

¹⁾Ганчук А.А., ¹⁾Дербенцев В.Д., ²⁾Соловйов В.М.

¹⁾Київський національний економічний університет

²⁾Криворізький економічний інститут Київського національного економічного університету

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІСТЬ СВІТОВОГО ФОНДОВОГО РИНКУ

Показана можливість оцінки ефективності функціонування фондового ринку шляхом дослідження мультифрактальності відповідного часового ряду. Порівняння спектрів сингулярностей розвинених країн і країн, що розвиваються проведено за даними індексів MSCI. Встановлено, що ширина спектрів сингулярностей для індексів розвинених країн помітно більша від емерджентних, що забезпечує певні переваги розвиненого ринку, зокрема, для портфельного інвестора

Ключові слова: часовий ряд, індекс MSCI, розвинені і емерджентні країни, мультифрактальність, сингулярність, фондовий ринок, вейвлет, статистична сума, ризик, Value-at-Risk

I. Вступ. Становлення ринку цінних паперів у країнах з перехідною економікою є однією з найбільш актуальних проблем трансформації, оскільки відноситься до числа найважливіших інститутів ринкової економіки [1]. Формування фондового ринку як необхідного джерела і механізму фінансування інвестицій покликано перетворити його в суттєвий фактор стійкого економічного зростання. Ця стратегічна мета може бути досягнута тільки на основі тісної взаємодії держави і національного капіталу. При цьому, як показав міжнародний досвід, саме використання ринку цінних паперів має першочергове значення для розвитку компаній, які працюють в галузі високих технологій. В той же час в умовах глобалізації, коли країни, що розвиваються, стають інтегрованою частиною світової економіки, розвиток їх фондового ринку проходить під впливом поглиблення зв'язків з

міжнародною фінансовою сферою з усіма впливаючи ми звідси позитивними і негативними наслідками.

Світова фінансова криза 1997-1998 рр. стала серйозним випробуванням для емерджентних фондових ринків. Вона висвітлила, по-перше, недосконалість і уразливість міжнародної фінансової системи, а, по-друге, - помилки і недоліки національної економічної політики. Країни, які слідували шаблонам так званого Вашингтонського консенсусу, понесли найбільші втрати від кризових потрясінь. В той же час держави, які проводили зважену економічну політику, котра була продиктована національними інтересами і специфікою, опинились у більш вигідному становищі.

З огляду на сказане актуальними є задачі виявлення закономірностей, специфіки, факторів і проблем формування фондового ринку в умовах трансформації «економіка перехідного періоду → емерджентна економіка (економіка країн, які розвиваються) → економіка розвинених країн».

II. Постановка завдання. Фондовий ринок емерджентних і розвинених країн адекватно описується індексами, які обраховуються міжнародною компанією Morgan Stanley Capital International і відомі як індекси MSCI. Серед множини індексів MSCI виберемо тільки ті з них, які відносяться до розвинених і емерджентних ринків. У мережі Інтернет щоденні значення цих індексів доступні за адресою www.msci.com. Задача дослідження зводиться до запровадження нових кількісних мір складної нелінійної поведінки часових рядів, якими є індекси MSCI. З цією метою в даній роботі ми проведемо мультифрактальний аналіз світового фондового ринку, порівнюючи динаміку індексів розвинених і емерджентних країн.

III. Результати. Оскільки вихідний динамічний ряд є нестационарним, введемо так звані логарифмічні прибутковості (в англійській літературі «return») $S_i(t)$ активу $i = 1, \dots, N$ з лагом Δt [2]:

$$G_i(t) \equiv \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t). \quad (1)$$

Оскільки різні активи мають різні волатильності, введемо нормалізовані прибутковості

$$g_i(t) = \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i}. \quad (2)$$

$\sigma_i = \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ – стандартне відхилення G_i , а дужки $\langle \dots \rangle$ означають середнє за досліджуваній проміжок часу.

В [2,3] нами виявлено деякі з характерних відмінностей структури і динаміки ринків країн різного ступеня розвитку. Останнім часом стало зрозуміло, що економічна система відноситься до класу так званих складних мережеподібних [4]. Сьогодні вона переживає процес становлення, але вже зрозуміло, що більшість важливих для функціонування і життєзабезпечення процесів у системах самої різної природи – від енергетичних мереж, Інтернету і до соціальних та біологічних – відбуваються в мережеподібних системах. Причому, більшість з них мають вражаючу подібність, що свідчить про універсальність складних систем. Не вдаючись в подробиці (з якими можна ознайомитись, наприклад, в [4], або з цитованих там робіт), відмітимо важливий для подальшого висновок: складні мережеподібні системи проявляють нелінійні властивості, одна з яких – масштабна інваріантність як у просторі так і у часі. Іншими словами, складні системи є мультифрактальними об'єктами, причому втрата міри мультифрактальності служить ознакою переходу системи із більш складного стану до більш простого [5]. Втрата складності призводить до втрати і багатьох важливих з точки зору надійності і ефективності функціонування складної системи в цілому.

