Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Криворізький державний педагогічний університет»

В. В. Корольський, Д. Є. Бобилєв

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

*Змістовий модуль*

## Границя функції

Навчально-методичний посібник: компетентнісний підхід

Кривий Ріг

2018

**УДК 517.1**
**К 66**

***Рецензенти:***

*І. В. Лов'янова* – доктор педагогічних наук, доцент (Державний вищий навчальний заклад «Криворізький державний педагогічний університет»)

*М. О. Рашевський* – кандидат фізико-математичних наук, доцент (ДВНЗ «Криворізький національний університет»);

*К. І. Словак* – кандидат педагогічних наук, доцент (ДВНЗ «Криворізький національний університет»);

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного вищого навчального закладу «Криворізький державний педагогічний університет»*

*(протокол № від 2018 р.)*

**Корольський В. В., Бобилєв Д.Є.**

К 66 Математичний аналіз. Змістовий модуль «Границя функції» [Текст]: навчально-методичний посібник: компетентнісний підхід / В. В. Корольський, Д. Є. Бобилєв. – Кривий Ріг: Діонат, 2018. – 70 с.

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою курсу "Математичний аналіз" для студентів педагогічних університетів спеціальності *014.04 Середня освіта (Математика)*. Розглянуто основні поняття теорії границь та їх обчислення. Книгу розраховано на студентів, які опанувують математичний аналіз в межах програм курсу для вказаної спеціальності.

**УДК 517.98, 517.51**

**ЗМІСТ**

# ВСТУП

Вивчення курсу математичного аналізу традиційно розпочинається навчальним модулем «Введення в математичний аналіз», який складається з чотирьох змістових модулів (ЗМ). Їх спрямованість наступна:

ЗМ 1 – «Основи теорії множин»;

ЗМ 2 – «Функція як відображення числових множин»;

ЗМ 3 – «Границя функції»;

ЗМ 4 – «Неперервність функції».

Запропоновані методичні рекомендації адресуються студентам на підтримку самостійної роботи при вивченні ЗМ 3 – «Границя функції».

Структура ЗМ 3 така:

МК 3.1. Границя функції натурального аргументу (числової послідовності).

МК 3.2. Границя функцій неперервного аргументу.

МК 3.3. Завдання для формування рейтингової оцінки студентів.

Мета вивчення ЗМ 3 «Границя функції» передбачає формування таких компетентностей:

1. ***Знання і розуміння*** основних понять нескінченно малих та нескінченно великих, зв'язків між ними, ***уміння і навички*** розв'язувати на їх основі базові стандартні задачі та ***здатність*** розв'язувати діагностичні (конструктивні, стандартні) та евристичні (нестандартні) задачі.

2. ***Знання і розуміння*** базових алгоритмів обчислення границь, ***уміння і навички*** діяти за заданими алгоритмами, здійснювати вибір і застосування даних алгоритмів та ***здатність*** на основі базових алгоритмів обчислення границь будувати алгоритми обчислення нестандартних границь.

3. ***Знання і розуміння*** змісту теми з обчислення границь в шкільному курсі математики, ***уміння і навички*** аналізувати вказану тему шкільного курсу математику з точки зору математичного аналізу та ***здатність*** ефективно різні методики вивчення даної теми.

Для успішного опанування ЗМ 3 «Границя функції» студенти мають добре володіти змістом двох попередніх модулів: ЗМ 1 «Основи теорії множин» та ЗМ 2 «Функція як відображення числових множин», який пов'язаний з двома основними поняттями математичного аналізу – «число, числові множини» та «функція як відображення двох числових множин». Крім того, необхідно впевнено знати і вміти використовувати:

- основні елементарні функції, графіки і властивості функцій;
- формули тотожних перетворень алгебраїчних і тригонометричних виразів.

## РОЗДІЛ 1
## ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Під час вивчення ЗМ 2 Ви мали засвоїти теоретико-множинне означення функції, означення області існування функції (області задання функції), області значень функції, способи задання функцій, види функцій, властивості функцій (монотонність, парність, непарність, обмеженість періодичність), метод побудови графіків функцій. При цьому Ви акцентували увагу на вивчення елементарних функцій, які розглядаються в шкільному курсі математики і графіки яких досить просто побудувати за допомогою координат декількох точок з області визначення та області значень функції. Але у випадку суперпозиції функції (складних функцій (див. ЗМ 2)) вивчення поведінки функції є складною задачею. Крім того, в багатьох випадках основним завданням може бути дослідження поведінки функції за умови наближення значень її аргументу до точки, в якій функція не може бути обчислена, тобто функція не існує в цій точці. Саме цей факт є одним з основних, які спонукали математиків новітнього періоду розвитку математики (починаючи з XVII століття) знаходити загальні методи дослідження функцій і застосування їх до розв'язання багатьох інших задач. Результатом цих досліджень є узагальнена думка математиків про те, що побудова сучасного математичного аналізу базується на поняттях границі і нескінченно малої.

Своє розуміння границі видатний французький математик Д'Аламбер сформулював, узагальнюючи думки Ньютона, Лейбніца та Ейлера в статті «Границя», написаній для «Енциклопедії» (1751-1765): «Кажуть, що одна величина є границею іншої величини, якщо друга величина може наближатися до першої настільки, що буде відрізнятися від неї менш, ніж на раніше задану величину; хоча величина, яка прямує до другої величини, ніколи не може перебільшити її…». Сказане може дати інтуїтивне розуміння поняття границі, тому що не розкриває механізму прямування однієї величини до іншої, яка є її границею.

Але в математичному аналізі такий механізм задається функцією, що дає можливість сформулювати означення поняття границі на більш строгому рівні. Саме це означення дозволяє вивчати властивості границь, методи їх обчислення і застосування для створення основного апарату математичного аналізу – диференціального та інтегрального числення функцій однієї і багатьох змінних.

Для виконання практичних завдань ЗМ 3 «Границя функції» необхідно знати і вміти використовувати наступні теоретичні відомості.

<u>**df 1.**</u> Число називається <u>***границею функції***</u> , коли , якщо таке, що при умові виконується нерівність .

<u>**Примітка.**</u> Функції називають числовими послідовностями. Їх прийнято позначати символами і т.п. (див. ЗМ 2).

Відповідно до примітки означення <u>df 1</u> можна сформулювати наступним чином

<u>**df .**</u> Число називається <u>***границею числової послідовності***</u> , коли , якщо таке, що при умові виконується нерівність . Якщо є границею числової послідовності то це записують у вигляді рівності

(1)

Рівність (1) означає, що коли , то . Тобто, коли значення наближається до точки , але це не означає, що існує таке , що буде виконуватися рівність .

Іншими словами рівність (1) свідчить про те, що для існує певний -окіл точки такий, що за його межами можна знайти скінченну кількість членів послідовності , а решта нескінченна кількість членів буде належати -околу точки , яка є границею послідовності

Важливо розуміти поняття -околу і його геометричну інтерпретацію.

<u>**df 2.**</u> <u>***-околом точки***</u> називається множина точок , яка визначається таким чином:

(2)

Рівність (2) означає, що починаючи з усі члени послідовності знаходяться на інтервалі

Поняття можна пояснити за допомогою його геометричної інтерпретації (див. рис.1).

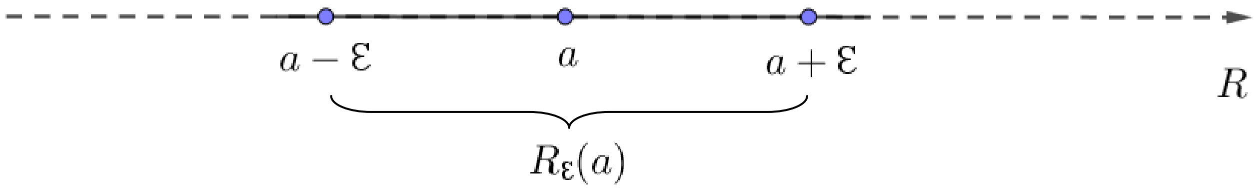


*Рис.1. Геометрична інтерпретація поняття*

За допомогою геометричної інтерпретації можна дати геометричну інтерпретацію означення **<u>df 1</u>** (див. рис. 2).

