

В.М. СОЛОВЬОВ

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Черкаси

ЧНУ

2008

Передмова

Мета курсу математичної економіки - формування системи теоретичних знань та практичних навичок щодо моделювання структурних і динамічних властивостей економічних систем як засобу дослідження та управління складними явищами у макро-, мезо- й мікроекономічних системах. Протягом останніх десяти, п'ятнадцяти років відбулися відчутні зміни в розумінні фундаментальних закономірностей економічних систем. Виявилось, що такі складні системи мають універсальні емерджентні властивості, які не знаходять адекватного розуміння у рамках традиційних парадигм. Тому для аналізу фінансово-економічних ринків все активніше використовуються методи та моделі фундаментальних наук, які у поєднанні з сучасними досягненнями в галузі інформаційних технологій та досить ємними базами даних (мільйони записів навіть в базах некомерційного призначення) забезпечили значний прогрес у розумінні та квантифікації природи цих систем. З'явилися нові „кількісні” напрямки економіки: математична економіка, фізична економіка, еконофізика та ін. Деякі з таких моделей, не знайшовши поки що відображення у навчальній літературі, включені до цієї роботи.

Наукову основу курсу складають теоретичні моделі, математичний апарат, сучасні концепції та парадигми, які визначають підходи до вивчення характеристик економічних систем.

Курс базується на знаннях, одержаних при вивченні дисциплін математичного циклу, та макро- і мікроекономіки, економетрики, основи теорії систем та системного аналізу, моделювання.

Завдання курсу - оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання економічних процесів вивчення підходів до дослідження й аналізу, методів моделювання складних економічних систем, методів прогнозування їхнього розвитку, управління розвитком та функціонуванням економічних систем у різних умовах.

Предметом курсу є математичні моделі економічних систем.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен:

- знати структурні та динамічні характеристики економічної системи; моделі прогнозування характеристик економічної системи; основні методи оцінки якості функціонування; методи оцінки структурних змін; методи дослідження та моделювання складних соціально-економічних систем;
- вміти здійснювати класифікацію характеристик економічної системи, проводити порівняльний аналіз методів прогнозування; оцінити якість функціонування ієрархічної економічної системи; визначити катастрофічні зміни в економічній системі, які описуються рівняннями динаміки, визначити джерела структурних катастроф в ієрархічній економічній системі;
- дослідити та проаналізувати комплекс моделей складної економічної системи;
- бути ознайомленим з сучасними напрямками розвитку економічних,

математичних теорій та парадигм, які використовуються для дослідження якісних характеристик динамічних економічних систем.

Система контролю якості навчання студентів містить такі заходи: 1) модульний контроль; 2) проведення контрольних робіт; 3) контроль теоретичних знань у ході практичних занять; 4) виконання індивідуальних завдань на лабораторних заняттях.

Організація самостійної роботи студентів передбачає підготовку до семінарських занять, проведення індивідуальних консультацій, виконання курсової роботи.

Відсутність альтернативних підручників і методичних посібників з курсу „Моделювання економічної динаміки” спонукала авторів розробити методичні вказівки до виконання практичних робіт з даного курсу. Вони спираються на деяке авторське бачення, певні висновки мають дискусійний характер. Автори будуть вдячні за бачення, спрямоване на покращення змісту та методики викладання дисципліни.

Індивідуальна робота № 1

Тема. Аналіз флуктуацій часового ряду.

Мета. Навчитися використовувати аналіз флуктуацій та його похідні для отримання нелінійних характеристик часового ряду.

1. Аналіз динаміки прибутків, модулів прибутків та волатильностей.
2. Стандартний аналіз флуктуацій.
3. Аналіз детрендованих флуктуацій (АДФ) другого порядку.
4. Визначення коефіцієнта Херста методами R/S-аналізу та АДФ.
5. Мультифрактальний АДФ.

Теоретичні відомості

Аналіз динаміки прибутків, модулів прибутків та волатильностей

Останнім часом вчені все більше цікавляться економічними часовими рядами, і відбувається це за кількох причин, зокрема: (1) економічні часові ряди, такі як індекси акцій, курсів валют, залежать від розвитку великої кількості взаємодіючих систем, і є прикладами складних систем, що широко вивчаються у науці; (2) з'явилась велика кількість доступних баз з даними про економічні системи, що містять інформацію з різними часовими шкалами (починаючи з 1 хвилини і закінчуючи 1 роком). Внаслідок цього вже на даний час існує також велика кількість розроблених методів (зокрема, у статистичній фізиці), спрямованих на отримання характеристик цін акцій чи курсів валют, що еволюціують у часі.

Дослідження, проведені над часовими рядами, показують, що стохастичний процес, який лежить у основі зміни ціни, характеризується кількома ознаками. Розподіл зміни ціни має виділений хвіст порівняно із Гаусовим розподілом. Функція автокореляції зміни ціни спадає експоненційно з певним характерним часом. Однак, виявляється, що амплітуда зміни ціни, виміряна за абсолютними значеннями чи квадратами цін, показує степеневі кореляції з довго часовою персистентністю аж до кількох місяців, або навіть років. Такі довго часові залежності краще моделюються з використанням "додаткового процесу", що в економічній літературі часто називається *волатильністю*. Волатильність змін ціни акції є мірою того, як сильно ринок схильний до флуктуацій, тобто відхилень ціни від попередніх значень.

Першим кроком при проведенні аналізу є побудова оцінювача волатильності. Ми будемо отримувати волатильність як локальне середнє модуля зміни ціни.

Розуміння статистичних властивостей волатильності має також важливе практичне застосування. Волатильність є інтересом торговців, оскільки визначає ризик і є ключовим входом практично до всіх моделей цін опціонів (вторинного цінного паперу), включаючи і класичну модель Блека-Шоулза. Без

задовільних методів оцінювання волатильності трейдерам було б надзвичайно важко визначати ситуації, в яких опціони попадають в недооцінку чи переоцінку.

Визначення волатильності

Термін волатильність представляє узагальнену міру величини ринкових флуктуацій (відхилень). В літературі існує досить багато визначень волатильності, проте ми будемо використовувати наступне: *волатильність є локальним середнім модуля зміни ціни на відповідному часовому інтервалі T , що є рухомим параметром нашої оцінки.*

Для індексу $X(t)$ визначимо зміну ціни $G(t)$ як зміну логарифмів індексів,

$$G(t) = \ln X(t + \Delta t) - \ln X(t) \cong \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)}, \quad (1)$$

де Δt є часовим інтервалом затримки. Величину (1) називають прибутковістю (return). Якщо використовувати границі, то малі зміни $X(t)$ приблизно відповідають змінам, визначеним другою рівністю. Ми лише підраховуємо час роботи ринку, викидаємо ночі, вихідні та свята із набору даних, тобто, вважається, що ринок працює без перерв.

Модуль $G(t)$ описує амплітуду флуктуацій. В порівнянні із значеннями $G(t)$ їх модуль не показує глобальних трендів, але великі значення $|G(t)|$ відповідають крахам та великим миттєвим змінам на ринках.

Визначимо волатильність як середнє від $|G(t)|$ для часових вікон $T = n \cdot \Delta t$, тобто

$$V_T(t) = \frac{1}{n} \sum_{t'=t}^{t+n-1} |G(t')|, \quad (2)$$

де n є цілим числом. Таке визначення може бути ще узагальнене заміною $|G(t)|$ на $|G(t)|^\gamma$, де $\gamma > 1$ дає більш виражені великі значення $|G(t)|$, в той час як $0 < \gamma < 1$ виділяє малі значення $|G(t)|$.

У цьому визначенні волатильності використовується два параметри, Δt та n . Параметр Δt є шаблонним (чи модельним) часовим інтервалом для даних, а параметр n є кроком переміщення часового вікна. Зауважимо, що вказане визначення волатильності має внутрішню помилку, а саме: вибір більшого часового інтервалу T веде до збільшення точності визначення волатильності. Однак, велике значення T також включає погане розбиття часу на інтервали, що веде, у свою чергу, до врахування не всієї прихованої у ряді інформації.

При порівнянні між собою кількох акцій часто використовують нормалізовану волатильність, що визначається для кожної акції наступним чином:

$$v_T^i = v_T^i(t) = \frac{V_T^i}{\sqrt{\langle (V_T^i)^2 \rangle - \langle V_T^i \rangle^2}}, \quad (3)$$

де $\langle \dots \rangle$ означає середній час, отриманий для вікон, що не перекриваються, для різних часових масштабів T .

Визначення кореляцій

Для визначення кореляцій часового ряду використовується функція автокореляції. Саме поняття *автокореляції* означає кореляцію часового ряду самого з собою (між попередніми та наступними значеннями). Автокореляцію іноді називають *послідовною кореляцією*, що означає кореляцію між членами ряду чисел, розташованих у певному порядку. Також синонімами цього терміну є *лагова кореляція* та *персистентність*. Наприклад, часто зустрічається автокореляція геофізичних процесів, що означає перенесення залишкового процесу на наступні часові проміжки.

Позитивно автокорельований часовий ряд часто називають персистентним, що значить існування тенденції слідування великих значень за великими та малих за малими, інакше позитивно корельований часовий ряд можна назвати інертним.

Візьмемо N пар спостережень двох змінних x та y . Кореляційний коефіцієнт між x та y визначається як

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (3)$$

де сума знаходиться по всім N спостереженням.

Таким же чином можна визначати й автокореляцію, або ж кореляцію всередині одного часового ряду. Для автокореляції першого порядку береться лаг (часова затримка), рівний 1 часовій одиниці. Таким чином, автокореляція першого порядку використовує перші $N-1$ спостережень x_t , $t=1, \dots, N-1$, та наступні $N-1$ спостережень x_t , $t=2, \dots, N$. Кореляція між x_t та x_{t+1} визначається наступним чином:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x}_{(1)})(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x}_{(1)})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^{N-1} (x_{t+1} - \bar{x}_{(2)})^2}}, \quad (4)$$

де $\bar{x}_{(1)}$ є середнє для першого проміжку спостережень (перші $N-1$ значень), а $\bar{x}_{(2)}$ є середнім для другого проміжку (другі $N-1$ значень). Коефіцієнт, що визначається у (4), і називається коефіцієнтом автокореляції.

Для суттєво великої кількості спостережень (великого N) різниця між середнім на першому інтервалі $\bar{x}_{(1)}$ та середнім на другому інтервалі $\bar{x}_{(2)}$ є несуттєвою і може бути проігнорована, таким чином r_1 буде приблизно рівним

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}, \quad (5)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$ є середнім для досліджуваного періоду.

Рівняння (5) може бути узагальнене для отримання кореляції між спостереженнями, розділеними k часовими інтервалами:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}. \quad (5)$$

Значення r_k називається коефіцієнтом автокореляції з лагом k . Графік функції автокореляції як залежності r_k від k також називають корелограмою.

Хід роботи

Завантажимо у середовищі MatLab 6.5 (або вищої версії) пакет для дослідження часового ряду, набравши у командному рядку **work2** та натиснувши **Enter**.

Для дослідження прибутків та волатильності будемо користуватись переважно пунктами *Анализ рядов* та *Обработка ряда*.

Завантажимо часовий ряд, використовуючи пункт меню *Базы* → *Открыть базу*. Після завантаження файлу у вікні програми з'явиться інформація про відкритий ряд: кількість значень, основні статистики. У даній роботі використовуватимемо в якості зразка ряд курсу австралійського долара до американського долара, отриманий з валютного ринку Forex, де значення часового інтервалу між сусідніми елементами ряду рівні п'яти хвилинам. Використавши пункт *Отобразить график*, одержимо рис.1. Видно, що ряд нестационарний, що викликає певні ускладнення для подальшого аналізу. Тому перейдемо до прибутковостей (*Рассчитать возвраты* – return), які вже є стаціонарними, а їх нормалізація стандартним відхиленням (*нормализовать*) дозволяє легко порівнювати їх розподіл з розподілом Гауса.

На рисунку 2 відображено поведінку нормалізованих прибутковостей. При цьому графік побудований з використанням можливостей вбудованого нами редактора PlotFigure і стандартного MatLab.

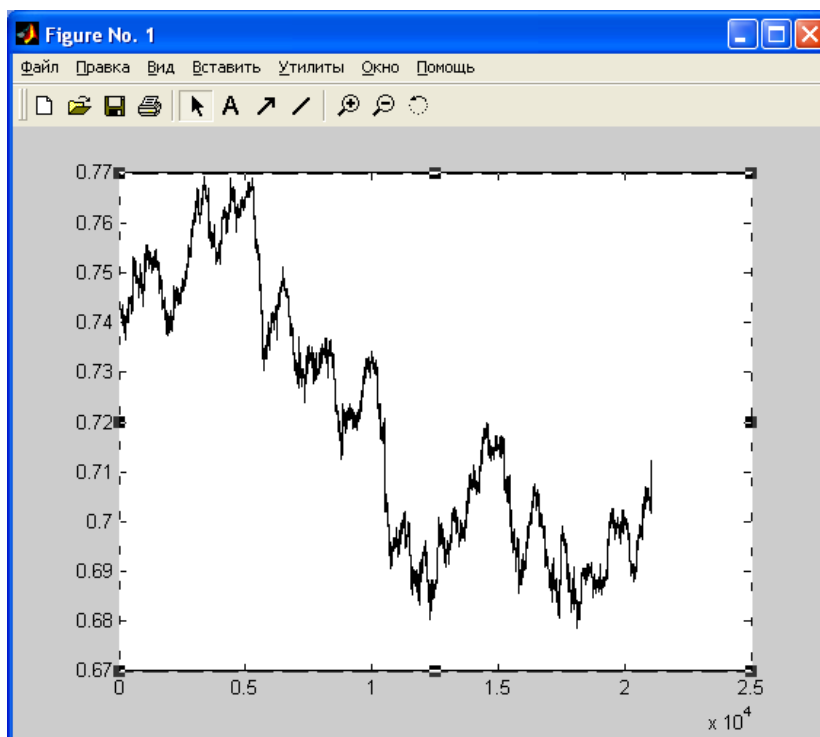


Рис.1. Динаміка 5-хвилинних змін курсу австралійського долару до американського за фіксований період

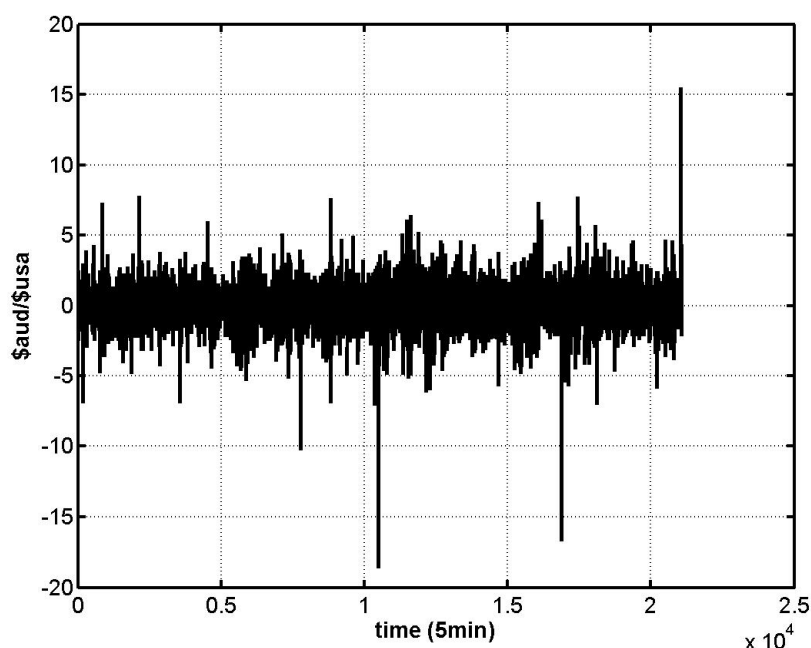


Рис. 2. Нормалізовані прибутковості вибраного часового ряду

Зверніть увагу, що флуктуації нормалізованих прибутковостей досить часто перевищують величину $\pm 3\sigma$, що, як відомо, надзвичайно рідко спостерігається для незалежних подій. Цей факт можна відобразити шляхом порівняння функції розподілу нормалізованих флуктуацій з розподілом Гауса (рис. 3). Очевидно, що хвости розподілу вихідного ряду містять значні флуктуації, вони досить помітні (часто кажуть «важкі» у порівнянні з самою «головою» розподілу).

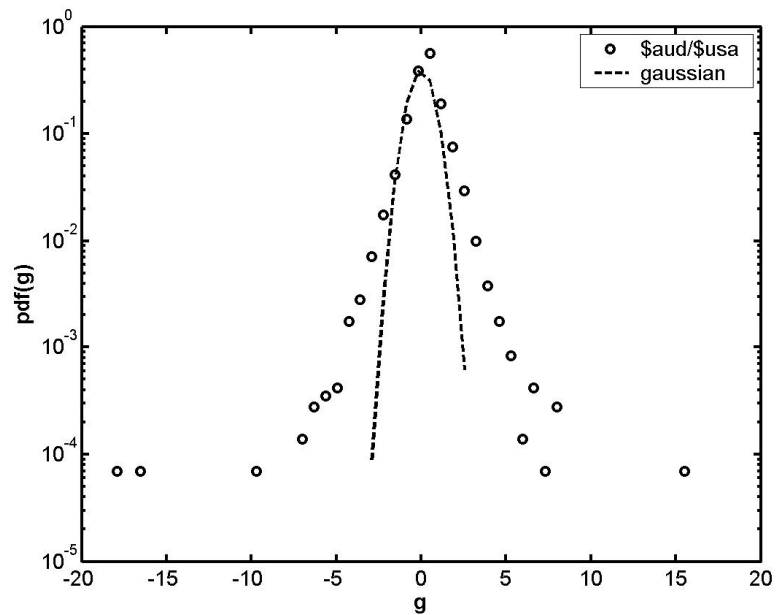


Рис. 3. Порівняння функцій розподілу нормалізованих прибутковостей g з нормальним розподілом

Отже, ми можемо стверджувати, що наші прибутковості не є незалежними. Підтвердження цьому факту будемо шукати шляхом вивчення кореляційних властивостей нашого часового ряду.

Побудуємо функцію автокореляції. Для цього виберемо *Анализ ряда* → *Функция автокорреляции*, після чого відкриється вікно, подане на рис. 4.

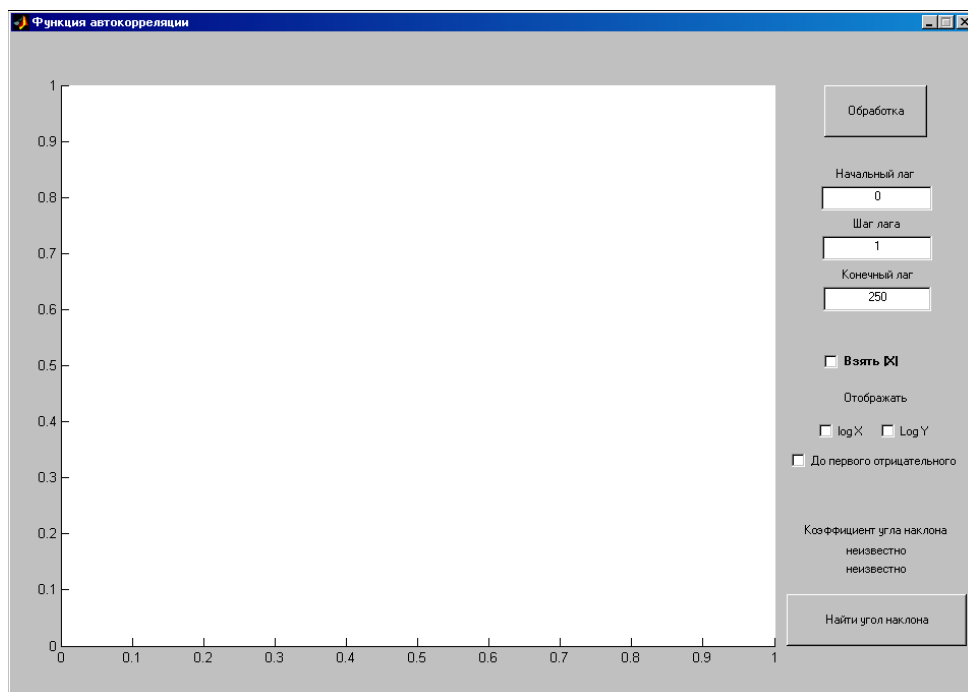


Рис. 4. Вікно для пошуку функції автокореляції

У вікні ми можемо вибирати початковий лаг (початкову часову затримку, поле *Начальный лаг*), крок лагу (поле *Шаг лага*) та кінцевий лаг (поле *Конечный лаг*). Здебільшого функція автокореляції будується у звичайному

масштабі, тому поля **LogX** та **LogY** виключені. Виберемо початковий, кінцевий лаг та крок лагу відповідно 0, 250, 1 (такі значення встановлено за замовчуванням) і натиснемо кнопку **Обработка**. У полі графіка з'явиться графічне зображення корелограми. Знайдемо корелограми вихідного ряду, нормалізованих прибутковостей та їх модулів і за допомогою вбудованого графічного редактора відобразимо для порівняльного аналізу всі три криві на одному графіку (рис. 5).

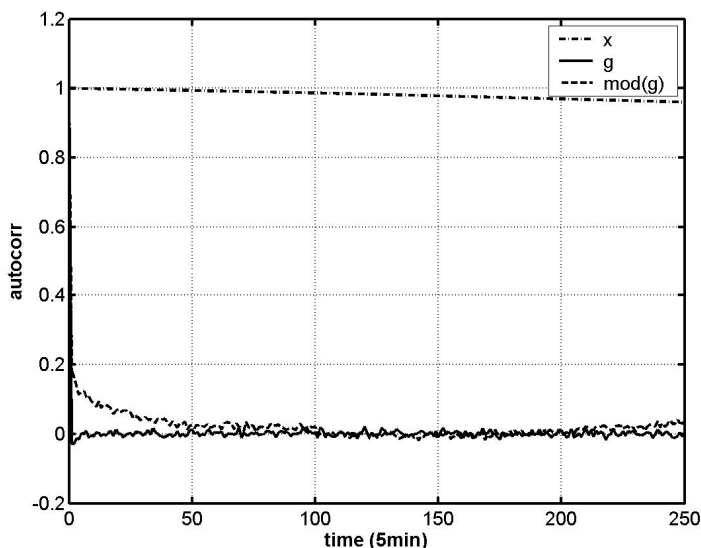


Рис.5. Зміна з часом парних автокореляційних функцій для вихідного ряду x , нормалізованих прибутковостей g та їх модулів $\text{mod}(g)$

З рисунка можна бачити, що вихідні значення ряду дуже сильно корельовано між собою (було взято максимальний лаг 250×5 хвилин, проте значення автокореляції практично не змінилось. Таке явище можна пояснити сильним впливом попередніх значень ціни на наступні або досить високою стабільністю ринку. Тривалість довгої пам'яті за допомогою функції автокореляції для вихідного ряду можна вказати, знайшовши, для якого ж лагу значення стають рівними 0 (**Знайдіть цю величину для вашого ряду!**). З рисунка добре видно, що для прибутковостей пам'ять (як довга, так і коротка) відсутня взагалі, оскільки вже для лагу 1 значення автокореляції стає рівним нулю, і всі наступні значення коливаються біля цього значення.

Більш суттєву інформацію дають модулі прибутків, оскільки в даному випадку вимірюється лише наявність відхилень, а не їх характер (у який бік відхилення – в додатній чи від'ємний). На побудованому графіку корелограми можна добре бачити наявність інтервалу з додатними значеннями автокореляції. Для того, щоб точніше визначити зазначений інтервал виберіть опцію **До першого отрицательного** і знову натисніть кнопку **Обработка**. Знайдіть і порівняйте з попередніми довжину пам'яті ряду нормалізованих прибутковостей. Зауважимо, що природа довго тривалої пам'яті на сьогодні до кінця не досліджена, але очевидно, що для різних цінних активів і їх похідних вона різна. Це треба враховувати в задачах прогнозування цінних коливань.

Наступним кроком у дослідженні ряду є аналіз волатильності.

Згідно з (2) волатильність розраховується для модулів прибутковостей, тому виберемо у основному вікні ряд *Модуль* і розрахуємо волатильність, вказавши *Обработка ряда*→*Расчитать волатильность*. У вікні, що відкриється, можна вибирати параметри *Ширина окна* (ширина вікна для розрахунку середніх значень волатильності) та *Шаг окна* (крок вікна). Для встановлених за замовченням параметрів одержимо результат, відображений на рис. 6.

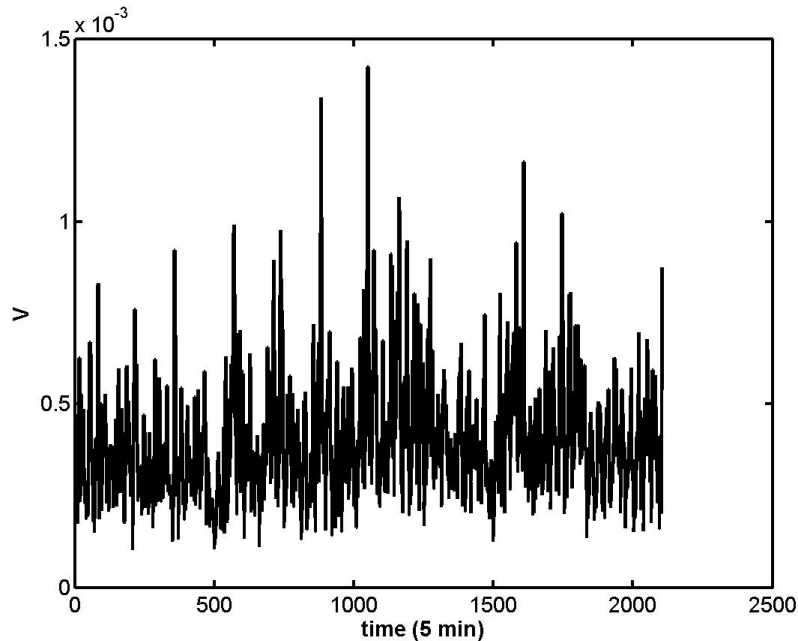


Рис. 6. Розрахована волатильність для модулів прибутковостей

Аналізуючи графік, можна зробити висновок, що у певні моменти спостерігалися стрибки волатильності із поступовим зменшенням її до попереднього рівня, що може бути внаслідок збурень у процесі роботи ринку. Аналіз таких збурень, їх частоти та сили, дозволяє виявляти приховані закономірності роботи ринку.

Проведемо аналіз розподілу значень волатильностей, проте для наступного порівняння їх із Гаусовим розподілом виконаємо нормалізацію даного ряду. Для цього виберемо у основному вікні програми щойно розрахований ряд волатильностей і виконаємо пункт *Обработка ряда*→*Нормализовать*, внаслідок чого у основному вікні з'явиться ряд *ВозврНор*. Для отриманого ряду побудуємо розподіл ймовірності, вибравши *Анализ ряда*→*Распределение вероятности*. У вікні, що відкрилось, виберемо кількість інтервалів, рівну 50 (виставлена за замовчуванням) і натиснемо кнопку *Обработка*. Буде побудовано ряд, подібний до зображеного на рис. 7.

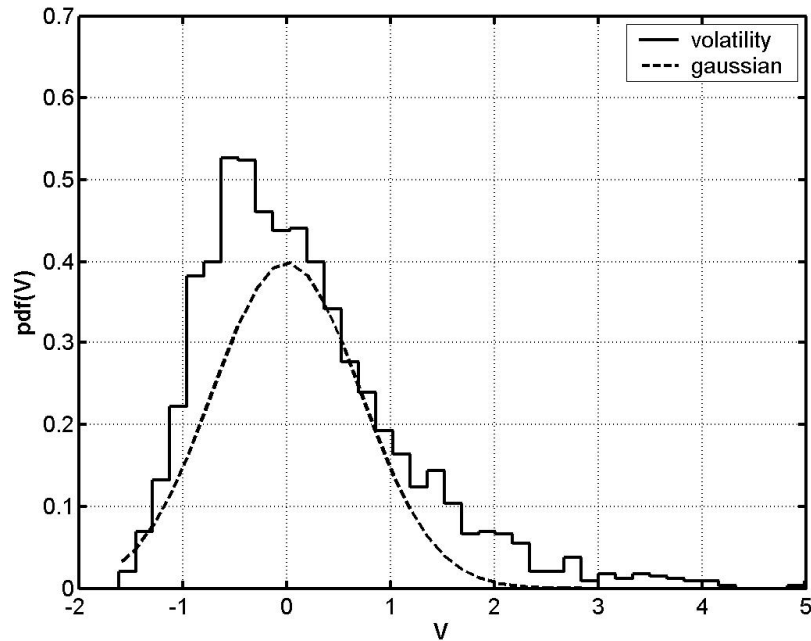


Рис. 7. Розподіл нормалізованих волатильностей в порівнянні з Гусовим

Наявність у волатильності довгого хвоста (справа) свідчить про волатильність ринку Forex.

Висновок.

Таким чином, аналіз флуктуацій прибутковостей та волатильностей шляхом побудови функції автокореляції та розподілу ймовірності дозволяє отримати певні висновки, що можуть допомогти в роботі із аналізованими часовими рядами і ринком, з якого взято зазначені часові ряди. Зокрема, у даному випадку, можна давати рекомендації трейдерам, що працюють на ринку Forex.

Завдання для самостійної роботи

1. Отримати базу даних у викладача
2. Провести дослідження часових флуктуацій, волатильностей та автокореляцій згідно інструкції
3. Проведіть дослідження автокореляцій прибутковостей для вихідних і перемішаних рядів.
4. Зробити висновки

Контрольні питання

1. Порівняйте вид залежностей флуктуацій цін і прибутковостей. Чому при розрахунках користуються не цінами, а прибутковостями ?
2. Яку характеристику ряду визначає волатильність ?
3. В чому причина різних залежностей прибутковостей і їх модулів ?

Індивідуальна робота № 2

Тема. Аналіз флуктуацій часового ряду.

Мета. Навчитися використовувати аналіз флуктуацій та його похідні для отримання нелінійних характеристик часового ряду.

1. Аналіз динаміки прибутків, модулів прибутків та волатильностей.
2. Стандартний аналіз флуктуацій.
3. Значення детрендованих флуктуацій (АДФ) другого порядку.
4. Визначення коефіцієнта Херста методами R/S-аналізу та АДФ.
5. Мультифрактальний АДФ.

Теоретичні відомості

R/S-аналіз

Метод R/S-аналізу, розроблений Мандельбротом та Уоллесом, базується на попередньо створеному методі гідрологічного аналізу Херста, і дозволяє обчислювати параметр самоподібності H , який вимірює інтенсивність довготривалих залежностей у часовому ряду. Коефіцієнт H , який називають коефіцієнтом Херста, містить мінімальні прогнози стосовно природи системи, що вивчається, і може класифікувати часові ряди. За допомогою цього показника розрізняють випадкові (гаусові) та не випадкові ряди; окрім того, він пов'язаний із фрактальною розмірністю, що, у свою чергу, характеризує ступінь згладженості графіка, побудованого на основі часового ряду. Методом R/S-аналізу можливо також виявити максимальну довжину інтервалу (цикл), на якому значення зберігають інформацію про початкові дані системи (довготривала пам'ять).

Аналіз починається із побудови ряду логарифмічних прибутків, $G_i(t) \equiv \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t)$, де $S_i(t)$ – значення вихідного часового ряду у момент t , Δt – часовий крок. Отримана послідовність $G_i(t)$ розбивається на d підпослідовностей довжини n . Для кожної підпослідовності $m = 1, \dots, d$: 1) шукається середнє значення E_m та стандартне відхилення S_m ; 2) дані нормалізуються шляхом віднімання середнього значення послідовності $X_{i,m} = G_{i,m} - E_m$, $i = 1, \dots, n$; 3) створюється послідовність накопичень $Y_{i,m} = \sum_{j=1}^i X_{j,m}$, $i = 1, \dots, n$; 4) знаходиться розмах $R_m = \max\{Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m}\} - \min\{Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m}\}$, який нормується середнім квадратичним відхиленням R_m/S_m ; 5) обчислюється середнє $(R/S)_n$ нормованих значень розмаху для всіх підпослідовностей довжини n .

R/S-статистика, обрахована таким чином, відповідає співвідношенню $(R/S)_n \cong cn^H$, де значення H може бути отримане шляхом обчислення $(R/S)_n$ для послідовності інтервалів зі збільшенням часового горизонту:

$$\log(R/S)_n = \log c + H \log n. \quad (1)$$

Знайти коефіцієнт Херста можна, побудувавши залежність $(R/S)_n(n)$ у подвійному логарифмічному масштабі і взявши коефіцієнт нахилу прямої, яка інтерполірує точки отриманого графіка. Якщо значення $H = 0.5$, говорять про послідовність, що представляє собою білий шум; $0.5 < H \leq 1$ свідчить про персистентний ряд, коли існує тенденція слідування великих значень ряду за великими і навпаки; $H < 0.5$ вказує на антиперсистентний ряд.

При збільшенні часового горизонту коефіцієнт нахилу інтерполюючої прямої повинен прямувати до значення $H = 0.5$; сам процес переходу свідчить про втрату впливу початкових умов на поточні значення, і, таким чином, можна говорити про горизонт довгої пам'яті – це точка, до якої коефіцієнт нахилу інтерполюючої прямої відмінний від 0.5, а після – близько 0.5.

Стандартний аналіз флуктуацій

У стандартному аналізі флуктуацій (АФ) розглядається “профіль накопичень” (runoff profile)

$$y_n = \sum_{i=1}^n x_i, \quad n = \overline{1 \dots N} \quad (2)$$

і вивчається швидкість зміни флуктуацій профіля в залежності від зміни ширини вікна s . Можна розглядати профіль y_n як позицію точки у ланцюжку випадкових блукань після n кроків. Випадкові блукання починаються в деякій точці; на i -му кроці точка переміщується вправо, якщо x_i є додатнім, або ж вліво, якщо x_i – від'ємне.

Для знаходження зміни скейлінгового показника в залежності від s спочатку часовий ряд довжиною N елементів розбивається на підпослідовності, що не перекриваються, $N_s = \text{int}(N/s)$ довжиною s , починаючи з першого елемента, та N_s підпослідовностей, що не перекриваються, довжиною s , починаючи з останнього елемента. Потім визначаються флуктуації у кожному сегменті v .

У стандартному АФ флуктуації обчислюють безпосередньо від значень профілю на обох кінцях кожної підпослідовності v , $F^2(v, s) = (y_{vs} - y_{(v-1)s})^2$ і знаходиться середнє значення $F^2(v, s)$ для $2N_s$ підпослідовностей, щоб досягти реального значення флуктуації $F_s(s)$,

$$F_2(s) \equiv \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} F^2(v, s) \right)^{1/2}. \quad (3)$$

За означенням, $F_2(s)$ може розглядатись як середньоквадратичний зсув (переміщення) точки випадкових блукань в ланцюжку після s кроків. Для некорельованих значень x_i отримується закон дифузії Фіка (Fick) $F_2(s) \cong s^{1/2}$. Для істотних випадків довгочасових кореляцій, де поведінка $C(s)$ відповідає степеневому закону ($C(s) = \langle x_i x_{i+s} \rangle \cong s^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$), $F_2(s)$ збільшується теж згідно зі степеневим законом

$$F_2(s) \cong s^H,$$

де флуктуаційний коефіцієнт H пов'язаний із кореляційним коефіцієнтом γ і коефіцієнтом спектра потужності β наступним законом:

$$H = 1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \beta}{2}.$$

Для степеневих кореляцій, що спадають швидше за $1/s$, отримуємо $H = 1/2$ для великих значень s , так як і для некорельованих даних.

Варто зауважити, що стандартний аналіз флуктуацій де в чому подібний до R/S-аналізу, розробленого Херстом, за виключенням того, що він базується на другому моменті $F_2(s)$, в той час як Херст розглядав випадок першого моменту $F_1(s)$. Для монофрактальних даних H ідентичний до коефіцієнта Херста.

Аналіз детрендованих флуктуацій (АДФ)

АДФ базується на гіпотезі про те, що корельований часовий ряд може бути відображений на самоподібний процес шляхом інтегрування. Таким чином, вимірювання властивостей самоподібності може непрямо свідчити про кореляційні властивості ряду. Переваги АДФ порівняно з іншими методами (спектральний аналіз, R/S-аналіз) полягають в тому, що він виявляє довгочасові кореляції нестационарних часових рядів, а також дозволяє ігнорувати очевидні випадкові кореляції, що є наслідком нестационарності.

Існують АДФ різних порядків, що відрізняються трендами, які вилучаються з даних.

Розглянемо АДФ найнижчого порядку.

Часовий ряд довжини N інтегрується, $Y(k) = \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})$, де X_i – i -те значення часового ряду, \bar{X} – його середнє значення, $k = 1, \dots, N$. Ця дія повторює процес знаходження накопичень у R/S-аналізі. Отриманий ряд $Y(k)$ розбивається на m підпоследовностей (вікон) однакової ширини n і для кожної підпоследовності (у кожному вікні) виконується наступне: 1) за допомогою методу найменших квадратів знаходиться локальний лінійний тренд $Y_i(k)$; 2) підпоследовність детрендується шляхом віднімання значення локального

тренду $Y_t(k)$ від значень ряду $Y(k)$, що належать підпоследовності t ;
 3) знаходиться середнє \bar{Y}_t детрендованих значень.

Для отриманих таким чином значень на всіх підпоследовностях знаходиться:

$$F_n = \sqrt{\frac{1}{m} \bar{Y}_t},$$

де n – кількість точок у підпоследовності (ширина вікна), m – кількість підпоследовностей, \bar{Y}_t – середнє детрендованих значень для підпоследовності t .

Вказана процедура повторюється для вікон різної ширини, внаслідок чого отримується набір пар точок $(F_n; n)$. Побудова залежності $\log F(n)$ від $\log n$ та інтерполяція отриманих значень прямою дає змогу обчислити показник скейлінга α , що є коефіцієнтом кута нахилу інтерполяційної прямої і характеризує зміну кореляцій логарифмічних прибутків часового ряду при збільшенні часового інтервалу.

Порівняно із R/S-аналізом метод АДФ дає більші можливості інтерпретації скейлінгового показника α : для випадкового ряду (перемішаного чи „сурогатного”) $\alpha = 0.5$; при наявності лише короткочасових кореляцій α може відрізнитись від 0.5, проте має тенденцію прямувати до 0.5 при збільшенні розміру вікна. Значення $0.5 < \alpha \leq 1.0$ показує персистентні довгочасові кореляції, що відповідають степеневому закону; $0 < \alpha < 0.5$ означає антиперсистентний ряд. Спеціальний випадок, коли $\alpha = 1$, означає наявність шуму $1/f$. Для випадків, коли $\alpha \geq 1$, кореляції існують, проте перестають відображувати степеневу залежність; випадок $\alpha = 1.5$ свідчить про Броунівський шум, інтегрований білий шум.

У АДФ другого порядку (АДФ2) обчислюються відхилення $F^2(v, s)$ профілю від графіка інтерполяційного многочлена другого порядку. Таким чином, вилучаються впливи можливих лінійних та параболічних трендів для масштабів, більших за розглядувані. Взагалі, у АДФ порядку n обчислюються відхилення профілю від інтерполяційного многочлена n -го порядку, що вилучає вплив всіх можливих трендів порядків до $(n-1)$ для масштабів, більших від розміру вікна.

Потім обчислюється найближчий поліном $y_v(s)$ для профілю на кожному із $2N_s$ сегментів v і визначається відхилення

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (x_{(v-1)s+i} - y_v(i))^2. \quad (4)$$

Далі застосовується (3) для визначення середньої флуктуації $F_2(s)$.

Так як АФ та різні види АДФ мають різні детрендові властивості, їх композиція може використовуватись як для виявлення довгочасових кореляцій, так і для знаходження типів наявних у ряді трендів, що не може бути визначеним з використанням традиційних методів, таких як спектральний аналіз.

Локальний АДФ

Метод локального АДФ виник з припущення про існування в часовій послідовності як персистентних так і антиперсистентних ділянок.

Для отримання даних на основі локального АДФ використовується вікно постійного розміру, який залежить від максимального значення s у стандартному АДФ, коли ще було отримано стабільне значення α . Розмір вікна повинен бути достатнім для використання стандартного методу АДФ, за допомогою якого і визначається локальний коефіцієнт α . Після цього вікно пересувається по послідовності на певний (невеликий) крок (наприклад, 20 днів) і обчислення повторюються.

Аналіз динаміки локального коефіцієнта Херста може допомогти при інтерпретації суттєвих змін у динаміці системи.

Мультифрактальний АДФ

Стандартний АДФ використовується для визначення (моно-) фрактальних скейлінгових властивостей і довгочасових кореляцій в зашумлених нестационарних часових рядах. Проте багато економічних (біологічних, медичних тощо) об'єктів не демонструють простої монофрактальної скейлінгової поведінки, що може бути визначена одним коефіцієнтом. В деяких випадках існує кросовер (crossover) на часових шкалах s_x , що відділяє моделі з різною поведінкою, наприклад, довгочасові кореляції на малих масштабах часу $s \ll s_x$ та кореляції іншого виду чи некорельовану поведінку на більших масштабах $s \gg s_x$. В деяких випадках поведінка скейлінга ще більш складна, і існують різні значення коефіцієнтів скейлінга для різних частин послідовності (наприклад, для першої та другої половини послідовності). Трапляються ще більш складні випадки, коли розглядаються накладені одна на одну множини із різною фрактальністю. Для таких випадків необхідно обчислювати множину коефіцієнтів скейлінга для повного опису поведінки об'єкта. Тоді застосовується мультифрактальний аналіз детрендованих флуктуацій.

У загальному випадку процедура мультифрактального АДФ (МФ-АДФ) складається із п'яти кроків. Перші три кроки, по суті, ідентичні процедурі стандартного АДФ.

Нехай є послідовність x_k довжини N , що не має великої кількості нульових значень (compact support).

Крок 1. Визначається профіль (накопичення):

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x}), \quad i = \overline{1..N}. \quad (5)$$

Віднімання середнього \bar{x} є необов'язковим, оскільки може бути виконане пізніше детрендуванням на третьому кроці.

Крок 2. Профіль $Y(i)$ розбивається на $N_s = \text{int}\left(\frac{N}{s}\right)$ сегментів (підпоследовностей) однакової довжини s , що не перекриваються. Оскільки загальна довжина послідовності N часто не ділиться націло на s , залишок в кінці послідовності, що є меншим за ширину вікна, відкидається. Для врахування відкинутої частини і використання, таким чином, усіх елементів послідовності, вищевказана процедура повторюється також, починаючи з кінця послідовності. Таким чином, разом буде отримано $2N_s$ підпоследовностей.

Крок 3. Для кожної із $2N_s$ підпоследовностей обчислюється локальний тренд методом найменших квадратів. Потім визначається відхилення

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y((v-1)s + i) - y_v(i))^2 \quad (6)$$

для кожного сегмента v , $v = \overline{1..N}$ і

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y(N - (v - N_s)s + i) - y_v(i))^2 \quad (7)$$

для кожного $v = \overline{N_s + 1..2N_s}$. Тут $y_v(i)$ є інтерполюючий поліном на сегменті v . Для інтерполяції використовуються лінійні, квадратичні, кубічні поліноми чи поліноми вищого порядку (традиційно називаються АДФ1, АДФ2, АДФ3 і т.д.). Оскільки детрендування часового ряду відбувається відніманням значень полінома від реальних значень ряду, АДФ різних порядків відповідно відрізняються у своїх можливостях по вилученню тренду в ряді. У (МФ-)АДФ m ((МФ-)АДФ m -го порядку) вилучаються тренди профілю порядку m (або відповідно порядку $(m-1)$ для вихідного часового ряду). Таким чином порівняння результатів роботи АДФ різних порядків використовується для отримання типу тренду у вихідному часовому ряді.

Крок 4. Знаходиться середнє по всіх підпоследовностях для отримання функції флуктуацій q -го порядку:

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} (F^2(s, v))^{q/2} \right)^{1/q}, \quad (8)$$

де, взагалі кажучи, значення змінної q може бути довільним за виключенням нульового. Для $q = 2$ отримується стандартний метод АДФ. При розгляді питання, як впливає часова шкала s при різних значеннях q на узагальнену залежність $F_q(s)$ від q . Для цього необхідно повторити кроки 2-4 для різних часових масштабів s . Цілком зрозуміло, що $F_q(s)$ буде збільшуватись із збільшенням q . Звичайно, $F_q(s)$ залежить також від порядку методу АДФ m . Згідно з побудовою, $F_q(s)$ визначене лише для значень $s \geq m + 2$.

Крок 5. Визначається скейлінгова поведінка функції флуктуацій шляхом аналізу у подвійному логарифмічному масштабі залежності $F_q(s)$ від q . Якщо послідовність x_i має довгочасові кореляції, $F_q(s)$ збільшується із збільшенням s згідно степеневому закону

$$F_q(s) \cong s^{h(q)}. \quad (9)$$

Взагалі, коефіцієнт $h(q)$ повинен залежати від q . Для стаціонарних часових рядів, $h(2)$ ідентичний коефіцієнту Херста. Таким чином, функцію $h(q)$ можна назвати узагальненим коефіцієнтом Херста.

Для монофрактальної часової послідовності $h(q)$ залежить від q , таким чином скейлінгова поведінка відхилень $F^2(v, s)$ однакова на всіх сегментах v і процедура усереднення (8) дасть однакові значення скейлінгового коефіцієнта для всіх сегментів послідовності. Лише у випадку, коли масштаби малих і великих флуктуацій відрізняються, буде помітною залежність $h(q)$ від q : якщо розглядати додатні значення q , сегменти v з великими значеннями $F_s^2(v)$ (наприклад, великі відхилення від відповідних інтерполяційних поліномів) будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. Таким чином, для додатніх значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів із великими флуктуаціями. Зазвичай великі флуктуації характеризуються меншими скейлінговими коефіцієнтами $h(q)$ для мультифрактальних рядів. Навпаки, для від'ємних значень q сегменти v з малими відхиленнями $F_s^2(v)$ будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. Таким чином, для від'ємних значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів з малими флуктуаціями, що зазвичай характеризуються більшим скейлінговим коефіцієнтом.

Однак, метод МФ-АДФ може визначати лише *додатні* узагальнені коефіцієнти Херста $h(q)$, і стає неточним для сильно антикорельованих сигналів, коли $h(q)$ близьке до нуля. В таких випадках використовується модифікований МФ-АДФ аналіз. Більш простим шляхом для аналізу подібних даних може служити інтегрування часового ряду перед виконанням МФ-АДФ процедури (знаходження накопичень). Звідси, просте знаходження суми у (5), що описує профіль початкових даних, замінюється подвійним знаходженням суми,

$$\tilde{Y}(i) = \sum_{k=1}^i (Y(k) - \bar{Y}). \quad (10)$$

Після цього виконується процедура МФ-АДФ, описана вище, внаслідок чого отримується узагальнена функція флуктуацій

$$\tilde{F}_q(s) \cong s^{\tilde{h}(q)} = s^{h(q)+1}. \quad (11)$$

Таким чином, скейлінгова поведінка може бути точно визначена навіть у випадку, коли $h(q)$ близьке до нуля (проте більше за -1) для деяких значень q .

Зауважимо, що $\tilde{F}_q(s)/s$ відповідає $F_q(s)$ у формулі (9). Якщо на кожному кроці (10) не віднімається середнє значення, така сума, більш за все, дасть квадратичний тренд у профілі $\tilde{Y}(i)$. В цьому випадку необхідно

використовувати, щонайменше, МФ-АДФ другого порядку для вилучення такого штучного тренду.

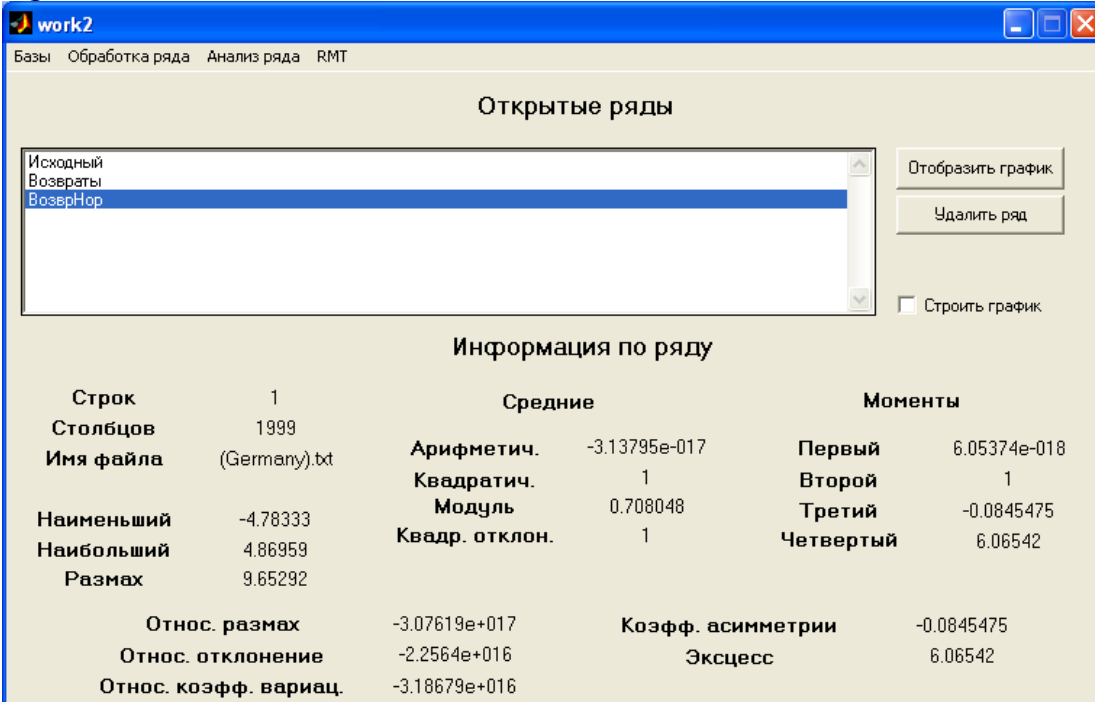
Хід роботи

У середовищі MatLab 6.5 завантажимо пакет для дослідження часового ряду, набравши у командному рядку **work2** та натиснувши **Enter**.

У цій роботі будемо користуватись переважно пунктом меню *Анализ рядов*.

Для дослідження часового ряду завантажимо його, використовуючи пункт меню ринку спочатку необхідно відкрити базу з часовими рядами. Заходимо у пункт меню *Базы*→*Открыть базу* та вибираємо потрібну папку і ряд для дослідження. У даній роботі використовуватиме в якості зразка ряд фондового індексу Німеччини GDAXI довжиною 2000 днівв, який охоплює кризу фондового ринку початку 20008 року (www.yahoo.finance.com) . Після завантаження файлу у вікні програми з'явиться інформація про відкритий ряд (рис. 1).

