Соловйов В.М.

Криворізький економічний інститут

Київського національного економічного університету

ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА: З ДОСВІДУ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Складні системи різної природи – фізичні, біологічні, соціальні, економічні - проявляють універсальні властивості, дослідження яких вимагає розробки принципово нових моделей і методів досліджень. Поряд з класичними економетричними підходами все ширше використовуються моделі і методи теорії складних систем, яка, являючись по суті міждисциплінарною наукою, використовує як відомі моделі, так і принципово нові. У даній оглядовій статті ми демонструємо деякі можливості такого підходу.

Ключові слова: складні системи, автокореляція, довга пам’ять, самоорганізована критичність, мультифрактальний аналіз, нелінійна динаміка, вейвлет, коефіцієнт Херста, коефіцієнт Холдера (Hölder).

Зміст

1. Вступ
2. Розподіл цінових флуктуацій активів
3. Застосування методів нелінійної динаміки при дослідженні пам’яті ринку
4. Спектральні властивості кореляційної матриці, процеси самоорганізації
5. Моделювання критичних явищ
6. Диверсифікація портфеля у формалізмі теорії випадкових матриць
7. Література

1. Вступ. Протягом останніх десяти, п’ятнадцяти років відбулися відчутні зміни в розумінні фундаментальних закономірностей економічних систем. Виявилось, що такі складні системи мають універсальні емерджентні

властивості, які не знаходять адекватного розуміння у рамках традиційних парадигм. Тому для аналізу фінансово-економічних ринків все активніше використовуються методи та моделі фундаментальних наук, які у поєднанні з сучасними досягненнями в галузі інформаційних технологій та досить ємними базами даних (мільйони записів навіть в базах некомерційного призначення) забезпечили значний прогрес у розумінні та квантифікації природи цих систем. З'явились нові „кількісні" напрямки економіки: математична економіка, фізична економіка, економфізика та ін. [1-4]. В останні роки значна увага як аналітиків, так і практиків прикута до робіт в галузі економфізики [2], яка вдало використовує потужний багаж фізичних методів і моделей для розв'язання прикладних проблем економіки.

В роботі приведені результати досліджень, проведених нами в останні 2-3 роки в рамках парадигми теорії складних систем [5-10]. По можливості проведено порівняльний аналіз структурних та динамічних властивостей світових фінансово-економічних ринків з аналогічними для України у випадку, коли для останніх є відповідні репрезентативні бази даних [35].

У якості об'єктів дослідження вибрані: (а) вітчизняна база даних Першої Фондової Торгівельної Системи (ПФТС) (www.kinto.com) ; (б) архіви курсів світових валют відносно американського долара, куди входить і національна валюта (www.oanda.com); (в) бази даних Standard&Poor (S&P 500, S&P 100, S&P 1200) (www.standardandpoors.com); індекси глобальної інвестиційної привабливості компанії Morgan Stanley Capital International (MSCI), які належать 50 країнам світу з різних регіонів світу (www.msci.com); база даних фондових індексів 40 країн (yahoo.finance.com) та ін.

2. Розподіл цінових флуктуацій активів. Дослідження розподілу цінових флуктуацій значної кількості фінансових активів (див., наприклад, [2] для огляду) вказує, що вони розподілені не за нормальним законом, а мають значні ймовірності при малих значеннях цін. У зв'язку з тим, що "вагою" таких значень знехтувати не можна, їх називають „важкими" хвостами.

Нехай зміна ціни (або, іншими словами, „return”- прибутковість) акції $i = 1,...,N$ за проміжок часу Δt

$$G_i(t) \equiv \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t), \quad (1)$$

де $S_i(t)$ - ціна акції i. Оскільки різні акції мають різні рівні волатильності, доцільно ввести нормалізовані прибутковості

$$g_i(t) = \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i}. \quad (2)$$

$\sigma_i = \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ - стандартне відхилення G_i. Дужки $\langle \cdots \rangle$ означають середнє за досліджуваний проміжок часу.

На рисунку 1 зображена динаміка змін з часом індексів фондових ринків США (S&P 500) і України (ПФТС), а на рисунку 2 відповідних прибутковостей.

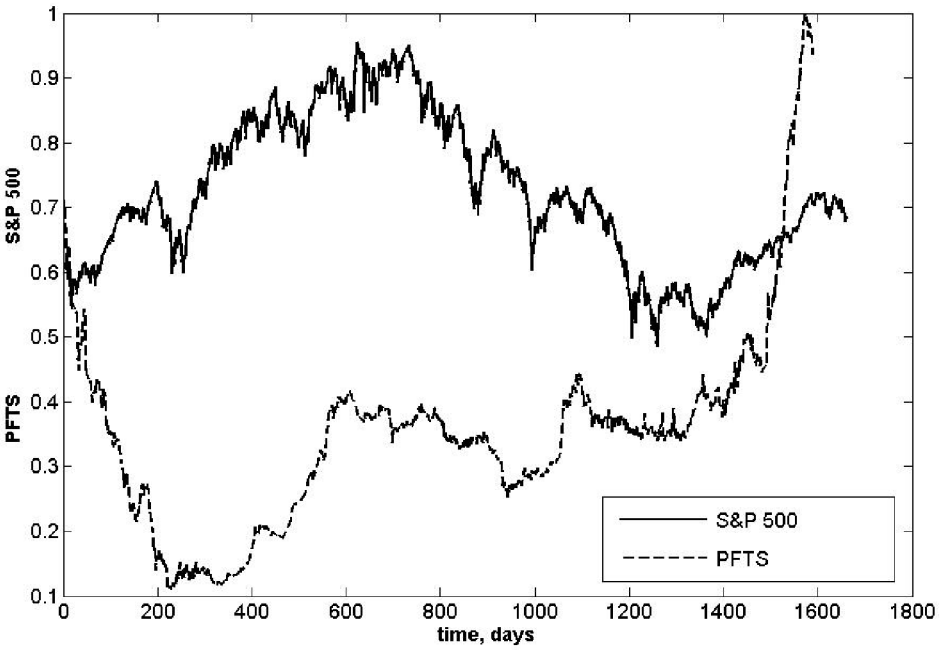


Рис.1. Порівняльна динаміка фондових індексів S&P 500 (суцільна лінія) і ПФТС (штрихова лінія) за період з 1997 по 2004 роки

Необхідно звернути увагу на значно менші амплітуди цінових коливань на ринку розвиненої держави, ніж на ринку держави з перехідною економікою. Ця відмінність проявить себе і при їх порівняльному аналізі нелінійної динаміки (див. далі).

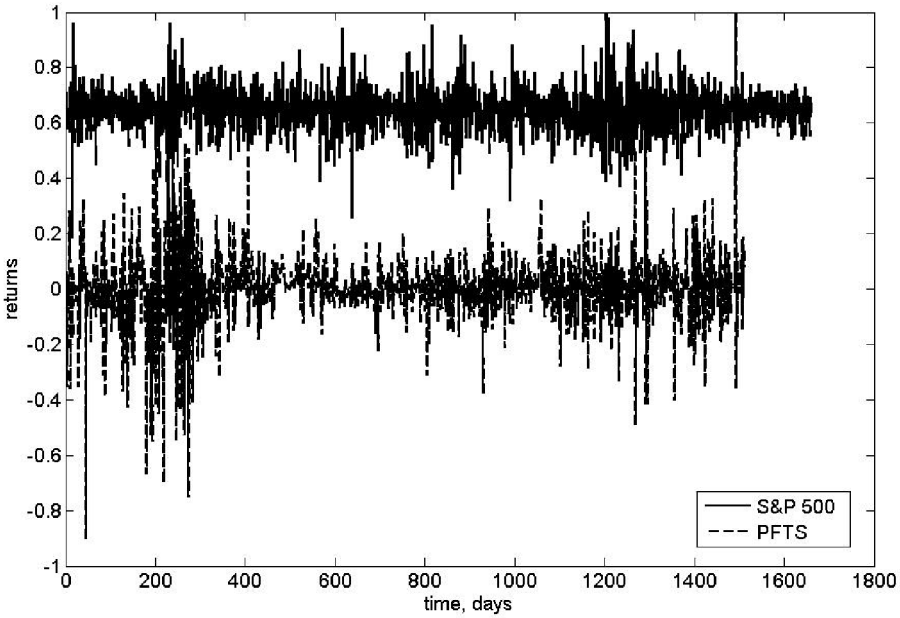


Рис.2. Зміна з часом прибутковостей (1) фондових ринків США (за індексом S&P 500) і України (за індексом ПФТС).

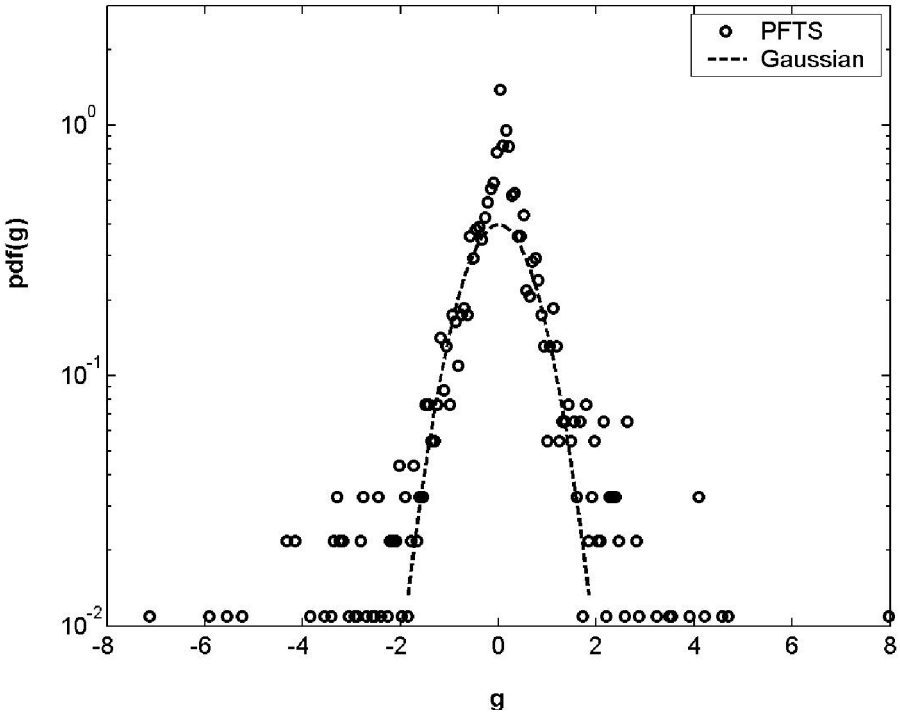


Рис. 3. Функція розподілу нормалізованих цінових флуктуацій (2) для фондового ринку України. Для порівняння штриховою лінією зображено криву нормального розподілу. Точки справа і зліва від кривої Гауса відносяться до “важких” хвостів

Функція розподілу прибутків має вигляд

$$P(g > x) \propto x^{-(1+\alpha)}, \quad (3)$$

де показник степеня $\alpha \approx 3$ для широкого інтервалу величин флуктуацій розміром у вісім порядків на часових проміжках від однієї хвилини до декількох днів [11]. Універсальність значення α для фінансових ринків майже ніколи не порушується. Недавно було знайдено відхилення в бік менших значень для товарних ринків [11]. Із рисунка 3 видно, що на фондовому ринку України мають місце цінові флуктуації, які призводять до появи „важких хвостів" у функції розподілу. Але на відміну від американського ринку вони менш „важкі". Про це свідчить і значення $\alpha < 3$, тоді як для S&P 500 $\alpha \approx 3$. Ця закономірність є загальною для ринків різної природи, а, значить, за величиною показника α можна судити відносно ступеня розвитку відповідного ринку.

3. Застосування методів нелінійної динаміки при дослідженні пам'яті ринку. Складні системи характеризуються довготривалими кореляціями між активами, які одержали назву довгої пам'яті (long-term memory). Вважається, що значення з віддаленого минулого можуть мати суттєвий ефект для разрахунку цінових змін. Для фінансово-економічних систем довгу пам'ять мають зокрема волатильність, об'єми торгівлі, знаки ордерів (купівля/продаж) та ін. Наявність довготривалої пам'яті ставить під сумнів модель ефективного ринку [12].

Найпростіший прямий шлях вивчення кореляційних властивостей є дослідження автокореляційної функції

$$C(t) \equiv \frac{\langle g(t)g(t+\Delta t)\rangle - \langle g(t)\rangle^2}{\langle g^2(t)\rangle - \langle g(t)\rangle^2}, \quad (4)$$

де Δt - часовий лаг. Якщо функція (4) спадає експоненційно, $C(t) \propto \exp(-t/t_0)$, мова йде про коротку пам'ять з характерним часовим масштабом $1/t_0$. Якщо залежність $C(t)$ має степеневий вигляд $C(t) \propto t^{-\gamma}$, де $\gamma < 1$ говорять про довготривалу пам'ять. Ми досліджували па'мять для прибутковостей і їх модулей. Відомо, що прибутковості мають коротку, а модулі – довгу.

На рис.4 продемонстровано ефект довгої пам’яті для модулей прибутковостей ПФТС і S&P 500. Довжина пам’яті різна, що може бути свідченням існування різних механізмів довготривалої пам’яті [13].

