Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання

Володимир Вікторович Корольський[*], Світлана Сергіївна Габ[#]
Кафедра математики та методики її навчання,
Криворізький державний педагогічний університет,
пр. Гагаріна, 54, м. Кривий Ріг, 50086, Україна
korolskiivv@gmail.com[*], sveta06041995@gmail.com[#]

Анотація. *Метою дослідження* є геометрична інтерпретація числових рядів, побудова моделі геометричної інтерпретації числових рядів в середовищі програмування, отримання розрахунків для лінійної, квадратурної та кубатурної геометричної інтерпретації числових рядів. *Задачами дослідження* є розгляд питання про необхідність геометричної інтерпретації об'єктів у навчанні природничо-математичних дисциплін, зокрема числових рядів у рамках дисципліни «Математичний аналіз»; розкриття змісту таких понять, як «модель», «моделювання», побудова моделі числових рядів у середовищі програмування; виконання обчислення для знайдених числових рядів за допомогою електронних таблиць. *Об'єктом дослідження* є геометрична інтерпретація числових рядів. *Предметом дослідження* є використання мови програмування та електронних таблиць для моделювання та аналізу отриманих результатів числових рядів з лінійною, квадратурною та кубатурною геометричною інтерпретацією. *Методами дослідження* є евристичний пошук знакових моделей числових рядів за допомогою моделей певних геометричних об'єктів. *Результати дослідженнями* планується узагальнити в методичній розробці з теми «Числові ряди».

Ключові слова: моделювання; модель; геометрична інтерпретація; числові ряди.

V. V. Korolskyi[*], S. S. Hab[#]. Linear, quadrature and cubature geometric interpretation of numerical series by means of modeling

Abstract. *The aim of the study* is geometric interpretation of numerical series, to construct a model of geometric interpretation of numerical series in the programming environment, to obtain calculations for linear, quadrature, and cube-shaped geometric interpretation of numerical series. *The objectives of the study* are to consider the need for geometric interpretation of objects in the teaching of natural and mathematical disciplines, in particular numerical series within the course of Calculus; to disclose the content of such concepts as «model», «modeling», to construct a model for numerical series in the programming environment; to calculate the numeric series using spreadsheets.

The object of the study is the geometric interpretation of numerical series. *The subject of the study* is to use the programming language and spreadsheets to simulate and analyze obtained results for numerical series using linear, quadrature and cube-shaped geometric interpretation. *The research methods* are heuristic search of sign models of numerical series using models of certain geometric objects. *The results of the study* are planned to be generalized in methodical work on the topic «Numerical series».

Keywords: modeling; model; geometric interpretation; numerical series.

Affiliation: Department of mathematics and methods of learning mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, 54, Gagarin Ave., Kryvyi Rih, 50086, Ukraine.

E-mail: korolskiivv@gmail.com*, sveta06041995@gmail.com#.

Для підвищення ефективності засвоєння знань та активізації пізнавального інтересу студентів в сучасній організації навчального процесу розробляються різні підходи до подання матеріалу викладачем. Використання геометричної інтерпретації та моделювання є досить ефективним дидактичним засобом [1].

В контексті нашого дослідження, при вивченні розділу «Числові ряди» доцільним є геометрично інтерпретувати та будувати моделі деяких числових рядів для кращого сприйняття студентами матеріалу лекцій та практичних занять.

Моделювання – заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання відомостей про найважливіші властивості об'єкта-оригінала шляхом здійснення експериментів з об'єктом-моделлю. В свою чергу моделлю називається об'єкт, який у деяких відношеннях збігається з оригіналом, і який є засобом подання, пояснення та/або прогнозування його поведінки [2].

Розглянемо декілька прикладів геометричної інтерпретації членів числових рядів.

Приклад 1. Геометрично інтерпретувати, побудувати модель та обчислити суму членів прогресії:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (1)$$

Геометрично інтерпретувати числовий ряд (1) можна за допомогою такого геометричного об'єкту як квадрат зі стороною $a_1 = 1$. Поділимо сторону даного квадрату навпіл та отримаємо квадрат зі стороною $a_2 = \frac{1}{2}$. Продовжимо даний процес для усіх наступних квадратів, зі сторонами, що є удвічі меншими за сторони попередніх квадратів. На подальших кроках міркувань запишемо:

$$a_3=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2};\ a_4=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3};\ a_5=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4};\ldots;\ a_k=\frac{1}{2^k};\ldots.$$