Найпростіше дослідження, яке можна провести для даного ряду – дослідити за допомогою R/S-аналізу. R/S-аналіз проводиться не для самого ряду, а для нормалізованих прибутковостей, тому розрахуємо їх, використовуючи пункт меню *Обработка ряда*→*Расчитать возвраты*→*Нормализовать*. Після цього у вікні програми з'явиться новий ряд *ВозврНорм*, з яким і будемо проводити необхідні операції. Виберемо пункт меню *Анализ ряда*→*Коэффициент Херста*, внаслідок чого відкриється вікно, подане на рис. 2.



Строк	1	Средние		Моменты	
Столбцов	1999	Арифметич.	-3.13795e-017	Первый	6.05374e-018
Имя файла	(Germany).txt	Квадратич.	1	Второй	1
Наименьший	-4.78333	Модуль	0.708048	Третий	-0.0845475
Наибольший	4.86959	Квадр. отклон.	1	Четвертый	6.06542
Размах	9.65292				
Относ. размах		-3.07619e+017	Коэфф. асимметрии	-0.0845475	
Относ. отклонение		-2.2564e+016	Эксцесс	6.06542	
Относ. коэфф. вариаци		-3.18679e+016			

Рис. 1. Вікно програми з відкритим рядом

У вікні результати аналізу відображаються у подвійному логарифмічному масштабі (активізовано квадрати \mathbf{LogX} та \mathbf{LogY}). Розрахунок точок для отримання значень коефіцієнта Херста проведемо з використанням послідовності ширини вікон, де наступне значення більше у кілька разів за попереднє (такий спосіб найкращий для відображення у вибраному нами масштабі), у даному випадку коефіцієнт рівний 1.1, тобто перша ширина оброблюваних вікон може бути, наприклад, 100, наступна 110, далі: 121, 133, 146, 160 і т.д.

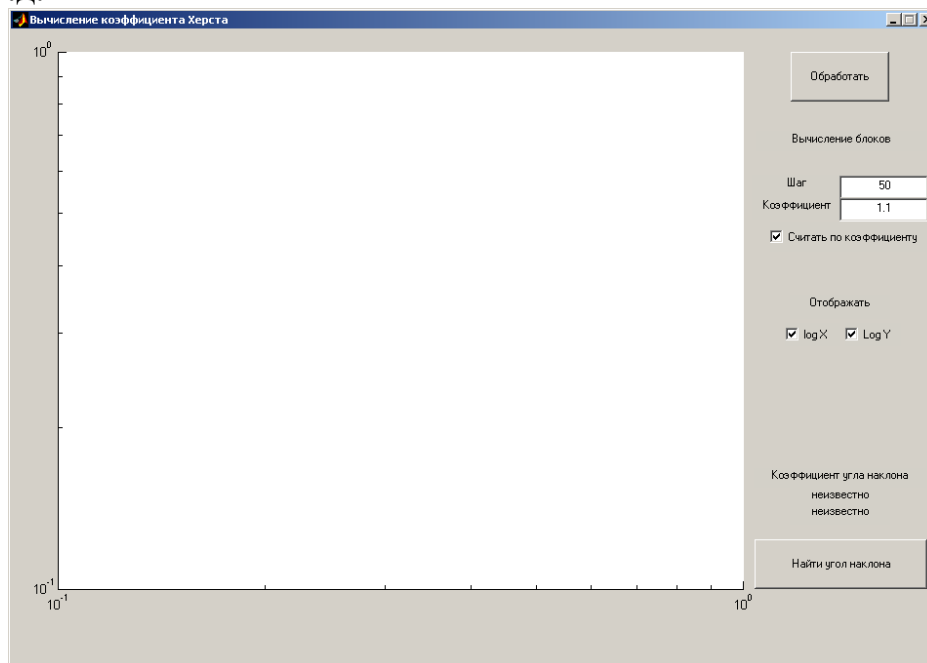


Рис. 2. Вікно програми для обчислення коефіцієнта Херста

Натиснемо кнопку **Обработать** і після проведення розрахунків програма видасть графік, подібний до зображеного на рис. 3.

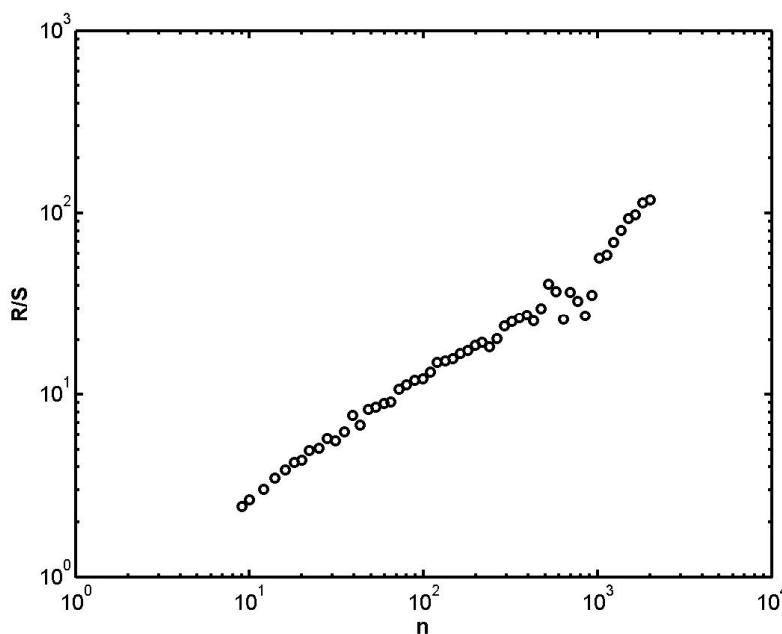


Рис. 3. Ряд, побудований на основі початкового, для визначення коефіцієнта Херста

Для отримання коефіцієнта Херста необхідно натиснути кнопку **Найти угол наклона**, після чого вибрати початкову та кінцеву точку діапазону графіка (мишкою), на якому розраховується коефіцієнт Херста. Внаслідок проведення описаних дій з'явиться пряма лінія, що проходить через графік, кут нахилу якої і є шуканим коефіцієнтом Херста. Кут нахилу відображується під написом **Кoeffициент угла наклона** (перше із двох чисел) і рівний для нашого прикладу 0.60, що свідчить про ряд, який має незначну персистентність. Відкривши цей же графік із **work2** кнопкою **Отобразить график**, виберемо такі параметри графіки: товщина ліній – 2, висота символів 14, заміна лінії на точки. Після деяких перетворень одержимо рис. 4.

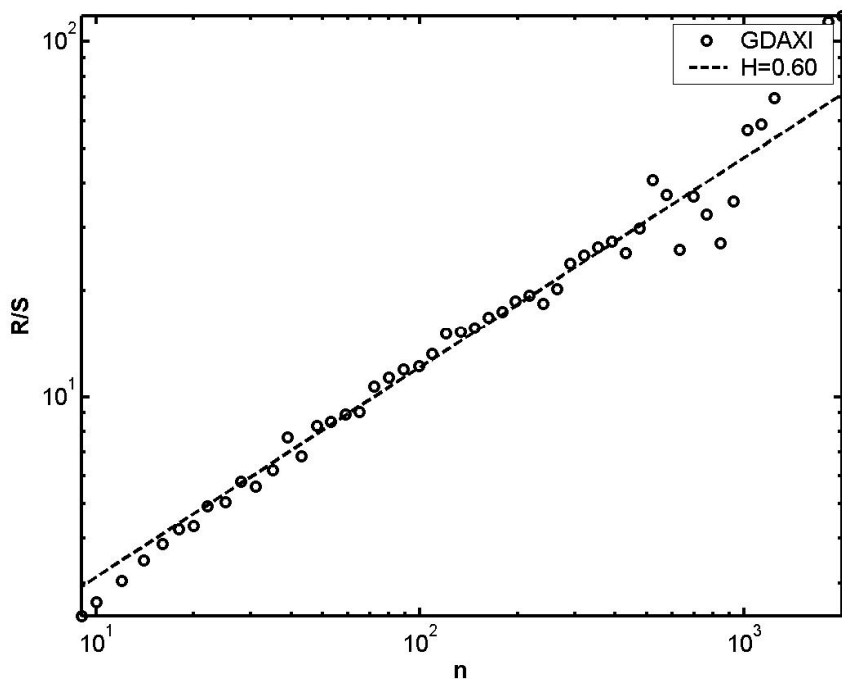


Рис. 4. Ряд із знайденим коефіцієнтом Херста

Більш точну інформацію про ряд дає аналіз методом аналізу детрендованих флуктуацій (DFA). Виберемо у основному вікні програми ряд **ВозврНорм→Анализ ряда→DFA** (Detrended Fluctuation Analysis). Вікно, що відкриється, дещо відрізняється від вікна пошуку коефіцієнта Херста. Тут необхідно, окрім кроку збільшення вікна, вводити початковий та кінцевий лаг (часову затримку). Для досягнення високої точності необхідно вибирати якомога більше значення, проте бажано не більше, ніж половина ряду. Після проведення вказаних дій натиснемо кнопку **Обработка**. Отримаємо вікно, подане на рис. 5.

!!! Знайдіть коефіцієнт Херста самостійно і порівняйте з тим, що одержаний вище методом R/S-аналізу. Зробіть висновки

Далі знайдемо модуль нормалізованих прибутковостей: **Обработка ряда→Взять модуль ряда**, обчислимо коефіцієнт Херста. Уважно подивившись на графік рисунку 6, можна зробити висновок про наявність точки кросоверу (зміни кута нахилу прямої, вказана стрілкою), що знаходиться приблизно в точці з абсцисою 30-40 днів. Ця точка свідчить про зміну

фрактальності ряду на часових проміжках, більших 30-40 днів. В нашому випадку коефіцієнти Херста мають такі значення: $H=0.56$ та $H=1.00$.

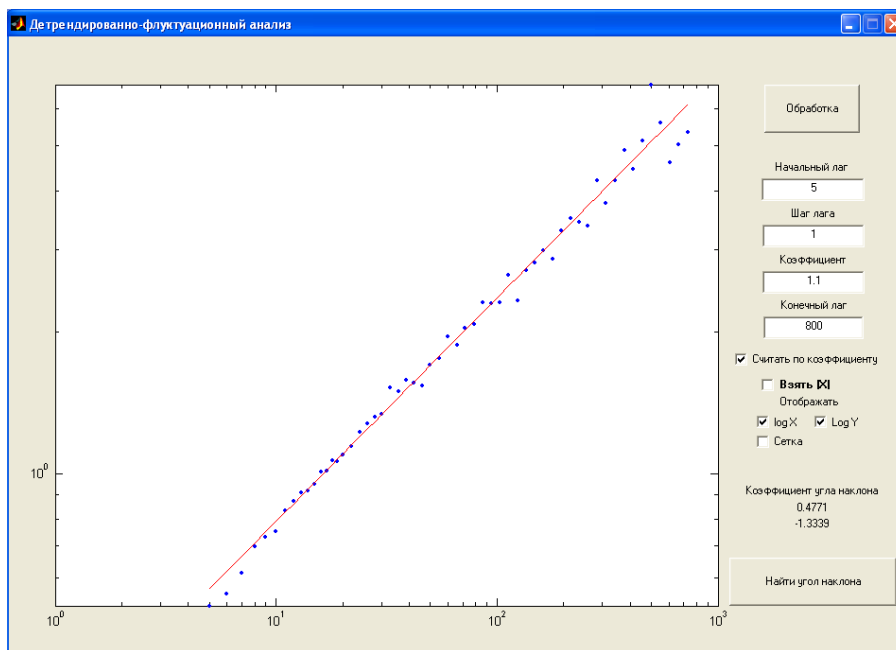


Рис. 5. Ряд, отриманий після обробки для знаходження коефіцієнта H

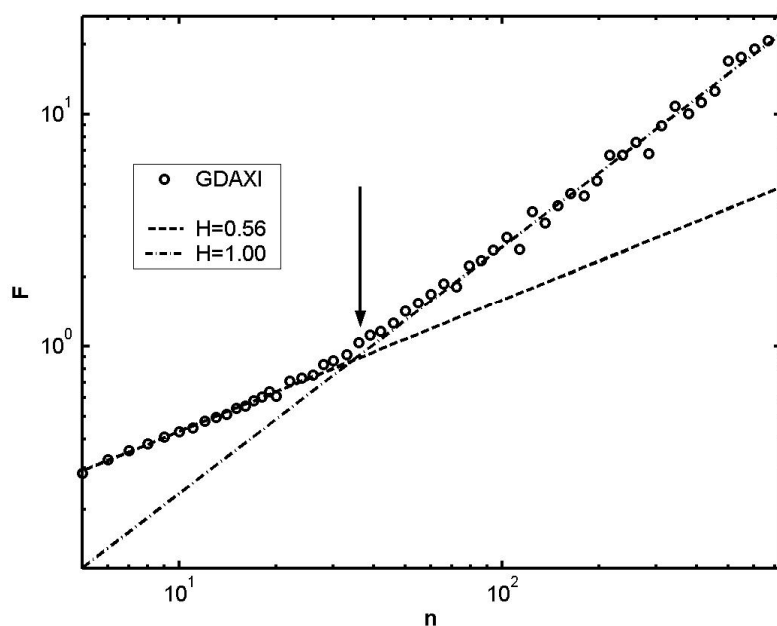


Рис. 6. Отриманий методом АДФ ряд із прямими, що відображують зміну фрактальності часового ряду

Дослідження показують, що бувають ряди, які мають більш ніж одну точку кросоверу. Це говорить у загальному випадку про мультифрактальну природу економічних часових рядів, до аналізу якої ми і переходимо. Збережемо перед цим файл нормалізованих прибутковостей.

Мультифрактальні властивості часових рядів

Мультифрактальний АДФ дозволяє визначати наявність мультискейлінга у ряді, що (у випадку існування) свідчить про використання для формування значень ряду композиції різних механізмів утворення цих значень.

Вибравши збережений ряд нормалізованих прибутковостей для аналізу, завантажимо програму, що дозволяє аналізувати значення ряду, виконавши команду *work3*. У цьому випадку відкриється вікно “*Multifractal DFA research*”, у якому вибираються опції для проведення аналізу.

Прочитаємо ряд, активізувавши пункт меню *Файл* → *Читати* (рис. 7).

Для виконання мультифрактального АДФ у відкритому вікні необхідно провести відповідні налаштування. У полі “*Начальная ширина окна*” виставляється найменша ширина сегментів s (див. крок 2), на які розбивається вихідний ряд для проведення подальшого детрендування, а у полі “*Конечная ширина окна*” – найбільша ширина сегментів. У полі “*Степени q для расчета DFA*” вводиться найменше та найбільше значення степеня q та крок зміни значень з використанням синтаксису MATLAB для побудови значень ряду. Наприклад, рядок “ $-10:1:10$ ” означатиме послідовність цілих чисел від -10 до 10 із кроком 1 . Якщо необхідно вводити дві різні послідовності – їх параметри записуються через пробіл, наприклад: “ $-10:0.5:-2\ 2:0.5:10$ ”. Рекомендована послідовність степенів $q = -3, -2.9, -2.8, \dots, 3$ (“ $-3:0.1:3$ ”). Порядок DFA вибирається у відповідному полі (рекомендується аналізувати за допомогою DFA 2-го порядку).

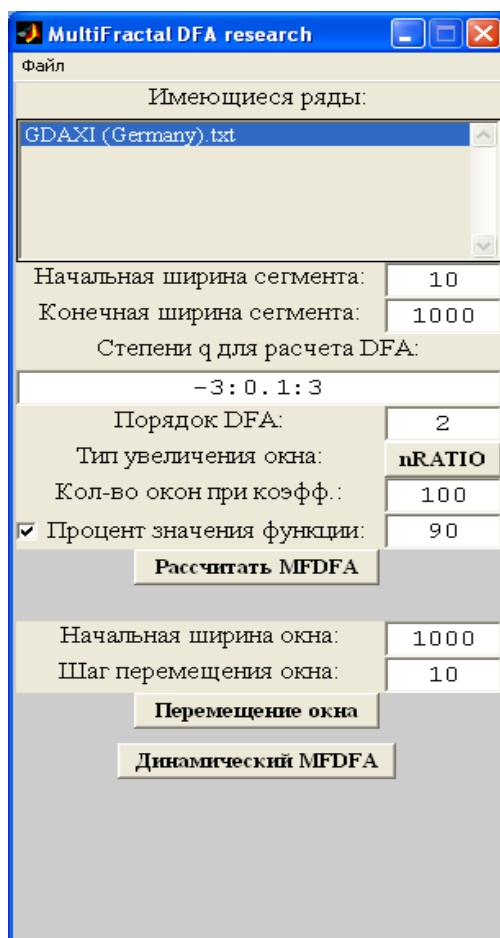


Рис. 7. Вікно налаштування опцій для мультифрактального аналізу ДФ

Шляхом натиснення на кнопку справа від напису “*Тип увеличения окна*” вибирається метод, за допомогою якого будуть обиратись можливі значення ширини сегменту s :

- якщо на кнопці написано “*nRATIO*”, то у полі нижче – “*Кол-во окон при коэфф.*” – встановлюється кількість різних можливих значень сегментів s (крок 2), які вибиратимуться для проведення аналізу, причому буде розраховано коефіцієнт k , такий що $s_{i+1} = ks_i$, тобто ширина сегментів наступного разу у k разів більша за ширину сегментів попереднього;
- якщо на кнопці написано “*STEP*”, то у полі нижче – “*Шаг увеличения окна*” – встановлюється значення, на яке буде більшою ширина сегментів при наступному видаленні трендів;
- якщо на кнопці написано “*RATIO*”, то у полі нижче – “*Коэфф. увеличения окна*” – встановлюється значення, на яке необхідно помножити s для отримання ширини наступних сегментів для подальшого видалення трендів;
- кнопка “*nSTEP*” аналогічна дії кнопки “*nRATIO*” за тією відмінністю, що в даному випадку крок обирається програмою таким чином, щоб між шириною найменшого сегмента та найбільшого можна було утворити ще $n - 2$ різних значень ширини (якщо це можливо), причому n береться із поля “*Кол-во окон при шаге*”.

Для розрахунку спектру мультифрактальності необхідно натиснути кнопку “*Рассчитать MF DFA*”.

По закінченні розрахунку будується кілька вікон:

- у вікні “*Распределение Fq(s)*” (рис. 8) відображується розподіл залежності F_q від ширини сегменту s (крок 4, (8));
- у вікні “*Распределение H(q)*” (рис. 9) відображується розподіл залежності $h(q)$ (крок 5, (9));
- у вікні “*Распределение Tau(q)*” (рис. 10) відображується розподіл залежності $\tau(q)$ згідно з (12);
- у вікні “*Распределение F(alpha), alpha рассчитана через tau*” (рис. 11) відображується спектр мультифрактальності, отриманий за допомогою перетворення Лежандра згідно з (14);
- у вікні “*Распределение F(alpha), alpha рассчитана через h*” (рис. 12) відображується спектр мультифрактальності, отриманий за допомогою перетворення згідно з (15); зауважимо, що цей спектр є менш точним, ніж спектр, отриманий у попередньому пункті.

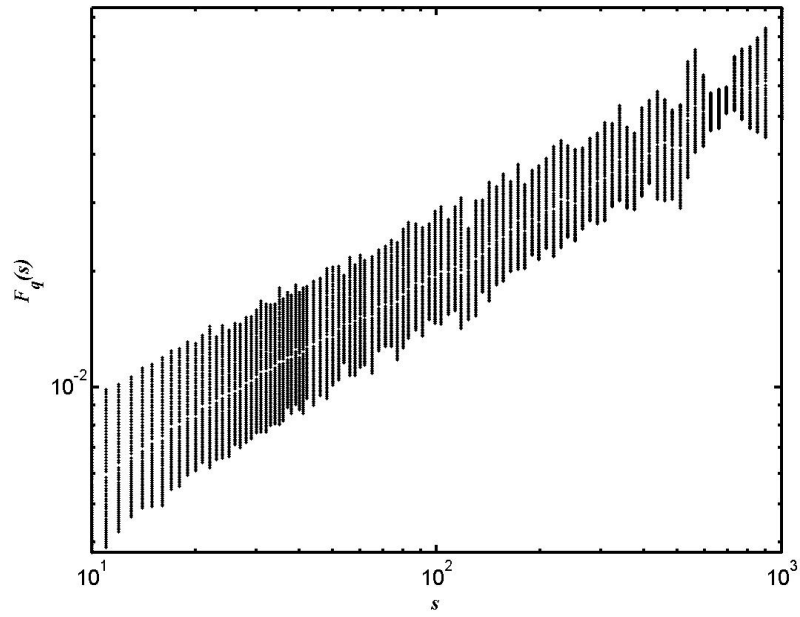


Рис. 8. Розподіл залежності F_q від ширини сегменту s

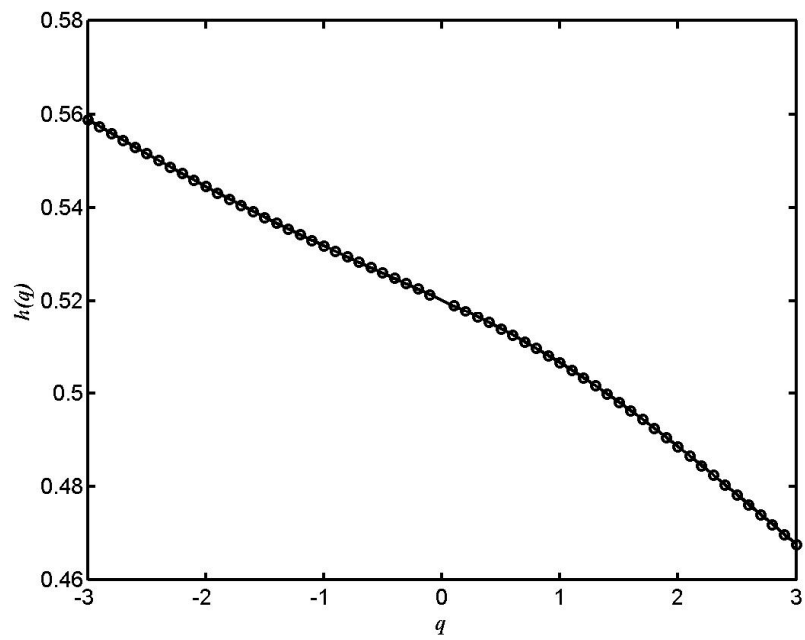


Рис. 9. Розподіл залежності $h(q)$

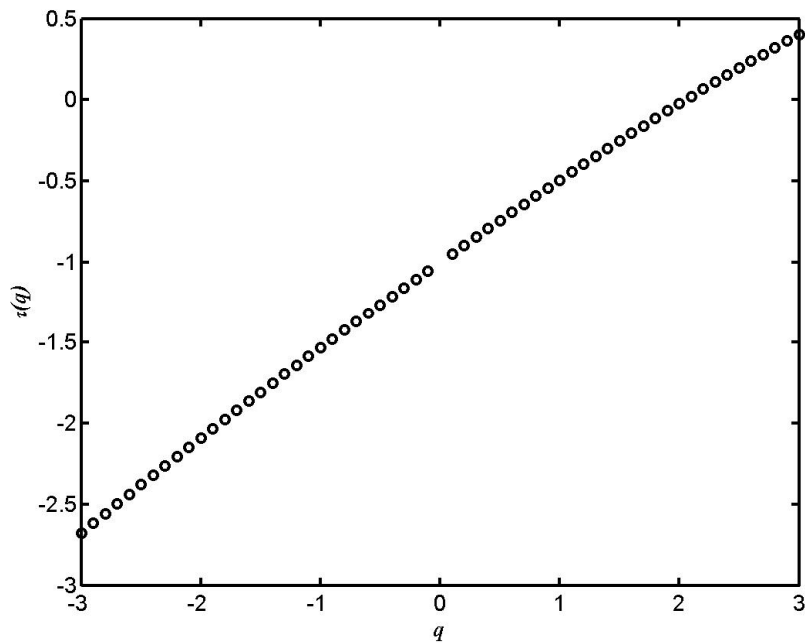


Рис. 10. Розподіл залежності $\tau(q)$.

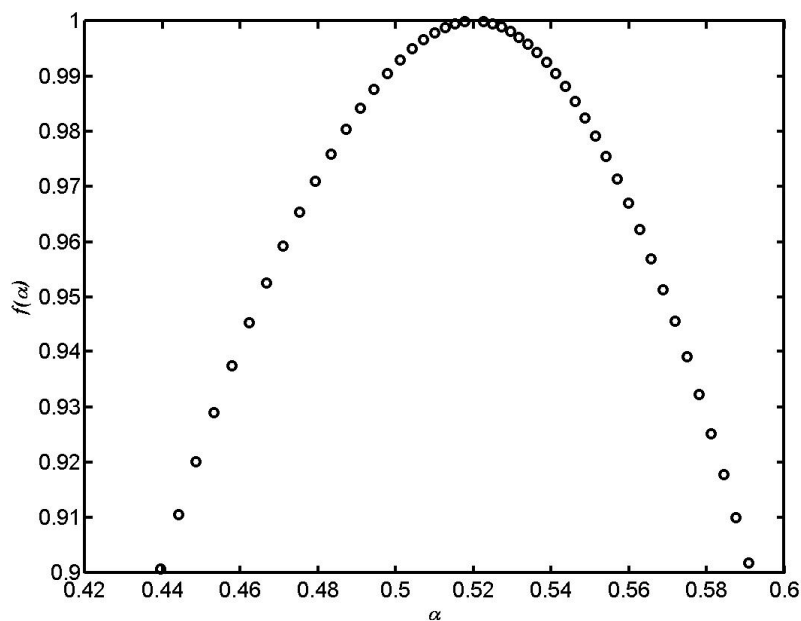


Рис. 11. Спектр мультифрактальності, отриманий за допомогою перетворення Лежандра

!!! Перемішайте вибраний ряд, проведіть мультифрактальний аналіз і порівняйте результати з щойно одержаними. Зробіть висновки!

Для проведення динамічного MF-DFA необхідно провести додаткові налаштування: вказати ширину вікна, що переміщається, причому можливо два варіанти, які міняються натисненням кнопки “*Перемещение окна/Увеличение окна*”:

– кнопка “*Перемещение окна*”; у полі “*Начальная ширина окна*” виставляється значення ширини вікна, яке буде переміщуватись (воно повинне бути не меншим, ніж значення у полі “*Конечная ширина*”

сегмента”, та не більшим за довжину ряду), а у полі “*Шаг перемещения окна*” – крок, на який буде зміщуватись кожне наступне вікно;

- кнопка “*Увеличение окна*”; у полі “*Начальная ширина окна*” виставляється значення ширини вікна, яке буде переміщуватись (воно повинне бути не меншим, ніж значення у полі “*Конечная ширина сегмента*”, та не більшим за довжину ряду), а у полі “*Шаг перемещения окна*” – крок, на який буде збільшуватись ширина кожного наступного вікна.

Після натиснення на кнопку “*Динамический MF DFA*” буде проведено розрахунок та з’явиться два вікна:

- вікно, у якому відображується зміна середнього значення ширини спектру (spectrum windowed middle), усереднене значення ширини спектру (spectrum middle) та зміна ширини спектру (spectrum windowed width) у вікнах, що переміщуються (рис. 13);
- вікно із графічним поданням зміни отриманих спектрів у часі (рис. 14).

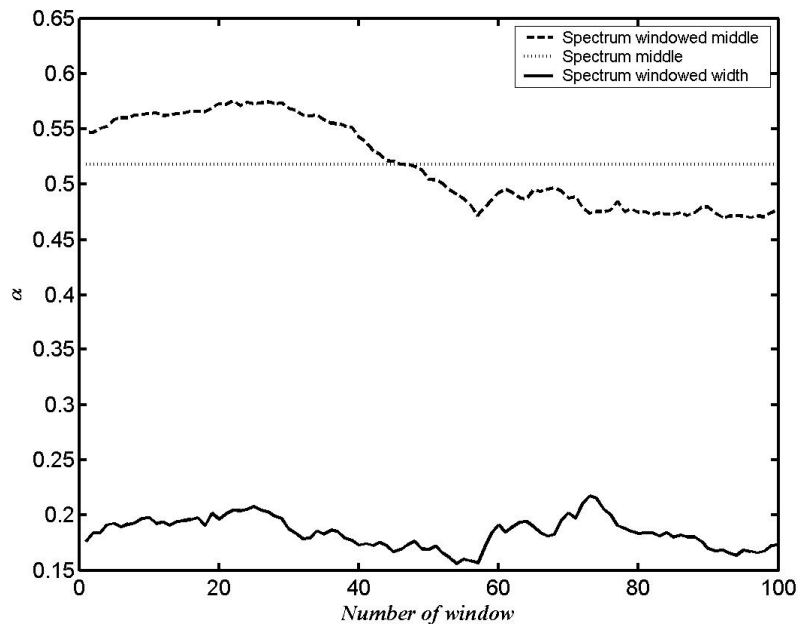


Рис. 13. Зміна ширини спектру

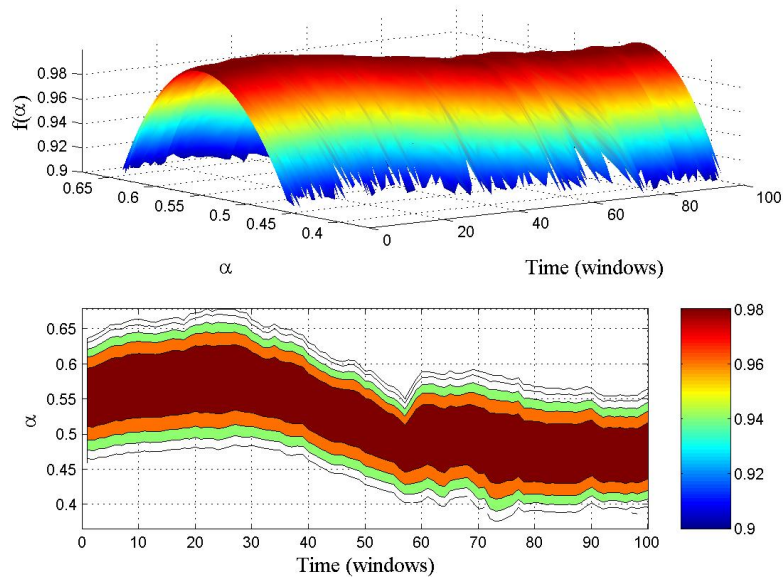


Рис. 14. Зміна спектру мультифрактальності у часі

Висновок.

Таким чином, для одного часового ряду можна отримати, використовуючи різні методи, сукупність показників, що характеризують досліджуваний об'єкт з точки зору впливу зовнішніх подій на систему, яка описується цим рядом.

Завдання для виконання

1. Вибрати із запропонованої бази даних варіант завдання
2. Виконати дослідження фрактальних характеристик заданих часових рядів. Зберегти результати в окремому файлі
3. Порівняти значення коефіцієнтів Херста, одержаних методом R/S-аналізу та АДФ
4. Провести повний аналіз ряду за допомогою методу мультифрактального АДФ.
5. Дати інтерпретацію отриманим результатам

Контрольні запитання

1. В чому переваги методу детрендованих флуктуацій перед методом R/S-аналізу?
2. На що вказує мультифрактальність часового ряду?
3. Яким чином поведуть себе різні характеристики, якщо ряд містить кризу?

Індивідуальна робота № 3

Тема. Дослідження процесів самоорганізації в економічних системах.

Мета. Навчитись використовувати методи теорії випадкових матриць для отримання “прихованої” інформації в складних економічних системах.

1. Знаходження коефіцієнтів матриці крос-кореляцій.
2. Знаходження, аналіз та інтерпретація власних значень та власних векторів симетричної матриці:
 - 2.1. Розподіл власних значень, порівняння його з нормальним розподілом і розподілом для Гаусівського ортогонального ансамблю (ГОВА).
 - 2.2. Обернене відношення участі (Inverse participation ratio).
 - 2.3. Аналіз власних значень, що відхиляються від розподілу ГОВА.
3. Побудова та інтерпретація кластерної структури економічного ринку.

Теоретичні відомості

Вивчення статистичних властивостей матриць з незалежними випадковими елементами – *випадкових матриць* – має багату історію, що починається з ядерної фізики, де проблема з'явилася 50 років тому при вивченні енергетичних рівнів складних ядер, що існуючі на той час моделі були не в змозі пояснити. Теорія випадкової матриці (ТВМ) [2] була розвинена в цьому контексті Вігнером (Wigner), Дайсоном (Dyson), Метою (Mehta) та іншими для пояснення статистики рівнів енергії складних квантових систем. Дослідники постулювали, що функція Гамільтона, яка описує важкі ядра, може бути задана матрицею H з незалежними випадковими елементами H_{ij} , отриманими з розподілу імовірності. Відштовхуючись від цього припущення було зроблено низку вражаючих передбачень, які було підтверджено експериментально. Для складних квантових систем передбачення на основі ТВМ представляють середнє по всім можливим взаємодіям. Відхилення від універсальних передбачень ТВМ відображують системну специфіку, невідповідні властивості системи, забезпечуючи ключові підходи до розуміння базової взаємодії системи.

Недавні дослідження, що використовували методи аналізу ТВМ до аналізу властивостей матриці взаємних кореляцій C , показують, що близько 98% власних значень матриці C співпадають зі значеннями, отримуваними з використанням ТВМ, таким чином пропонуючи задовільний рівень хаотичності у вимірюваних крос-кореляціях. Також було знайдено, що існують відхилення від передбачень за допомогою ТВМ у близько 2% найбільших власних значень. Ці результати викликають наступні питання:

1. Яка можлива інтерпретація для відхилень від ТВМ?
2. Що можна сказати про структуру C з цих результатів?
3. Яке практичне значення отриманих результатів?

У даній лабораторній роботі ці питання будуть вивчені докладно. Шляхом комп'ютерного моделювання виявлено, що найбільше власне значення матриці C представляє вплив усього ринку, що є звичайним для всіх акцій. Аналіз змісту власних значень, що відхиляються від ТВМ, показує існування взаємних кореляцій між акціями того ж самого типу промисловості, найбільш капіталізованими акціями, і акціями фірм, що мають бізнес у певному географічному секторі (локалізовані територіально). Обчислюючи скалярний добуток власних векторів від одного періоду часу до наступного, можна побачити, що “власні вектори, що відхиляються”, мають різні ступені стабільності в часі, визначеному кількісно величиною скалярного добутку. Найбільші два-три власних вектори стійкі протягом тривалих періодів часу, у той час як для іншої частини власних векторів, що відхиляються, стабільність у часі зменшується як тільки відповідні власні значення наближаються до верхньої межі ТВМ [1].

Знаходження коефіцієнтів матриці крос-кореляцій

Визначення кореляцій між різними акціями – тема, цікава не лише з точки зору наукових причин розуміння економіки як складної динамічної системи, але також і з практичних поглядів, зокрема, з точки зору розміщення активів і оцінки портфельного ризику. Ми будемо аналізувати взаємні кореляції між акціями, застосовуючи поняття і методи теорії випадкових матриць, що використовуються в контексті складних квантових систем, де точний характер взаємодій між підодинацями невідомий.

Для визначення кількісно кореляцій спочатку обчислюється зміна цін (“повернення”, прибутковості) акції $i = 1, \dots, N$ за час Δt ,

$$G_i(t) = \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t), \quad (1)$$

де $S_i(t)$ позначає ціну акції i . Оскільки різні акції мають різні рівні змінюваності (стандартні відхилення), визначатимемо нормалізоване повернення (нормалізовану прибутковість)

$$g_i(t) \equiv \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i}, \quad (2)$$

де $\sigma_i \equiv \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ – стандартне відхилення G_i , а $\langle \dots \rangle$ позначає середнє значення за період часу, що досліджується. Тоді обчислення матриці взаємних кореляцій C зводиться до обчислення формули:

$$C_{ij} \equiv \langle g_i(t)g_j(t) \rangle. \quad (3)$$

Згідно з побудовою елементи C_{ij} обмежені областю $-1 \leq C_{ij} \leq 1$, де $C_{ij} = 1$ відповідає повним кореляціям, $C_{ij} = -1$ - повним антикореляціям, і $C_{ij} = 0$ свідчить про некорельованність пар акцій.

Труднощі в аналізі важливості та значення коефіцієнтів крос-кореляції C_{ij} виникають внаслідок кількох причин, що полягають в наступному:

- i) ринкові умови з часом змінюються і взаємна кореляція, що існує між будь-якою парою акцій, може бути не постійною (нестационарною);
- ii) скінчена довжина досліджуваного ряду, доступного для оцінювання взаємних кореляцій, додає так званий “шум вимірювання” – чим коротший досліджуваний ряд – тим менш точними будуть отримувані значення.

Якщо буде використано довгий ряд для вилучення проблеми скінченної довжини, на отримані значення буде впливати нестационарність крос-кореляцій. З цих причин, емпірично виміряні крос-кореляції будуть містити “випадкові” складові, і найбільш важливою (і одночасно важкою проблемою) є оцінка в складі матриці C таких взаємних кореляцій, що не є результатом випадковості.

Яким же чином можна виділяти з C_{ij} ті акції, що залишилися корельованими на розглядуваному періоді часу? Щоб відповісти на це питання, перевіримо статистику C у порівнянні із так званою “нульовою гіпотезою” випадкової кореляційної матриці – матриці кореляцій, побудованої із взаємно некорельованих часових рядів. Якщо властивості C відповідають властивостям для випадкової матриці кореляцій, тоді можна говорити про те, що значення емпірично вимірюваних властивостей C випадкові. Навпаки, відхилення властивостей C від таких же властивостей для випадкової кореляційної матриці передає інформацію про “справжні” кореляції. Таким чином, нашою метою є порівняння властивостей C з такими ж властивостями випадкової матриці кореляцій і розділ властивостей C на дві групи: (а) частина C , що відповідає властивостям випадкової кореляційної матриці (“шум”) і (б) частина C , що відхиляється (“інформація”).

Розподіл власних значень

Для отримання інформації про взаємні кореляції C необхідно порівняти властивості C з такими ж властивостями випадкової матриці крос-кореляцій. У матричній нотації така матриця може бути виражена як

$$C = \frac{1}{L} GG^T, \quad (4)$$

де G – матриця розміру $N \times L$ з елементами $\{g_{im} = g_i(m\Delta t), i = 1, \dots, N; m = 0, \dots, L-1\}$ і G^T позначає транспонування G . Розглянемо випадкову кореляційну матрицю

$$R = \frac{1}{L} AA^T, \quad (5)$$

де A – матриця розміру $N \times L$, що містить N часових рядів із L випадковими елементами a_{im} з нульовим середнім і одиничним відхиленням, що означають взаємну некорельованість.

Статистичні властивості випадкових матриць типу R відомі. Зокрема, у наближенні $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, такому, що $Q \equiv \frac{L}{N} (> 1)$ фіксоване, показано аналітично, що функція розподілу щільності імовірності $P_{rm}(\lambda)$ власних значень λ випадкової матриці кореляції R визначається як

$$P_{rm}(\lambda) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} \quad (6)$$

для λ в межах границь $\lambda_- \leq \lambda_i \leq \lambda_+$, де λ_- і λ_+ – найменше і найбільше власні значення R , відповідно,

$$\lambda_{\pm} = 1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}}. \quad (7)$$

Звертаємо вашу увагу, що вираз (6) є точним для випадку розподілених за Гаусом матричних елементів a_{im} .

Порівняємо розподіл власних значень $P(\lambda)$ для C з $P_{rm}(\lambda)$. Для цього обчислимо власні значення λ_i матриці C , причому λ_i впорядкуємо за зростанням ($\lambda_{i+1} > \lambda_i$). При дослідженнях зверніть увагу на присутність чіткої “великої частини” власних значень, що спадають у межах границь $[\lambda_-, \lambda_+]$ для $P_{rm}(\lambda)$. Також зверніть увагу на відхилення для деяких найбільших і найменших власних значень від отриманих за допомогою ТВМ.

Оскільки рівняння (6) є таким, що строго відповідає лише для $L \rightarrow \infty$ і $N \rightarrow \infty$, необхідно перевірити також відхилення від ідеального випадку, оскільки робота проводиться завжди із **скінченими** рядами. При дослідженнях виявляється, що для кількох найбільших (найменших) власних значень ефект впливу скінчених величин L і N відсутній.

Обернене відношення участі

Вивчивши інтерпретацію найбільшого власного значення, що значно відхиляється від результатів ТВМ, зосередимось на власних значеннях, що залишаються. Відхилення розподілу компонентів власного вектора u^k від ТВМ Гаусового передбачення більш явне, коли відстань від верхньої границі ТВМ $\lambda_k - \lambda_+$ збільшується. Оскільки близькість до λ_+ збільшує ефекти хаотичності, визначаємо кількість компонентів, що беруть значну участь в кожному власному векторі, що, у свою чергу, відображає ступінь відхилення від ТВМ для розподілу компонентів власного вектора. Для цього використовується поняття оберненого відношення участі (ОВУ), що часто застосовується в теорії локалізації. ОВУ власного вектора u^k визначається як

$$I^k = \sum_{l=1}^N [u_l^k]^4, \quad (8)$$

де u_l^k , $l=1, \dots, N$ – компоненти власного вектора u^k . Значення I^k може бути проілюстровано двома граничними випадками:

- i) вектор з ідентичними компонентами $u_l^k = \frac{1}{\sqrt{N}}$ має $I^k = \frac{1}{N}$;
- ii) вектор з одним компонентом $u_1^k = 1$ і нульовими іншими має $I^k = 1$.

Таким чином, ОВУ визначає кількість даних з числа компонентів власного вектора, що значний впливають на ринок, заданий системою часових рядів.

Наявність векторів з великими значеннями I^k також виникає в теорії локалізації Андерсона. У контексті теорії локалізації часто знаходять “випадкову смугу матриць”, що містять узагальнені стани з маленьким I^k в більшій частині спектра власних значень, тоді як основні стани локалізовані і мають великі I^k . Виявлення локалізованих станів для маленьких і великих власних значень матриці крос-кореляцій C нагадує про локалізацію Андерсона і припускає, що C може мати випадкову зону матричної структури.

Інтерпретація власних значень та власних векторів, що відхиляються від ТВМ

Кількість істотних внесків у власний вектор визначається (як уже було описано) за допомогою ОВУ, для отримання ж загальних властивостей досліджуються компоненти $\frac{1}{I^k}$ власного вектора u^k . Пряма експертиза таких власних векторів, однак, не приводить до прямої інтерпретації їх економічної доречності. Щоб інтерпретувати їх значення, звернемо увагу, що найбільше

власне значення значно більше, ніж інші $N-1$ власні значення тоді як розмір матриці C рівний N . Таким чином, щоб аналізувати власні вектори, що відхиляються, необхідно видалити ефект найбільшого власного значення λ_{\max} .

Щоб позбутися ефекту λ_{\max} , i – відповідно – $G^{\max}(t)$, над прибутковостями кожної акції $G_i(t)$ виконується регресія

$$G_i(t) = \alpha_i + \beta_i M(t) + \varepsilon_i(t), \quad (9)$$

або ж, у нашому випадку просте визначення тренда часового ряду, що відповідає λ_{\max} та вилучення його з кожної часової послідовності. Тоді обчислюється матриця кореляції C , використовуючи формули (1)-(3). Далі обчислюються власні вектори u^k C і проводиться аналіз їх істотних учасників. Власний вектор u^{N-1} містить приблизно $\frac{1}{I^{N-1}}$ істотних учасників, які є всіма акціями з великими значеннями ринкової капіталізації.

Далі проводиться аналіз істотних вкладників іншої частини власних векторів. Результатами аналізу у більшості випадків є те, що кожний з власних векторів, що відхиляються, містить акції, які належать подібним або пов'язаним галузям промисловості як істотним вкладникам. Ці власні вектори поділяють набір всіх акцій у різні групи, що містять акції з великою ринковою капіталізацією (u^{N-1}), а також галузеві коаліції ($u^{N-2} - u^{N-9}$).

Хід роботи

У середовищі MatLab 6.5 завантажимо пакет для дослідження кореляційних властивостей ринку, заданого часовими рядами його складових, набравши у командному рядку **work2** та натиснувши **Enter**. Внаслідок цього відкриється вікно програми (рис. 1).

На рисунку видно три частини області користувача:

- меню, з якого викликаються дії, що необхідно виконати над досліджуваним об'єктом;
- область, де відображуються відкриті та отримані часові ряди, **Открытые ряды**;
- область, де відображується статистична інформація по виділеному у вікні **Открытые ряды** ряду, **Информация по ряду**.

У цій роботі ми будемо користуватись, в основному, пунктом меню **RMT**.

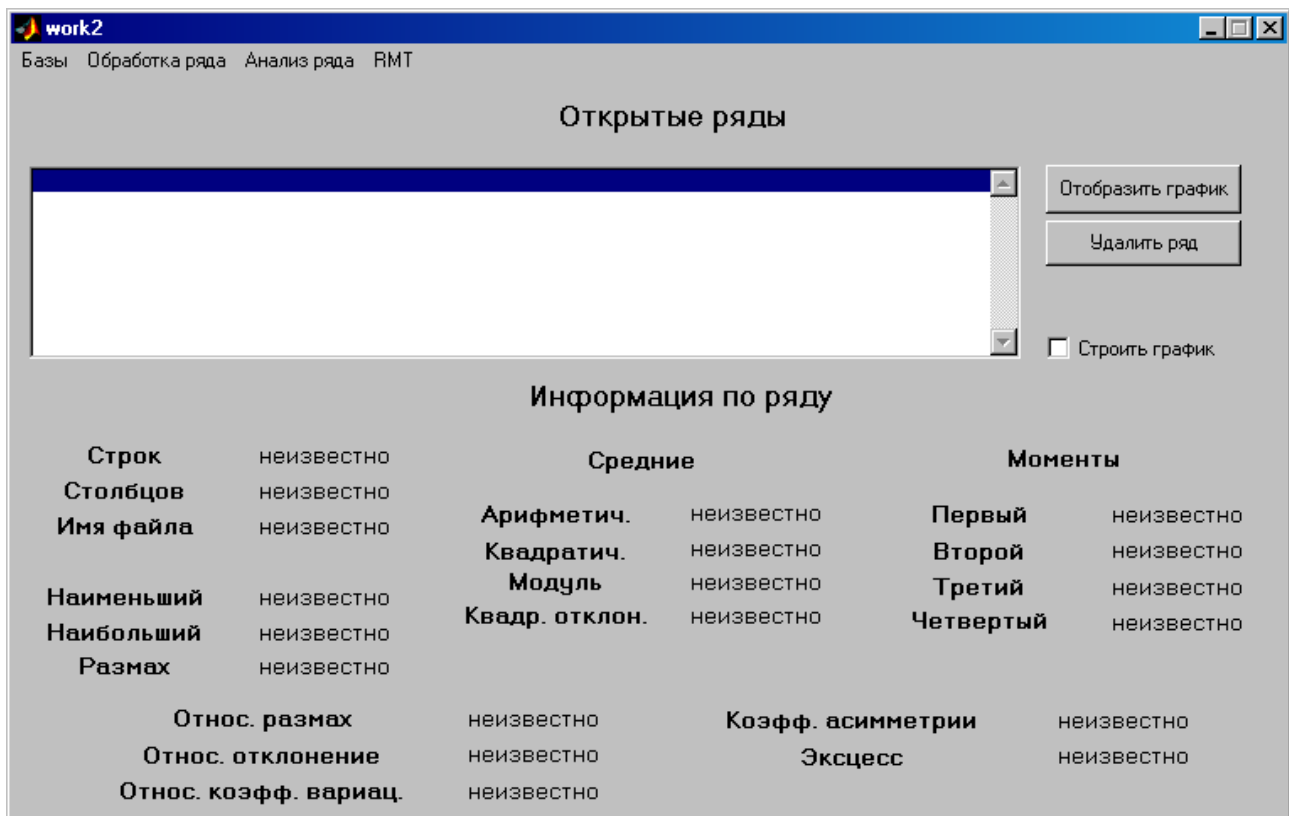


Рис. 1. Вікно програми дослідження ринків, заданих часовими рядами їх складових.

Для дослідження ринку спочатку необхідно відкрити базу з часовими рядами. Заходимо у пункт меню **Базы** та вибираємо **Открыть базу**. У вікні, що з'явиться, вибираємо необхідний файл і натискаємо кнопку **Открыть** (рис. 2).

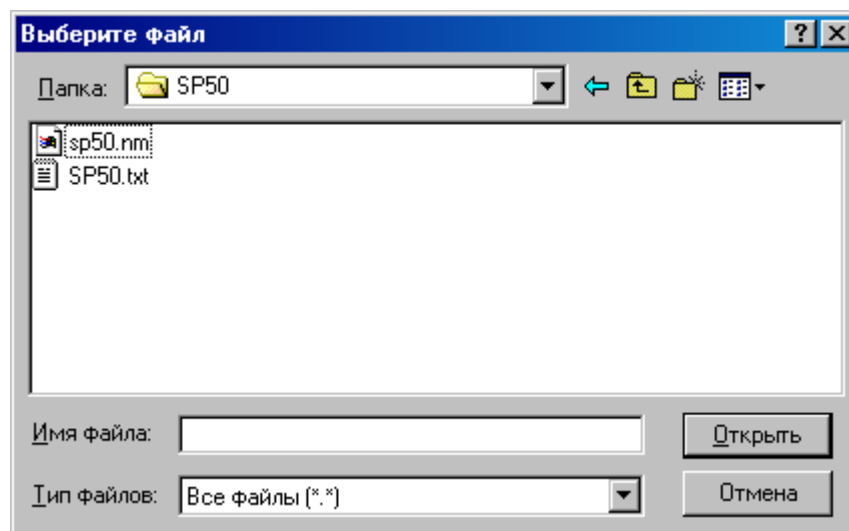


Рис. 2. Відкриття бази з даними (вибираємо файл із розширенням “.txt”).

Після завантаження файлу у вікні програми з'явиться інформація про відкриту базу. Відкриємо для прикладу базу даних, яка містить значення 187 валют відносно євро за період з 15.12.1998 (введення євро до обігу) по 03.12.2008 р. (рис. 3).

