Соловйов В.М., Кононенко В.В. // Зб.наук.праць «Економіка: проблеми теорії і практики». – Дніпропетровськ: ДНУ, 2004. – Т. 5. – С.1304-1310.
12. Soloviev V. Financial time series prediction with the technology of complex Markov chains / V. Soloviev, V. Saptsin, D. Chabanenko // TTI Journal "Computer Modelling and New Technologies". – 2010. – V. 14. – №3. – P. 63-67.
13. Дербенцев В. Д. Передвісники критичних явищ у складних економічних системах / В. Д. Дербенцев, В. М. Соловйов, О. В Сердюк. // Новое в экономической кибернетике : сб. науч. ст.; под общ. ред. Ю. Г. Лысенко; Донецкий нац. ун-т // Моделирование нелинейной динамики экономических систем. – Донецк : ДонНУ. – 2005. – № 1. – С. 5-13.
14. Мезенцев О. М. Моделювання індикаторів-передвісників кризових явищ на валютному ринку / О. М. Мезенцев // Економіка : проблеми теорії та практики : зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : ДНУ. – 2009. – Т. 1., Вип. 252. – С. 22-33.
15. Джерело статистики світових фінансових інструментів [Електронний ресурс] – режим доступу: http://finance.yahoo.com

ВИКОРИСТАННЯ ЕНТРОПІЇ ТСАЛЛІСА ДЛЯ ОЦІНКИ СКЛАДНОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

В.М. Соловйов, О.А. Сердюк
м Черкаси, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

1. Вступ

Останнім часом все частіше вчені з різних наукових напрямів звертаються до теорії складних систем [1-6]. У недавніх роботах нами були розглянуті деякі з кількісних мір складності – алгоритмічні [7], фрактальні [8], рекурентні [9], хаос-динамічні [10] – та була продемонстрована можливість їх використання для моніторингу і попередження критичних явищ на фінансових ринках.

Подана робота продовжує серію робіт, де було проведено аналіз порівняно нового інструментарію теорії складних систем, пов'язаного з їх неадитивними чи неекстенсивними властивостями.

Неекстенсивність (неадитивність) є однією з найцікавіших характеристик в складних системах. Таким системам притаманна дуже тонка властивість: вони порушують основну гіпотезу статистики Больцмана-Гіббса – ергодичність. На підставі концепції мультифрактальності бразильський фізик Константіно Тсалліс у 1988 р. [11] запропонував узагальнену статистичну поведінку Больцмана-Гіббса, що включає системи, які порушують ергодичність, тобто, системи, мікроскопічні конфігурації яких не можуть розглядатися як повністю чи майже незалежні. Це узагальнення базується на неаддитивній ентропії, що дістала назву ентропії Тсалліса.

Економічні системи (зокрема, фінансові ринки) є одним з найяскравіших прикладів динаміки складних систем [13]. Широкий спектр внутрішніх взаємодій робить їх характерним прикладом складної динаміки.

Показник неекстенсивності вже досліджувався на прикладі економічних систем і показав, що у більшості випадків такі системи добре описуються з його допомогою [14-16]. Проте, продовжує викликати великий інтерес детальне дослідження поведінки характеристики неекстенсивності економічних систем з точки зору визначення кризових явищ або патернів, що передують кризовим явищам. Таке дослідження може допомогти як просунутися в розумінні розвитку і протікання економічних криз, так і в спробах визначення критичних явищ, що наближаються [16].

2. Ентропія Тсалліса та показник неекстенсивності

Один з підходів до дослідження складних систем полягає в аналізі їх показників ентропії. Дискретність початкових даних для економічних систем дозволяє отримати розподіл кількості їх станів (або ж режимів), що переходять один в інший, на підставі якого розраховується показник ентропії.

Найбільш відомим видом ентропії є ентропія Шеннона як міра інформативності (S_S)

$$S_S(f(x)) = \int f(x) \ln\left(\frac{1}{f(x)}\right) dx = -\int f(x) \ln(f(x)) dx\,, \qquad (1)$$

чи в дискретному випадку

$$S_S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \,, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \,, \tag{2}$$

де $i = 1,...,n$ – стани, p_i – ймовірність i-го стану, а загальна кількість станів рівна n. Таким чином, ентропія є сумою добутку ймовірності певного стану на логарифм оберненого значення ймовірності.