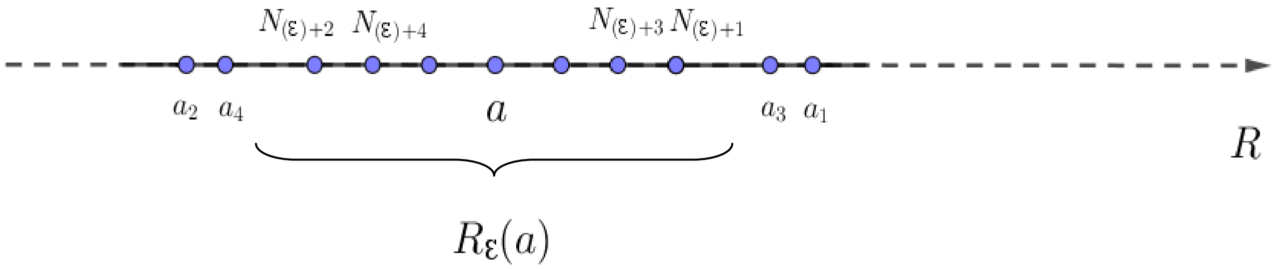


*Рис. 2. Геометрична інтерпретація границі числової послідовності.*

Згідно Рис. 2 при виконанні рівності (1) члени послідовності знаходяться за межами Чим меншим є значення , тим більше членів послідовності буде знаходитися за межами Але для кількість таких членів послідовності буде скінченною, хоча і великою за кількістю. Решта, нескінченна кількість членів послідовності буде зі зростанням Р неуклінно наближатися до граничної точки . При цьому різниця але ні в якому випадку

Для пояснення вище сказаного розглянемо приклади.

**Приклад 1.** Дана послідовність – Показати, що границя цієї послідовності має значення 0. Тобто виконується рівність

–

*Розв'язання:*

Завдання полягає у тому, щоб показати, що таке, що виконується нерівність –

З нерівності ( ) одержуємо нерівність – – .

В нерівності – задає цілу частину числа – .

Розглянемо три випадки: 1)

Згідно рівності одержуємо наступні результати:

(1) —

(2) (0,01) = —

(3) (0,001) = —

У випадку (1) за межами залишається тільки десять членів послідовності – – – —.

Згідно умов випадку (2) за межами залишається сто членів послідовності – – – — — —

У випадку (3) за межами буде знаходитися не більш як тисяча членів послідовності. Але в усіх випадках решта, нескінченна кількість членів послідовності, зі зростанням буде нескінченно наближатися до числа , яке і є границею цієї послідовності. Зрозуміло, чим меншим буде значення числа , тим більшою буде кількість членів послідовності за межами Але в будь-якому разі ця кількість буде скінченною величиною. Наприклад, якщо взяти то за межами околу буде знаходитися не більше ніж членів послідовності.

**<u>Приклад 2.</u>** Дана послідовність

Показати, що

*Розв’язання:*

Згідно **<u>df 1</u>** повинна виконуватися нерівність

З нерівності одержуємо:

Розглянемо три випадки: 1)

(1)

(2) (0,01)

(3) (0,001)

Для маємо ;

Для маємо

Для маємо і т. д.

Як бачимо зі зростанням наближається до 1, тобто

Серед числових послідовностей особливе місце відводиться нескінченно малим послідовностям.

**<u>df 3.</u>** Числова послідовність називається ***<u>нескінченно малою</u>***, якщо для неї виконується рівність

(3)

Прийнято нескінченно малі послідовності позначати малими буквами грецького алфавіту: $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ і т. п.

При обчисленні границь числових послідовностей необхідно знати і вміти використовувати класифікацію нескінченно малих послідовностей. Це пов’язано з тим, що нескінченно малі величини можуть мати різний порядок «малості».

Якщо — то нескінченно мала послідовність називається ***<u>більш високого порядку малості</u>***, ніж нескінченно мала послідовність ;

— скінченна величина, то нескінченно малі послідовності і називаються нескінченно малими ***<u>одного порядку малості</u>***;

якщо — то нескінченно малі послідовності і називаються ***<u>еквівалентними</u>***.

При обчисленні границь послідовностей слід враховувати, що існують нескінченно великі числові послідовності.

**<u>df4.</u>** Числова послідовність називається ***<u>нескінченно великою</u>***, якщо виконується рівність

(4)

тобто, якщо нескінченно велика, то , коли *n* .

Також слід пам’ятати і використовувати наступні теореми.

**<u>Теорема 1</u>**

Якщо нескінченно мала числова послідовність, то послідовність — нескінченно велика.

**<u>Теорема 2</u>**

Якщо нескінченно велика числова послідовність, то послідовність — нескінченно мала.

Враховуючи теореми (1), (2), справедливими є твердження:

- сума та добуток скінченної кількості нескінченно малих, а також добуток нескінченно малої на сталу (не рівну нулеві) є нескінченно малими;
- сума та добуток нескінченно великих, а також добуток нескінченно великої на сталу (не нуль) є нескінченно великими;

- частка від ділення сталої (не рівної нулеві) на нескінченно велику є нескінченно малою;
- частка від ділення сталої (не рівної нулеві) на нескінченно малу є нескінченно великою.

Істинність сказаного доведена на лекціях (див. конспект) відповідними теоремами і відображається наступними формулами, в яких (нагадуємо) $\alpha_n$, $\beta_n$ – нескінченно малі; – нескінченно великі; $k$ – обмежена (стала) величина.

(5)

(6)

(7)

— (8)

(9)

(10)

(11)

— (12)

Групу формул (5-12) можна трактувати за допомогою символів 0 і наступними символьними виразами:

–

(13)

–

До символьних виразів варто додати наступні

(14)

Може виникнути пропозиція поширити комбінації символів 0 і . Дійсно таке поширення можливе і має вигляд:

(15)

Але Ви повинні розуміти, що жодна з комбінацій набору (21) не дозволяє впевнено говорити про її конкретний результат, тому їх прийнято називати невизначеності відповідного виду:

- «нуль на нескінченність»;
- «нескінченність мінус нескінченність»;
- «нуль на нуль»;
- «нескінченність на нескінченність»;
- «нуль в степені нуль»;
- «нескінченність в степені нуль»;
- «одиниця в степені нескінченність»;
- «одиниця в степені нескінченність».

У випадках невизначеностей обчислення границі здійснюється за допомогою дій, які прийнято називати «розкриттям невизначеності».

Розкриття невизначеностей і обчислення границь послідовностей не можливе без знання та вміння використовувати правила дій над границями. Правила дій при обчисленні границь представлені такими теоремами.

**Теорема 3**

Якщо існують границі числових послідовностей і , то

(16)

**Теорема 4**

Якщо існують границі числових послідовностей і , то

(17)

**Теорема 5**

Якщо існують границі числових послідовностей і

(18)

**Теорема 6**

(19)

**Примітка.** Доведення теорем (1-6) повинно бути представлено у Ваших конспектах лекцій з математичного аналізу в межах самостійної роботи студентів.

Окремо слід відзначити, що обчислення границі послідовності у випадку невизначеності («одиниця в степені нескінченність») використовують так звану другу важливу границю:

$-$ (20)

Доведення формули (20) представлено в лекціях (див. конспект лекцій)

Використання представлених вище формул і методів розглянемо за допомогою обчислення границь наступних числових послідовностей:

Використання представлених вище формул і методів розглянемо за допомогою обчислення границь наступних числових послідовностей:

1.) 2.)

3.) 4.)

5.) -n 6.)

7.) 8.)