Чи є мультифрактальність внутрішньою властивістю системи – питання відкрите. Визначимо узагальнену кореляційну функцію q -го порядку як

$$R_q(t) = \left\langle \left| S(t_0 + t) - S(t_0)^q \right| \right\rangle^{1/q}, \quad (3)$$

де $S(t)$ - ціна активу, а середнє береться по усім значенням часу t_0 . $R_q(t)$ проявляє степеневу поведінку

$$R_q(t) \propto t^{H_q}, \quad (4)$$

і визначає ієрархію показника H_q , який називається узагальненим коефіцієнтом Херста. Цінова еволюція називається мультифрактальною, якщо ієрархія H_q змінюється із зміною q . Для $q=2$ маємо випадок обмеженого Броунівського руху, який характеризується добре відомим показником Херста: $0 < H_2 < 1$. Простий шлях для визначення присутності мультифрактальності є аналіз спектра мультифрактальності $\tau(q) = qH_q - 1$. Для монофракталів $\tau(q)$ залежить лінійно від q . Інакше маємо справу з мультифракталом.

Порівняємо мультифрактальні властивості індексів двох випадково вибраних країн з ринку MSCI, одна з яких відноситься до розвинених, а інша до країн, які розвиваються. Нехай це будуть США і Бразилія. Дослідження будемо проводити засобами інструментів, розроблених в середовищі комп'ютерної математики MATLAB. Нами розроблено такий інструмент на базі підсистеми FRACLAB (www.inria.com). В основу покладено вейвлет-перетворення вихідного сигналу [7].

Вейвлети використовуються в тих випадках, коли при дослідженні складного сигналу нас цікавить не тільки просте перерахування його характерних частот (масштабів), але й відомості про локальні координати, при яких ці частоти себе проявляють. Вейвлет-перетворення сигналу зводиться до його розкладу по базису локалізованої функції (вейвлета) шляхом масштабних змін та переносів. Відомо [8], що всі вейвлети даного сімейства подібні до свого базисного вейвлета і одержуються з нього за допомогою стиснення і переносу. Оскільки основна задача вейвлет-аналізу зводиться до вивчення поведінки сигналів на різних масштабах шляхом обчислення скалярного добутку конкретного вейвлета на сигнал, що вивчається, то він є адекватним для дослідження фрактальної поведінки. У термінах вейвлет-коефіцієнтів фрактальність проявляється через степеневу залежність вищих моментів коефіцієнтів при зміні масштабу.

Розглянемо суму Z_q q -х моментів коефіцієнтів вейвлет-перетворення на різних масштабах j

$$Z_q(j) = \sum_k |d_{j,k}^q|. \quad (5)$$

Сума (5) обчислюється для максимальних значень модулів вейвлет-коефіцієнтів. Можна показати, що у випадку фрактального сигналу ця сума повинна вести себе як

$$Z_q(j) \propto 2^{j[\tau(q)+q/2]}, \quad (6)$$

тобто

$$\log Z_q(j) \propto j \left[\tau(q) + \frac{q}{2} \right]. \quad (7)$$

Отже, необхідною умовою того, що сигнал являється самоподібним є лінійна залежність логарифма статистичної суми $\log Z_q(j)$ від номера рівня j . Якщо ця вимога задовольняється, то залежність функції τ від рангу моменту q вказує на те, чи є даний сигнал моно- чи мультифрактальним. Монофрактальні сигнали характеризуються однією розмірністю, тоді як для опису мультифрактальних сигналів стає необхідним набір таких розмірностей. Тобто, якщо властивості скейлінгу сигналу однорідні вздовж всього сигналу, то мова йде про монофрактальний сигнал. Це проявляється в лінійній залежності $\tau(q)$. Функцію $\tau(q)$ можна розглядати у якості масштабної-незалежної міри фрактального сигналу. Функція $\tau(q)$ зв'язана перетворенням Лежандра з функцією мультифрактального спектру $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau. \quad (8)$$

Іншими словами, побудувавши в подвійному логарифмічному масштабі залежність статистичної суми (partition function) від масштабу (scale), як показано на рис.1, і знайшовши кут нахилу, одержуємо функцію $\tau(q)$ (справа внизу рисунку). Перетворення Лежандра дає функцію мультифрактального спектру (spectrum) $f(\alpha)$ (справа зверху).