Варто також зауважити, що якщо є два незалежних один від одного стани A і B, тобто, $p(A+B) = p(A)p(B)$, то S_S є аддитивною (чи інтенсивною) величиною, $S_S(A+B) = S_S(A) + S_S(B)$. Ентропія Тсалліса, у свою чергу, є узагальненням до неаддитивної (чи екстенсивної) міри,

$$S_q = \frac{1 - \int f(x)^q \, dx}{q-1} \,, \tag{3}$$

де q – міра неадитивності (екстенсивності), така що

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) - (1-q) S_q(A) S_q(B) \,.$$

Великі значення q відповідають довгочасовим залежностям між станами системи і можуть розглядатись як параметр довгої пам'яті. Ентропія Тсалліса зводиться до ентропії Шенона у випадку, коли $q \to 1$, так що $\lim_{q \to 1} S_q = S_S$.

Принцип максимуму ентропії для S_q за умов

$$\int f(x) dx = 1 \,, \ \frac{\int x^2 f(x)^q \, dx}{\int f(y)^q \, dy} = \sigma^2 \tag{4}$$

відповідає функції щільності розподілу, що називається q-Гаусіаном,

$$f(x) = \frac{\exp_q\left(-\beta_q x^2\right)}{\int \exp_q\left(-\beta_q x^2\right) dx} \propto \frac{1}{Z} \left(1 + (1-q)\left(-\beta_q x^2\right)\right)^{\frac{1}{1-q}} \,. \tag{5}$$

В (5) β_q і Z залежать від q, а $\exp_q(x)$ є q-експоненційною функцією, що визначається як

$$\exp_q(x) = \begin{cases} (1 + (1-q)x)^{\frac{1}{1-q}}, & если \ \ 1 + (1-q)x > 0 \\ 0, & если \ \ 1 + (1-q)x \le 0 \end{cases} \,. \tag{6}$$

Для $q \to 1$ q-гаусіан відповідає звичайному розподілу Гауса.

Випадки $q > 1$ і $q < 1$ відповідають субекстенсивності та суперекстенсивності. Сам показник можна q розглядати як пороговий параметр: $q < 1$ показує перевагу рідкісних явищ, тоді як $q > 1$ відповідає перевазі явищ, що повторюються [12].

У роботі [16] робиться припущення, що показник q сам по собі є не мірою складності системи, а мірою її неекстенсивності. При дослідженні динаміки ентропії Тсалліса S_q також спостерігаються зміни її значення з часом для даного q, що свідчить про зміну складності системи з часом. Менше значення S_q відповідає сигналу з меншою складністю.

3. Процедура розрахунку параметра *q*

Параметр q розраховується з функції кумулятивного розподілу

$$P_{q,k}(X \geq x) = \left(1 - \frac{(1-q)x}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}, \tag{7}$$

де k визначає обмеження, а q – міру неекстенсивності. Проте, використання математичних і чисельних методів розрахунку параметра призводить до системи нелінійних рівнянь, розв'язок якої визначається з дуже великою похибкою (при значеннях q порядка 1.5 отримана похибка становить $\pm 0.3 - 0.5$), тому для знаходження значення необхідний інший підхід, що мінімізує похибку розрахунку.

Такий підхід запропонований в роботі [17] і використовує для оцінки значення параметра метод максимальної правдоподібності з попереднім приведенням функції розподілу до розподілу Парето. Вказаний метод включає:

1) репараметризацію початкового розподілу;
2) виведення оцінок для методу максимальної правдоподібності(ММП);
3) реалізацію ММП з виведеним розподілом і оцінками;
4) повернення до початкових параметрів.

3.1. Репараметризація вихідного розподілу

Визначимо нові параметри:

$$\theta = -\frac{1}{1-q}, \ \sigma = \theta k ,$$

для яких відновлення початкових буде здійснюватись за формулами

$$q = 1 + \frac{1}{\theta}, \ k = \frac{\sigma}{\theta}. \quad (8)$$

В системі нових параметрів функція кумулятивного розподілу набуде наступного вигляду:

$$P_{\theta,\sigma}(X \ge x) = \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-\theta}. \quad (9)$$

Тому щільність ймовірності в такій системі параметрів може бути записана таким чином:

$$p_{\theta,\sigma}(x) = \frac{\theta}{\sigma}\left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-\theta-1}. \quad (10)$$