9.) 10.)

11.)

12.)

13.)

14.)

15.)

16.)

17.)

18.)

19.)

20.)

*Розв'язання:*

1.)

Відповідь:

2.)

Відповідь:

Відповідь: 0

4.)

$=$

Відповідь: $-$

5.)

$=$

Відповідь: -1

6.)

Відповідь:

7.)

Відповідь: 0

8.)

Відповідь: -1

9.)

Відповідь:

10.)

Відповідь:

11.)

Відповідь: 0

Відповідь можна одержати, якщо чисельник і знаменник поділити на :

12.)

Відповідь: 0

13.)

Відповідь:

14.)

Відповідь:

15.)

$=$

Відповідь: 0

16.)

Відповідь: 0

17.)

Відповідь: 1.

18.)

Відповідь: 0

19.)

Відповідь: 0.

20.)

Відповідь: –

Розібравши розв’язання задач на обчислення границь заданих числових послідовностей, проаналізуйте усі прийоми і методи, за допомогою яких було одержано відповіді.

**РОЗДІЛ 2**

**ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО АРГУМЕНТУ**

В першій частині даних методичних рекомендацій Ви ознайомилися і потім застосовували методи обчислення границь функцій заданих на множині (множині натуральних чисел), тобто функцій Функції прийнято задавати і досліджувати у вигляді числових послідовностей і і т. п., де

Друга частина цих методичних рекомендацій допоможе Вам засвоїти і навчитися впевнено застосовувати методи обчислення границь функції неперервного аргументу, тобто функцій де .

В першу чергу Ви повинні чітко розуміти, що в цьому разі аналогія з границями числових послідовностей в повній мірі зберігається тільки для границь виду

(1)

Але, до вказаних випадків додається принципово новий:

(2)

Границі виду (1) визначаються подібно до означення границі числової послідовності. На відміну від границі числової послідовності, яку ми позначили символом « », границю функції неперервного аргумента будемо позначати символом « ».

**df 1.** Число називають ***границею функції*** при , або якщо для усіх достатньо великих значень відповідні значення як завгодно мало відрізняються від числа .

**df 1* (мовою « -околу»).** Число називається ***границею функції*** при або , якщо таке, що при умові виконується нерівність .

Той факт, що є границею функції при або відповідно записують наступним чином: (3)

Дане означення границі функції на означає, що починаючи з деяких значень аргументу , , значення попадають в .

Зрозуміло, що методи обчислення границі функції на нескінченності повністю співпадають з методами обчислення границі числових послідовностей (див. ЧАСТИНУ І)

Але більш складною є ситуація у випадку обчислення границі виду (2). Тому, в першу чергу потрібно досконало зрозуміти суть означення границі виду (2).

**df 2.** Число називається ***границею функції*** коли аргумент прямує до значення , якщо , таке, що тоді, коли .

Це означає, що для усіх значень , які досить мало відрізняються від числа , відповідні значення як завгодно мало відрізняються від числа .

Якщо є границею функції коли , то це записують у вигляді:

При цьому , зрозуміло, називають границею функції , а точку – граничним значенням аргументу .

Означення границі функції в т. можна пояснити за допомогою геометричних образів і : якщо має місце рівність (4), то це означає, що як тільки значення попадають в , то значення обов'язково попадають в (див. рис.1).

З рис. 1 видно, що точка є внутрішньою точкою певної множини , яка містить . Це перше, на що потрібно звернути увагу. Другий факт, який також заслуговує уваги, полягає у тому, що якщо є границею в точці , то це означає, що незалежно від того, з якого боку величина є однією й тією ж самою.

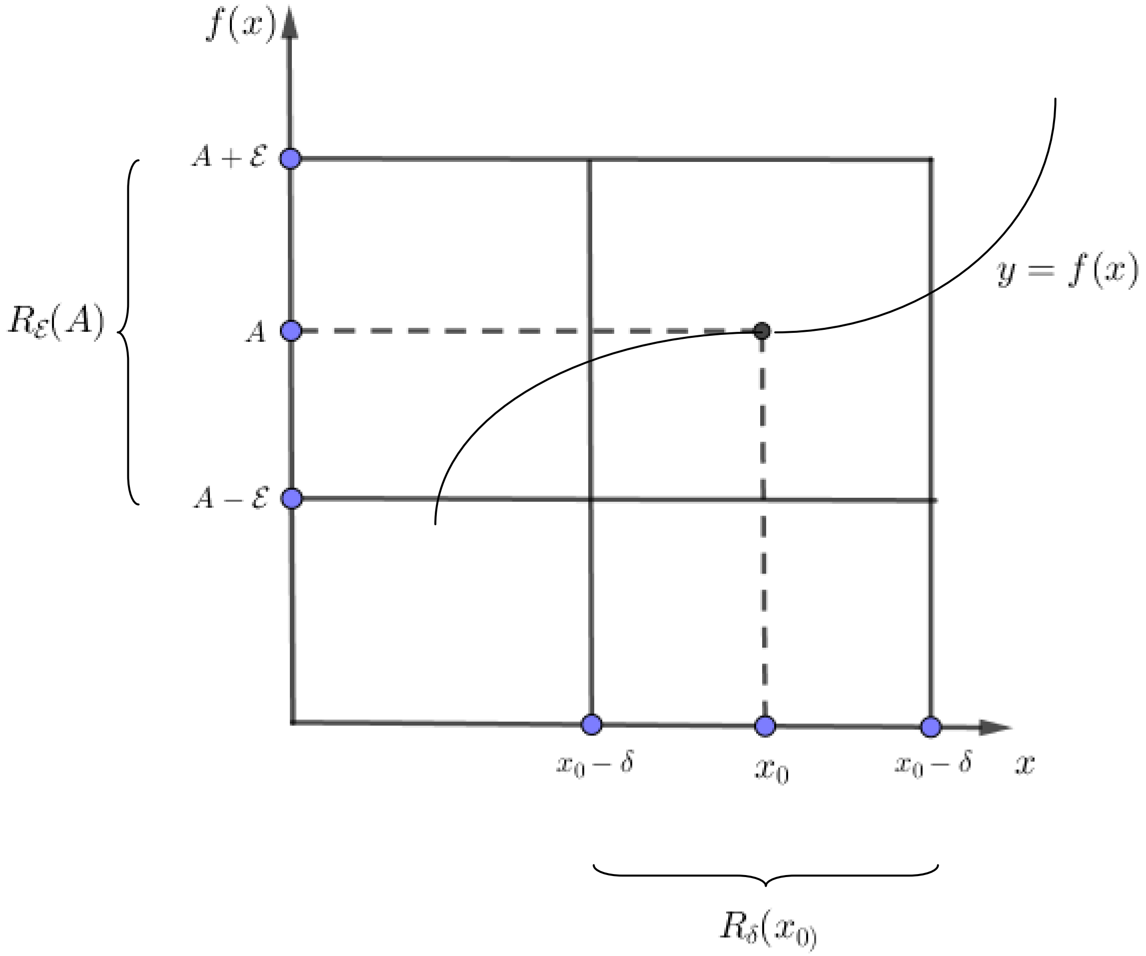


*Рис. 1. Геометрична інтерпретація означення границі функції в т.*

Тобто аналітично цей факт відображається наступним чином

(5)

де називають лівосторонньою границею, а

– правосторонньою границею.

Тільки за виконання рівності (5) величину слід вважати границею функції в точці .

<u>Примітка.</u> Якщо величина є скінченною і в той же час є границею функції в точці , то називається збіжною в точці до .

Теоретичні питання, які стосуються необхідних і достатніх умов існування границі функції докладно розглядаються на лекціях і при вивченні окремих питань в межах самостійної роботи студентів під керівництвом викладача.

Для пояснення суті границі функції в $f(x)$ в точці $x = x_0$ розглянемо приклади.