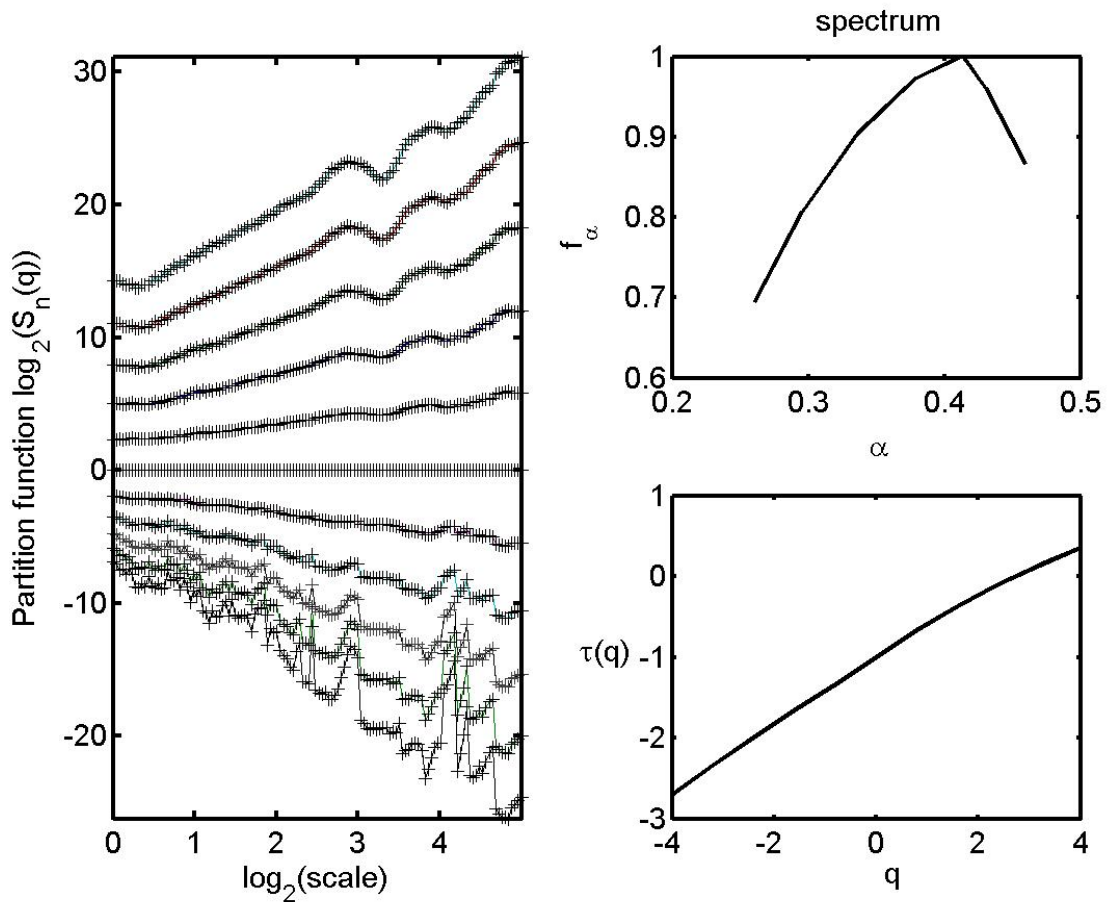


Рис. 1. Розрахунки статистичної суми, мультифрактального спектру $\tau(q)$ і спектру сингулярності $f(\alpha)$ для індексу MSCI USA.

З рисунку 1 видно, що ми маємо справу з мультифракталом. Оскільки динамічний ряд змінюється з часом, будуть змінюватись і відповідні спектри $\tau(q)$ і $f(\alpha)$. Ми дослідили цей процес, реалізуючи наступний алгоритм рухомого вікна. Виберемо відрізок часового ряду довжиною l (вікно) і розрахуємо спектри мультифрактальності і сингулярності. Перенесемо вікно на h_l часових одиниць (крок вікна) вправо і повторимо розрахунки. Процедура повторюється вздовж усього динамічного ряду. На рис.2 зображені результати досліджень для ширини спектру сингулярності α . Видно, що для MSCI USA вздовж всього проміжку часу ширина спектру в цілому більша, аніж для MSCI Brazil.