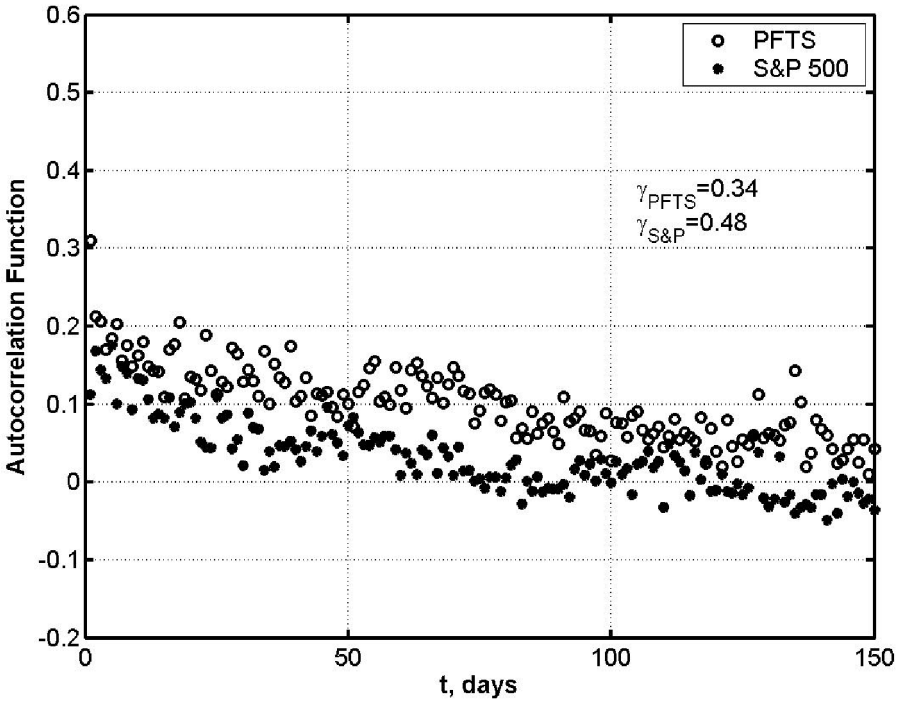


Рис. 4. Залежність функції автокореляції для абсолютних значень прибутковостей фондового індексів України і США. γ - показник степеня відповідного розподілу.

Нами також використано інші непрямі методи дослідження довготривалої пам’яті: спектральний аналіз, аналіз детрендованих флуктуацій (АДФ) та інші. Розглянемо останній, оскільки він є коректним і для нестаціонарних часових рядів та дозволяє відслідковувати перехідні процеси типу кросоверу між проміжками пам’яті різної довготривалості [14].

АДФ є одним з найбільш ефективних методів дослідження нестаціонарних динамічних рядів і реалізується наступним алгоритмом [13-14]:

1. Ряд (2) ділиться на N/τ проміжків однакової довжини τ.

2. Для кожного проміжку знаходиться лінійна апроксимація тренду $y_\tau(t) = a_\tau t + b_\tau$, де a_τ, b_τ – константи для вибраного проміжку.

3. Проводиться процедура видалення тренду (детрендування) $g_\tau(t) - y_\tau(t)$ шляхом віднімання від значень оригінального ряду (2) значень локального тренду $y_\tau(t)$.

4. Для кожного проміжку обчислюється величина $F_i^2(\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau/\Delta t}(g(t) - y_\tau(t))^2$ і її середнє значення $\left\langle F^2(\tau)\right\rangle = \frac{\tau}{N}\sum_{i=1}^{N/\tau} F_i^2(\tau)$.

5. Показник ступеня α у залежності $\left\langle F^2(\tau)\right\rangle \propto \tau^{2\alpha}$ знаходиться шляхом побудови прямої в подвійному логарифмічному масштабі.

Показник α визначає класичний коефіцієнт Херста H. Для локальної версії АДФ описана процедура повторюється для деяких достатньо довгих часових вікон, які пробігають вздовж всього часового ряду. В цьому випадку вдається відслідкувати зміни коефіцієнта Херста з часом.

Для випадкового ряду (перемішаного чи „сурогатного”- shuffled) $\alpha = 0.5$. У випадку персистентного ряду $0.5 < \alpha \le 1$, для антиперсистентного $0 < \alpha < 0.5$. Значення $\alpha > 1$ свідчить про наявність довгочасових кореляцій, проте розподіл елементів ряду вже не відповідає степеневому закону, тобто ряд не є фрактальним. Для прибутковостей значення коефіцієнта Херста приблизно дорівнює 0.5 для більшості досліджуваних активів (зокрема, ПФТС і S&P 500). Це свідчить про відсутність довготривалої пам’яті. Модулі прибутковостей поводять себе більш цікаво. На рис. 4 відображена залежність коефіцієнта Херста для модулей прибутковостей динамічного ряду S&P 500.

Динаміка індексу ПФТС за періоди 1997-2000 рр. і 2001-2004 рр., відображена на рис.5-6 порівнювалась з динамікою індексу S&P 500 (див.рис.4). Поруч із спільними особливостями (кросовер, наявність довгострокової пам’яті) є і відмінності. Так, на вітчизняному фондовому ринку останнім часом видні позитивні зміни, що відображається в поверненні показника α до значень фрактального діапазону.

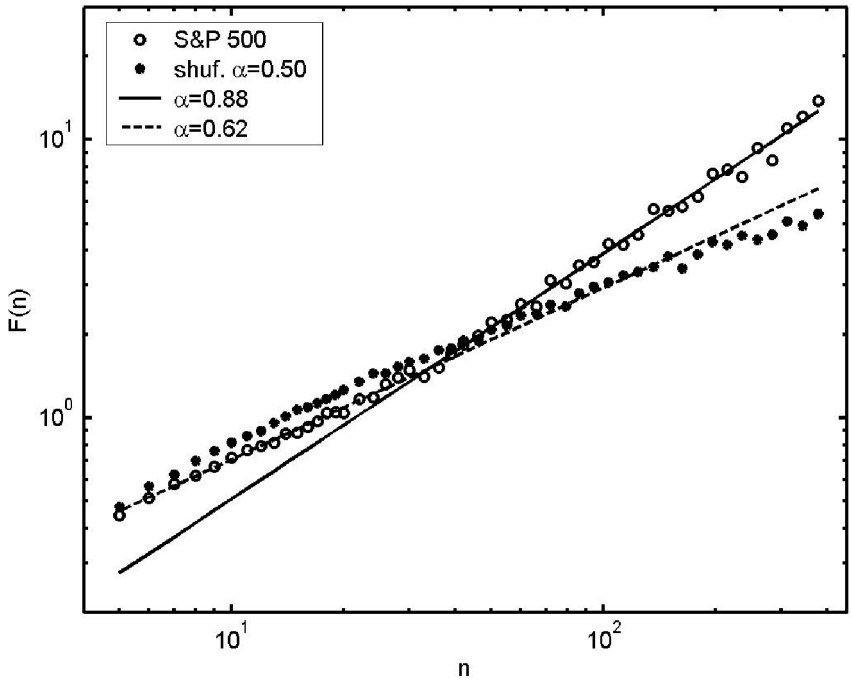


Рис.4. Залежність коефіцієнта α для даних S&P 500. Точка кросоверу спостерігається на часовому проміжку ≈ 40 днів. Величина α змінюється від $\alpha = 0.88$ до $\alpha = 0.62$. Для перемішаного ряду пам'ять втрачається: $\alpha = 0.50$

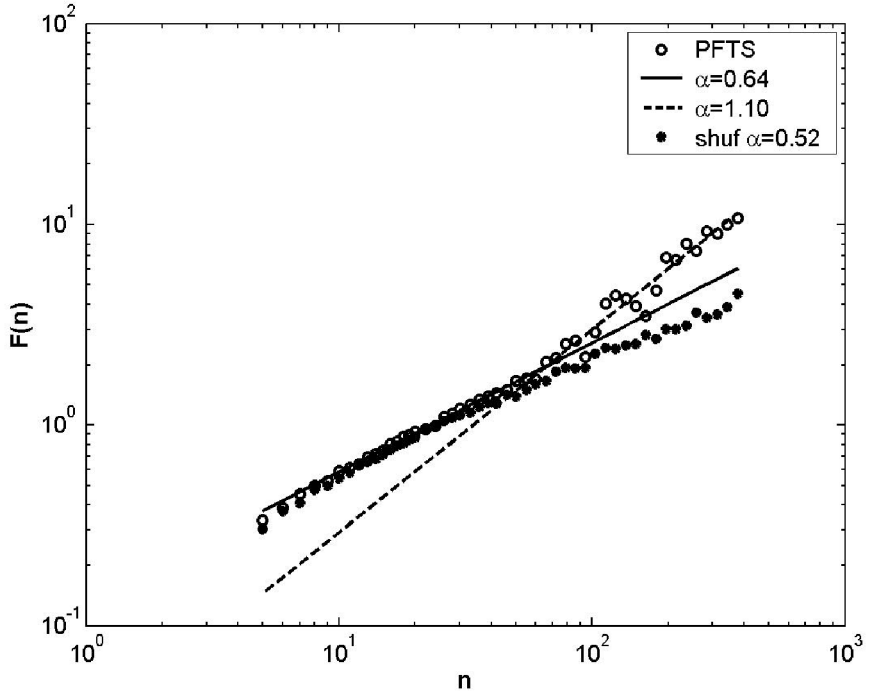


Рис. 5. Та ж картина, що і для S&P 500 для ПФТС в період ранніх реформ 1997-2000 рр. Різниця в тому, що значення α після точки кросоверу стає більше одиниці і вказує на незрілість вітчизняного фондового ринку.

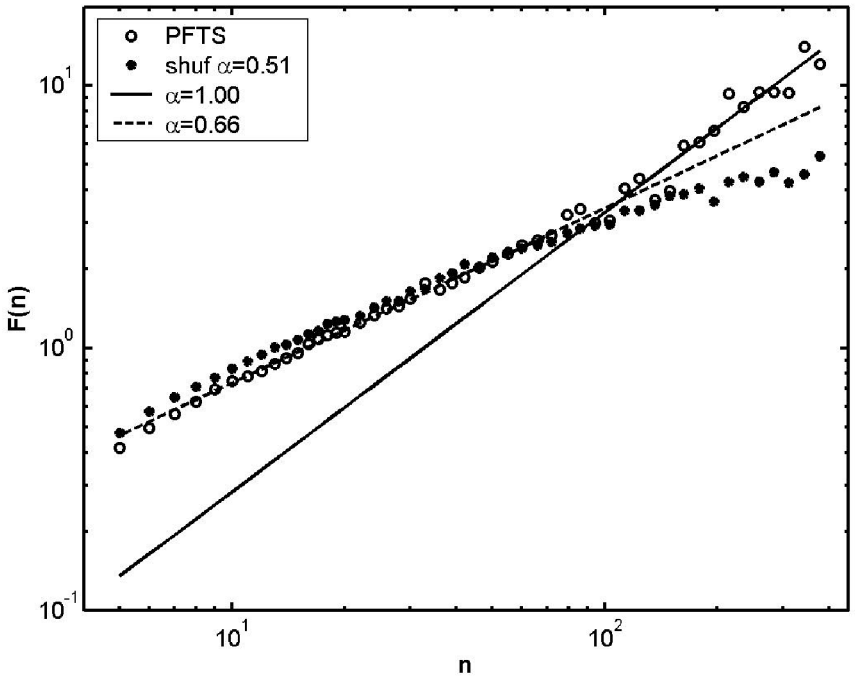


Рис. 6. Динаміка фондового ринку в 2001-2004 рр. Значення $\alpha = 1.00$ після точки кросоверу вказує на стабілізацію фондового ринку України

Наявність кросоверу (а якщо збільшити часовий масштаб, то кросоверів стає більше двох) свідчить про мультифрактальність динамічного ряду. Для дослідження цих важливих властивостей добре адаптований вейвлет-аналіз.

Вейвлети (дослівно – маленькі хвильки, сплески) використовуються в тих випадках, коли при дослідженні складного сигналу нас цікавить не тільки просте перерахування його характерних частот (масштабів), але й відомості про локальні координати, при яких ці частоти себе проявляють. Вейвлет-перетворення сигналу зводиться до його розкладу по базису солітоноподібної функції (вейвлета) шляхом масштабних змін та переносів [15-16].

Для мультифракталів величина розмірності Хаусдорфа D_F заміняється D_{q+1}, котра явно залежить від q і називається розмірністю Ренї (узагальненою розмірністю). Відомо [10], що всі вейвлети даного сімейства подібні до свого базисного вейвлета і одержуються з нього за допомогою стиснення і переносу. Оскільки основна задача вейвлет-аналізу зводиться до вивчення поведінки сигналів на різних масштабах шляхом обчислення скалярного добутку

конкретного вейвлета на сигнал, що вивчається, то він є адекватним для дослідження фрактальної поведінки. У термінах вейвлет-коефіцієнтів це говорить про степеневу залежність їх вищих моментів при зміні масштабу. Крім того вейвлет-коефіцієнти менш чутливі до шуму внаслідок того, що вони вимірюють середні флуктуації сигналу на різних масштабах.