**<u>Приклад 1.</u>** Використовуючи означення границі функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ мовою «  », довести, що:

1)

2) ——

3) _ –

4) —— –

5) –

*Розв'язання:*

(1): Згідно з означенням **<u>df 2</u>** потрібно довести, що таке, що з нерівності слідує нерівність виконується нерівність $1 < \varepsilon$.

1. Задамо будь-яке

2. Покажемо, що для заданого існує таке, що коли виконується нерівність , то виконується нерівність

5 – –.

3. Таким чином, якщо виконується нерівність – = , то виконується нерівність .

Останнє означає, що .

Припустимо, що:

а)

б) .

(а) Маємо — = 0,02. У цьому разі коли , то 1,98 < $x$< 2,02. Нехай $x$ = 2,01, тоді

Доведено, що коли $x$ , то $f(x)$

(б) Маємо — = 0,004. У цьому разі коли , то 1,996 < $x$< 2,004. Нехай $x$ = 2,002, тоді

Доведено, що коли $x$ , то $f(x)$

*Нескладно провести аналогічні міркування для прикладів 2-5.*

При обчисленні границь функції на практичних заняттях і в межах самостійної роботи студентів використовуються ті ж самі правила, що і при обчисленні границь числових послідовностей, які для функцій неперервного аргументу, збіжних в точці , мають наступний вигляд:

(6)

(7)

(8)

(9)

**Примітка.** Формули доводяться на лекціях з математичного аналізу (див. конспект лекцій).

Крім правил (6-9) до обчислення границь функцій неперервного аргументу додаються наступні важливі границі.

**Перша важлива границя:**

(10)

**Друга важлива границя:**

= e (11)

= e (11*)

**Третя важлива границя:**

(12)

**Четверта важлива границя:**

(13)

**П'ята важлива  границя:**

(14)

**<u>Примітка.</u>** Формули (6-14) доводяться на лекціях з математичного аналізу (див. конспект лекцій).

При обчисленні границь комбінацій окремих функцій, які задаються різноманітними алгебраїчними виразами, можливі різні співвідношення між обмеженими нескінченно великими і нескінченно малими функціями. Тому варто (як для розгляду теоретичних питань, зокрема доведення окремих теорем, так  і при обчисленні границь функцій неперервного аргументу) пам'ятати наступні означення:

**<u>df 3.</u>** Функція *f(x)* називається нескінченно великою в точці $x_0$, якщо

. (15)

Слід розуміти умовність виразу «нескінченно велика» і відповідно рівності (15): — це не число, тому говорити про якісь дії над немає ніякого сенсу.

**<u>df 4.</u>** Функція *f(x)* називається обмеженою коли , якщо таке, що прибудь-яких значеннях, розташованих в деякому околі точки $x_0$, виконується нерівність (16)

**<u>df 5.</u>** Функція *f(x)* називається нескінченно малою в точці $x_0$, якщо

. (17)

Потрібно розуміти, що некоректно ототожнювати стале, дуже мале за значенням число з нескінченно малою величиною.

При обчисленні границь функцій в багатьох випадках допомагає порівняння нескінченно малих функцій, які прийнято позначати через тощо (тут є деяка аналогія з позначенням нескінченно малих послідовностей, див. ЧАСТИНУ I ).

В основі порівняння нескінченно малих розглядається поведінка границі їх співвідношення (по аналогії з порівнянням нескінченно малих послідовностей, див. ЧАСТИНУ I).

**df 6.** Якщо то нескінченно мала називається ***більш високого порядку малості***, ніж нескінченно мала .

**df 7.** Якщо , то нескінченно малі називаються нескінченно малими ***одного порядку малості***.

**df 8.** Якщо , то нескінченно малі називаються ***еквівалентними нескінченно малими***. Позначається це так: .

Важливо пам'ятати твердження: , якщо виконується рівність

(18)

По аналогії з числовими послідовностями мають місце наступні теореми.

**Теорема 1.**

Якщо *f(x)* нескінченно велика, коли , то – нескінченно мала, коли .

**Теорема 2.**

Якщо *f(x)* нескінченно мала, коли , то – нескінченно велика, коли .

**Теорема 3.**

Якщо функції нескінченно малі, коли , то нескінченно малими, коли , є також функції:

1) ;

2) ;

3)

**Примітка.** Висновки теорем (1)—(3) переносяться на будь-яку скінченну кількість малих функцій в точці $x_0$.

Якщо , то:

В окремих випадках обчислення границь функцій спрощується за допомогою заміни еквівалентними нескінченно малими. Еквівалентні нескінченно малі за умови, що , подані в таблиці 1.

Таблиця 1

| № | Нескінченно мала функція | Еквівалентна нескінченно мала |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | 1 | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | $\ln a$ |
| 10 | | |
| 11 | | |

Аналіуючи сказане вище, можна зробити висновок про те, що обчислення границь функцій значно спрощується, якщо:

- ✓ є можливість розкласти функцію на множники та скоротити ті з них, які створюють невизначеність;
- ✓ є можливість замінити еквівалентні нескінченно малі;
- ✓ є можливість використати відомі важливі границі.

Використання наведених методів обчислення границь неперервного аргументу розглянемо за допомогою наступних прикладів.

**<u>Приклад 3.</u>** Обчислити .

*Розв'язання:*

Розглядаємо границю відношення двох многочленів. Поділимо чисельник і знаменник дробу, що стоїть під знаком границі на Будемо мати:

**<u>Приклад 4.</u>** Обчислити

*Розв'язання:*

Старший показник степеня в чисельнику та знаменнику – В чисельнику та знаменнику винесемо та скоротимо:

**Приклад 5.** Обчислити

*Розв'язання:*

Безпосередньо теорему про границю частки тут неможливо застосувати, тому що границя чисельника та знаменника рівна нулю. Має місце невизначеність –. Розкладемо чисельник і знаменник на множники. Одним з множників обох многочленів, згідно теореми Безу, буде двочлен ( *2*).

Тому маємо:

**Примітка.** Результат вказує на те, що нескінченно малі (коли $x \to 2$) в чисельнику та знаменнику є нескінченно малими одного порядку.

**Приклад 6.** Обчислити

*Розв'язання:*

Мають місце невизначеність – та границя ірраціонального виразу. Помножимо та поділимо дріб на вираз, спряжений до знаменника, тобто на , та застосуємо формулу різниці квадратів:

**Примітка.** Бачимо, що нескінченно малі одного порядку.

**Приклад 7.** Обчислити

*Розв'язання:*

При безпосередній підстановці маємо невизначеність виду ( ). Помножимо та поділимо на спряжений вираз:

**Приклад 8.** Обчислити

*Розв'язання:*

Для обчислення границі використаємо порівняння нескінченно малих. Відповідно до таблиці 1 маємо тому одержуємо:

**Примітка.** Нескінченно малі в чисельнику та знаменнику одного порядку.

**Приклад 9.** Обчислити

*Розв'язання:*

Має місце невизначеність виду , бо

Використаємо границю 11: коли Для цього перетворимо дріб до вигляду 1+

Маємо:

Тоді можемо записати:

**Приклад 10.** Обчислити .

*Розв'язання:*

Маємо невизначеність –. Відповідно до таблиці 1 . Маємо:

**Приклад 11.** Обчислити .

*Розв'язання:*

I спосіб.

Маємо невизначеність –. Відповідно до таблиці 1 (коли

. Тоді

II спосіб.

Перейдемо до нової змінної

**Приклад 12.** Обчислити .

*Розв'язання:*

Маємо невизначеність –. Вираз під знаком границі має вигляд третьої важливої границі . Тому далі виконаємо таке перетворення:

**Приклад 13.** Обчислити .

*Розв'язання:*

При безпосередньому обчисленні границі приходимо до невизначеності –. За своїм виглядом дана границя схожа на четверту важливу границю, тому можемо записати:

**<u>Приклад 14.</u>** Обчислити .

*Розв'язання:*

Маємо невизначеність –, для її розкриття використаємо п'яту важливу границю:

Для самостійного виконання практичних завдань Вам допоможуть також рекомендації, подані в таблиці 2.