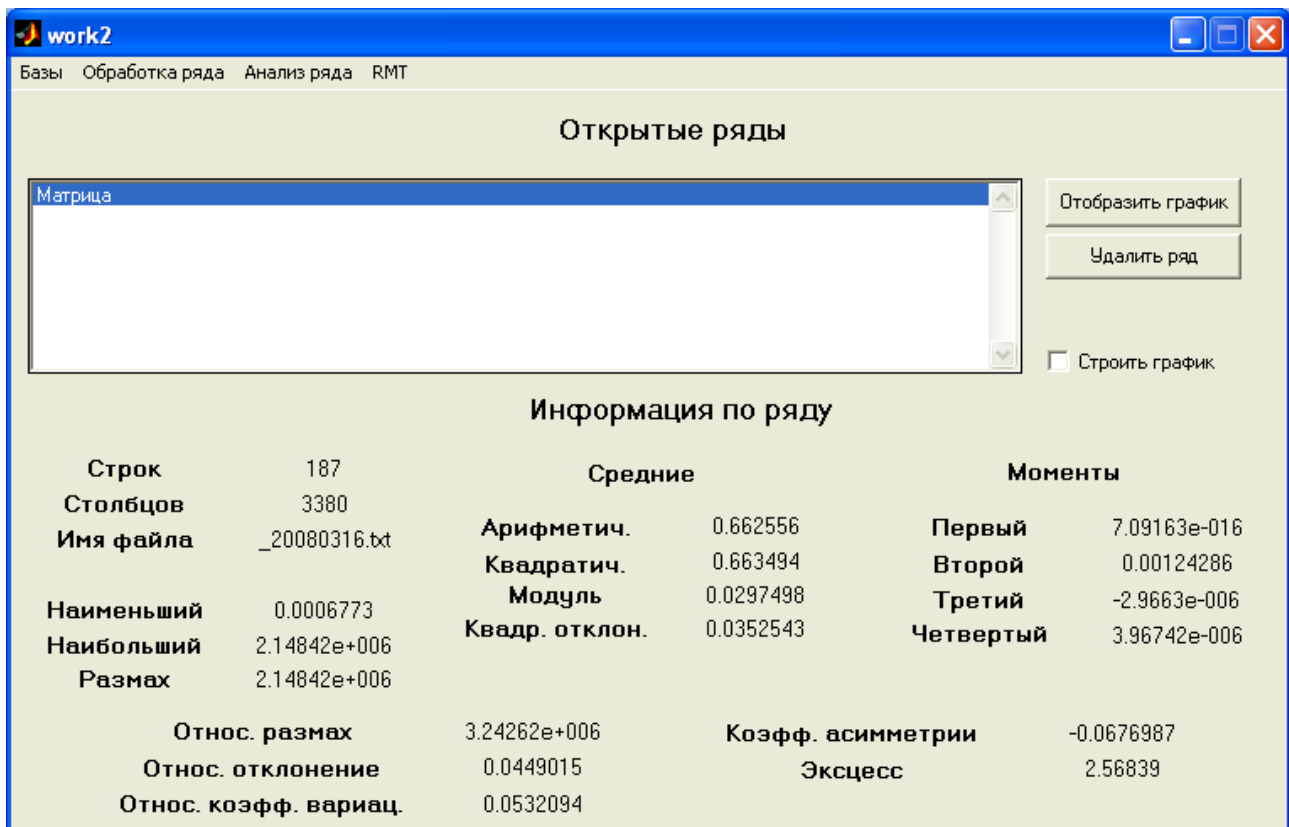


Рис. 3. Вікно програми з відкритою базою.

Для проведення дослідження розрахуємо матрицю крос-кореляцій виконуємо *RMT* → *Побудувати матрицю крос-кореляцій* (спочатку заходимо у меню *RMT*, потім – викликаємо пункт *Побудувати матрицю крос-кореляцій*). Після побудови бачимо, що утворено матрицю розмірності $N \times N$, де $N=187$ - кількість рядків (валют - currency), що знаходяться в матриці.

Таким чином, знайдено матрицю C з використанням формул (1)-(3). Графічне зображення цієї матриці подано рисунком 4.

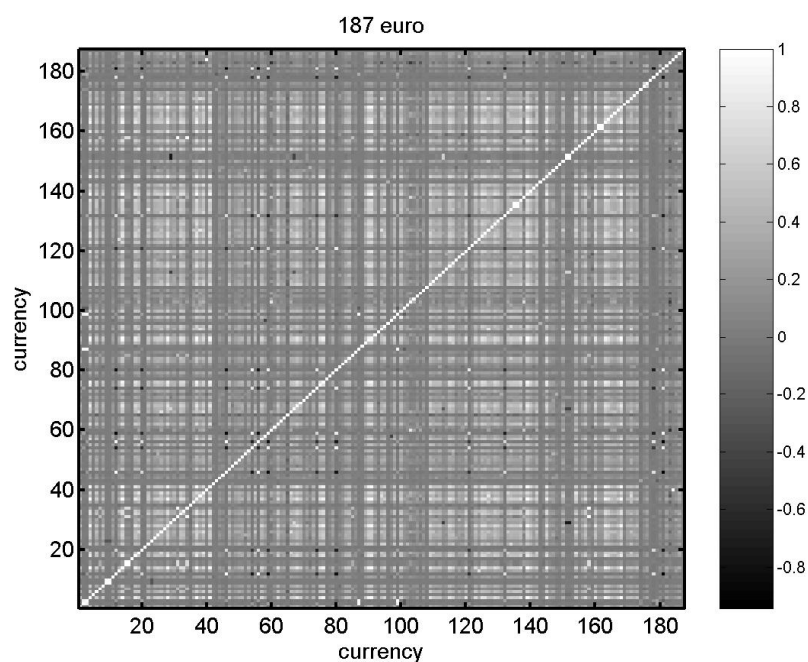


Рис. 4. Поле кореляцій світових валют відносно євро

Для перемішаної матриці (**RMT**→**Матрица**→**Перемешать матрицу**) кореляції зникають (рис. 5).

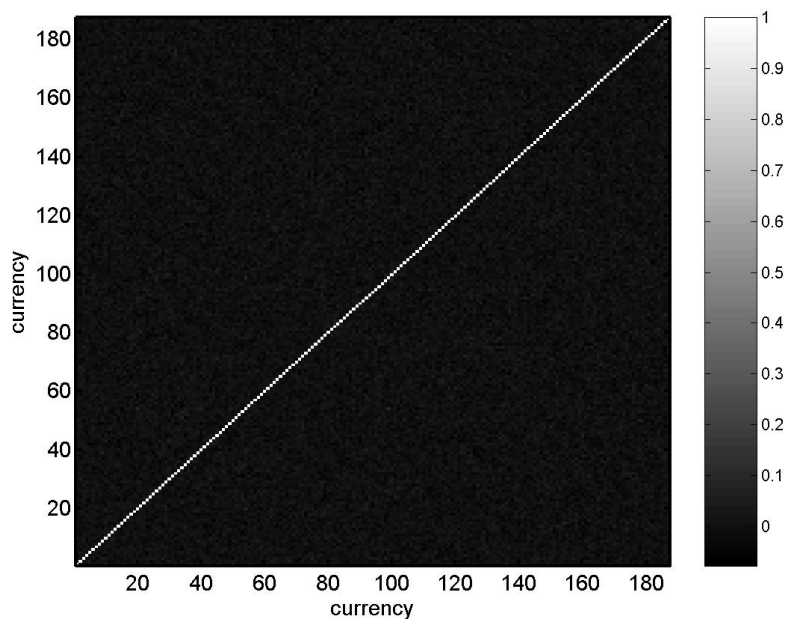


Рис. 5. Поле кореляцій перемішаної матриці

Дослідимо статистичні властивості матриці C шляхом порівняння із властивостями випадкової матриці.

Знайдемо розподіл ймовірності елементів матриці C . Для цього виконаємо **Анализ ряда**→**Распределение вероятности** і у вікні, що відкриється, виберемо **Количество интервалов** рівне 50 та натиснемо кнопку **Обработка**. У області графіка повинен з'явитись набір точок, що відповідає щільності ймовірності розподілу значень матриці крос-кореляцій (рис. 4).

Закриємо вікно, натиснувши кнопку закриття (на заголовку вікна кнопка з позначкою \times). У основному вікні програми у полі **Открытые ряды** з'явилося два ряди: **PDens X** (значення абсцис точок графіка розподілу ймовірності) та **PDens Y** (значення ординат цих точок). Даний графік можна переглянути, вибравши один із рядів **PDens X** чи **PDens Y** та натиснувши кнопку **Отобразить график** (закриття вікна відображення графіка – по натисненні на кнопку **Закреть окно**).

Для порівняння отримання розподілу ймовірності з випадковою матрицею утворимо випадкову матрицю, перемішавши елементи початкової матриці, і таким чином порушивши усі зв'язки (пам'ять), що існували(а) на ринку. Для цього в полі **Открытые ряды** виберемо початкову матрицю **Матрица** і виконаємо пункт меню **RMT**→**Перемешать матрицу**, після чого для перемішаної матриці знайдемо так, як описано вище, матрицю крос-кореляцій та розподіл елементів цієї матриці.

Порівняємо розподіл ймовірності для початкової матриці та перемішаної. Виберемо у полі **Открытые ряды** ряд **PDens X** для першої матриці та натиснемо кнопку **Отобразить график**. У вікні **PlotFigure** виберемо другий ряд **PDens X** (для перемішаної матриці) та натиснемо кнопку **Добавить**

графік. У вікні *Figure No. 1* отримаємо зображення двох графіків, накладених один на інший (рис. 4).

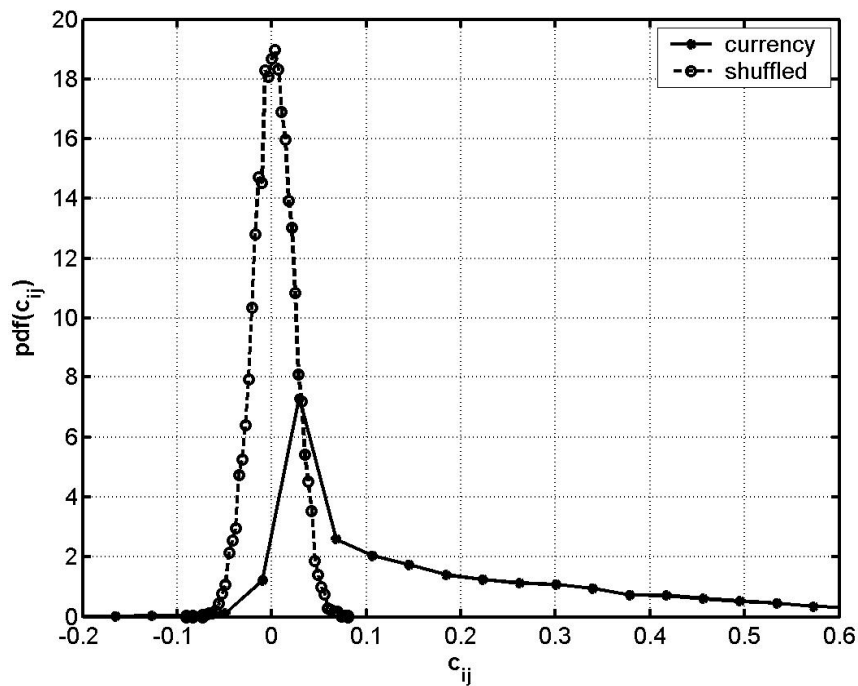


Рис. 4. Розподіл ймовірності значень матриць крос-кореляцій вихідної і перемішаної матриць

Як видно із рисунка розподіл ймовірності значень матриці крос-кореляцій вихідного ряду зміщений далеко вправо порівняно з розподілом для перемішаної матриці, що свідчить про наявність кореляцій (а отже, і тісних зв'язків) для світового валютного ринку. Отже, шляхом досліджень властивостей матриці крос-кореляцій для початкової бази можна отримати значущу інформацію про цей ринок та його складові.

Знайдемо розподіл власних значень матриці крос-кореляцій та проведемо роботу з ними.

Для знаходження найбільших значень виберемо матрицю крос-кореляцій початкової бази (перше входження *КроссКор* у полі *Открытые ряды*) та виконаємо *RMT*→*Найти собственные значения*. У вікні з'явиться ряд *СобстЗнч* (він активний). Для дослідження власних значень виберемо пункт (при виділеному *СобстЗнч*) *RMT*→*Работа с собст. знач*, після чого відкриється вікно *EigenValuesFigure* (рис. 5).

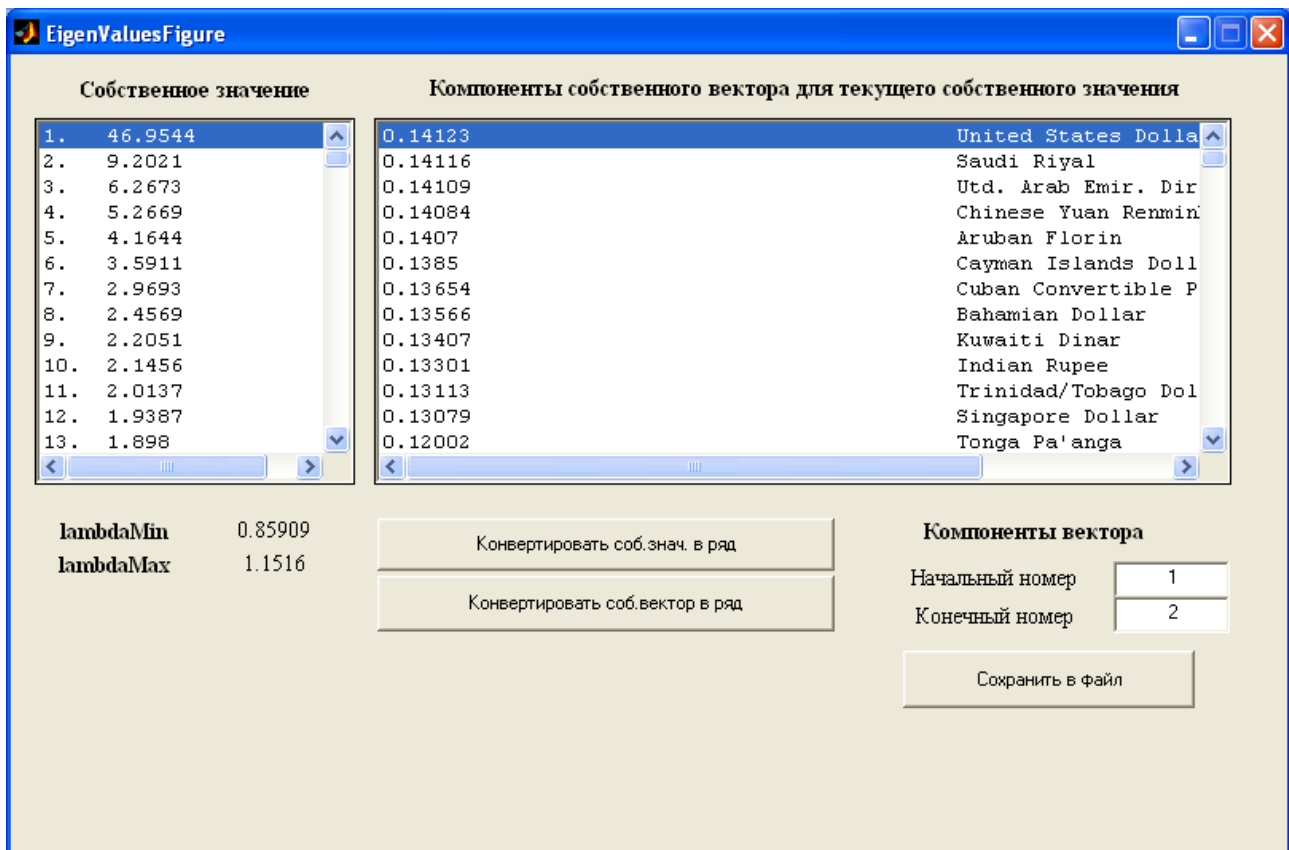


Рис. 5. Вікно для роботи із власними значеннями. При виборі певного значення в полі *Собственное значение* у полі справа відобразатимуться компоненти відповідного власного вектора

Як можна побачити, існує найбільше власне значення, що суттєво більше за інші. Компоненти власного вектора показують, які валюти найбільше впливають на ринок загалом (для даного прикладу, це, перш за все, американський долар. Друге та декілька наступних власних значень вказують на кластери валют, які найбільш пов'язані між собою (група європейських, азійських та ін. валют).

Таким чином, за допомогою статистики власних значень та власних векторів можна робити висновок про взаємну організацію на ринку та вплив загальної сукупності на окремі об'єкти ринку і навпаки.

Збережемо власні значення у вигляді окремого ряду, натиснувши **Конвертировать соб. знач. в ряд** та закриємо вікно. У полі **Открытые ряды** з'явився новий ряд **СобсЗнач**. Його відмінність від **СобстЗнч** в тому, що він містить лише один ряд – власних значень, в той час як **СобстЗнч** містить стільки рядів, скільки і валют або власних значень – у кожному ряді за відповідним власним значенням слідує компоненти власного вектора.

Порівняємо розподіл власних значень із розподілом $P_{rm}(\lambda)$.

Знайдемо розподіл власних значень. Виділимо ряд **СобсЗнач** та виберемо **Анализ ряда** → **Распределение вероятности** і побудуємо розподіл. Потім виберемо початкову базу **Матрица** та виконаємо **RMT** → **Построить Prm**.

Після цього побудуємо, наклавши один на інший, останні отримані два графіки. Вийде подібне до зображеного на рис. 6.

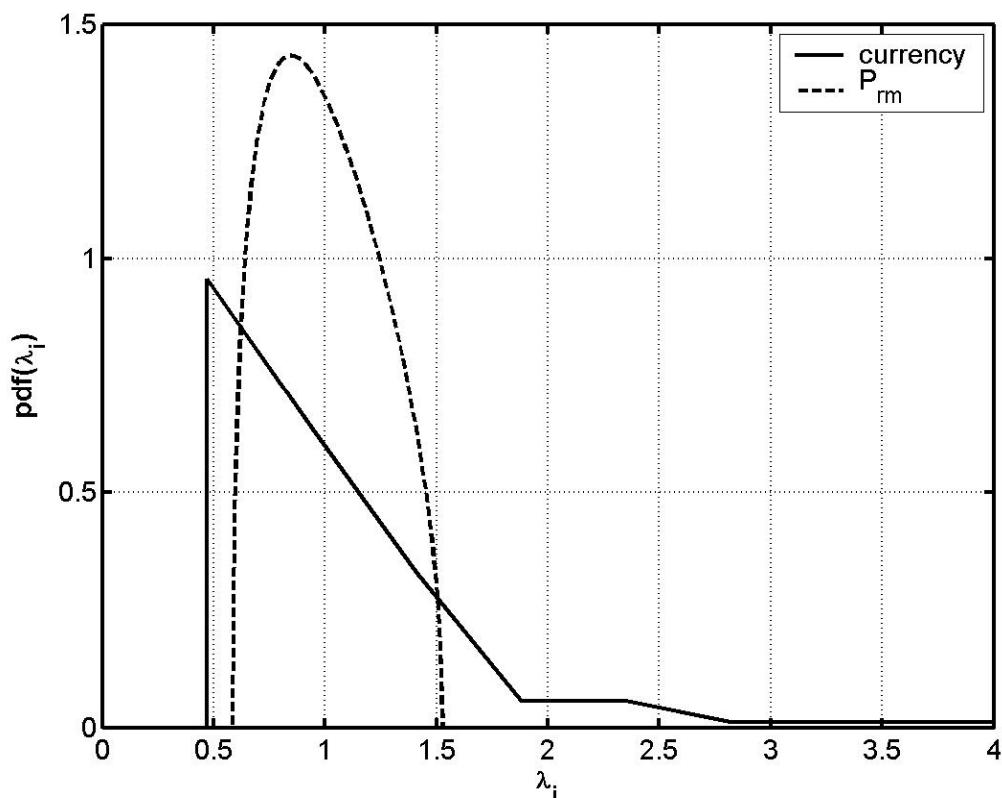


Рис. 6. Порівняння розподілу власних значень матриці крос-кореляцій та графіка функції P_{rm} . На графіку добре видно існування значної частини, що виходить справа за межі P_{rm} , та частини зліва. Це свідчить про наявність у матриці крос-кореляцій певної інформації, присутньої на ринку, про співіснування об'єктів ринку. Найчастіше досліджуються значення, що виходять справа за межі розподілу P_{rm}

Знайдемо обернене відношення участі для матриці власних значень та векторів матриці крос-кореляцій початкової та матриці крос-кореляцій випадкової матриць.

Для обрахунку ОВУ початкової матриці виберемо об'єкт *СобстЗнч*, розрахований для матриці крос-кореляцій початкової матриці та виконаємо $RMT \rightarrow \text{Inverse participation ratio}$. У кінці списку з'явиться два ряди *Ipr X* та *Ipr Y*. Для знаходження ОВУ перемішаної матриці необхідно для неї розрахувати власні значення та вектори і потім аналогічно знайти значення ОВУ. Відобразивши обидва отримані графіки разом можемо бачити подібне до поданого на рис. 7. Як видно з рисунка, дані відображено у подвійному логарифмічному масштабі (що часто використовується в дослідженнях). Для встановлення цього масштабу необхідно на панелі *PlotFigure*, де вибираються параметри відображення графіків та графіки для відображення, активізувати поля *LOG X* та *LOG Y* (активізація відбувається натисненням кнопки мишки при наведенні курсору мишки на поле), рис. 8.

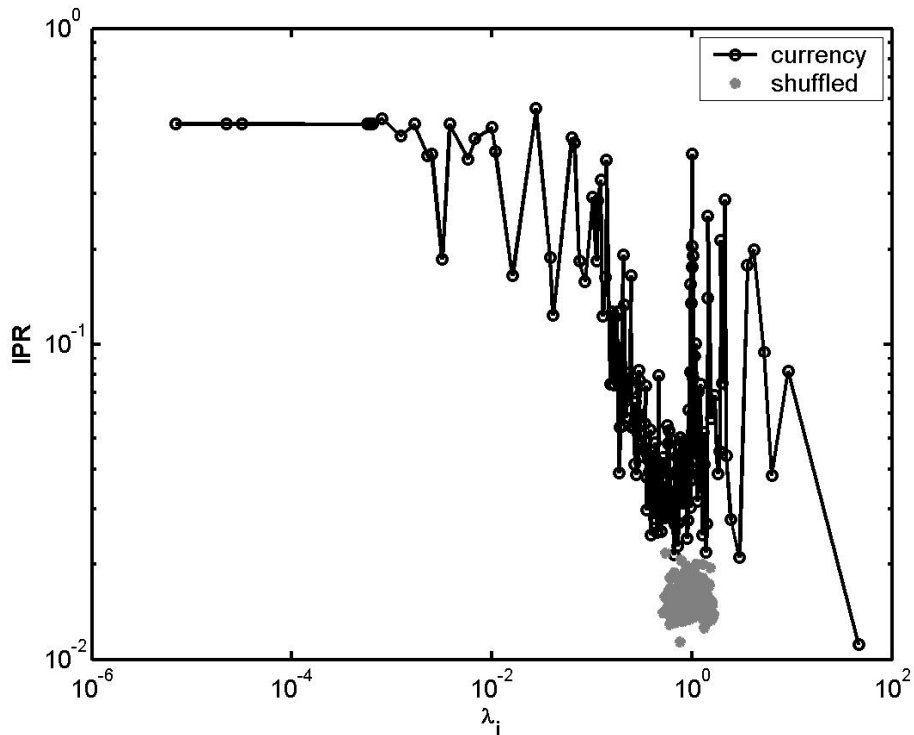


Рис. 7. Графіки ОВУ для вихідного та перемішаного рядів

З рисунка добре видно, що графік ОВУ для перемішаного ряду добре локалізований, в той час як ОВУ для вихідного ряду дещо розтягнутий вздовж осі абсцис. Це свідчить про наявність інформації стосовно частки вкладень кожної валюти (кожного досліджуваного об'єкта) у ринок в матриці крос-кореляцій. Про розмір вкладення можна говорити, аналізуючи саме власні вектори найбільших значень, що виходять за межі графіка P_{rm} .

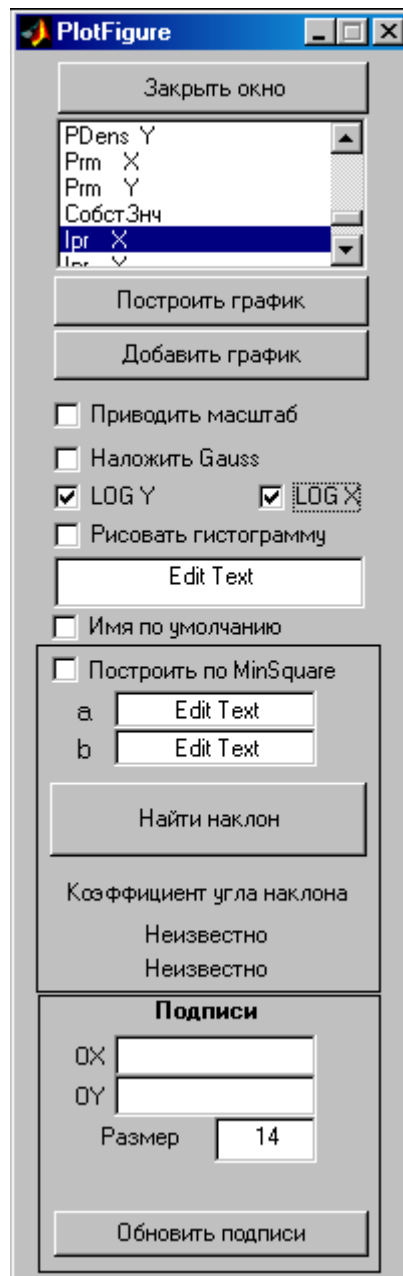


Рис. 8. Активовані параметри *LOG Y* та *LOG X*.

Висновок.

Таким чином, при наявності сукупності часових рядів, що є даними діяльності економічних об'єктів однієї області, можна провести дослідження стосовно структури вказаної області та взаємодії об'єктів всередині неї. Дослідження проводяться на основі теорії випадкових матриць, що дозволяє отримувати інформацію шляхом аналізу матриці крос-кореляцій, побудованої для сукупної бази економічних об'єктів.

Завдання для самостійної роботи

Виберіть в папці **Бази** відповідну базу даних, проведіть дослідження за допомогою теорії випадкових матриць. Результати-звіт представте у вигляді текстового файлу.

Контрольні питання

1. Поясніть основну ідею теорії випадкових матриць.
2. Про що свідчить відмінність кореляційних і спектральних властивостей матриці даних і випадкової ?
3. Дослідіть, як змінюється розподіл компонентів власного вектора у випадках: а) $\lambda_- < \lambda < \lambda_+$; б) $\lambda > \lambda_+$; в) $\lambda < \lambda_-$. Інтерпретуйте результати.
4. Порівняйте кольорову карту поля взаємних кореляцій випадкової матриці і заданої. Зробіть висновки.
5. Відслідкуйте компоненти власних векторів, які відповідають 5-7 найбільшим власним значенням. Дослідіть, які компанії і з яких секторів входять в кластери, що формуються компонентами власних векторів.

Література:

1. Plerou V., Gopikrishnan P., Rosenow B., Amaral L.A.N., Guhr T., Stanley H.E. Random matrix approach to cross correlations in financial data // Phys.Rev.E – v.65, N 12, 2002.- P.356-373
2. Mehta M.L. Random Matrices (Academic Press, Boston, 1991

Індивідуальна робота № 7

Тема. Кластерний аналіз

Мета. Навчитися використовувати методи теорії випадкових матриць і теорії графів для отримання характеристик внутрішньої структури економічної системи

1. Побудова матриці відстаней на основі матриці крос-кореляцій
2. Побудова мінімального остівного дерева
3. Побудова ієрархічного дерева
4. Порівняння одержаних результатів з кластерною структурою, отриманою методами теорії випадкових матриць

Теоретичні відомості

Останні роки група фізиків почала досліджувати фінансові та економічні системи, використовуючи інструменти та методологію, специфічні для фізичних наук. Такий вибір був мотивований кількома причинами. Перш за все, деякі фінансові та економічні системи є гарними екземплярами *складних систем*. По-друге, починаючи із 80-х років минулого століття велика кількість фінансових та економічних даних була записана у комп'ютерній формі і є легкодоступною для аналізу та тестування. Такі дані відбивають детальну інформацію про розглядувані процеси, і у випадку деяких бірж, містять інформацію про елементарні взаємодії, що проводяться на біржі (існують бази даних торгів та квот, де кожна транзакція, що виконується на біржі, документується). По-третє, аналіз та моделювання економічних і фінансових систем має базові теоретичні та прикладні аспекти. Базові аспекти стосуються моделювання систем, скомпонованих із кількох підмодулів, взаємодія яких зазвичай описується нелінійними моделями. Практичні аспекти стосуються жорсткого визначення та кращого виявлення присутнього в системі ризику у економічній діяльності.

На поточний момент опубліковано досить велику кількість робіт, що стосуються розглядуваного матеріалу, у математичних, економічних та фізичних журналах. Найбільш часто у статтях розглядається кілька питань:

- (i) вивчення статистичних властивостей зміни ціни акцій;
- (ii) новітній підхід до проблеми ціни опціонів;
- (iii) дослідження моделей фінансових ринків;
- (iv) порівняння між динамікою цін на фінансових ринках та швидкість зміни динаміки.

Приклади, наведені вище, не вичерпують весь спектр дослідницьких проблем, і є інші питання, які вимагають дослідження.

У даній лабораторній роботі буде розглянуто, як саме визначити наявність економічної інформації стосовно взаємодії різних рівнозначних

економічних об'єктів (ринків, акцій тощо), що міститься у часових рядах цін акцій.

Гіпотеза ефективного ринку

У основній стохастичній моделі динаміки ціни акції приймається, що натуральний логарифм ціни є процесом, подібним до процесу дифузії. Емпіричні дослідження визначення степеня зміни кореляції під час розвитку системи показують, що часова кореляція слабка або взагалі відсутня на часових інтервалах, що варіюються від одного торгового дня до кількох років. Відсутність довгочасової пам'яті у функції парної автокореляції логарифмів зміни цін відповідає гіпотезі про ефективність економічного ринку. На ефективних ринках уся інформація (минула, поточна та передбачення на майбутнє) доступна і негайно відбивається у ціні товарів.

Моделювання флуктуацій цінкових часових рядів у термінах випадкових процесів може бути на перший погляд парадоксальним, оскільки такий важливий індикатор як ціна товару є несуттєвим для випадкового процесу.

Розв'язок зазначеного парадоксу полягає в тому, що часовий ряд, багатий інформацією, є, насправді, незалежним від випадкових процесів. Таке твердження – один із висновків теорії складності. Внаслідок цього алгоритм дозволяє нам бути послідовними, одночасно заявляючи, що (1) часові цінні ряди є динамічними рядами, що містять досить великі обсяги інформації і (2) вони добре моделюються в термінах випадкових процесів.

Отримання інформації з часової послідовності

Яким же чином можна отримати інформацію з часової послідовності цін товарів?

Основною ідеєю є дослідження кількох часових послідовностей одночасно; тобто, дослідження зміни коефіцієнта кореляції з плином часу прибутковостей пар акцій i та j

$$Y_i = \ln P_i(t) - \ln P_i(t-1),$$

де i та j є порядковими номерами акцій, а $P_i(t)$ є ціною закриття акції i в день t . Обчислення коефіцієнтів кореляції проводиться за наступною формулою

$$\rho_{ij} = \frac{\langle Y_i Y_j \rangle - \langle Y_i \rangle \langle Y_j \rangle}{\sqrt{(\langle Y_i^2 \rangle - \langle Y_i \rangle^2)(\langle Y_j^2 \rangle - \langle Y_j \rangle^2)}}. \quad (1)$$

Кутові дужки $\langle \dots \rangle$ – це середнє значення, розраховане для усіх днів розглядуваного часового періоду. ρ_{ij} визначає кореляцію, що спостерігається

між логарифмом ціни акції i та логарифмом ціни акції j . ρ може змінюватись від -1 до 1 . $\rho = 1$ свідчить про існування повної кореляції між змінними Y_i та Y_j , $\rho = -1$ означає повну антикореляцію між Y_i та Y_j , а 0 спостерігається для некорельованих пар акцій.

Портфель із n акцій асоціюється із квадратною матрицею кореляцій розмірності $n \times n$ яка є симетричною, з 1 на головній діагоналі. Обов'язкове число коефіцієнтів кореляції, що повністю описують ринок, рівне $\frac{n(n-1)}{2}$.

Побудова матриці відстаней на основі матриці крос-кореляцій

Для отримання інформації з часових рядів, яку можна інтерпретувати, необхідно спочатку визначити метрику, в межах якої проводитиметься інтерпретація. В якості функції від коефіцієнтів кореляції можна використати узагальнену відстань, експериментальним визначенням якої є

$$d(i, j) = 1 - \rho_{ij}^2. \quad (2)$$

Замість вказаної можна використовувати також дещо видозмінену формулу:

$$d(i, j) = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}. \quad (2')$$

У такому випадку в дослідженнях $d(i, j)$ чисельно задовольняє трьом аксіомам Евклідової метрики:

- (i) $d(i, j) = 0$ якщо і лише якщо $i=j$;
- (ii) $d(i, j) = d(j, i)$;
- (iii) $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$,

і тоді $d(i, j)$ може бути використана в якості Евклідової відстані для всіх практичних задач. Перша аксіома виконується внаслідок того, що $d(i, j) = 0$ лише якщо кореляція повна ($\rho = 1$, що виникає у випадку, коли обидва економічних об'єкти виконують один і той же стохастичний процес). Друга аксіома виконується, оскільки матриця коефіцієнтів крос-кореляцій і, відповідно, матриця відстаней \mathbf{D} є симетричними за означенням. Третя аксіома виконується, оскільки вираз (2') еквівалентний Евклідовій відстані між двома векторами \tilde{Y}_i та \tilde{Y}_j , отриманими із часових рядів Y_i та Y_j , якщо використовувати кожний запис часового ряду як компонент вектора. Отриманий вектор мусить мати одиничну норму, а саме, він має бути отриманий відніманням від кожного запису середнього значення для всього ряду та нормалізацією його стандартним відхиленням.

Тепер, зважаючи на наведені міркування, можна дати практичне визначення метричної відстані між двома акціями певного портфеля. Однак, метрична відстань є недостатньою для однозначного визначення таксономії. Тому поглянемо на більш обмежуючий топологічний простір, який буде однозначно асоційовано з таксономією. Таким обмежуючим топологічним простором є субдомінантний ультраметричний простір, асоційований з матрицею Евклідових відстаней. Ультраметрична відстань визначається трьома аксіомами. Перші дві співпадають з описаними у визначенні вище, тоді як нерівність трикутника, (iii), замінюється більш сильною нерівністю, названою ультраметричною нерівністю

$$d(i, j) \leq \text{Max}\{d(i, k), d(k, j)\}. \quad (3)$$

В просторі елементів, де визначена метрика, завжди можна отримати субдомінантну ультраметрику. Приклад процедури отримання матриці субдомінантних ультраметричних відстаней з матриці Евклідових відстаней можна знайти у [2]. В ультраметричному просторі елементи розміщуються не вздовж однієї лінії, а в ієрархічному дереві. Набір акцій розглядуваного портфеля може інтерпретуватись як абстрактний простір, n елементів якого можуть бути з'єднані графом. У з'єднаному графі із взятими відстанями між усіма точками абстрактного простору мінімальне остівне дерево – МОД (minimal spanning tree – MST) має $n-1$ ребро і найменшу довжину із довжин всіх остівних дерев, виходячи з суми відстаней між двома точками. Структура ієрархічного дерева отримується з матриці ультраметричних відстаней та МОД, асоційованого з нею.

Мінімальне остівне дерево та асоційоване з ним ієрархічне дерево показують існування кластерів будь-яких активів ринків, відомості про які мають велике значення з економічної точки зору. Отримана таксономія дозволяє групувати економічні об'єкти, що є гомогенними у відношенні до економічної активності.

Побудова мінімального остівного та ієрархічного дерев

Розглянемо систему індексів MSCI, яка включає 49 країн, з яких: 23 розвинених (www.msci.com). Для побудови мінімального остівного дерева, асоційованого з Евклідовою відстанню, необхідно виконати наступні дії.

Спочатку усі елементи матриці відстаней D розташовуються у порядку неспадання (кожний наступний більший або рівний попередньому). Наприклад, маємо наступні вісім відстаней:

Spain-Italy	$d=0.61177$
France-Italy	$d=0.64137$
Nedherlands-	$d=0.6462$
France	
Germany-	$d=0.65383$

France	
France-Spain	0.69175
Argentina-	$d=0.73039$
Brazil	
Switzerland-	$d=0.77672$
Italy	
Belgium-	$d=0.80568$
France	
Mexico-	$d=0.8217$
Argentina	

Мінімальне остівне дерево послідовно будується шляхом з'єднання усіх елементів у граф, виходячи із мінімальних відстаней між країнами на ринку.

Почнемо із пари елементів з найменшою відстанню. У даному випадку це дві країни: **Spain** та **Italy** ($d=0.61177$). Наступною найменшою за порядком відстанню є відстань між елементами **France** та **Italy** ($d=0.64137$), тому додаємо до МОД елемент **France** та з'єднуємо його з елементом **Italy**. Таким чином, отримане дерево вже буде мати вигляд **France-Italy-Spain**. Наступною парою елементів у відсортованому списку є країни **Nedherlands-France**, включаємо елемент **Nedherlands** до дерева. Аналогічно додаємо країну **Germany**. Наступною парою країн з найменшою відстанню є **France-Spain**, проте обидві країни вже включено в мінімальне остівне дерево, тому для цієї пари нічого не робимо. Аналогічно продовжуємо процедуру, поки всі елементи не будуть включені в дерево.

Таким чином, в результаті перебору усіх відстаней, отримаємо мінімальне остівне дерево, що буде характеризувати взятий ринок, стосовно того, які фірми взаємодіють між собою тісніше, на скільки груп якого характеру розділений ринок і т.д.

Хід роботи

У середовищі MatLab 6.5 завантажимо пакет для дослідження структури ринку, заданого часовими рядами його складових, змінивши шлях до програми та набравши у командному рядку **demo2** та натиснувши **Enter**. Внаслідок цього відкриється вікно програми (рис. 1).



Рис. 1.

На рисунку видно три частини області користувача:

- меню, з якого викликаються дії, що необхідно виконати над досліджуваним об'єктом;
- область, де відображуються мінімальне та ієрархічне дерева системи;
- область, де задається часовий проміжок, за яким на екрані робляться всі обчислення.

Для того, щоб розпочати роботу з програмою, необхідно вибрати та завантажити базу. Для цього необхідно скористатися пунктом меню **Bases – Load** (бази – завантажити). За допомогою вікна для відкриття файлів, виберіть базу (наприклад, базу MSCI: в папці Bases вказати файл msci.txt).

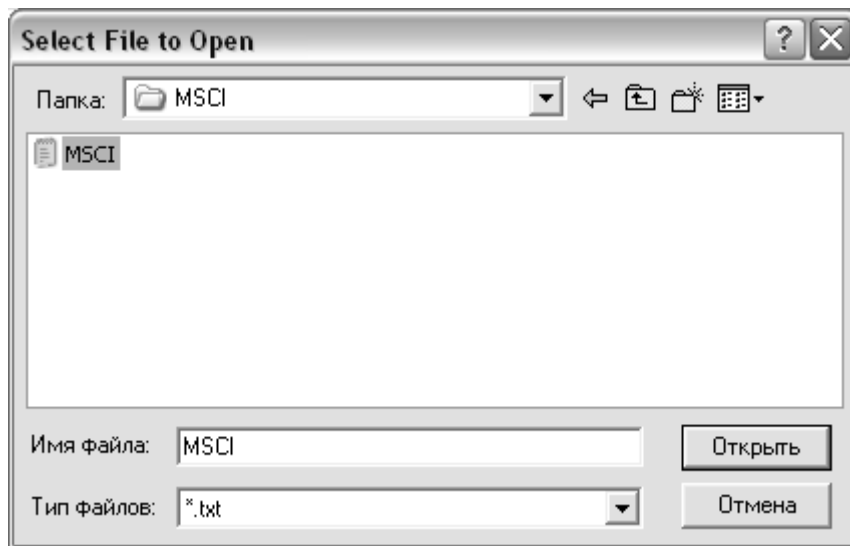


Рис. 2.

Після цього Вам необхідно буде вказати проміжок часу, по якому Вам потрібно побудувати дерева. Зразу після відкриття, з'явиться вікно, де Ви повинні вказати номер першого дня та довжину проміжку. Перший день може бути не менший 2-го. Наприклад, Вас цікавить проміжок від 2 до 204. Для цього введіть наступне:

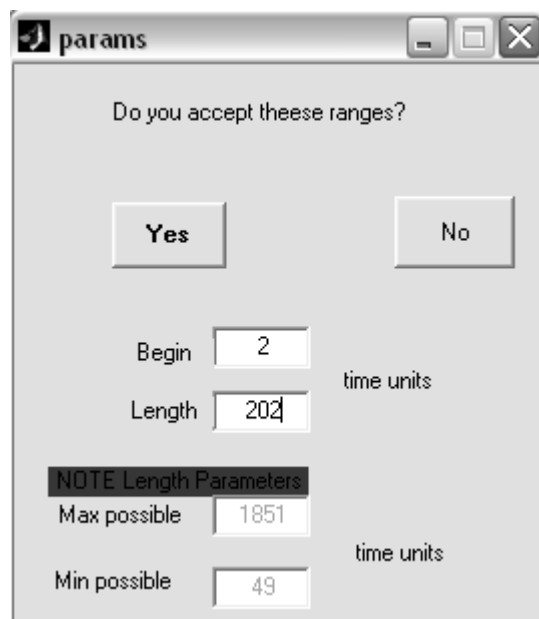


Рис. 3

Після введення даних, на екрані з'явиться 2 графи: граф мінімального остівного дерева та граф середнього дерева (рис. 4)

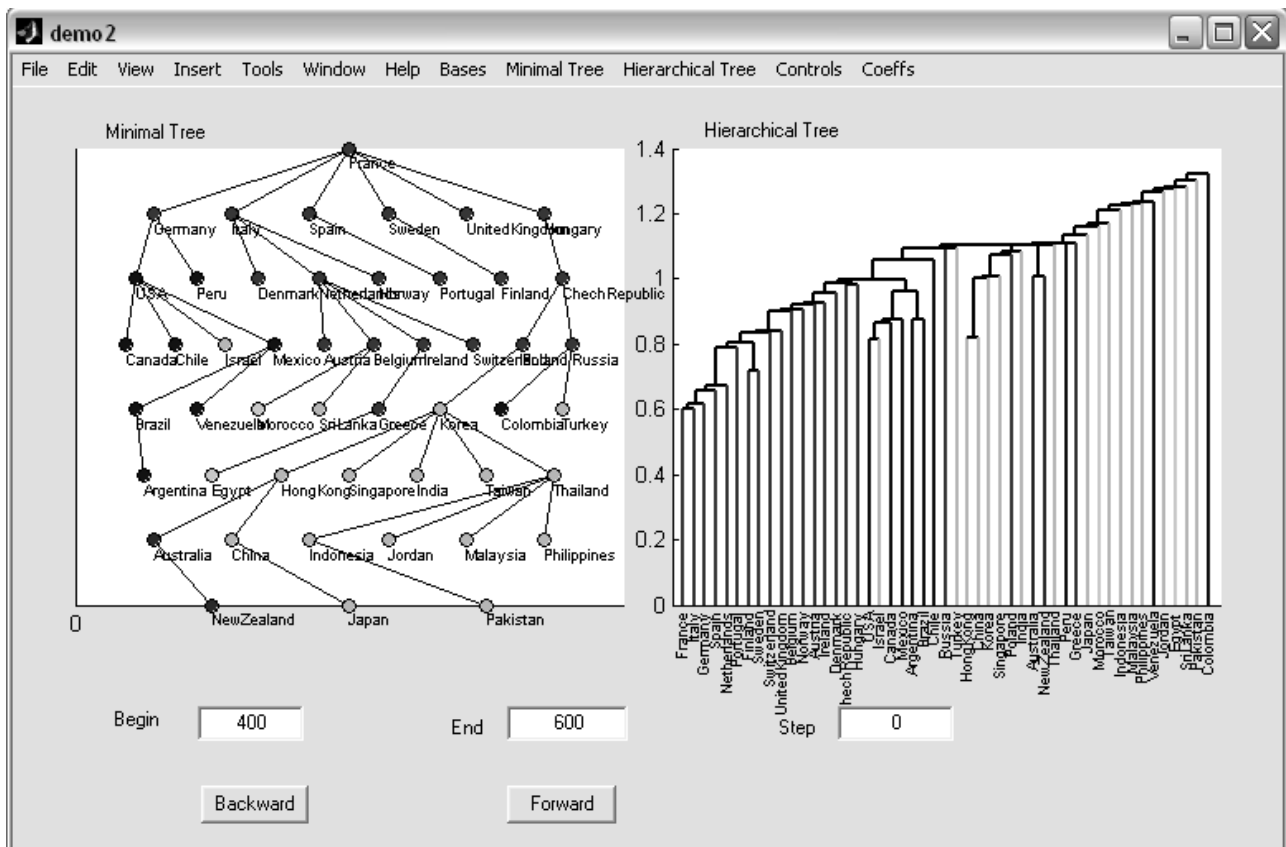


Рис. 4.

Внизу вікна Ви побачите 3 поля для введення та 2 кнопки. Перші два поля: **Begin** (початок) та **End** (кінець) вказують вибраний проміжок часового ряду, в третє поле **Step** необхідно ввести крок, з яким проміжок будемо рухати вперед (кнопка **Forward**) або назад (кнопка **Backward**). Введіть крок, рівний 10 дням та натискайте кнопки **Forward** та **Backward**. Спостерігайте за зміною виду дерев.

В програмі є можливість прибрати з екрану зображення одного із дерев, модифікувати параметри зображення дерев, розміщення вузлів на мінімальному дереві, змінювати розмір шрифту підписів. Ці операції виконуються за допомогою пунктів меню **Minimal tree** для мінімального дерева та **Hierarchical tree** відповідно для ієрархічного дерева.

Для переміщення вершини графу мінімального дерева, натисніть на вершині лівою кнопкою. При цьому вершина виділиться (буде позначена трикутничком). Далі натисніть лівою кнопкою миші на те місце, куди необхідно перемістити вершину. Вершина буде переміщена.

Для того, щоб прибрати з екрану одне дерево, треба в меню відповідного дерева (**Minimal tree** або **Hierarchical tree**) зняти позначку **Plot** (малювати).

Для зміни розміру шрифту підписів та ширини ребер графу, в меню відповідного дерева скористайтеся опцією **Edit tree** (редагувати дерево). З'явиться вікно параметрів дерева (рис. 5). У вікні, яке з'явиться, задайте нові параметри: розмір шрифту (**Font Size**) та ширина ліній (**Line Width**).

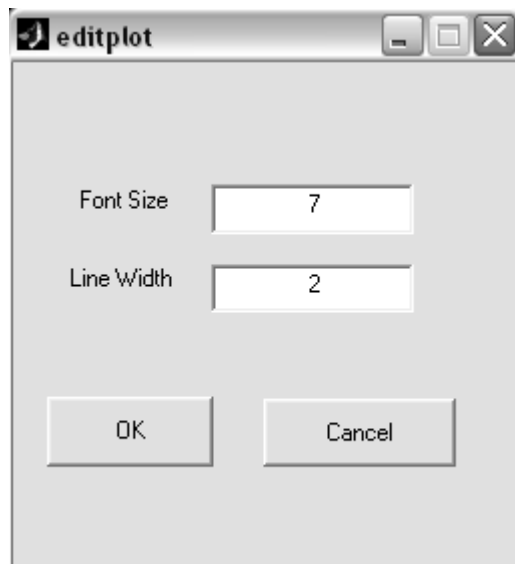


Рис. 5.

Ви повинні зберегти отримані зображення у графічному файлі. Це можна зробити за допомогою стандартного меню **File – Export** (Файл – експортувати). На екрані Ви побачите діалогове вікно збереження (рис. 6).

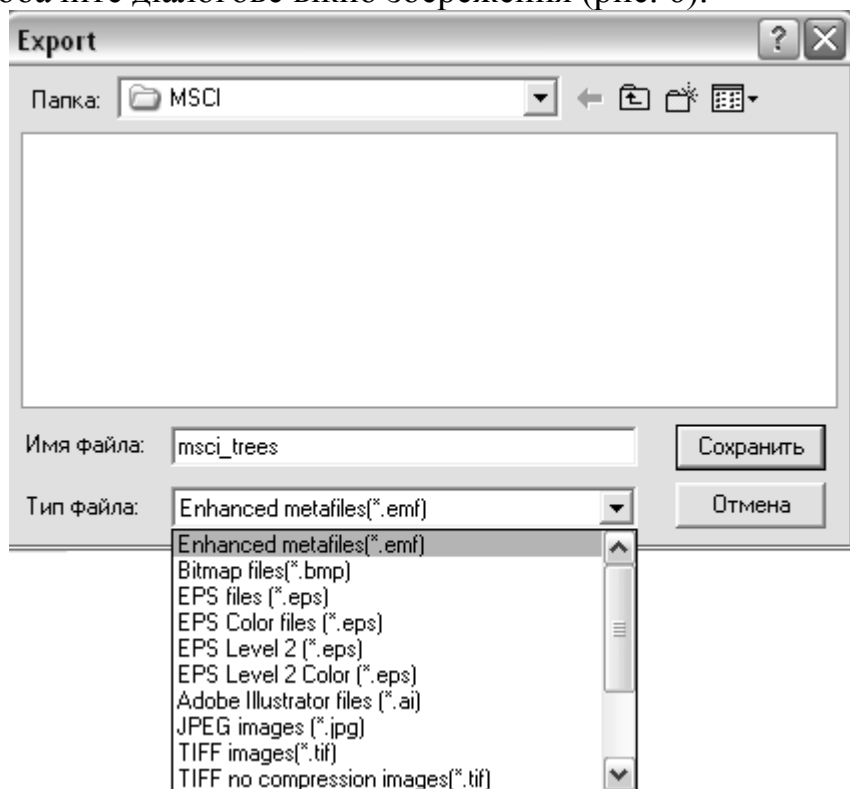



Рис. 6

Вам необхідно буде перейти в папку для збереження малюнків, вказати ім'я та тип графічного файлу.

Для того, щоб дізнатися, якому дню відповідає певний номер в базі, необхідно переглянути файл дат, який має розширення .dt та знаходиться в тій же папці, в якій і сама база. Наприклад, у випадку бази MSCІ цей файл називається msci.dt. Найзручніше переглядати його за допомогою вбудованого редактору Matlab. Для цього перейдіть до вікна Matlab. Виберіть опції меню

File - Open або скористайтесь кнопкою на панелі Open  (відкрити). За допомогою стандартного діалогового вікна виберіть папку, де зберігається Ваша база. В полі вибору типу файлів виберіть **All files (*.*)** (всі файли) та вкажіть на відповідний файл dt. Ви побачите вміст файлу дат бази (рис. 7). У кожному рядку файлу записана дата відповідного дня.