Розглянемо суму Z_q $q-$х моментів коефіцієнтів вейвлет-перетворення на різних масштабах j

$$Z_q(j) = \sum_k \left| d_{j,k} \right|^q . \quad (5)$$

Сума в (5) обчислюється для максимальних значень модулів вейвлет-коефіцієнтів. Можна показати, що у випадку фрактального сигнала ця сума повинна вести себе як

$$Z_q(j) \propto 2^{j[\tau(q)+q/2]},$$

тобто

$$\log Z_q(j) \propto j\left[\tau(q) + \frac{q}{2}\right].$$

Отже, необхідною умовою того, що сигнал є самоподібним є лінійна залежність логарифма статистичної суми $\log Z_q(j)$ від номера рівня j. Якщо ця вимога задовольняється, то залежність функції τ від рангу моменту q вказує на те, чи є даний сигнал моно- чи мультифрактальним. Монофрактальні сигнали характеризуються однією розмірністю, тоді як для опису мультифрактальних сигналів стає необхідним набір таких розмірностей. Тобто, якщо властивості скейлінгу сигналу однорідні вздовж всього сигналу, то мова йде про монофрактальний сигнал. Це проявляється в лінійній залежності $\tau(q)$. Функцію $\tau(q)$ можна розглядати у якості масштабно-незалежної міри фрактального сигналу. Вона зв'язана з розмірністю Ренї, показниками Херста і Холдера. Відмітимо, що при додатніх значеннях q функція $Z_q(j)$ описує скейлінг значних флуктуацій і сильних сингулярностей, а при від'ємних q вона відповідає за скейлінг малих флуктуацій і слабких особливостей, проявляючи

тим самим свою чутливість до різних аспектів динаміки, яка лежить в основі досліджуваного сигналу.

На рисунках 7-8 порівнюються мультифрактальні спектри динамічних рядів ПФТС і S&P 500. Їх аналіз говорить про те, що обидва фондові ринки є мультифрактальними об'єктами, проте спектр мультифрактальності у розвиненого ринку дещо більший. Це служить підтвердженням його ефективності [11].

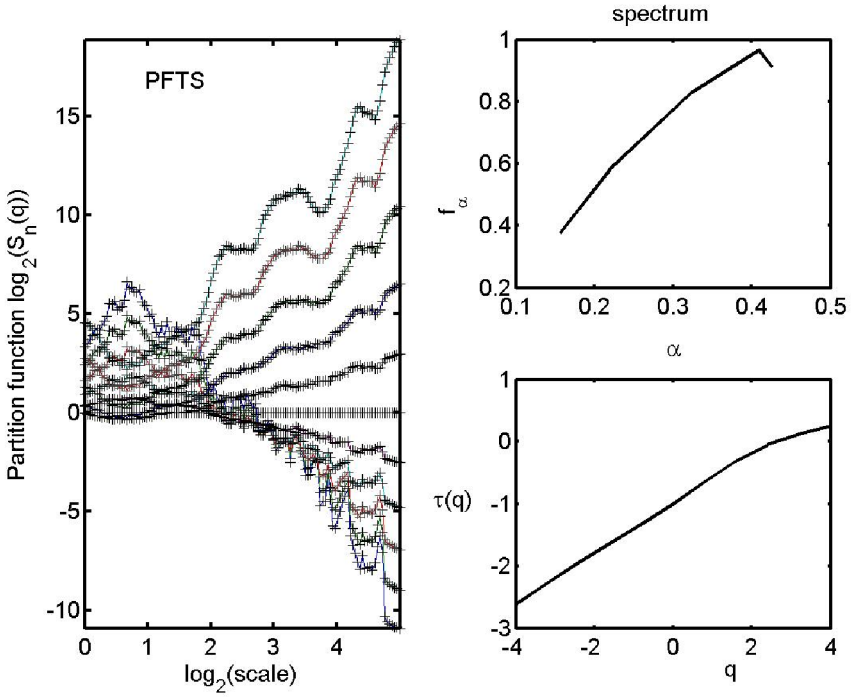


Рис. 7. Мультифрактальні властивості українського фондового ринку. Зліва у подвійному логарифмічному масштабі відображена залежність статистичної суми (partition function) від масштабу (scale). Графік у правому нижньому куту одержується при знаходженні регресії статистичної суми для вибраного масштабу. Мультифрактальний спектр (верхня справа частина) – результат перетворення Лежандра функції $\tau(q)$.

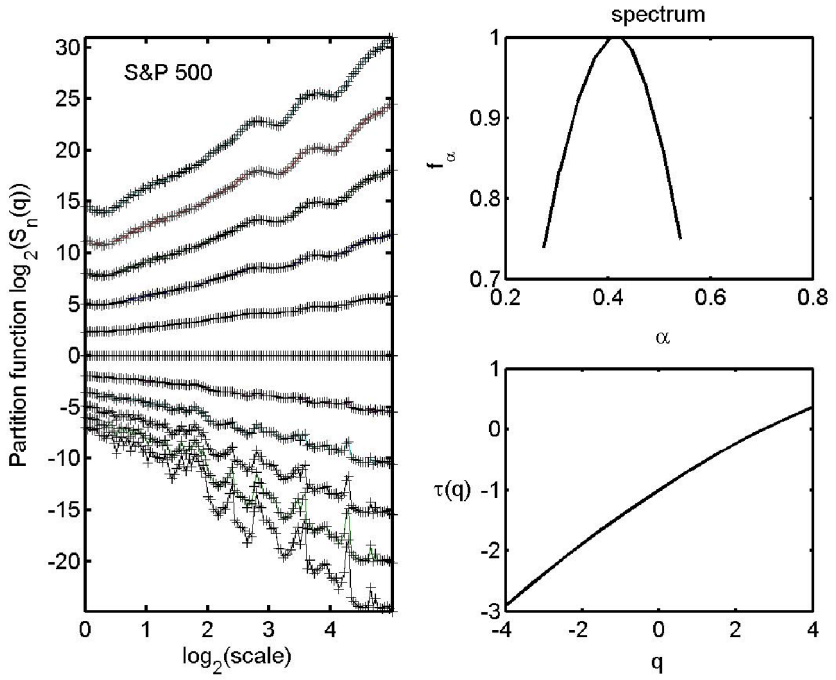


Рис. 8. Мультифрактальні особливості американського фондового ринку

4. Спектральні властивості кореляційної матриці, процеси самоорганізації.

Цей розділ досліджень спирається на використання теорії випадкових матриць при дослідженні кореляцій цінових флуктуацій довільно вибраних активів [17,18,27,33]. Побудуємо на основі нормованих прибутковостей матрицю

$$C_{ij} = \left\langle g_i(t) g_j(t) \right\rangle \text{ , (6)}$$

яка відображає кореляцію між активами ринку.

На рис.9 проведено порівняння функції розподілу коефіцієнтів взаємної кореляції (6) для світового валютного ринку з такими, що знайдено для перемішаних випадковим чином даних. Видно, що існують відчутні додатні кореляції, які зникають при перемішуванні вихідних рядів.

Ми порівняли спектральні властивості матриці C з властивостями тестової матриці, сформованої з нормально розподілених, нормованих елементів (так званий Гаусів ортогональний ансамбль - ГОА), які добре відомі (рис. 10).

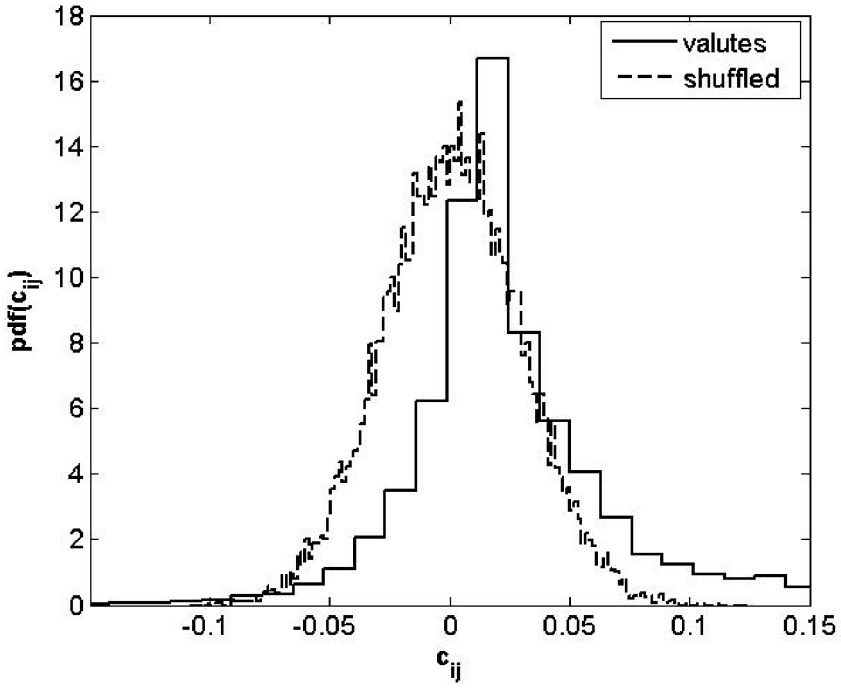


Рис. 9. Функції розподілу pdf елементів c_{ij} матриці крос-кореляції (6) для валютного ринку (суцільна лінія) і для перемішаних даних (штрихова лінія)

Позначимо $\rho(\lambda)$ щільність власних значень

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \quad . \quad (7)$$

$n(\lambda)$ - кількість власних значень, менших від λ. З теорії випадкових матриць відомо, що для випадкової матриці M розмірності $T \times N$ при $N \to \infty$, $T \to \infty$ та $Q = T/N \geq 1$ розподіл $\rho(\lambda)$ має вигляд

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2}\frac{\sqrt{(\lambda_{\max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{\min})}}{\lambda}, \quad (8)$$

$$\lambda_{\min}^{\max} = \sigma^2(1 + 1/Q \pm 2\sqrt{1/Q}),$$

де $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, а $\sigma^2 = 1$ – нормована варіація матриці M. В нашому випадку $Q \approx 11$, $\lambda \in [0{,}5; 1{,}7]$.

Майже 98% власних значень співпадають з такими ж для ГОА, але є і найбільші з них, які значно віддалені від $\lambda_{\max}$. Для матриці (6) – відстань між

найбільшими значеннями λ і основним спектром ще більша. Наявність власних значень, які лежать за межами спектра ГОА є свідченням колективної динаміки (самоорганізації) системи. Необхідно звернути увагу на значну кількість власних значень близьких до нуля. Ми вважаємо це псевдоефектом, який пов'язаний із структурою баз даних країн, що розвиваються: у них впродовж достатньо довгих проміжків часу ціна валюти не змінюється, що зазвичай не трапляється на валютних ринках розвинених країн.

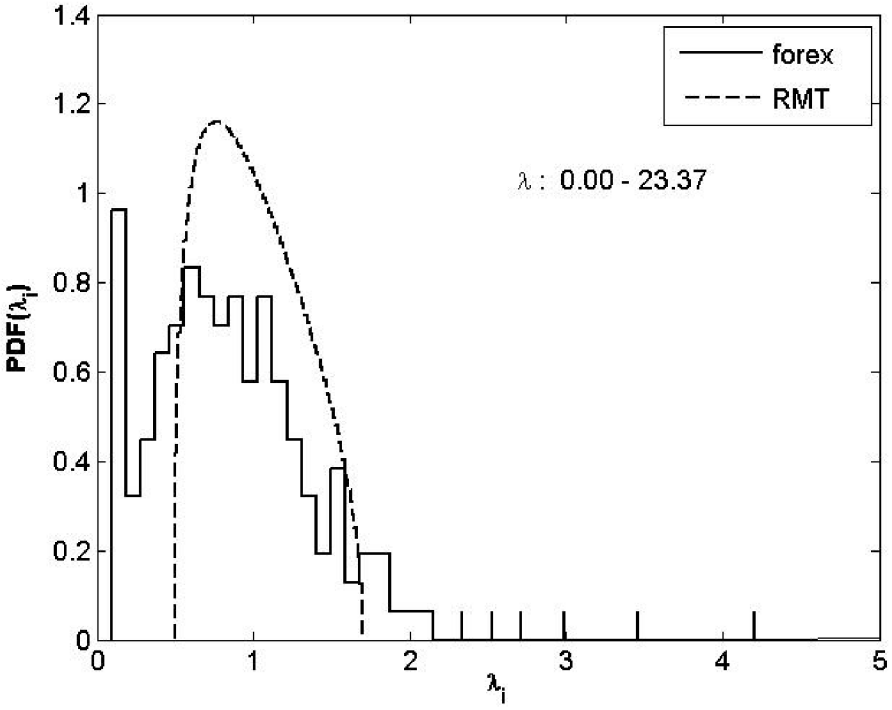


Рис.10. Порівняння функцій розподілу власних значень λ_i для кореляційної матриці, сформованої за даними світового валютного ринку у період 1997-2004 рр. (гістограма), і знайденої з (8) (штрихова лінія)

Досліджувались також відхилення розподілу компонентів власного вектора u^k, який відповідає власному значенню λ_k, від нормального, що має місце у випадку ТВМ. Причому розходження більш суттєве, коли відстань від верхньої границі ТВМ $\lambda_k - \lambda_+$ збільшується. Оскільки наближення до λ_+ збільшує ефекти хаотичності, ми визначаємо кількість компонентів u^k, які беруть участь у кожному власному векторі. Це у свою чергу відбиває ступінь

відхилення від ТВМ для розподілу компонентів власного вектора. Для цього ми використовуємо поняття зворотного відношення участі (inverse participation ratio IPR), запропонованого у теорії локалізації. IPR для компонентів власного вектора u^k визначене як

$$I^k \equiv \sum_{l=1}^{N} \left[u_l^k\right]^4, \qquad (9)$$

де $u_l^k, l = 1,\ldots,n$ - компоненти власного вектора u^k. Значення I^k може бути ілюстровано двома граничними випадками: 1) вектор з ідентичними компонентами $u_l^k \equiv 1/\sqrt{N}$ має $I^k = 1/N$, тоді як 2) вектор з одним компонентом $u_l^k = 1$ та нульовими іншими має $I^k = 1$. Таким чином, IPR визначає кількість даних з числа компонентів власного вектора, які мають значний внесок.