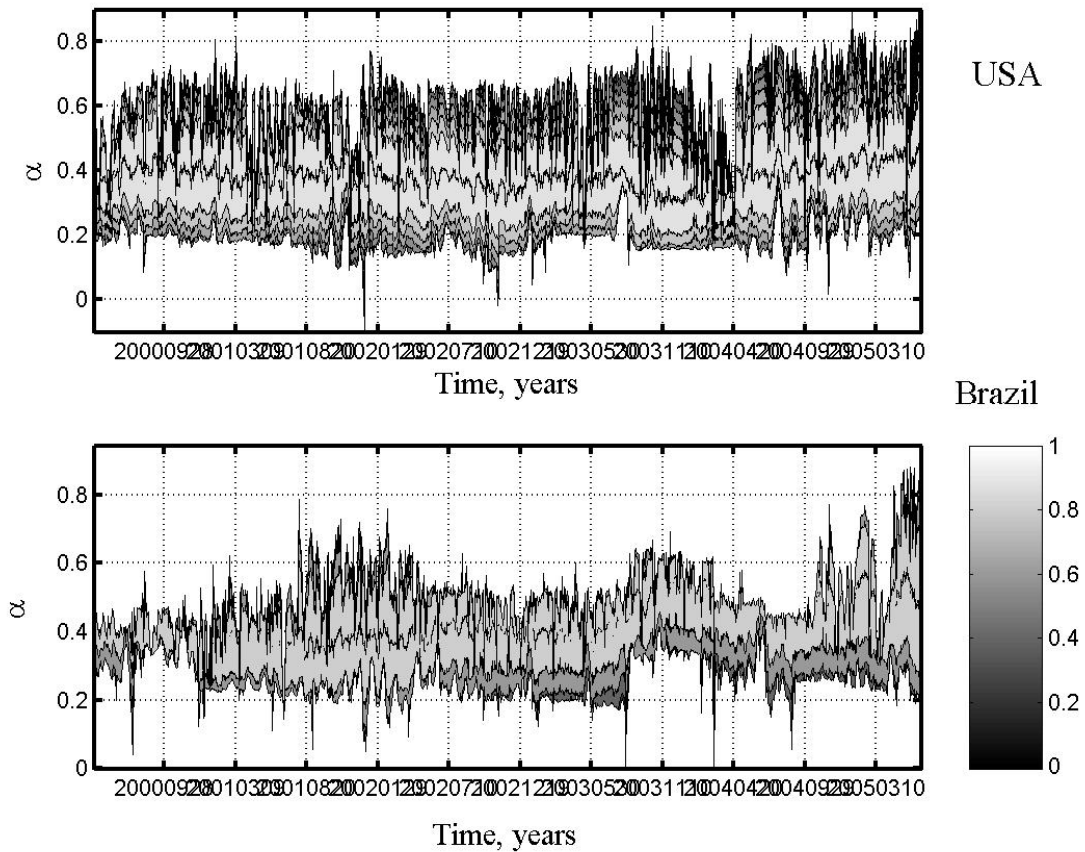


Рис.2. Порівняння ширини спектрів сингулярності для індексів фондових ринків США і Бразилії. $h=500$ днів, $h_t=1$ день

Можна представити одержані результати і в іншому вигляді. Якщо в кожній точці візьмемо різницю $\delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$, то саме цю величину ми можемо використовувати як міру ефективності складної системи. У нашому випадку еволюція з часом фондових ринків США і Бразилії за індексом MSCI відображена на рис. 3.

Додатково ми провели порівняльний аналіз поведінки з часом вейвлет-коефіцієнтів і деяких характеристик розподілу: дисперсії, асиметрії, ексцесу тощо для досліджуваних рядів. Результати розрахунків приведені на рисунках 4-5. Особливі відмінності помітити дуже складно. Аналіз розподілу флуктуацій цін та їх волатильностей теж не виявився інформативним.