Випадкова величина Y буде відповідати розподілу Парето з масштабним коефіцієнтом α та відсіканням y_0 у випадку, якщо $p(y) = 0$ при $y < y_0$, і $p(y) \propto \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\alpha-1}$ у протилежному випадку. Тому, якщо випадкова величина X має q-розподіл, то величина $1 + \frac{x}{\sigma}$ буде мати розподіл Парето з відсіканням 1 і масштабним коефіцієнтом θ. Згідно з класифікацією розподілів Парето [18], отриманий розподіл належить до 2-го типу узагальнених розподілів Парето, стандартна форма якого має вигляд $P(X \ge x) = \left(1 + \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}$. При $\mu = 0$ та $\alpha = \theta$ буде отримано початковий розподіл Парето, якщо взяти $\sigma = x_0$ та $\mu = \sigma$. Оцінка параметрів розподілу може бути отримана за допомогою процедури ММП [17, 18]. Тому подальші викладення є особливим випадком такої процедури, отриманим для цього виду розподілів [17].

3.2. Параметри процедури ММП для випадку q-гаусіана

Для моделі q-гаусіана з параметрами θ і σ функція лог-розподілу для послідовності незалежних рівномірно розподілених значень $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \ldots,$ $X_n = x_n$ (скорочено $X_1^n = x_1^n$) матиме вигляд

$$\log p_{\theta,\sigma}\left(x_1^n\right) = -n\log\sigma + n\log\theta - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\log 1 + \frac{x_i}{\sigma} \equiv \\ \equiv l(\theta,\sigma), \tag{11}$$

де в (11) позначено логарифм правдоподібності комбінації параметрів θ та σ.

Для знаходження параметрів оцінки ММП знайдемо частинні похідні логарифма правдоподібності за параметрами і прирівняємо їх до 0:

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\log 1 + \frac{x_i}{\sigma}, \tag{12}$$

$$\hat{\theta} = n\left(\sum_{i=1}^{n}\log 1 + \frac{x_i}{\sigma}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Аналогічно для масштабного параметра σ:

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\theta+1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 + x_i/\sigma}, \tag{14}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\theta+1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 + x_i/\hat{\sigma}}. \tag{15}$$

Рівняння (13) і (15) дають оцінку ММП для θ та σ відповідно у разі, якщо відомі інші параметри. Значення θ може бути розраховане безпосередньо, оскільки відомо, що в розподілі Парето $\hat{\alpha} = n \Big/ \sum_{i=1}^{n}\log\left(x/x_0\right)$, тоді як інше значення розраховується за допомогою розв'язку відповідного рівняння. Безпосередньо визначені критерії ММП на зразок отриманих виявляються в деяких узагальнених експоненціальних розподілах, наприклад, таких, як широко відомі у фізиці «розтягнуті експоненти» або «розподіли Вейбулла».

У випадку, якщо жодне зі значень, θ чи σ, невідоме (тобто, не можна знайти q і k в початковому розподілі), тоді послідовний розв'язок рівнянь (13) і (15) дає об'єднану оцінку правдоподібності. Підставляючи значення з одного рівняння в інше, одержимо оцінку $\hat{\sigma}$ і рівняння наступного виду:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\left(1 + n\left(\sum_{i=1}^{n} \log 1 + \frac{x_i}{\sigma}\right)^{-1}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + \left(x_i / \hat{\sigma}\right)}. \qquad (16)$$

Таке рівняння може бути розв’язане з використанням чисельних методів. Підставляючи розв’язок отриманого рівняння в (13), знаходимо $\hat{\theta}$, після чого формули (8) дають значення $\hat{q}$ і $\hat{k}$.

3.3. Дослідження часових рядів і процедура рухомого вікна

Реалізація розрахунків q і S_q для послідовності спостережень x_i, $i = 1,...,T$, включає наступні кроки.

Визначимо рухоме вікно W з K спостереженнями, $W = \{x_{i+k-1}, k = 1,...,K\}$, для розрахунку дискретного розподілу ймовірності шляхом розбиття W на n станів, $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Тут $x_0 = \min(W)$, $x_n = \max(W)$. Введемо множину інтервалів, що не перекриваються, $\{I_i = [x_{i-1}, x_i), i = 1,...,n\}$ так, щоб $D = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, де $D = x_n - x_0$ – це діапазон вікна W.