Рис 11 демонструє порівняння зворотного відношення участі для C та перемішаної матриці. I^k для випадково перемішаних рядів має середнє значення I^k - $\langle I \rangle \approx 0{,}008 \approx 1/N$ з вузьким уширенням. Це означає, що компоненти власного вектора розподілені таким чином, що майже усі вони мають однаковий внесок. Коливання навколо цієї середньої величини обмежені вузьким інтервалом. I^k для C, побудованих із щоденних прибутковостей періоду 1997-2004 рр., співпадають з I^k перемішаної матриці у значній частині спектра $\lambda_- < \lambda_i < \lambda_+$. Щодо границь спектра власних значень C, мають місце істотні відхилення I^k від $\langle I \rangle$. Гострий пік у центрі має певно таку ж природу, як і сплеск щільності власних значень при $\lambda \to 0$.

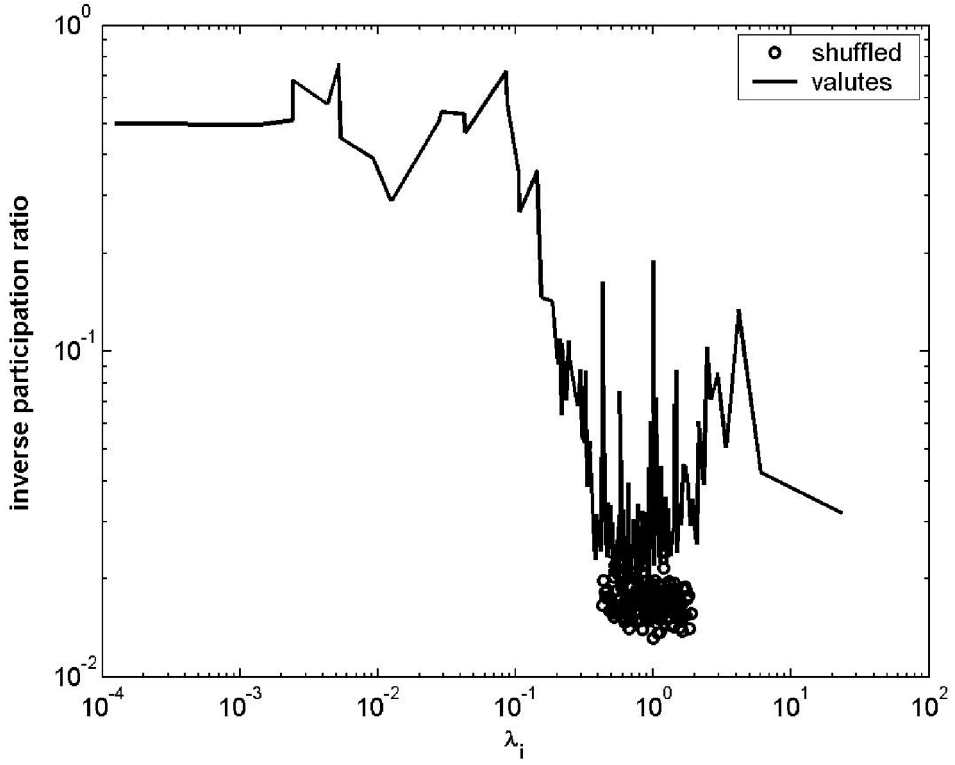
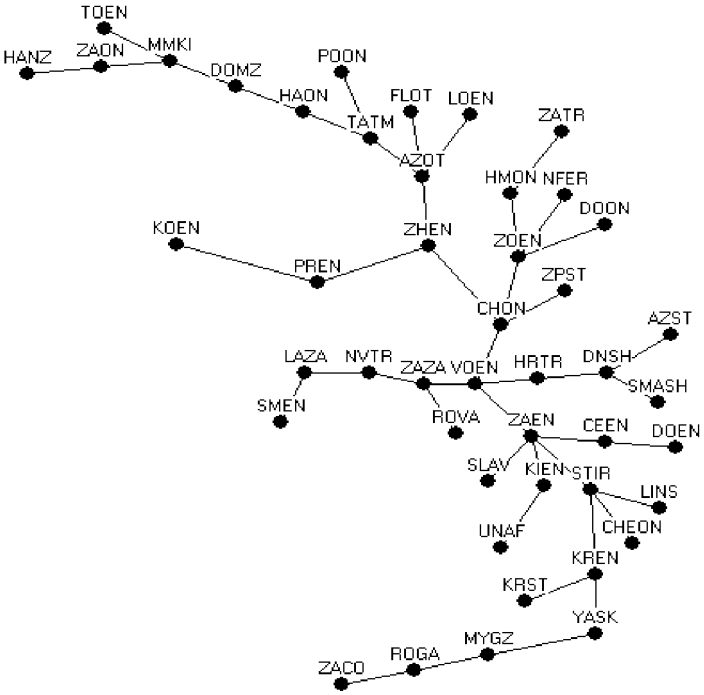
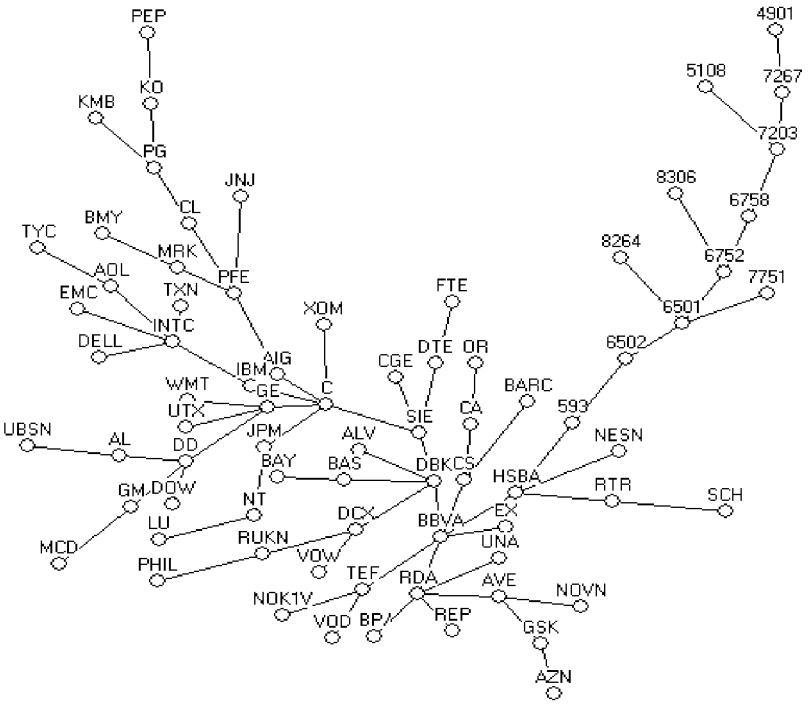


Рис.11. Обернене відношення участі для світового валютного ринку. Світлі точки відповідають перемішаним даним

Коефіцієнти кореляції формують матрицю $N \times N$ з елементами $-1 \le c_{ij} \le 1$. Її можна трансформувати в матрицю відстаней тієї ж розмірності з елементами $d_{ij} = \sqrt{2(1-c_{ij})}$, $2 \ge d_{ij} \ge 0$. Вони задовольняють трьом аксіомам метрики: 1. $d_{ij} = 0$ при $i = j$; 2. $d_{ij} = d_{ji}$; 3. $d_{ij} \le d_{ik} + d_{kj}$. Матриця відстаней D використовується для побудови мінімального остівного дерева (minimum spanning tree - MST), яке зв'язує n акцій вибраного портфеля. MST дозволяє виявити геометричні аспекти кореляцій, присутніх між парами акцій. MST – це граф з n вершинами і $n-1$ дугами [19, 34]. На першому кроці MST складається із одної довільної компанії. На другому кроці до цієї компанії приєднується та компанія, яка має найменшу відстань з першою (на дереві вони сполучаються дугою). На третьому кроці до двох попередніх компаній приєднується та компанія, відстань від якої до однієї з попередніх акцій є найменшою (ці компанії, відстань між якими є мінімальною, на MST з'єднуються дугою) і т. д.



a)



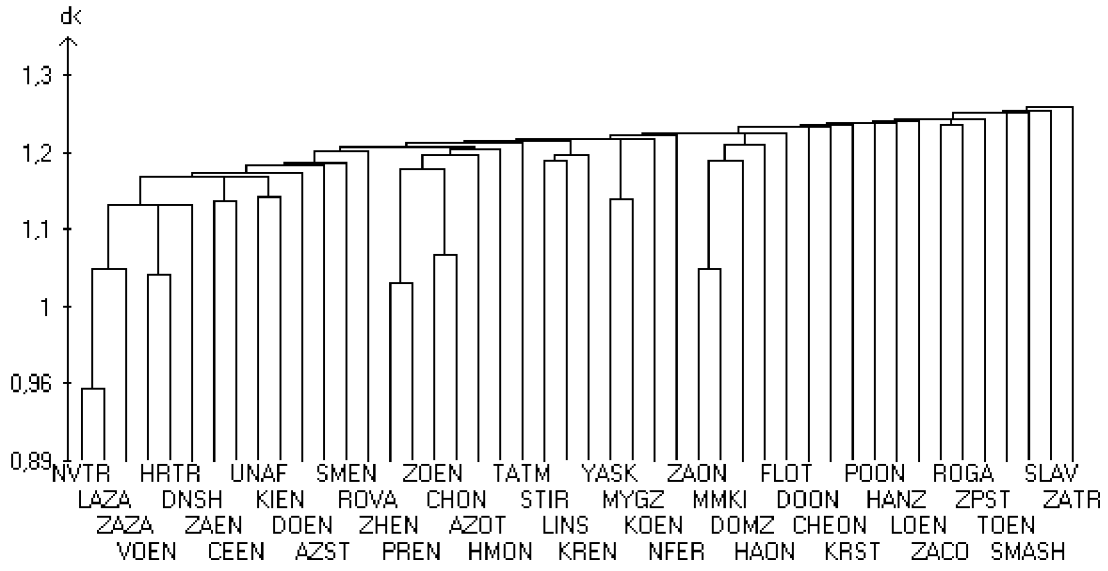
b)

Рис. 12. MST для ПФТС (а) та S&P 100. Компанії на дереві позначені у відповідності до загальноприйнятих домовленостей

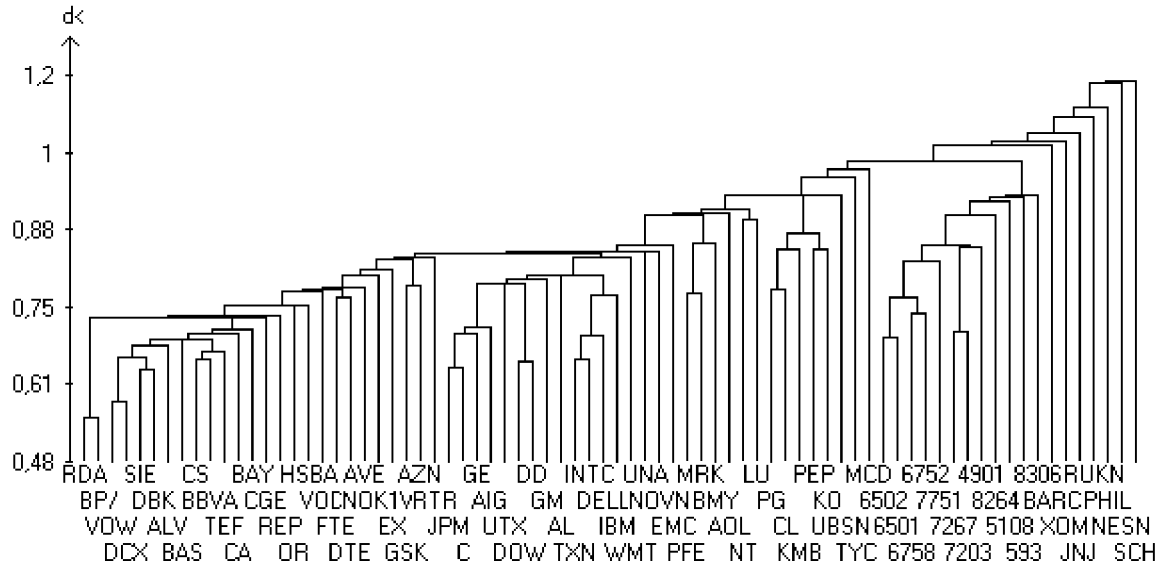
На *i*-му кроці до попередніх компаній приєднується та компанія, відстань від якої до однієї з попередніх акцій є найменшою (ці компанії, відстань між якими є мінімальною, на MST з'єднуються дугою). Тобто, якщо виявиться, що на дереві дві довільні компанії з'єднані дугою, то це означає, що між ними існують тісні економічні зв'язки, причому якщо деяка вершина має багато кількість зв'язків, то вона являється свого роду концентратором і має важливе економічний вплив на приєднаних до нього компанії.