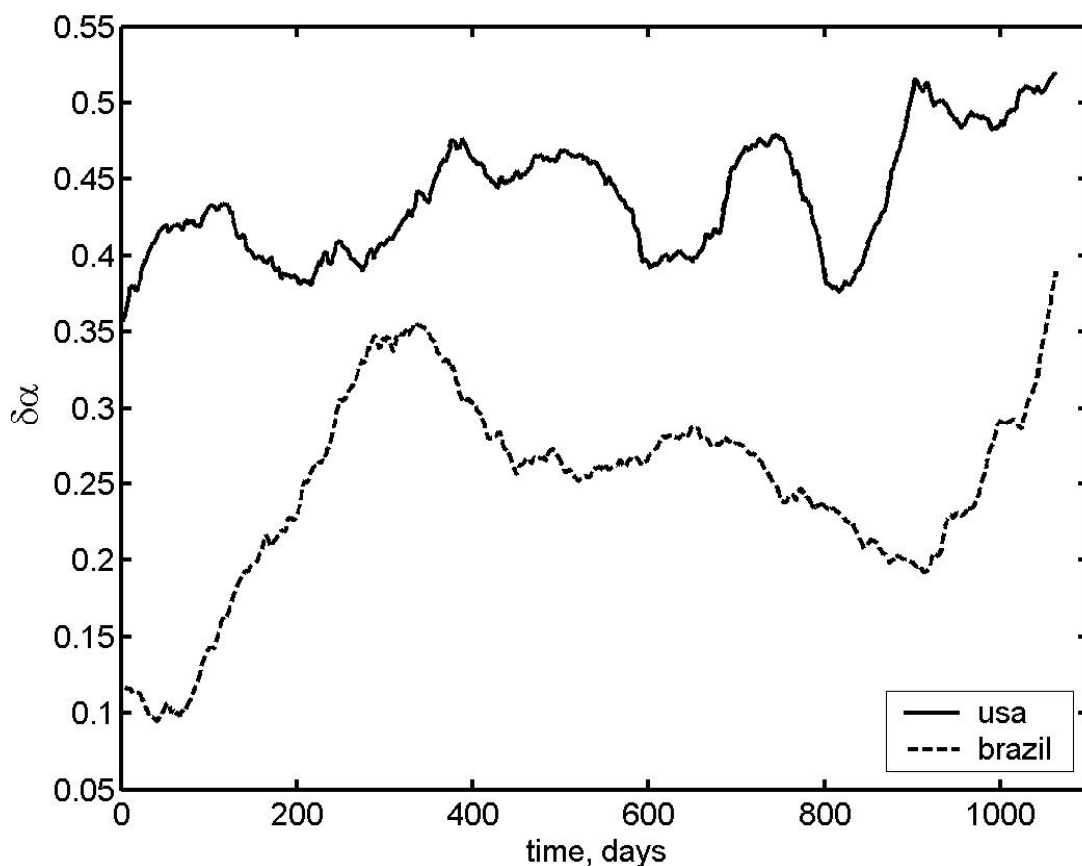


Рис. 3. Зміна з часом величини $\delta\alpha$, яку можна використовувати у якості міри ефективності

З огляду на сказане, складно оцінити привабливість фондових ринків США і Бразилії з точки зору глобального інвестора. Тому розглянемо далі оцінку максимально можливих втрат інвестора за методикою VaR [10]. VaR розраховується наступним чином:

$$VaR = W_0 \alpha_0 \sigma \sqrt{h}, \quad (8)$$

де W_0 – початкове значення портфеля, в даному разі це значення індексу вибраної країни, α_0 - рівень довіри, σ - середньоквадратичне відхилення, h – горизонт прогнозування, визначається в днях.

Так як σ виражається в денному базисі, то за допомогою виразу $\sigma\sqrt{h}$ відбувається масштабування середньоквадратичного відхилення до інтервалу h -днів.