Ймовірність p_i того, що деяке значення $x_t \in I_i$, розраховується як відношення кількості спостережень, що належать даному інтервалу I_i, до загальної кількості спостережень K. Потім, застосовуючи формулу

$$S_q = k\frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{i=1}^{w} p_i^q\right), \qquad (17)$$

при $k = 1$ і знайденому, як описано в пп. 3.1-3.2, значенні q, отримаємо шукане значення ентропії S_q. При постійному зміщенні вікна по ряду спостережень знайдемо залежність розраховуваного значення q чи S_q від часу.

На розрахунок динаміки значень істотно впливають наступні умови:

1. *Кількість станів*. При надто малій чи надто великій кількості станів (інтервалів) розподіл ймовірності отримується недостатньо точним або вироджується, тому для розрахунків використовувалася кількість інтервалів рівна 10% від загальної кількості спостережень у вікні, тобто $n = \lceil 0.1K \rceil$.

2. *Метод розбиття.* Існує два методи для розбиття вікна на інтервали I_i : (a) фіксоване розбиття, коли уся множина спостережень один раз розбивається на необхідну кількість станів, і (b) адаптивне розбиття, коли розподіл ймовірності будується окремо для кожного вікна. Адаптивне розбиття адекватніше описує зміни в сигналі (часовому ряді) і більше відповідає процедурі дослідження.

3. *Оцінка* q. Для оцінки використовувалася процедура, описана в пп. 3.1-3.2, і відповідна функція, реалізована в середовищі MatLab [17]. Для нормальної роботи реалізованого методу потрібна наявність мінімально достатньої кількості спостережень у вікні; для досліджуваних рядів експериментально було встановлено значення $K \geq 500$.

4. *Крок зміщення вікна* Δ. Для дослідження тонкої структури динаміки показників, що розраховуються, встановлювався крок Δ=1. Для складання загального уявлення про динаміку вибирався крок Δ=5 або Δ=10.

4. Результати розрахунку та їх аналіз

Аналіз описаних у роботі характеристик проводився на спостереженнях показників фінансового ринку, а саме, змінах індексів Standard&Poor's 500 (SP, США), Deutscher Aktienindex (DAX, Німеччина) та Української біржі (UX). Досліджувалися ряди щоденних значень індексів за період часу з 03.10.1997 року по 26.03.2013 рік (всього 3788 днів).

Для проведення дослідження початкові ряди перетворювалися у прибутковості, $R_i = \ln x_i - \ln x_{i-1} \approx (x_i - x_{i-1})/x_i$, які потім нормувалися, $r_i = (R_i - \mu_R)/\sigma_R$. Оскільки для тестування даних спочатку використовувалися і перемішані ряди, розрахунок прибутковостей був дещо змінений, а саме, використовувалася формула $R_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{(x_i + x_{i-1})/2}$, тобто, базою виступало не значення поточного дня, а середнє арифметичне для використовуваних значень. Такий розрахунок дозволив для перемішаних рядів (що є аналогами випадкових внаслідок втрати усіх коротко- та довгочасових зв’язків) отримати очікувані прибутковості.

На рис. 1 співставляються розподіли:

- розподіл щільності ймовірності для значень ряду індекса DAX;

– q-гаусіан для уточненого показника q;

– функція Гауса із стандартними параметрами.

Простежується заниження значення, отриманого процедурою [17], а також відповідність уточненого значення q результатам робіт [11, 14, 17].

Перевірка ряду шляхом перемішування (рис. 2) показує дійсно втрату інформації, що призводить до зменшення показника q, який наближається до одиниці. Схожі результати було отримано для всіх досліджуваних рядів, зокрема, для часового ряду індекса UX (рис. 3). Це підтверджує думку про складність економічних систем та можливість використання показника неекстенсивності q і ентропії Тсалліса для дослідження цієї складності.

