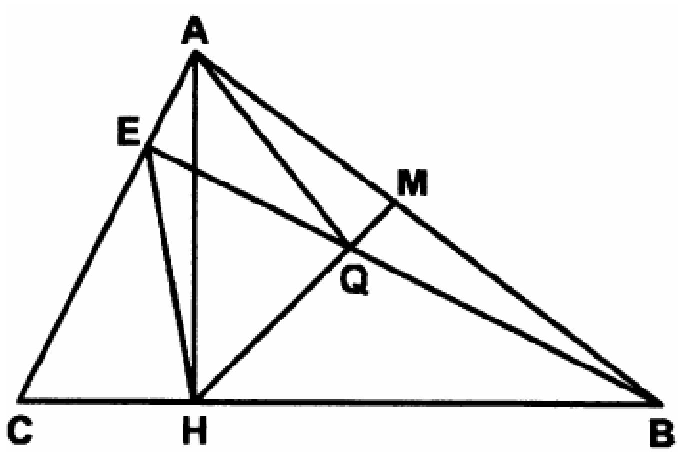

Рис. 27

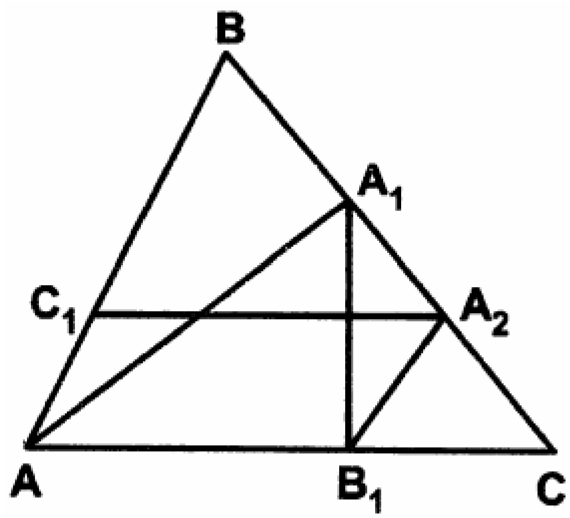

Рис. 28

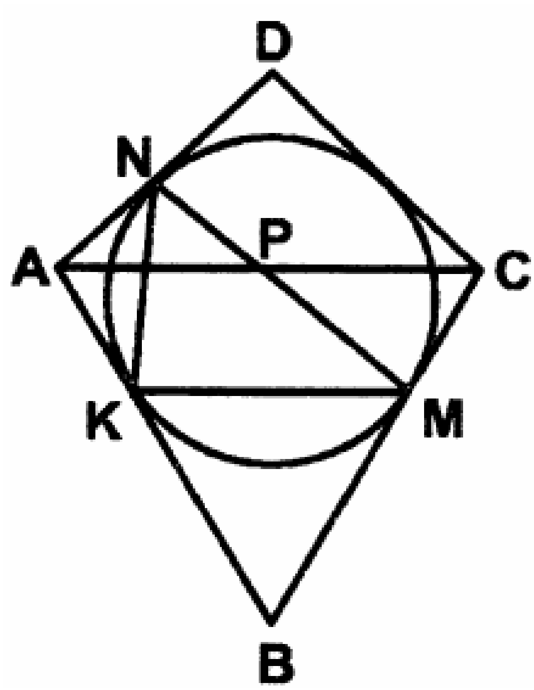

Рис. 29

Вправи до ключової задачі 3

30. У трапеції $ABCD$ ($AD//BC$) кут ADB удвічі менший, ніж кут ACB. $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Знайти площу трапеції.

Відповідь: 22.

Вказівка: проведіть коло з центром у точці C і радіусом CB (рис. 30). Оскільки $\angle ACB = 2\angle ADB$, то точка D лежить на цьому колі. З прямокутного трикутника CHD знайдіть висоту CH.

31. У трикутнику ABC $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 80°$. Усередині трикутника обрано таку точку K, що трикутник BCK – рівнобічний. Знайти $\angle KAB$.

Відповідь: $20°$.

Вказівка: точки A, B, C лежать на колі з центром в точці K.

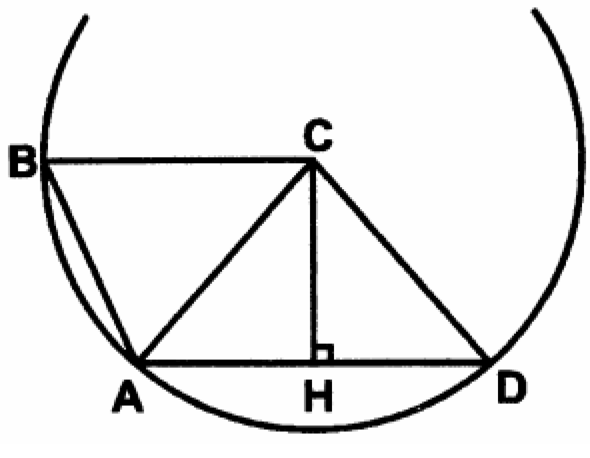

Рис. 30

32. Поза рівнобічним трикутником ABC (але всередині кута ACB) обрано точку M так, що $\angle AMC = 20°$ і $\angle BMC = 30°$. Знайти $\angle ACM$.

Відповідь: $20°$.

Вказівка: точки C, B, M лежать на колі з центром в точці A.

33. Поза рівнобедреним трикутником ABC $(AB = AC)$, але всередині кута ABC, обрано точку M так, що $\angle BMC = 40°$, а $\angle BMA = 10°$. Знайти $\angle BAM$, якщо $\angle ABC = 50°$.

Відповідь: $160°$.

34. Усередині квадрата $ABCD$ взято таку точку M, що $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Знайти $\angle ABM$.

Відповідь: $90° - 2\alpha$.

Вказівка: покажіть, що $\angle AMC = 135°$ (рис. 31). Тоді точки A, M, C лежать на колі з центром в точці B.

35. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD = 25°$, $\angle BCA = 20°$, $\angle BDC = 50°$, $\angle BDA = 40°$. Довести, що $DA = DB = DC$.

Вказівка: опишіть коло навколо трикутника ABC (рис. 32) і доведіть, що D – його центр.

36. Чи можна розмістити рівнобічний трикутник зі стороною 3 всередині круга радіусом $\sqrt[4]{10}$?

Відповідь: Можна.

37. Через точку P, яка лежить на спільній хорді AB двох кіл, що перетинаються, проведено хорду KM першого кола і хорду LN другого кола. Довести, що $\angle NKM = \angle NLM$.

Вказівка: доведіть методом від супротивного, що якщо відрізки KM і NL перетинаються в точці P, причому $KP \cdot PM = NP \cdot PL$, то точки K, N, M, L лежать на одному колі.

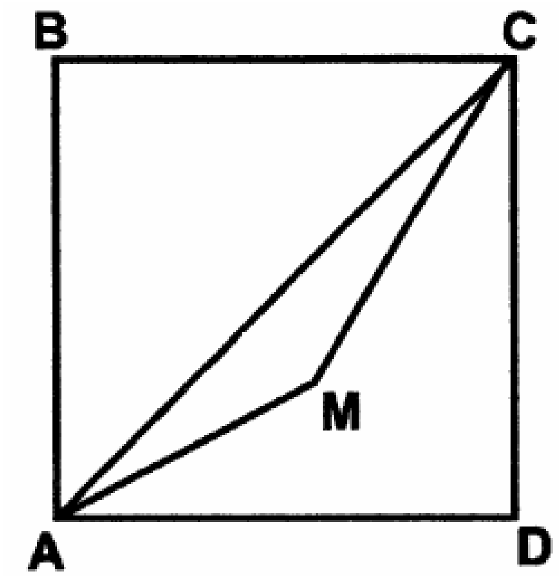

Рис. 31

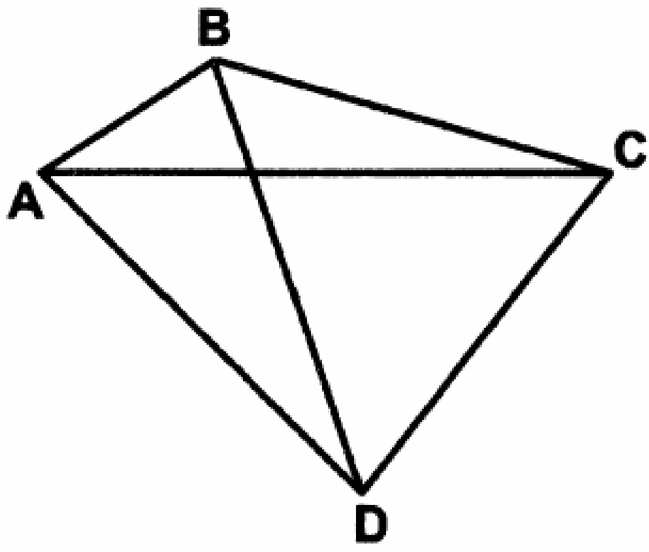

Рис. 32

38. На одній стороні кута з вершиною в точці O обрано точки A і B, на другій – D і C так, що $OB \cdot OA = OC \cdot OD$. Доведіть, що $\angle BAC = \angle BDC$.

Вказівка: провівши коло через точки A, B, C, доведіть методом від супротивного, що точка D лежить на цьому колі.

39. У гострокутному трикутнику ABC AH_1, BH_2, CH_3 – висоти, H – точка їх перетину. Доведіть, що $AH \cdot HH_1 = BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$.

Вказівка: опишіть коло навколо трикутника ABC. Нехай AH_1 перетинає коло в точці A_1, BH_2 – у точці B_1, CH_3 – в точці C_1. Доведіть, що $HH_1 = H_1A_1$, $HH_2 = H_2B_1$, $HH_3 = H_3C_1$.

40. Відновити квадрати за чотирма точками, кожана з яких лежить відповідно на кожній із сторін квадрата.

Вказівка: нехай M_1, M_2, M_3, M_4 – задані точки. На відрізках M_1M_2 і M_3M_4 як на діаметрах побудуйте кола. Цим колам належать дві протилежні вершини квадрата. Діагональ квадрата ділить дуги цих кіл навпіл.

41. На одній стороні кута з вершиною O дано точки A і B. Знайдіть на другій стороні таку точку X, щоб кут AXB був найбільшим.

Відповідь: Шукана точка X така, що $OX^2 = OB \cdot OA$.

42. Визначте кути трикутника, в якому медіана, бісектриса і висота, що виходять з однієї вершини трикутника, ділять відповідний кут на чотири рівні частини.

Відповідь: $90°$, $67{,}5°$, $22{,}5°$.

Вказівка: опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте медіану до перетину з колом.

43. Висота і медіана, які виходять з однієї вершини трикутника і розміщені всередині нього, утворюють із сторонами трикутника, що виходять із тієї самої вершини, рівні кути. Довести, що даний трикутник прямокутний або рівнобедрений.

Вказівка: опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте медіану до перетину з даним колом.

44. Довести, що квадрат бісектриси кута трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків основи.

Вказівка: опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте бісектрису до перетину с колом. Скористайтеся теоремою про хорди.

45. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Бісектриси кутів B і C перетинаються на стороні AD. Доведіть, що $AB + CD = AD$.

Вказівка: позначимо точку перетину бісектрис через M. Опишіть коло навколо трикутника BMC. Нехай воно перетинає AD в точці K. Доведіть, що трикутники KDC і AMB – рівнобедрені.

46. Довжини основи CD, діагоналі BD і бічної сторони AD трапеції $ABCD$ рівні між собою і дорівнюють p. Довжина бічної сторони BC дорівнює q. Знайдіть довжину діагоналі AC.

Відповідь: $\sqrt{4p^2 - q^2}$.

Вказівка: побудуйте коло з центром у точці D і радіусом p.

47. Побудуйте трикутник ABC за точкою A центром описаного кола і точкою перетину бісектриси кута A зі стороною BC.

48. Побудуйте прямокутний трикутник ABC $\left(\angle C = 90°\right)$ за точками A і B і точкою M, яка лежить на бісектрисі кута C.

49. У трикутнику ABC $\angle A > 90°$. На стороні BC знайдіть таку точку X, що $AX = \sqrt{BX \cdot XC}$.