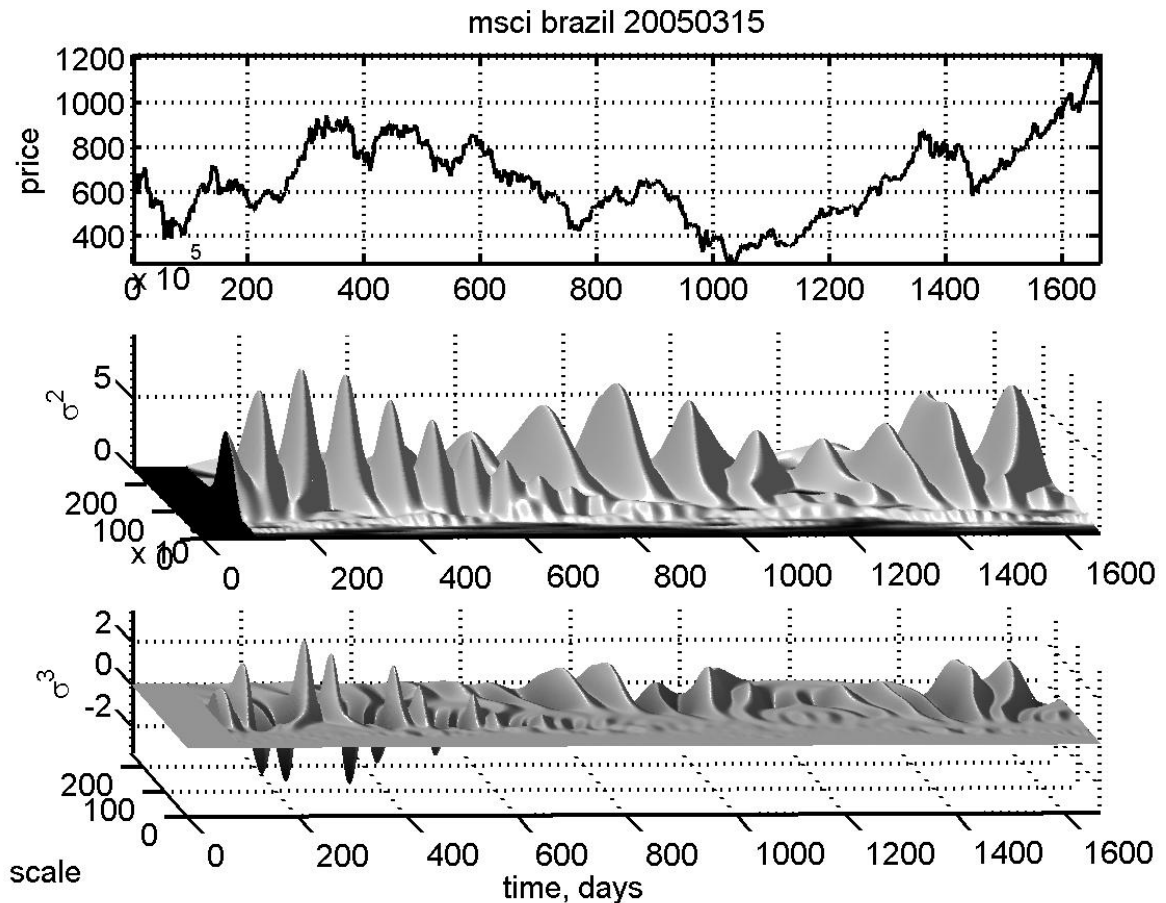


Рис.4. Залежність від часу дисперсії σ^2 і асиметрії σ^3 коефіцієнтів вейвлет-перетворення динамічного ряду MSCI Brazil (верхня частина рисунку).

Для того, щоб розкласти варіацію на множину рівнів, необхідно показати, що дискретне wavelet перетворення зберігає енергію, тобто сума всіх квадратів вейвлет-коефіцієнтів на масштабі J дорівнює сумі квадратів елементів функції, яка вказана нижче:

$$\|W\|^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{2^j} d_{j,k}^2 + s_{j,0}^2 = \sum_{t=0}^{N-1} f_t^2 = \|f\|^2. \quad (9)$$

В (9) W означає вектор, який містить коефіцієнти рівнів $j = 1, 2, \dots, J$ і коефіцієнт масштабу рівня J . Тепер вейвлет-варіацію, зв'язану з масштабом λ_j ($\lambda_j = 2^{j-1}$) для функції $f(t)$, можна визначити наступним чином:

$$\sigma_f^2(\lambda_j) = \frac{1}{2\lambda_j} \text{var}(d_j; k). \quad (10)$$

До того ж, вейвлет-варіація являється розкладанням покрокової варіації

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_f^2(\lambda_j) = \text{var}(f(t)). \quad (11)$$