Таблиця 2

| № | Границя | Вид | Рекомендації по перетворенню |
|---|---|---|---|
| 1 | | | *Винести за дужки степінь з найбільшим показником* = |
| 2 | | | *Розкласти на множники чисельник і знаменник з обов'язковим винесенням множника* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| 3 | | – | *Помножити та поділити на вираз, спряжений до чисельника, та розкрити за другим пунктом* |
| 4 | = | | *Помножити та поділити на спряжений вираз, розкрити аналогічно до першого пункту* = |
| 5 | | | *Використати другу важливу границю* |
| 6 | коли $M(x)$, $N(x)$ містять трансцендентні функції | – | *Нескінченно малий множник, пов'язаний з тією чи іншою функцією, замінити еквівалентною нескінченно малою більш простого вигляду і виконати заміну* |

Але перед виконанням самостійної роботи переконайтеся, що Ви знаєте відповіді на наступні запитання:

1. В чому полягає інтерпретація поняття границі числової послідовності?

2. Як Ви розумієте використання кванторів в означенні числової послідовності?

3. Яким за величиною може бути значення в контексті означення границі числової послідовності?

4. Яку послідовність називають нескінно малою? Нескінченно великою?

5. Яке відношення існує між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями?

6. Що можна сказати про збіжність суми та добутку нескінченно малих числових послідовностей?

7. Яким умовам повинна відповідати числова послідовність, щоб вона мала скінченну границю?

8. В чому сутність теореми про збіжні послідовності?

9. Яка числова послідовність називається фундаментальною?

10. Яка сутність умови Коші?

11. З якою числовою послідовністю пов'язане число *e*?

12. За допомогою якої теореми доводиться факт існування числа *e*?

13. За допомогою якого, відомого з ШКМ, поняття доводиться обмеженість числової послідовності ?

14.До якої числової множини відноситься число *e*? Чому?

15. Яким чином стала величина впливає на збіжність числових послідовностей?

16. Які комбінації символів при обчисленні границь числових послідовностей приводять до поняття невизначеності ?

17. Розкриття невизначеності якого виду приводить до поняття числа *e*?

18. При обчисленні границі числової послідовності які з наступних комбінації – приводять до невизначеностей?

19. В чому полягає сутність означення границі функції за Коші?

20. Чи тотожні означення границі функції за Гейне та за Коші?

21. Чи відповідають теореми про існування границі функції відповідним теоремам про границю числової послідовності?

22. Які функції називаються нескінченно малими в околі певної точки? Нескінченно великими?

23. Якими символами прийнято позначати нескінченно малі функції? Наведіть приклади нескінченно малих функцій в точці x=2.

24. Який зв'язок існує між функцією *f(x)*, збіжною в точці $x_0$, її границею А та нескінченно малою *α(x)*?

25. Якими є функції, що відповідають сумі та добутку нескінченно малих функцій?

26. Чи може бути функція нескінченно малою при *x* ? Наведіть приклади.

27. Чи може бути функція нескінченно великою при *x* ? Наведіть приклади.

28. Який зв'язок існує між нескінченно малими та нескінченно великими функціями?

29. Які нескінченно великі функції називаються еквівалентими?

30. Які нескінченно великі функції називаються непорівнюваними?

31.Чим відрізняється обчислення границі функції від обчислення границі послідовності?

32. За допомогою якої теореми формулюються правила обчислення границі функції?

33. Що означає для функції *f(x)* рівність ?

34. Які основні випадки виникають при обчисленні границі функції. Наведіть приклади?

35. В чому полягає сутність так званиях «невизначеностей» при обчисленні границі функції?

36. В чому полягає основна ідея використання відомостей за таблиці 2?

37. Яким чином можна використовувати нескінченно малі при обчисленні границь функції?

38. Що важливо знати і вміти для обчислення границі виду ——?

39. Яка важлива границя використовується при обчисленні границі виду ?

40. Які дії дають можливість спростити обчислення границі функції?

## РОЗДІЛ 3
## ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

**Задача 1.** Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (вказати $N \; \varepsilon$ ).

1.1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

1.2. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.3. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \dfrac{7}{2}.$

1.4. $a_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

1.5. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

1.6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

1.7. $a_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.8. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.9. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.10. $a_n = -\dfrac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$

1.11. $a_n = \dfrac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.12. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

1.13. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}, \quad a = -2.$

1.14. $a_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$

1.15. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}, \quad a = \dfrac{1}{3}.$

1.16. $a_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$

1.17. $a_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

1.18. $a_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$

1.19. $a_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.20. $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

1.21. $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \dfrac{3}{5}.$

1.22. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

1.23. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.24. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

1.25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

1.26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$

1.27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$

1.28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$

1.29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

1.30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

1.31. $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$

**Задача 2.** Обчислити.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}.$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}.$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}.$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}.$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}.$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}.$

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}.$

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}.$

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}.$

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}.$

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^{3}-2n}{n+1^{\;4}-\;n-1^{\;4}}.$

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+6^{\;3}-\;n+1^{\;3}}{2n+3^{\;2}+\;n+4^{\;2}}.$

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3^{\;3}-\;n+5^{\;3}}{3n-1^{\;3}+\;2n+3^{\;3}}.$

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+10^{\;2}+\;3n+1^{\;2}}{n+6^{\;3}-\;n+1^{\;3}}.$

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1^{\;3}+\;3n+2^{\;3}}{2n+3^{\;3}-\;n-7^{\;3}}.$

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+7^{\;3}-\;n+2^{\;3}}{3n+2^{\;2}+\;4n+1^{\;2}}.$

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1^{\;3}-\;2n+3^{\;3}}{2n+1^{\;2}+\;2n+3^{\;2}}.$

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{3}-\;n-1^{\;3}}{n+1^{\;4}-n^{4}}.$

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2^{\;4}-\;n-2^{\;4}}{n+5^{\;2}+\;n-5^{\;2}}.$

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1^{\;4}-\;n-1^{\;4}}{n+1^{\;3}+\;n-1^{\;3}}.$

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1^{\;3}-\;n-1^{\;3}}{n+1^{\;2}-\;n-1^{\;2}}.$

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1^{\;3}-\;n-1^{\;3}}{n+1^{\;2}+\;n-1^{\;2}}.$

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2^{\;3}+\;n-2^{\;3}}{n^{4}+2n^{2}-1}.$

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1^{\;3}+\;n-1^{\;3}}{n^{3}-3n}.$

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1^{\;3}+\;n-1^{\;3}}{n^{3}+1}.$

2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2^{\;2}-\;n-2^{\;2}}{n+3^{\;2}}.$

2.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1^{\;2}-\;n+1^{\;2}}{n^{2}+n+1}.$

**Задача 3.** Обчислити.

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{n+\sqrt{n}\ \ \sqrt{7-n+n^2}}.$

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}.$

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}.$

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}.$

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}.$

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{n+\sqrt[4]{n}\ \ \sqrt{9+n^2}}.$

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}.$

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}.$

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}.$

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}.$

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n}\ \ \sqrt{5-n+n^2}}.$

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}.$

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}.$

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}.$

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}.$

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{n+4\sqrt{n}\ \ \sqrt{n^2-5}}.$

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}.$

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}.$

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\;\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{n-7\sqrt{n}\;\;\sqrt{n^2-n+1}}$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

3.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\;\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{n-\sqrt[3]{n}\;\;\sqrt{11+n^2}}$.

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

3.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

3.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\;\sqrt[6]{n}+\sqrt[3]{n^{10}+1}}{n+\sqrt[4]{n}\;\;\;\sqrt[3]{n^3-1}}$.

**Задача 4.** Обчислити.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\;\;\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\;\;$.