Вказівка: опишіть навколо трикутника ABC коло. Побудуйте ГИТ середин хорд, які проходять через A.

50. Усередині кута з вершиною O взято точку. Провести через неї пряму так, щоб трикутник, який відрізано від кута цією прямою, мав заданий периметр.

Вказівка: побудуйте коло, яке дотикається сторін кута в точках P_1 і P_2 так, що $OP_1 = OP_2 = p$, де p – заданий півпериметр.

51. У трикутнику ABC з кутом при вершині B, що дорівнює $120°$, проведено бісектрису BD. Знайдіть відношення сторін трикутника AB і AC, якщо відомо, що $BD : DC = k$.

Відповідь: k.

Вказівка: проведіть бісектрису AF. Подовжте сторону AB за точку B. Тепер стає очевидним, що F – центр зовнівписаного кола трикутника ABD. Звідси DF – бісектриса кута BDC.

52. У трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1, BB_1 і CC_1. Знайдіть суму кутів BC_1B_1 і BA_1B_1, якщо відомо, що кут ABC дорівнює $120°$.

Відповідь: $150°$.

Вказівка: доведіть, що A_1 і C_1 – центри зовнівписаних кіл відповідно трикутників ABB_1 і CBB_1.

53. У трикутнику ABC $\angle B = 100°$, CE – бісектриса. На стороні AC обрано точку D так, що $\angle DBC = 20°$. Знайдіть величину кута CED.

Відповідь: $10°$.

Вказівка: подовжте сторону CB за точку B, доведіть, що E – центр зовнівписаного кола трикутника BDC.

§ 2. Тема «Метод допоміжної площі»

До теми нами пропонується добірка задач на обчислення і доведення, які за допомогою використання ключової задачі методу мають не складний шлях розв’язування, а тому можуть бути запропоновані учням як для самостійної роботи так і для роботу в малих і великих групах, тема містить достатню кількість задач для роботи в на занятті і для домашньої роботи.

1. За даними катетами a і b визначте висоту, проведену до гіпотенузи.

Відповідь: $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15. Знайдіть найменшу висоту.

Відповідь: 11,2.

3. Сторони трикутника дорівнюють 5 і 8, кут між ними 60°. Знайдіть висоту, проведену на третю сторону.

Відповідь: $\frac{20\sqrt{3}}{7}$.

4. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, яка лежить всередині рівнобічного трикутника, до його сторін не залежить від вибору цієї точки.

Вказівка: сполучіть обрану точку з вершинами трикутника. Площа рівнобічного трикутника дорівнює сумі площ трьох утворених трикутників.

5. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої всередині правильного многокутника, до всіх прямих, які є його сторонами, величина постійна.

6. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника до бічних сторін не залежить від положення точки на основі.

7. Розв’яжіть ключову задачу (Якщо BD – бісектриса кута B (рис. 33), то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.) методом площ.

Вказівка:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DB} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin a}{\frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin a}.$$

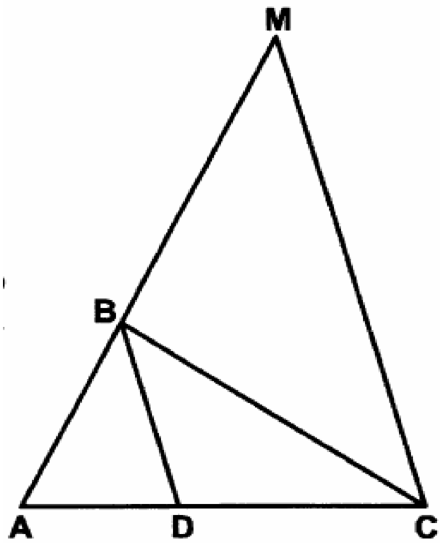

Рис. 33

8. У трикутнику довжини двох сторін дорівнюють 6 і 3. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо півсума висот, проведених до даних сторін, дорівнює третій висоті.

Відповідь: 4.

9. Побудувати трикутник за двома сторонами, якщо сума відповідних їм висот дорівнює третій стороні.

Вказівка: покажіть, що третя сторона дорівнює $\frac{ab}{a+b}$, де a і b – дані сторони.

10. Доведіть, що будь-якому трикутнику відповідає рівність $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, де r – радіус вписаного кола.

11. У трикутнику зі сторонами a, b, c вписано півкруг із діаметром, що лежить на стороні c. Знайдіть радіус цього півкруга.

Відповідь: $\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p – півпериметр.

12. Радіуси двох кіл, які перетинаються, дорівнюють 17 і 39, а відстань між центрами 44. Визначте довжину спільної хорди.

Відповідь: 30.

13. Висоти паралелограма h_1 і h_2, а периметр – $2p$. Знайдіть сторони.

Відповідь: $\frac{ph_2}{h_1+h_2}$, $\frac{ph_1}{h_1+h_2}$.

14. Визначте гострий кут ромба, в якому сторона є середнім пропорційним між діагоналями.

Відповідь: $30°$.

15. У трикутнику ABC $AC=a$, $BD\perp AC$, $BD=h$, r – радіус вписаного кола. Знайдіть відстань від центра вписаного кола до вершини B.

Відповідь: $\frac{1}{2r}\sqrt{4r^4+a^2(h-2ar)^2}$.

16. Пряма проходить через вершину B рівнобедреного трикутника ABC $(AB=BC)$ і перетинає його основу AC і точці D. Відомо, що $\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$ і $AD:DC=3:4$. Гострий чи тупий кут ABC?

Відповідь: Кут тупий.

Вказівка: нехай $\angle ABD=a$, тоді $\angle DBC=2a$. $S_{ABD}:S_{DBC}=3:4$, тобто $\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin a}{\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin 2a}=\frac{3}{4}$.

17. Довести, що бісектриса AL трикутника ABC дорівнює $\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{a}{2}$, де $a=\angle BAC$, $b=AC$, $c=AB$.

Вказівка: $S_{BAL}+S_{LAC}=S_{ABC}$.

18. У трикутнику ABC проведено медіани AK і CM. Виявилося, що $\angle BAK = \angle BCM = 30°$. Довести, що трикутник ABC рівнобічний.

Вказівка: $S_{AMO} = S_{COK}$ (O – точка перетину медіан), ΔAMO подібний ΔCOK, отже, $MO = OK$ і т.п.

19. Усередині трикутника ABC взято точку O. Прямі AO, BO, CO перетинають сторони трикутника відповідно в точках A_1, B_1, C_1. Довести, що $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ (теорема Чеви).

Вказівка: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$.

20. Довести, що діагоналі вписаного чотирикутника відносяться, як суми добутків його сторін, що сходяться до кінців цих діагоналей: $AC : BD = \left(AB\cdot AD + BC\cdot CD\right):\left(AB\cdot BC + CD\cdot AD\right)$.

Вказівка: $S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R}$, $S_{ADC} = \frac{AD\cdot DC\cdot AC}{4R}$, $S_{ABD} = \frac{AB\cdot AD\cdot BD}{4R}$, $S_{BCD} = \frac{BC\cdot CD\cdot BD}{4R}$.

21. Сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію. Довести, що бісектриса середнього за величиною кута є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до сторін трикутника є величиною постійною.

22 Усередині трикутника ABC взято точку O. Прямі AO, BO і CO перетинають сторони трикутника ABC відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Довести, що $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$.

Вказівка: проведіть $BH_1 \perp AC$, $OH_2 \perp AC$. Покажіть, що $\frac{OB_1}{BB_1} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$ і т.п.

§ 3. Тема «Метод «подовження» медіани»

Метод «подовження» медіани найбільш розповсюджений при розв'язуванні задач, після вивчення властивостей паралелограмів, в даному параграфі пропонуємо добірку задач на побудову, обчислення, доведення основним способом розв'язування яких є «подовження» медіани, що значно полегшує розв'язування задачі.

1. Побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною до третьої сторони.

Вказівка: «подвоївши» дану медіану BM (рис. 34), побудуйте трикутник BCK .

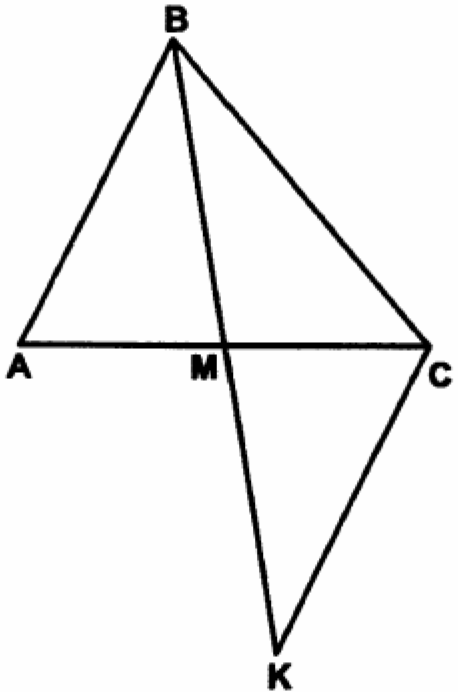

Рис. 34

2. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, яка дорівнює 4, проведено медіану бічної сторони, що дорівнює 3. Знайти основу трикутника.

Відповідь: $\sqrt{10}$.

Вказівка: «подвоївши» медіану бічної сторони (рис. 35), скористайтеся теоремою про сторони і діагоналі паралелограма.

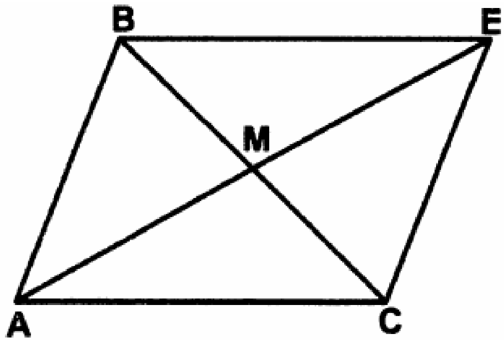

Рис. 35

3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$, а медіана бічної сторони – 5. Знайти довжини бічних сторін.

Відповідь: 6.

4. Сторони AB і AC трикутника ABC дорівнюють 8 і 6. В яких межах змінюється медіана AM ?

Вказівка: $AD = 2AM$ (рис. 36). З нерівності трикутника випливає, що $DC - AC < AD < AC + CD$. Звідси $\frac{DC - AC}{2} < AM < \frac{AC + CD}{2}$ або $1 < AM < 7$.

5. Довести: якщо дві сторони і медіана, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані до третьої сторони другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Вказівка: $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$ (рис. 37), звідси $CM = C_1M_1$.

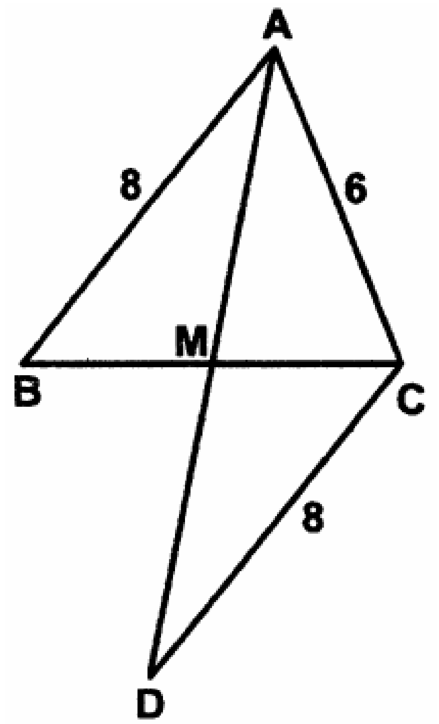

Рис. 36

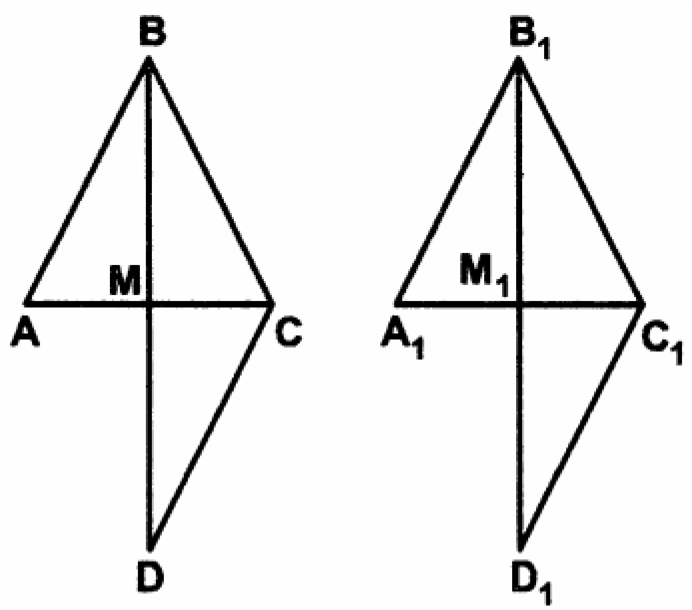

Рис. 37

6. У трикутнику ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Знайти довжину медіани AM.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

7. Знайти відношення суми квадратів усіх медіан трикутника до суми квадратів усіх його сторін.