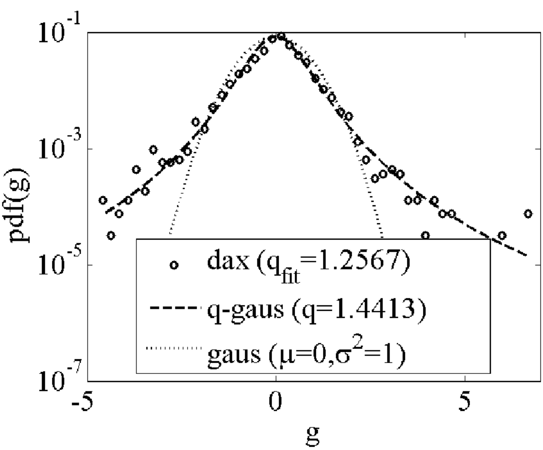

Рис. 1. Функції розподілу щільності ймовірності для індекса DAX з розрахованим за допомогою функції [17] значенням q, q-гаусіана для розрахованого уточненого значення q та стандартного гаусіана з параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$

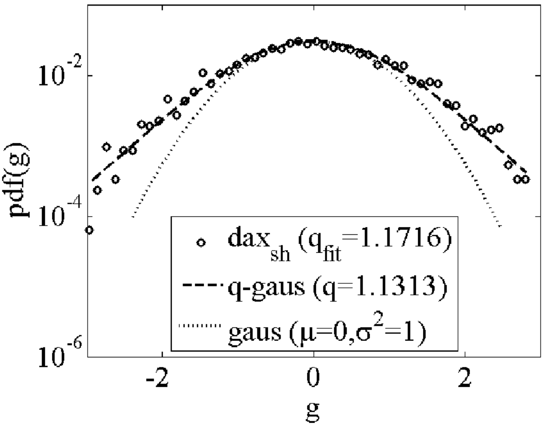

Рис. 2. Функції розподілу щільності ймовірності для перемішаних значень індекса DAX з розрахованим за допомогою функції [17] значенням q, q-гаусіана для розрахованого уточненого значення q та стандартного гаусіана з параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$

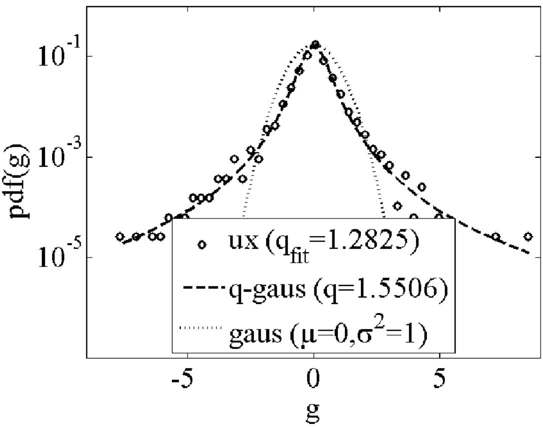

Рис. 3. Функції розподілу щільності ймовірності для значень індекса UX з відображеним значенням q, розрахованим за допомогою функції [17], q-гаусіана для розрахованого уточненого значення q та стандартного гаусіана з параметрами $\mu = 0$ і $\sigma^2 = 1$

На рис. 4-5 відображено відповідно ряди SP та UX, які співставлень з рядами динаміки показника неекстенсивності q та ентропії Тсалліса. Як в одному, так і в іншому випадку можна бачити ріст показника *q* під час кризи та падіння його у період релаксації (додатково значення показника коливаються біля якої-небудь точки у випадку малої мінливості часового ряду). Якщо розглядати показник *q* як показник складності системи, тоді перед кризою зростання показника означає наближення внутрішнього функціонування системи до хаотичного виду, що може бути пояснено навіть за допомогою логічних міркувань про динаміку роботи системи.

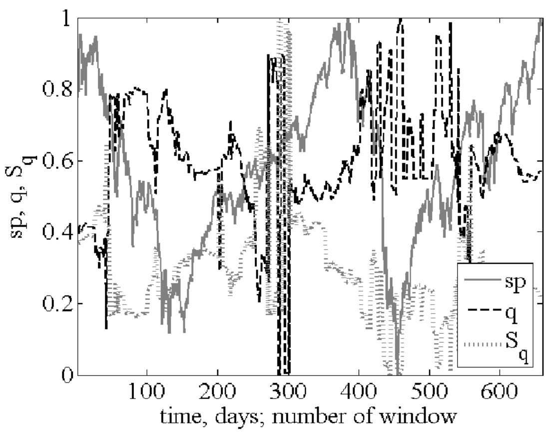

Рис. 4. Динаміка значень індекса SP, показника *q* та ентропії Тсалліса; використано процедуру рухомого вікна при *K*=500 та Δ =5