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\;\;\sqrt{n\;\;n-2\;}-\sqrt{n^2-3}\;\;$.

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\;n-\sqrt[3]{n^3-5}\;\;n\sqrt{n}$.

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\;n^2+1\;\;\;n^2-4\;}-\sqrt{n^4-9}\right]$

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\ \ n^2+5}}{\sqrt{n}}.$ 4.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt{n^2-3n+2}-n\ .$

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\ n+\sqrt[3]{4-n^3}\ .$ 4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n\ \ n+2}-\sqrt{n^2-2n+3}\right].$

4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\ n\ \ +2\ \ \ n+1\ }-\sqrt{\ n\ \ -1\ \ \ n+3\ }\right].$

4.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ \ \sqrt{n\ \ n^4-1}-\sqrt{n^5-8}\ .$

4.11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ \ \sqrt[3]{5+8n^3}-2n\ .$ 4.12.

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ \ \sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\ .$

4.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{\ n+2\ ^2}-\sqrt[3]{\ n-3\ ^2}\right].$ 4.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\ n+1\ ^3}-\sqrt{n\ \ n-1\ \ \ n-3}}{\sqrt{n}}.$

4.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\ .$ 4.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \ \ \sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\ .$

4.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\ \ n^5+9}-\sqrt{\ n^4-1\ \ \ n^2+5}}{n}.$

4.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt{n\ \ \ n+5}-n\ .$ 4.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\ \ \sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\ .$

4.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\ n^3+1\ \ \ n^2+3}-\sqrt{n\ \ n^4+2}}{2\sqrt{n}}.$

4.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\ n^2+1\ \ \ n^2+2\ }-\sqrt{\ n^2-1\ \ \ n^2-2\ }\right].$

4.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

4.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$.

4.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n - \sqrt{n(n-1)}\right]$.

4.25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{n^8-1}\right)$.

4.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\right]$.

4.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

4.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4}\right)$.

4.29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2}\right)$.

4.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2}\right)$.

4.31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} - \sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$.

**Задача 5.** Обчислити.

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

5.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$.

5.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$.

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+\ 2n-1}{1+2+3+..+n}.$

5.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+...+\ 2n-1}{n+3}-n\right].$

5.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+\ 3n-2}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$

5.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4\ !-\ n+2\ !}{n+3\ !}.$

5.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1\ !+\ 3n+1\ !}{3n\ !\ n-1}.$

5.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}.$

5.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}}.$

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3+5-7+9-11+...+\ 4n-3\ -\ 4n-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.$

5.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+...+\ 2n-1\ -2n}{\sqrt{9n^4+1}}.$

5.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+...+\ 2n-1}.$

5.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}.$

5.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+2}{1+2+3+...n}-\dfrac{2}{3}\right].$

5.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+...+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right).$

5.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5+4-7+...+2n-\ 2n+3}{n+3}.$

5.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1\ !+\ 2n+2\ !}{2n+3\ !-\ 2n+2\ !}.$

5.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{n-n^2+3}.$

5.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+..+\ 5n-3}.$

5.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1+2^n}{4^n}\right)$.  5.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+\ 2n-1}$.

5.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+5+9+13+\ldots+\ 4n-3}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right]$.

5.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

5.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

5.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+\ n+2\ !}{n-1\ !+\ n+2\ !}$.

5.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

5.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

5.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$.

**Задача 6.** Обчислити.

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$.

6.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

6.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

6.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

6.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

6.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

6.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

6.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

6.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

6.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

6.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

6.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

6.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

6.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

6.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

6.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$.

6.31. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$.

**Задача 7.** Довести за означенням (знайти $\delta(\varepsilon)$), що:

7.1. $\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7.$

7.2. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=6.$

7.3. $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7.$

7.4. $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10.$

7.5. $\lim\limits_{x \to -1/2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2}=-5.$

7.6. $\lim\limits_{x \to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}=5.$

7.7. $\lim\limits_{x \to -1/3}\dfrac{9x^2-1}{x+1/3}=-6.$

7.8. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7.$

7.9. $\lim\limits_{x \to -1/3}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3}=-4.$

7.10. $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6.$

7.11. $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2.$

7.12. $\lim\limits_{x \to 1/2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2}=5.$

7.13. $\lim\limits_{x \to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3}=-1.$

7.14. $\lim\limits_{x \to -7/5}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5}=-19.$

7.15. $\lim\limits_{x \to -7/2}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\dfrac{1}{2}.$

7.16. $\lim\limits_{x \to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}.$

7.17. $\lim\limits_{x \to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}=5.$

7.18. $\lim\limits_{x \to -1/2}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}=-81.$

7.19. $\lim\limits_{x \to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23.$

7.20. $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}=26.$

7.21. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13.$

7.22. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10.$

7.23. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\dfrac{5}{3}.$

7.24. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$

7.25. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8.$

7.26. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49.$

7.27. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3.$

7.28. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19.$

7.29. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x^2+17x-6}{x-1/3} = 19.$

7.30. $\lim\limits_{x \to -1/5} \dfrac{15x^2-2x-1}{x+1/5} = -8.$

7.31. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{15x^2-2x-1}{x-1/3} = 8.$

**Задача 8.** Довести, що функція $f\ \ x$ неперервна в точці $x_0$ (знайти $\delta\ \ \varepsilon$ ).

8.1. $f\ \ x = 5x^2-1,\ x_0 = 6.$

8.2. $f\ \ x = 4x^2-2,\ x_0 = 5.$

8.3. $f\ \ x = 3x^2-3,\ x_0 = 4.$

8.4. $f\ \ x = 2x^2-4,\ x_0 = 3.$

8.5 $f\ \ x = -2x^2-5,\ x_0 = 2.$

8.6 $f\ \ x = -3x^2-6,\ x_0 = 1.$

8.7 $f\ \ x = -4x^2-7,\ x_0 = 1.$

8.8 $f\ \ x = -5x^2-8,\ x_0 = 2.$

8.9 $f\ \ x = -5x^2-9,\ x_0 = 3.$

8.10 $f\ \ x = -4x^2+9,\ x_0 = 4.$

8.11 $f\ \ x = -3x^2+8,\ x_0 = 5.$

8.12 $f\ \ x = -2x^2+7,\ x_0 = 6.$

8.13 $f(x)=2x^2+6,\ \ x_0=7.$

8.14 $f(x)=3x^2+5,\ \ x_0=8.$

8.15 $f(x)=4x^2+4,\ \ x_0=9.$

8.16 $f(x)=5x^2+3,\ \ x_0=8.$

8.17 $f(x)=5x^2+1,\ \ x_0=7.$

8.18 $f(x)=4x^2-1,\ \ x_0=6.$

8.19 $f(x)=3x^2-2,\ \ x_0=5.$

8.20 $f(x)=2x^2-3,\ \ x_0=4.$

8.21 $f(x)=-2x^2-4,\ \ x_0=3.$

8.22 $f(x)=-3x^2-5,\ \ x_0=2.$

8.23 $f(x)=-4x^2-6,\ \ x_0=1.$

8.24 $f(x)=-5x^2-7,\ \ x_0=1.$

8.25 $f(x)=-4x^2-8,\ \ x_0=2.$

8.26 $f(x)=-3x^2-9,\ \ x_0=3.$

8.27 $f(x)=-2x^2+9,\ \ x_0=4.$

8.28 $f(x)=2x^2+8,\ \ x_0=5.$

8.29 $f(x)=3x^2+7,\ \ x_0=6.$

8.30 $f(x)=4x^2+6,\ \ x_0=7.$

8.31 $f(x)=5x^2+5,\ \ x_0=8.$

**Задача 9.** Обчислити.

9.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}.$

9.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}.$

9.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$

9.5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}.$

9.6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}.$

9.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}.$

9.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}.$

9.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

9.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

9.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

9.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

9.18.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.