Відповідь: $\dfrac{3}{4}$.

8. Знайти кути, утворені медіаною BB_1 зі сторонами ΔABC AB і BC, якщо $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 5$.

Відповідь: $\arccos\dfrac{3}{2}$, $\arccos\dfrac{4}{5}$.

Вказівка: «подвоївши» медіану BB_1 (рис. 38), розгляньте трикутники ABC і CBD.

9. Довести, що медіана трикутника менша за півсуму сторін, між якими вона проходить.

Вказівка: $2BB_1 = BD < BC + CD = BC + BA$.

10. Довести нерівність: $\frac{3}{2}p < m_1 + m_2 + m_3 < 2p$, де m_1, m_2, m_3 – медіани, а p – на півпериметр трикутника.

Вказівка: права нерівність легко випливає з попередньої задачі. Для доведення лівої нерівності використовується нерівність трикутника для трикутників AOB, AOC, BOC (рис. 39), де O – точка перетину медіан.

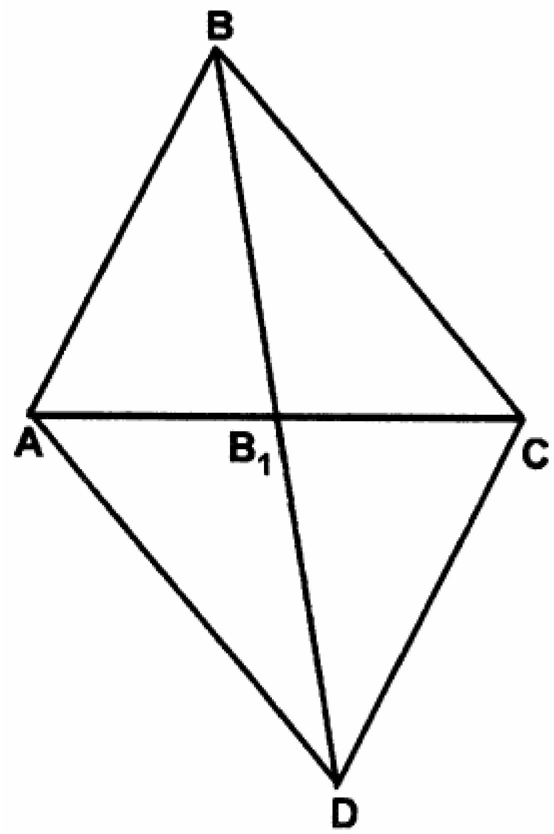

Рис. 38

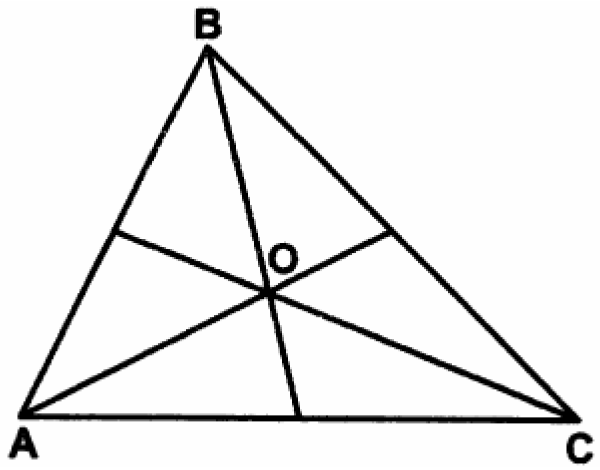

Рис. 39

11. Усередині кута взято точку M. Провести через M пряму так, щоб відрізок, який проведено між сторонами кута, ділився точкою M навпіл.

Вказівка: алгоритм побудови стає зрозумілим з рис. 40.

12. У трикутнику ABC $\angle BAC = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \varphi$. Медіана $AM = m$. Знайти площу трикутника.

Відповідь: $\dfrac{2m^2 \sin a \sin\beta \sin\varphi}{2\sin^2 a + 2\sin^2\varphi - \sin^2 a}$.

13. У трикутнику ABC медіана BM перпендикулярна до сторони BC. $AB : BC = 2:1$. Знайти $\angle ABC$.

Відповідь: $120°$.

Вказівка: в трикутнику BDC (рис. 41) $\angle BDC = 30°$.

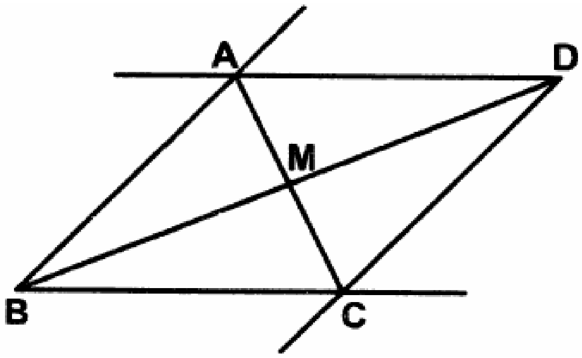

Рис. 40

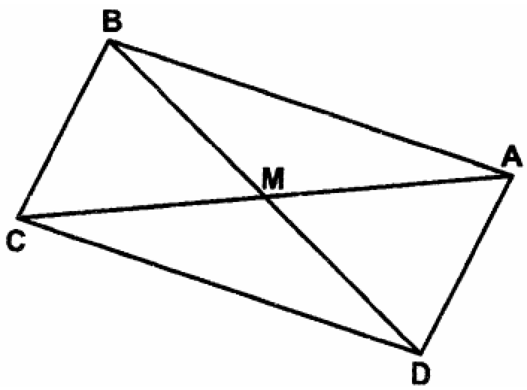

Рис. 41

14. Дано два концентричні кола. Довести, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра іншого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра.

Вказівка: якщо M – обрана точка (рис. 42), AA_1 – обраний діаметр, а O – спільний центр кіл, то $2\left(MA^2 + MA_1^2\right) = MM_1^2 + AA_1^2 = 4r^2 + 4R^2$.

15. Знайти відношення площі трикутника до площі трикутника, сторони якого дорівнюють медіанам даного.

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

Вказівка: розгляньте трикутник OCD (рис. 43), де O – точка перетину медіан, а $ED = OE$.

16. Побудувати трикутник за трьома медіанами.

Вказівка: «подовживши» медіану BB_1 (рис. 44) на третину, побудуйте трикутник OCM. В одержаному трикутнику медіана $CB_1 = \frac{1}{2}CA$. Сторони BA і BC знаходяться аналогічно.

17. Дано прямокутник $ABCD$. Довести, що для будь-якої точки M площини $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Вказівка: у трикутнику MBD, «подвоївши» медіану MO, розгляньте паралелограм $BMDM_1$: $MB^2 + MD^2 = \frac{BD^2 + MM_1^2}{2}$ (рис. 45). Аналогічно $MA^2 + MC^2 = \frac{AC^2 + MM_1^2}{2}$.

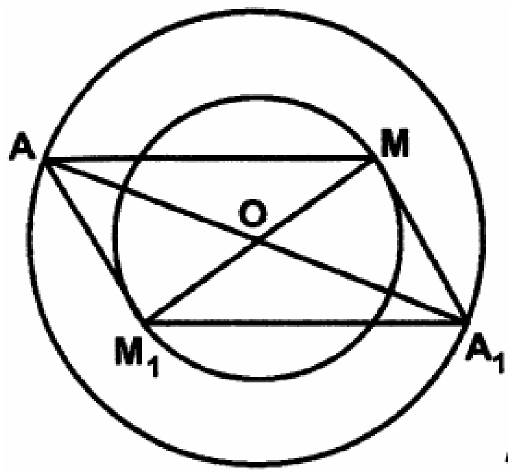

Рис. 42

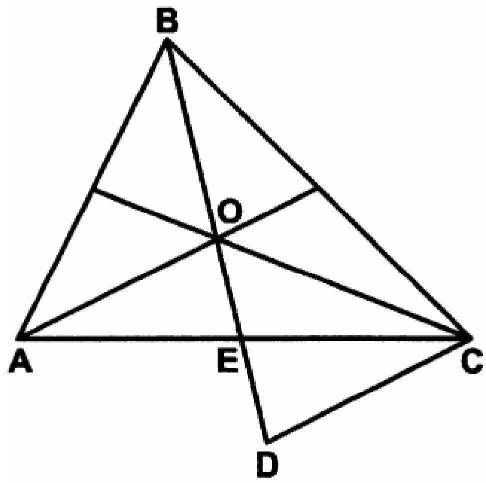

Рис. 43

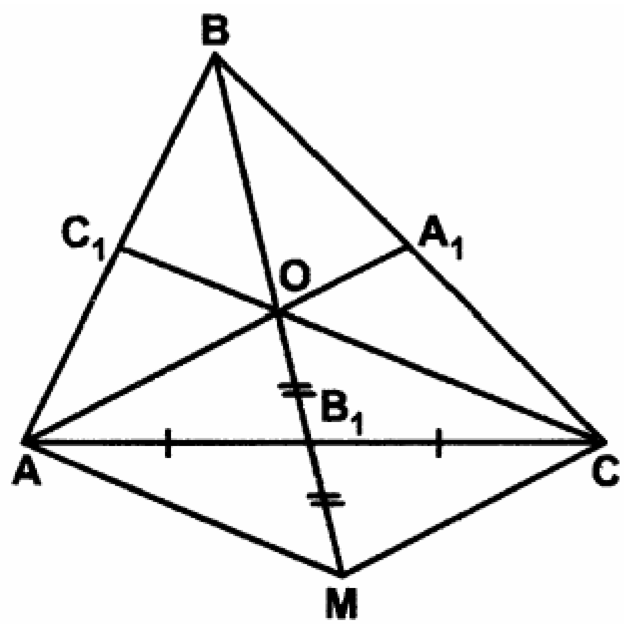

Рис. 44

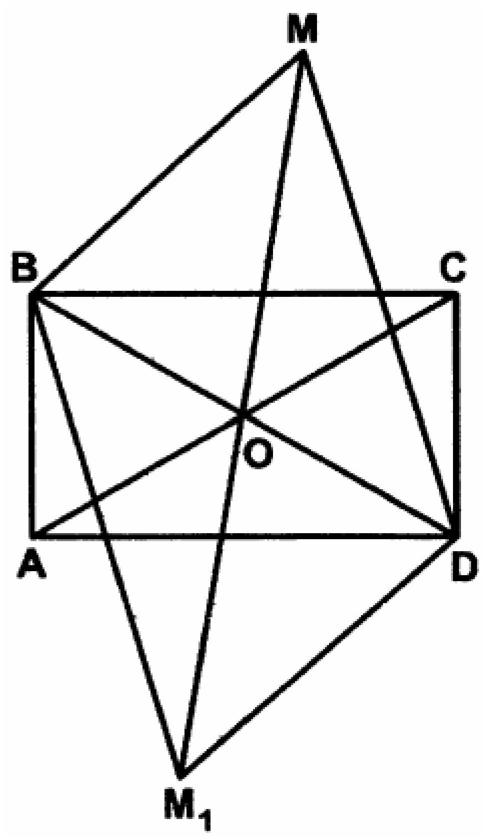

Рис. 45

§ 4. Тема «Застосування центральної та осьової симетрії »

За програмою на вивчення теми відводиться одна година курсу, тому пропоновані нами задачі учитель може використовувати не тільки на занятті а й під час організації самостійної та індивідуальної роботи учнів. Окремо пропонуємо добірку вправ на застосування центральної симетрії і добірку вправ на застосування осьової симетрії. Ті задачі, до яких не має вказівок радимо розв'язати колективно за допомогою вчителя, або запропонувати здібним учням розібратися самостійно.