На рисунку 12 для порівняння наведені MST для 46 найбільш стабільних компаній фондового ринку України (за даними ПФТС) і 76 компаній світового фондового ринку (за даними S&P 100).

MST дозволяє нам отримати матрицю субдомінантної ультраметрики $D^<(\Delta t)$, елементи якої $d^<_{ij}(\Delta t)$ повинні задовольняти наступним аксіомам: 1) $d^<_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$ 2) $d^<_{ij} = d^<_{ji}$ 3) $d^<_{ij} \le Max\{d^<_{ik}, d^<_{kj}\}$. Для їх визначення потрібно знайти максимальну довжину ланки найкоротшого шляху між елементами i та j по дереву. За матрицею $D^<(\Delta t)$ будується ієрархічне дерево, яке дозволяє виявити таксономічні (систематичні) аспекти кореляцій, присутніх між парами акцій (див.рис.13).



а)



b)

Рис. 13. Ієрархічні дерева, побудовані за мінімальними деревами рисунка 12

Аналіз кластерів, які формуються на деревах, зображених на рис.12-13, свідчить про те, що дослідження кореляційних процесів дозволяють відслідковувати процеси самоорганізації на сучасних ринках, а також проводити класифікацію активів по групам за різними ознаками: географічними регіонами, професійними чи корпоративними інтересами тощо.

5. Критичні і кризові явища. Критичні явища в складних системах (до яких зокрема відносяться фінансові ринки) – надзвичайно важливі події, котрі в однаковій мірі цікаві як для академічної науки, так і фінансових аналітиків та практиків. Згідно сучасним теоретичним уявленням ринки є ефективними і тільки поява драматичної інформації, катастрофічні або шокові події можуть призвести до суттєвих змін (які, зазвичай, носять критичний характер), або неконтрольованого швидкого спаду ринку – кризи або краху. Різниця між останніми зводиться до розподілу у часі: криза на відміну від краху більш розтягнута. Далі ці терміни будуть вважатися синонімами, якщо про інше не буде сказано окремо.

Що стосується дослідження причин цих явищ скоріш всього не можна дійти однозначних висновків відносно того, яка саме інформація переводить складну систему в критичний стан. Справа в тому, що більшість статистичних

фінансових моделей базуються на припущенні стаціонарності та ергодичності часових рядів і принципово не в змозі аналізувати крахи. В дійсності (див., наприклад [10-12]) ринки є ієрархічними об'єктами, де кожен рівень може мати різні вагу, зв'язність, характерні часові та просторові масштаби (або ж не мати таких – масштабно інваріантні мультифрактальні об'єкти). Тому задача зводиться до конструювання таких передвісників катастрофічних явищ, які б дозволили, аналізуючи сучасними методами стан та динаміку ринку, виявляти принципові „патерни" передкризових станів.

Згідно [21,22] крах спричинюється нестабільністю системи; конкретна причина краху вторинна. В той же час, ріст чутливості і зростання нестабільності ринку поблизу критичної точки можуть пояснити такий різновид спроб розкрити локальні причини критичних явищ. По суті, що-небудь все рівно спрацює, як тільки система „дозріла". У цій моделі крах зумовлений ендогенними причинами і має внутрішнє походження, а екзогенні, або зовнішні потрясіння слугують лише "спусковим гачком". Як наслідок, крахи мають значно більш тонке походження, оскільки вони повільно виношуються ринком в процесі самоорганізації. Іншими словами, істинна причина кризи може бути названа системною нестабільністю.

Не дивлячись (в такій постановці проблеми) на принципову непередбачуваність кризи, на наш погляд, можна виділити характерні риси передкритичного стану ринку і відслідкувати їх динаміку. Ми поділяємо їх на глобальні та локальні. Глобальні ефективно описують стан системи в цілому, локальні характеризують стан системи в околі наперед заданої точки.

Було розглянуто і проаналізовано основні відомі кризи і шокові явища 20-21 сторіч (див. для огляду [22]). Використовувались бази даних відомих американських фондових індексів S&P 500 та DJIA (finance.yahoo.com). У якості методів дослідження застосовувались: кореляційний аналіз, аналіз детрендованих флуктуацій (АДФ) і вейвлет-аналіз. До глобальних характеристик зокрема ми відносимо значення коефіцієнтів Херста для прибутковостей H та їх модулів α (останні пропорційні волатильності), а також

середнього значення коефіцієнта кореляції. Для характеристики локальної сингулярності часових рядів розраховувалися два різновиди коефіцієнту Холдера h [23,25,26] – локальний і точковий (деталі алгоритмів розрахунку можна знайти на http://fractales.inria.fr/). Крім того досліджувалась динаміка зміни другого і третього моментів (дисперсії і асиметрії) коефіцієнтів вейвлет-перетворення в докризовий період.

На рисунку 14 наведені результати розрахунків локальних коефіцієнтів Херста для прибутковостей та їх модулів в період краху 1987 року. Слід відмітити певні закономірності в поведінці H і α. Незадовго до кризи динамічні ряди стають сильно антиперсистентними. При цьому картина дуже подібна для інших крахів, зокрема краху 1929 року. Збіднення фрактальності системи характерне для втрати складності системи, яке спостерігається перед кризою. Це корелює з загальними уявленнями теорії складних систем [5-10].

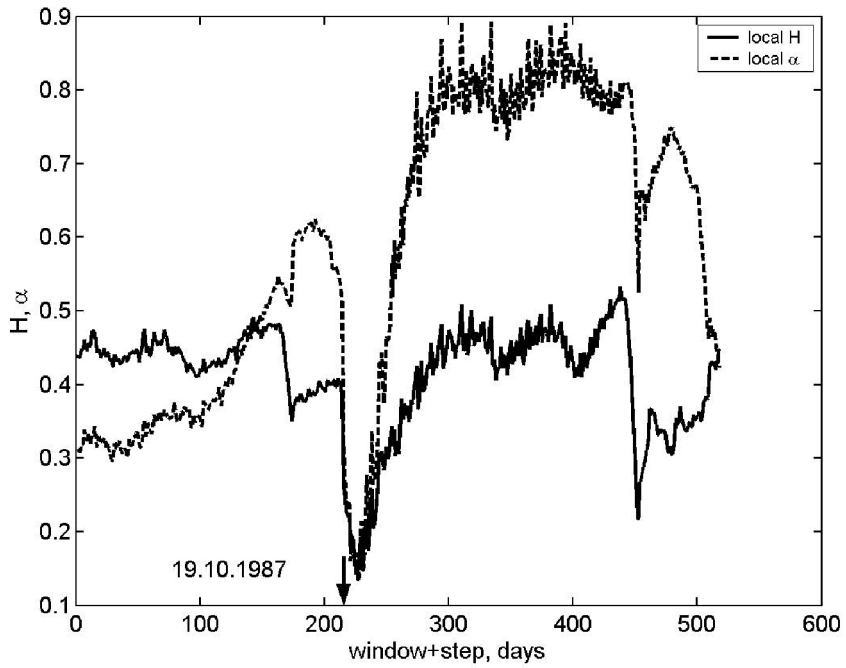


Рис. 14. Поведінка коефіцієнтів Херста для прибутковостей H і їх модулей α під час краху 1987 р. Вікно (window) для розрахунку локального коефіцієнта Херста дорівнює 240 днів, крок (step) – 1 день.

У якості передвісників критичних явищ нами також розглядались інші характеристики, особливо ті з них, які характеризують колективні самоорганізовані процеси [27]. До таких в першу чергу відносяться кореляційні та спектральні властивості. На рисунку 15 відображена поведінка середнього значення коефіцієнта кореляції $\langle C \rangle$ для індексу S&P 500. Використовувалась вибірка з 21 фірми, які відносяться до сектору нової економіки (інформаційних технологій). Ширина часового вікна, на якому розраховувалась матриця взаємних кореляцій, вибиралась рівною 32 дням. Видно, що в передкризовий період ринок спочатку знаходиться в хаотичному стані (величина $\langle C \rangle$ спадає майже до нуля), а потім стрімко зростає в період кризи.

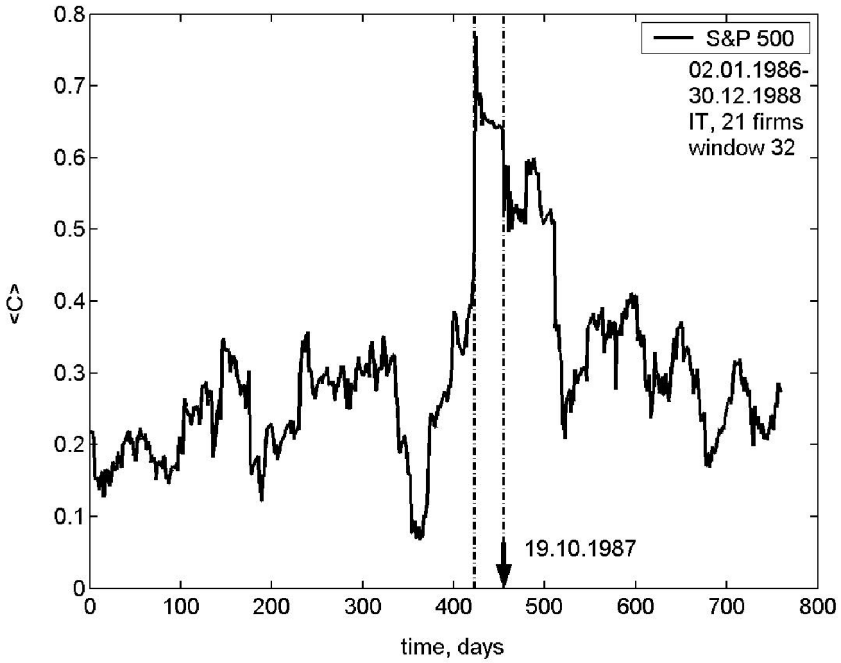


Рис. 15. Залежність середнього коефіцієнта кореляції $\langle C \rangle$ для акцій 21 фірми, які відносяться до виробників послуг інформаційних технологій ринку акцій S&P 500. Розрахунок $\langle C \rangle$ проводився згідно (6) для вікна, розміром 32 дні (виділено штриховими лініями), яке рухалось з кроком в один день

Для визначення локальних властивостей динамічних рядів використовують коефіцієнт Холдера h. Якщо існує поліном $P_n(x)$ степеня n

такий, що $|f(x) - P_n(x - x_0)| \le C|x - x_0|^h$, $C = const$, то h називається локальним коефіцієнтом Холдера, який характеризує скейлінг функції в точці x_0 для $n < h \le n + 1$. Він відображає регулярність (чи навпаки сингулярність) функції в околі точки x_0: чим вище h, тим більш регулярною є функція f. Зважаючи на те, що критичні явища ринку призводять до значних змін в часових рядах, розрахунок їх локальної регулярності може дати нову інформацію для передбачення кризових ситуацій.

Для розрахунку локального і точкового коефіцієнтів Холдера ми скористалися окремим набором інструментів пакету MATLAB – Fraclab (http://fractales.inria.fr/).

Аналіз будь-якого сигналу зволиться до знаходження областей, в яких його поведінка характеризується або регулярністю, або присутністю особливостей. Однією з основних переваг вейвлет-аналізу є його здібність до точного аналізу властивостей регулярності в поведінці сигналу. Представляючи сигнал у вигляді вейвлет-розкладу, ми можемо виявити, чи сходиться відповідний ряд (тобто є диференційованим) і де проявляє особливості. Для деяких сингулярних функцій вся суттєва інформація міститься в скінченому числі вейвлет-коефіцієнтів.

З рис. 16 видно суттєву зміну коефіцієнта Холдера в період, що передує краху 1987 року. Перед крахом регулярність часового ряду стрімко зростає і так же стрімко спадає до значення, суттєво меншого від середнього. Аналогічна поведінка коефіцієнта h спостерігається і в інші кризові моменти, а також для других часових рядів.

Нами окремо досліджувалось складне критичне явище 11 вересня 2001 року, коли шок від дій Аль-Каїди інтерферував з мляво текучою кризою компаній „нової економіки” на тлі бюджетного дефіциту.