Отримаємо послідовність вкладених квадратів зі сторонами:

$1;\frac{1}{2};\frac{1}{2^2};\ +\frac{1}{2^3};\ \frac{1}{2^4};\ \ldots+\frac{1}{2^n};\ \ldots$, які вказані на рис. 1:

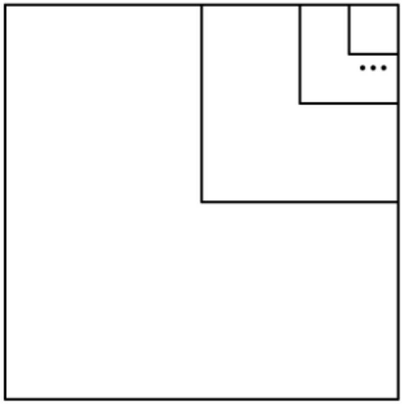

Рис. 1. Множина вкладених квадратів

Згорнемо дану послідовність та отримаємо ряд у загальному вигляді: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Числовий ряд (1) є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником: $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$, який є одним із варіантів представлення лінійної геометричної інтерпретації числового ряду.

Приклад 2. Геометрично інтерпретувати, побудувати модель та обчислити суму членів геометричної прогресії:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\ldots \qquad (2)$$

Для цього знайдемо площі розглянутих вкладених квадратів (рис. 1):

$$S_1 = a_1^2 = 1^2 = 1\,;\; S_2 = a_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}\,;$$

$$S_3 = a_3^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}\,;\;\ldots;\; S_k = a_k^2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\,;\;\ldots$$

Згорнемо дану послідовність та отримаємо ряд в загальному вигляді: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$, який є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{1}{2^{2(n-1)}}} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$.

Записаний ряд демонструє один із варіантів представлення квадратурної геометричної інтерпретації ряду геометричної прогресії.

Приклад 3. Геометрично інтерпретувати, побудувати модель та обчислити суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}} + \ldots \qquad (3)$$

Для ряду (3), за аналогією із прикладами 1 і 2, будемо розглядати послідовність вкладених кубів, сторони яких є удвічі меншими від попередньої ітерації, і відповідно мають вид:

$$a_1 = 1\,;\; a_2 = \frac{1}{2}\,;\; a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}\,;\; a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}\,;\;\ldots;\; a_k = \frac{1}{2^n}\,,$$

та представлені на рис. 2:

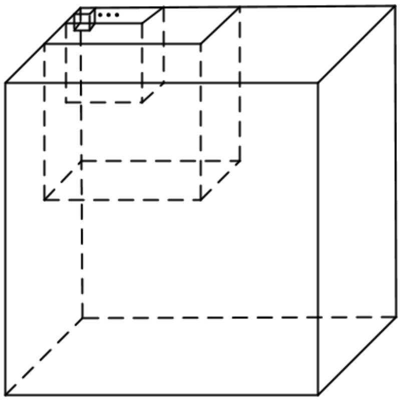

Рис. 2. Множина вкладених кубів

Інтуїтивно можна здогадатись, що представлена множина вкладених кубів ілюструє кубатурну геометричну інтерпретацію.

Знайдемо об’єми для вкладених кубів за формулою: $V = a^3$ і отримаємо такі результати:

$$V_1 = a_1^3 = 1^3 = 1\,;\; V_2 = a_2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}\,;$$

$$V_3 = a_3^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}\,;\ \ldots;\ V_k = a_k^3 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{32} = \frac{1}{2^{3n}}\,;\ \ldots$$

Згорнемо дану послідовність та отримаємо ряд виду: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$, який є прикладом ряду нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2^{3n}}}{\frac{1}{2^{3(n-1)}}} = \frac{2^{3n-3}}{2^{3n}} = \frac{1}{8}$.

Крім цього, студентам можна запропонувати самостійно створювати моделі геометричних об’єктів для заданих числових рядів, обчислювати як частинні суми, так і встановлювати межі для них і відповідно будувати графіки.

За допомогою засобів програмування продемонструємо побудовану модель ряду (3), а саме, вкладених кубів.

На першій ітерації можна побачити представлення самого кубу (рис. 3).

