

Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Тетяна Григорівна Крамаренко*, Галина Миколаївна Білоусова[□]
Кафедра математики та методики її навчання,
Криворізький державний педагогічний університет,
проспект Гагаріна, 54, м. Кривий Ріг, 50000, Україна
kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua*, kafedra_matem@mail.ru[□]

Анотація. *Метою дослідження є пошук сучасних підходів до подання студентам матеріалу математичного аналізу. Задачами дослідження є аналіз існуючих підходів до подання матеріалу про функції багатьох змінних, забезпечення прикладної спрямованості навчання, розробка електронного навчального курсу з математичного аналізу для комбінованого навчання. Об'єктом дослідження є процес навчання математичного аналізу. Предметом дослідження є використання засобів ІКТ у навчанні математичного аналізу майбутніх учителів. В роботі проведено аналіз проблем навчання математичного аналізу, зокрема прикладну спрямованість навчання математики. Наведено приклади розкриття невизначеностей, які потребують додаткових досліджень при визначенні екстремуму функцій багатьох змінних. Результати дослідження планується узагальнити для формування рекомендацій щодо застосування програмних засобів.*

Ключові слова: функції багатьох змінних, ІКТ навчання, електронний навчальний курс, GeoGebra, Derive, SageMath.

T. G. Kramarenko*, G. M. Bilousova[□]. Research functions of many variables.

Abstract. The *aim* of this study is a search contemporary approaches to the presentation of material to students mathematical analysis. *Objectives of the study* is analysis of existing approaches to the presentation material on the function of many variables, providing Applied orientation training, development of e-learning courses on mathematical analysis for combined training. The *object of research* is process of learning mathematical analysis. The *subject of research* is the use of ICT in teaching mathematical analysis of future teachers. In this work the analysis the problems of teaching mathematical analysis, applied orientation in particular teaching mathematics. Examples of disclosure of uncertainties that need more research in determining the extremum of functions of several variables. *Results of the study* is planned to summarize the development of recommendations for the design of use of software.

Keywords: mathematical analysis, the function of many variables,

learning ICT, eLearning, GeoGebra, Derive, Sage.

Affiliation: Department of Mathematics and methods of learning, Krivoy Rog State Pedagogical University, 54, Gagarin str., Kryvyi Rih, 50000, Ukraine.

E-mail: kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua*, kafedra_matem@mail.ru □

Аналіз проведених на сьогодні досліджень вказує на те, що найбільша ефективність у навчанні вищої математики і математичного аналізу досягається завдяки комплексному поєднанню традиційних засобів, форм і методів навчання з комп'ютерно-орієнтованими. Для побудови графіків функцій, поверхонь досить зручно використовувати програмні засоби, зокрема GeoGebra, Derive, SageMath, Wolfram|Alpha.

За допомогою засобу Derive, Wolfram|Alpha можемо побудувати поверхню, розглянути її з різних боків, дослідити зміну значень функції при одній із зафіксованих незалежних змінних чи при певних співвідношеннях між незалежними змінними. Подібні спостереження корисні і при дослідженні функції багатьох змінних на неперервність. Однак, не можемо обчислити екстремуми за допомогою символічних перетворень, хоча є змога обчислювати частинні похідні функції.

За допомогою GeoGebra маємо змогу проводити дослідження на екстремум функції однієї змінної.

Питання організації навчання математичних дисциплін у SageMathCloud розглядається у [1] М. В. Попель. Однак прикладів застосування засобу для дослідження функцій багатьох змінних автор не наводить. Щоб дослідити функцію від багатьох змінних на екстремум, потрібно здійснити покрокове виконання всіх етапів загальновідомого алгоритму.

Використання програмних засобів при розв'язуванні рівнянь за допомогою символічних перетворень чи наближеними методами, обчислення похідних функцій чи інтегралів в значній мірі забезпечує візуалізацію навчання математичного аналізу. Низку завдань для дослідження функцій багатьох змінних на екстремум, які потребують додаткових досліджень, подаємо для студентів в електронному навчальному курсі, створеному на платформі Moodle. Для кращого засвоєння матеріалу доцільно пропонувати як тестові завдання на вибудовування ланцюжка ходу розв'язування з готових елементів, так і питання з короткими відповідями для кожного з кроків розв'язування. Програмні засоби доцільно використати як для побудови поверхонь, так і для пошуку екстремуму функцій.

Наведемо приклади завдань, в яких при дослідженні функції

багатьох змінних потрібно проводити додаткові дослідження.

Для функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ отримуємо три стаціонарні точки, у двох з яких досягається локальний мінімум. Для точки з координатами (0;0) досліджуємо знак функції в довільному околі точки. Так, зафіксувавши $y=0$, отримаємо від'ємні значення, для $y = x -$ додатні. Що й доводить те, що в даній точці екстремуму немає.

Подібні дослідження проводимо для функції $z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$ в точці (-2;2), в якій не виконується достатня умова існування екстремуму.

Цікавим є приклад функції $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. В точці (0;0) частинні похідні першого порядку не існують. Щоб дослідити функцію на екстремум, досліджуємо приріст функції в даній точці. Оскільки приріст отримаємо від'ємним, то можемо зробити висновок про те, що функція набуває в даній точці максимального значення.

Дослідження знаку приросту функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ в точці (0;0) дає змогу зробити висновок про відсутність в даній точці локального екстремуму. Варто запропонувати студентам для дослідження і функції, які мають безліч максимумів і жодного мінімуму, та інші. Як наприклад, $z = (1 + e^y) \cdot \cos(x) - y \cdot e^y$. У цьому разі труднощі у студентів виникають і при поданні стаціонарних точок.

Дослідження на екстремум функцій багатьох змінних є достатньо складним, особливо у випадках, коли не виконується достатня умова існування екстремуму і потрібно проводити додаткові дослідження. І при цьому надзвичайно важливим, оскільки значна частина прикладних задач на пошук мінімуму чи максимуму вимагає подібних досліджень.

Тому застосування програмних засобів хоча б частково допомагає студентам уявити розглядувані поверхні, щоб свідомо підходити до пошуку локальних екстремумів чи обґрунтувати їх відсутність.

Список використаних джерел

1. SageMathCloud [Electronic resource]. – Access mode : <http://sagemath.com>
2. Wolfram|Alpha [Electronic resource]. – Access mode : <https://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>.

References (translated and transliterated)

1. SageMathCloud [Electronic resource]. – Access mode : <http://sagemath.com>
2. Wolfram|Alpha [Electronic resource]. – Access mode :

<https://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>.