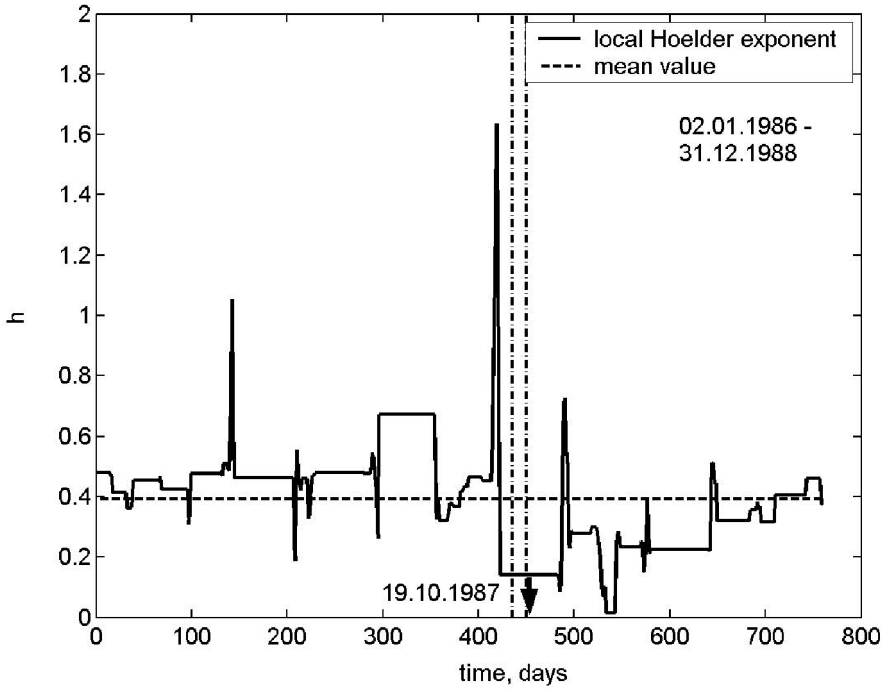


Рис.16. Поведінка локального коефіцієнта Холдера h в період краху 1987 року. Вертикальні штрихові лінії вказують на величину рухомого вікна, в якому розраховується h, горизонтальна – на середнє значення коефіцієнту

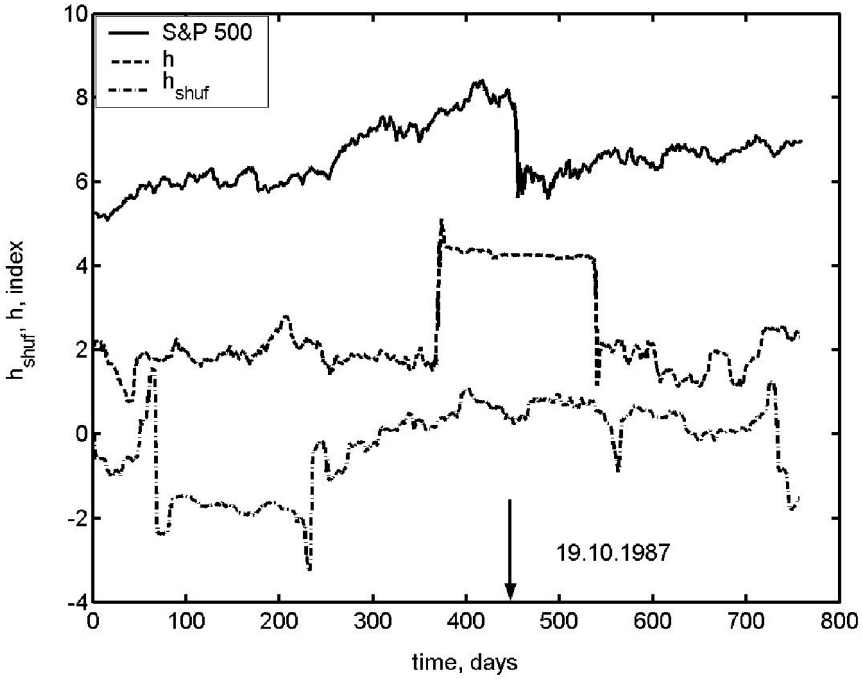


Рис.17. Зміна точкового коефіцієнта Холдера в період краху: верхня крива – вихідний динамічний ряд S&P 500; середня – коефіцієнт Холдера, нижня – коефіцієнт Холдера для перемішаного ряду

Картина суттєво не змінюється, якщо замість локальної версії коефіцієнта Холдера використати точкову. Рисунок 17 свідчить про те, що як і в випадку локального коефіцієнта Холдера в передкризовий період мають місце значні його зміни.

Наступним кроком дослідження критичних явищ було дослідження динаміки коефіцієнтів вейвлет-перетворень (як дискретного DWT, так і неперервного CWT) та їх вищих моментів. Дискретне перетворення має кращі аналітичні властивості, тоді як дозволяє краще відобразити результати та виявити приховані від інших видів аналізу частотні властивості сигналу.

Для визначення передвісників були досліджені динамічні ряди тривалістю 3 роки, які включали момент кризи, а також і без нього. Відмітимо, що результати, які описані нижче є стабільними не тільки для часового ряду індексу Доу-Джонса. Подібні ефекти мають місце і для інших індексів, зокрема S&P 500, DAX тощо. Але якщо вибрати проміжок часу тієї ж довжини, який не містить критичного явища, картина змінюється і описані закономірності не проявляються. Це свідчить про те, що критичне явище являє собою процес самоорганізації складної системи, який має певні часові і просторові масштаби. А значить за деякий час до критичного явища процес самоорганізації починає проявляти себе на певних масштабах. Задача полягає в тому, щоб знайти ці масштаби як в часі, так і в просторі. Інші деталі розрахунків та самі результати кризи 1987 року описані нами в [37]. Далі буде проаналізована криза 1929 року.

Оскільки, динамічний ряд змінюється з часом його вейвлет-коефіцієнти також флуктують з частотою по відношенню до нульової частоти. Природною мірою цих флуктуацій слугують дисперсії розподілів на різних масштабах.

Розрахунки дисперсії були проведені для різних часових рядів з кризою та без, а також при різних розмірах вікон (від 10 до 150 коефіцієнтів). Графічні зображення дисперсії коефіцієнтів у випадку краху 1929 року наведені на рисунках 18-19 (CWT).

Аналогічним чином проявляються характерні особливості критичного динамічного ряду і для третього моменту (див. рис.20-21).

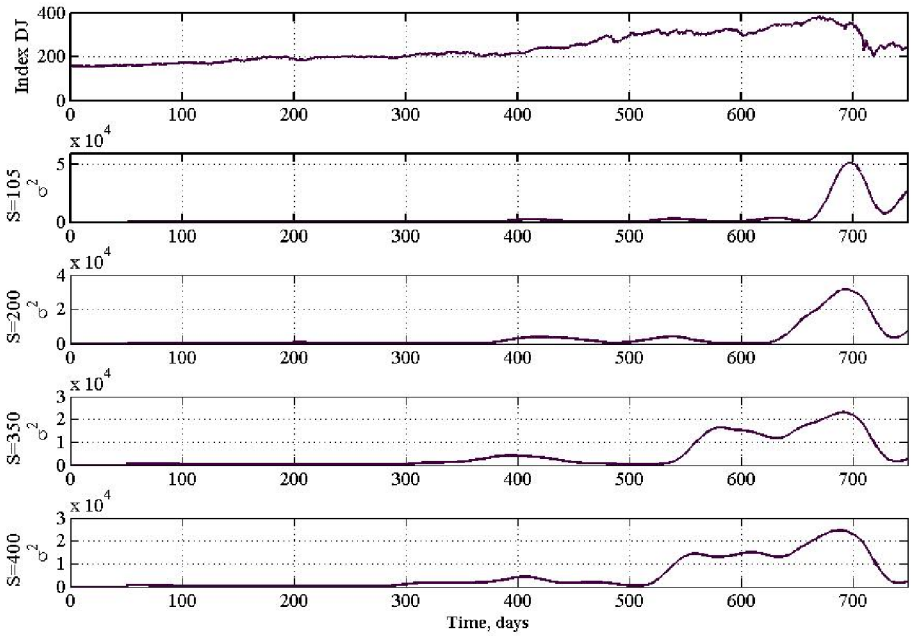


Рис. 18. Дисперсії σ^2 коефіцієнтів неперервного вейвлет–перетворення динамічного ряду індексу Dow Jones за 1927–1929 роки

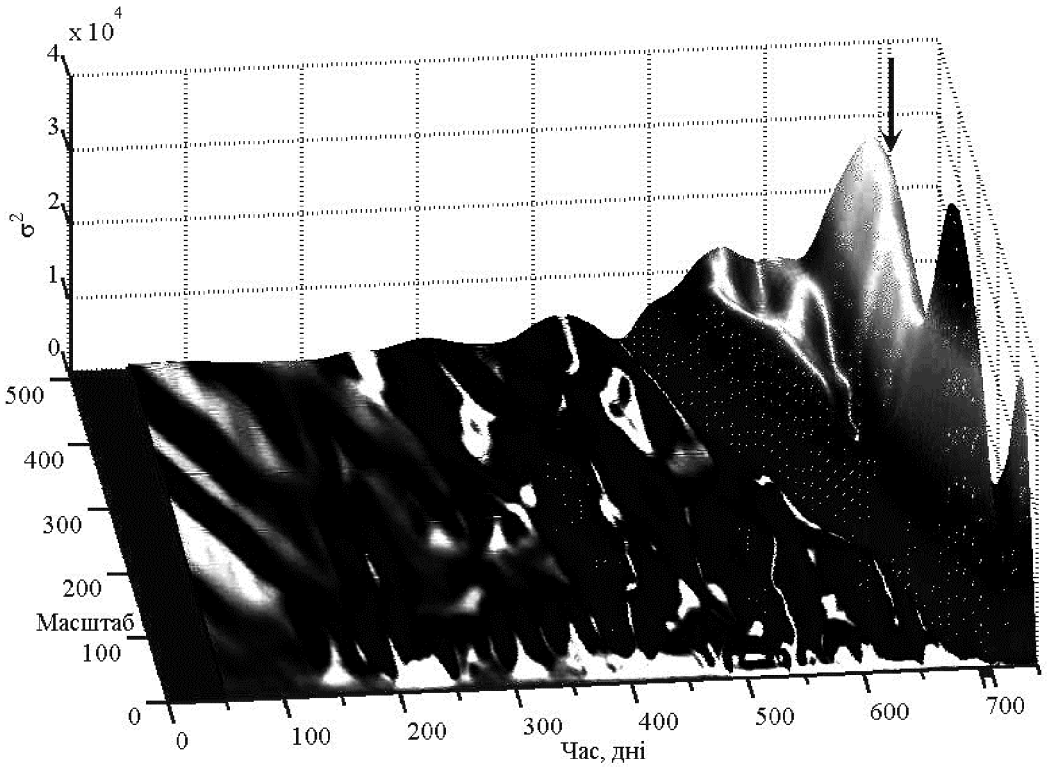


Рис. 19. 3D-картина дисперсій коефіцієнтів CWT індексу Dow Jones за 1927–1929 роки

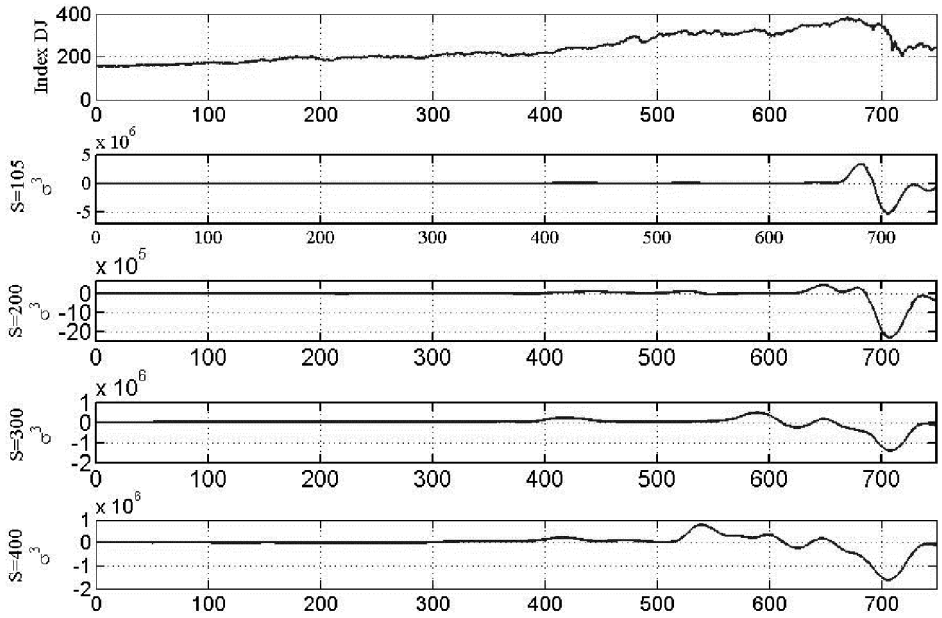


Рис.20. Поведінка на різних масштабах s третього момента σ^3 для коефіцієнтів неперервного вейвлет-перетворення

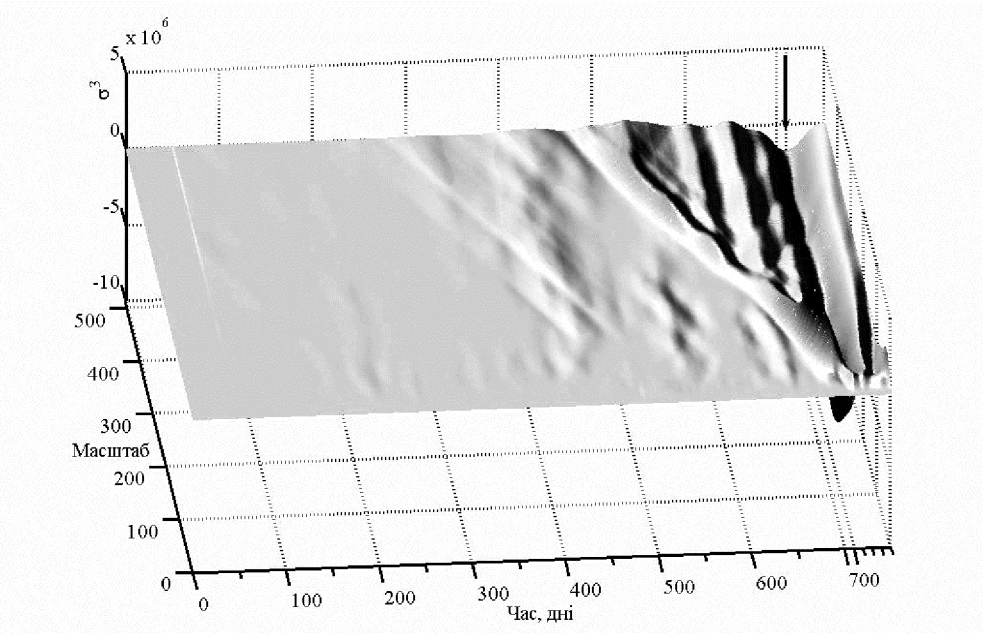


Рис.21. Поверхня асиметрії вейвлет-коефіцієнтів. Момент кризи зафіксовано стрілкою

Основним результатом цієї частини досліджень є помітне різке підвищення другого і третього моментів на масштабах $s > 200$, яке стає

відчутним приблизно за 100 днів до кризи. Ми вважаємо, що знайдені коливання дисперсії можна трактувати як передвісники кризи.