Вправи на застосування центральної симетрії

1. Провести через дану точку пряму так, щоб вона поділила площу даного паралелограма навпіл.

Вказівка: Потрібна пряма проходить через центр симетрії паралелограма.

2. Вершини одного паралелограма лежать на сторонах іншого – по одній вершині на кожній стороні. Довести, що діагоналі обох паралелограмів перетинаються в одній точці.

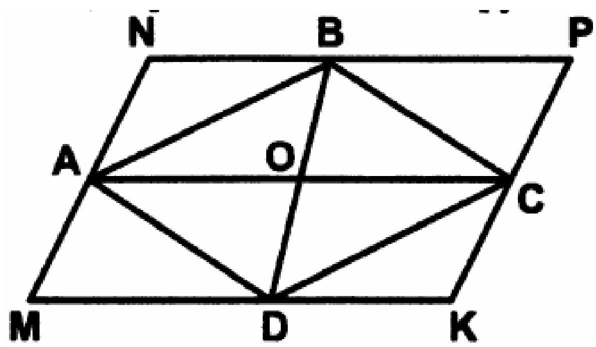

рис. 46

Вказівка: нехай O – точка перетину діагоналей $ABCD$ (рис. 46). При симетрії відносно O точка A переходить у точку C і відрізок MN – у відрізок PK. Аналогічно NP переходить в KM. Тобто при симетрії відносно точки O $KMNP$ переходить у себе.

3. Дві прямі, які проходять через центр паралелограма $ABCD$, перетинають сторону BC в точках M і N, а сторону AD – в точках K і F. Довести, що $MN = KF$.

4. M – середина відрізка, який сполучає центри двох однакових кіл. Прямі, що проходять через точку M, перетинають одне з кіл у точках A і B, а друге – в K і F. Довести, що $AB = KF$.

Вказівка: при симетрії кола відносно M відрізок AB переходить у KF.

5. Паралелограм $ABCD$ поділено його діагоналями на трикутники AOB, BOC, COD, і DOA. K, L, M, N – точки перетину медіан цих трикутників. Довести, що $KLMN$ – паралелограм.

Вказівка: точки K і M, L і N симетричні відносно центра паралелограма

6. Усередині кола дано точку M. через цю точку проведіть хорду AB так, що $AM = MB$.

Вказівка: A і B – точки перетину даного кола, симетричного йому відносно точки M.

7. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих.

8. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на даному колі і даній прямій.

Вказівка: розгляньте симетрію даної прямої відносно даної точки.

9. Усередині гострого кута задано точки A і C. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

Вказівка: знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся розв'язком задачі **4.7.**

10. Побудуйте квадрат з центром у даній точці O і точками M і N на двох сусідніх сторонах квадрата.

Вказівка: знайдіть образи точок M і N при симетрії відносно O. Тепер скористайтеся розв'язком задачі **№40** із параграфа «Метод допоміжного кола».

11. Побудуйте квадрат з центром у даній точці O і точками M і N на двох протилежних сторонах або їх продовженнях.

12. Побудуйте ромб із центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних прямих.

Вказівка: точку C (рис. 47) можна знайти як точку перетину прямих l_2 і l_1', де l_1' – образ прямої l_1 відносно точки O.

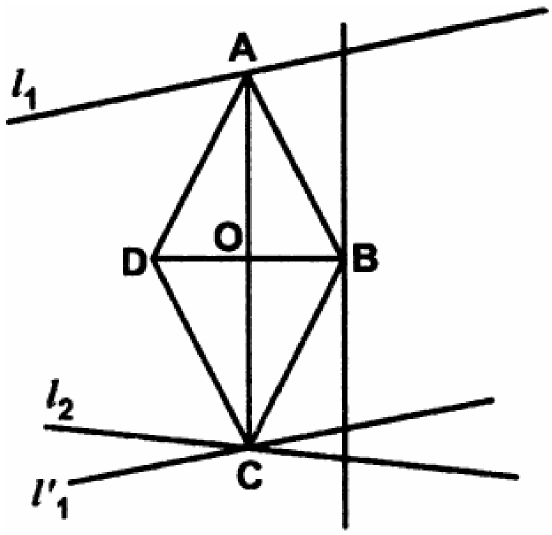

Рис. 47

13. Побудуйте ромб із центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних колах.

14. Побудувати паралелограм $ABCD$, вершини якого і C – задані точки, а вершини B і D лежать відповідно на прямих b і c.

Вказівка: вершини B і D – точки перетину прямих b і c', c' і b' відповідно, де c' і b' – образи прямих c і b відносно середини відрізка AC.

15. Дано пряму a і два кола з різних боків від неї. На прямій взято відрізок CD. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точки A і B лежали на колах, а відрізок CD був медіаною.

Вказівка: відобразіть одне з кіл симетрично відносно точки D. Точка перетину другого кола з одержаним – вершина трикутника.

16. Дано два концентричних кола S_1 і S_2. Проведіть пряму, на якій ці кола вирізають три рівні відрізки.

Вказівка: відобразіть менше коло S_1 симетрично відносно будь-якої точки A, що належить йому. Нехай B – точка перетину одержаного кола з колом S_2. Тоді AB – шукана пряма.

17. Побудувати ромб, центр якого лежить у даній точці, а три сторони або їх продовження дотикаються трьох заданих кіл.

18. Доведіть, що прямі, проведені через середини сторін вписаного чотирикутника перпендикулярно протилежним сторонам, перетинаються в одній точці.

Вказівка: доведіть, що дані прямі є образами серединних перпендикулярів до сторін чотирикутника $ABCD$ (рис. 48) при симетрії відносно точки перетину відрізків KM і NL.

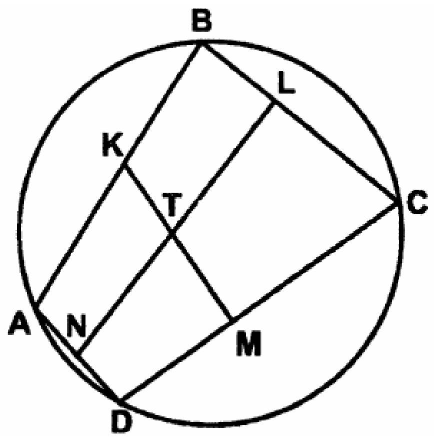

Рис. 48

19. Нехай P – середина сторони AB опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть: якщо площа трикутника PCD дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$, то $BC // AD$.

Вказівка: нехай точка D' симетрична D відносно точки P. Площа трикутника PCD дорівнює сумі площ трикутників PBC і PBD'. Зауважте, що точка B лежить на відрізку $D'C$.

Вправи на застосування осьової симетрії

20. Дано пряму MN і точки A і B в різних півплощинах відносно MN. Через A і B проведіть промені так, щоб кут між ними ділився MN навпіл.

Вказівка: побудуйте точки A_1 і B_1, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої MN.

21. Точки A і B лежать з одного боку від прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб промені XA і XB утворювали з прямою l однакові кути.

22. Побудувати трикутник ABC, якщо задано точки A і B і пряму l, на якій лежить бісектриса кута C.

23. На кожній стороні кута MON взято по дві точки A, B і A_1, B_1 так, що $OA = OA_1$ і $OB = OB_1$. Довести, що прямі A_1B і AB_1 перетинаються на бісектрисі кута MON.

24. У колі проведено дві неоднакові паралельні хорди. За допомогою однієї лінійки знайдіть середини цих хорд.

25. Через вершину A трикутника ABC і точку D, яка лежить на стороні BC, проведено пряму. Знайдіть на цій прямій таку точку X, з якої відрізки BD і DC було б видно під однаковими кутами.

Вказівка: відобразіть симетрично одну з вершин B або C відносно прямої AD.

26. Побудувати трикутник ABC, якщо дано пряму AB і серединні перпендикуляри до сторін BC і CA.

Вказівка: відобразіть пряму AB відносно кожного з даних серединних перпендикулярів.

27. Побудувати трикутник ABC, якщо дано вершину A і прямі, на яких лежать бісектриси кутів B і C.

28. Побудувати паралелограм $ABCD$ за вершиною D і серединними перпендикулярами до сторін AB і BC.

29. Побудувати ромб $ABCD$ за серединами M і N сторін AB і BC і точкою E, що лежить на прямій AC.

Вказівка: через точку E проведіть пряму, паралельну прямій

30. Побудувати трикутник ABC за двома сторонами AB і AC і різницею кутів B і C.

Вказівка: якщо трикутник ABC відобразити симетрично відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, то можна побачити трикутник, в якому відомі дві сторони і кут між ними

31. Побудувати трапецію за бічними сторонами, основою і різницею кутів при цій основі.

Вказівка: через одну з вершин проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Задача зводиться до попередньої.

32. Дано кут ABC, який дорівнює 45°, і точки M і N всередині кута. Побудувати рівнобедрений трикутник, вершина якого лежить на одній стороні, основа – на другій, а бічні сторони проходять через точки M і N.

Вказівка: нехай точка M_1 симетрична точці M відносно сторони AB. На відрізку M_1N як на діаметрі побудуйте коло. Точка його перетину зі стороною AB є вершиною шуканого трикутника.

33. Дано пряму l і точки A і B з одного боку від неї. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була мінімальною.

34. Точки A і B розміщено з різних боків відносно прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб величина $|AX - XB|$ була найбільшою.

Вказівка: відобразіть точку A симетрично відносно прямої l.

35. Довести, що з усіх трикутників із постійними основою і висотою, проведеною до цієї основи, рівнобедрений має найменший периметр.

Вказівка: вершина трикутника лежить на прямій, паралельній основі. Відстань між цими прямими дорівнює висоті трикутника. Задача зводиться до задачі **33.**

36. На стороні AC гострокутного трикутника ABC дано точку M. На сторонах AB і BC знайдіть такі точки N і P, щоб периметр трикутника MNP був найменшим.

Вказівка: відобразіть точку M симетрично відносно сторін BA і BC. Одержані точки сполучіть.

37. Дано гострий кут ABC і точку P всередині нього. Знайдіть на сторонах BA і BC точки M і N, щоб периметр трикутника MPN був найменшим.

38. Дано гострий кут ABC і точки M і N всередині нього. Знайдіть на сторонах кута такі точки P і Q, щоб периметр многокутника $PMNQ$ був найменшим.

39. Доведіть, що площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\dfrac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$.

Вказівка: проведіть серединний перпендикуляр до діагоналі AC. Нехай точка B_1 симетрична B відносно проведеної прямої. $S_{ABCD} = S_{AB_1CD}$.

40. Точка M лежить на діаметрі AB кола радіуса R. Хорда CD проходить через M і перетинає AB під кутом 45°. Доведіть, що $CM^2 + DM^2 = 2R^2$.

Вказівка: нехай C_1 і D_1 – точки, симетричні точкам C і D відносно AB. Хорда C_1D має постійну довжину, оскільки стягує дугу постійної градусної міри.

41. Побудувати ромб так, щоб одна його діагональ мала задану довжину d і належала даній прямій l, кінці другої діагоналі належали відповідно прямій і даному колу.

Вказівка: відобразіть дане коло симетрично відносно прямої l. Одержане коло перетинає дану пряму в одній із вершин ромба.

42. Побудувати квадрат, у якого одна діагональ лежить на даній прямій, а кінці другої діагоналі належать відповідно даним прямій і колу.

43. Побудувати чотирикутник $ABCD$, у якого діагональ AC є бісектрисою кута A, знаючи довжини його сторін.

Вказівка: нехай точка B_1 симетрична точці B відносно AC. B_1 лежить на AD. У трикутнику B_1CD відомі всі три сторони.