9.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

9.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

9.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

9.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

9.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

9.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

**Задача 10.** Обчислити.

10.1 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

10.2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

10.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

10.4 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

10.5 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

10.6 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

10.7 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

10.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

10.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

10.11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

10.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

10.13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

10.14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

10.15 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

10.16 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

10.17 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

10.18 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

10.19 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

10.20 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

10.21 $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

10.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

10.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

10.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

10.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

10.26 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

10.27 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

10.28 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

10.29 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

10.30 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

10.31 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

**Задача 11.** Обчислити.

11.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\ 1+\sin x}{\sin 4x}$.

11.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

11.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

11.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

11.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$.

11.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

11.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

11.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

11.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

11.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

11.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

11.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)tgx}{\arcsin 2x^2}$.

11.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,3x}$.

11.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

11.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

11.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$.

11.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$.

11.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

11.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

11.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

11.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

11.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

11.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$.

11.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.

11.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$.

11.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

11.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

11.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

11.29 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$.

11.30 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

11.31 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

**Задача 12.** Обчислити.

12.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

12.2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

12.3 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

12.4 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

12.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{\mathrm{tg}^2 \pi x}$.

12.6 $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\mathrm{tg} 3x}{\mathrm{tg} x}$.

12.7 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$.

12.8 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg} \pi x}$.

12.9 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

12.10 $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

12.11 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12.12 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

12.13 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$.

12.14 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

12.15 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\mathrm{tg} \pi x}$.

12.16 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$.

12.17 $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln 2x-\ln \pi}{\sin(5x/2)\cos x}$.

12.18 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\ln \mathrm{tg} x}{\cos 2x}$.

12.19 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.

12.20 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^{2})}{\sin 2\pi x}$.

12.21 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^{2}}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^{2}-5x+2})}$.

12.22 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

12.23 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{x+2}$.

12.24 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

12.25 $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

12.26 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^{2}-2x)}{\sin 3\pi x}$.

12.27 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^{2}}{\sin\pi x}$.

12.28 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$.

12.29 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

12.30 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}$.

12.31 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^{2}2x}$.

Задача 13. Обчислити.

13.1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos^{2}x}-1}{\ln\sin x}$.

13.2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x-1\ \ ^{2}}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

13.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\ \ x-\sqrt[3]{2x-3}}{\sin\ \ \pi x/2\ \ -\sin\left[\ \ x-1\ \ \pi\right]}$.

13.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,2}{\sin\ln\ \ x-1}$.

13.5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$.

13.6. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\ln\sin 3x}{6x-\pi\ \ ^{2}}$.

13.7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin\ \sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}}{\ln\ \ x-1\ \ -\ln\ \ x+1\ \ +\ln 2}$.

13.8. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{x-2\pi\ \ ^{2}}{\operatorname{tg}\ \ \cos x-1}$.

13.9. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$.

13.10 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$.

13.11 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$.

13.12 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$.

13.13 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$.

13.14 $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$.

13.15 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$.

13.16 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$.

13.17 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$.

13.18 $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$.

13.19 $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{tg\,2x}}{\ln(2x/\pi)}$.

13.20 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\operatorname{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2}$.

13.21 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$.

13.22 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$.

13.23 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$.

13.24 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{tg(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$.

13.25 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$.

13.26 $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$.

13.27 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{tg\ln(x/a)}$.

13.28 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\operatorname{arctg}(x+3)}$.

13.29 $\lim\limits_{x \to a\pi} \dfrac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x} - a^{a\pi/x-1}}$.

13.30 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$.

13.31 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

**Задача 14.** Обчислити.

14.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}$.

14.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

14.3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

14.4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

14.5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x+x^3}$.

14.6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg} x-x^2}$.

14.7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

14.8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg} x-\sin x}$.

14.9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

14.10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

14.11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

14.12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

14.13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$.

14.14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg}2x-\sin x}$.

14.15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg} x}$.

14.16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

14.17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^3}$.

14.18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

14.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\mathrm{tg}x}$.

14.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\mathrm{tg}x^{3}}$.

14.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$.

14.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^{2}}$.

14.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$.

14.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\mathrm{arctg}\,2x-7x}$.

14.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^{2}}$.

14.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\mathrm{tg}x}$.

14.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$.

14.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\mathrm{tg}x^{2}}$.

14.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^{3}}$.

14.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

**Задача 15.** Обчислити.

15.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}x}$.

15.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x\ \ -\cos 2x}{\sin^{2}x}$.

15.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{3}+1}{\sin(x+1)}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{\ln x-\ln a}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^{3}}$.

15.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

15.7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

15.8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2\ \ e^x - e^{-x}}{e^{x^3+1}-e}$.

15.9. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

15.10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

15.11. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

15.12. $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{a^x - a^b}{x-b}$.

15.13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$.

15.14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x \ln \cos 5x}$.

15.15. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln\ \ x+h\ \ + \ln\ \ x-h\ \ - 2\ln x}{h^2}$, $x > 0$.

15.16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

15.17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

15.18. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^x - 2}{\ln x}$.

15.19. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin\ \ x+h\ \ - \sin\ \ x-h}{h}$.

15.20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

15.21. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$.

15.22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

15.23. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$.

15.24. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

15.25. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9}-1}$.

15.26.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\ \ 1+x\sqrt{1+xe^x}}$.

15.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$.

15.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln\ \mathrm{tg}\ \pi/4+ax}$.

15.29. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

15.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\mathrm{tg}\pi x}$.

15.31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin\ x^2-1}$.

**Задача 16.** Обчислити.

16.1. $\lim\limits_{x\to 0}\ 1-\ln\ 1+x^3\ {}^{3/\ x^2\arcsin x}$.

16.2. $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos\sqrt{x}\ {}^{1/x}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

16.4. $\lim\limits_{x\to 0}\ 2-3^{\mathrm{arctg}^2\sqrt{x}}\ {}^{2/\sin x}$.

16.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\mathrm{ctg}^3 x}$.

16.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to 0}\ 1-\ln\ 1+\sqrt[3]{x}\ {}^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to 0}\ 2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\ {}^{3/x}$.

16.9. $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos\pi x\ {}^{1/\ x\sin\pi x}$.

16.10. $\lim\limits_{x\to 0}\ 1+\sin^2 3x\ {}^{1/\ln\cos x}$.

16.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

16.12.

$\lim\limits_{x\to 0}\ 1-x\sin^2 x\ {}^{1/\ln\ 1+\pi x^3}$.

16.13. $\lim\limits_{x\to 0}\ 2-5^{\arcsin x^3}\ {}^{\mathrm{cosec}^2 x\ /x}$.

16.14. $\lim\limits_{x\to 0}\ 2-\cos 3x\ {}^{1/\ln\ 1+x^2}$.

16.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

16.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$.

16.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\pi x/3\right)\right)}$.

16.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2\cos x\right)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

16.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$.

16.20. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

16.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

16.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

16.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$.

16.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\left(1-\cos\pi x\right)}$.

16.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)^{1/x^3}$.

16.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$.

16.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

16.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln\left(1+3x^2\right)}$.

16.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\cos x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

16.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 3x\right)}$.

16.31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

**Задача 17.** Обчислити.

17.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

17.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/\ x+2}$.

17.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\ \pi/4+x}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x\ ^{x+3}$.

17.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

17.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\ 1+x}{6x}\right)^{x/\ x+2}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.

17.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{8x+3\ /\ 1+x}$.

17.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

17.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/\ 1+x}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$.

17.16. $\lim\limits_{x\to 0}\ \sin\ x+2\ ^{3/\ 3+x}$.

17.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

17.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/\ x+2}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.

17.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/\ x+1}$.

17.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\ 1+x^2}{x^2}\right)^{3/\ x+8}$.

17.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.

17.23. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2/\ x+5}$.

17.24. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 3x}{x}\right)^{x+2}$.

17.25. $\lim\limits_{x \to 0}\ e^{x}+x\ ^{\cos x^{4}}$.