Таким чином**,** результати проведених досліджень дозволяють виявити деякі з характеристик критичних явищ, які можуть бути використані для їх прогнозування. Зокрема, мають спільні особливості локальні версії коефіцієнтів Херста як для прибутковостей, так і для їх модулей. Видно, що обидві величини значно зменшуються в передкризовий період. Локальні коефіцієнти Холдера в передкризовий період різко змінюється від свого максимального до мінімального значення. В цей же період сильно змінюються кореляційні властивості ринку. Методи вейвлет-аналізу вказують на деякі з локальних характеристик, які можуть бути використані для передбачення критичних і кризових явищ.

Як показали наші дослідження, події 11 вересня 2001 року не можна віднести до кризових явищ за вказаними вище емпіричними ознаками. Воно скоріш відноситься до явищ шокового типу, котрі навряд чи можна передбачити. Не виключено, що такі передвісники можна знайти, аналізуючи топологічні та спектральні властивості мереж вільного масштабу, які формують фінансово-економічні ринки.

6. Диверсифікація портфеля у формалізмі теорії випадкових матриць. Серед усіх методів зниження ризику інвестиційного портфеля найбільша перевага диверсифікації полягає у зменшенні ризику портфеля при збереженні його дохідності. Розрізняють такі основні види диверсифікації: наївну, коли головна мета диверсифікації – це просте збільшення кількості активів у портфелі і класичну – застосування відомої задачі Марковіца [29]. Крім цих методів, ми застосовуємо ще модифіковану за допомогою теорії випадкових матриць (ТВМ) [30] задачу Марковіца. У модифікованому методі можна знаходити кореляції між активами та відфільтровувати з них випадкові коливання, що дозволяє більш точно знаходити ризик портфеля. Проведемо порівняльний аналіз наївної, класичної та фільтрованої диверсифікації при поступовому розширенні портфеля та зменшення при цьому його ризику [31].

Нехай 1 (або 100%) – капітал, який ми маємо розділити між n активами; x_i – частка вкладеного капіталу в і-й ризикований актив. Легко бачити, що $x_i \le 1$, і очевидно, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Позначимо через $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ вектор цих активів.

Якщо $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, тоді $C^T = (1,\ldots,1)$. Легко бачити, що $C^T x = 1 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Нехай m_i – очікуване повернення від активу і. Тоді $\bar{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ – вектор цих повернень; звідси можна визначити, що повернення всього портфеля $m_p = m^T x$. Позначимо через $V_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j) = M((x_i - Mx_i)(x_j - Mx_j))$ – ij-й елемент коваріаційної матриці ризикових активів, а всю матрицю позначимо через V. Тоді

$$V = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(x_1, x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \ldots & \mathrm{cov}(x_1, x_n) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{cov}(x_2, x_2) & \ldots & \mathrm{cov}(x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(x_n, x_1) & \mathrm{cov}(x_n, x_2) & \ldots & \mathrm{cov}(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

Відразу зауважимо, що:

1. Коваріаційна матриця має розмірність n x n, де n – кількість активів у портфелі.

2. Коваріаційна матриця симетрична, оскільки $\mathrm{cov}(x_i, x_j) = \mathrm{cov}(x_j, x_i)$.

3. У класичній теорії вважається, що у портфель включаються лише незалежні акції, отже $\mathrm{cov}(x_i, x_j) = \mathrm{cov}(x_j, x_i) = 0$, і тому „класична” коваріаційна матриця V є діагональною, тобто

$$V=\begin{pmatrix} Dx_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Dx_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Dx_n \end{pmatrix}.$$

4. У модифікованій теорії враховуються кореляції між акціями і елементи коваріаційної матриці знаходяться за формулою $V_{ij}=\mathrm{cov}(x_i,x_j)=C_{ij}\sqrt{D(x_i)\,D(x_j)}$. Відповідно коваріаційна матриця V вже не буде діагональною, оскільки $(C_{ij}\neq 0)\wedge(D(x_i)\neq 0)\wedge(D(x_j)\neq 0)$.

Позначимо через V_p – ризик портфеля, який обраховується за формулою $V_p=x^TVx$. Отже, потрібно визначити частку вкладення капіталу в і-й вид цінних паперів. Для цього потрібно розв'язати систему

$$(9)\begin{cases} \min\limits_x V_p=\min\limits_x x^TVx \\ C^Tx=1 \\ m^Tx=m_p \end{cases}$$

Позначимо через x^p оптимальну структуру портфеля, тобто x^p – розподіл капіталу інвестора, який для заданої очікуваної прибутковості m мінімізує ризик V_p. Система (9) зводиться до задачі умовної оптимізації і розв'язується за допомогою функції Лагранжа.

Для подальших розрахунків нами використовувались бази даних S&P 500 та S&P Global 1200. На основі даних, наприклад, 2001-2002 рр., будувався портфель на 2003 рік, а також знаходилась його міра ризику. Далі порівнювалися міри ризику різних портфелів.

Портфель складався у два кроки: спочатку з усіх акцій вибиралися ті, норма очікуваної прибутковості яких перевищувала одиницю. Потім для кожного вибраного активу знаходилася частка капіталу, яку в нього можна вкласти. Зауважимо, що дана методика дозволяє значно прискорити процес

знаходження шуканого портфеля і дає трьохкратну економію комп'ютерного часу.

Знайдемо частки трьома способами:

1. Рівномірно розподіляємо капітал між акціями. Наприклад, якщо акцій у портфелі 4, то частка кожного активу складає 1/4 капіталу.
2. Розв'язуємо класичну задачу Марковіца, яка розподіляє капітал між всіма наявними акціями в залежності від величини дисперсії акції.
3. Застосовуємо модифіковану теорію Марковіца, яка враховує кореляції і складає портфель лише з незалежних активів, тому модифікований портфель часто є меншим від класичного.

Зазначимо, що у перших двох випадках вважається, що кореляції між активами мають нормальний розподіл.

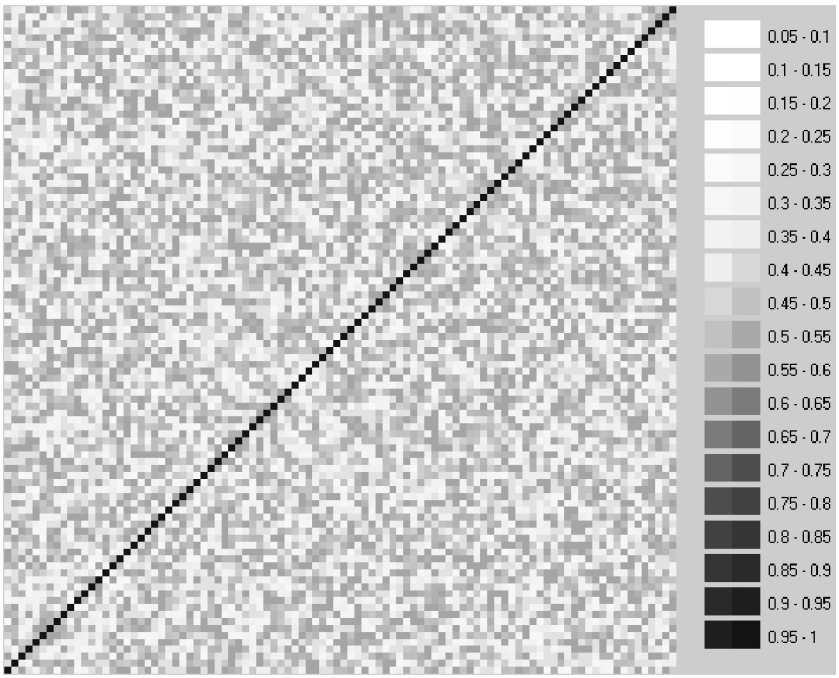


Рис. 22. Поле кореляцій рівномірного та класичного портфелів у випадку нормального розподілу кореляцій між активами. Кожна клітинка показує силу кореляційних зв'язків між активами: чим темніший колір, тим сильніший зв'язок

Знаходження міри ризику портфеля складається з наступних кроків:

- наявний капітал розподіляється між вибраними активами;
- за допомогою ТВМ знаходиться коваріаційна матриця;
- з першого рівняння системи (9) знаходиться число V_p, яке і є мірою ризику (інакше кажучи ризиком) портфеля.

Зауважимо, що у класичній теорії є своя, „класична”, міра ризику, але у наших обчисленнях для порівняння портфелів використовується „модифікована” міра.

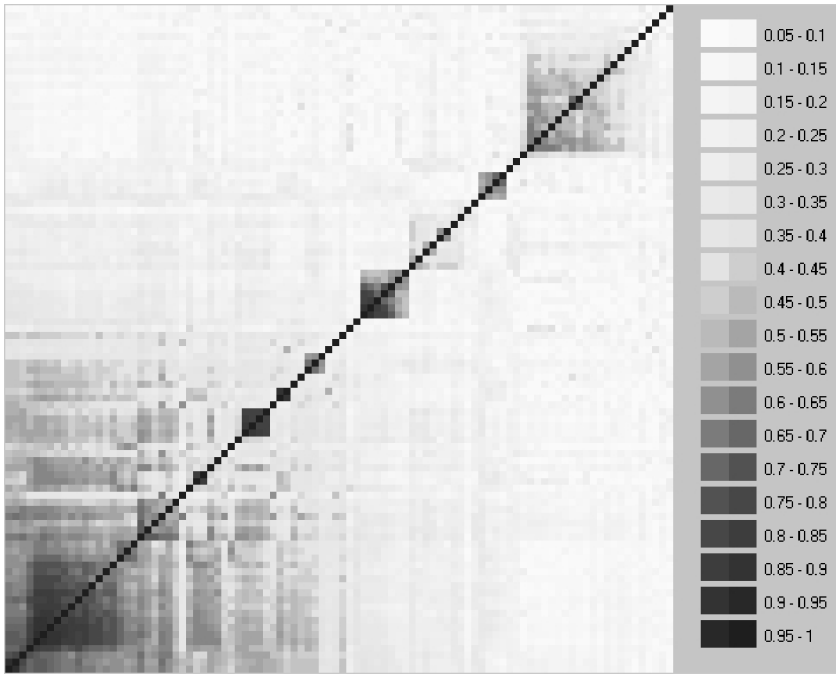


Рис. 23. Істинне поле кореляцій рівномірного та класичного портфелів знайдене за допомогою ТВМ

З баз даних Standard & Poor’s 500 та Standard & Poor’s Global 1200 вибрано 4 найбільших і найпотужніших сектори: фінансовий, енергетичний, промисловий та сектор інформаційних технологій (всього 385 фірм). Вибираємо з кожної бази даних ті активи, норма очікуваної прибутковості яких перевищує одиницю. Таких у базі S&P 500 є 96, відповідно у базі S&P Global 1200 таких 103.