44. Дано пряму AB і точки C і D з одно боку від неї. На прямій AB побудуйте таку точку X, щоб $\angle AXC = 2\angle BXD$.

Вказівка: нехай точка D_1 симетрична точці D відносно прямої AB. Побудуйте коло з центром у точці D_1 і радіусом $\frac{1}{2}DD_1$. Проведіть з точки C дотичну до побудованого кола.

45. Кола з центрами O і O_1 розміщено з одного боку від прямої AB. На прямій AB знайдіть таку точку X, щоб дотичні, проведені з неї до двох даних кіл, складали з прямою AB однакові кути.

46. Через точку M основи AC рівнобедреного трикутника ABC проведено пряму, яка перетинає прямі BA і BC в точках N і P. Доведіть, що $\frac{NA}{NM} = \frac{PC}{PM}$.

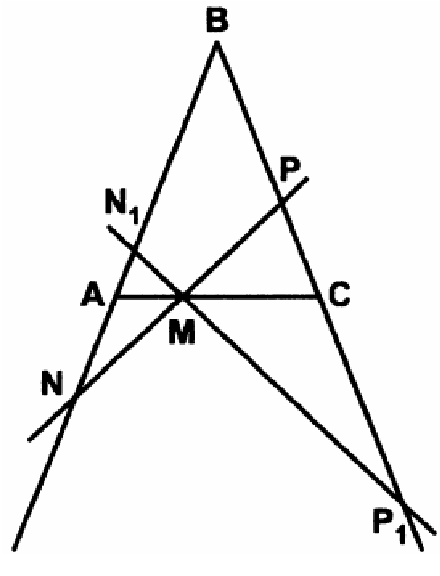

рис. 49

Вказівка: побудуйте пряму N_1P_1 симетричну прямій NP відносно прямої AC (рис. 49). N_1 належить BA, P_1 – BC. $\Delta NAM \sim \Delta P_1CM$.

47. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, яка відрізняється від C. Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$.

Вказівка: нехай точка B_1 симетрична точці B відносно бісектриси. B_1 лежить на прямій AC. Нехай точка A_1 симетрична точці A відносно тієї самої бісектриси. $AM + MB = A_1M + MB > A_1B$.

§ 5. Тема «Застосування гомотетії та повороту»

За програмою на вивчення теми відводиться одна година курсу, тому пропоновані нами задачі учитель може використовувати не тільки на занятті а й під час організації самостійної та індивідуальної роботи учнів. Окремо пропонуємо добірку вправ на застосування гомотетії і добірку вправ на застосування повороту. Ті задачі, до яких не має вказівок радимо розв'язати колективно за допомогою вчителя, або запропонувати здібним учням розібратися самостійно.

Вправи на застосування гомотетії

1. Через точки дотику двох кіл проведено дві січні, і їх другі точки перетину з кожним колом з'єднано хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

Вказівка: розгляньте гомотетію з центром у точці дотику, коли центр одного кола переходить у центр другого.

2. Два кола дотикаються в точці K. Пряма, яка проходить через точку K, перетинає ці кола в точках A і B. Довести, що дотичні до кіл, проведені через точки A і B, паралельні.

3. Два кола дотикаються внутрішньо, причому менше проходить через центр більшого. Довести, що будь-яку хорду більшого кола, яке проходить через точки дотику, менше коло поділяє навпіл.

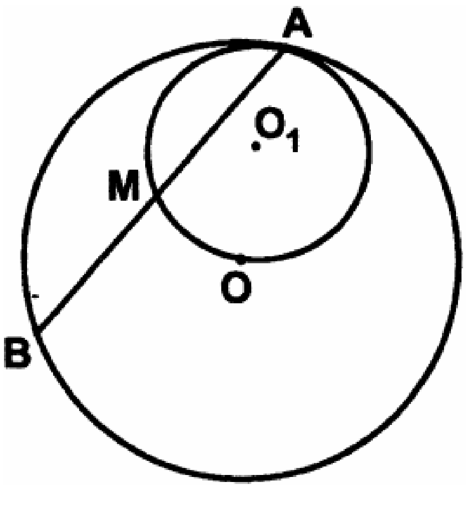

Рис. 50

Вказівка: кола гомотетичні з коефіцієнтом $k=2$ і центром гомотетії в точці A (рис. 50).

4. Знайти геометричне місце точок – середин хорд даного кола, які виходять з однієї точки цього кола. *Відповідь:* Якщо M – дана точка, а O – центр кола, то шукане ГМТ – коло з діаметром OM, виключаючи точку M. *Вказівка:* розгляньте гомотетію з центром у точці M і коефіцієнтом $k=\frac{1}{2}$.

5. Два кола дотикаються внутрішньо в точці O. У довільній точці M внутрішнього кола проведено до неї дотичну, яка перетинає друге коло в точках A і B. Довести, що $\angle AOM=\angle MOB$. *Вказівка*: нехай A_1 і B_1 – точки перетину OA і OB з меншим колом (рис. 51). Оскільки кола гомотетичні з центром O, то $A_1B_1//AB$ і відрізки O_1M_1 і O_1M – серединні перпендикуляри до A_1B_1 і AB відповідно. Залишається помітити рівність дуг A_1M і MB_1.

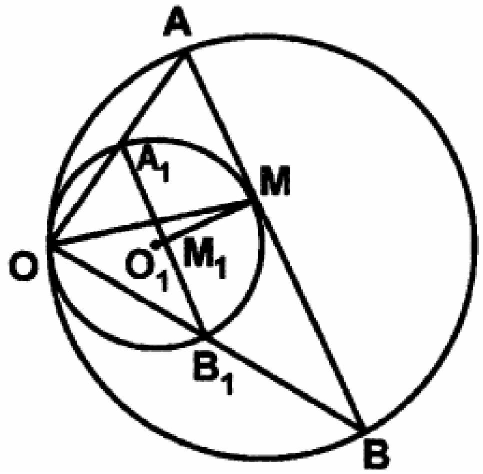

Рис. 51

6. Дано кут ABC і точку P всередині нього. Провести через точку P пряму так, щоб її відрізок усередині кута ділився у відношенні 1:2.

Вказівка: розгляньте гомотетію з центром у точці P і коефіцієнтом $k=-2$.

7. Дано кут ABC і точку M всередині нього. Побудуйте коло, яке дотикається сторін кута і проходить через точку M.

Вказівка: побудуйте довільне коло, яке дотикається сторін кута (рис. 52) і застосуйте гомотетію з центром B і коефіцієнтом $k=\frac{BM}{BM'}$.

8. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, однаково віддалену від M і променя OB.

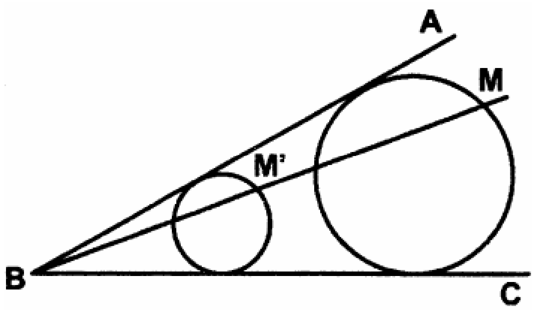

Рис. 52

Вказівка: на промені OA оберемо довільну точку A'. Проводимо $A'B' \perp OB$ і $A'M' = A'B'$ (M' лежить на промені OM) (рис. 53). Застосуйте гомотетію з центром у точці O і коефіцієнтом $\frac{OM}{OM'}$.

9. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, відстань від якої до точки M вдвічі більша, ніж відстань до променя OB.

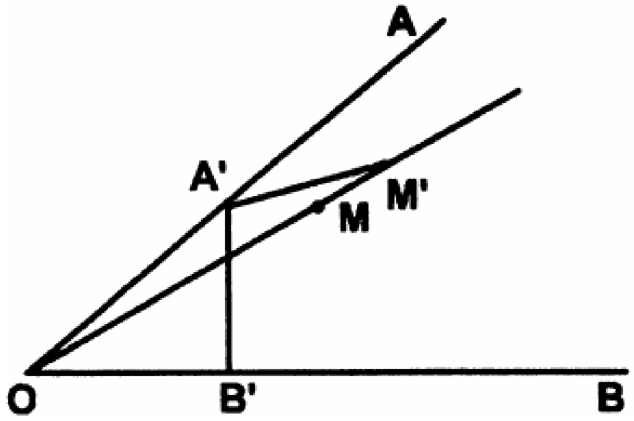

Рис. 53

10. На площині дано точки A і B і пряму l. За якою траєкторією рухається точка перетину медіан трикутників ABC, якщо точка C рухається по прямій l?

Відповідь: По прямій, паралельній прямій l.

11. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює R. Обчисліть радіус кола, описаного навколо трикутника, вершини якого є серединами медіан даного.

Відповідь: $\frac{R}{4}$.

12. Дано трикутник ABC і довільну точку P. Довести, що точки, симетричні точці P відносно середин сторін ABC, є вершинами трикутника, рівного даному.

Вказівка: трикутник із вершинами в одержаних точках гомотетичний трикутнику з вершинами на серединах сторін із коефіцієнтом $k = 2$.

13. Довести, що пряма, яка проходить через точки перетину діагоналей і бічних сторін трапеції, ділить її основу навпіл.

14. Доведіть, що точки, симетричні довільній точці відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата.

15. Побудувати трикутник за периметром і двома кутами.

Вказівка: побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний даному, а потім застосуйте гомотетію з центром у будь-якій із вершин і коефіцієнтом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$.

16. Побудувати трикутник за двома кутами і радіусом описаного кола.

17. Побудувати трикутник за відношенням двох сторін, величиною кута між ними і радіусом вписаного кола.

18. Впишіть у даний трикутник інший трикутник, сторони якого були б паралельними трьом даним прямим.

Вказівка: побудуйте трикутник так, щоб його сторони були паралельними даним прямим, а дві вершини належали сторонам даного трикутника. Потім застосуйте гомотетію з центром у вершині даного трикутника.

19. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на основі трикутника, а дві інші – на бічних сторонах.

Вказівка: побудуйте квадрат $K'L'M'N'$, а потім застосуйте гомотетію з центром в точці A (рис. 54).

20. Вписати у даний трикутник ABC прямокутник з відношенням сторін 2:5 так, щоб більша сторона прямокутника належала б основі AC, а дві вершини лежали б на сторонах BA і BC.

21. Доведіть, що точка перетину медіан M, точка перетину висот H і центр описаного кола O трикутника ABC належать одній прямій, причому $HM = 2OH$ (пряма Ейлера).

Вказівка: доведіть, що трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 55) гомотетичний трикутнику ABC ($B_1C_1 // BC$, $A_1C_1 // AC$, $A_1B_1 // AB$) з коефіцієнтом $k = -2$ і центром у точці M.

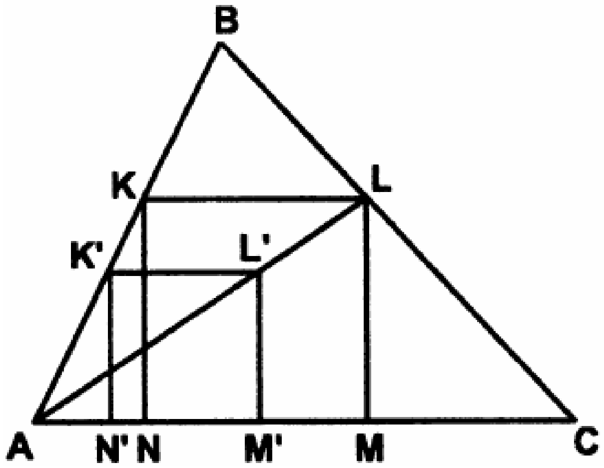

Рис. 54

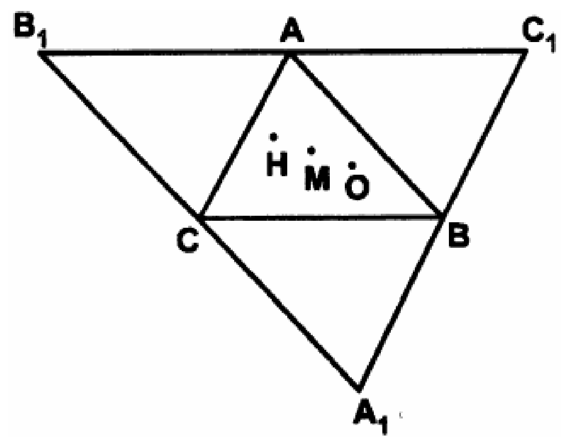

Рис. 55

Вправи на застосування повороту

22. Дано кут ABC і всередині нього точку M. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник із вершиною в точці M так, щоб дві інші його вершини лежали на сторонах кута.