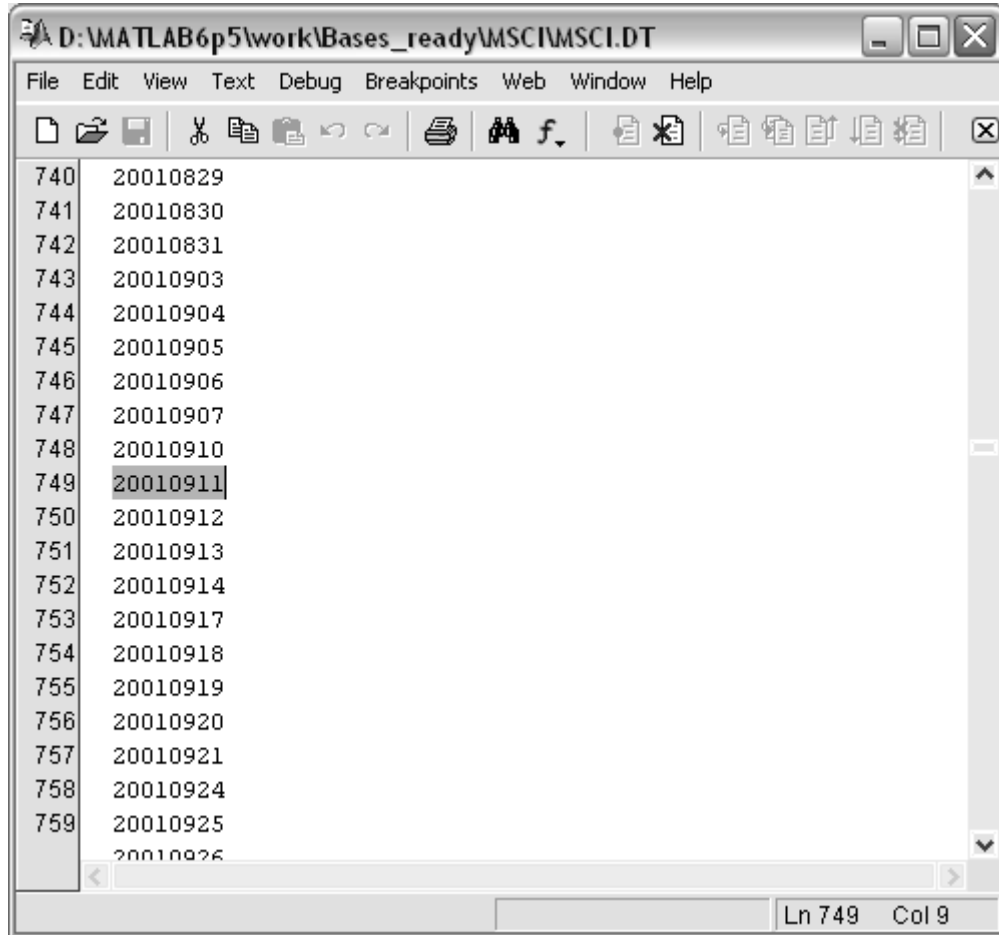


Рис. 7.

Вбудований редактор вказує номера кожного рядка, це допоможе швидко знайти номер дня потрібної дати. Наприклад, 11 вересня 2001 року відповідає 749-й день.

При дослідженні кризових явищ за допомогою теорії графів, ми будемо переміщувати вибраний відрізок та спостерігати зміни зображень графів. У випадку, коли кінець вибраного проміжку дійде до дня кризи на ринку, який досліджується, Ви помітите зміни в зв'язках між елементами системи. Наприклад, при дослідженні індексу міжнародної інвестиційної привабливості MSCI, будемо спостерігати за Сполученими штатами на мінімальному та ієрархічному дереві.

Побудуємо дерева, вибравши проміжок 400-600 (рис.8). Будемо наближатися з довільним кроком до 749-го дня: 11 вересня 2001 року.

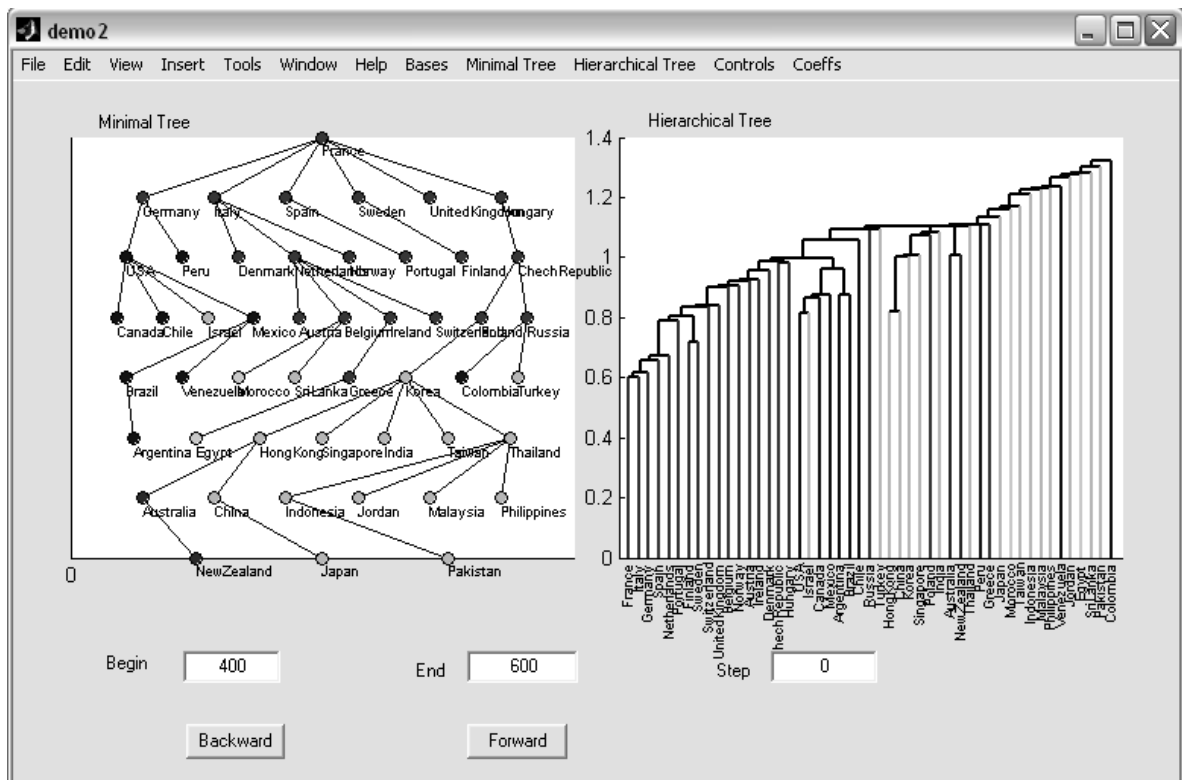


Рис. 8.

Зверніть увагу на американський кластер (зображений синім кольором). Сполучені штати, Канада та Мексика зберігають зв'язок на дереві до того часу, доки кінець вибраного проміжку не досягне 749-го дня. На малюнку зображена ситуація при виборі проміжку 556-756. На рис. 9 ми бачимо, що Сполучені штати втрачають зв'язки з іншими країнами американського кластеру, крім Канади.

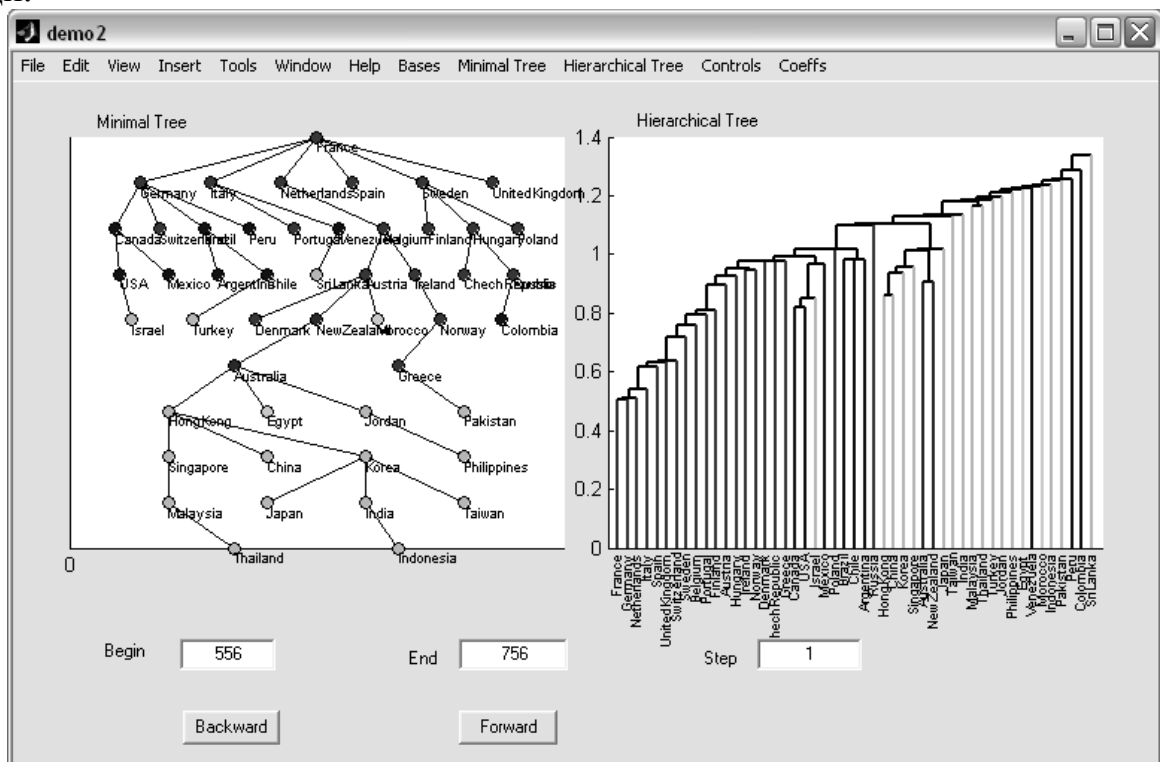


Рис. 9.

Таким чином можна досліджувати структуру і динаміку складних систем, відслідковувати їх зміни з часом, аналізувати вплив критичних, кризових і шоккових явищ.

Завдання для самостійної роботи

Виберіть в папці Bases відповідну базу даних, проведіть дослідження
- кластерної структури, її динаміки, поясніть і інтерпретуйте результати;
- порівняйте одержані результати з кластерною структурою, отриманою методами теорії випадкових матриць

Результати-звіт представте у вигляді текстового файлу.

Контрольні питання

1. Поясніть основну ідею кластерного аналізу
2. Про що свідчить формування відповідних кластерів ?
3. Що можна сказати відносно поведінки кластерної структури в умовах кризи?
4. Як проявляються процеси глобалізації на кластерній структурі відповідних баз активів?

Список використаної літератури

1. Mantegna R.N. Information and hierarchical structure in financial markets // Computer Physics Communications 121-122 (1999) 153-156.
2. R. Rammal, G. Toulouse, M.A. Virasoro, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 765.
3. D. J. Watts and Strogatz, Nature 393, 440 (1998).
4. P. Erdos, A. Rényi, Bull. Inst. Int. Stat. 38, 343 (1961).

Індивідуальна робота № 8

Тема. Дослідження динаміки складних систем за характеристиками кластерного дерева

Мета. Навчитися використовувати коефіцієнт кластеризації, діаметр графу, середню довжину шляху на графі для аналізу економічних систем

1. Коефіцієнт кластеризації
2. Середня довжина шляху на графі
3. Діаметр графа
4. Максимальна степінь вершин графа

Теоретичні відомості

Аналіз структури складної системи по її графам має суб'єктивний характер, оскільки важко визначити зміни в усій системі, розглядаючи її граф. Необхідно оперувати певними числовими характеристиками системи, по зміні яких можна робити висновок про стан системи. Такими характеристиками можуть виступати коефіцієнт кластеризації, діаметр графа, середня довжина шляху на графі. Розглянемо докладніше ці коефіцієнти та спосіб їх обчислення.

Коефіцієнт кластеризації (транзитивності) графа

В суспільстві існують такі групи знайомих, коли кожен знає всіх інших в групі. Такі групи в теорії графів називають кластерами. Коефіцієнт кластеризації чисельно характеризує це явище в графі.

Існують різні способи визначення коефіцієнту кластеризації. Розглянемо деякі з них.

1) Візьмемо деяку вершину з графу та будемо обчислювати коефіцієнт кластеризації цієї вершини. До цієї вершини безпосередньо приєднані k_i вершин. Між цими вузлами існує E_i ребер. Максимально можлива кількість ребер, при якій ці вершини утворюють кластер, дорівнює $k_i(k_i+1)/2$.

Коефіцієнт кластеризації вершини є відношення між числом E_i ребер, які фактично існують між даними вершинами, до кількості ребер, при якому б ці вершини утворили кластер, дає величину коефіцієнта кластеризації вершини:

$$C_i = \frac{E_i}{E_{\max}} = \frac{2E_i}{k_i(k_i + 1)}$$

Розглянемо приклад графу.

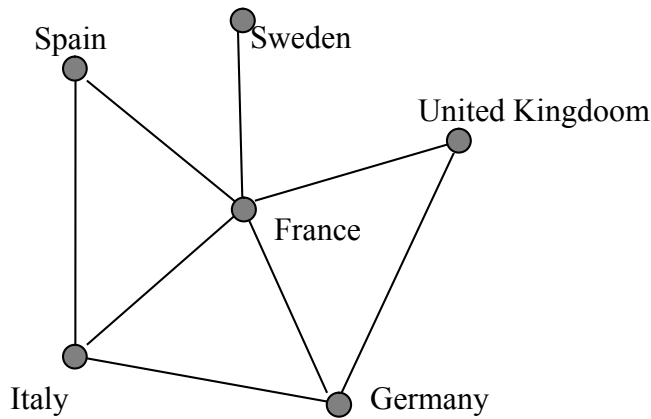


Рис. 1.

Будемо обчислювати коефіцієнт кластеризації елемента **France**. Безпосередньо з ним з'єднано 5 країн. Між 6 країнами максимально можлива кількість зв'язків буде $E_{\max}=6 \cdot 5 / 2 = 15$. Реально існує 8 зв'язків. Коефіцієнт кластеризації вузла **France** обчислюємо за формулою:

$$C_i = \frac{E_i}{E_{\max}} = \frac{2E_i}{k_i(k_i + 1)} = \frac{2 \cdot 8}{6 \cdot 5} \approx 0,53.$$

Коефіцієнт кластеризації графу обчислюється як середнє арифметичне коефіцієнтів кластеризації всіх вершин.

2) Коефіцієнт транзитивності. Альтернативний до коефіцієнта кластеризації і обчислюється як відношення кількості трикутників (3 вершини, з'єднані одна з одною) до кількості з'єднаних пар ребер.

Середня довжина шляху на графі

Між кожною парою елементів системи на довільному графі можливі різні шляхи. Наприклад, розглянемо приклад з попередньої роботи. Нехай дано підрахунки відстаней між трьома елементами системи у вигляді матриці відстаней:

	1Spain	2Italy	3France
Spain	0	0.31	0.69
Italy	0.31	0	0.34
France	0.69	0.34	0

Нам необхідно знайти матрицю мінімальних відстаней між кожними двома елементами. Зверніть увагу на те, що відстань від елемента France до елемента Spain дорівнює 0.69, а якщо розглянути шлях France-Italy-Spain, то відстань цього шляху буде дорівнювати сумі відстаней France-Italy та Italy-Spain. В нашому випадку це $0,31 + 0,34 = 0,65$, що є менше, ніж безпосередньо відстань France-Spain. З цих даних ми можемо утворити матрицю найкоротших (оптимальних) відстаней в графі.

	1Spain	2Italy	3France
Spain	0	0.31	0.65
Italy	0.31	0	0.34
France	0.65	0.34	0

Серед цих шляхів знаходиться середнє арифметичне, яке і буде наступним показником, за яким ми будемо слідкувати.

Діаметр графа

Діаметр графа – це найдовша відстань у графі. Її будемо знаходити з матриці оптимальних шляхів, приклад знаходження якої був вище розглянутий.

В нашому випадку діаметром графа буде відстань 0,65.

Максимальна степінь вершин графа

Степенню вершини графа називається кількість ребер, які безпосередньо виходять із даної вершини. Розглянемо приклад дерева (рис. 2)

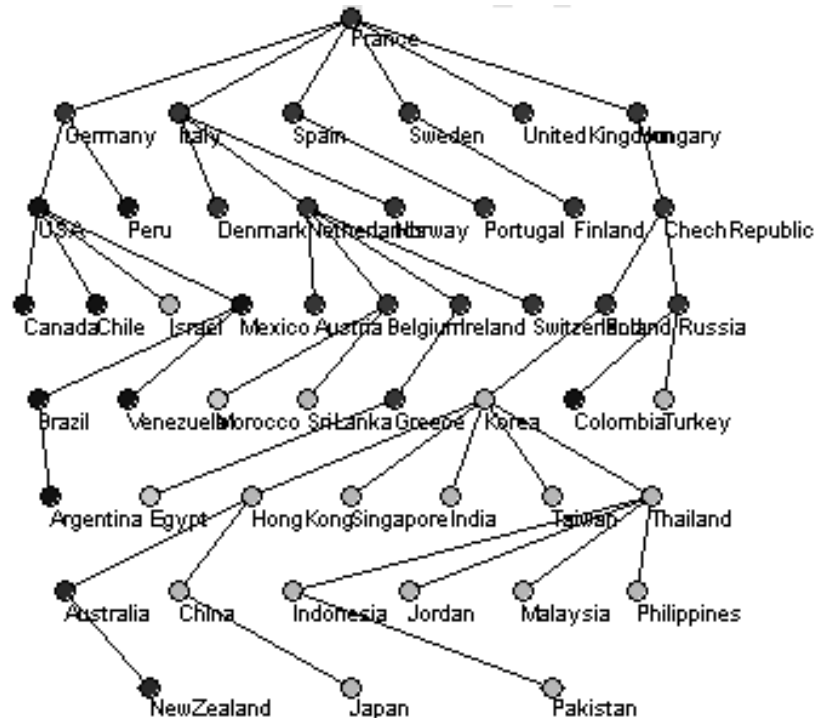


Рис. 2.

Найвищий на графі елемент – France має степінь 6, тому що безпосередньо з'єднаний з 6-ма країнами. Елемент Russia має степінь 3 і т. д. Найвища степінь у елемента France. Тому показником параметру «*Найвища степінь у графі*» буде число 6.

Хід роботи

Аналогічно до лабораторної роботи № 1, у середовищі MatLab 6.5 завантажимо пакет для дослідження структури ринку, змінивши шлях до програми, набравши у командному рядку **demo2** та натиснувши **Enter**. Завантажуємо потрібну базу індексів та будуємо дерева на довільному проміжку.

Для обчислення коефіцієнтів складної системи необхідно скористатися меню **Coeffs** (коефіцієнти). Для перерахування всіх коефіцієнтів необхідно викликати опцію меню **Coeffs–All**. Після цього на екрані з'явиться вікно задання параметрів підрахунку (див. рис. 3)

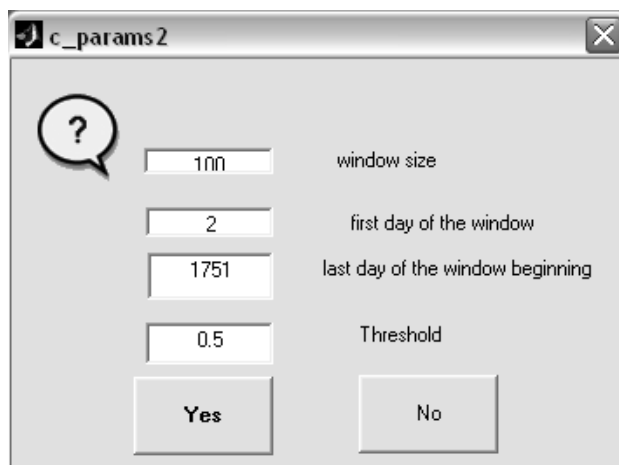


Рис. 3

Для підрахунку необхідно ввести довжину вікна (**Window size**), номер першого (**First day of the window**) та останнього (**Last day of the window beginning**) дня проміжку розрахунків, а також поріг для відкидання слабких зв'язків (**Threshold**).

Нехай, наприклад, ми маємо базу з 1853 днів. Нам потрібно прорахувати проміжок часу від 400-го до 800-го дня вікнами шириною 200 днів (див. рис.4)

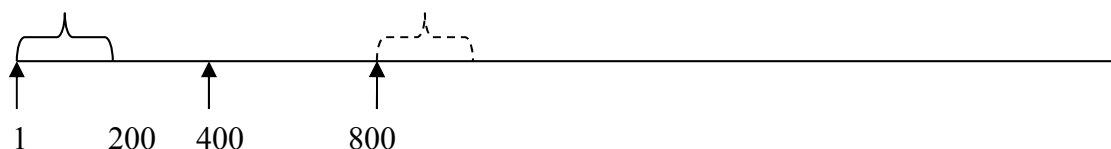


Рис. 4.

Довжина вікна (**Window size**) повинна бути 200, перший день (**First day of the window**) – 2, останній день (**Last day of the window beginning**) – 800. При цьому останній раз вікно буде захоплювати проміжок часу 800-1000.

Для обчислення коефіцієнтів кластеризації, необхідно створити так зване дерево найсильніших зв'язків. При цьому ребрами будуть вважатися ті зв'язки, які сильніші (знаходяться ближче один до одного), ніж встановлений поріг (**Threshold**). Цей поріг Вам доведеться підібрати, якщо встановлений (0,5) не дасть необхідного результату.

Отже, після введення параметрів та натискання кнопки **Yes**, почнеться підрахунок коефіцієнтів. Після підрахунку на екран з'являться вікна з графіками відповідних коефіцієнтів. Ви можете зберегти потрібний графік (опція меню **File-Save** у вікні графіку), або експортувати в графічний файл (опція меню **File-Export** у вікні графіку). Якщо Ви ненароком закрили вікно з потрібним графіком, для його відображення можна скористатися іншими опціями меню **Coeffs**. До речі, після перерахунку коефіцієнтів, старі Віні не зможете відновити старі графіки. Обов'язково збережіть результати Ваших обчислень.

Для прикладу розглянемо динаміку зміни коефіцієнтів під час кризи. На рис. 5. зображено графік коефіцієнту кластеризації для індексу MSCI.

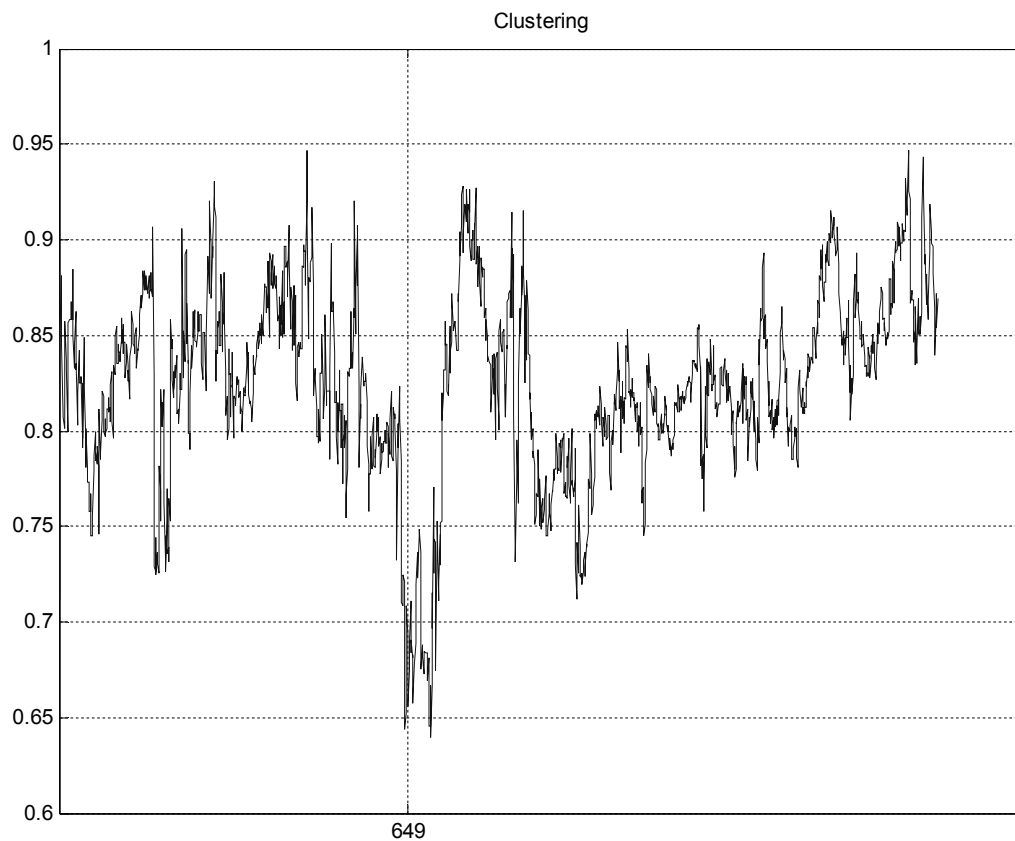


Рис. 5. Коефіцієнт кластеризації

Позначкою 649 вказаний день 11 вересня 2001 року, коли будівля міжнародного торгового центру в Сполучених Штатах була атакована терористами.

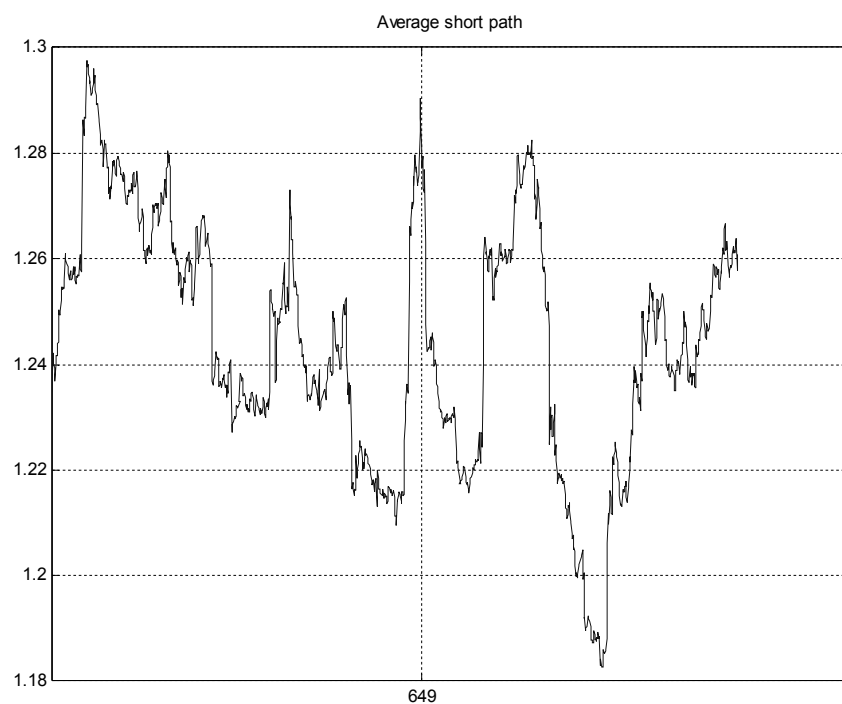


Рис. 6. Середня довжина шляху

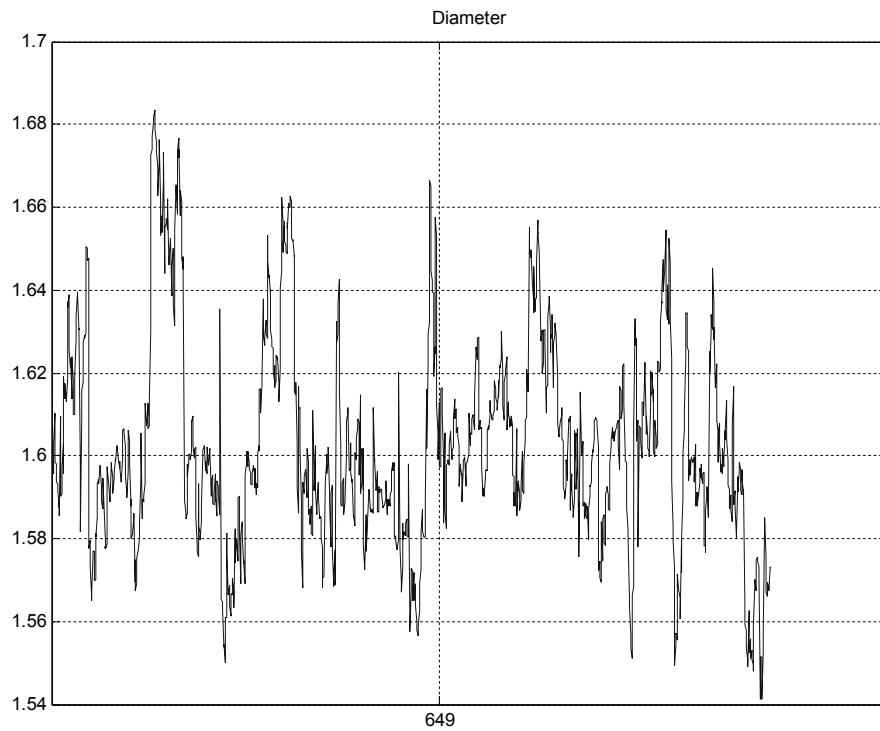


Рис. 7. Діаметр графу

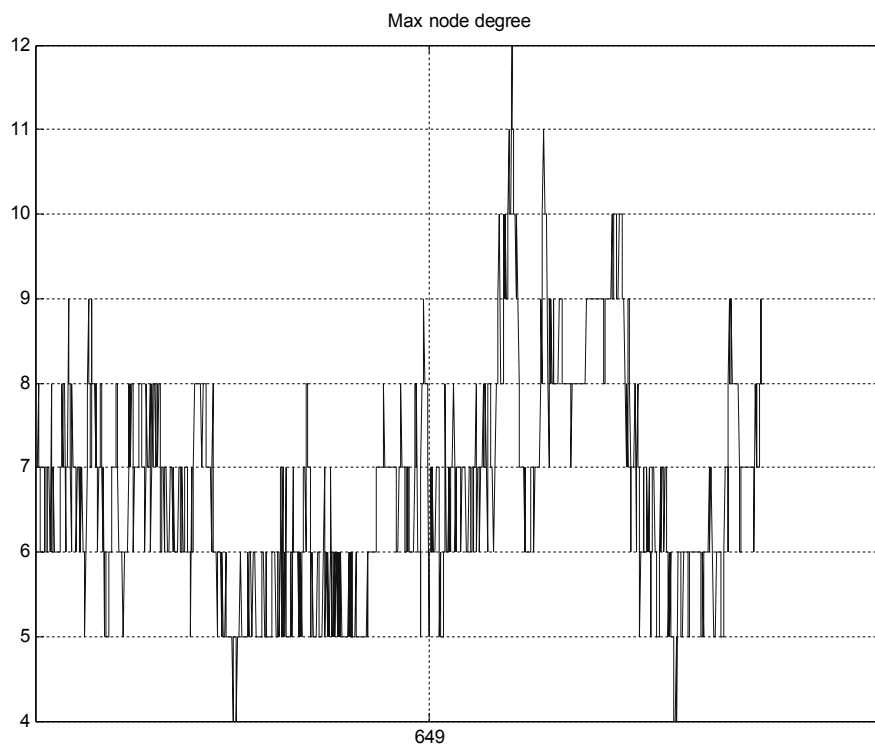


Рис. 8. Найвища степінь вершини

Завдання для самостійної роботи

1. Виберіть в папці Bases відповідну базу даних, проведіть дослідження:

- коефіцієнта кластеризації, середньої довжини шляху, діаметра графу і найвищої степені вершин.
2. Поясніть і інтерпретуйте результати.
 3. Результати-звіт представте у вигляді оформленої індивідуальної роботи.

Контрольні питання

1. Що показують зміни відповідних характеристик графу?
2. Як змінюється коефіцієнт кластеризації під час кризових явищ?
3. Які характеристики графу свідчать про глобалізаційні процеси?

Список використаної літератури

1. Mantegna R.N. Information and hierarchical structure in financial markets // Computer Physics Communications 121-122 (1999) 153-156.
2. R. Rammal, G. Toulouse, M.A. Virasoro, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 765.
3. D. J. Watts and Strogatz, Nature 393, 440 (1998).
4. P. Erdos, A. R'enyi, Bull. Inst. Int. Stat. 38, 343 (1961).

Індивідуальна робота № 9

Тема. Вейвлет-аналіз нестационарних часових рядів

Мета. Навчитися використовувати метод вейвлет-аналізу для отримання частотних характеристик початкового сигналу, а також застосовувати отримані результати для аналізу особливостей формування сигналу і прогнозування його майбутніх значень.

1. Вейвлет-аналіз
2. Неперервне вейвлет-перетворення
3. Аналіз статистик коефіцієнтів вейвлет-перетворення

Теоретичні відомості

Вейвлет-аналіз дає можливість робити локалізований *аналіз* - тобто аналізувати обмежену область загального сигналу.

Розглянемо сигнал у вигляді синусоїди з невеликою неоднорідністю, що ледь видима (рис.1). Такий сигнал легко міг бути створений у реальному світі коливанням або шумом.

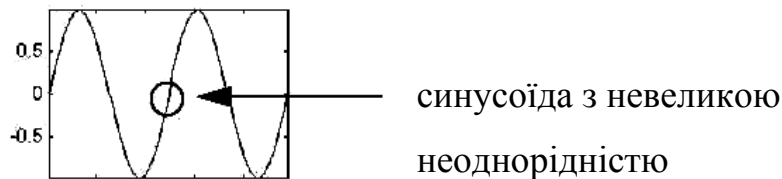


Рис.1. Сигнал з неоднорідністю

Графік Фур'є коефіцієнтів цього сигналу не показує нічого особливо цікавого: плоский спектр із двома піками, що представляють єдину частоту. Однак, графік вейвлет коефіцієнтів ясно показує точне місце розташування неоднорідності (рис 2).

Вейвлет-аналіз дозволяє розкрити аспекти даних, які інші методи аналізу сигналу не вловлюють. Це пошук тенденцій, точок розривів і самоподібність. Крім того, він дозволяє побачити різні представлення даних на відміну від традиційних методів.

Слід відзначити, що вейвлетом називається функція $\psi(t)$, у якій виконуються дві основні умови. По-перше, її середнє значення $\psi(t)$ (тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$) дорівнює нулю. По-друге, функція $\psi(t)$ швидко спадає при $t \rightarrow \pm\infty$.

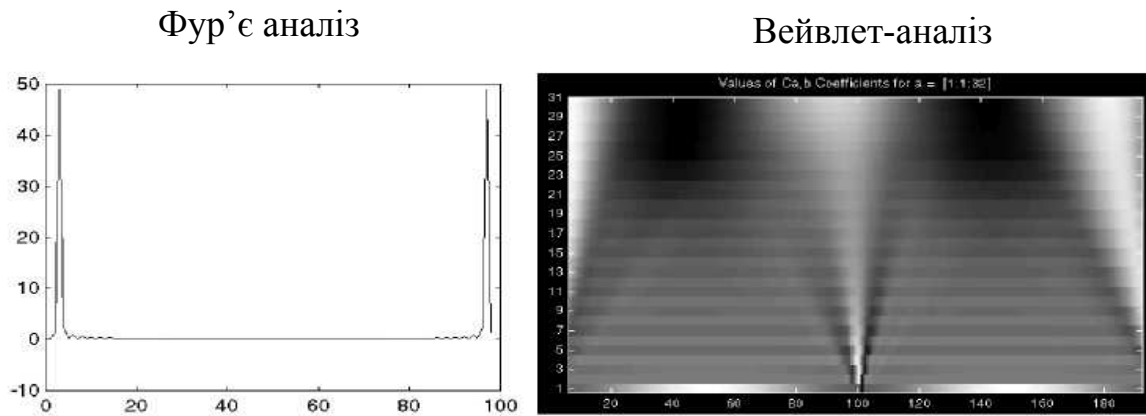


Рис. 2. Результати частотного аналізу синусоїди з невеликою неоднорідністю

Вейвлет – має хвилеподібну форму. Якщо порівняти вейвлет з формою синусоїди, яка являється основою аналізу Фур'є, то видно, що синусоїди мають необмежену довжину - вони простягаються від мінус до плюс нескінченності. Синусоїди рівномірні і передбачувані, а вейвлет має тенденцію бути нерегулярними й асиметричними (рис. 3).

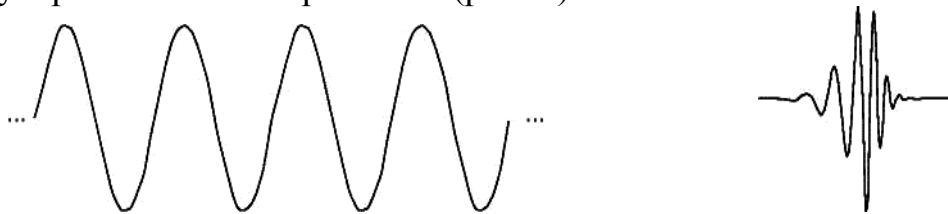


Рис. 3. Графік синусоїди і різновиду вейвлета Добеші -db(10)

Суть Фур'є аналізу полягає у розкладі сигналу на синусоїди різних частот. Точно так само вейвлет-аналіз полягає в розбиванні сигналу на різновиди початкового вейвлета, які пересуваються і масштабуються.

Тільки дивлячись на зображення вейвлетів і синусоїди, можна інтуїтивно побачити, що сигнали з гострими змінами могли б бути краще проаналізовані нерегулярним вейвлетом ніж синусоїдою.

Математично процес Фур'є аналізу представлений перетворенням Фур'є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Результати перетворення - *Фур'є коефіцієнти* $F(\omega)$, які при множенні на синусоїду частоти ω , приводять до складових синусоїдних компонентів початкового сигналу. Графічно процес виглядає наступним чином (рис. 4):



Рис. 4. Сигнал, розкладений на складові синусоїди різних частот у результаті Фур'є аналізу

Точно так само неперервне вейвлет перетворення визначається як сума у часі сигналу, помноженого на масштабовані й переміщені модифікації вейвлет-функції ψ :

$$C(\text{scale}, \text{position}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(\text{scale}, \text{position}, t) dt \quad (2)$$

Результат неперервного вейвлет-перетворення - велика кількість вейвлет-коефіцієнтів C , що являються функцією від масштабу й позиції. Масштабування вейвлета просто означає його розтягування (або стискання).

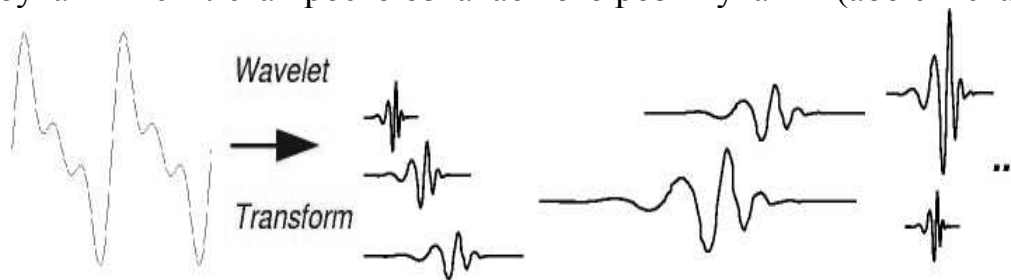


Рис. 5 Початковий сигнал, розкладений на складові сигнали на різних масштабах і позиціях

Фактор масштабу часто позначається буквою a . Якщо ми говоримо, наприклад, про синусоїди, ефект фактору масштабу дуже легко пояснює рис. 6:

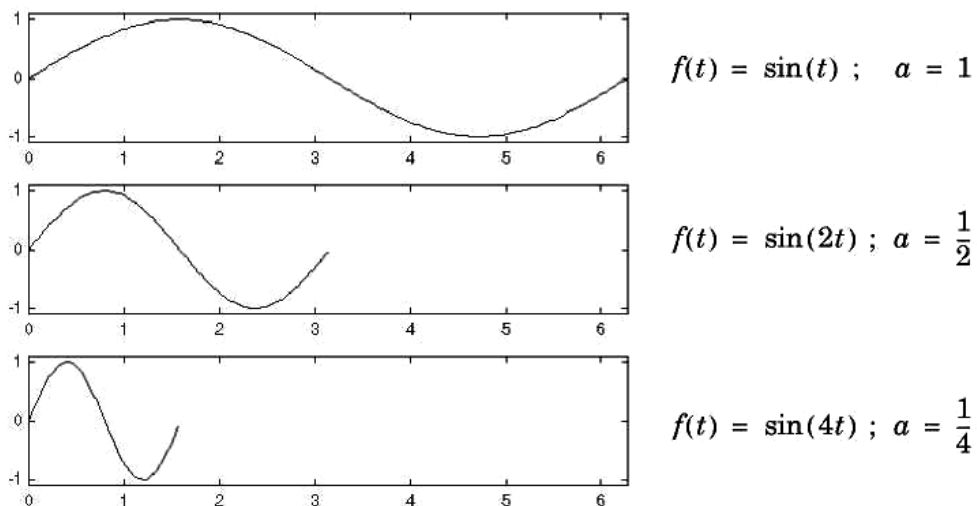


Рис 6. Масштабування синусоїди

Фактор масштабу працює точно так само й із вейвлетами. Чим менший фактор масштабу, тим більш "зжати́м" є вейвлет.

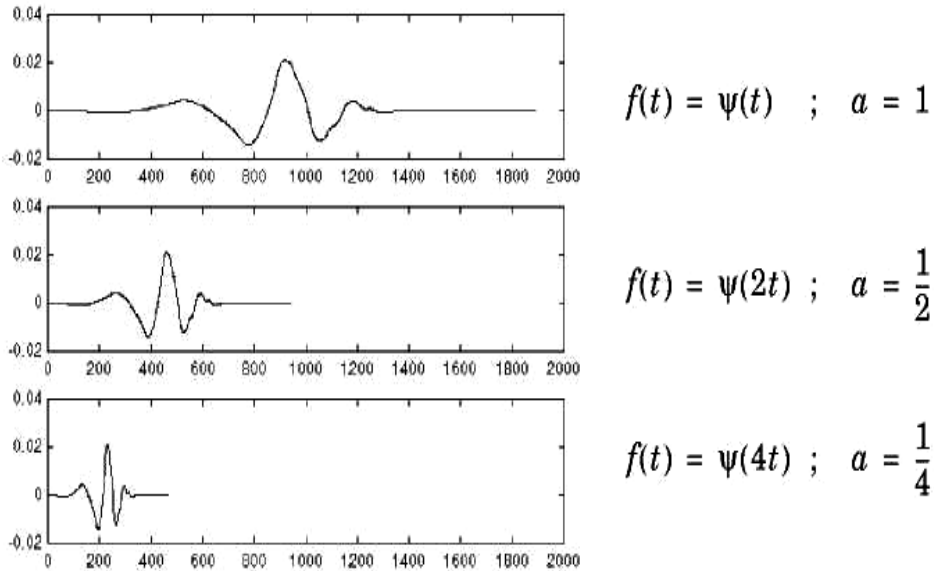


Рис. 7. Масштабування вейвлету

З діаграм видно, що для синусоїди $\sin(\omega t)$, фактор масштабу пов'язаний (обернено пропорційно) з частотою ω . Точно так само для вейвлет-аналізу, масштаб пов'язаний із частотою сигналу.

Переміщення вейвлета просто означає зсув початку вікна, для якого проводяться обчислення. Математично переміщення $f(t)$ по x , де x – це час, представляється як $f(t-x)$

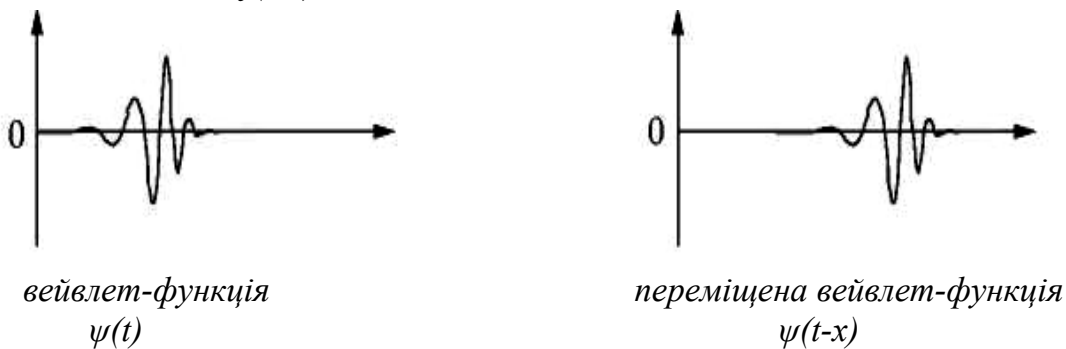
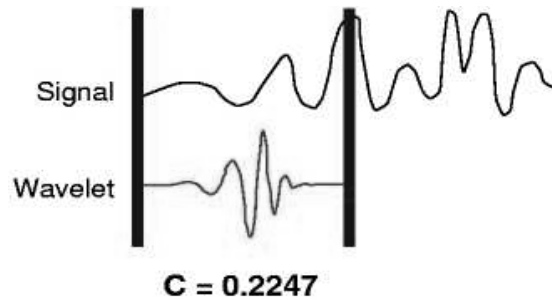


Рис. 7. Переміщення вейвлет-функції.

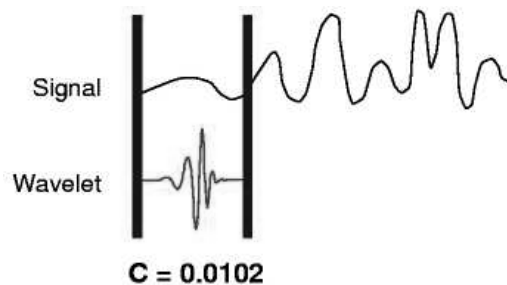
Неперервне вейвлет-перетворення - сума за весь час сигналу, помноженого на масштабовані, переміщені модифікації вейвлета. У такий спосіб розраховуються вейвлет-коефіцієнти, що являються функцією від масштабу й положення.

Здійснення вейвлет-перетворення являє собою дуже простий процес, який можна передати п'ятьма кроками:

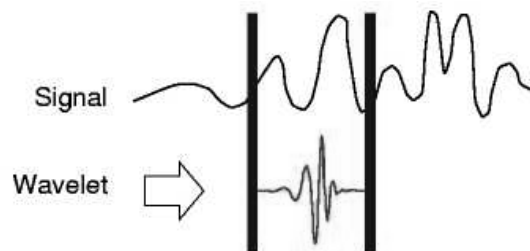
1. Береться вейвлет і порівнюється із початковою частиною вихідного сигналу.
2. Обчислюється значення C , яке показує, як сильно корелює вейвлет із частиною вихідного сигналу. Чим вище C , тим більша подібність. Точніше, якщо енергія сигналу й енергія вейвлета еквівалентні, C може інтерпретуватися як коефіцієнт кореляції. Результати будуть залежати від форми вейвлета, що вибирається.



3. Вейвлет переміщується вправо й повторюються кроки 1 і 2 поки не буде досягнутий кінець сигналу.



4. Масштабується вейвлет і повторюються кроки 1 – 3



5. Повторюються кроки 1-4 для всіх масштабів.

Результатом являються коефіцієнти, отримані на різних масштабах для різних частин сигналу.

Формальний запис визначеного алгоритму має наступний вигляд:

$$W_f(x, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Psi\left(\frac{t-x}{a}\right)} f(t) dt \quad (3)$$

Коефіцієнти неперервного вейвлет-перетворення дають точне уявлення про початковий сигнал у залежності від масштабу й часу.

Між масштабами вейвлета й частотою є відповідність :

- Низький масштаб $a \rightarrow$ Зжатиий вейвлет \rightarrow Швидко змінюються деталі \rightarrow Висока частота ω .
- Високий масштаб \rightarrow Розтягнутий вейвлет \rightarrow Повільна зміна, великі деталі \rightarrow Низька частота ω .

Перевагою неперервного вейвлет-перетворення (CWT) у порівнянні з дискретним (DWT) є те, що воно може працювати на кожному масштабі: від початкового сигналу до деякого максимального масштабу, який визначається, виходячи з потреби в детальному аналізі й доступній обчислювальній потужності.

Процедура CWT також неперервна в термінах переміщення: впродовж обчислення вейвлет переміщується плавно по всій області аналізованої функції.

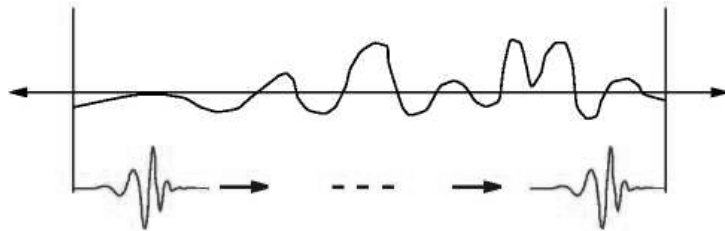


Рис. 8. Переміщення вейвлета вздовж аналізованого сигналу

Оскільки, динамічний ряд змінюється із часом, то його вейвлет-коефіцієнти також коливаються із частотою по відношенню до нульової частоти масштабу ω_0 . Отже, для аналізу цих флуктуацій можна використовувати дисперсії розподілів на різних масштабах. Для порівняння графіків дисперсій і моментів n -х порядків початкові данні нормалізуються:

$$X_i^* = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_X} \quad , \quad (4)$$

де X_i – це i -й елемент ряду динаміки ($i = 1-n$), \bar{X} - середнє значення ряду, σ_X - дисперсія ряду, X_i^* - нормалізовані значення.

Дисперсія вейвлет-коефіцієнтів для вікна обчислюється за наступною формулою:

$$\sigma(j, w) = \frac{\sum_{k=i}^{i+w} [d_{j,k} - \langle d_{j,k} \rangle]^2}{w} \quad , \quad (5)$$

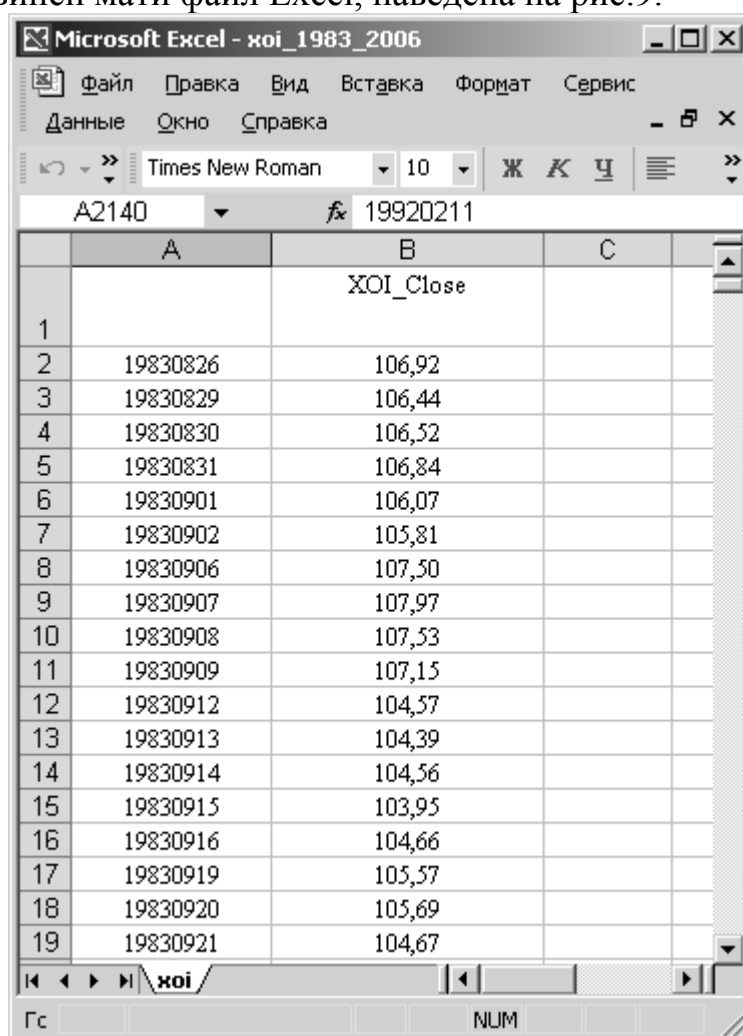
де w - означає число вейвлет-коефіцієнтів на рівні j у заданому часовому інтервалі; $d_{j,k}$ - вейвлет-коефіцієнти; $\langle d_{j,k} \rangle$ - середнє значення вейвлет-

коефіцієнтів у вікні. Для дослідження флуктуацій початкового ряду також використовуються моменти вищих порядків.