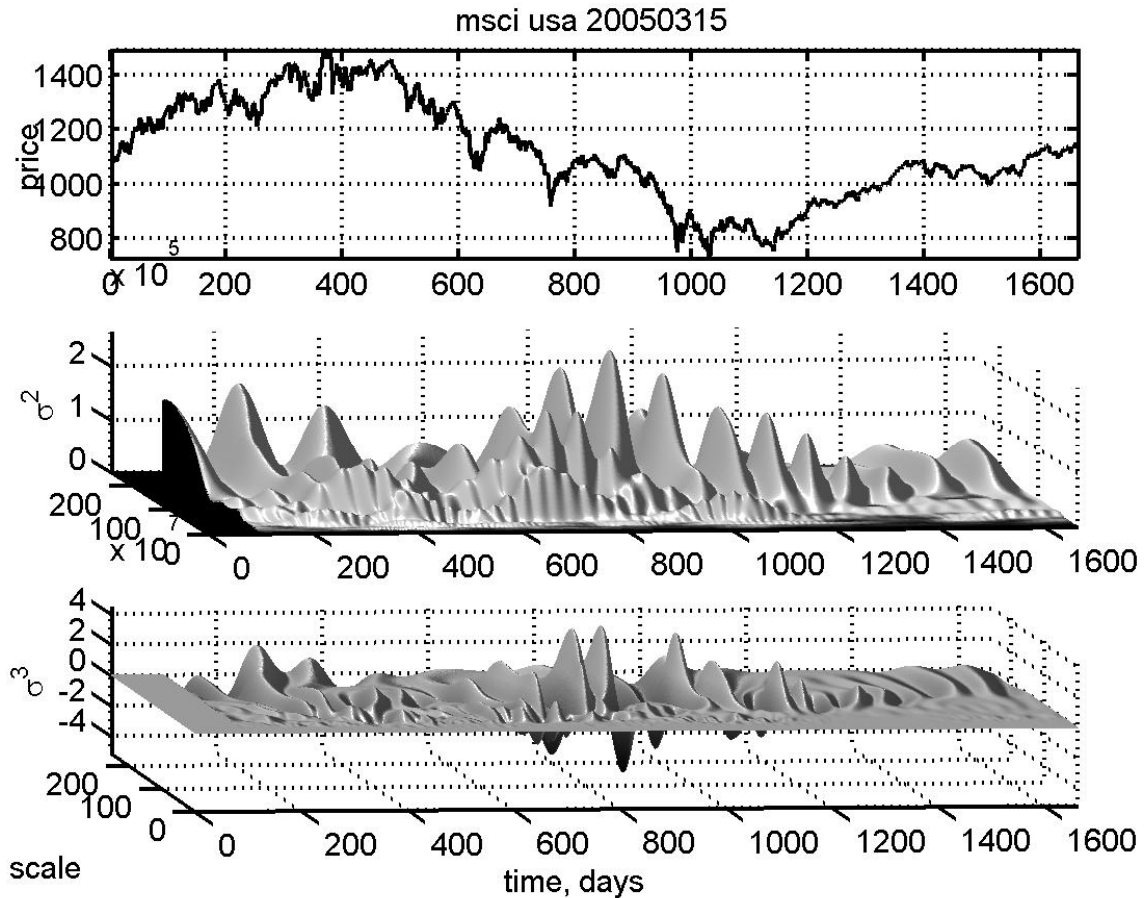


Рис.5. Динамічний ряд MSCI USA та відповідні дисперсія σ^2 і асиметрія σ^3 коефіцієнтів його вейвлет-перетворення

Суть розрахунків полягає в тому, що обирається горизонт h , на який ми бажаємо отримати показник VaR. Виходячи зі значення h , визначаємо максимальний рівень γ , який ми беремо з декомпозиції для розрахунку вейвлет-варіації на даний період, тобто $2^{\gamma-1}$ максимально наближується до значення h , але не перевищує його:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{\gamma} \sigma_f^2(\lambda_j). \quad (12)$$

На рис. 6 разом з коливаннями індексів (price) приведені оцінки максимально можливих втрат портфельного інвестора на цих ринках США і Бразилії (VaR) в залежності від горизонту прогнозу у днях.