Вказівка: розгляньте поворот із центром M на кут 90°. Нехай образ прямої BC перетинає пряму BA в точці N, тобто $R_M^{90^\circ}(BC) = B_1C_1$ і $B_1C_1 \cap BA = N$. Тоді $R_M^{-90^\circ}(B_1C_1) = BC$, $R_M^{-90^\circ}(N) = K$, причому K належить BC. Отже, $MN = MK$, $\angle NMK = 90°$.

23. Дано кут ABC і всередині нього точку M. Побудувати рівнобічний трикутник із вершиною в точці M так, щоб дві інші його вершини лежали на сторонах кута.

24. У даний квадрат впишіть рівнобічний трикутник так, щоб одна з його вершин збіглася з вершиною квадрата, а дві інші належали сторонам квадрата.

25. Дано два кола і точку M поза цими колами. Побудуйте прямокутний рівнобедрений трикутник із вершиною в точці M так, щоб дві інші вершини лежали на даних колах.

26. Усередині трикутника ABC позначено точку P. Знайдіть на сторонах BC і AC такі точки K і M, що $PK = PM$ і $\angle KPM = 45°$.

27. Дано коло, квадрат і точку P. Побудуйте рівнобедрений трикутник PAB $\left(PA = PB\right)$, вершини A і B якого належать колу і стороні квадрата, а $\angle APB = 45°$.

28. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки цих прямих, які знаходяться всередині квадрата, однакові.

Вказівка: розгляньте поворот із центром у центрі квадрата на кут 90°.

29. Через центр рівнобічного трикутника проведено дві прямі, кут між якими дорівнює 60°. Доведіть, що відрізки цих прямих, що знаходяться всередині трикутника, однакові.

30. Побудуйте рівнобічний трикутник так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

Вказівка: нехай дано прямі a_1, a_2, a_3, причому a_2 лежить у смузі прямих a_1 і $a_{3.}$ Оберемо на a_2 довільну точку O і розглянемо поворот $R_O^{60^\circ}$. Нехай $R_O^{60^\circ}(a_1) = a_1^{'}$. Точка перетину прямих $a_1^{'}$ і a_3 – одна з вершин шуканого трикутника.

31. Побудуйте квадрат так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

32. На сторонах AB і AC трикутника ABC побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$ на зовнішню сторону. Доведіть, що $MC = BP$, $MC \perp BP$.

Вказівка: розгляньте поворот із центром у точці A на кут $90°$.

33. На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O – центр квадрата.

Відповідь: $90°$.

Вказівка: розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$.

34. На сторонах AB і AC рівнобічного трикутника ABC позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O – центр трикутника.

Вказівка: розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$.

35. У рівнобічній трапеції $ABCD$ на бічних сторонах AB і CD позначено точки K і M відповідно так, що $AK = CM$. Менша основа BC трапеції дорівнює бічній стороні, а гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут KOM, де O – середина AD.

Відповідь: $120°$.

Вказівка: доведіть, що $AD = 2BC$. Розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$.

36. У ромбі $ABCD$ з тупим кутом A, що дорівнює $120°$, на сторонах AB і AD позначено точки K і M відповідно так, що $BK = AM$. Знайдіть кут KCM.

Відповідь: $60°$.

37. Впишіть у коло два однакових трикутники з відповідно перпендикулярними сторонами.

38. Усередині квадрата $ABCD$ взято точку K і на відрізку AK як на стороні побудовано квадрат $AKEM$, сторона KE якого перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $BK = DM$.

39. На прямій l взято послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC з різних боків від прямої l побудовано рівнобічні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини K і L відповідно відрізків DC і BN і точка A є вершинами рівнобічного трикутника.

40. На прямій l взято послідовно точки A, C, E. На сторонах AC і CE з одного боку від прямої l побудовано рівнобічні трикутники ABC і CDE. Точки K і M – середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM – рівнобічний.

41. Кут C трикутника ABC дорівнює 120°. Довести, що $l_C = \dfrac{ab}{a+b}$, де l_C – довжина бісектриси, яка виходить із вершини C, $AC = b$, $BC = a$.

Вказівка: нехай $R_C^{-60^\circ}(A) = A_1$, $AA_1 // CD$ де CD – бісектриса кута C. $\Delta AA_1B \sim \Delta CBD$.

42. З точки P, яку розміщено всередині рівнобічного трикутника ABC, сторону AB видно під кутом 150°. Довести, що відрізки AP, BP, CP можуть слугувати сторонами прямокутного трикутника.

Вказівка: $R_A^{60^\circ}(P) = P_1$. $P_1B = PC$, $AP = P_1P$, $\angle P_1PA = 60°$.

43. Усередині рівнобічного трикутника ABC обрано точку P так, що $AP^2 + BP^2 = CP^2$. Довести, що $\angle APB = 150°$.

§ 6. Тема «Метод координат. Векторний метод »

На вивчення теми «Метод координат. Векторний метод » за програмою відводиться дві години занять курсів за вибором, доречно на першому занятті розглянути задачі на використання методу координат, а на другому векторний метод розв'язування задач.

Вправи на метод координат

1. Знайдіть множину точок площини, різниця квадратів відстаней від яких до двох даних точок постійна.

Відповідь: Пряма перпендикулярна до відрізка, що сполучає дані точки.

Вказівка: оберіть початок координат на середині даного відрізка. Вісь абсцис містить цей відрізок.

2. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину точок площини, віддалених від A на відстань вдвічі більшу, ніж від B.

Відповідь: Коло.

Вказівка: нехай початок координат у точці A. Додатна піввісь збігається з променем $[AB)$. Рівняння кола буде $\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{4}{9}$.

3. На площині дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

Відповідь: Коло, центр якого ділить відрізок AB у відношенні 2:1, рахуючи від вершини A, радіусом $\frac{4}{3}AB$.

4. На площині дано дві точки A і B. Точка C переміщується в площині так, що довжина медіани AD трикутника ABC залишається незмінною. Знайдіть множину точок C.

Відповідь: коло без точок перетину з прямою AB.

Вказівка: оберемо систему координат як у попередній задачі. Якщо координати точки $C(x; y)$, то $D\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$.

5. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину C таких точок площини, щоб у трикутнику ABC медіана AD дорівнювала стороні BC.

Відповідь: коло з центром на прямій AB без точок перетину з прямою AB.

6. Знайдіть ГМТ площини, сума квадратів відстаней від яких до вершин даного трикутника – величина постійна.

Відповідь: Коло з центром у центроїді даного трикутника або сам центроїд.

7. Знайдіть множину точок площини, сума квадратів відстаней від яких до двох протилежних вершин даного прямокутника дорівнює сумі квадратів відстаней до двох інших його вершин.

Відповідь:. Уся площина.

Вказівка: введіть систему координат із центром у точці перетину діагоналей прямокутника і осями, паралельними його сторонам.

8. На даному відрізку AB береться довільна точка C. З одного боку від AB на відрізках AC і CB будують квадрати. Знайдіть множину середин відрізків, які сполучають центри цих квадратів.

Відповідь: Відрізок, довжина якого дорівнює $\frac{1}{2}AB$.

9. Коло вписане в ромб $ABCD$ з кутом 45°. Довести, що для будь-якої точки M кола має місце рівність $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

Вказівка: оберіть систему координат так, щоб початок збігався з точкою перетину діагоналей ромба, а осі містили діагоналі. Якщо $M(x;y)$, то $x^2+y^2=\dfrac{AB^2}{8}$.

10. Коло вписано в ромб з кутом $60°$. Відстань від центра кола до найближчої вершини дорівнює 1. Доведіть, що для будь-якої точки P кола має місце рівність $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=11$.

11. У трикутнику ABC на стороні BC обрано точку D. Доведіть, що має місце рівність $AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD$.

Вказівка: оберіть систему координат із центром в точці B, вісь абсцис збігається з променем BC.

12. Дано трикутник ABC, M – його центроїд. Доведіть, що для будь-якої точки X площини має місце рівність

$$XA^2+XB^2+XC^2=AM^2+BM^2+CM^2+3XM^2.$$

Вказівка: оберіть систему координат як у попередній задачі.

13. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ сторони AB і CD продовжено до їх перетину в точці K. доведіть, що $MK^2=MB^2+MC^2$, де M – довільна точка кола, описаного навколо шестикутника.

Вказівка: оберіть початок координат у центрі кола з осями, які збігаються з осями симетрії шестикутника.

14. У квадрат $ABCD$ вписано коло одиничного радіуса. Довести, що для будь-якої точки M цього кола має місце рівність

$$MA^2\cdot MC^2+MB^2\cdot MD^2=10.$$

15. У круг вписано трапецію $MNPQ$ ($MQ//NP$), A – довільна точка прямої, що містить діаметр, паралельний основам трапеції. Довести, що $AM^2+AQ^2=AN^2+AP^2$.

Вказівка: нехай початок координат збігається з центром кола. Вісь ординат містить діаметр, про який говориться в умові.

16. Довести теорему про властивості сторін і діагоналей паралелограма: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

17. На прямій l дано три точки A, B і C так, що точка B лежить між A і C. З одного боку від прямої l побудовано рівнобічні трикутники AMB і BNC. Доведіть, що середина відрізка

MC, середина відрізка NA і точка B є вершинами рівнобічного трикутника.

Вказівка: оберемо початок координат у точці A, вісь абсцис збігається з променем AC. Взявши сторони рівнобічних трикутників за a і b, знайдіть довжини відрізків BQ, BP, QP.

18. Хорда AB стягує дугу кола, яка дорівнює 120°. Точка C лежить на цій дузі, а точка D – на хорді AB. $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

Вказівка: див. задачу 2.

19. У паралелограмі $ABCD$ на діагоналях AC і BD взято відповідно точки P і Q так, що $AP : PC = 2 : 3$, $BQ : QD = 1 : 4$. Знайдіть PQ, якщо $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{73}}{5}$.

Вказівка: оберіть початок координат у точці D, вісь абсцис – $[DA)$, вісь ординат – $[DB)$.

Вправи на векторний метод

20. Точка перетину середніх ліній чотирикутника збігається з точкою перетину його діагоналей. Довести, що чотирикутник – паралелограм.

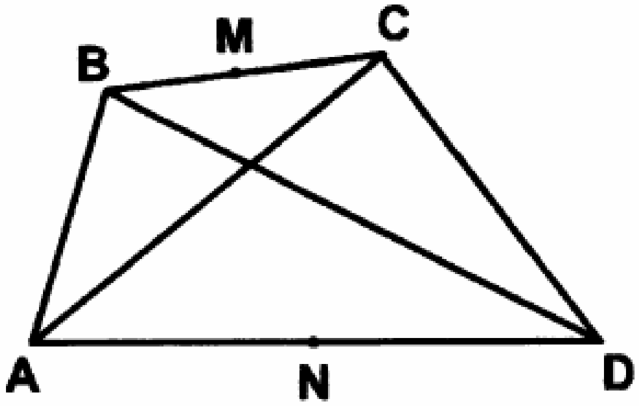

Рис. 56

Вказівка: нехай O – точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ (рис. 56). Точки M і N – середини сторін BC і Ad відповідно. Позначимо $\overrightarrow{OB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, а $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right)$. Оскільки $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ – колінеарні, то $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$ або $\frac{k}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right)$. Звідси $(k - \alpha)\vec{a} = (\beta - k)\vec{b}$, але оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – не колінеарні, то $k = \alpha = \beta$. Маємо: $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \alpha\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, отже, BC//AD. Аналогічно можна показати, що AB//CD.