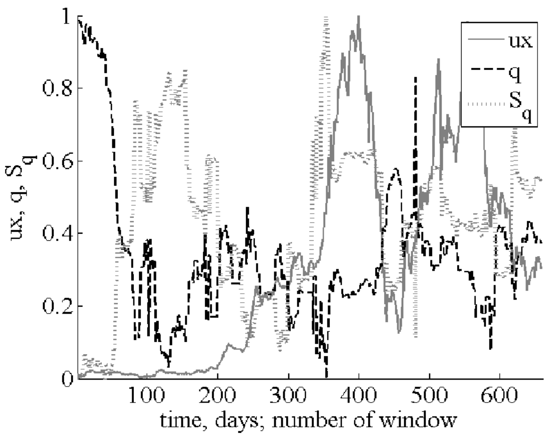

Рис. 5. Динаміка значень індекса UX, показника *q* та ентропії Тсаллі-

са; *K*=500 та Δ =5

Разом з тим у післякризовий період економічна система поступово переходить від хаотичної динаміки до більш організованої діяльності, що теж добре відображує коефіцієнт *q*.

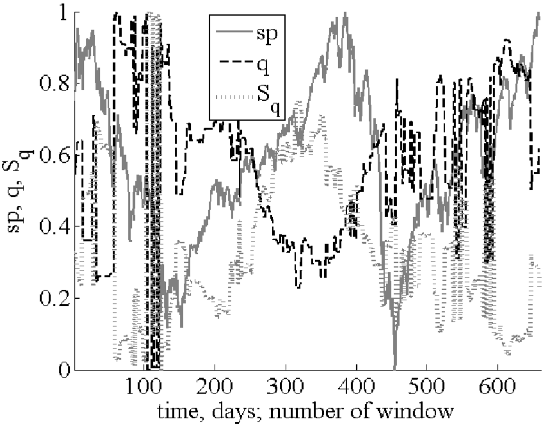

Рис. 6. Динаміка значень індекса SP, показника *q* та ентропії Тсалліса, отриманих для масштабу *s*=5 при дослідженні багатомасштабної динамічної ентропії; використано процедуру рухомого вікна при *K*=500 та Δ =5

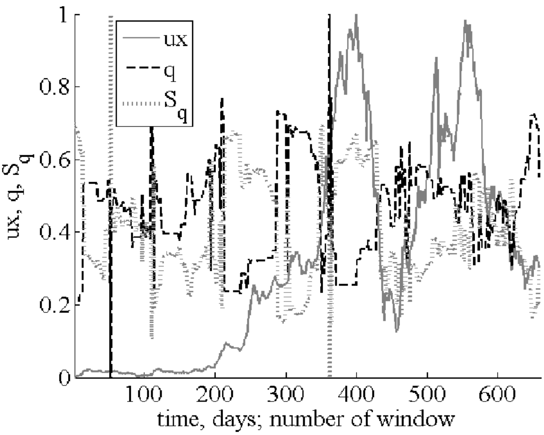

Рис. 7. Динаміка значень індекса UX, показника *q* та ентропії Тсалліса; *s*=5, *K*=500 та Δ =5

Натомість дослідження динаміки ентропії Тсалліса не дозволяє зробити подібних висновків за кількох причин.

По-перше, загальні тренди графіків динаміки ентропії Тсалліса та динаміки значень початкового ряду часто співпадають, а тому графік ентропії Тсалліса практично ніякої нової інформації не несе. По-друге, при розрахунку значення ентропії суттєвим може бути навіть єдине значення із розподілу, а тому такий результат не може нести інформацію про узагальнену поведінку складної системи. Додатково було проведене дослідження поведінки показника неекстенсивності q та значення ентропії при використанні багатомасштабної процедури. Узагальнимо результати дослідження:

1) багатомасштабна процедура не несе нової інформації про часовий ряд; більше того, значення ентропії Тсалліса на різних масштабах ведуть себе інваріантно;

2) збільшення масштабу призводить до зменшення чутливості показника неекстенсивності q, внаслідок чого можна спостерігати на більших масштабах лише за великими змінами у тренді ряду.

Таким чином, багатомасштабна ентропія Тсалліса не надає ніякої додаткової інформації до тієї, що може бути отримана за допомогою звичайної процедури розрахунку ентропії та процедури рухомого вікна для дослідження динаміки ентропії. При розрахунку ентропії Тсалліса всю інформацію несе показник неекстенсивності q, а не показник ентропії. Окрім того, суттєвим є поведінка динаміки показника неекстенсивності q.