Хід роботи

Розрахунок вейвлет-коефіцієнтів, їх статистик здійснюється за допомогою функцій **dwvar_norm**, **wvar_norm** і **plots_norm**. Ці функції мають знаходитися в каталозі **work** або, якщо вони знаходяться в іншому каталозі, шлях до нього необхідно задати через меню **File**→**Set Path**→**Add Folder**.

Перед розрахунком в робочу область MatLab мають бути завантажені 3 масиви шляхом імпорту з файлу Excel через меню **File**→**Import Data**. Структура, яку повинен мати файл Excel, наведена на рис.9.



	A	B	C
1		XOI_Close	
2	19830826	106,92	
3	19830829	106,44	
4	19830830	106,52	
5	19830831	106,84	
6	19830901	106,07	
7	19830902	105,81	
8	19830906	107,50	
9	19830907	107,97	
10	19830908	107,53	
11	19830909	107,15	
12	19830912	104,57	
13	19830913	104,39	
14	19830914	104,56	
15	19830915	103,95	
16	19830916	104,66	
17	19830919	105,57	
18	19830920	105,69	
19	19830921	104,67	

Рис. 9. Структура файлу Excel, яка потрібна для розрахунку вейвлет-коефіцієнтів і їх моментів.

Коли змінні вже завантажені в робочу область MatLab, для запуску розрахунку потрібно набрати в командній строчці **dwvar_norm** і в дужках зазначити всі нижче перераховані параметри

- ім'я масиву, який складається зі стовпця дат і стовпця значень;

- початкове значення розрахунків;
- кінцеве значення розрахунків.

Наприклад, проведемо аналіз протікання економічної кризи 1987р. в США на основі динаміки індексу Dow Jones. Розрахуємо вейвлет-коефіцієнти і їх моменти для 3-х періодів: до кризи, під час кризи і після кризи. Для цього в командній сточці наберемо

```
>>d0=dwvar_norm(data,5258,6258);
v0=dwvar_norm(data,5733,6733);
p0=dwvar_norm(data,6258,6680);
```

Після закінчення розрахунку в робочій області з'явиться 3 змінні. Набравши в командній строчці **plots_norm(d0)** отримаємо графічне зображення індексу Dow Jones до кризи, його вейвлет-коефіцієнтів, дисперсій, моментів 3-го, 4-го й 5-го порядку - всього виводиться 7 графіків. Відповідно вводиться функція і для отримання графічного зображення результатів розрахунків під час кризи і після кризи. Результати представлені на рис. 10-12.

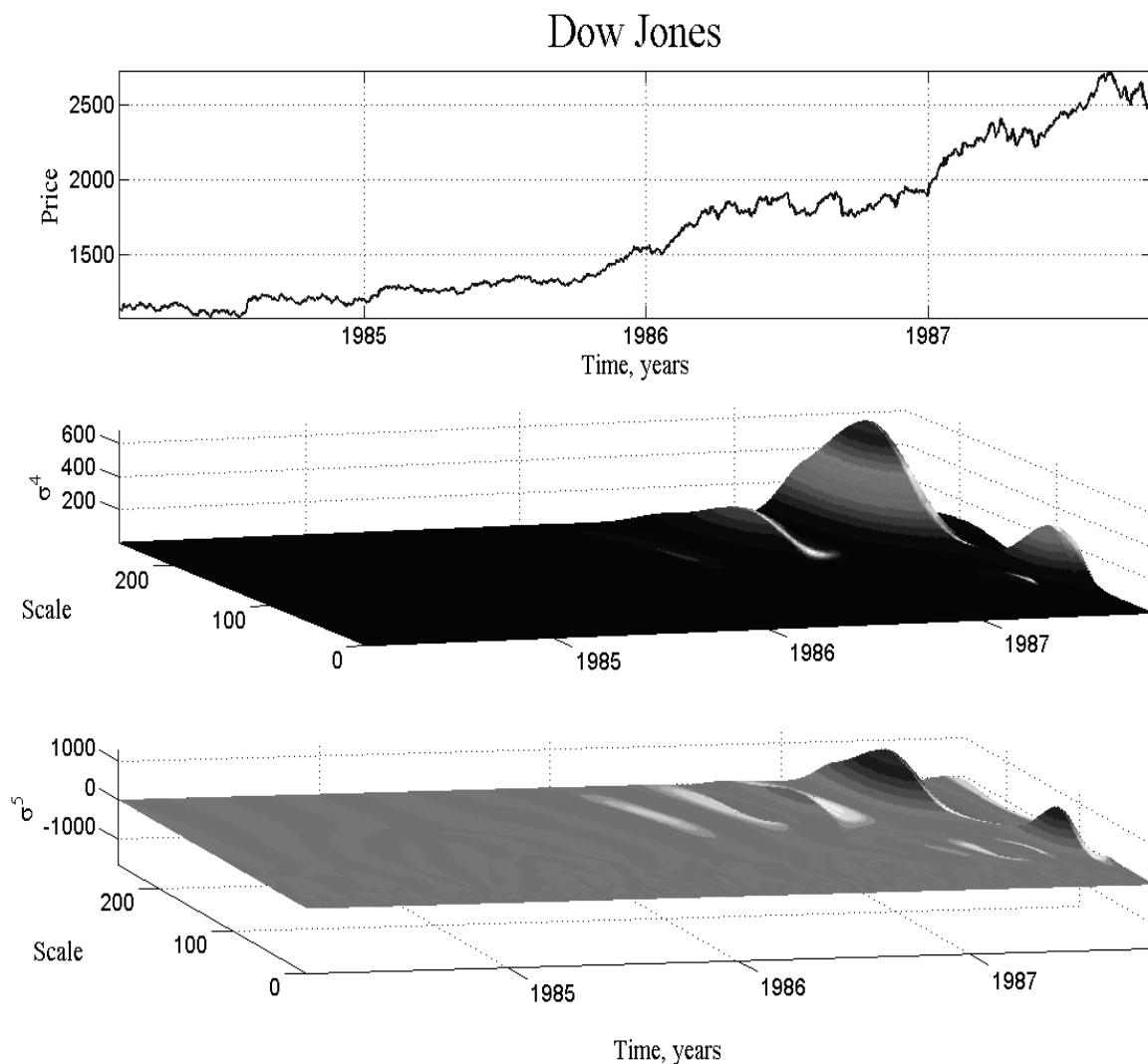


Рис. 10. Графік індексу Dow Jones, моментів 4-го й 5-го порядку його вейвлет-коефіцієнтів до кризи 19 жовтня 1987р.

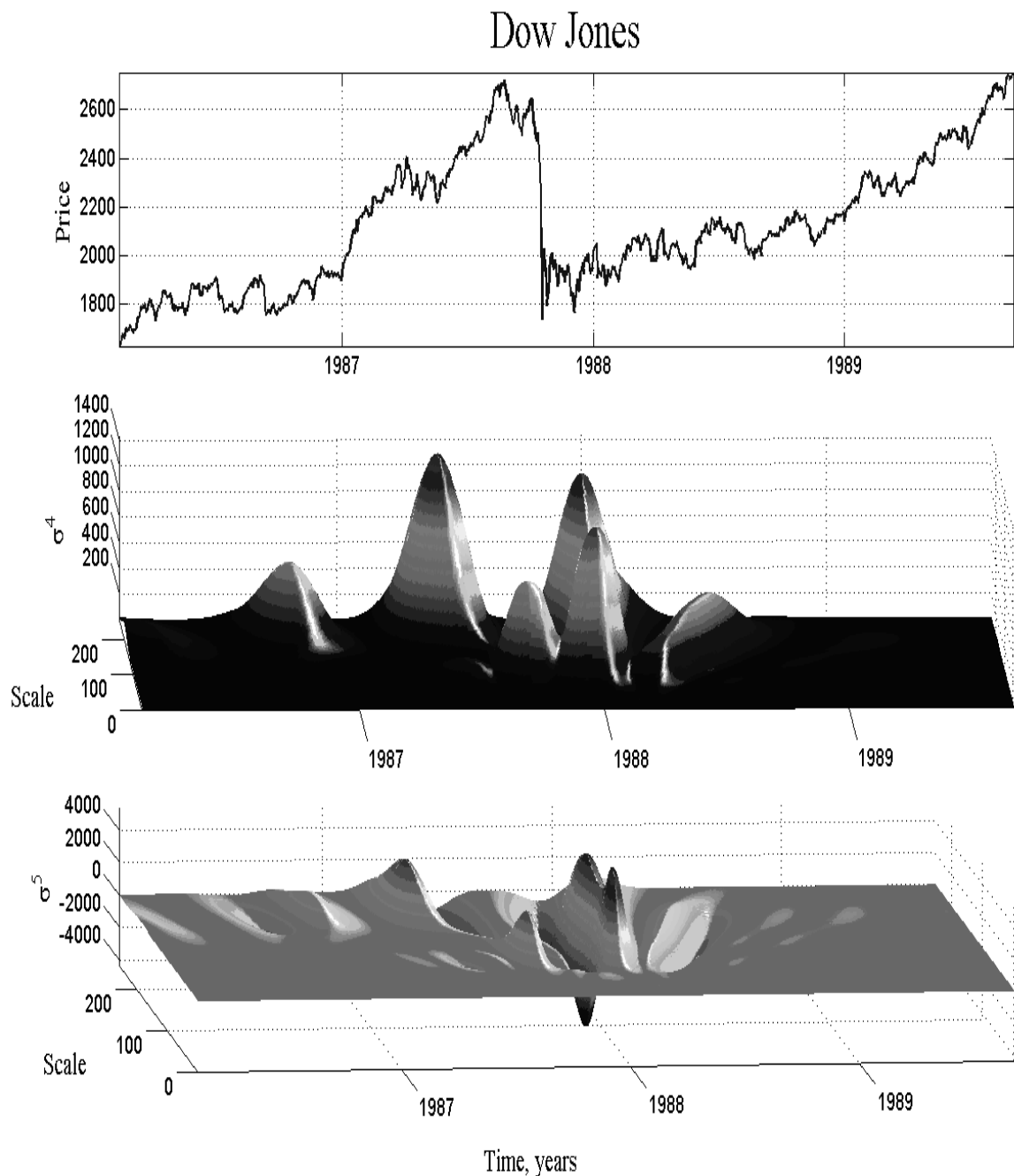


Рис. 11 Графік індексу Dow Jones, моментів 4-го й 5-го порядку його вейвлет-коефіцієнтів під час кризи 19 жовтня 1987р.

Порівняльний аналіз Рис. 10 і 11 показав, формування і розв'язок економічної кризи 1987р. в США відбувався на масштабі 200-250. Причому перед самим початком кризи з'являються коливання на високих частотах (низькому масштабі), які можуть характеризувати ажіотажні дії дрібних економічних суб'єктів на біржах (наприклад, спекуляції дрібних трейдерів, пов'язані зі стрімким зростанням цін акцій і індексів фондових ринків). Цікавим фактом є те, що вхідні дані для 11 графіку не зачіпають моменту кризи, але показують перед кризою такі ж хвилеподібні коливання і на тих самих же частотах, що й на Рис.11.

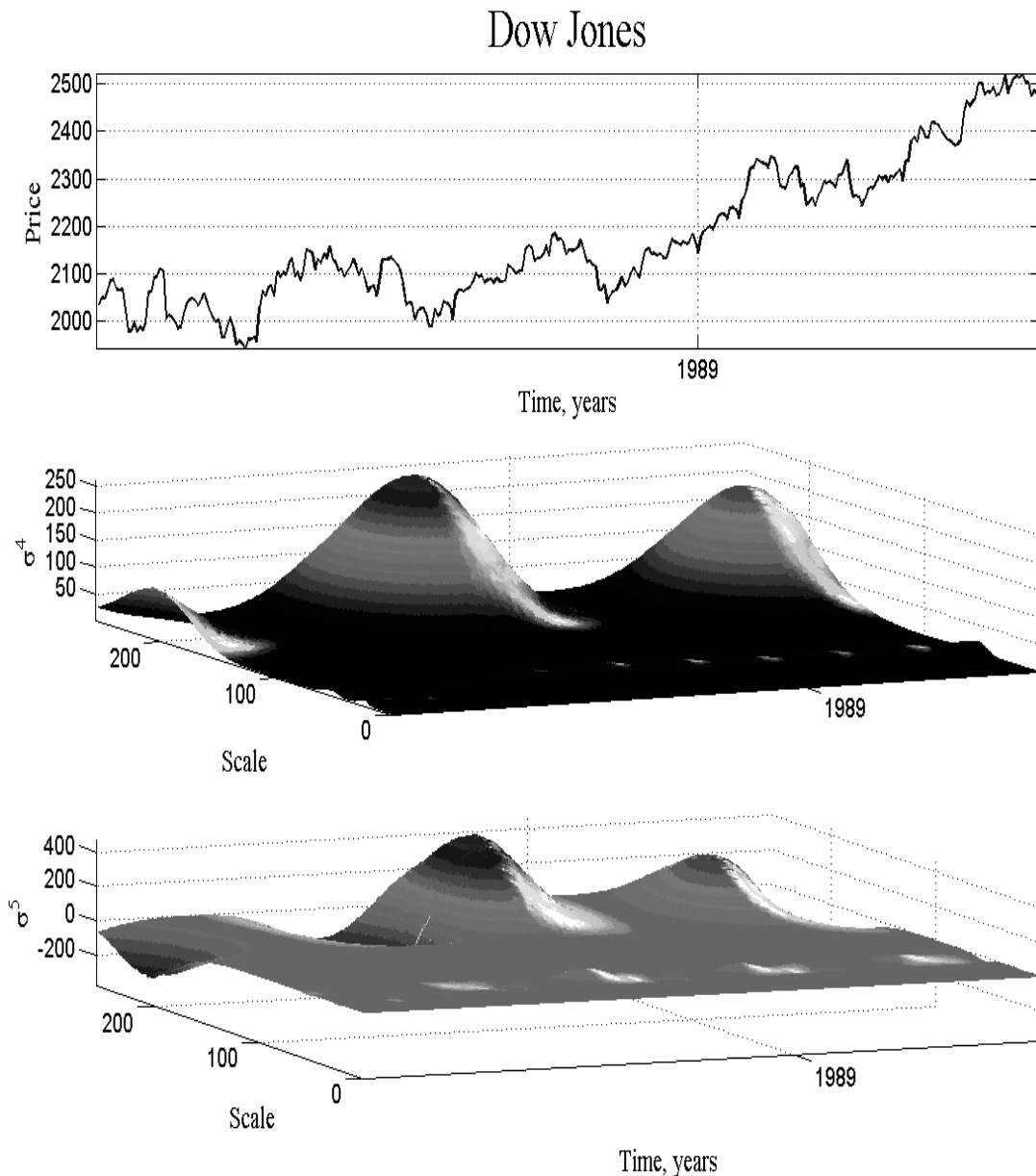


Рис. 12 Графік індексу Dow Jones, моментів 4-го й 5-го порядку його вейвлет-коефіцієнтів після кризи 19 жовтня 1987р.

Графік, на якому зображено ситуацію після кризи (рис. 12), показує поступовий процес релаксації ринку після кризи і відновлення нормальної діяльності. Він характеризується рівномірними коливаннями індексу Dow Jones і поступовим відновленням попередньої динаміки, що відображається на графіку моментів 4-го і 5-го порядку вейвлет-коефіцієнтів.

Завдання для самостійної роботи

Виберіть у папці Bases відповідну базу даних, бажано із кризовим явищем. Знайдіть інформацію про цю кризу, особливості її протікання. Виконайте 3 варіанти розрахунків:

- 1) докризове становище;
 - 2) під час кризи;
 - 3) розвиток процесу після кризи.
- Отримані графіки проаналізуйте.

Результати Вашої роботи представте у вигляді відповідно оформленої оформленої індивідуальної роботи.

Контрольні питання

1. Поясніть основну ідею вейвлет-аналізу, його методику
2. Для чого розраховуються дисперсії й моменти вейвлет-коефіцієнтів?
3. Які процеси проявляються на низьких і високих частотах вейвлет-коефіцієнтів?
4. Які спостерігаються зміни дисперсій і моментів вейвлет-коефіцієнтів під час кризи?

Список використаної літератури

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 11. стр. 1145-1170.
2. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон – Р, 2002.
3. Wavelet Analysis and Its Applications. Vol. 2. San-Diego: Academ. Press, 1992.

Індивідуальна робота № 10

Тема. Використання методів нелінійної динаміки для дослідження динаміки складних соціально-економічних систем

Мета. Набути практичних навичок розрахунку нелінійних динамічних характеристик складних систем з метою моніторингу і прогнозування поведінки складних систем

1. Хаотичний процес
2. Вкладена розмірність, атрактор
3. Фрактальна розмірність
4. Кореляційна розмірність

Теоретичні відомості

Сучасний фінансовий ринок – суттєво нелінійна система, дослідження якої неможливе у рамках існуючих лінійних парадигм.

Існує декілька конкуруючих підходів, які при побудові моделей використовують ідею нелінійності. Традиційні економетричні моделі є стохастичними (ARCH, GARCH і їх модифікації). Проте ті обмеження, які використовуються при побудові і підгонці моделі з метою зробити її придатною для практичного застосування, по суті справи, знищують ту унікальну внутрішню «складність», яка властива даному динамічному процесу і без якої він стає безликим представником абстрактних фінансових даних.

У зв'язку з цим, останнім часом інтенсивно розвивається альтернативний підхід до аналізу нелінійностей, а саме підхід, що базується на теорії детермінованого хаосу, який пропонує вичерпне пояснення іррегулярній поведінці і аномаліям у системах, які, не будучи за своєю природою стохастичними, поводяться так само. Теорія хаосу пропонує абсолютно нові концепції і алгоритми для аналізу часових рядів, які можуть привести до глибшого і повнішого розуміння відбиваних ними фінансових процесів. Теорія динамічного хаосу вводить в традиційну мову фінансових аналітиків такі нові у цій сфері поняття як фазовий простір, атрактор, ляпуновські експоненти, горизонт прогнозу, ентропії і розмірності, фрактальні статистики і інформаційні цикли і т.д.

1. Основні властивості часових рядів

Аналіз взаємозв'язків економічних даних, представлених у вигляді часових рядів, є необхідною складовою частиною сучасних досліджень в області макроекономічної динаміки, перехідної економіки, економетрики фінансових ринків. В кінці 1980-початку 1990-х рр. було усвідомлено, що тільки врахування часової структури даних про реальні економічні процеси дозволяє адекватно відобразити їх в математичних і економетричних моделях.

Усвідомлення цього факту привело як до ревізії багатьох макроекономічних теорій і побудов, так і до бурхливого розвитку специфічних методів аналізу таких даних. Знання цих методів і способів застосування їх до аналізу конкретних економічних процесів, є в даний час необхідною складовою підготовки економістів-аналітиків.

Розроблені для цілей економічних досліджень методи аналізу нестационарних випадкових процесів істотно відрізняються від тих, що знайшли широке застосування в техніці і теорії управління прийомів роботи із стаціонарними випадковими процесами. У технічних додатках аналіз часових рядів використовується переважно для прогнозування і супроводжується значною часткою так званого «data mining». У сучасній економіці значно більше місце займає оцінювання динамічних моделей, що відображають короткострокові і довгострокові зв'язки між економічними змінними.

Вже в початковому курсі економетрики при вивченні автокореляції розглядаються співвідношення виду

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Значення деякої економічної змінної залежить від її ж значень в попередній момент часу, від її значень з лагом – зрушенням за часом на один крок назад. Включення змінних з лагом в економетричні співвідношення означає істотну зміну в «філософії» моделювання. Якщо в звичних економетричних моделях значення однієї змінної залежить від одночасних значень інших змінних, тобто від поточного стану економічної системи, та наявність змінних з лагом означає, що поведінка системи визначається не тільки її поточним станом, але і траєкторією, по якій система прийшла в цей стан.

З математичної точки зору економетрична модель такого типу є не функцією пояснюючих змінних, а функціоналом від траєкторії (траєкторій) економічних змінних. Тому елементами таких моделей є траєкторії: множина даних $\{x_t, t \in T\}$, де T – деяка скінчена або континуальна множина.

Моделювання залежностей виду $y_t = f(x_t, \varepsilon_t)$ де x і y є дані типи траєкторій, приводить до ситуації, коли звичні прийоми регресійного аналізу не дають прийнятних оцінок параметрів.

В курсі економетрики ряд змістовних задач приводить до рівнянь, які природно назвати авторегресійними (autoregressive). Зокрема, при усуненні автокореляції було одержано рівняння:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma X_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

В ньому як пояснююча змінна з'явилася змінна із запізнюванням, тобто регресія змінної на саму себе – саме тому таке рівняння і назвали авто регресійним.

Крім того, в курсі економетрики розглядалися моделі з розподіленими лагами (distributed lag models), в яких пояснююча змінна також присутня із запізнюванням:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \dots + \varepsilon_t \quad . \quad (3)$$

У математичних термінах можна записати:

$$Y_t = f(Y_{t-\tau}, X_{t-\tau}; t \in [1, T], \tau \in [0, t]) \quad (4)$$

Важливо, що тепер у модель входить не тільки по одному спостережуваному значенню змінних X і Y , а сукупність спостережуваних значень (траєкторія). Причому по самому значенню ми не можемо вважати, що послідовні значення кожної із змінних незалежні між собою у статистичному значенні.

2. Дослідження динаміки ринків методами хаотичної динаміки

Останні роки ознаменувалися інтересом, що зростає, до пошуку моделей нелінійної поведінки на фінансових ринках. Це пояснюється тим, що нелінійні моделі можуть уловлювати дуже складні патерни у фінансових даних. В той же час, як тепер уже добре усвідомлено, лінійний підхід не дозволяє врахувати і проаналізувати сильно нерегулярну поведінку, яка може демонструватися численними фінансовими активами. До початку 60-х років у нелінійних дисипативних динамічних системах в стаціонарному режимі спостерігали тільки періодичні і квазіперіодичні рухи. Проте в 1963 році у динамічній системі Лоренцем був знайдений дуже складний рух, який сприймався як хаотичний.

Для характеристики таких рухів ввели поняття "динамічний хаос". Слово "динамічний" означає, що відсутні джерела флуктуацій.

У статті математиків Рюеля і Такенса, опублікованої в 1971 році, був введений новий математичний образ динамічного хаосу - *дивний атрактор*. Слово "дивний" підкреслює дві властивості атрактора. Це, по-перше, незвичність його геометричної структури. Розмірність дивного атрактора є дробовою (фрактальною). По-друге, дивний атрактор - це притягуюча область для траєкторій з навколишніх областей. При цьому всі траєкторії усередині дивного атрактора динамічно нестійкі, що виражається у сильній (експоненціальній) розбіжності близьких у початковий момент траєкторій.

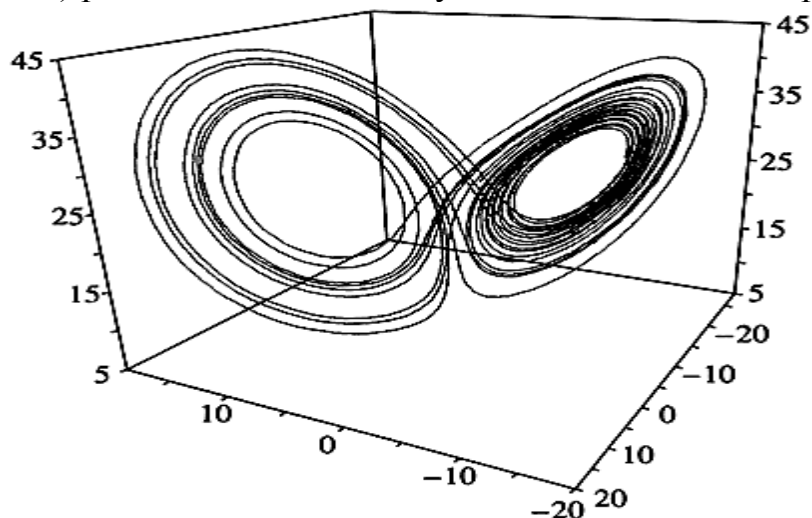


Рис.1. Атрактор Лоренца

Для характеристики атракторів доцільно ввести поняття розмірності. Розмірність визначає кількість інформації, необхідної для задання координат

точки, що належить атрактору, у рамках вказаної точності. Обговорювані у літературі визначення розмірності загалом розділяються на два типи: залежні тільки від метричних властивостей атрактора і, крім метрики, залежні від статистичних властивостей потоку, обумовлених динамікою. У типових випадках метричні розмірності приймають однакову величину, яку прийнято називати фрактальною розмірністю атрактора.

2.1 Фрактальна розмірність дивного атрактора

Введемо визначення фрактальної розмірності D_f довільного атрактора у n -мірному фазовому просторі по Колмогорову-Хаусдорфу :

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln M(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)] \quad (3)$$

- де $M(\varepsilon)$ - мінімальне число n -мірних кубиків з ребром ε , необхідних для покриття атрактора. Для нетривіальних множин розмірність D_f може виявитися дробовою.

Помітимо, що у формулі для обчислення фрактальної розмірності однаково важливі всі непорожні кубики. Це представляє серйозний недолік для дивних атракторів, оскільки вони просторово неоднорідні, тобто деякі області атрактора відвідуються частіше за інших. Потрібне знання дуже довгої траєкторії, щоб гарантувати попадання навіть дуже малоїмовірних кубиків. Тому кожен непорожній кубик потрібно зважувати за допомогою відносної частоти, з якою він відвідується типовою траєкторією. Розмірності, що визначаються з урахуванням ймовірності відвідин траєкторією різних областей атрактора у фазовому просторі, називають імовірнісними.

Інформаційна розмірність визначається таким чином :

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln I(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)] \quad (4)$$

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i \quad (5)$$

Тут $I(\varepsilon)$ - кількість інформації, необхідна для визначення стану системи у межах точності ε , $M(\varepsilon)$ - число кубиків із стороною ε , покриваючих атрактор, p_i - ймовірність відвідин фазовою траєкторією i -го кубика. Оскільки для малих ε $I(\varepsilon) \approx D \ln(1/\varepsilon)$, то D_I характеризує швидкість зростання інформації із зменшенням. Якщо атрактор просторово однорідний, то $D_I = D_f$, інакше $D_I < D_f$.

Ще одним представником класу ймовірносних розмірностей є кореляційна розмірність D_c , що визначається співвідношенням :

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right) / \ln \varepsilon \right] \quad (6)$$

де p_i^2 - ймовірність того, що пара точок атрактора належить i -му кубіку.

Кореляційну розмірність можна представити у вигляді:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\ln C(\varepsilon) / \ln \varepsilon] \quad (7)$$

$$C(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum \theta(\varepsilon - \rho(x_i, x_j)) \quad (8)$$

$$\theta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \geq 0, \\ 0, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (9)$$

x_i – точки у фазовому просторі; ρ – відстань. Таким чином, розмірність D_C визначається значенням кореляційного інтеграла $C(\varepsilon)$, який характеризує відносне число пар точок x_i, x_j , віддалених на відстані

$$r_{ij} = \rho(x_i, x_j) \leq \varepsilon \quad (10)$$

Відзначимо, що всі три розмірності, розглянуті вище, є окремими випадками узагальненої розмірності Реньї:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\ln I_q(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \right]$$

$$I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \quad (11)$$

де I_q – інформація Реньї порядку q

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-0} \ln \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^0 / \ln(1/\varepsilon) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln M(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \right] = D_f, \quad (12)$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i / \ln(1/\varepsilon) \right] = D_I, \quad (13)$$

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-2} \ln \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 / \ln(1/\varepsilon) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 / \ln(\varepsilon) \right] = D_C. \quad (14)$$

Для цілих q розмірність D_q має фізичний сенс. Великі позитивні значення q підкреслюють найщільніші області у фазовому просторі, тоді як великі негативні значення q підкреслюють найбільш рідко відвідувані області. Таким чином, діапазон значень розмірностей D_q може розглядатися як характеристика ступеня просторової неоднорідності атракторів.

2.2 Ентропія

Виконаємо далі розбиття фазового простору, що включає атрактор, на $M(\varepsilon)$ непересічних n -мірних кубиків з ребром ε . Виконаємо m послідовних вимірювань, стежачи за фазовою траєкторією і через рівні проміжки часу τ відзначаючи кубики s_i , в яких побудована траєкторія. При кожному незалежному випробуванні одержимо конкретну реалізацію у вигляді послідовності кубиків s_1, \dots, s_m . Хай нам відома ймовірність $P(s_1, \dots, s_m)$ появи всіх можливих послідовностей кубиків. Тоді ентропія Колмогорова визначається таким чином:

$$K_1 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{m \tau} \sum_{s_1, \dots, s_m} P(s_1, \dots, s_m) \ln P(s_1, \dots, s_m) \right] \quad (15)$$

Характерний час, на який може бути передбачена поведінка системи, обернено пропорційний до ентропії Колмогорова. Якщо ентропія досягає нуля, то система стає повністю передбаченою. Так буде у разі регулярних процесів. Для істинно випадкових процесів ентропія необмежено велика. Ентропія системи у режимі дивного атрактора позитивна, але має скінчене значення. Числове значення ентропії є кількісною характеристикою ступеня хаотичності системи.

Можна ввести поняття узагальненої ентропії Реньї як динамічного аналога узагальненої розмірності Реньї:

$$K_q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{m \tau} \frac{1}{1-q} \ln \sum_{s_1, \dots, s_m} P^q(s_1, \dots, s_m) \right] \quad (16)$$

В окремих випадках, при $q=0$ одержуємо визначення топологічної ентропії K_0 , при $q=1$ - ентропії Колмогорова K_1 , при $q=2$ - кореляційної ентропії K_2 .

2.3 Спектр характеристичних показників Ляпунова

Ще однією важливою характеристикою атрактора є спектр характеристичних показників Ляпунова. Хай функція $F: R^n \rightarrow R^n$ диференційовна, A - атрактор відображення $x_{k+1} = F(x_k)$. Позначимо F^k суперпозицію F з собою k раз; $DF^k(x)$ - матриця Якобі, тобто матриця $n \times n$ частинних похідних F^k , обчислених у точці x . Хай $a_i(k, x)$ - модуль i -го власного значення $DF^k(x)$, причому $a_1(k, x) \geq \dots \geq a_n(k, x)$. Характеристичні показники Ляпунова атрактора визначаються співвідношеннями:

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln a_i(k, x) \quad (17)$$

При відповідних припущеннях ця границя існує і однакова для типових точок x на атракторі A . Подібне визначення може бути дане і для атрактора автономної системи звичайних диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$. При цьому індекс k замінюється часом t . Впорядкована по убуту послідовність чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ утворює спектр показників Ляпунова і дає корисну класифікацію атракторів.

Сума показників Ляпунова траєкторії $x^0(t)$ характеризує швидкість зміни фазового об'єму в її околі. Режим дивного атрактора реалізується тільки у дисипативних системах і характеризується наявністю у спектрі позитивних показників. Сума показників Ляпунова для дисипативних систем негативна. Якщо сума показників Ляпунова рівна нулю, то фазовий об'єм системи у часі не змінюється - система консервативна і атракторів не містить. У разі позитивної суми показників Ляпунова фазовий об'єм у часі наростає. З фізичної точки зору такий режим як стаціонарний не реальний. Встановлений кількісний взаємозв'язок показників Ляпунова з ентропією Колмогорова.

Встановлений кількісний взаємозв'язок показників Ляпунова з ентропією Колмогорова. Доведено, що ентропія позитивна у тому і лише у тому випадку, коли фазова траєкторія у середньому експоненціально нестійка на атракторі.

Значить, спектр показників Ляпунова такої траєкторії має містити позитивний показник. Явний вираз, що зв'язує ентропію Колмогорова з позитивними показниками Ляпунова, одержаний Песінім і в типових випадках виглядає достатньо просто:

$$K_1 = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \quad (18)$$

- тобто ентропія дорівнює сумі позитивних показників Ляпунова.

Для обчислення таких статистичних середніх, як розмірність, ентропія, спектр показників Ляпунова, і інших характеристик атрактора, необхідно мати безліч точок, що визначені у фазовому просторі розмірності і належать атрактору. Число точок у розрахунках скінчене, але зобов'язане бути достатньо великим. Згідно формулі

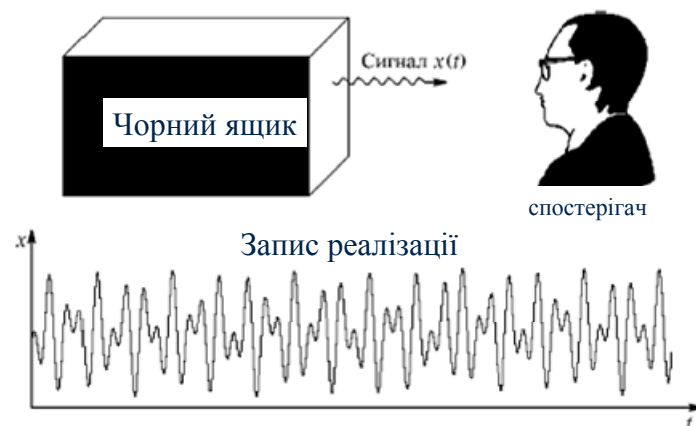
$$M \geq M_{\min} = 10^{2+0.4D}, \quad (19)$$

де D - розмірність атрактора.

У разі, коли динамічна система задана дискретним оператором відображення, точки знаходяться автоматично після задання початкових умов. Якщо динамічна система задана системою диференціальних рівнянь, то у загальному випадку рішення може бути знайдене тільки чисельною інтеграцією системи на комп'ютері. Звичайно використовують метод Рунге-Кутта 4-го порядку, похибку задають, крок часу визначається конкретною системою і повинен бути вибраний порівняно з якнайменшим з її характерних часів

Проте часто вимагається обчислити характеристики атрактора деякої реальної системи, математична модель якої невідома. При цьому, як правило, невідома і розмірність її фазового простору. У цій ситуації ми маємо у своєму розпорядженні інформацію про поведінку у часі якої-небудь однієї з динамічних змінних. До того ж і інтервал часу експериментальної реалізації природно обмежений. Чи можна у таких умовах одержати характеристики атрактора?

2.4 Відновлення атрактора методом часової затримки координат (методом запізнення - delay-time reconstruction)



Шлях до рішення цієї проблеми був запропонований Такенсом. Ним доведено, що майже для всіх гладких динамічних систем по наявній часовій

реалізації однієї спостережуваної динамічної змінної можна сконструювати новий аттрактор, основні властивості якого будуть такими ж, як у початкового.

Нехай ϵ часовий ряд експериментальних даних, що є відліками деякої фізичної величини: $\{s_k\}_{k=0}^{M-1}$. Якщо відомий крок за часом Δt , то і час $t=k*\Delta t$. Передбачається, що фізична величина s є однією із змінних динамічної системи. Система знаходиться у стаціонарному режимі, тобто фазова траєкторія проходить усередині аттрактора.

Для відновлення аттрактора Такенсом запропонований метод часової затримки координат. У n -мірному фазовому просторі будується послідовність точок вигляду:

$$x_k = (s_k, s_{k+\tau}, \dots, s_{k+(n-1)\tau}) \quad k=0, \dots, m-1, \quad m = M - (n-1)\tau \quad (20)$$

тут τ - часова затримка, n - розмірність вкладення. Основний результат Такенса полягає у наступному. Якщо $M \rightarrow \infty$, то множина точок $x_k \in R^n$ задає вкладення початкового аттрактора майже при будь-якому виборі спостережуваної змінної, якщо n не менше подвоєної розмірності початкового аттрактора.

Для оцінки характеристик реального досліджуваного аттрактора можна обчислювати характеристики відновленого аттрактора. З метою зменшення помилки, обумовленої скінченністю набору експериментальних точок $\{s_k\}_{k=0}^{M-1}$, необхідно проводити розрахунки при декількох різних значеннях M і n і добиватися незалежності одержуваних оцінок характеристик від M і n у межах заданої точності.

Для малих кроків за часом Δt значення s_k і s_{k+1} будуть близькими, тому велике значення приймає правильний вибір часової затримки τ . Необхідно прагнути вибрати τ так, щоб кореляція між s_k і s_{k+1} була по можливості мінімальною. Традиційний спосіб вибору часової затримки полягає в обчисленні автокореляційної функції часового ряду:

$$B(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (s_k - \bar{s})(s_{k+\tau} - \bar{s}), \quad m = M - \tau \quad (21)$$

Затримка τ вибирається рівною часу першого перетину нуля автокореляційною функцією. Другий спосіб заснований на обчисленні середньої взаємної інформації між двома вимірюваннями. Хай дані дві множини вимірювань A і B . Взаємна інформація між елементом a_i множини A і елементом b_j множини B визначається як кількість інформації, яку мають вимірювання a_i і b_j по відношенню один до одного:

$$I_{a_i, b_j} = \ln \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (22)$$

Якщо вимірювання незалежні, то взаємна інформація рівна нулю. Усереднюючи по всіх вимірюваннях, одержуємо:

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (23)$$

Замінюючи вимірювання a_i і b_j на s_k і s_{k+1} відповідно, одержуємо середню взаємну інформацію як функцію часової затримки τ . Затримка τ вибирається рівною часу першого мінімуму у взаємній інформації.

У разі модельних даних, коли нам відома розмірність n фазового простору динамічної системи і всі n координат кожної точки на аттракторі, кореляційну розмірність D_2 аттрактора знаходять таким чином: розглянемо кореляційний інтеграл $C(r)$, який показує відносне число пар точок аттрактора, що знаходяться на відстані, не більшому r . Якщо виконується умова $C(r) \propto r^{D_2}$, то D_2 вважають кореляційною розмірністю аттрактора. Прологарифмувавши останній вираз, отримуємо:

$$\ln C(r) \propto D_2 \ln r \quad . \quad (24)$$

Звідки одержуємо оцінку розмірності аттрактора як тангенс кута нахилу прямої, що апроксимує графік кореляційного інтеграла $C(r)$ у подвійному логарифмічному масштабі.

У разі експериментальних даних ми звичайно не знаємо розмірність фазового простору системи і маємо у своєму розпорядженні інформацію тільки про одну координату точок на аттракторі.

Тому всі розрахунки проводяться для декількох розмірностей $N=1,2,3,\dots$ фазового простору. Для відновлення аттрактора використовується метод Такенса. При цьому кореляційна розмірність аттрактора $D_2(n)$ спочатку зростає, але потім звичайно виходить на постійний рівень $D_2(n) = D_2$. Таким чином, одержують шукану кореляційну розмірність D_2 аттрактора і оцінку розмірності фазового простору системи $n \leq 2D_2 + 1$. Якщо ж вихідний сигнал динамічної системи сильно зашумлений, то розмірність аттрактора постійно росте.

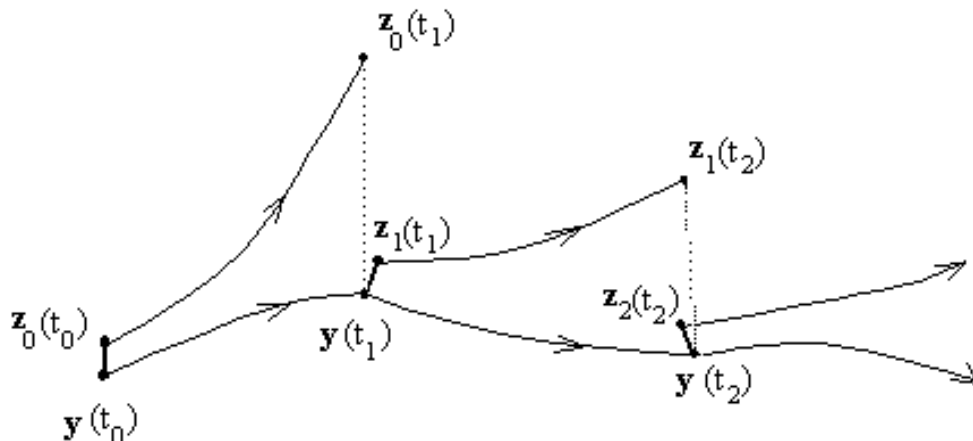
Кореляційна ентропія K_2 може бути обчислена через кореляційний інтеграл, але розглядають не тільки його залежність від відстані r , але і від розмірності фазового простору n . При цьому вважають, що

$$C(r, n) \propto r^{D_2} \exp(-nK_2) \quad . \quad (25)$$

Звідки

$$K_2(r, n) = \ln \frac{C(r, n)}{C(r, n+1)} \quad . \quad (26)$$

У 1985 році Вольф описав алгоритм знаходження найбільшого показника Ляпунова по часовому ряду даних. Він стежить за парою точок на аттракторі.



Він починається з першої точки даних $y(t_0)$ і її найближчого сусіда $z_0(t_0)$, які відокремлені на відстань r_0 . Ці дві точки еволюціонують у часі з кроком Δt поки відстань r'_0 між ними не перевищить деяку величину ε . Еволюціонуюча перша точка даних $y(t_1)$ зберігається, а новий сусід $z_1(t_1)$ шукається такий, що відстань

$$r_1 = \|y(t_1) - z_1(t_1)\| \quad (27)$$

знову менше, ніж ε і така, що $z_1(t_1)$ лежить так близько, наскільки це можливо в однаковому напрямі, що і напрям від $y(t_1)$ до $z_0(t_1)$.

Процедура продовжується до тих пір, поки прийнята за основу порівняння траєкторія не дійде до кінця часового ряду. Найбільший показник Ляпунова атрактора оцінюється як

$$\lambda_1 = \frac{1}{m \cdot \Delta t} \sum_{k=0}^{L-1} \ln \frac{r'_k}{r_k}, \quad (28)$$

де L - число кроків заміни і m - загальне число кроків за часом, протягом яких рухається траєкторія y .

Хід роботи

Щоб зазначені нижче функції виконувалися в MatLab необхідно через команду меню **File**→**Set Path** задати каталог з підкаталогами **OpenTSTOOL**.

Для початку необхідно загрузити в робочу область MatLab сигнал, який Ви збираєтесь аналізувати, причому це має бути ряд прибутковостей. Це здійснюється за допомогою наступної функції.

s = signal('ім'я файла','ascii')

Наприклад, **s = signal('xoi.txt','ascii')**, або спочатку імпортувати ряд даних до робочої області, а потім набрати в Command Window **s = signal(data)**.

Результатом буде створення об'єкту сигналу **s** в робочій області і виведення в командному вікні інформації про сигнал:

Dlens : 5818

X-Axis 1 : |

Name :

Type :

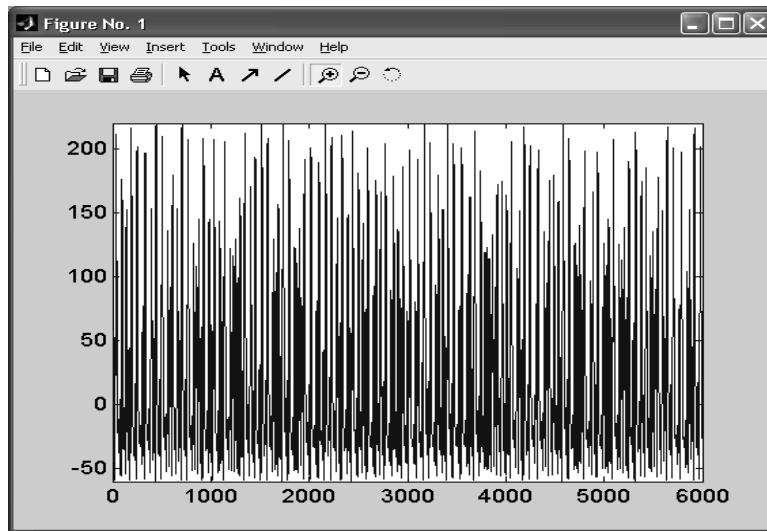
Attributes of data values :

Comment :

History :

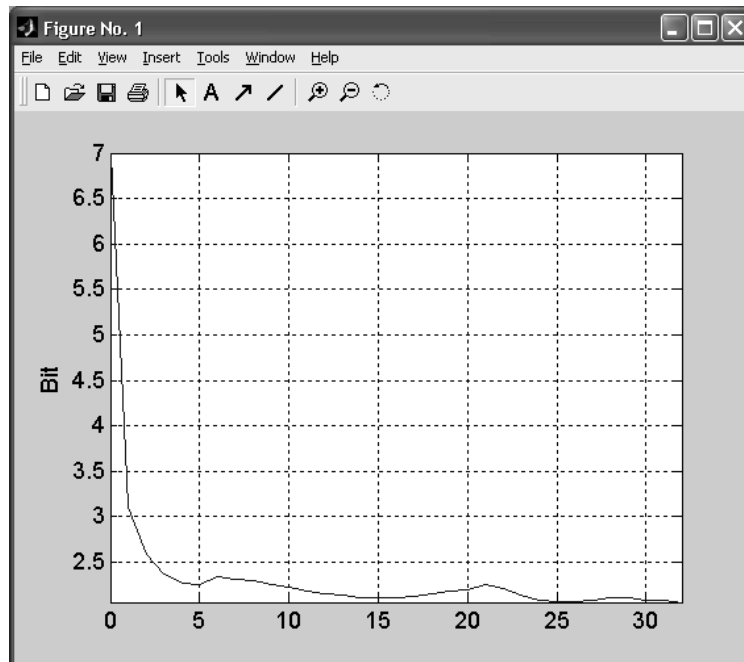
25-Nov-2006 17:03:08 : Imported from MATLAB workspace

Щоб зобразити сигнал, наберіть в командній строчці **view(s)**;



Далі визначається часова затримка як перший мінімум взаємної інформаційної функції ((міра інформації Шеннона). Другий параметр в прикладі визначає кількість значень, які виведуться в розрахунку.

```
a = amutual(s,32);  
view(a);
```



Перший мінімум знаходиться в четвертому значенні., отже, це і буде часова затримка.

Для перевірки, чи дійсно ряд даних являється хаотичним і визначення вкладеної розмірності треба задати наступну команду:

```
[E1, E2]=cao(s, maxdim, tau, NNR, Nref) .
```

s – вхідний сигнал;

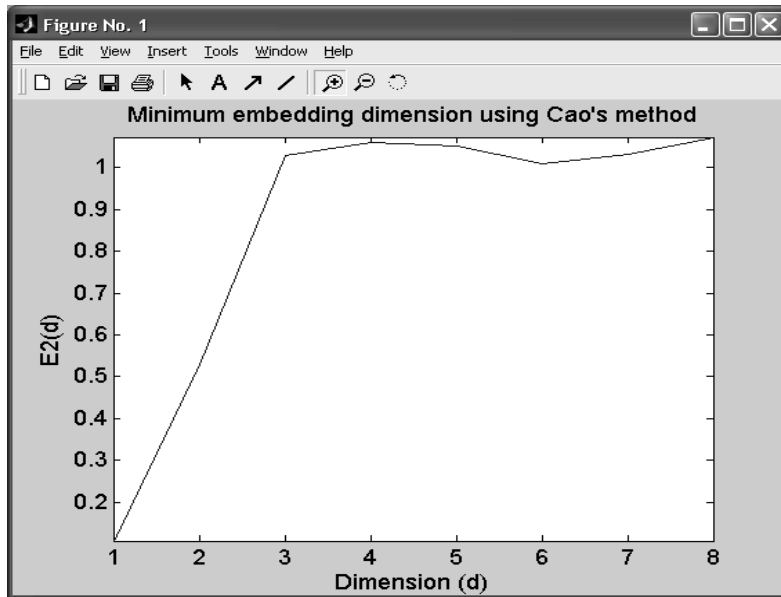
maxdim – максимальна розмірність, до якої розглядається вкладення ряду;

tau – часова затримка;

NNR – кількість найближчих сусідів;

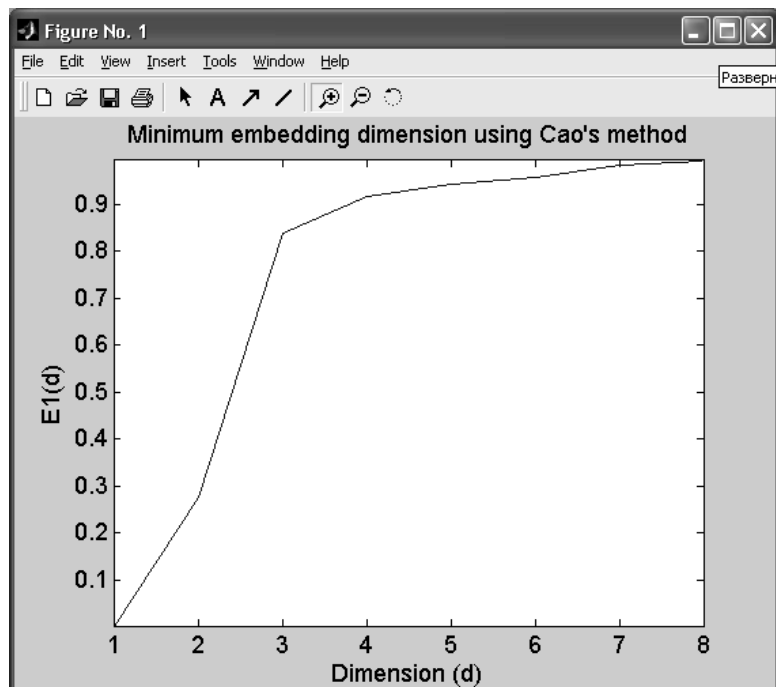
Nref – кількість точок ряду даних, яка береться для аналізу (значення -1 – використовуються всі точки).

Наприклад:
[E1, E2]=cao(s,8,4,3,1000);
view(E2);



Сигнал являється випадковим, якщо $E2(d)$ наближене до одиниці при всіх значеннях d , тоді як хаотичний сигнал буде, якщо $E2(d)$ приймає значення менше одиниці при малих значення d . Отже з отриманого значення видно, що вхідний сигнал являється хаотичним.

Команда `view(E1)` дасть зображення для пошуку вкладеної розмірності за методом Као.