21. Довести, що в чотирикутнику відрізок, який сполучає середини діагоналей, проходить через точку перетину середніх ліній і ділиться цією точкою навпіл.

22. Точка M – середина відрізка AB, точка M' – середина відрізка $A'B'$. довести, що середини відрізків AA', BB' і MM' лежать на одній прямій.

Вказівка: якщо точки K, L і P – середини відрізків AA', MM' і BB' відповідно, то $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)$, а $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)$.

23. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

24. Доведіть, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину її бічних сторін і середини основ належить одній прямій.

Вказівка: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (рис. 57). З подібності трикутників AOD і COB: $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OM} = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Для доведення належності точок K, F і M до одної прямої використайте подібність трикутників BKC і AKD.

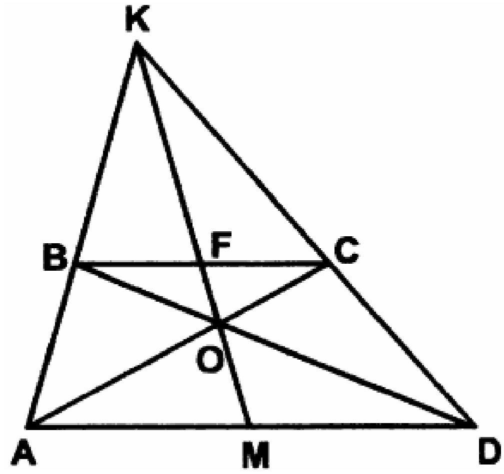

Рис. 57

25. Дано чотирикутник $ABCD$, середини сторін AB і CD і точка перетину діагоналей якого належать одній прямій. Доведіть, що $AB // CD$.

26. Середини сторін AB і CD, BC і DE п'ятикутника $ABCDE$ сполучено відрізками. Середини H і K одержаних відрізків знову сполучено. Доведіть, що $HK // AE$ і $HK = \frac{1}{4}AE$.

Вказівка: доведіть, що вектор $\overrightarrow{HK}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{MF}$ (рис. 58).

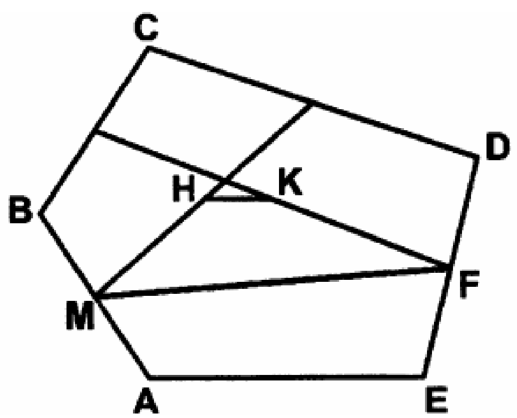

Рис. 58

27. У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N – середини діагоналей AC і BD. На прямих AD і BC взято точки P і Q так, що $PM//BD$ і $QN//AC$. Довести, що $PQ//AB$.

28. На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Довести, що точки M, N і B належать одній прямій.

Вказівка: $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}$ (рис. 59).

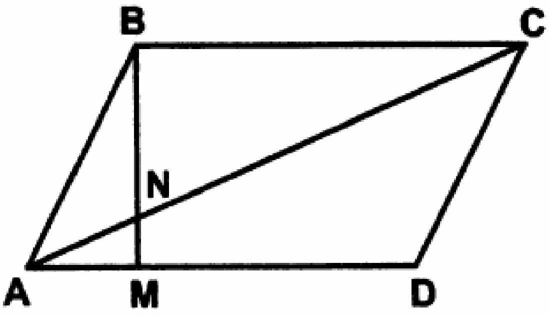

Рис. 59

29. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Вказівка: $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$,

$\overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{CE} = \frac{k}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{CB}$ (рис. 60).

$\overrightarrow{CO} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$

Прирівняйте коефіцієнти в одержаних рівняннях і врахуйте, що $\alpha + \beta = 1$.

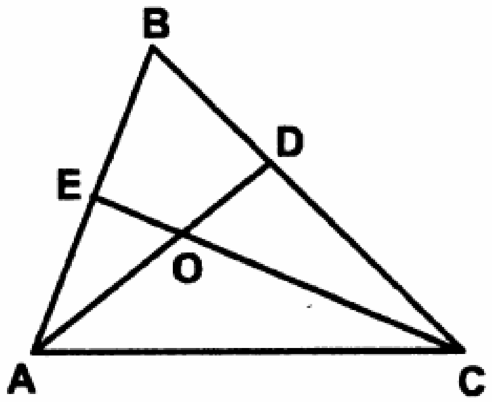

Рис. 60

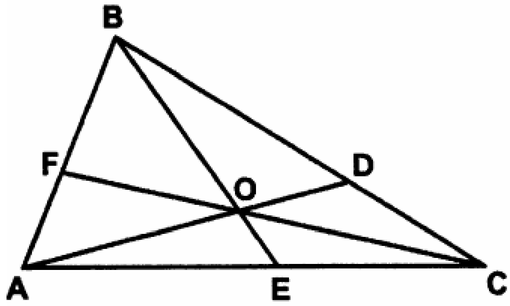

Рис. 61

30. Точки D, E і F лежать на сторонах трикутника ABC так, що $\frac{BD}{DC} = 3$, $\frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$ і $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$. Довести, що прямі AD, BE і CF проходять через одну точку.

Вказівка: знайдіть відношення $\frac{BO}{OE}$ (Рис. 61) і доведіть, що вектори AO і OD колінеарні (O – точка перетину BE і CF).

31. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC обрано точки F, M, N відповідно так, що $\frac{AF}{FB}=\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}$. Довести, що точки перетину медіан трикутників ABC і FMN збігаються.

Вказівка: якщо M_1 і M_2 – точки перетину медіан трикутника ABC і DEF, то $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}\right)$.

32. Дано чотирикутник і точку M. Довести, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін даного чотирикутника, є вершинами паралелограма.

33. Точки L і M – середини протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Довести: для того, щоб чотирикутник був трапецією, необхідно і достатньо $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

34. У правильному трикутнику ABC на стороні BC обрано точку M, з якої проведено перпендикуляри MN і MK на сторони AB і AC. Окрім того, проведено відрізки KN і OM (O – центр трикутника), які перетинаються в точці P. Довести, що $NP=KP$.

Вказівка: введіть систему координат (рис. 62): $C(1;0)$, $K(x;0)$, $M\left(x;(1-x)\sqrt{3}\right)$, $N\left(-\frac{x}{2};\sqrt{3}-\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$. Якщо P_1 – середина NK, то $P_1\left(\frac{x}{4};\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)$. Доведіть, що $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$.

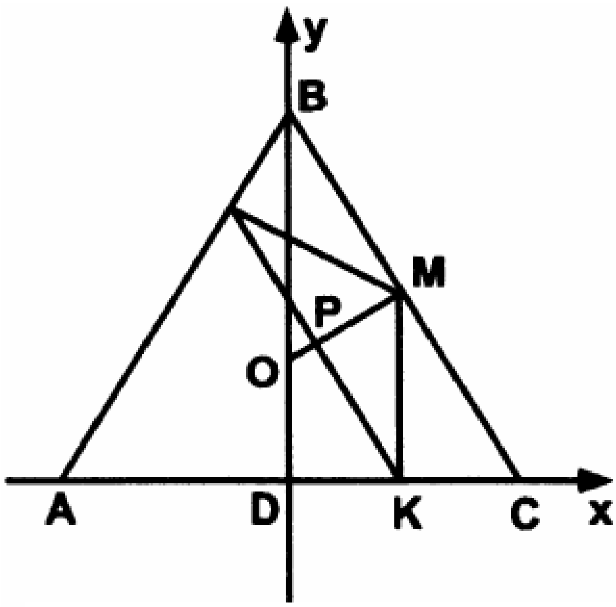

Рис. 62

35. У трикутнику ABC $AB=4$, $AC=10$, $\angle BAC=60°$. Точка N належить стороні BC і $\frac{BN}{NC}=3$. Знайти AN.

Відповідь: $\frac{\sqrt{199}}{2}$.

Вказівка: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$ Потім одержану рівність піднесіть до скалярного квадрата.

36. BD – медіана трикутника ABC. $\angle DBC = 90°,$ $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB.$ Знайти $\angle ABD.$

Відповідь: $30°$.

37. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC відповідно обрано точки D і E так, що $BD = CD,$ $AE = 2CE.$ Знайти $\frac{BC}{AB},$ якщо $AD \perp BE$ і $\angle ABC = 60°.$

Відповідь: $\frac{3+\sqrt{73}}{8}.$

Вказівка: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$ $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}.$ З урахуванням $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ і $\angle ABC = 60°$ отримайте рівняння $4\frac{BC^2}{BA^2} - 3\frac{BC}{BA} - 4 = 0.$

38. У паралелограмі $ABCD$ точка K – середина сторони BC, а точка M – середина сторони CD. Знайти AD, якщо $AK = 6,$ $AM = 3,$ $\angle KAM = 60°.$

Відповідь: 4.

39. У трикутнику ABC $\angle B = 90°.$ Медіани AD і BE взаємно перпендикулярні. Знайти $\angle ACB.$

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

40. У трикутнику ABC $\angle BAC = 60°,$ $AB = 6,$ $AC = 4.$ Знайти кут між медіанами BD і CF.

Відповідь: $\arccos\frac{11\sqrt{91}}{182}.$

41. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = a,$ $BC = a\sqrt{2}.$ Довести, що медіани AM_1 і CM_2 перпендикулярні.

Вказівка: Перевірте, що $\overrightarrow{CM_2} \cdot \overrightarrow{AM_1} = 0.$(Рис.63). Якщо вектор CM_2 дорівнює півсумі векторів CA і

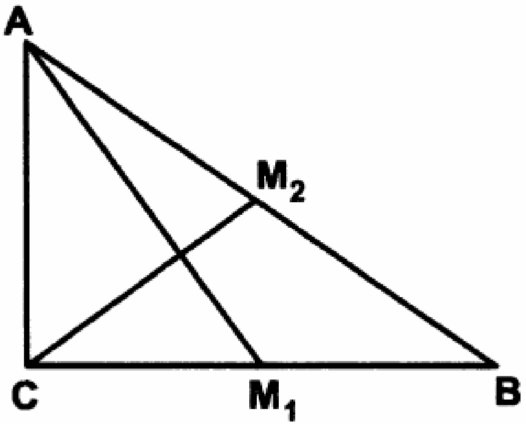

Рис. 63

CB, а вектор AM_1 – піврізниці векторів CB і CA.

42. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$. $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB = \sqrt{3}$, $CD = 3$. Знайти довжину відрізка, що сполучає середини сторін AD і BC.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

43. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O. $OB = OC = 1$, $OA = 8$, $OD = 7$. Знайти кут між прямими AB і DC.

Відповідь: $\arccos\dfrac{3\sqrt{130}}{130}$.

Вказівка: введіть систему координат із центром у точці перетину діагоналей.

44. У трапеції $ABCD$ бічна сторона AB перпендикулярна основам Ad і BC. Точка E – середина сторони CD. Знайти відношення $\dfrac{AD}{BC}$, якщо $AE = 2AB$ і $AE \perp CD$.

Відповідь: $\dfrac{8}{7}$.

Вказівка: введіть систему координат так, що $A(0;0)$, $B(0;p)$, $C(1;p)$, $D(k;0)$. Тоді $E\left(\dfrac{k+1}{2};\dfrac{p}{2}\right)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\dfrac{k+1}{2};\dfrac{p}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = (k-1;-p)$. Тепер з умов $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ і $\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = 4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ одержіть систему для k і p.

45. Довести, що в довільному трикутнику ABC

$$ctg\angle A + ctg\angle B + ctg\angle C = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S}.$$

Вказівка:

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B + \text{ctg}C = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC\sin A} + \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{AB\cdot BC\sin B} + \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{BC\cdot CA\sin C} =$$

$= \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{2S}$. Далі скористайтеся тим, що

$$2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \right)^2 - \left(\left| AB \right|^2 + \left| BC \right|^2 + \left| CA \right|^2 \right).$$

46. Нехай M і N – середини сторін CD і DE правильного шестикутника $ABCDEF$, а P – точка перетину відрізків AM і BN. Знайти кут між прямими AM і BN.