17.26. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^{2}}{\sin x}\right)^{1/\ x+6}$.

17.27. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{e^{x}-1\ /x}$.

17.28. $\lim\limits_{x \to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^{2} x}$.

17.29. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/\ x^{2}+1}$.

17.30. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\arcsin^{2} x}{\arcsin^{2} 4x}\right)^{2x+1}$.

17.31. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^{3}+4}{x^{3}+9}\right)^{1/\ x+2}$.

**Задача 18.** Обчислити.

18.1. $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{1/\ \sqrt[3]{x}-1}$.

18.2. $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/\ x-a}$.

18.3. $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{1/\ \sqrt[3]{x}-1}$.

18.4. $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/\ x-2}$.

18.5. $\lim\limits_{x \to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{1/\ \sqrt[3]{x}-2}$.

18.6. $\lim\limits_{x \to \pi/4}\ \operatorname{tg} x\ ^{1/\cos\ 3\pi/4-x}$.

18.7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{1/\sqrt[5]{x}-1}$.

18.8. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

18.9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\ \cos x^{\operatorname{ctg}2x/\sin 3x}$.

18.10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\ \cos x^{1/\sin^2 2x}$.

18.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

18.12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\ \cos x^{\operatorname{ctg}x/\sin 4x}$.

18.13. $\lim\limits_{x\to 1}\ 3-2x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

18.14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\ \cos x^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$.

18.15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

18.16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\ \sin x^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$.

18.17. $\lim\limits_{x\to 1}\ 2e^{x-1}-1^{\ x/\ x-1}$.

18.18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ x-\pi/2}$.

18.19. $\lim\limits_{x\to 1}\ 2e^{x-1}-1^{\ 3x-1\ /\ x-1}$.

18.20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\ 1+\cos 3x^{\sec x}$.

18.21. $\lim\limits_{x\to 2}\ 2e^{x-2}-1^{\ 3x+2\ /\ x-2}$.

18.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin\ x-1}{x-1}\right)^{\frac{\sin\ x-1}{x-1-\sin\ x-1}}$.

18.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln\ 2-x}$.

18.24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

18.25. $\lim\limits_{x\to 1}\ 2-x^{\frac{\sin\ \pi x/2}{\ln\ 2-x}}$.

18.26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/\ x-3}$.

18.27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln\ x+2}{\ln\ 2-x}}$.

18.28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\ \sin x^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

18.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln\ x+1}{\ln\ 2-x}}$.

18.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{1/\cos\ x/2}$.

18.31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln\ 3+2x}{\ln\ 2-x}}$.

**Задача 19.** Обчислити.

19.1. $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$.

19.2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\ \operatorname{tg}x\ ^{\operatorname{ctg}x}$.

19.3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}\right)^{1/\ x+\pi/4}$.

19.4. $\lim\limits_{x\to 2}\ \sin x\ ^{3/\ 1+x}$.

19.5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x}\right)^{\sin^2\ x-2}$.

19.6. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\ \sin x\ ^{6x/\pi}$.

19.7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$.

19.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{1-x^2\ /\ 1-x}$.

19.9. $\lim\limits_{x\to 1}\ 1+e^x\ ^{\frac{\sin\pi x}{1-x}}$.

19.10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\operatorname{tg}9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/\ x+1}$.

19.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\arcsin\ \ x-3}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$.

19.12. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\ \sin 2x\ ^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$.

19.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x-3/4}{\ x-1\ ^2}\right)^{x+1}$.

19.14. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{\sin\ x-\pi}$.

19.15. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$.

19.16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$.

19.17. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \sin x+\cos x^{\,1/\mathrm{tg}x}$.

19.18. $\lim\limits_{x\to\pi/8} \mathrm{tg}2x^{\,\sin\ \pi/8+x}$.

19.19. $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin x^{\,\mathrm{tg}\pi x}$.

19.20. $\lim\limits_{x\to\pi} x+\sin x^{\,\sin x+x}$.

19.21. $\lim\limits_{x\to 1} \ln^2 ex^{\,1/\ x^2+1}$.

19.22. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1^{\,\pi/\mathrm{arctg}x}$.

19.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$.

19.24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

19.25. $\lim\limits_{x\to 2} \cos\pi x^{\,\mathrm{tg}\ x-2}$.

19.26. $\lim\limits_{x\to 1/2} \arcsin x+\arccos x^{\,1/x}$.

19.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x+1^{\,\sin x}$.

19.28. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x}+x-1^{\,\sin\ \pi x/4}$.

19.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/\ 2-x}$.

19.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}\right)^{x^2}$.

19.31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1}$.

**Задача 20.** Обчислити.

20.1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x+x\,\mathrm{arctg}\ 1/x}$.

20.2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sqrt{3\sin x+\ 2x-\pi\ \sin\dfrac{x}{2x-\pi}}$.

20.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

20.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x\cos\ 1/x\ +\lg\ 2+x}{\lg\ 4+x}$.

20.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}+\sin\dfrac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos\ 1/n}$.

20.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+3}}{n+\sin n\ \sqrt{7n}}$.

20.7. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + \ 4x-\pi\ \cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg\ 2+\operatorname{tg} x}$.

20.8. $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \sin\sqrt{n^2+1} \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n^2+1} \right)$.

20.9. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{n^2-n\cos n+1\ \sqrt{n}}$.

20.10. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$.

20.11. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1-\cos n\ \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.

20.12. $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left( 2+\sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}} \right)$.

20.13. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+\ x+2\ \sin\dfrac{x}{x+2}}}$.

20.14. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.

20.15. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$.

20.16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+3}{2-\lg\ 1+\sin x}$.

20.17. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot \sin^2\dfrac{1}{x}+5\cos x}$.

20.18. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4\cos x+\sin\dfrac{1}{x}\cdot\ln\ 1+x\ }$.

20.19. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2\cos^2 x+\ e^x-1\ \sin\dfrac{1}{x}}$.

20.20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+\ln\left( e+x\sin\dfrac{1}{x} \right)}{\cos x+\sin x}$.

20.21. $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left[\ e^{x^2}-\cos x\ \cos\dfrac{1}{x}+\operatorname{tg}\left( x+\dfrac{\pi}{3} \right) \right]$.

20.22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x+\ln\ 1+x\ \sqrt{2+\cos\dfrac{1}{x}}}{2+e^x}$.

20.23. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos 2\pi x}{2+\ e^{\sqrt{x-1}}-1\ \operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x-1}}$.

20.24. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\left(e^{\sin x}-1\right)\cos\frac{1}{x}+4\cos x}.$ 20.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(1+x)}{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)+2}.$

20.26. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\lg(x+2)+\sin\sqrt{4-x^2}\cos\frac{x+2}{x-2}}.$

20.27. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}.$ 20.28. $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\left(\cos x+\sin\frac{x-1}{x+1}\cos\frac{x+1}{x-1}\right).$

20.29. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\cos x}.$ 20.30. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x+\sin\pi x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}}{1+\cos x}.$

20.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}.$

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – Москва: Наука, 1985. – 383 с.

2. Бутузов В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / Под ред. В. Ф. Бутузова / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. – Москва: Физматлит, 2001. – 480 с.

3. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий // Под общ. ред. В. А. Садовничего.– Москва: Факториал, 1996.–477 с.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1990. – 624 с.

5. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: В 2-х ч. Ч. 1 / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко, Г. О. Михалін, М. І. Шкіль. – Київ: Вища школа, 2002. – 462 с.

6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича. – Москва: Наука, 1978. – 480 с.

7. Задачник по курсу математического анализа: В 2-х ч. Ч. 1. / Под ред. Н. Я. Виленкина. – Москва: Просвещение, 1971. – 343 с.

8. Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – Москва: Наука, 1979. – 720 с.

9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. – Т.1. – Москва: Физматлит, 1969. – 607 с.

10. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.