Отже, графік функції $E1(d)$ переходить в майже не змінюючу нахил пряму при досягненні значення $d=3$. Значить мінімальною розмірністю вкладання для вхідного сигналу буде $d=3$.

Зобразити графік вкладеного сигналу можна за допомогою наступних функцій

`embed (s, dim, delay)`

`s` - сигнал

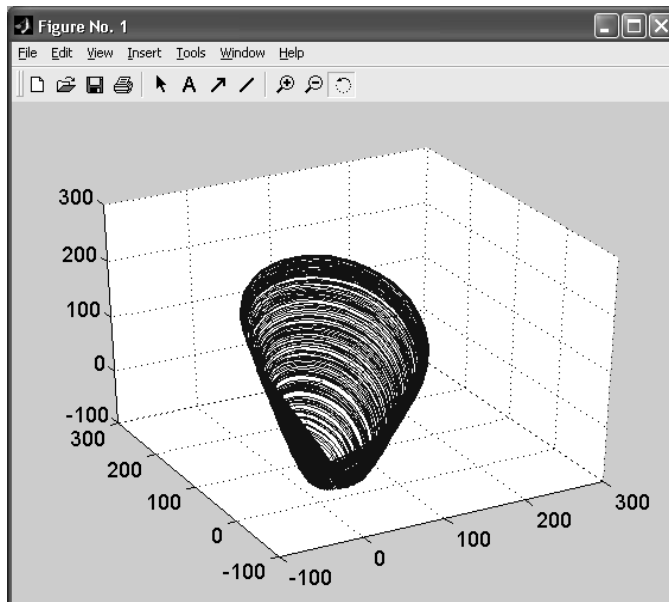
`dim` - вкладена розмірність

`delay` – часова затримка

Наприклад:

```
e = embed(s, 3, 4);
```

```
view(e);
```



Далі визначається кореляційна розмірність за допомогою функції **corrsum**:

corrsum(pointset, query indices, range, exclude, bins)

pointset – матриця, яка містить координати точок початкового сигналу у вкладеній розмірності;

query indices – індекси точок, на основі яких розраховується кореляційна розмірність (-1 - беруться до уваги всі точки)

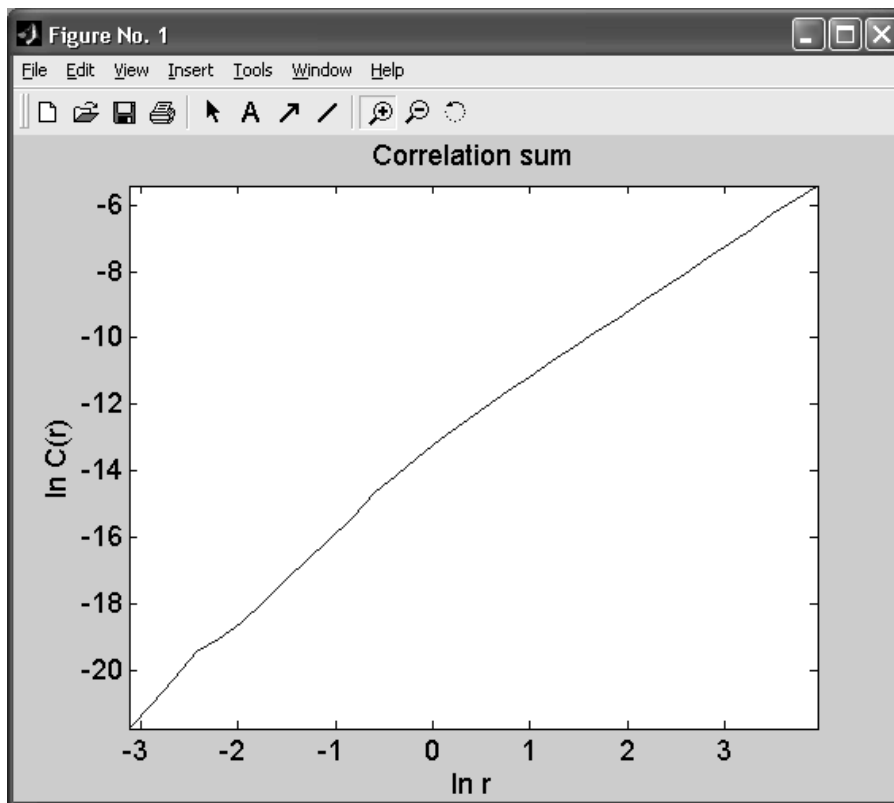
range – задається частина діаметру атарактора, в якій ведеться розрахунок кореляційної розмірності (задається від 0 до 1)

exclude – якщо точки матриці виходять за межі визначеної границі, їх індекси виключаються з розрахунків. Наприклад, якщо розглядається 124 точка, а `exclude=3`, то точки з індексами $124-3=121$ і $124+3=127$ виключаються з розрахунку. Якщо `exclude = 0` точки виключаються з розрахунку автоматично, в ході розрахунків.

bins – значення дистанцій, для яких розраховується кореляційна сума

Наприклад:

```
view(corrsum(e, -1, 0.05, 40, 32));
```



Визначити нахил кривої кореляційної суми можна за допомогою оцінки Такенса (функція `takens_estimator`).

Параметри в неї вводяться такі ж як і для розрахунку кореляційної суми.

```
takens_estimator(e, -1, 0.05, 40)
```

Результат:

Using euclidian metric to calculated distances

Number of reference points : 5993

Upper bound for attractor size : 619.160418

Maximal search radius : 15.479010

```
ans = 1.9150
```

Якщо отримане значення ціле число, то атрактор – «нормальний» геометричний об'єкт, такий як точка ($D_C = 1$) або площина ($D_C = 2$); якщо це значення не ціле, тоді атрактор - "дивний" і система показує хаос.

Оцінюючи найбільшу експоненту Ляпунова, ми визначаємо горизонт прогнозу як проміжок часу, на якому траєкторії атрактора ще не встигли розійтись:

```
largelyap(pointset, query indices, taumax, k exclude)
```

`pointset` – індекси точок, на основі яких проводиться розрахунок;

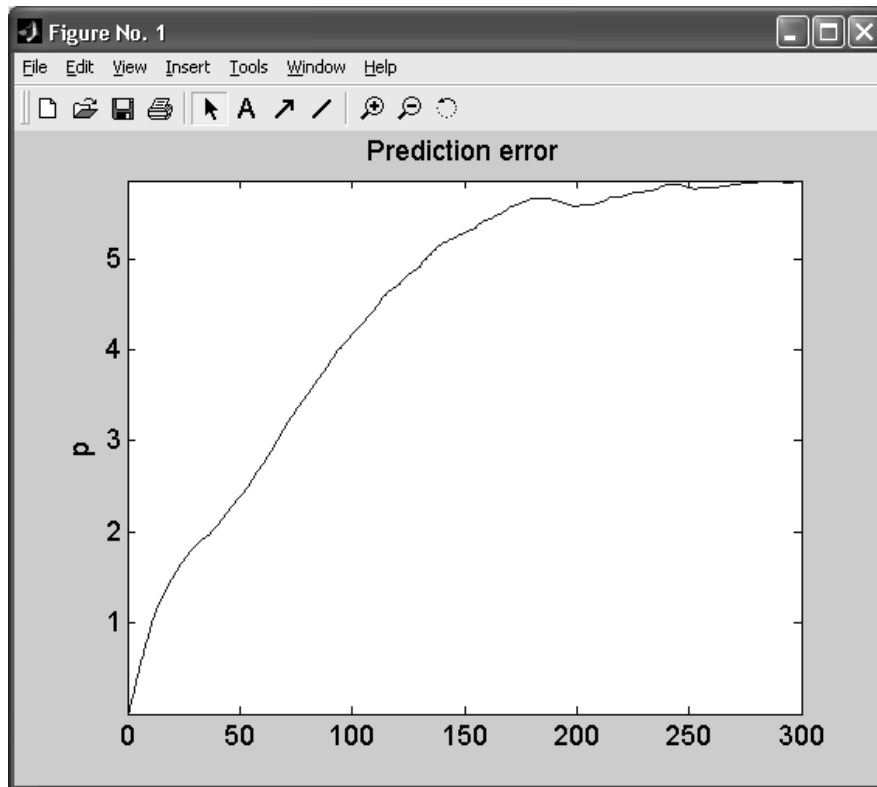
`taumax` – часова затримка;

`k` – кількість найближчих сусідів;

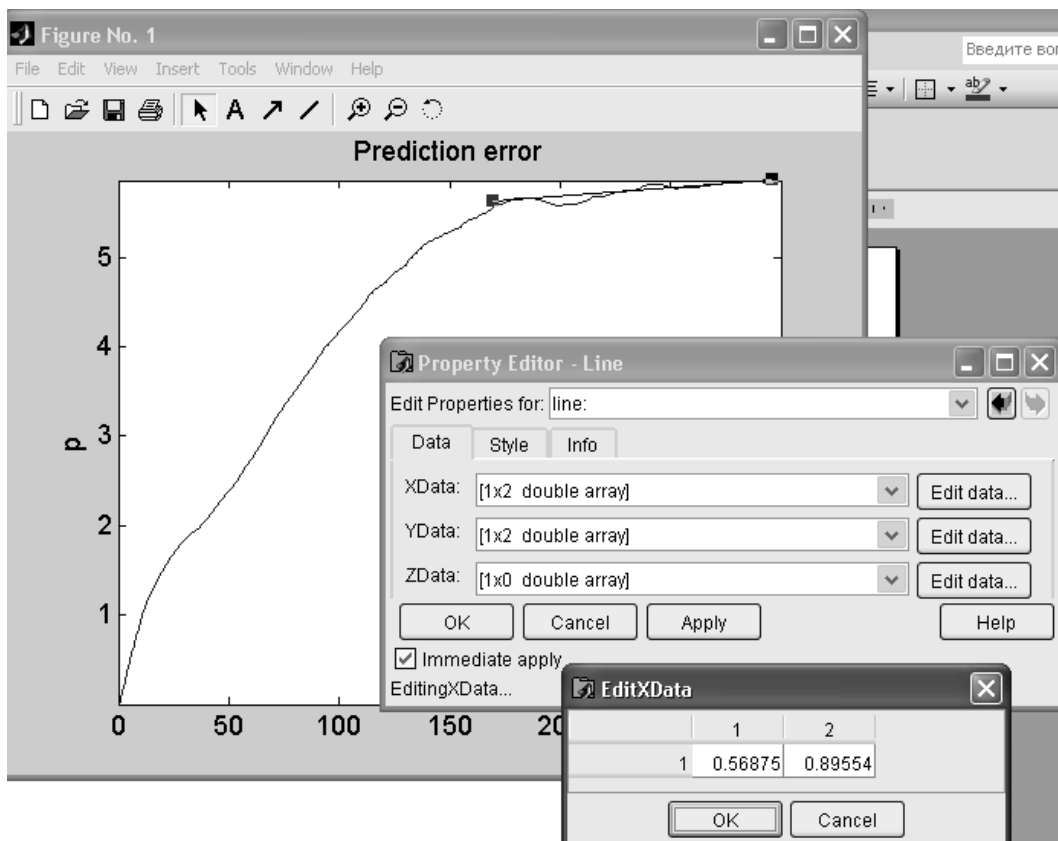
`exclude` – значення, які виключаються з розрахунку.

Візуалізація результатів проводиться за допомогою команди

```
view(largelyap(e, 1000, 300, 40, 2));
```



Для визначення часу прогнозу на графіку для проміжку, де функція більш-менш вирівнюється, будується лінія тренду.



Для цієї лінії через вікно властивостей визначаються різниці між крайніми координатами x та y . Поділивши Δx на Δy ми визначимо горизонт прогнозу. Наприклад, $(0,89-0,56)/(0,92-0,89)= 11$ днів – період прогнозування.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити нелінійні динамічні властивості вибраного економічного ряду.

Контрольні питання

1. Поясніть, які відмінності хаотичного ряду динаміки від інших процесів
2. Яким чином наявність або відсутність хаотичності може впливати на можливість прогнозування розвитку певного процесу?

Список використаної літератури

1. Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П. Нелинейная динамика и проблемы прогноза // Вестник российской академии наук , 2001, т.71, № 3.-С.210-232
2. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ, 2002, вып.1.-С.85-116
3. Шустер Г. Детерминированный Хаос: Пер. с англ. – М.: Мир, 2000.- 253 с.
4. Рюэль Д. Случайность и хаос.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.-192 с.
5. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Пер. с англ. – М.: Мир, 2000.-333 с.

Індивідуальна робота № 11

Тема. Використання рекурентного аналізу для моделювання і прогнозування нелінійних динамічних властивостей складних систем

Мета: Навчитися інструментарію нелінійної динаміки, який відноситься до рекурентних властивостей нестационарних динамічних рядів

1. Фазовий простір, його реконструкція
2. Рекурентний аналіз
3. Аналіз діаграм

Теоретичні відомості

Дослідження складних систем, як природних, так і штучних, показали, що в їх основі лежать нелінійні процеси, ретельне вивчення яких необхідне для розуміння і моделювання складних систем. У останні десятиліття набір традиційних (лінійних) методик дослідження був істотно розширений нелінійними методами, одержаними з теорії нелінійної динаміки і хаосу; багато досліджень були присвячені оцінці нелінійних характеристик і властивостей процесів, що протікають в Природі (скейлінг, фрактальна розмірність). Проте більшість методів нелінійного аналізу вимагає або достатньо довгих, або стаціонарних рядів даних, які досить важко одержати з Природи. Більш того, було показано, що дані методи дають задовільні результати для моделей реальних систем, що ідеалізуються. Ці чинники вимагали розробки нових методик нелінійного аналізу даних.

Стан природних або штучних систем, як правило, змінюється в часі. Вивчення цих, часто складних, процесів – важлива задача в багатьох дисциплінах, дозволяє зрозуміти і описати їх суть, наприклад, для прогнозування стану на деякий час в майбутнє. Метою таких досліджень є заходження математичних моделей, які б достатньо відповідали реальним процесам і могли б бути використані для вирішення поставлених задач.

Розглянемо ідею і коротко теорію рекурентного аналізу, наведемо деякі приклади, розглянемо його можливі області застосування при аналізі і прогнозування складних фінансово-економічних систем.

1. Фазовий простір, його реконструкція

Стан системи описується її змінними стану

$$x^1(t), x^2(t), \dots, x^d(t),$$

де верхній індекс – номер змінної. Набір із d змінних стану під час t складає вектор стану $\vec{x}(t)$ в d -вимірному фазовому просторі. Даний вектор переміщається в часі в напрямі, визначуваному його вектором швидкості:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \partial_t \vec{x}(t) = \vec{F}(x) \quad (1) .$$

Послідовність векторів $\vec{x}(t)$ утворює траєкторію у фазовому просторі, причому поле швидкості \vec{F} дотичне до цієї траєкторії. Еволюція траєкторії описує динаміку системи і її аттрактор. Знаючи \vec{F} , можна одержати інформацію про стан системи в момент t шляхом інтеграції виразу (1). Оскільки форма траєкторії дозволяє судити про характер процесу (періодичні або хаотичні процеси мають характерні фазові портрети), то для визначення стану системи не обов'язково проводити інтеграцію, достатньо побудувати графічне відображення траєкторії.

При дослідженні складних систем часто немає інформації про всі змінні стану, або не все з них можливо виміряти. Як правило, є єдине спостереження, проведене через дискретний часовий інтервал Δt . Таким чином, вимірювання записуються у вигляді ряду $u_i(t)$, де $t = i \cdot \Delta t$. Інтервал Δt може бути постійним, проте це не завжди можливо і створює проблеми для застосування стандартних методів аналізу даних, що вимагають рівномірної шкали спостережень.

Взаємодії і їх кількість в складних системах такі, що навіть по одній змінній стану можна судити про динаміку всієї системи в цілому (даний факт був встановлений групою американських учених при вивченні турбулентності). Таким чином, еквівалентна фазова траєкторія, що зберігає структури оригінальної фазової траєкторії, може бути відновлена з одного спостереження або часового ряду за теоремою Такенса (Takens) методом часових затримок:

$$\vec{x}(t) = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+(m-1)\tau}) ,$$

де m – розмірність вкладення, τ – часова затримка (реальна часова затримка визначається як $\tau \cdot \Delta t$). Топологічні структури відновленої траєкторії зберігаються, якщо $m \geq 2 \cdot d + 1$, де d – розмірність аттрактора. На практиці більшості випадків аттрактор може бути відновлений і при $m \leq 2d$ (див. рис. 1). Затримка, як правило, вибираються апіорно.

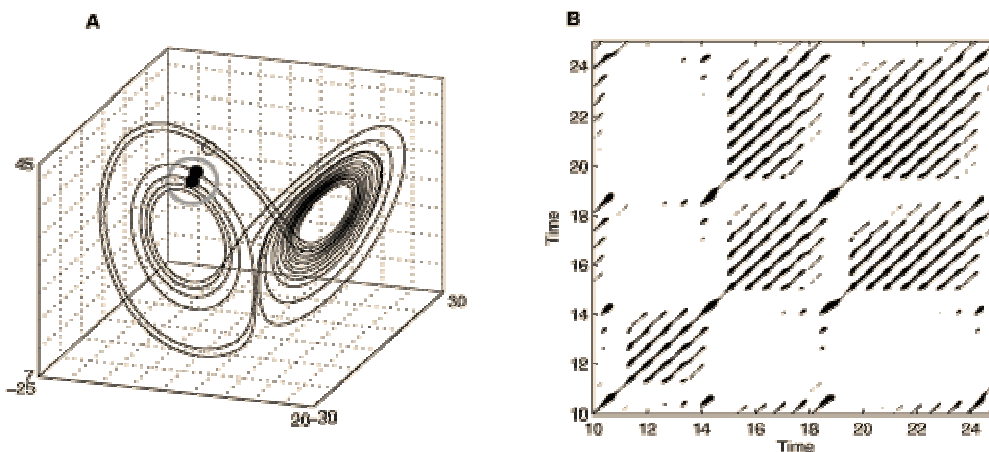


Рис. 1. Реконструйований аттрактор системи Лоренца у тривимірному фазовому просторі і його рекурентна карта

Існує декілька підходів до вибору мінімально достатньої розмірності m , крім аналітичного. Високу ефективність показали методи, засновані на концепції помилкових найближчих точок (false nearest neighbours, FNN). Суть її заключається у тому, що при зменшенні розмірності вкладення відбувається збільшення кількості помилкових точок, що потрапляють в околицю будь-якої точки фазового простору. Звідси витікає простий метод – визначення кількості FNN як функції від розмірності. Існують і інші методи, засновані на цій концепції – наприклад, визначення відносин відстаней між одними і тими ж сусідніми точками при різних m . Розмірність атрактора також може бути визначена за допомогою крос-кореляційних сум.

2. Рекурентний аналіз

Процесам в Природі властива яскраво виражена рекурентна поведінка, така, як періодичність або іррегулярна циклічність. Більш того, рекурентність (повторюваність) станів в значенні проходження подальшої траєкторії достатньо близько до попередньої є фундаментальною властивістю дисипативних динамічних систем. Ця властивість була відмічена ще в 80-х роках XIX століття французьким математиком Пуанкаре (Poincare) і згодом сформульовано у вигляді «теореми рекурентності», опублікованої в 1890 р.:

Якщо система зводить свою динаміку до обмеженої підмножини фазового простору, то система майже напевно, тобто з вірогідністю, практично рівною 1, скільки завгодно близько повертається до якого-небудь спочатку заданого режиму.

Суть цієї фундаментальної властивості у тому, що, не дивлячись на те, що навіть саме мале збурення в складній динамічній системі може привести систему до експоненціального відхилення від її стану, через деякий час система прагне повернутися до стану, деяким чином близького до попереднього, і проходить при цьому подібні етапи еволюції.

Переконалися в цьому можна за допомогою графічного зображення траєкторії системи у фазовому просторі. Проте можливості такого аналізу сильно обмежені. Як правило, розмірність фазового простору складної динамічної системи більша трьох, що робить практично незручним його розгляд на пряму; єдина можливість – проєкції в дво- і тривимірні простори, що часто не дає вірного уявлення про фазовий портрет.

У 1987 р. Екман (Eckmann) і співавтори запропонували спосіб відображення m -мірної фазової траєкторії станів системи $\vec{x}(t)$ завдовжки N на двовимірну квадратну двійкову матрицю розміром $N \times N$, в якій 1 (чорна точка) відповідає повторенню стану при деякому часі i в деякий інший час j , а обидві координатні осі є осями часу. Таке представлення було назване рекурентною діаграмою (recurrence plot, RP), оскільки воно фіксує інформацію про рекурентну поведінку системи.

Математично вищесказане описується як

$$R_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|), \bar{x} \in \mathfrak{R}^m, i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де N – кількість даних станів, x_i, ε_i – розмір околиці точки \bar{x} у момент i , $\|\cdot\|$ – норма і $\Theta(\cdot)$ – функція Хевісайда.

Непрактично і, як правило, неможливо знайти повну рекурентність у значенні $\bar{x}_i \equiv \bar{x}_j$ (стан динамічної, а особливо – хаотичної системи не повторюється повністю еквівалентно початковому стану, а підходить до нього скільки завгодно близько). Таким чином, рекурентність визначається як достатня близькість стану \bar{x}_j до стану \bar{x}_i . Іншими словами, рекурентними є стани \bar{x}_j , які потрапляють в m -вимірну околицю з радіусом ε_i і центром в \bar{x}_i . Ці точки \bar{x}_j називаються **рекурентними точками** (recurrence points) (див. Рис.2).

Оскільки $R_{i,i} = 1 (i = 1, \dots, N)$ за визначенням, то рекурентна діаграма завжди містить чорну діагональну лінію – лінію ідентичності (line of identity, LOI) під кутом $\pi/4$ до осей координат. Довільно узята рекурентна точка не несе якої-небудь корисної інформації про стани в часи i і j . Тільки вся сукупність рекурентних точок дозволяє відновити властивості системи.

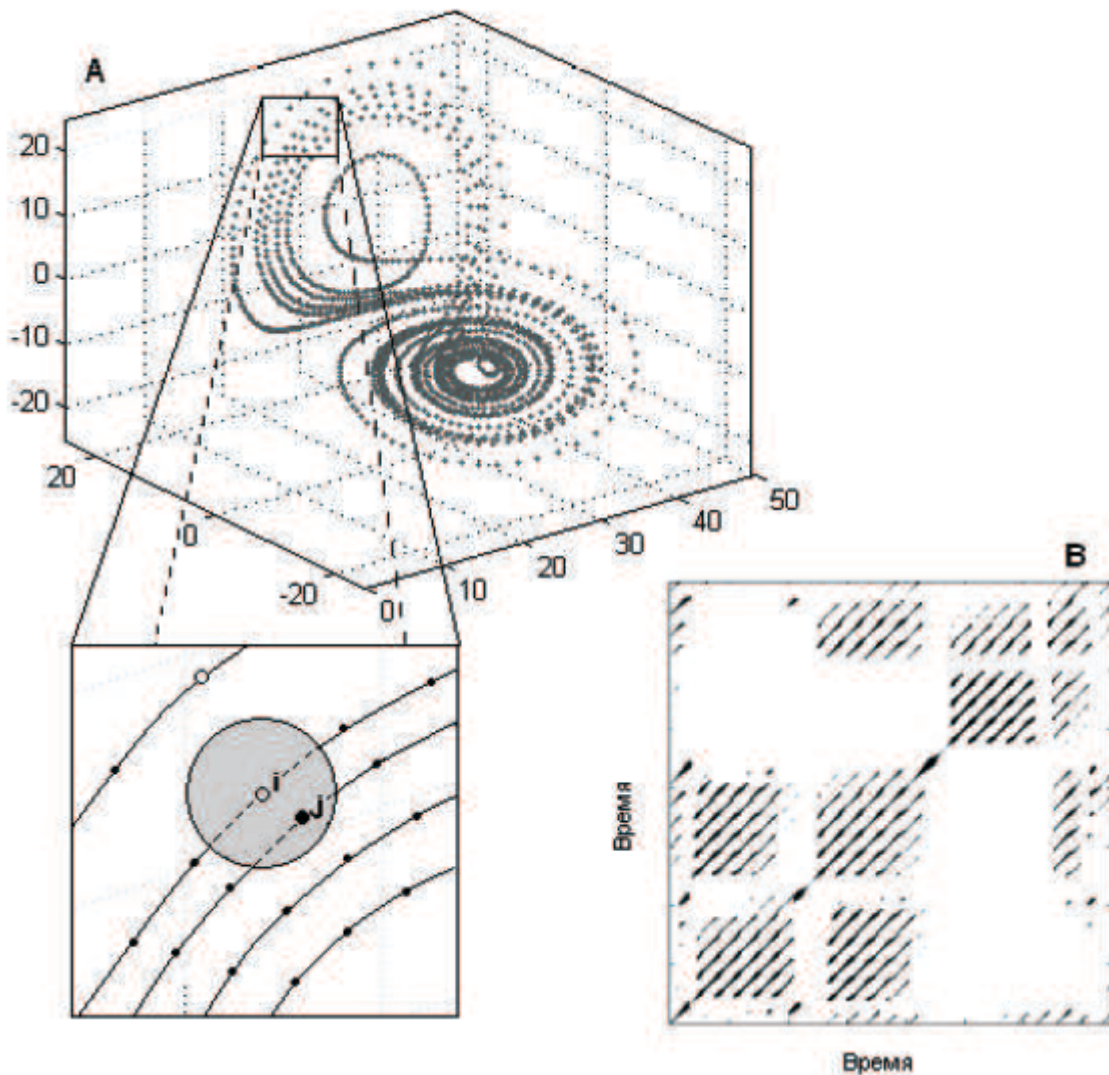
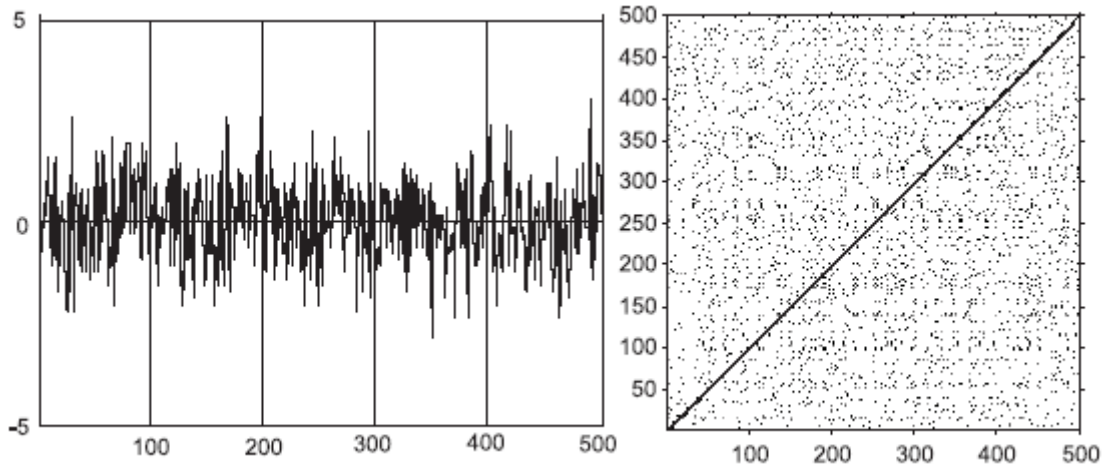
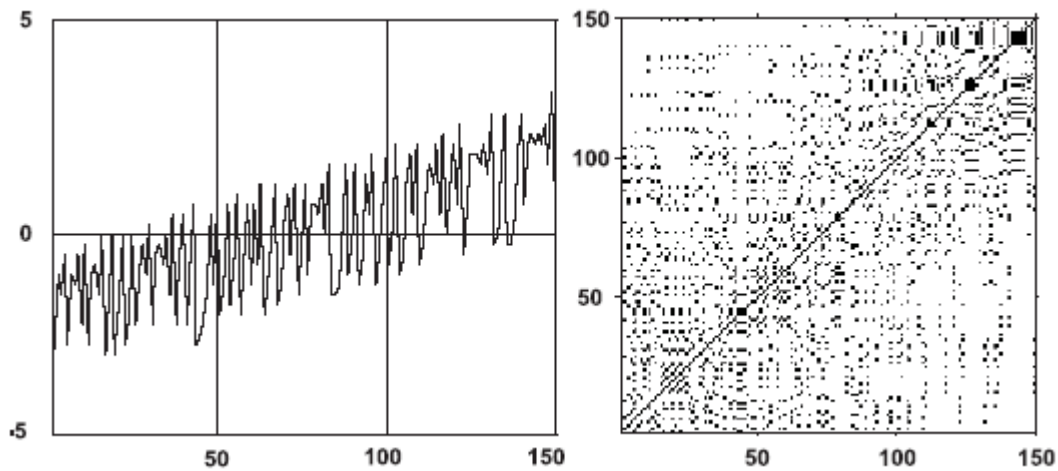


Рис. 2. Атрактор Лоренця, вибір рекурентних точок i та j в околі ε_i (на вставці виділено) та рекурентна карта у координатах «час-час»

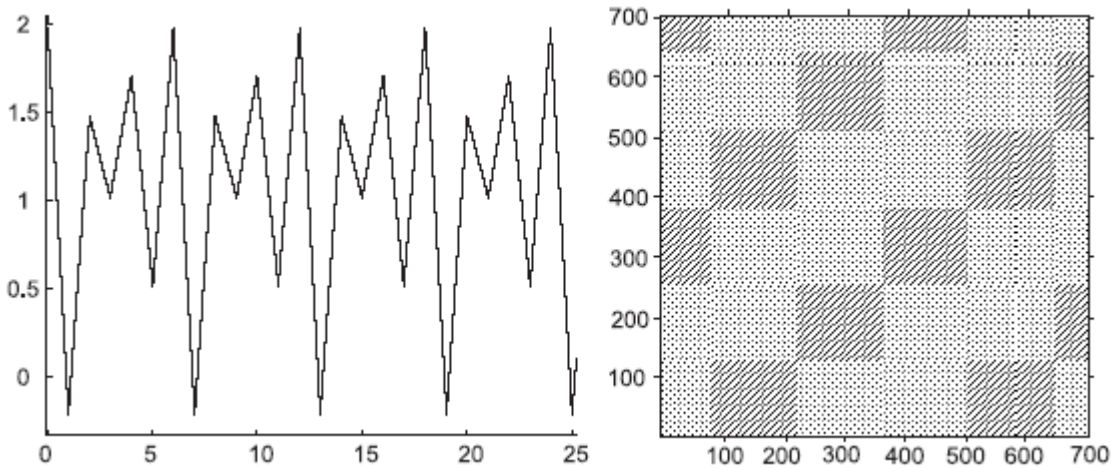
Зовнішній вигляд рекурентної діаграми дозволяє судити про характер процесів, які протікають в системі, наявності і впливі шуму, станів повторення і завмирання (ламінарності), здійсненні в ході еволюції системи різких змін стану (екстремальних подій). На рис. 3 наведені деякі з типових процесів і їх рекурентні карти.



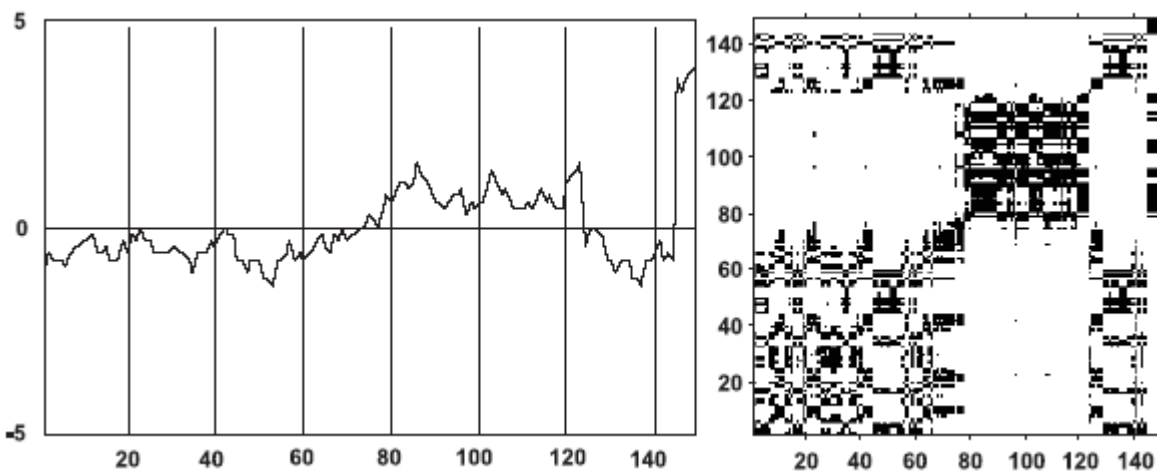
1. Однорідна топологія



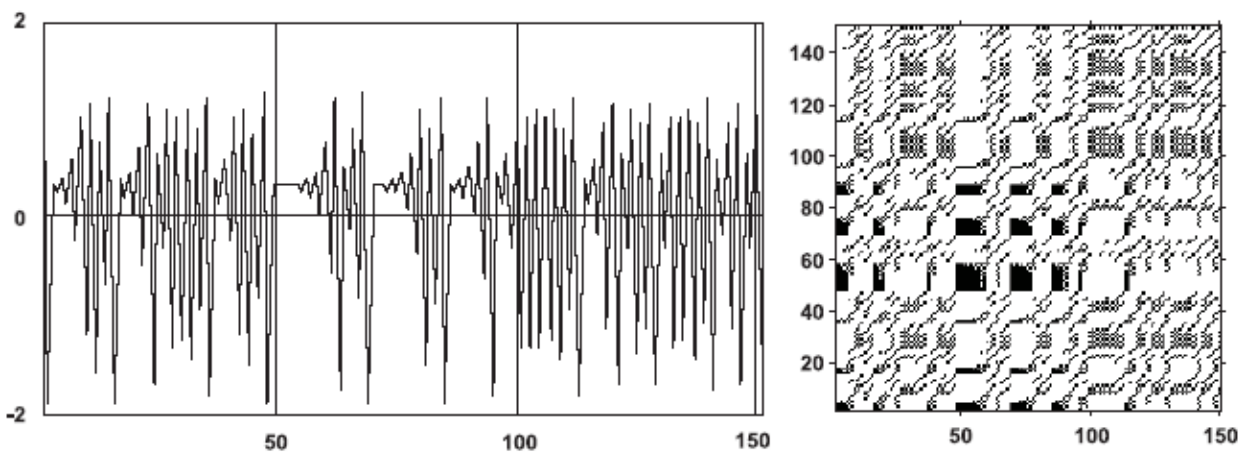
2. Дрейф



3. Осцилююча поведінка системи



4. Контрастна топологія:



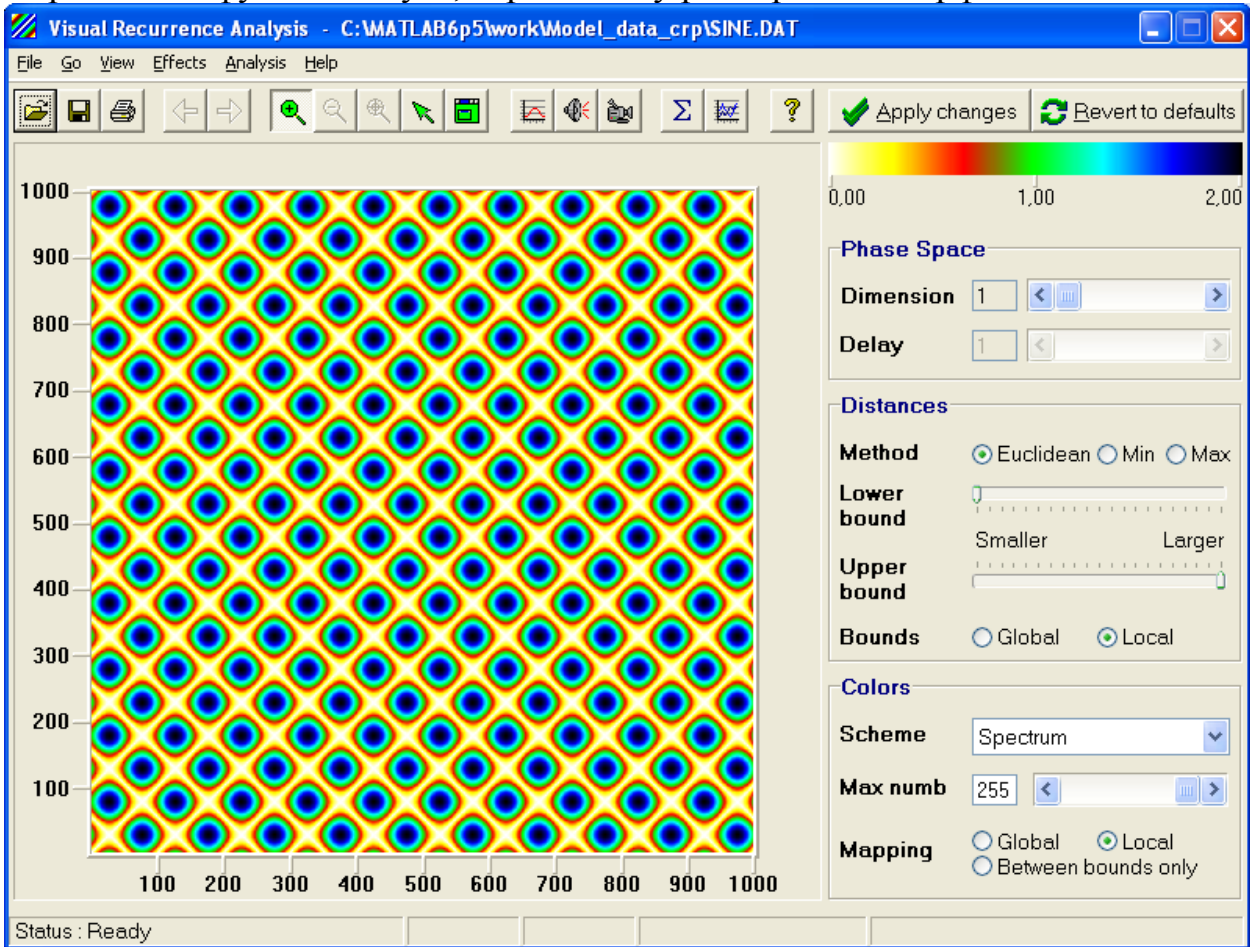
5. Ламінарність процесу

Рис. 3. Типові динамічні ряди і їх рекурентні карти

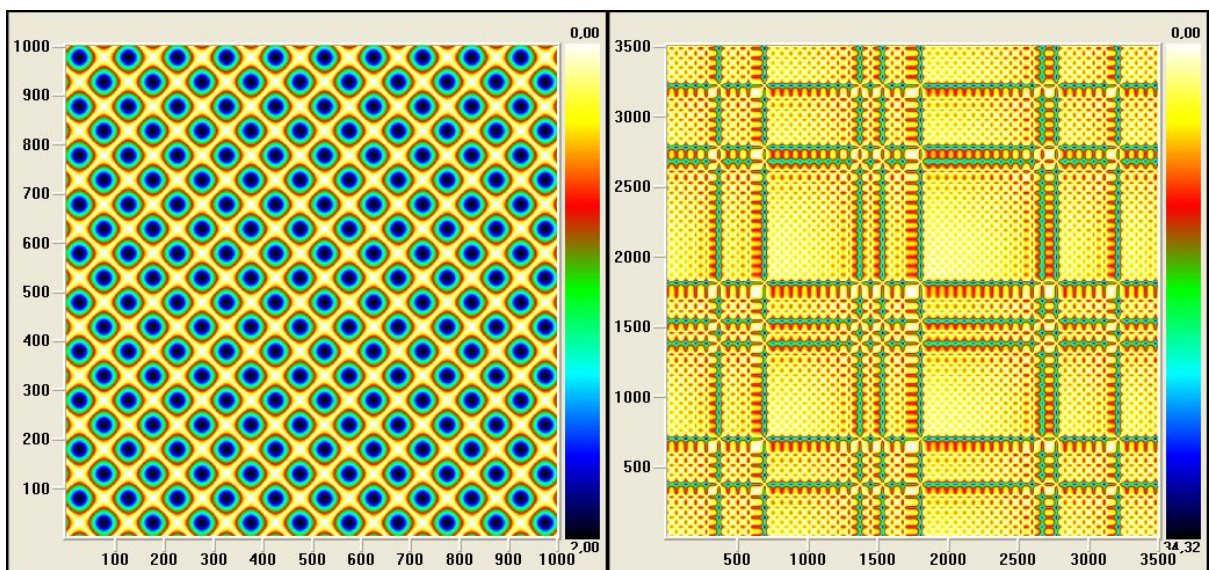
У даній роботі ми будемо використовувати два найбільш розповсюджені програмні засоби рекурентного аналізу:

- візуальний рекурентний аналіз (Visual Recurrence Analyses – VRA);
- (крос-) рекурентні діаграми (Cross Recurrence Plots – CRP).

З робочого столу комп'ютера активуємо першу з програм - VRA. Вибравши із папки стандартних модельних даних за адресою MatLab6p5\work\model_data числовий ряд, який, наприклад, відповідає періодичній функції синуса, отримаємо у розпорядок інтерфейс:



Рекурентні діаграми для деяких модельних даних зображені на рис.2.



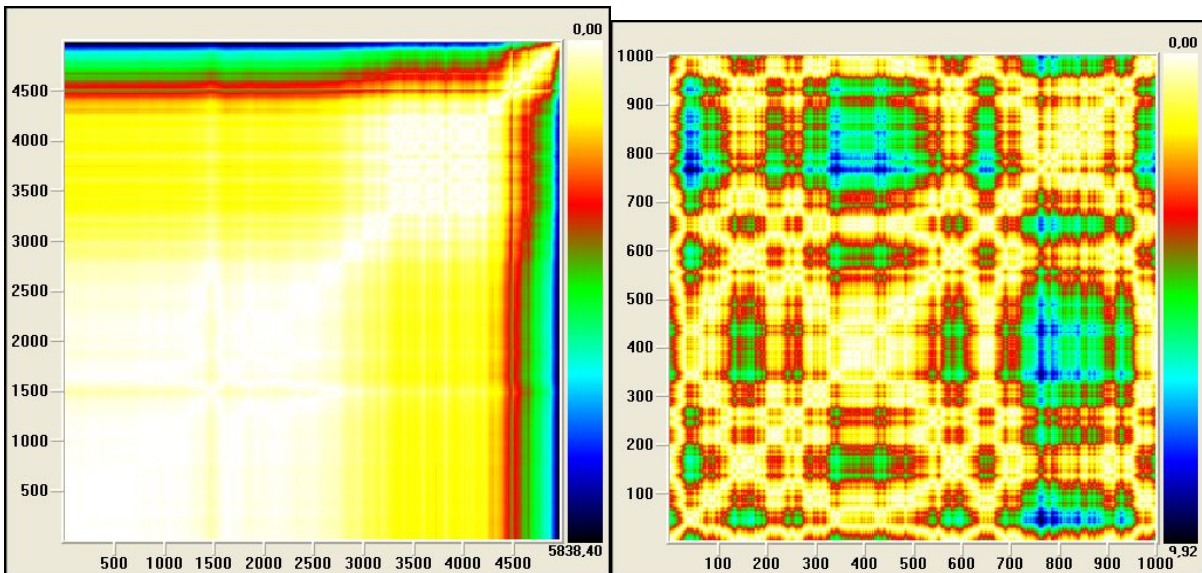


Рис. 2. Приклади рекурентних діаграм: послідовно зліва направо і зверху вниз маємо діаграми для (1) функції $\sin(x_i)$; (2) атрактора Лоренця; (3) фрагменту фінансового ряду, відомого як індекс Доу Джонса (Dow Jones); (4) часового ряду, який відповідає властивостям броунівського руху

Порогова відстань ε_i може вибиратися як безпосередньо для кожної точки, виходячи з отримання в такій околиці деякої наперед визначеної кількості рекурентних даних точок (при цьому ми одержуємо несиметричну діаграму $\mathbf{R}_{i,j} \neq \mathbf{R}_{j,i}$), так і залишатися весь час постійним, що дає симетричну діаграму $\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}_{j,i}$ і є найбільш використовуваним варіантом. Тип норми також впливає на вигляд діаграми. Як правило, використовуються норми L_1 , L_2 , (евклідова норма), L_∞ (максимальна норма). Межі цих норм мають різні фігури, що стосовно підходу з постійним ε означає, що норма L_∞ забезпечує знаходження найбільшої, L_2 – середньої, а L_1 – мінімальної кількості сусідніх точок (див. рис. 3). Як правило, при побудові рекурентних діаграм використовується норма L_∞ , оскільки, по-перше, вона незалежна від розмірності фазового простору, по-друге, найпростіше обчислювана і, по-третє, дозволяє вивчати діаграми теоретично, оскільки аналітичні вирази для L_∞ розв'язуються простіше, ніж для будь-якої іншої норми [10]. Незалежність від розмірності знаходить застосування при аналізі реконструйованих часових рядів з різними розмірностями вкладення, тобто рекурентні діаграми різних вкладень можуть порівнюватись напряму, тоді як для решти норм потрібне масштабування.



Рис. 3. Основні норми з однаковим радіусом навколо точки фазового простору (чорна точка), зображені для двовимірного фазового простору: а – L_1 , б – L_2 , в – L_∞

3. Аналіз діаграм

Очевидно, що процеси різної поведінки даватимуть рекурентні діаграми з різним малюнком. Таким чином, візуальна оцінка діаграм може дати уявлення про еволюцію досліджуваної траєкторії. Виділяють два основних класи структури зображення: **топология** (*typology*), що представляється крупномасштабними структурами, і **текстура** (*texture*), що формується дрібномасштабними структурами.

Топология дає загальне уявлення про характер процесу. Виділяють чотири різних класи (див. рис. 4):

- *однорідні* рекурентні діаграми типові для стаціонарних і автономних систем, в яких час релаксації малий у порівнянні з довжиною ряду;
- *періодичні* структури, що повторюються (діагональні лінії, узор у шаховому порядку) відповідають різним осцилюючим системам з періодичністю в динаміці;
- *дрейф* відповідає системам з параметрами, що поволі змінюються, що робить білими лівий верхній і правий нижній кути рекурентної діаграми;
- різкі зміни в динаміці системи, рівно як і екстремальні ситуації, обумовлюють появу білих областей або смуг. *Рекурентні діаграми спрощують* виявлення екстремальних і рідкісних подій.

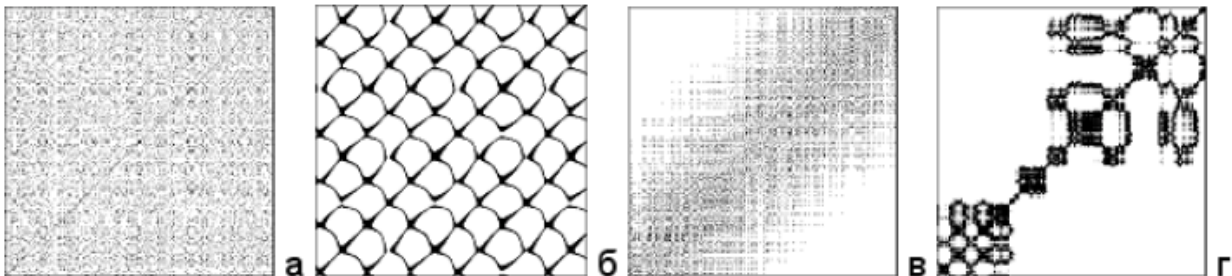


Рис. 4. Характерні топології рекурентних діаграм: а – однорідна (нормально розподілений шум); б – періодична (генератор Ван дер Поля); в – дрейф (відображення Ікеди з накладеною послідовністю, що лінійно росте); г – контрастні області або смуги (узагальнений броунівський рух)

Докладний розгляд рекурентних діаграм дозволяє виявити дрібномасштабні структури – текстуру, яка складається з простих точок, діагональних, горизонтальних і вертикальних ліній. Комбінації вертикальних і горизонтальних ліній формують прямокутні кластери точок.

- *самотні, окремо розташовані рекурентні точки* з'являються в тому разі, коли відповідні стани рідкісні, або нестійкі в часі, або викликані сильною флуктуацією. При цьому вони не є ознаками випадковості або шуму;
- *діагональні лінії* $R_{i+k, j+k} = 1$ (при $k = 1..l$ *del* – довжина діагональної лінії) з'являються у разі, коли сегмент траєкторії у фазовому просторі пролягає

паралельно іншому сегменту, тобто траєкторія повторює саму себе, повертаючись в одну і ту ж область фазового простору у різний час. Довжина таких ліній визначається часом, протягом якого сегменти траєкторії залишаються паралельними; напрям (кут нахилу) ліній характеризує внутрішній час підпроцесів, відповідних даним сегментам траєкторії. Проходження ліній паралельно лінії ідентичності (під кутом $\pi/4$ до осей координат) свідчить про однаковий напрям сегментів траєкторії, перпендикулярно – про протилежний («відображені» сегменти), що може також бути ознакою реконструкції фазового простору з невідповідною розмірністю вкладення. Нерегулярна поява діагональних ліній є ознакою хаотичного процесу;

- *вертикальні (горизонтальні) лінії* $R_{i,j+k}=1$ (при $k=1..v$, де v – довжина вертикальної або горизонтальної лінії) виділяють проміжки часу, в котрі стан системи не змінюється або змінюється трохи (система як би «заморожена» на цей час), що є ознакою «ламінарих» станів.

Подальшу роботу будемо проводити засобами CRP – більш потужного пакету, розробленого засобами MatLab. З ним можна ознайомитись, прочитавши документ **manual.pdf**, який містить основні функції (крос-) рекурентного аналізу.

Рекурентну карту можна побудувати за допомогою функції **crp(a)** – **Cross Recurrence Plot**, де a – вихідний часовий ряд, який попередньо повинен бути імпортованим у робочу область MatLab: **File/Import Data/**вибраний файл. Наприклад, візьмемо часовий ряд, який містить кризу фінансового ринку. Файл з тим же іменем з'явиться в робочій області (**Workspace**). Для зручності довге ім'я файлу можна змінити командою **Rename**, наприклад, на ім'я « a ». І тоді, набравши у вікні команд **crp(a)** та натиснувши кнопку **Apply**, одержимо рисунок, подібний зображеному на рис.5.

Аналогічно одержаний і рисунок 6 для модельного ряду тригонометричного синуса.