5. Висновки

У роботі досліджувалась динаміка показника неекстенсивності q та ентропії Тсалліса S_q, їх зв'язок з динамікою початкового часового ряду та їх зв'язок з мультимасштабністю.

На основі проведених досліджень зроблено наступні основні висновки: (1) мірою складності системи служить показник неекстенсивності q, ентропія Тсалліса сама по собі ніякої нової інформації не несе; (2) дослідження динаміки показника неекстенсивності q виявляє його можливість бути передвісником критичних явищ в економічній системі; (3) використання багатомасштабної процедури показує «укрупнення» інформації при зростанні масштабу та реакцію системи на все більш яскраво виражені тренди порівняно з малими масштабами (зокрема, наприклад, з масштабом 1); (4) при використанні процедури рухомого вікна необхідно дуже ретельно підбирати ширину вікна, оскільки занадто велике вікно призведе до втрати чутливості процедури до критичних та кризових явищ, натомість надто мале вікно приведе до надзвичайного збільшення похибки обчислень і абсолютної недовіри до результатів.

В подальшому планується провести порівняльний аналіз неекстенсивної міри складності з іншими мірами з метою вироблення критеріїв для використання в системі моніторингу та попередження кризових явищ.

Список використаної літератури:

1. Anderson P.W. More Is Different / P.W.Anderson // Science. – 1972. – V.177, No 4017.– P.393-396.
2. Gell-Mann M. What Is Complexity? / M.Gell-Mann // Complexity. – 1995. –V.1, No 1.– P.16-18.
3. Пригожин И. Кость еще не брошена [Электронный ресурс] Сайт С. П. Курдюмова «Синергетика» Режим доступу: http://spkurdyumov.narod.ru/pprigoj.htm.
4. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. / Г. Николис – М.: ЛКИ, 2008.– 354 с.
5. Пригожин И. Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. / И. Пригожин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.– 208 с.
6. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках / И. Пригожин. – Перевод с английского. Серия «Синергетика: от прошлого к будущему». Изд. 3 URSS-2006.– 296 с.
7. Лега Ю.Г. Складність соціально-економічних систем / Лега Ю.Г., Мельник В.В., Соловйов В.М. // Збірник наукових праць Таврійського державного агротехнологічного університету (економічні науки). Сімферополь.– 2012, №2(18).– С.85-99.
8. Соловйова В.В. Порівняльний аналіз динаміки фондового ринку України з використанням фрактальних мір складності / В.В.Соловйова, В.М.Соловйов, К.В.Соловйова // Вісник Черкаського університету, серія «Економічні науки».– 2012, №33 (246).– С.51-58.

9. Соловйов В.М. Рекурентні міри як метод кількісної оцінки складності / В.М.Соловйов, А.В.Батир // Вісник КНУТД, 2012, № 5, с.254-257.

10. Соловйов В.М. Використання масштабно-залежних показників Ляпунова для дослідження складності фінансово-економічних систем / В.М.Соловйов, І.О.Стратійчук // Наука і економіка, науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету, 2012. №4 (28), т. 2.– С.88-93.

11. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics / C.Tsallis // J. Stat. Phys.– 1988.V.52.– P.479-487.

12. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approaching a Complex World, Springer, New York, 2009.– 382 p.

13. Newman M.E.J. Complex Systems: A Survey. [Электронный ресурс] – Режим доступа: arXiv:1112.1440v1 [cond-mat.stat-mech] 6 Dec 2011.

14. Ausloos M. Dynamical model and nonextensive statistical mechanics of a market index on large time windows / M.Ausloos, K.Ivanova // Phys. Rev. E.–2003.– V.68.– P.1-13.

15. Borland L. Long-range memory and nonextensivity in financial markets / L.Borland // Econophysics news. – 2005. – V .36. – № 6. – P.228 – 231.

16. Potirakis S.M. Dynamical analogy between economical crisis and earthquake dynamics within the nonextensive statistical mechanics framework / S.M.Potirakis, P.I.Zitis, K.Eftaxias // [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1211/1211.5153.pdf.

17. Shalizi C.R. Maximum likelihood estimation for q-exponential (Tsallis) distributions / C.R.Shalizi // [Электронный ресурс] – Режим доступа: arXiv:math/0701854v2 [math.ST] 1 Feb 2007.

18. Arnold B.C. Pareto Distributions / B.Arnold // International Cooperative Publishing House, Fairland, Maryland.– 1983. – 326 p.