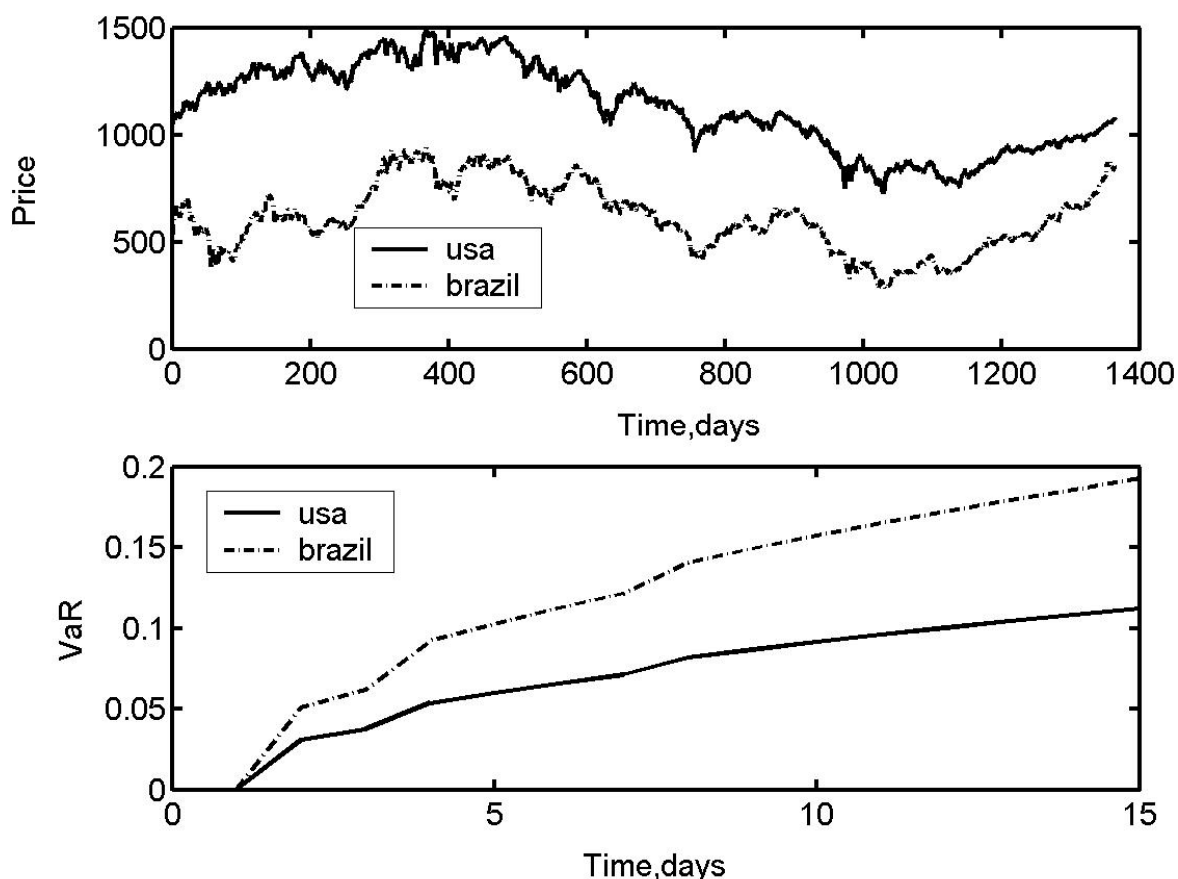


Рис. 6. Залежність величини VaR від горизонту прогнозу (нижня частина рисунку) для часових рядів, які представлені індексами MSCI USA і MSCI Brazil (верхня частина рисунку)

Висновки. Таким чином, дослідження мультифрактальних властивостей нестационарних динамічних рядів дозволяє виявити нову міру складності сигналу, яку ми назвали мірою ефективності. Такою мірою може слугувати ширина спектру мультифрактальності. В ідеальному випадку $\delta\alpha = 1$ [5,9]. Зменшення цієї величини вказує на наявність процесів, які мають деструктивний характер: організаційна перебудова, деградація, застійні явища тощо. При $\delta\alpha < 1$ ми маємо справу з критичними або кризовими явищами.

Зміну ефективності з часом слід враховувати при формуванні і диверсифікації портфеля. Виявляється, що більш ефективні активи мають менші інвестиційні ризики.

1. Козлов Н.Б. Формирование рынка ценных бумаг в постсоциалистических странах // Москва: ИМЭПИ РАН, 2002.-316 с.
2. Дербенцев В.Д., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Моделивання явищ самоорганізації в фінансово-економічних системах // Економіко-математичне моделювання. Вісник ТАНГ. - Тернопіль: ТАНГ, 2003, вип.14, №3. - С.104-110
3. Соловйов В. М, Соловйова В.В., Нагібас А.О. Порівняльний аналіз динаміки фондових ринків розвинених країн і країн з перехідною економікою. // Вісник Криворізького технічного університету. Збірник наукових праць. – Кривий ріг: КТУ, 2005, вип. 7. – С.266 – 269
4. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of networks // Advanced in Physics, 2002, v.51.-P.1079-1187. e-print arXiv:cond-mat/0106144, v.2, 7 Sep., 2004
5. Stanley H.E. Statistical physics and economic fluctuations: do outliers exist? // Physica A, 2003, v.318. - P.279-292
6. Constantin M., Sarma S.D. Volatility, persistence, and survival in financial markets // e-print: arXiv:physics/0507020 v1 4Jul 2005
7. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996, т.166, №11.-С.1145-1170
8. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 2001, т.171, №5.-С.465-501
9. Oswiecimca P., Kwapiem J., Drozd S. Multifractality in the stock market: price increments versus waiting times // e-print: arXiv:cond-mat/0408277 v1 12 Aug 2004
10. Соловьев В.Н., Нечаев В.П., Нагибас А.А. Мультифрактальность бизнес-архитектур и управление риском сетевых предприятий // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды Международной научной школы МА БР – 2005.-СПб.: ГОУ ВПО «СПбГУАП», 2005.-С.234-239