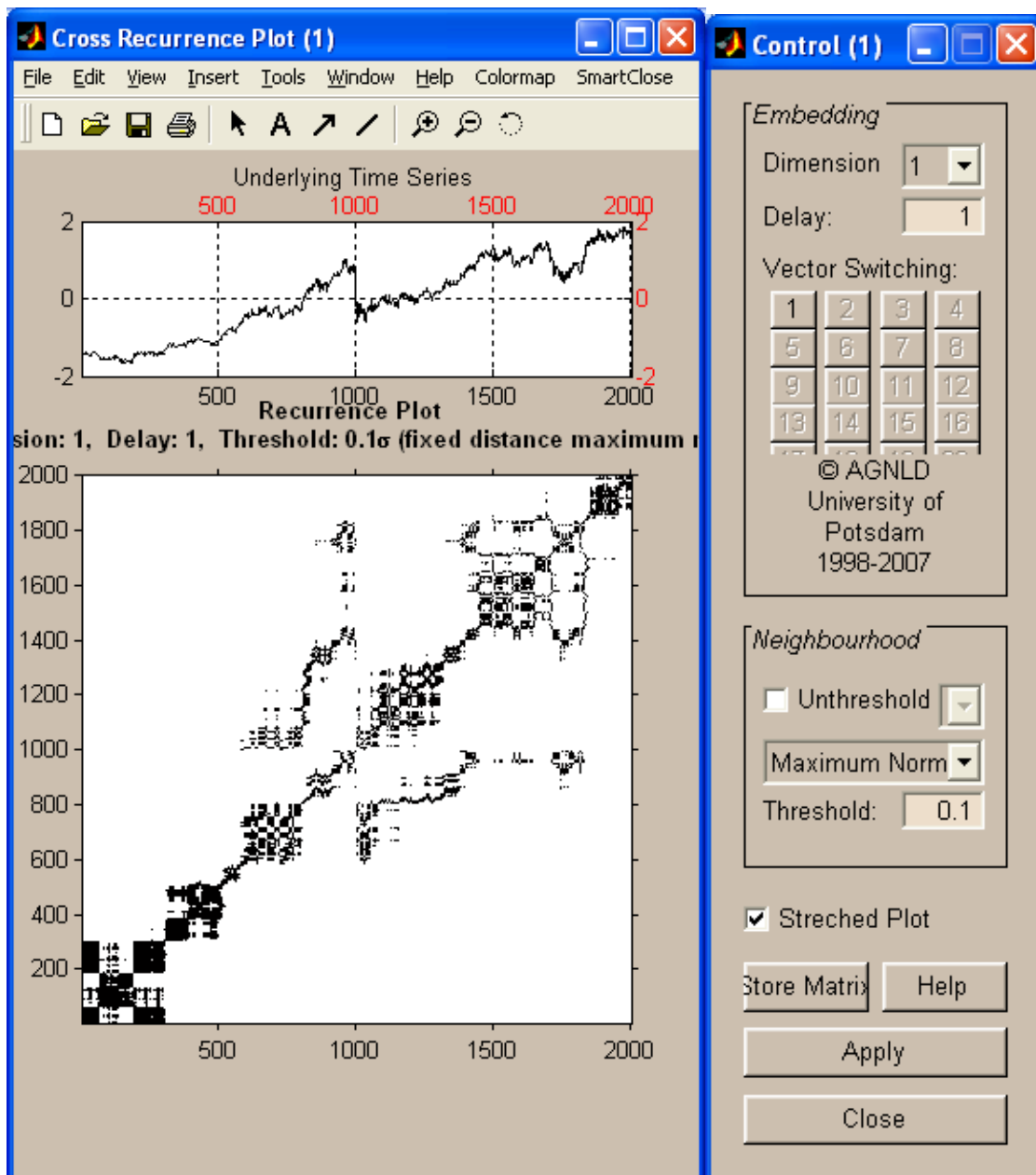


Рис. 5. Результати роботи функції **crp(a)** для часового ряду, що містить кризу

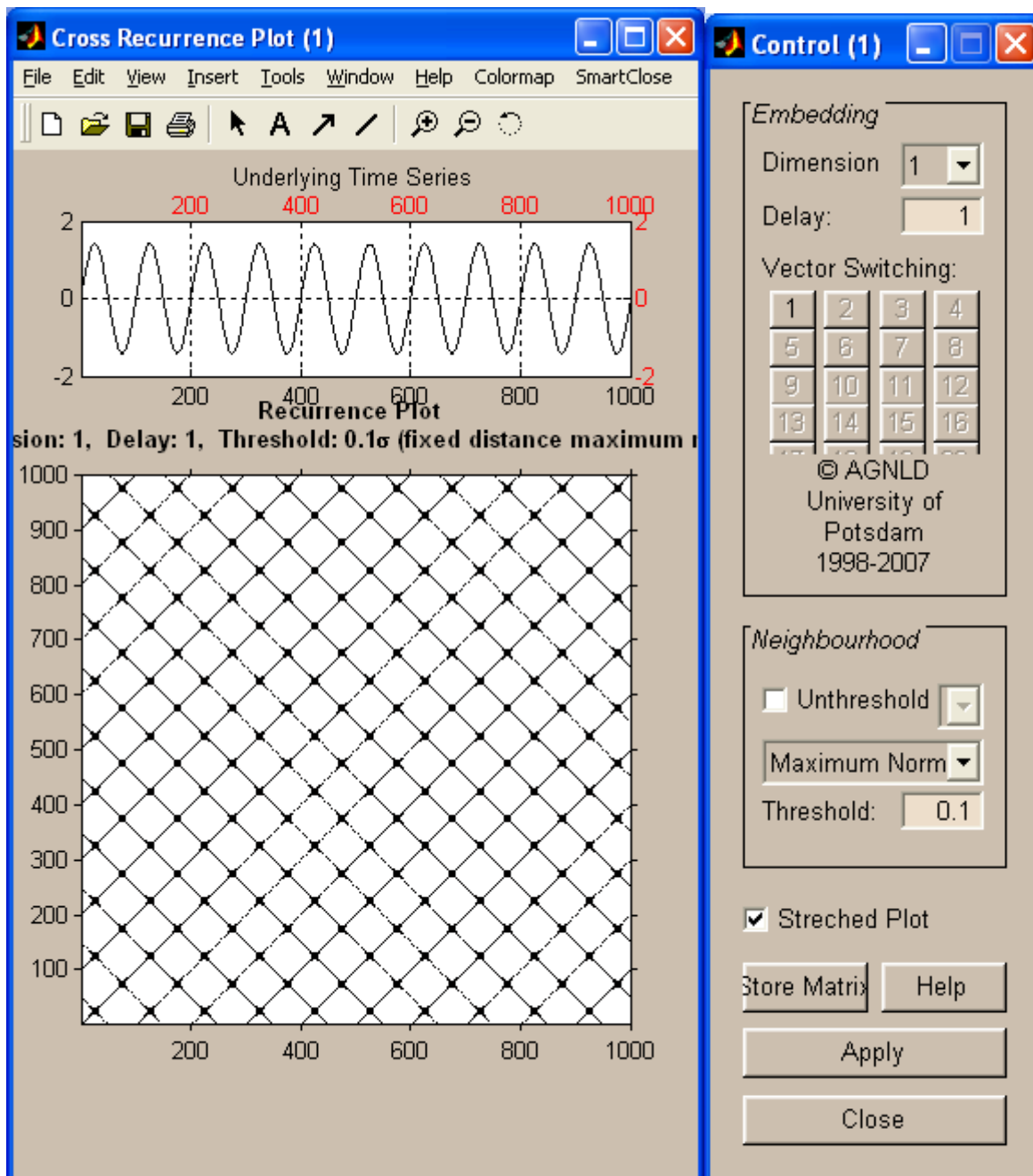


Рис.6. Рекурентна карта тестового ряду $\sin(x)$

Завдання для самостійної роботи

1. Виберіть за рекомендацією викладача варіанти часових рядів
2. Проведіть дослідження їх рекурентних властивостей згідно інструкції
3. Зробити висновки
4. Оформіть звіт у вигляді текстового файлу

Індивідуальна робота № 12

Тема. Кількісний аналіз рекурентних діаграм

Мета: Ознайомитись з кількісними оцінками рекурентних діаграм для аналізу динаміки складних систем

1. Кількісні методи оцінки рекурентності
2. Рекурентний аналіз
3. Аналіз діаграм

Теоретичні відомості

У попередній роботі ми дослідили рекурентні властивості нестационарних часових рядів, виявили і проаналізували дрібномасштабні структури рекурентних діаграм (текстуру, яка складається з простих точок, діагональних, горизонтальних і вертикальних ліній). Комбінації вертикальних і горизонтальних ліній формують прямокутні кластери точок (див.рис.1)

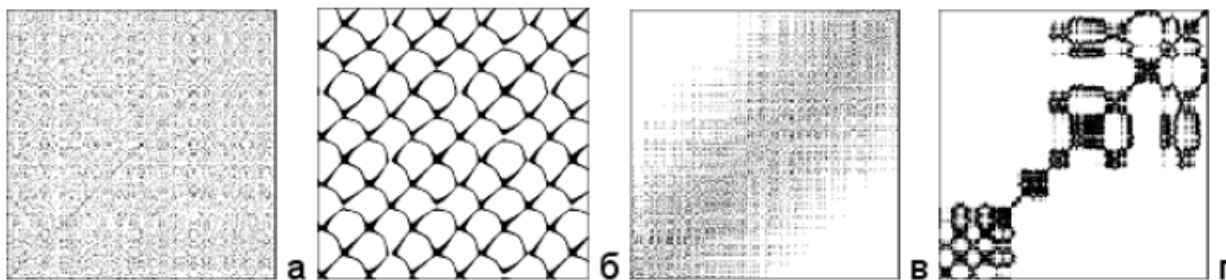


Рис. 1. Характерні топології рекурентних діаграм: а – однорідна (нормально розподілений шум); б – періодична (генератор Ван дер Поля); в – дрейф (відображення Ікеди з накладеною лінійно зростаючою послідовністю); г – контрастні області або смуги (узагальнений броунівський рух)

Саме ці комбінації використовуються для обчислення мір *кількісного аналізу* рекурентних діаграм (recurrence quantification analysis, RQA). Збілут (Zbilut) і Веббер (Webber) розробили інструмент обчислення ряду мір на основі підрахунку густини рекурентних точок і побудови частотного розподілу довжин діагональних ліній: **recurrence rate (RR, коефіцієнт самоподібності)**, **determinism (DET, передбачуваність)**, **divergence (DIV, зворотна величина максимальної довжини діагональної лінії)**, **entropy (ENTR, ентропія) і trend (TREND, тренд)**. Обчислення цих мір в підматрицях рекурентної діаграми уздовж лінії ідентичності показує поведінку цих мір в часі. Деякі дослідження даних мір показали, що їх застосування може сприяти виявленню точок біфуркації, переходів «хаос–порядок».

Пізніше були запропоновані міри, що використовують густину вертикальних (або горизонтальних) структур: **laminarity (LAM, ламінарність)**, **trapping time (TT, показник, або час затримки)**, що дозволяють виявляти переходи «хаос–хаос». Слід зазначити також нечутливість цих мір до вимог стаціонарності і довжини досліджуваних часових рядів.

Введемо кількісні характеристики введених мір.

Визначимо величини

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ рекурентні,} \\ 0 \text{ інакше} \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (i, j) \text{ та } (i+1, j+1) \text{ або } (i-1, j-1) \text{ рекурентні} \\ 0 \text{ інакше} \end{cases}$$

Тепер коефіцієнти самоподібності і передбачуваності будуть, відповідно, рівні

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{ij}, \quad (1)$$

$$DET = \frac{\sum_{i,j=1}^N D_{ij}}{\sum_{i,j=1}^N R_{ij}}. \quad (2)$$

Якщо N_l - число діагональних ліній, а l_i - довжина i -тої діагональної лінії, то довжина найдовшої діагональної лінії визначається виразом

$$L = \max(l_i; i = 1, \dots, N_l).$$

Ентропія Шеннона для функції $f(x)$ має вигляд

$$H(x) = -\sum_x f(x) \log f(x),$$

а для розподілу

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$

Для розподілу $p(l)$ довжини діагональних ліній ентропія Шеннона дорівнює

$$ENTR = -\sum_{l=1}^{N_l} p(l) \ln p(l). \quad (3)$$

Ознайомимся з функцією **crqa(a)**, яка і реалізує (Cross-)Recurrence Quantification Analysis часового ряду «а». Вона має різні формати (деталі дивись у файлі **crp_man.pdf**). Для кризового ряду, попередньо імпортованого до робочої області і перейменованого на «а» з початковим значенням ширини вікна Window size=250, Window step=20 одержимо рисунок 1. У верхніх вікнах ми, відповідно, бачимо вихідний ряд (Data) і його варіацію (Variance).

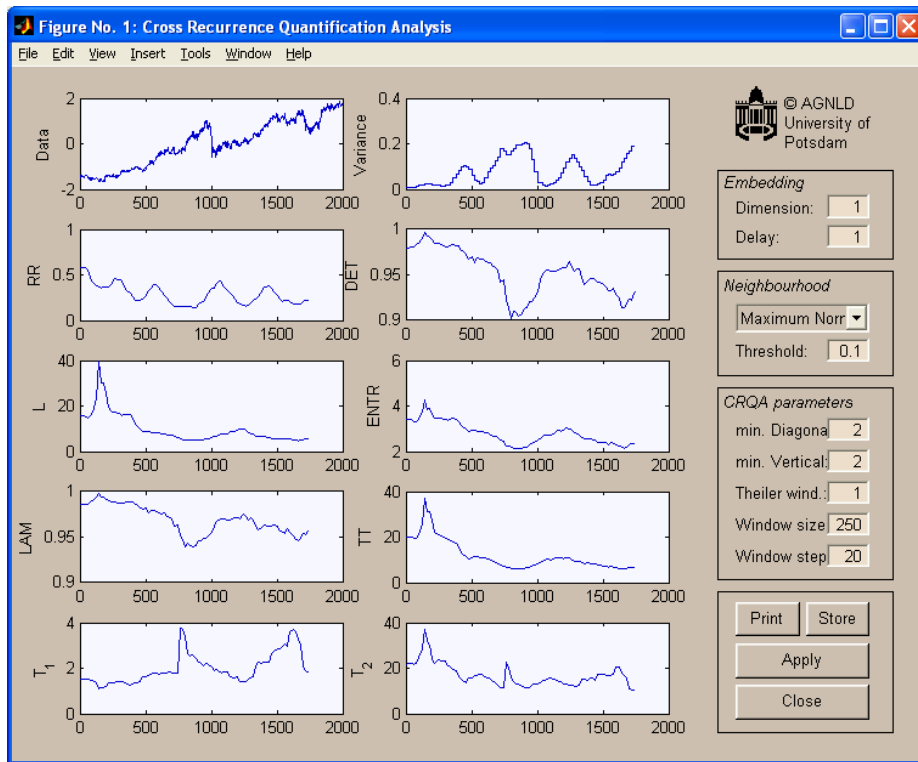


Рис. 1. Результати віконних розрахунків мір кількісного аналізу, які дає функція **crqa** для динамічного ряду з кризою

Для функції $\sin(x)$ функція **crqa** дає рисунок 2.

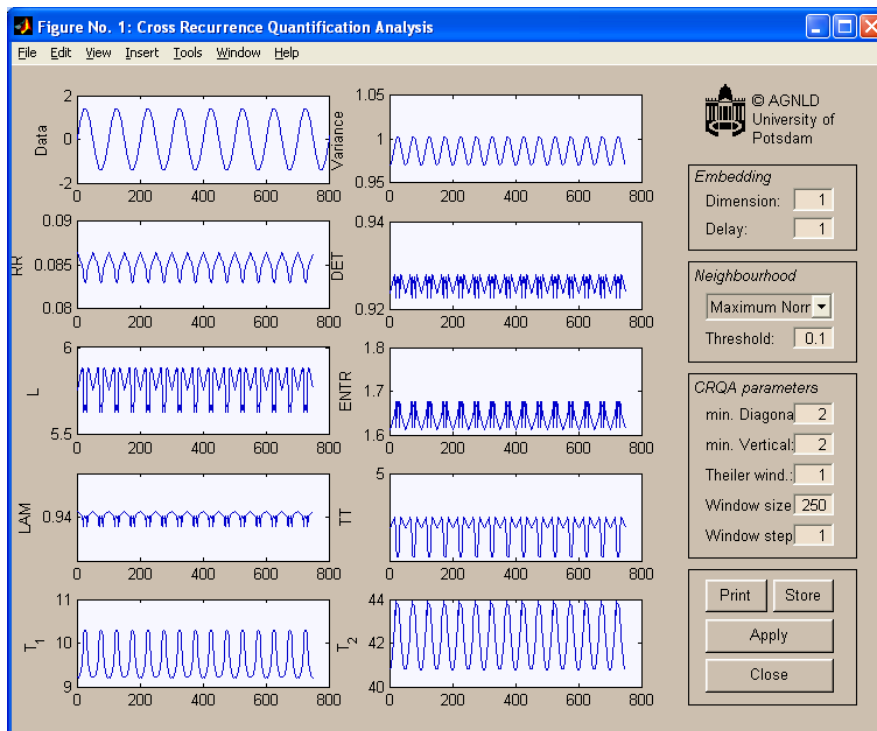


Рис. 2. Результати роботи функції **crqa** для $\sin(x)$

На рисунках у вікнах відповідно представлені:
Data – вихідний часовий ряд

Variance – варіація ряду
 RR – коефіцієнт самоподібності
 DET – коефіцієнт передбачуваності
 L – середня довжина діагоналей
 ENTR – ентропія довжини діагоналей
 LAM – ламінарність
 TT – час захвату
 T₁ – рекурентний час 1-го типу
 T₂ – рекурентний час 2-го типу

Діагональна лінія довжини l означає, що сегмент траєкторії близький протягом l кроків часу до іншого сегменту траєкторії в інший час; тому ці лінії пов'язані з дивергенцією сегментів траєкторії. Середня довжина діагональної лінії

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P(l)} \quad (4)$$

є середнім часом, що два сегменти траєкторії близькі один одному, і може бути інтерпретований як середній час прогнозу.

Попередні міри відносяться до діагональних (горизонтальних) ліній на рекурентній карті. В той же час існують і вертикальні лінії з відповідними мірами. Розглянемо ті з них, які використовує функція **crqa(a)**.

Повне число вертикальних ліній довжини v в RP дається гістограмою

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k} \quad (5)$$

Аналогічно визначенню детермінізму, (рівняння (2)), відношення рекурентних точок, які формують вертикальні структури до повного набору рекурентних точок може бути обчислено,

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)} \quad (6)$$

Ця міра називається ламінарністю (*laminarity*). Обчислення LAM проводяться для тих v , які перевищують мінімальну довжину v_{\min} . Для рекурентних карт часто приймають $v_{\min} = 2$. Величина LAM зменшується, якщо RP складається з більш поодиноких рекурентних точок, ніж вертикальні структури.

Середня довжина вертикальних структур дається виразом

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^N P(v)} \quad (7)$$

і називається часом затримки (захвату). Його обчислення вимагає також розгляду мінімальної довжини v_{\min} , як і у випадку з LAM. TT оцінює середній час, що система перебуватиме в певному стані, або як довго цей стан буде захоплений.

У контрасті до кількісних мір, заснованих на діагональних лініях, введені щойно міри можуть застосовуватись до переходів «хаос-хаос».

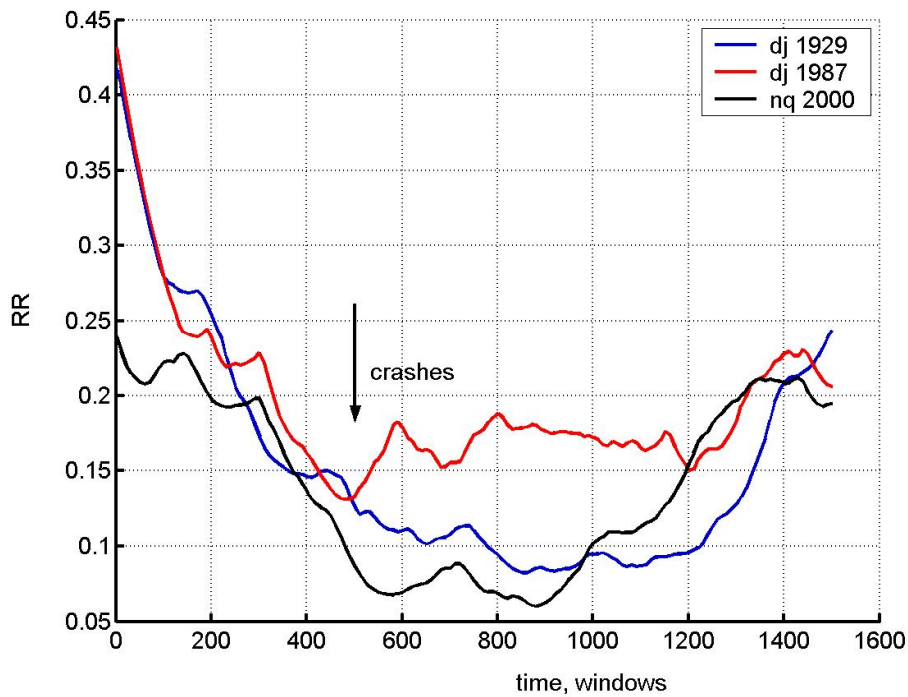


Рис. 3. Порівняльна віконна динаміка коефіцієнта самоподібності для різних криз

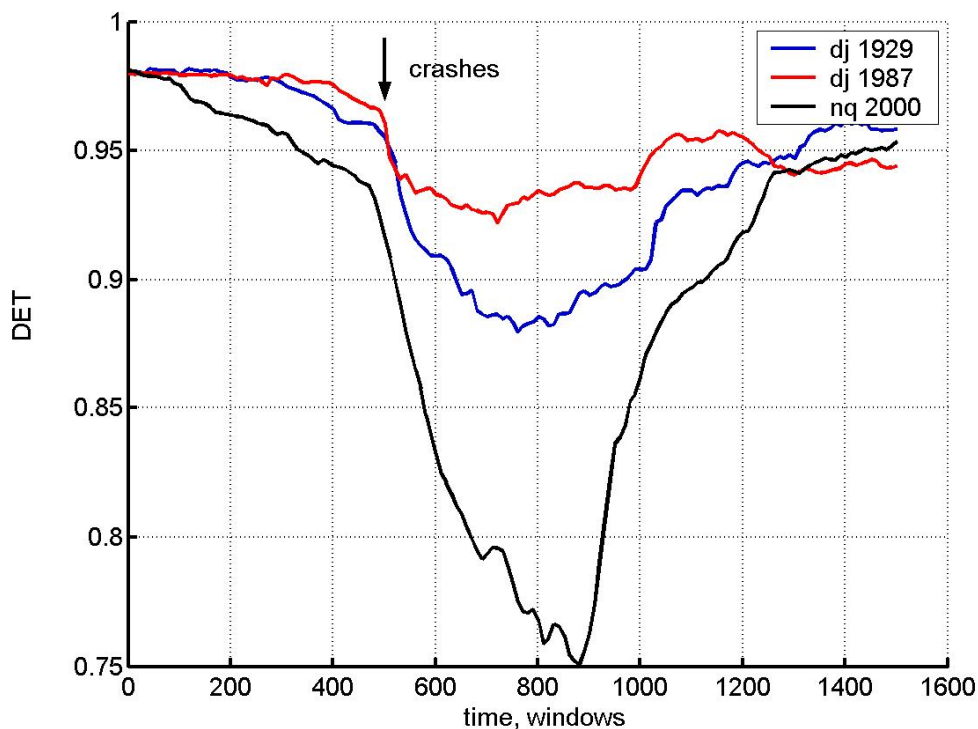


Рис. 4. Динаміка коефіцієнта передбачуваності для кризових динамічних рядів

Останні два параметри характеризують два різні типові проміжки часу, протягом яких траєкторії перебувають в околі ε . Їх віконна динаміка дозволяє від слідкувати часову компоненту рекурентних карт.

Зберігати і аналізувати зображення типу рис. 1-2 незручно. Тому є можливість окремо виділяти і працювати з вікнами. Для цього треба вибрати курсором необхідне вікно, натиснути правою кнопкою і активізувати **ShowFigure**.

На рисунках 3-4 представлено побудовані вказаним чином графіки двох довільно вибраних мір для різних криз, аналіз яких вказує на універсальність прояву кризових явищ.

Завдання для самостійної роботи

1. Виберіть за рекомендацією викладача свій варіант часового ряду
2. Проведіть дослідження динаміки кількісних мір рекурентності згідно інструкції
3. Зробити висновки
4. Оформіть звіт у вигляді текстового файлу

Індивідуальна робота № 13

Тема. Ентропійний аналіз часового ряду.

Мета. Навчитись розраховувати значення різних типів ентропії часового ряду та досліджувати динаміку зміни її значень для оцінки якості прогнозів часових рядів.

1. Теоретичні відомості

Питання динаміки розвитку і функціонування складних систем може розглядатись у двох варіантах:

- як дослідження шумової активності;
- як детерміністичного випадку з певним ступенем порядку.

Останніми роками було використано кілька підходів для ідентифікації механізмів, що лежать в основі розвитку та функціонування складних систем. Особливо корисні результати було отримано при їх дослідженні методами теорії випадкових матриць [1], моно- та мультифрактального аналізу [2], теорії хаосу з реконструкцією траєкторії системи у фазовому просторі та визначення її параметрів, таких як кореляційна розмірність та спектр показників Ляпунова. Ми розглянули ці методи у попередніх роботах. Однак, застосування деяких із методів висуває вимоги до стаціонарності досліджуваних даних, потребує довгих часових рядів та комплексного обчислення кількох параметрів.

Іншим підходом до розгляду питання вивчення особливостей складних систем є обчислення характеристик ентропії.

Концепція термодинамічної ентропії як міри хаосу системи добре відома у фізиці, однак, останніми роками поняття ентропії було застосоване до складних систем інших об'єктів (біологічних, економічних, соціологічних тощо). Так, один із найбільш часто використовуваних методів визначення ентропії базується на обчисленні спектру потужності Фур'є та застосовується для вивчення сигналів (часових рядів) різної природи. Проте, використання дискретного перетворення Фур'є для аналізу часових рядів має свої недоліки, зокрема, на результати впливає нестаціонарність рядів, варіювання їх довжини від сотень до сотень тисяч, та обмеження самого методу (незмінність частотно-часових характеристик протягом всього часу функціонування системи). Тому виникає питання про розрахунок значень ентропії за допомогою інших методів.

Введемо поняття ентропії, скориставшись інформацією, яку можна знайти в Вікіпедії — вільній енциклопедії (uk.wikipedia.org)

Термодинамічна ентропія S , часто просто іменована **ентропія**, в хімії і термодинаміці є мірою кількості енергії у фізичній системі, яка не може бути використана для виконання роботи. Вона також є мірою безладдя, присутнього в системі.

Поняття ентропії була вперше введено у 1865 році Рудольфом Клаузіусом. Він визначив зміну ентропії термодинамічної системи при оборотному процесі як відношення зміни загальної кількості тепла ΔQ до величини абсолютної температури T :

$$\Delta S = \Delta Q / T .$$

Рудольф Клаузіус дав величині S ім'я «ентропія», що походить від грецького слова *τροπή*, «зміна» (зміна, перетворення). Зверніть увагу на те, що рівність відноситься до зміни ентропії.

У 1877 році, Людвіг Больцман зрозумів, що ентропія системи може відноситися до кількості можливих «мікростанів» (мікроскопічних станів) що узгоджуються з їх термодинамічними властивостями. Розглянемо, наприклад, ідеальний газ у посудині. Мікростан визначений як позиції і імпульси кожного атома, що становить систему. Зв'язність пред'являє до нас вимоги розглядати тільки ті мікростани, для яких: (і) місцезрештування всіх частин розташовані в рамках судини, (іі) для отримання загальної енергії газу кінетичної енергії атомів підсумовуються. Больцман постулював що

$$S = k_B \ln \Omega ,$$

де константу $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К ми знаємо тепер як сталу Больцмана, а Ω є числом мікростанів, які можливі в наявному макроскопічному стані. Цей постулат, відомий як принцип Больцмана, може бути оцінений як початок статистичної механіки, яка описує термодинамічні системи використовуючи статистичну поведінку компонентів, із яких вони складаються. Принцип Больцмана зв'язує мікроскопічні властивості системи (Ω) з однією з її термодинамічних властивостей (S).

Згідно визначенню Больцмана, ентропія є просто функцією стану. Більш того, оскільки (Ω) може бути тільки натуральним числом (1,2,3...), ентропія повинна бути позитивною — виходячи з властивостей логарифма.

Клод Шеннон (Shannon, 1948) запропонував формулу для оцінки невизначеності кодової інформації в каналах зв'язку, звану ентропією Шеннона:

$$S = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i ,$$

де p_i — вірогідність того, що символ i зустрічається в коді, який містить N символів, k — розмірний множник.

Зв'язок між ентропією і інформацією можна прослідкувати на наступному прикладі. Розглянемо тіло при абсолютному нулі температури, і хай ми маємо повну інформацію про координати і імпульси кожної частинки. Для простоти покладемо, що імпульси всіх частинок рівні нулю. В цьому випадку термодинамічна ймовірність рівна одиниці, а ентропія – нулю. При кінцевих температурах ентропія в рівновазі досягає максимуму. Можна зміряти всі макропараметри, що характеризують даний макростан. Проте ми практично нічого не знаємо про мікростан системи. Точніше кажучи, ми знаємо, що даний макростан можна реалізувати за допомогою дуже великого числа мікростанів. Таким чином, нульовій ентропії відповідає повна інформація (ступінь незнання рівний нулю), а максимальної ентропії – повне незнання мікростанів (ступінь незнання максимальний).

У теорії інформації ентропія (інформаційна ентропія) визначається як кількість інформації. Хай P – апіорна вірогідність деякої події (ймовірність до

проведення досвіду), а P_1 – ймовірність цієї події після проведення досвіду. Для простоти вважатимемо, що $P_1 = 1$. За Шенноном, кількість інформації I , яка дає точну відповідь (після проведення експерименту)

$$I = K \log P.$$

Наприклад, при грі в орлянку можливі дві відповіді (монета падає тією або іншою стороною на підлогу), тобто $P = 2$. При киданні кістки з шести можливих варіантів випадає 1, тобто $P = 6$. Якщо за основу логарифма вибрати 2 і покласти $K = 1$, то при киданні монети ми одержуємо інформацію

$$I = \log_2 2 = 1.$$

Ця кількість інформації, за визначенням, рівна одному біту.

Фізичний сенс I – це міра нашого незнання. Іншими словами, I – це та інформація, яку ми можемо одержати, вирішивши завдання. У прикладі (тіло при абсолютному нулі температури), що розглядається вище, міра нашого незнання рівна нулю, оскільки $P = 1$. Після проведення досвіду ми одержуємо нульову інформацію $I = 0$, оскільки все було відомо до досвіду. Якщо розглядати тіло при кінцевих температурах, то до проведення досвіду число мікростанів, а отже, і P дуже велике. Після проведення досвіду ми одержуємо велику інформацію, оскільки нам стають відомими координати і імпульси всіх частинок.

Аналогія між кількістю інформації і ентропією S , визначуваною з принципу Больцмана, очевидна. Досить покласти множник K рівним постійній Больцмана k_B і використовувати натуральний логарифм. Саме з цієї причини величину I називають інформаційною ентропією. Інформаційна ентропія (кількість інформації) була визначена по аналогії із звичайною ентропією, і вона має властивості, характерні для звичайної ентропії: адитивність, екстремальні властивості і т.д. Проте ототожнювати звичайну ентропію з інформаційною не можна, оскільки неясно, яке відношення має друге начало до інформації. Нагадаємо, що екстенсивна величина -- ця така характеристика системи, яка росте із збільшенням розмірів системи. Строгіше визначення: якщо наша система складається з двох *незалежних* підсистем A і B , то ентропію всієї системи можна одержати складанням ентропій підсистем:

$$S(A+B) = S(A) + S(B)$$

Саме ця властивість і означає екстенсивність, або адитивність, ентропії.

До сьогоденного моменту продовжують з'являтися узагальнення ентропійних формул. Так, в 1970 р. Анрі Реньї запропонував міру

$$S_\beta = \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_{i=1}^N (n_i)^\beta,$$

що співпадає при значенні параметра $\beta=1$ з ентропією Шеннона. Константіно Тсалліс (1987) узагальнив формулу Шеннона на випадок неекстенсивності (не адитивності) ентропії.

У статистичній фізиці ентропія трактується через число мікростанів системи. Прагнучи, проте, визначити ентропію так, щоб вона залишалася екстенсивною величиною, статистична фізика (а точніше, кінетика) вимушена

привертати недоказову гіпотезу молекулярного хаосу. Ця гіпотеза полягає у тому, що будь-які молекули, що стикаються, були до зіткнення ніяк не скорельовані, тобто, ніяк не відчували один одного. Для багатьох (але не для всіх!) систем це, звичайно, цілком здорова аксіома. І саме з неї виходить згаданий вище знаменитий вираз для ентропії замкнутої системи (вигравіюваний, до речі, на надгробній плиті Больцмана). У статфізиці показується, що така певна ентропія насправді є адитивною величиною і приймає максимальне значення в стані рівноваги.

Причина цього в тому, що у більшості систем сили взаємодії між частинами системи короткодіючі: кожна молекула відчуває лише декілька найближчих сусідів. Саме звідси слідує те, що термодинаміка таких макроскопічних систем — екстенсивна. Саме такі системи оточують нас в повсякденному житті. Але в природі є і далеко діючі сили: гравітаційні, інформаційні та ін. Виявляється, що в складних системах еволюція системи в даний момент часу залежить не тільки від параметрів системи в цей конкретний момент часу, але і від її параметрів якийсь час назад. Ефекти пам'яті можуть легко привести до порушення гіпотези молекулярного хаосу. Дійсно, вони можуть означати, що окремі частинки перед зіткненням "пам'ятають" одне одного, їх рух не є повністю некорельованим. А як ми пам'ятаємо, припущення молекулярного хаосу лежить в основі больцмановського виразу для ентропії. Значить, цей вираз не годиться для систем з пам'яттю. Отже головний висновок для нас полягає в наступному твердженні.

Існують системи, в яких є сильні кореляції, сильна взаємодія між всіма частинами системи. Це приводить до порушення термодинамічної адитивності системи, тому їх не вдається описати больцманівською статистикою і термодинамікою. Значить, необхідний інший підхід, який якимсь чином зумів би справитися з режимом сильного зв'язку між всіма частинками системи.

Весь цей підхід базується на сміливій ідеї Тсалліса:

цілком можливо, що сильна взаємодія в термодинамічно аномальних системах настільки міняє картину, що приводить до абсолютно нових ступенів свободи, до абсолютно іншої статистичної фізики не-больцмановського типу:

окремі частинки з больцмановською статистикою + сильна взаємодія => нові ступені свободи з не-больцмановською статистикою + відсутність взаємодії

Ця гіпотеза не доведена. Більш того, досконало незрозуміло, що це за нові ступені свободи. Тому це твердження залишається поки лише гіпотезою. Але з другого боку, інтуїція підказує, що такий перехід в тому або іншому вигляді насправді може мати місце і важливо зрозуміти, до чого це може привести.

Якщо майже нічого невідоме про ці нові ступені свободи, то як же тоді можна одержати щось конструктивне? Тсалліс запропонував наступне. Наша єдина зачіпка полягає у тому, що статистика буде не-больцманівська. Це значить, що вираз для ентропії буде вже іншим. Так давайте придумаємо яку-небудь формулу для ентропії, яка, по-перше, переходила б в стандартну

формулу в межі слабкого зв'язку, а по-друге, змогла б описати неекстенсивні системи.

Тсалліс узяв стандартний вираз для ентропії і замість логарифма ввів нову функцію — степеневу:

$$\ln(x) \Rightarrow \ln_q(x) \Rightarrow (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$$

з якимсь числовим параметром q . Помітьте, що при q , прагнучому до 1, $\ln_q(x)$ переходить в справжній логарифм, в чому можна переконатися простим диференціюванням. Нова формула для q -ентропії виглядає так:

$$S_q = -\sum_i (p_i^q \ln_q(p_i)) = (1 - \sum p_i^q)/(q - 1).$$

Якщо $q \rightarrow 1$, то q -ентропія переходить в стандартну больцманівську ентропію.

Головний наслідок такої заміни: q -ентропія є вже не екстенсивною функцією. Якщо всю систему розбити на дві незалежні підсистеми A і B (нагадаємо, що ми вже перейшли до нових *невзаємодіючих*, а значить, і *незалежним* ступеням свободи!), то ми одержимо:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B).$$

Отже, параметр q — це міра неекстенсивності системи.

Застосування ентропії. Не менш різноманітні і приклади застосування поняття ентропії. Ідеологія всіх таких додатків пов'язана з екстремальними принципами природознавства – зростаюче значення ентропії параметризує зміну стану систем самої різної природи в процесі їх “природної” еволюції. Відповідний принцип розвитку одержав назву “принцип максимуму ентропії”. Для закритих термодинамічних систем їх ентропія зростає (“друге начало” термодинаміки). Розповсюдження “другого начала” на Всесвіт і всі процеси в ньому привело до уявлення про ентропійну “стрілу часу”. Принцип максимуму ентропії застосовується, зокрема, у фізиці, лінгвістиці, екології, математиці, механіці, економіці і інформатиці.

Для визначення ентропійних характеристик часових рядів, які відповідають складним системам в останні роки найчастіше використовуються декілька різних визначень ентропії: ентропії подібності (Approximate entropy) [3, 4], ентропії шаблонів (Sample entropy) [4, 5], багатомасштабної ентропії (Multiscale entropy) [6, 7] та вейвлет-ентропії [8, 9].

Ентропія подібності. Метод розрахунку ентропії подібності подано в [3]. Ентропія подібності (Approximate Entropy, *ApEn*) є “статистикою регулярності”, що визначає можливість передбачувати флуктуації в часових рядах. Інтуїтивно вона означає, що наявність повторюваних шаблонів (послідовностей певної довжини, побудованих із чисел ряду, що слідує одне за іншим) флуктуацій у часовому ряді призводить до більшої передбачуваності часового ряду порівняно із рядами, де повторюваності шаблонів немає. Порівняно велике значення *ApEn* показує ймовірність того, що подібні між собою шаблони спостережень не будуть слідувати один за одним. Іншими словами, часовий ряд, що містить велику кількість повторюваних шаблонів, має порівняно мале значення *ApEn*, а значення *ApEn* для менш передбачуваного

(більш складного) процесу є більшим.

При розрахунку $ApEn$ для даного часового ряду S_N , що складається із N значень $t(1), t(2), t(3), \dots, t(N)$, вибираються два параметри, m та r . Перший з цих параметрів, m , вказує довжину шаблону, а другий – r – визначає критерій подібності. Досліджуються підпоследовності елементів часового ряду S_N , що складаються з m чисел, взятих, починаючи з номера i , і називаються векторами $p_m(i)$. Два вектори (шаблони), $p_m(i)$ та $p_m(j)$, будуть подібними, якщо всі різниці пар їх відповідних координат є меншими за значення r , тобто якщо

$$|t(i+k) - t(j+k)| < r \text{ для } 0 \leq k < m.$$

Для розглядуваної множини P_m всіх векторів довжини m часового ряду S_N можна обраховуються значення

$$C_{im}(r) = \frac{n_{im}(r)}{N - m + 1},$$

де $n_{im}(r)$ – кількість векторів у P_m , що подібні вектору $p_m(i)$ (враховуючи вибраний критерій подібності r). Значення $C_{im}(r)$ є часткою векторів довжини m , що мають схожість із вектором такої ж довжини, елементи якого починаються з номера i . Для даного часового ряду обраховуються значення $C_{im}(r)$ для кожного вектора у P_m , після чого знаходиться середнє значення $C_m(r)$, яке виражає розповсюдженість подібних векторів довжини m у ряду S_N . Безпосередньо ентропія подібності для часового ряду S_N з використанням векторів довжини m та критерію подібності r визначається за формулою:

$$ApEn(S_N, m, r) = \ln \left(\frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)} \right),$$

тобто, як натуральний логарифм відношення повторюваності векторів довжиною m до повторюваності векторів довжиною $m+1$.

Таким чином, якщо знайдуться подібні вектори у часовому ряді, $ApEn$ оцінить логарифмічну ймовірність того, що наступні інтервали після кожного із векторів будуть відрізнятися. Менші значення $ApEn$ відповідають більшій ймовірності того, що за векторами слідує подібні їм. Якщо часовий ряд дуже нерегулярний – наявність подібних векторів не може бути передбачуваною і значення $ApEn$ є порівняно великим.

Зауважимо, що $ApEn$ є нестійкою до вхідних даних характеристикою, оскільки досить сильно залежить від параметрів m та r .

Ентропія шаблонів. При розрахунку $ApEn$, як було показано вище, враховуються подібності певного вектора $p_n(i)$ до самого себе, що використовується для звільнення від можливого значення $\ln 0$, яке може виникнути при відсутності подібних до даного векторів. Однак, вказана особливість призводить до нівелювання двох важливих характеристик у ентропії подібності:

– $ApEn$ сильно залежить від довжини розглядуваного шаблону (вектора) і є нижчою, ніж очікується, для векторів малої розмірності;

– *ApEn* не враховує відносну щільність даних.

Це означає, що коли значення *ApEn* для одного ряду є більшим, ніж для іншого, то воно повинно залишатись таким (проте не є) для будь-яких можливих початкових умов. Такий висновок тим більш важливий, оскільки *ApEn* рекомендується в якості міри порівняння двох наборів даних різними авторами.

Враховуючи вказані обмеження, розроблена для розрахунку інша характеристика, – **ентропія шаблонів** (Sample Entropy, *SampEn*) [6].

При розрахунку *SampEn*, на відміну від алгоритму *ApEn*, додаються дві умови:

- не враховується подібність вектора самому собі;
- при розрахунку значень умовних ймовірностей *SampEn* не використовується довжина векторів.

На основі роботи [6] можна зробити висновок про те, що *SampEn*:

- більше, ніж *ApEn*, відповідає теорії випадкових чисел для ряду із відомою функцією щільності розподілу;
- зберігає відносну щільність, в той час як *ApEn* втрачає дану характеристику;
- додає значно меншу помилку до розрахованого значення у випадку використання векторів малої розмірності.

Багатомасштабна ентропія. При розрахунку багатомасштабної ентропії ентропія подібності чи ентропія шаблонів застосовуються не лише до початкового часового ряду, але й до модифікованих рядів з застосуванням певного масштабного фактора [6, 7] для усереднення підпоследовностей даних.

Ентропія перестановок (Permutation Entropy) – це нещодавно запропонований метод дослідження, який ефективно використовується для кількісного та якісного визначення динамічних змін у складних системах.

Алгоритм обрахунку. Нехай ми маємо ряд $\{x(i) \ i=1,2,\dots\}$. Цей ряд необхідно перетворити для роботи у m -мірному просторі. Це можна зробити наступним чином: $X_i = [x(i), x(i+L), \dots, x(i+(m-1)L)]$, де L – так звана затримка. Як правило, обирається $L=1$, проте дослідження показали, що оптимальне значення цього параметру може бути і іншим. Далі всі отримані підпоследовності X_i необхідно упорядкувати по зростанню. Тоді ми отримаємо комбінацію розташування чисел у последовності X_i , яка є одною з $m!$ Далі ми обраховуємо кількість повторень кожної такої комбінації. Отримуємо розподіл ймовірностей для кожної підпоследовності X_i . Побудувавши вектор стовпчик з елементів

$P_i = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{P_i}{n-m}\right\}$, обраховуємо ентропію за Шенноном. Для зручності відповідь

краще завжди нормалізувати множником $\frac{1}{\ln(m!)}$. Тоді значення ентропії буде в межах $[0,1]$.

Вейвлет-ентропія. Необхідність дослідження часових рядів із різними частотними характеристиками призвела до розвитку методів, що базуються на частотно-часовому аналізі [7]. Вейвлетне часово-частотне представлення ряду не робить жодних припущень стосовно його

стаціонарності і дозволяє визначати динамічні зміни разом з їх локалізацією.

При проведенні вейвлет-аналізу поданий часовий ряд (сигнал) розкладається на сигнали з кінцевою енергією у ортонормованому базисі $L^2(R)$ шляхом відображення та масштабування наперед заданої функції ψ із заданими властивостями, що називається материнським вейвлетом. Внаслідок декомпозиції сигналу отримується набір вейвлет-коефіцієнтів (здебільшого, комплексних), $C_j(t)$, що характеризуються двома параметрами: масштабом материнського вейвлета j та його локалізацією t . Оскільки енергія сигналу визначається як квадрат функції, що його описує $E = \int s^2 ds$, застосування поняття енергії до коефіцієнтів вейвлет-перетворення, що теж інтерпретуються як сигнал у просторі $L^2(R)$, дає змогу використовувати методи розрахунку ентропії у частотно-часовому просторі [7, 8].

При розрахунку коефіцієнтів використовуються наступні типи вейвлет-перетворень:

- неперервне вейвлет-перетворення – розрахунок неперервних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду T на цілих додатніх масштабах з використанням в якості материнського вейвлета похідної 8-го порядку функції Гауса;
- дискретне вейвлет-перетворення – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду T на дійсних додатніх масштабах у просторі з ортонормованим базисом із сімейства материнських функцій Морле з шістьма хвилями та періодами, що є дійсними степенями двійки;
- дискретне вейвлет-перетворення з цілими масштабами – розрахунок дискретних вейвлет-коефіцієнтів часового ряду T на цілих додатніх масштабах у просторі з базисом із сімейства материнських функцій, що є похідними 2-го порядку функції Гауса.

В якості базової формули розрахунку значення ентропії нами було обрано ентропію Шеннона внаслідок досить простого методу отримання розподілу щільності ймовірності енергії сигналу.

На основі енергії вейвлет-коефіцієнтів було визначено два показники вейвлет-ентропії – масштабової та точкової ентропії. У випадку розрахунку масштабової вейвлет-ентропії формула Шеннона застосовується до оброблених даних по масштабам, в іншому випадку обробка даних проводиться по часовій шкалі.

При розрахунку масштабової ентропії спочатку визначається розподіл

щільності ймовірності енергій $p_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{E_{tot}}$, де C_{ij} – вейвлет-коефіцієнт на масштабі i в момент часу j , $E_{tot} = \sum_i \sum_j C_{ij}^2$. Для розрахунку ентропії

знаходяться значення функції $E_{WT} = -\sum_i \left(\left(\sum_j p_{ij} \right) \cdot \log_2 \sum_j p_{ij} \right)$.

Для розрахунку точкової ентропії визначаються суми енергій на кожному масштабі $SM_i = \sum_j C_{ij}^2$ та знаходиться розподіл щільності ймовірності енергій шляхом ділення енергій вейвлет-коефіцієнтів на сумарну енергію масштабу $p_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{SM_i}$. Значення ентропії у кожній точці знаходиться за

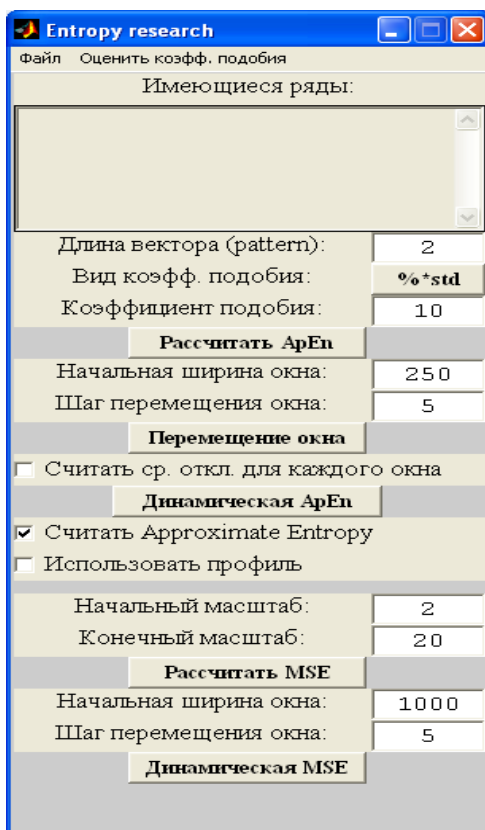
$$\text{формулою Шеннона } E_{WT} = -\sum_j \left(\left(\sum_i p_{ij} \right) \cdot \log_2 \sum_i p_{ij} \right).$$

При розрахунку енергій вейвлет-коефіцієнтів проводиться нормалізація значень середнім квадратичним відхиленням, а у формулу Шеннона додається нормалізуючий множник $1/\log_2 N$, де N – кількість елементів ряду.

Хід роботи

Для дослідження поведінки ентропії нами розроблено два пакети програм, які в певній мірі доповнюють та дублюють один одного. Для розрахунку ентропії подібності і ентропії шаблонів необхідно завантажити програму **work5**, що міститься в пакеті **NonLinear** (рис.1). Програма, аналогічно до програми мультифрактального аналізу часового ряду, дозволяє отримувати як безпосередньо значення ентропії подібності для обраного часового ряду, так і досліджувати динаміку зміни значень *ApEn* і *SampleEn*, використовуючи процедуру рухомого вікна.

Рис.1. Інтерфейс розрахунку ентропії шаблонів і ентропії подібності



використовуючи меню **Файл** → **Читать**.

Розрахунок значення ентропії передбачає введення двох параметрів: довжини розглядуваних векторів та критерія подібності. Довжина векторів може вибиратись довільною, однак у деяких роботах пропонується обирати значення $m = 2$ (поле **Длина вектора (pattern)**), оскільки переважно досліджувані часові ряди є нестационарними.

Для вибору значення критерія подібності необхідно розрахувати середнє квадратичне відхилення (σ) значень ряду і вказати в якості критерія значення, що лежить в межах від 0.1σ до 0.25σ . Програма дозволяє вводити як абсолютні значення критерія подібності, так і відсотки, для яких буде

розраховане відповідне абсолютне значення. По замовчуванню пропонується вводити абсолютне значення критерія подібності. У випадку необхідності розрахувати середнє квадратичне відхилення для прочитаного ряду необхідно виконати пункт меню **Оценить коэфф. подобия**, після чого програма проведе розрахунок та видасть результат у вікні **Оценивание ряда** (рис. 2).

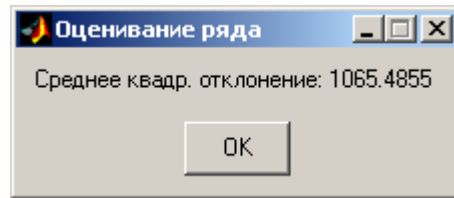


Рис. 2. Визначення середнього квадратичного відхилення для задання критерію подібності векторів.

Візьмемо в якості критерію подібності значення $r = 106$, що рівне 10% від середнього квадратичного відхилення і введемо його в полі **Коэффициент подобия**.

Для розрахунку значення $ApEn$ натиснемо кнопку **Рассчитать ApEn**. Результат розрахунку буде подано у вікні **Результат расчета** (рис. 3).

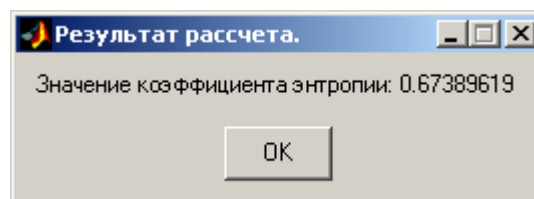


Рис. 3. Результат розрахунку $ApEn$ для часового ряду.