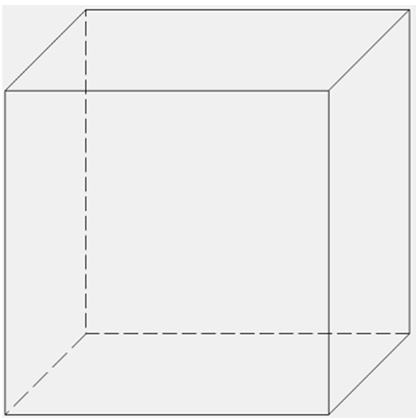

Рис. 3. I-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (3)

Аналогічно, вибираючи бажану кількість ітерацій, можна продемонструвати моделі подальших геометричних інтерпретацій ряду (3) у вигляді вкладених кубів. На рис. 4 та 5 представлені друга та четверта ітерації моделі:

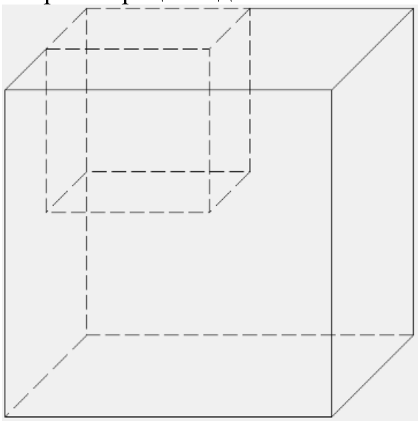

Рис. 4. II-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (3)

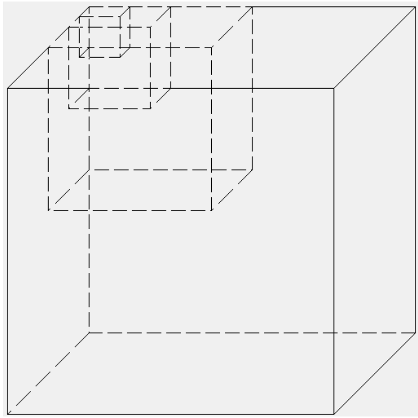

Рис. 5. IV-а ітерація моделі геометричної інтерпретації ряду (3)

Оскільки знаменники отриманих рядів відповідно дорівнюють: $q = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{4}$; $q = \frac{1}{8}$, тобто $|q| < 1$. Обчислимо суму для рядів (1), (2), (3) за формулою: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - b_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$, якщо $|q| < 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$, тому: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$:

$$(1): \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1;\ q = \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2;$$

$$(2): \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1;\ q = \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3};$$

$$(3): \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q} = \left\{ b_1 = 1;\ q = \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7};$$

Значення одержаних сум представлені на рис. 6, 7, 8:

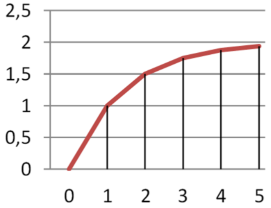

Рис. 6. Графік для частинних сум ряду (1)

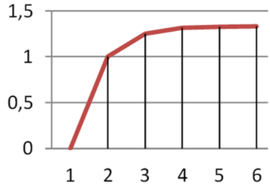

Рис. 7. Графік для частинних сум ряду (2)

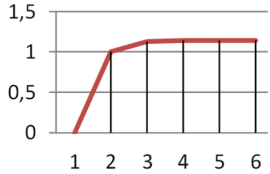

Рис. 8. Графік для частинних сум ряду (3)

При вивченні числових рядів студентам фізико-математичних факультетів пропонується геометрично інтерпретувати вище запропоновані числові ряди за допомогою представлення різних математичних об’єктів та змоделювати їх.

Список використаних джерел

1. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / Володимир Вікторович Корольський // Новітні комп’ютерні технології. – 2017. – Том XV. – С. 57-62.

2. Теплицький І. О. Елементи комп’ютерного моделювання / І. О. Теплицький. – Видання друге, виправлене і доповнене. – Кривий Ріг : КДПУ, 2010. – 264 с., іл.

References (translated and transliterated)

1. Korolskii V. V. Geometric interpretation of numerical series / V. V. Korolskii // Novitni kompiuterni tekhnolohii. – 2017. – Vol. XV. – P. 57-62. (In Ukrainian)

2. Teplytskyi I. O. Elementy kompiuternoho modeliuvannia [Elements of computer simulation] / I. O. Teplytskyi. – Vydannia druhe, vypravlene i dopovnene. – Kryvyi Rih : KDPU, 2010. – 264 s., il. (In Ukrainian)

Received: 20 April 2018; in revised form: 23 April 2018 / Accepted: 23 April 2018