Відповідь: $60°$.

Вказівка: введіть систему координат у центрі шестикутника.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Габович И. Г. Алгоритмический поход к решению геометрических задач / И. Г. Габович – К.: Рад. школа, 1989. – 160 с.
2. Галицкий М.Л. Курс геометрии 8-го класса в задачах / М. Л. Галицкий, Ф. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – Львов, 1991. – 96 с – (Квантор; №7).
3. Горнштейн П. И. Подводные рифы конкурсного экзамена по математике / Горнштейн П.И., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. – К.: Евроиндекс Лтд, 1994. – 240 с.
4. Готман Э.Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Э. Г. Готман, З. А. Скопец. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
5. Крайзман М. Л. Розв’язування геометричних задач методом координат / М. Л. Крайзман. – К.: Рад. школа, 1983. – 127 с.
6. Кушнир И.А. Построение треугольника (Энциклопедия решения задач) / И. А. Кушнир. – К., 1993. – 71 с.
7. Лоповок Л.М. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов / Л. М. Лоповок. – К.: Рад. школа, 1985. – 104 с.
8. Парахневич В. А. Сборник задач по геометрии / В. А. Парахневич, Е. В. Парахневич. – Мінськ: Нар.асвета, 1972. – 176 с.
9. Прасол В. В. Задачи по планиметрии. Ч.2. / Прасол В. В. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
10. Рабинович Е. М. Равновеликие треугольники в задачах / Е. М. Рабинович // Математика в школе. – 1993. – №3. – с. 63-65.
11. Рабинович Е. М. Сборник задач по планиметрии на готовых чертежах / Е. М. Рабинович. – К.: Рад. школа, 1996. – 124 с.
12. Рыбкин Н. А. Сборник задач по геометрии. Часть I. Планиметрия / Н. А. Рыбкин. – Изд. 18-е. – Учпедгиз, 1952. – 120 с.
13. Саранцев Г. И. Сборник задач на геометрические преобразования / Г. И. Саранцев – М.: Просвещение, 1975. – 112 с.
14. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1988. – 431 с.
15. Цыпкин А. Г. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы / Цыпкин А. Г., Пинский А. И. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
16. Шарыгин И. Ф. Учимся решать задачи по геометрии / И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1989. – № 2-4.

ДОДАТКИ

Додаток А
Перелік програм курсів за вибором для учнів старших класів

Таблиця А.1
Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для природничо-математичного і технологічного напрямів

№ з/п	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Обернені тригонометричні функції	Грицик Т.А.	10	16 (17)
2.	Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах	Єргіна О.В.	10	35
3.	Елементи теорії чисел	Требенко Д. Я., Требенко О. О.	10	35
4.	Обчислювальний практикум	Коновалова Г.А.	10	35
5.	Прикладні задачі на екстремум	Попова Л.К.	11	8
6.	Зображення та геометричні перетворення	Кугай Н.В., Заїка О.В.	11	35
7.	Застосування похідної до розв'язування задач	Смішко А.С.	11	35
8.	Інтеграл та його застосування	Романуха В.Б.	11	35
9.	Математичні моделі у фізиці	Бровко Г.В., Ковтун Л.Г. Козлова О.М., Новосельський М.А.	11	17
10.	Фізична математика	Канакіна Л.П.	10-11	70
11.	Історія математики	Бевз В.Г.	10-11	70
12.	Побудова зображень геометричних фігур	Бегерська А.В., Бойко Л.А.	10	17
13.	Обчислення в системах комп'ютерної алгебри	Громко Л.В.	11	17

Таблиця А.2

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для суспільно-гуманітарного напряму

№ з/п	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Історія тригонометрії	Грицик Т.А.	10	8
2.	Економіко-математичне моделювання	Франчук Т.І., Шевчук Н.В.	10	35
3.	Задачі лінійного програмування	Бегерська А.В., Бойко Л.А.	10	35
4.	Основи фінансової математики та математичної економіки	Ліпчевський Л.В.	10,11	35
5.	Математика прибутків	Желтуха Т.В.	10-11	70
6.	Задачі економічного змісту в математиці	Ткач Ю.М.	10-11	70
7.	Комп'ютерна математика для економістів	Сущук-Слюсаренко В.І.	11	17

Таблиця А.3

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для поглибленого вивчення математики

№	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Ціла і дробова частини числа	Апостолова Г.В.	10,11	17
2.	Вища математика	Морозов О.В.	10-11	140
3.	Введення у фрактальний аналіз	Цибко В.В.	11	35
4.	Елементи стохастики	Лиходєєва Г.В.	11	17
5.	Комплексні числа та їх застосування	Шаран О.В.	11	35

Таблиця А.4

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для універсального профілю

№ з/п	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Раціональні функції	Кравченко Н.Д.	10	35
2.	Рівняння в курсі алгебри	Догару Г.Г.	10-11	105
3.	Функції та алгебраїчні вирази на координатній площині	Апостолова Г.В., Ліпчевський Л.В.	10	35
4.	Методи розв'язування задач з математики	Лахтадир Л.І.	10-11	70
5.	Модуль числа	Апостолова Г.В. Прокопенко Н.С.	10-11	35
6.	Розв'язування задач з параметрами	Апостолова Г.В., Прокопенко Н.С.	10-11	35
7.	Готуємось до ЗНО	Апостолова Г.В.	10-11	170
8.	Факультативний курс з геометрії	Хабарова М.М., Шатило Г.І.	11	35

Додаток Б

Програми деяких курсів за вибором на універсальному профілі

Програма факультативного курсу для учнів 10-11 класів

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

АВТОР:

Лахтадир Лариса Іванівна, вчитель математики БоярськоїЗОШ І-ІІІ ступенів № І Киево-Святошинського району Київської області

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Для шкільного курсу математики характерним є те, що більшість понять не вводиться відразу в повному обсязі. Зміст і об'єм таких понять розширюється і збагачується поступово, у міру розвитку курсу. Окремим розділам математики (модуль, параметр, перетворення графіків, побудова зображень) у шкільному курсі взагалі не приділено належної уваги. Тому надзвичайно важливими є систематизація й узагальнення набутих знань на завершальному етапі шкільного навчання (у старшій школі).

У процесі узагальнення є можливість звернути увагу учнів на діалектичний характер понять, їх взаємозв'язок і взаємозалежність, роль у поширенні діалектичного методу на математичну науку. Узагальнення та формування основних методів розв'язування задач ставить учня в умови, коли необхідно «піднятися» над вивченим матеріалом, визначити головне, що працює не лише в даному розділі. Тобто знання учнів поглиблюються, розширюються, систематизуються і доводяться до світоглядного рівня, при цьому формуються інтелектуальні уміння й навички. При узагальненні матеріалу та виробленні спільного методу розв'язування певного виду завдань встановлюються внутрішньопредметні зв'язки та акцентується увага на їх прикладному значенні, завдяки чому знання стають системними.

Кожна задача має ідейну та технічну складність. Ідейна частина дає відповідь на питання: «Як розв'язати задачу?». Технічна являє собою реалізацію знайденої ідеї. Є задачі, в яких головне — знайти ідею розв'язання, а технічна частина практично відсутня, це в основному олімпіадні задачі. Є задачі, в яких ідея розв'язання досить очевидна, але її реалізація потребує великої за обсягом обчислювальної роботи (задачі з матеріалів конкурсних іспитів). І є задачі, в яких ідейна і технічна частини приблизно рівнозначні. Такі задачі пропонуються при вивченні даного факультативного курсу.

Мета курсу — забезпечити загальноосвітню підготовку учнів та спеціалізовану поглиблену підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Завдання курсу:

• розвинути потенційні й творчі здібності кожного учня, не обмежуючи наперед рівень складності матеріалу, що узагальнюється;

• виробити в учнів особистий підхід під час використання знань у різних ситуаціях;

• розширити обсяг знань за рахунок залучення додаткових теоретичних фактів.

Характер програми пропедевтичний — підготовка учнів до навчання у вищих навчальних закладах. Особливістю програми є більш глибоке і повне опанування понять, законів, теорії та, основне, методів розв'язування задач, передбачених стандартом освіти.

Викладання курсу базується на ***методичних принципах:***

• регулярності (курс читається протягом 2 років);

• паралельності (методи діють для завдань з різним програмовим часом вивчення);

• зміни приорітетів (головне — бачення ідеї розв'язання задачі);

• варіативності (на прикладі однієї задачі показати різні методи);

• самоконтролю;

• швидкого повторення (розкладання «по поличках» задачного архіву: проста задача, складніша, потребує часу для обмірковування);

• моделювання ситуацій (моделювання критичних ситуацій, близьких до конкурсних екзаменів та олімпіад).

Виділяються ***принципи формування групи:***

• ідентичність мети;

• вільність вибору;

• математичні здібності;

• спільна профільна спрямованість.

Прогнозуючий результат:

• формування загальнокультурного базису;

• оволодіння комунікативними вміннями;

• оволодіння сучасними технологіями роботи з інформацією;

• формування досвіду самопізнання, самореалізації, індивідуальних і групових дій, на підставі яких можливо здійснити попереднє особистісне, соціальне та професійне самовизначення;

• вироблення вмінь формувати задум своїх дій, прогнозувати, а також визначати умови та результати реалізації цього задуму; вмінь оцінювати результати своєї праці (в тому числі в порівнянні прогнозованих з реально досягнутими).

Очікувані результати навчальних досягнень учнів наприкінці вивчення курсу. Учні повинні:

• ***знати*** основні базові методи при вивченні окремих тем;

• ***уміти*** застосовувати ці методи для розв'язування задач.

Курс розрахований на 70 годин. У разі опрацювання курсу протягом двох років тижневе навантаження становить 1 годину (можливе збільшення кількості годин до 2 на тиждень). Розподіл годин між темами умовний і може змінюватися вчителем залежно від потреб і можливостей конкретної групи учнів. Програма розрахована на учнів старших класів, а також на осіб, що самостійно готуються до вступних іспитів з математики.

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ **(11 клас, фрагмент)**

Розділ V. Методи розв'язування геометричних задач (17 годин)

№з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
13	Метод допоміжного кола	1
14	Метод допоміжної площі	1
15	Метод «подовженої» медіани	1
16	Застосування центральної та осьової симетрії	1
17	Застосування гомотетії та повороту	1
18	Алгебраїчні методи: метод поетапного розв'язування; метод рівняння	2
19	Метод координат. Векторний метод	2
20	Методи побудови зображень (позиційні задачі в стереометрії): Метод проектуючих прямих Афінне перетворення площин (теорема Польке-Шварца та її наслідки) Метод січної площини Метод відповідності Метод слідів	 2 2 2 2

ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В. Я сам! — К.: Факт, 1997. — 200 с.
2. Вірменко Н. О., Ляшко І. І., Шведов К. І. Графіки функцій. Довідник / За ред. І.І. Ляшка.— К.: Наукова думка, 1977.— С. 88-108.
3. Гайштут А. Г., Ушаков Р. П. Сборник задач по математике с примерами решений. Для учащихся общеобразовательных школ, лицеев и гимназий.— К.: А.С.К., 2002.— 590 с.
4. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя.— К.: Радянська школа, 1990. — 117 с.
5. Жовнір Я. М. Позиційні задачі в стереометрії.— К.: Освіта, 1991.— 94 с.
6. Иржавцева В. П., Федченко Л. Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под ред. Н. Л. Коломинского.— К., 1988.— 205 с.
7. Математика. Великий довідник для школярів та абітурієнтів.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2002.— 639 с.
8. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Методи розв'язування геометричних задач . – К.: Магістр-S, 1997. – 256 с.
9. Нелін Є. П. Методи розв'язування геометричних задач. Додаток до навчального посібника «Геометрія в таблицях».— Харків: Світ дитинства, 1997.—31 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Вибрані методи і прийоми розв’язування геометричних задач

методичний посібник

Укладач: к.п.н., доцент Лов’янова І. В.

Дані видавця
підписано до друку ЧЕРВНЕМ 2014 року