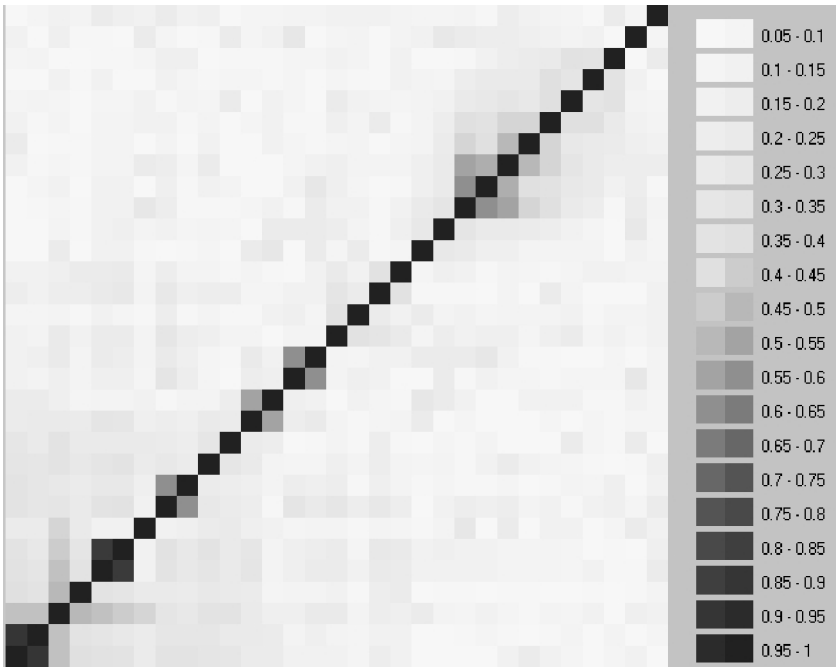


Рис. 24. Поле кореляцій фільтрованого портфеля знайдене за допомогою ТВМ

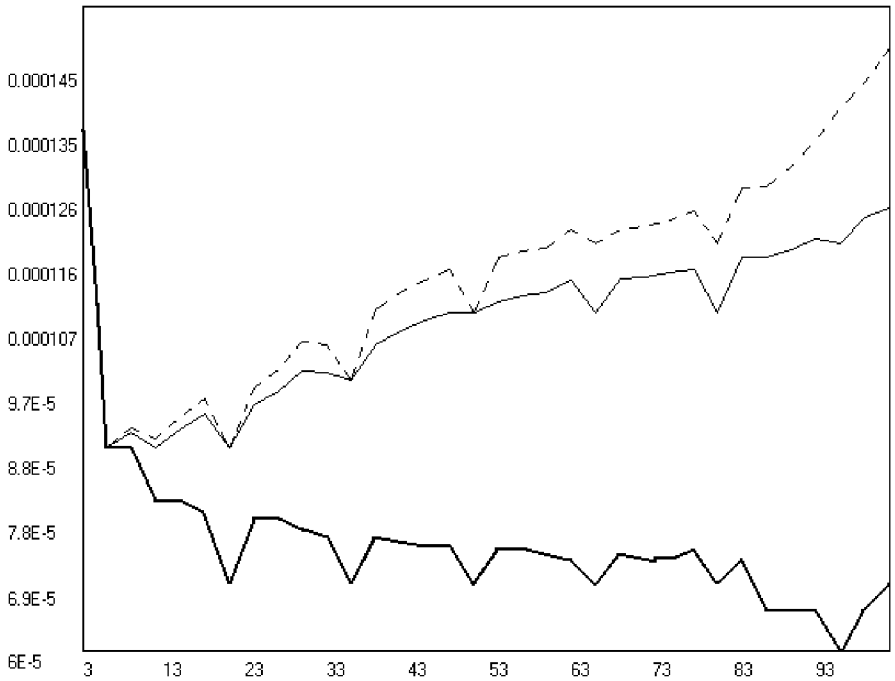


Рис. 25. Залежність міри ризику (вісь Oy) від величини портфеля (вісь Ox), побудованої за допомогою даних індексу S&P 500 за 2001-2003 рр. Пунктирна лінія характеризує ризик рівномірного портфеля, суцільна та суцільна товста – відповідно класичного та фільтрованого портфеля

Вибираємо з 96 активів бази даних S&P 500 три, які мають найменшу дисперсію, будуємо три портфелі: рівномірний, класичний та модифікований і визначаємо їх ризик. Тепер із тих 93-х активів, що залишилися, вибираємо ще 3 з найменшою дисперсією і разом з першими трьома активами вони складають новий, розширений портфель. Знову будуємо три портфелі і визначаємо їх ризик і т.д. Кожного разу вибираємо по три акції, додаємо їх до вже вибраних, будуємо щоразу три портфелі і визначаємо їх ризик. В кінці маємо чотири ряди: перший – кількість акцій, другий – міра рівномірного портфеля, третій – класичного, четвертий – модифікованого. Будуємо три графіки. По осі Ox маємо кількість акцій, по осі Oy – міри трьох портфелів.

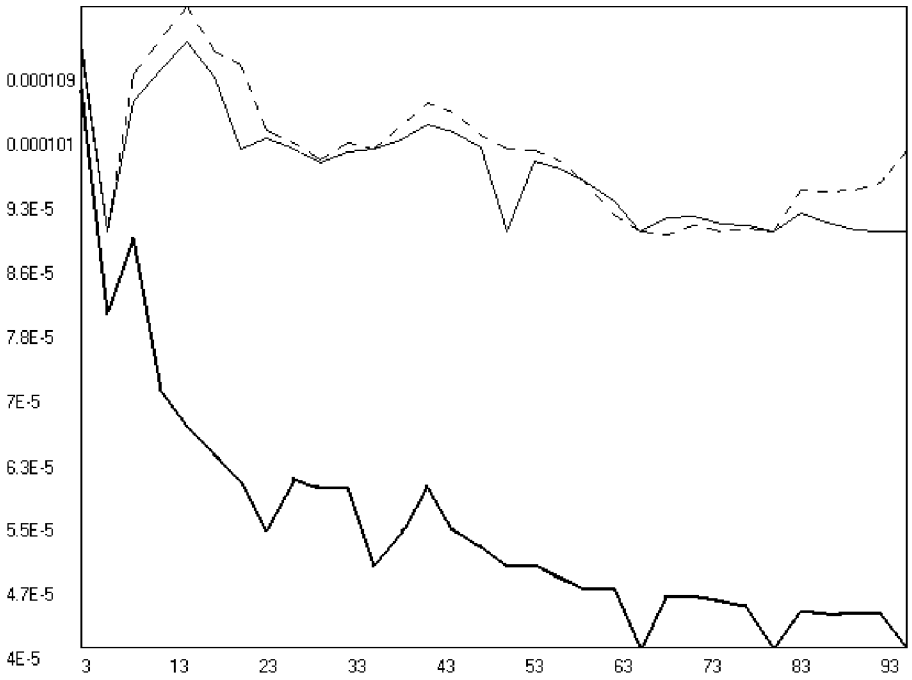


Рис. 26. Залежність міри ризику (вісь Oy) від величини портфеля (вісь Ox), побудована за допомогою даних індексу S&P Global 1200 за 2001-2003 рр. Пунктирна лінія характеризує ризик рівномірного портфеля, суцільна та суцільна товста – відповідно класичного та фільтрованого портфеля.

Аналогічно робимо з базою S&P Global 1200 і отримуємо теж три графіки зміни міри ризику в залежності від зміни величини портфеля.

Результати досліджень вказують на те, що фільтрований за допомогою теорії випадкових матриць портфель є дійсно оптимальним з точки зору

введеної міри ризику. Це дозволяє запропонувати нові методи диверсифікації портфеля [32].

Таким чином, нами створено комплекс сучасних потужних методів комп'ютерного моделювання нелінійних процесів, який дозволяє одержати принципово нову інформацію відносно структури і динаміки складних фінансово-економічних систем. Це дає основу для забезпечення моніторингу цих систем, передбачення і прогнозування можливих станів, диверсифікації виникаючих ризиків тощо.

Література:

1. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук, 2002, Т.172, №9.-С.1045-1066

2. Mantegna R. N. , Stanley H. E. An Introduction to Econophysics (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

3. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячеление. / Сб.статей под ред. Г.Г.Малинецкого, С.П. Курдюмова - М.: Наука, 2002.-478с.

4. Albert R., Barabasi A.-L. Statistical Mechanics of Complex Networks // Rev.Mod.Phys., 2002, v.74.-P.47-103. e-print arXiv:cond-mat/0106096

5. Newman M.E.J. The Structure and Function of Complex Networks // SIAM Review, 2003, v.45, №2.-P.187-256

6. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of Networks // Advanced in Physics, 2002, v.51.-P.1079-1187. e-print arXiv:cond-mat/0106144, v.2, 7 Sep., 2004

7. Evans T.S. Complex Networks // e-print arXiv:cond-mat/0405123, v.1, 6 May, 2004

8. Соловйов В.М., Соловйова В.В., Кучеренко С.А. Сучасна економіка. Погляд з позиції теорії складних систем і комп'ютерного моделювання // Економіка: проблеми теорії і практики. Збірник наукових праць. Вип.164.-Дніпропетровськ: ДНУ, 2003. С.176-181

9. Inaoka H., Ninomiya T., Taniguchi K., Shimizu T., Takayasu H. Fractal Network Derived from Banking Transaction. An Analysis of Network Structures Formed by Financial Institutions // Bank of Japan Working Paper Series, 2004, №04-E-04. 32 p.

10. Tapscott D., Williams A. Value and Value in the Age of Transparency // Digital 4Sight Inc., 2003.-58 p.

10. Egawa T., Kobayashi M., Yamanishi K., Arutaki A., Namiki J. "Dynamic Colaboration" from Scientists' Eyes // NEC J. of Adv. Tech., 2004, v.1, №1, p.17-26

11. Matia K., Ashkenazy Y., Stanley H.E. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities // Europhys. Lett., 2003, v.61 (3).-P.422-428

12. Ausloos M., Ivanova K. Patterns, Trends and Predictions in stock market indices and foreign currency exchange rates // e-print: http://arXiv:cond-mat/0108013

13. Нагібас А.О., Сердюк О.А. Моделювання нестаціонарних процесів перехідної економіки // Економіка: проблеми теорії і практики. Зб.наук.праць. Вип.190,–Дніпропетровськ: ДНУ, 2004, т.1. С.262-267

14. Ivanov P.Ch., Hausdorff J.M., Halvin S. et.al. Levels of Complexity in Scale-Invariant Neural Signals // e-print: http://arXiv:cond-mat/0409545

15. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996, т.166, №11.-С.1145-1170

16. Дремин И.М., Іванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 2001, т.171, №5.-С.465-501

17. Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L.A.N., Guhr T., Stanley H.E. Random matrix approach to cross correlations in financial data // Phys.Rev.E 2002, v.65, N 12. –P.126-142

18. Соловйов В.М., Сердюк О.А., Нагібас А.О. Моделювання процесів самоорганізації в фінансово-економічних системах // Вісник Східноукраїнського національного університету ім..Володимира Даля, 2003, №7(65).-С.205-212

19. Mantegna R.N. Hierarchical structure in financial markets // Eur. Phys. J. B. 1999, v.25. P. 193–197

21. Sornette D. Critical Market Crashes // e-print: http://arXiv:cond-mat/0301543

22. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах // М.: Интернет-трейдинг, 2003.-400 с.

23. Сердюк О.А., Соловйов В.М., Кононенко В.В. Передвісники критичних та кризових явищ в складних фінансово-економічних системах // Економіка: проблеми теорії і практики. Зб.наук.праць.-Д. :ДНУ, 2004, т.5, вип..197.-С.1304-1310

24. Boffetta G., Cencini M., Falcioni M., Vulpiani A. Predictability: a Way to Characterize Complexity // e-print arXiv:cond-mat/0101029, v.1, 17 Jan, 2001

25. Struzik Z.R., Local Effective Hoelder Exponent Estimation on the Wavelet Transform Maxima Tree, in Fractals: Theory and Applications in Engineering, Eds: M. Dekking, J. L´evy V´ehel, E. Lutton, C. Tricot, Springer Verlag, pp. 93–112, (1999)

26. Agaev A., Kuperin Yu.F. Multifractal Analysis and Local Hoelder Exponents Approach to Detecting Stock Markets Crashes // e-print: http://arXiv:cond-mat/0407603

27. Дербенцев В.Д., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Моделювання явищ самоорганізації в фінансово-економічних системах // Економіко-математичне моделювання. Вісник ТАНГ.Вип.14.- Тернопіль: ТАНГ, 2003, №3.С.104-110

28. Grech D., Mazur Z. Can One Make Any Crash Prediction in Finance Using the Local Hurst Exponent Idea? // e-print: http://arXiv:cond-mat/0311627

29. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments // John Wiley and Sons, Somerset, NJ, 1959.-432p.

30. Pafka S., Potters M., Kondor I. Exponential Weighting and Random-Matrix-Theory-Based Filtering of Financial Covariance Matrices for Portfolio Optimization // e-print: arXiv:cond-mat/0402573 v1 24 Feb 2004

31. Guhr T., Kalber B. A New Method to Estimate the Noise in Financial Correlation Matrices // e-print: arXiv:cond-mat/0206577 v1 28 Jun 2002

32. Repetowicz P., Richmond P. Removing noise from correlations in multivariate stock price data // e-print: arXiv:cond-mat/0403177 v1 5 Mar 2004

33. Соловйов В.М., Дербенцев В.Д., Шарапов О.Д. Особливості динаміки і топології сучасних фінансово-економічних систем // Вісник Черкаського університету, Сер. ”Економічні науки”, 2003, вип.48. – с.127–136.

34. Овчарук М.П., Соловйов В.М. Комп’ютерне моделювання складних фінансово-економічних систем // Вісник Криворізького технічного університету, Сер. ”Економічні науки”, 2004, вип.2, с.137-146

35. Овчарук М.П., Соловйова В.В., Соловйов В.М. Комп’ютерне моделювання інвестиційних стратегій фінансових ринків // Зб.наук.праць ”Економіка: проблеми теорії і практики”-Дніпроп., ДНУ, 2004, в.194, т.3, с.855-860

37. Соловйов В.М., Кононенко В.В., Сердюк О.А. Виявлення передвісників кризових явищ // Вісник Криворізького технічного університету, Сер. ”Економічні науки”, 2005, вип.9, с.127-145