У випадку, якщо необхідно задавати значення критерія подібності у відсотках, встановимо відповідний режим, натиснувши на кнопку **ЗНАЧ**. Після натиснення кнопка змінить назву на **%*std**, а значення поля **Коэффициент подобия** стане рівним 25 (відсотки від середнього квадратичного відхилення по замовчуванню).

Повернення до режиму вводу абсолютного значення критерія подібності відбувається повторним натисненням на кнопку **%*std**.

Для дослідження динаміки зміни ентропії подібності необхідно ввести ще два параметри: довжину вікна та крок вікна, що рухається по часовому ряду. Параметри вибираються з міркувань, аналогічних до тих, що проводились при дослідженні динаміки спектру мультифрактальності часового ряду.

У деяких роботах, що стосуються ентропії подібності, пропонується критерій подібності розраховувати для кожного вікна окремо, обраховуючи середнє квадратичне відхилення та беручи його відсоток. Для вибору такого режиму роботи програми необхідно відмітити параметр **Считать ср. откл. для каждого окна**, який по замовчуванню є виключеним.

Результат роботи програми при дослідженні динамічних властивостей ентропії шаблонів для ряду значень індексу DJ у період кризи 1929 року (ряд

містить 1000 значень до кризи і 1000 після кризи) є малоінформативним (див. рис. 4).

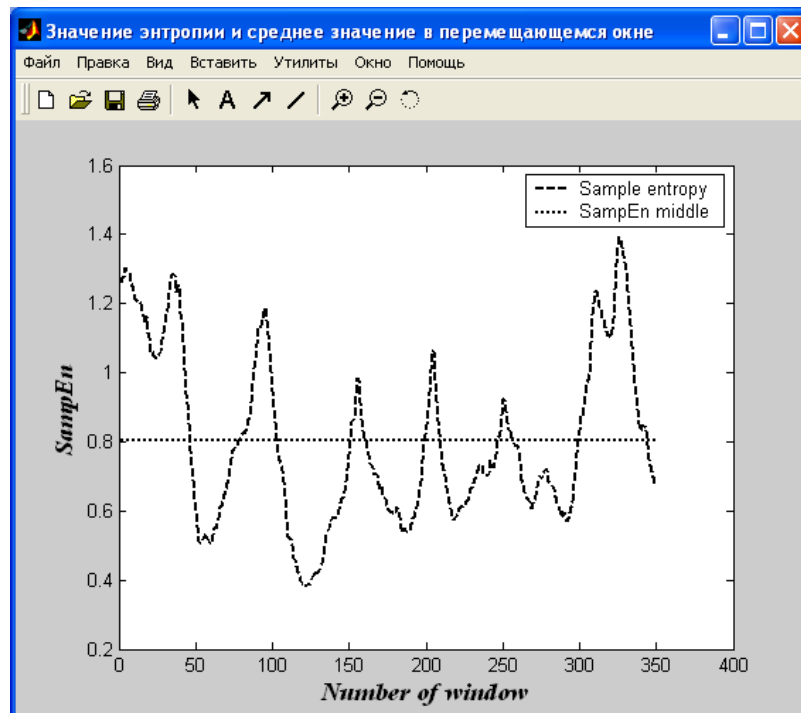


Рис.4. Энтропия шаблонов для ряда DJ, який містить кризи

Але для модулей прибутковостей маємо іншу картину (рис.5).

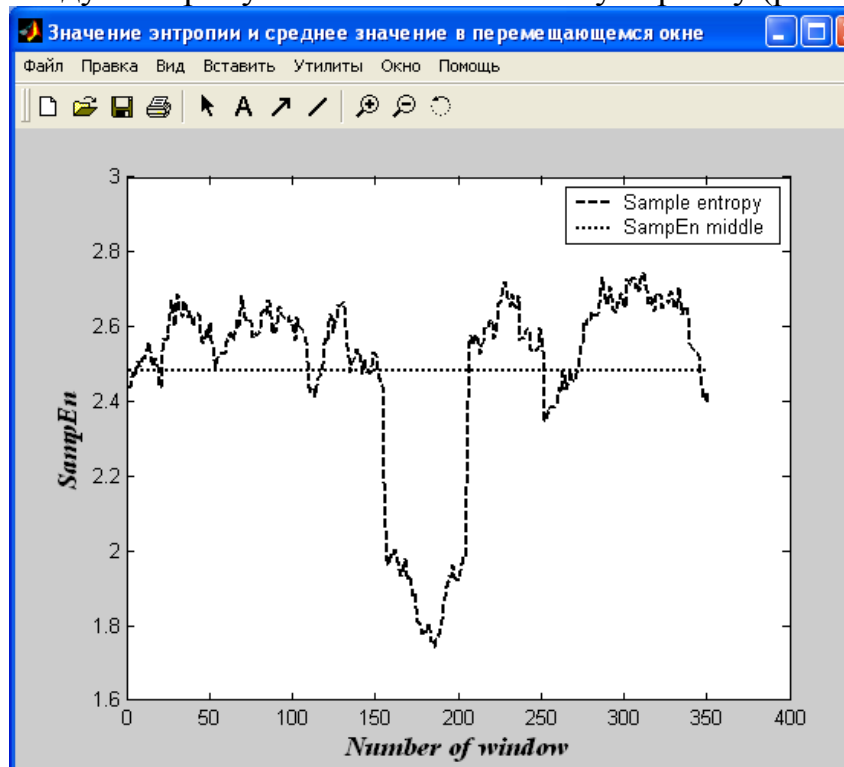


Рис. 5. Прояв кризи 1929 року за індексом Доу Джонса для ряду модулей прибутковостей

Інша програма, яка запускається командою **myentropy**, має інтерфейс, представлений на рис.5.

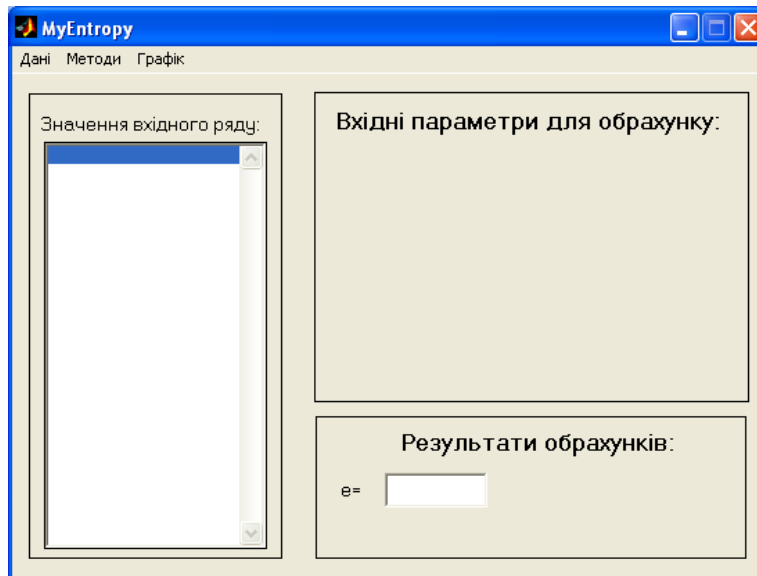


Рис.6. Інтерфейс програми для дослідження ентропій подібності, шаблонів, перемішування, Шеннона і Тсалліса

Так, вибравши той же ряд та параметри розрахунку для ентропії шаблонів одержимо дані рисунку 4. Для **PermuEn** для ряду прибутковостей будемо мати рис. 7.

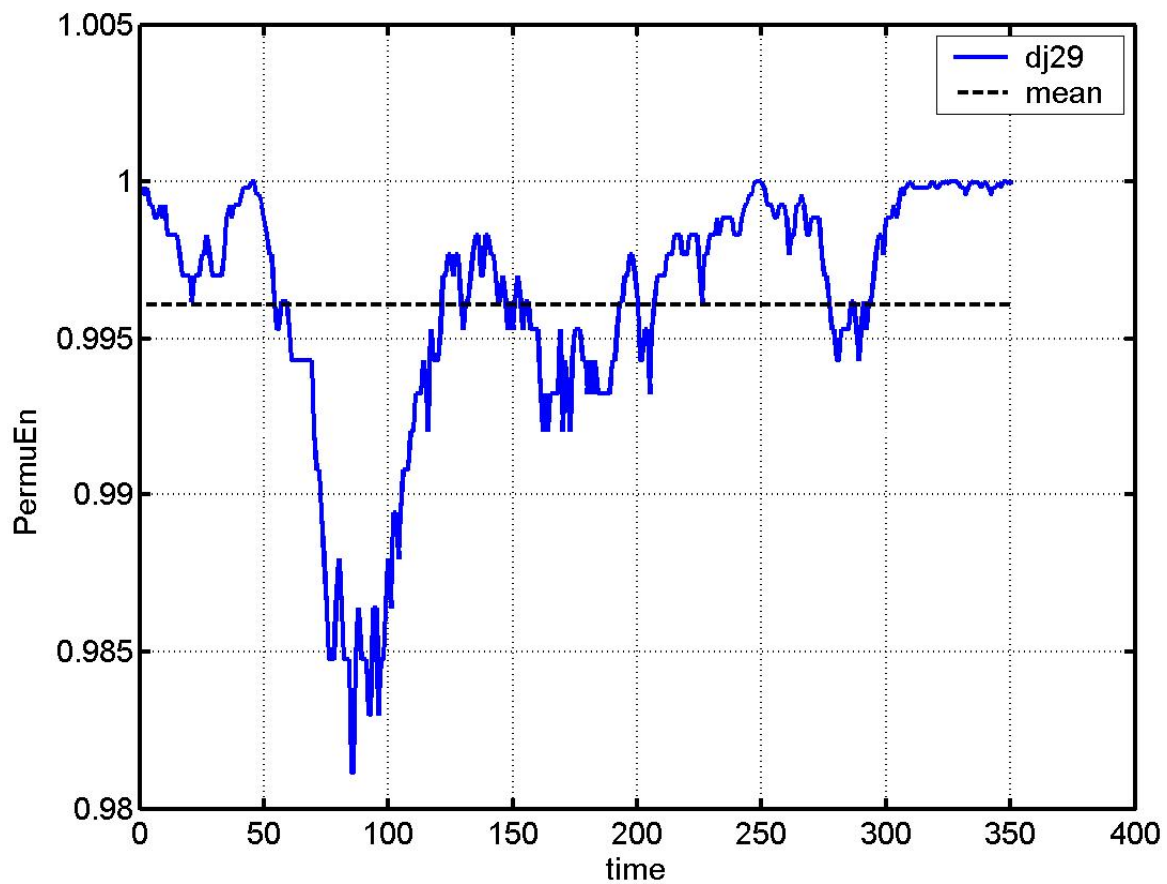


Рис. 7. Значення пермутаційної ентропії для ряду, який містить кризу 1929 року

Ентропія Шеннона і Тсалліса обраховуються шляхом вибору параметру екстенсивності q . При $q=1$ маємо ентропію Шеннона. Для ряду прибутковостей ентропія має характерний вигляд, особливо у кризовий період.

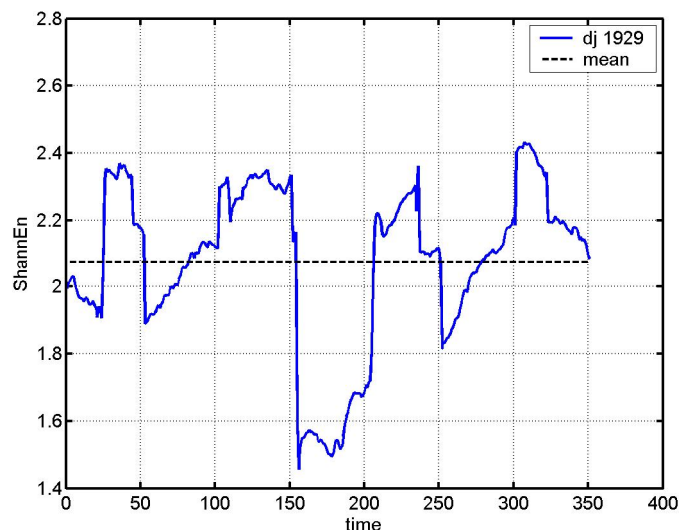
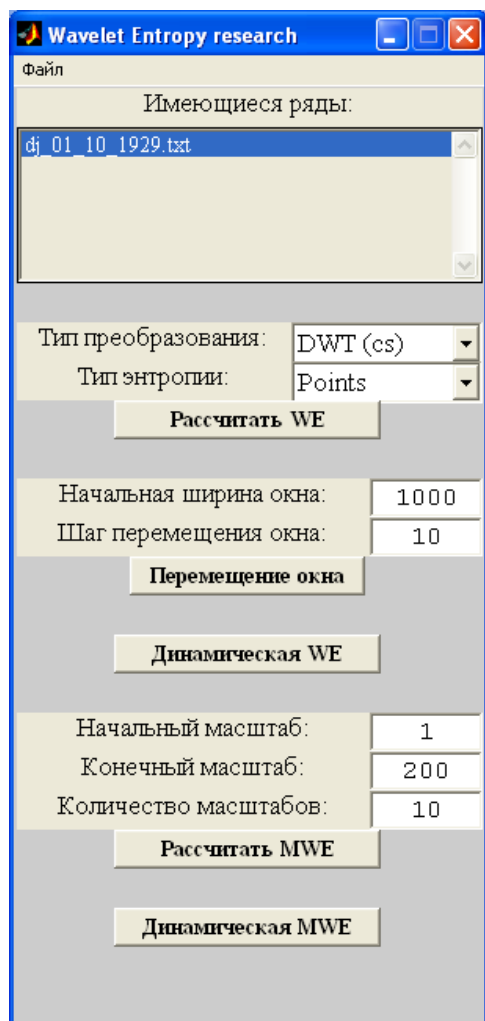


Рис. 8. Ентропія Шеннона для набору параметрів: ширина вікна 250, крок зміщення вікна 5

Дослідження ентропійних показників у випадку відомих періодів критичних явищ дозволяє будувати для них певні передвісники.



Нарешті, розглянемо можливості вейвлет ентропії. Для цього у командній строчці наберемо **work6**. У вікні, яке має вигляд, зображений на рис. 9, завантажимо досліджуваний файл, наприклад, dj29. Виберемо далі тип вейвлет-перетворення (наприклад, дискретний – DWT(cs)), тип ентропії (points) одержимо рисунки 10-11.

Аналіз вейвлет ентропії вихідного або ж перетвореного ряду може вказати на певні характеристики і особливості сигналу, який досліджується.

Рис. 9. Інтерфейс розрахунку вейвлет-ентропії

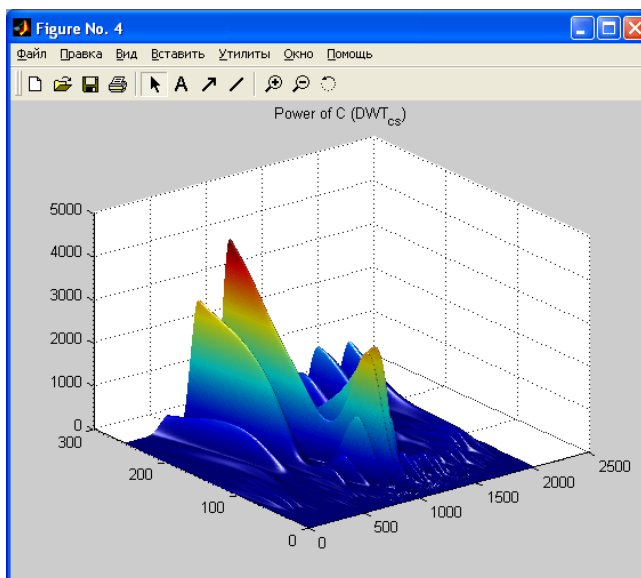


Рис. 10. Енергія вейвлет-коефіцієнтів

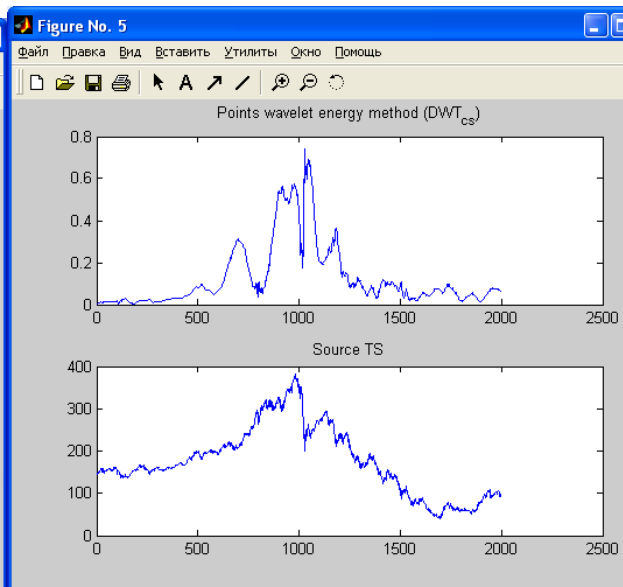


Рис.11. Точкова вейвлет-ентропія

Завдання

Для вибраних рядів дослідити ентропійні властивості. Порівняти їх з такими, що містять кризове явище. Зробити висновки. Оформити звіт.

Література.

1. Піскун О.В., Сердюк О.А., Триус В.Ю. Кореляційні та спектральні властивості світового валютного ринку // Фінансова система України. Збірник наукових праць.– Острог: Видавництво “Національний університет “Острозька академія”, 2006.– Вип. 8.– Ч.3.– С. 449-454.
2. Сердюк О.А. Моделювання передвісників кризових явищ фінансових ринків // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: Збірник наукових праць. Т. 18. – Суми: УАБС НБУ, 2006.– С. 315-321.
3. S. M. Pincus “Approximate entropy as a measure of system complexity”. Proc. Natl. Acad. Sci. Vol.88, pp. 2297-2301.
4. Joshua S. Richman, J. Randall Moorman “Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy”. Am J Physiol Heart Circ Physiol 278: H2039-H2049, 2000.
5. Douglas E. Lake, Joshua S. Richman, M. Pamela Griffin, J. Randall Moorman “Sample entropy analysis of neonatal heart rate variability”. Am J Physiol Integr Comp Physiol 283: R789-R797, 2002.
6. Madalena Costa, Ary L. Goldberger, C.-K. Peng “Multiscale entropy analysis of biological signals”. Phys Rev E2005; 71:021906.
7. Madalena Costa, Ary L. Goldberger, C.-K. Peng “Multiscale entropy analysis of physiologic signals”. Phys Rev Lett 2002; 89:062102.
8. Perez D.G., Zunino L., Garavaglia M., Rosso O.A. Wavelet entropy and fractional Brownian motion time series // arXiv:physics/0501105 v1 19 Jan 2005.
9. Zunino L., Perez D.G., Garavaglia M., Rosso O.A. Wavelet entropy of stochastic processes // arXiv:physics/0603144 v1 17 Mar 2006.

Індивідуальна робота № 14

Тема. Дослідження асиметрії (необоротності) часу складних сигналів

Мета. Навчитись розраховувати значення індексу асиметрії часу для складних сигналів та досліджувати їх динаміку у випадку незворотних змін, побудови передвісників критичних і кризових явищ

“Скільки ж довелося мені прочитати нудних сторінок, на яких автор займався пошуком в економіці чогось такого, що відповідає ентропії або тому чи іншому виду енергії!”

П. Самуельсон. З Нобелівської лекції («Thesis». Vol. 1. № 1 Winter 1993. Р. 192)

“Energy is the queen of the world, and entropy is her shadow” W. Ostwald

“Енергія є королевою світу, а ентропія – її тінню”

В. Оствальд

Теоретичні відомості

Необоротність часу - фундаментальна властивість нерівноважних систем. Вона має важливе значення для оцінки стану складних динамічних процесів, які відбуваються на різних масштабах.

Введемо деякі основні означення.

Системи поділяють на **ізолювані, закриті і відкриті**.

В *ізолюваних* системах відсутній обмін із зовнішнім середовищем, в *закритих* є обмін тільки енергією, але не масою, у *відкритих* – і масою і енергією

Виділяють також інтенсивні і екстенсивні (адитивні) системи. При цьому екстенсивні параметри характеризують систему як ціле (маса, об'єм), інтенсивні параметри можуть мати окремі значення в кожній точці системи.

Для нерівноважних систем модифікуються і закони термодинаміки. Нагадаємо, що перший з них постулює існування функції стану – енергії, а другий – ентропії.

Якщо рівняння, які описують поведінку у часі деяких процесів інваріантні по відношенню до знаку у змінної “час”, то процеси називаються зворотними, інакше – незворотними.

Ентропія походить від грецького *εντροπη* - еволюція. Ентропія є величиною адитивною, хоча останнім часом К, Тсаллісом показано, що у випадку далеко діючих сил ентропія стає екстенсивною (неадитивною) величиною.

Зміна ентропії складається з двох частин:

$d_e S$ - обумовленої взаємодією з зовнішнім середовищем (ендогенна компонента);

$d_i S$ - обумовлена внутрішніми змінами системи (екзогенна компонента)

$$dS = d_e S + d_i S \quad .$$

Якщо зміни зворотні, то $d_i S = 0$, для незворотних процесів $d_i S > 0$.

Другий закон термодинаміки звучить так.

Для ізольованих систем потік ентропії дорівнює нулю

$$dS = d_i S \geq 0 \quad .$$

Отже, зростання ентропії вказує на незворотність процесів.

Складні системи в природі залежать від маси, енергії, ентропії й інформаційних потоків, які проходять через їх межі. При нормальних умовах, дисипативні відкриті системи перебувають у станах, далеких від рівноваги. І навпаки, у певних критичних випадках може мати місце стан, що наближається до максимально рівноважного.

Вказані системи використовують енергію, щоб розвиватися до більш ієрархічно впорядкованих структурних конфігурацій і меншої кількості можливих станів у порівнянні з навколишнім середовищем. Їхня здатність до самоорганізації пов'язана з єдиною спрямованістю потоку енергії через межі системи й необоротністю основних процесів. **Втрата необоротності часу** може бути показником деструктивних процесів с самій системі або зовнішнього руйнівного впливу.

Алгоритм розрахунку

Послідовність розрахунку індексу асиметрії часу, який являється мірою наближення системи до рівноважного стану, складається з наступних кроків:

1. Для початкового ряду динаміки функціонування певної складної системи знаходиться ряд прибутковостей:

$$Y_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (1)$$

де P_t - поточне значення ряду динаміки, P_{t-1} - попереднє значення, $t \in [1, N]$, N – кількість елементів ряду

2. Щоб дістати інформацію відносно множини часових масштабів для ряду (1) розраховується набір згладжених рядів з різною шириною вікна згладжування:

$$y_\tau(i) = \sum_{j=0}^{\tau-1} y_{i+j} / \tau, \quad (2)$$

де τ - параметр масштабу (ширина вікна згладжування).

На основі підходів статистичної фізики, ми робимо припущення, що кожна зміна динаміки процесу являється незалежною і потребує певної кількості енергії, E . Функція розподілу ймовірностей для систем цього класу має наступний відомий вигляд:

$$p \propto \exp(-\beta E - \gamma Q), \quad (3)$$

де Q представляє нерівноважне виділення тепла через межі системи, β і γ являються множниками Лагранжа, які отримані з обмежень на середнє значення енергії E , необхідної для переходу і вкладу кожного переходу у виділення теплоти Q .

3. В ряду (1) позитивні величини відповідають збільшенню початкового значення, а від'ємні – зменшенню. Різниця середньої енергії зростає початкового значення, тобто $\langle \beta E + \gamma Q \rangle_{y_\tau > 0}$, і спадів - $\langle \beta E + \gamma Q \rangle_{y_\tau < 0}$, може бути використана як міра асиметрії оборотності часу.

Враховуючи, що вираз (3) пов'язує енергію з емпіричним розподілом, а визначимо наступна міра необоротності часу

$$a(\tau) = \frac{\int_0^\infty [\rho(y_\tau) \ln \rho(y_\tau) - \rho(-y_\tau) \ln \rho(-y_\tau)]^2 dy_\tau}{\int_{-\infty}^\infty \rho(y_\tau) \ln \rho(y_\tau) dy_\tau}. \quad (4)$$

Ряд даних являється оборотним, якщо $a(\tau) = 0$.

Для складних систем важливо не лише визначити ступінь необоротності ряду даних, але також дізнатися, який із рядів показує «прямий» напрямок, а який - зворотній. Вираз (4) не надає такої інформації. Тому замість нього розглядаємо наступний

$$A(\tau) = \frac{\int_0^\infty [\rho(y_\tau) \ln \rho(y_\tau) - \rho(-y_\tau) \ln \rho(-y_\tau)] dy_\tau}{\int_{-\infty}^\infty \rho(y_\tau) \ln \rho(y_\tau) dy_\tau}. \quad (5)$$

Якщо $A(\tau) > 0$, тоді для масштабу τ ряд даних являється необоротним. Проте, якщо $A(\tau) = 0$, то ряд даних може бути, а може і не бути оборотним на масштабі.

Для реальних сигналів кінцева частота являється визначеною, а y_τ - дискретна змінна. При аналізі таких сигналів використовується наступний вираз для визначення оцінки $A(\tau)$:

$$\hat{A}(\tau) = \frac{\sum_{y_\tau > 0} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]}{\sum_{y_\tau} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]} - \frac{\sum_{y_\tau < 0} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]}{\sum_{y_\tau} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]}, \quad (6)$$

де $\Pr(y_\tau)$ означає ймовірність значення y_τ .

4. Для діапазону масштабів часу ми тоді легко можемо розрахувати мультифрактальний індекс асиметрії (A_I) наступним чином:

$$A_I = \sum_{\tau=1}^L \hat{A}(\tau) / \tau .$$

Хід роботи

Для дослідження динамічних рядів за допомогою індексу необоротності часу необхідно завантажити програму **time_irrevers**, яка дозволяє як отримувати загальне значення індексу асиметрії для обраного часового ряду, так і досліджувати динаміку зміни значення A_t , використовуючи процедуру рухомого вікна.

Для нормальної роботи програми необхідно, щоб каталог із кодами програми являвся поточним у MatLab.

Для початку розрахунку необхідно завантажити ряд даних із текстового файлу з розширенням dat, txt, або ts, використовуючи меню File→Read.

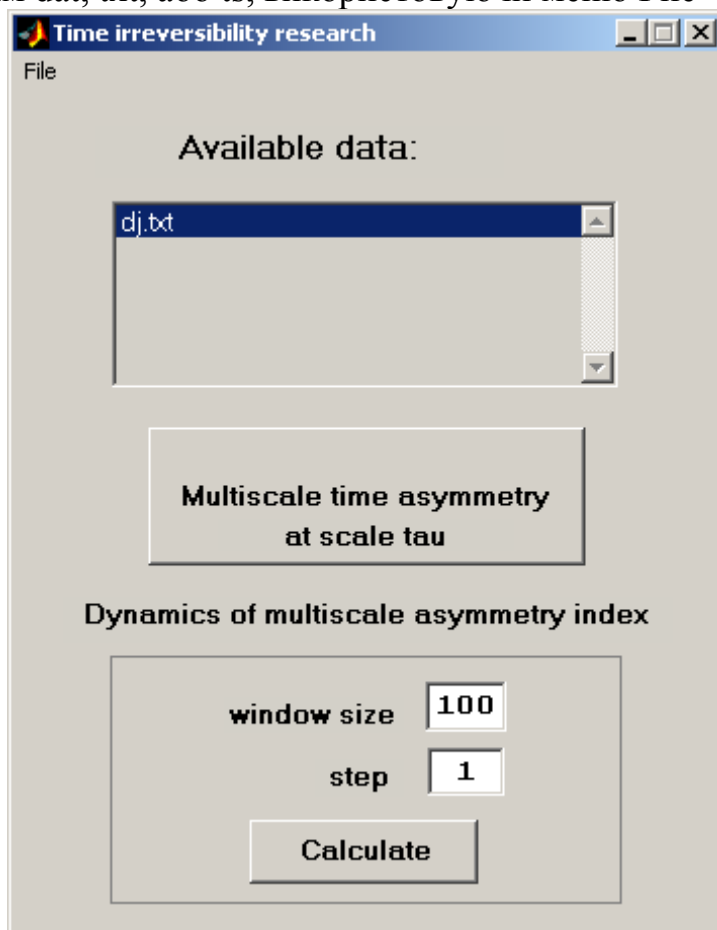
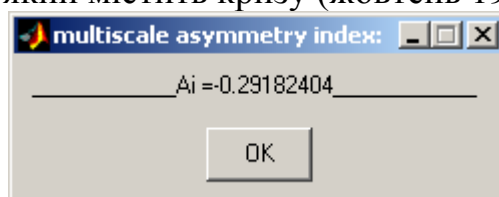


Рис. 1. Вікно програми time_irrevers із завантаженим рядом даних

Якщо потрібно розрахувати загальне значення індексу необоротності часу для всього ряду, то необхідно натиснути кнопку **Multiscale time asymmetry at scale tau**. По закінченню розрахунку на екран буде виведене значення A_t , а також графік $\sum_{y_\tau > 0} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]$, $\sum_{y_\tau < 0} \Pr(y_\tau) \ln[\Pr(y_\tau)]$ і $A(\tau)$ для різних масштабів τ . На рис. 2 представлений результат обчислень для індексу Dow Jones за період з 1986 до 1988 року, який містить кризу (жовтень 1987 р.)



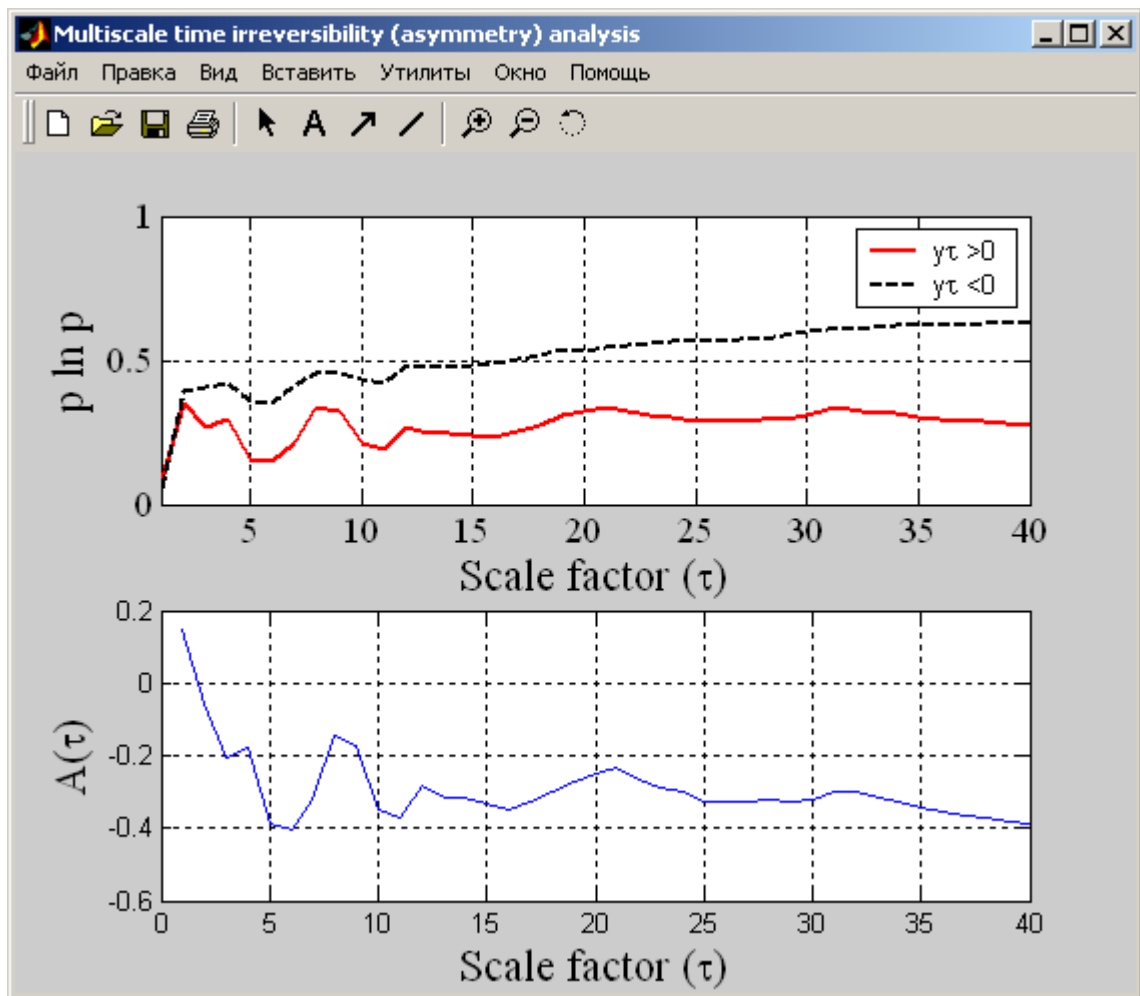


Рис. 2. Результат розрахунку, який виводиться при натисненні на кнопку **Multiscale time asymmetry at scale tau.**

Другий блок, позначений назвою **Dinamics of multiscale asymmetry index** дозволяє відслідковувати зміну індексу необоротності часу в процесі розвитку системи. Ця можливість реалізовується завдяки використанню методу рухомого вікна. В блок також включені інструменти для настройки ширини вікна і шагу його зміщення. Приклад розрахунку динаміки зміни A_t для індексу Dow Jones за період з 1986 до 1988 року представлений на рис.3.

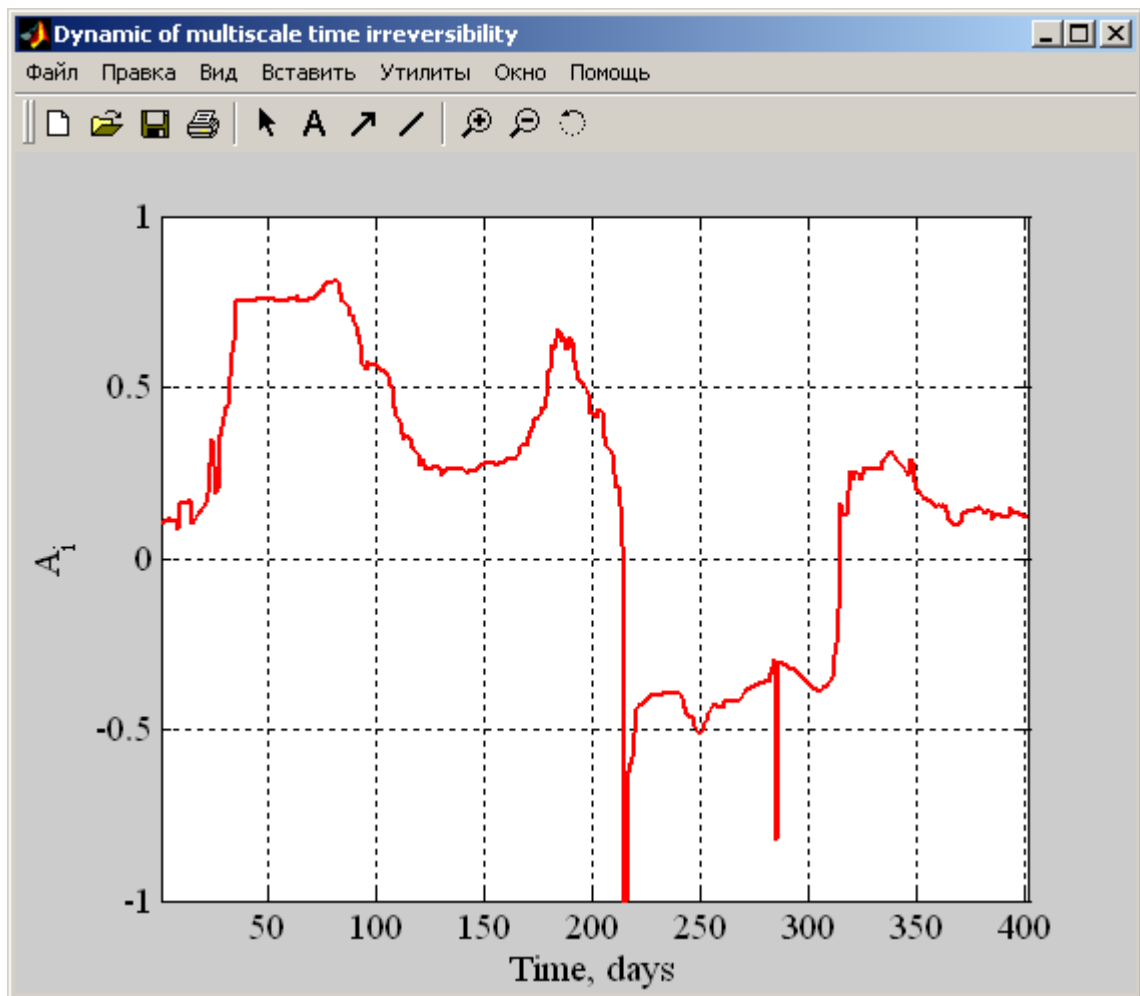


Рис. 3. Дослідження динаміки зміни значення A_i для індексу Dow Jones 1986-1988 р.

Завдання для самостійної роботи

Виберіть в папці **crash_time_series** відповідну базу даних, яка містить кризове явище. Виконайте аналіз поведінки індексу необоротності часу. Виділіть період кризи на графіку, проаналізуйте одержаний результат у звіті.

Контрольні питання

1. Поясніть основну ідею використання індексу необоротності часу для аналізу функціонування складних економічних систем
2. Яким чином і чому змінюється динаміка A_i в умовах кризи?

Список використаної літератури

1. D. R. Cox, Scand. J. Stat. Theory Appl. **8**, 93 (1981).
2. I. Prigogine and I. Antoniou, Ann. N.Y. Acad. Sci. **879**, 8 (1999).
3. D. R. Chialvo and M. M. Millonas, Phys. Lett. A **209**, 26 (1995).
4. L. Stone, G. Landan, and R. M. May, Proc. R. Soc. London **263**, 1509 (1996).
5. R. Edwards and A. Beuter, J. Clin. Neurophysiol. **17**, 87 (2000).
6. J. Timmer, C. Gantert, G. Deuschl, and J. Honerkamp, Biol. Cybern. **70**, 75 (1993).
7. M. J. van der Heyden, C. Diks, J. P. M. Pijn, and D. N. Velis, Phys. Lett. A **216**, 283 (1996).
8. C. Braun *et al.*, Am. J. Physiol. **275**, H1577 (1998).

Індивідуальна робота № 15

Тема. Дослідження процесів синхронізації в часових рядах.

Мета. Навчитись розраховувати значення різних мір синхронізації часових рядів та досліджувати їх динаміку при дослідженні складних сигналів

Теоретичні відомості

Синхронізація в складних системах

Явище синхронізації широко розповсюджене в науці, техніці і суспільстві. Тенденція до синхронної поведінки спостерігається в різних за суттю системах, таких як годинник, лазери, цвіркуни, пейсмейкери серця, нейрони, електронні генератори та аплодуючі глядачі в залі. Такі ефекти є універсальними; їх можна пояснити у рамках єдиного підходу, що ґрунтується на сучасних досягненнях нелінійної динаміки.

Постає питання про міру узгодженості двох сигналів, заданих дискретно. Однею з таких мір можна вважати синхронізацію.

Виявляють 2 види синхронізації: **повна синхронізація** сигналів (повна відповідність цих сигналів), **амплітудна синхронізація** (узгодженість амплітуд сигналів при рівномірній зміні різниці фаз), та **фазова синхронізація** (узгодженість фаз сигналів при довільній амплітуді).

Для визначення фази сигналів використовується перетворення Гільберта, яке застосовується у фізиці. Комплексна частина дискретного перетворення Гільберта дає фазу дискретного сигналу

$$S(t) = s(t) + i s_H(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}, \quad s_H(t) = \pi^{-1} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

де P.V. – позначає головне значення інтегралу Коші.

При практичному застосуванні цього методу визначення фази дискретного сигналу, з'являються проблеми з так званими нестационарними рядами. В таких рядах фаза за вищерозглянутим методом знаходиться невірно.

Для подолання цієї труднощі, будемо використовувати генералізовану синхронізацію. Широка концепція генералізованої синхронізації була вперше запропонована в 1995 в роботі Рулкова. На основі цієї концепції розроблені методи визначення генералізованої синхронізації в експериментальних часових рядах, такі як: Amhold (1999), Quian Quiroga (2002), Rulkov (1995), Schiff (1996). Ці методи ґрунтуються на ідеї відновлення аттрактора методом часової затримки координат, запропонованої Теккенсом (1981). Цей метод відновлює простір станів, використовуючи m -розмірні вектори, компонентами яких є послідовні значення сигналів $X_n = \{x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}\}$, $Y_n = \{y_n, y_{n+\tau}, \dots, y_{n+(m-1)\tau}\}$, m – розмірність фазового простору, τ – часовий проміжок. Якість реконструкції простору станів залежить від вибору показників m та τ . За теоремою Таккенса, розмірність m повинна бути достатньо великою, щоб визначити аттрактор, але обмеженою, щоб забезпечити швидкість обчислень. Нами реалізовано

геометричний метод визначення m . Ця процедура базується на мінімізації числа хибних сусідів (як і у методі рекурентних діаграм). Параметр затримки τ було обрано за домовленістю, як перший нуль автокореляційної функції сигналів.

За означенням, генералізована синхронізація існує між двома динамічними системами X і Y коли стан залежної системи Y є функцією стану системи X : $Y=F(X)$. Якщо F неперервна, дві точки, що лежать близько одна до одної на аттракторі X , мають відповідати 2-м близьким точкам на аттракторі Y (рис. 1). Важливою рисою генералізованої синхронізації є те, що 2 синхронізовані часових ряди можуть мати дуже несхожий вигляд. Це є перевагою цього методу в порівнянні з іншими, в яких вимагається хоча б деяка схожість поведінки часових рядів для з'ясування взаємодії.

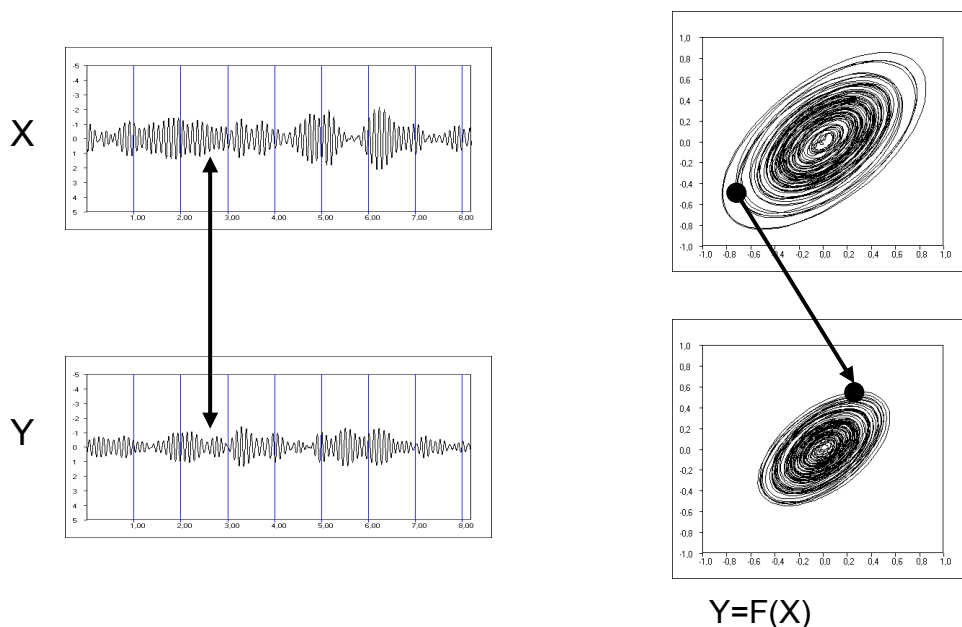


Рис. 1 Схема генералізованої синхронізації

Міри синхронізації. Фазова синхронізація

Фазова синхронізація традиційно визначається як захоплення фаз ($\varphi_x(t) - \varphi_y(t) = \text{const}$) або, у випадку хаотичних систем зчеплення фаз ($\varphi_x(t) - \varphi_y(t) < \text{const}$) двох коливних сигналів.

В подальшому будемо використовувати усереднену фазову когеренцію:

$$R = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i[\varphi_x(t_j) - \varphi_y(t_j)]} \right|,$$

де $\varphi_x(t)$ – функція фази сигналу x у часі, а $\varphi_y(t)$ – функція фази сигналу y у часі. Середня фазова когеренція обчислювалась усередненням по j на вікні довжини N з переміщенням вікна у часі. В результаті можна досліджувати динаміку синхронності у часі.

Для обчислення фазової синхронізації двох сигналів $y(t)$ і $x(t)$ у часі $\varphi(t) = \frac{s_1(t)}{s(t)}$ необхідно визначити їх фази $\varphi_y(t)$ і $\varphi_x(t)$. Для цього ми використали методику, запропоновану в теорії аналітичного сигналу. Миттєва фаза визначається так:

$$s_1(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t')}{t-t'} dt',$$

де $s_1(t)$ обчислюється за допомогою *перетворення Гільберта*.

Міра синхронізації між максимумами сигналів

При застосуванні вищезгаданих методик до реальних сигналів, які містять в собі як шум, так і коливання в широкому діапазоні, виникають ряд проблем, для вирішення яких необхідно здійснити попередню фільтрацію даних по певній частоті. Метод, про який ідеться далі, має можливість вирішити ці проблеми без застосування фільтрації. Цей метод полягає у відтворенні фази сигналу по сусіднім максимальним точкам (пікам коливань). Точки максимумів вважаються точками, в яких фаза кратна 2π . Алгоритм аналізу наступний: знаходяться локальні точки максимумів сигналів (максимум на інтервалі вибраної довжини w). Ця довжина дає можливість налаштуватись на певну частоту, яка є найбільш інформативною в сигналі. Оскільки на інтервалі w має бути тільки один максимум, то пульсації високої частоти не впливають на фазу сигналу.

По отриманій таким чином фазі обчислюється середня фазова когеренція, яка і вважається мірою синхронізованості сигналу.

Хід роботи

Для аналізу часових рядів на синхронізацію будемо користуватись двома програмними продуктами, які знаходяться, відповідно, у папках $c:\matlab6p5\work\sinchron$ та $c:\matlab6p5\work\Synchro$. Вони використовують дещо різні види кількісних показників синхронізації. Тому розглянемо їх окремо.

Запустіть матлаб та перейдіть у папку з пакетом **sinchron**, або вкажіть шлях до пакету. Для запуску скористайтесь командою **start**. Після успішного запуску Ви побачите робоче вікно пакету **sinchron** (рис.2).

Пакет дає можливість завантажити 2 сигнали для аналізу їх синхронності. Є можливість налаштувати деякі параметри обчислення:

- довжина рухомого вікна, в якому обчислюються міри синхронізації.
- Крок, з яким дані пропускаються для швидкості обчислень.
- Довжина вікна для алгоритму синхронізації максимумів. Ця довжина впливає на частоту піків, по якій аналізується синхронність сигналів.

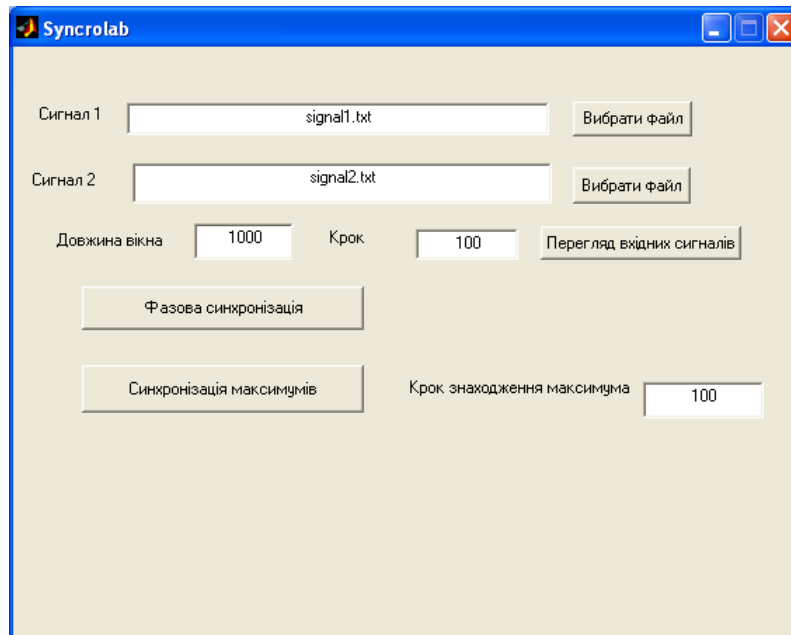


Рис. 2. Робоче вікно пакету **sinchron**

Завантажити дані можна за допомогою кнопок «Обзор» для відповідних рядів. Виберіть пару рядів та завантажте їх в пакет. Для перегляду виду сигналів можна скористатися кнопкою «Перегляд», яка відобразить сигнали на графіку (рис. 3).

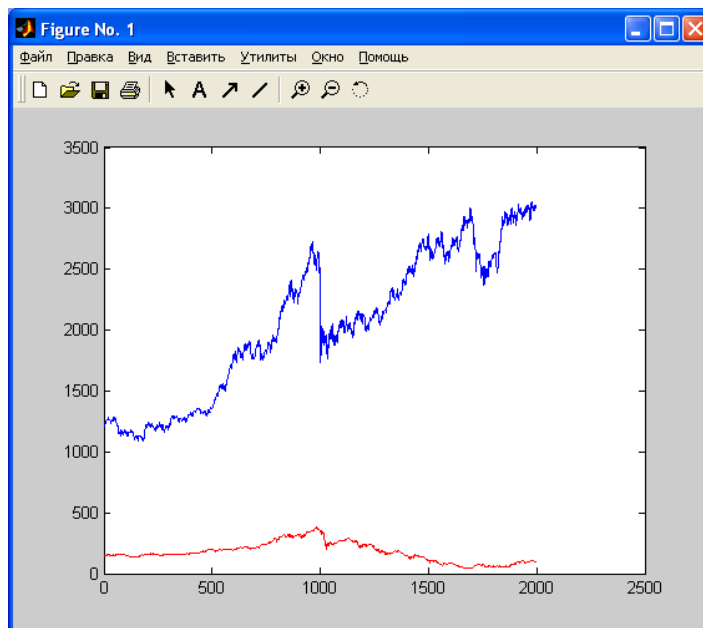


Рис. 3 Вигляд сигналів, для яких проводиться аналіз синхронізаційних властивостей

Для аналізу синхронізації натисніть кнопку, яка відповідає виду синхронізації. Наприклад, «Фазова синхронізація» або «Синхронізація максимумів».

Для дослідження процесів синхронізації візьмемо динамічні ряди, які містять кризу. Довжина рядів повинна співпадати. Наприклад, На рисунках 4-5

наведені приклади розрахунків фазової синхронізації та синхронізації максимумів.

Мета пошукової роботи в тому, щоб проаналізувати синхронізацію між різними парами кризових даних з метою прогнозування та попередження цих небажаних явищ.

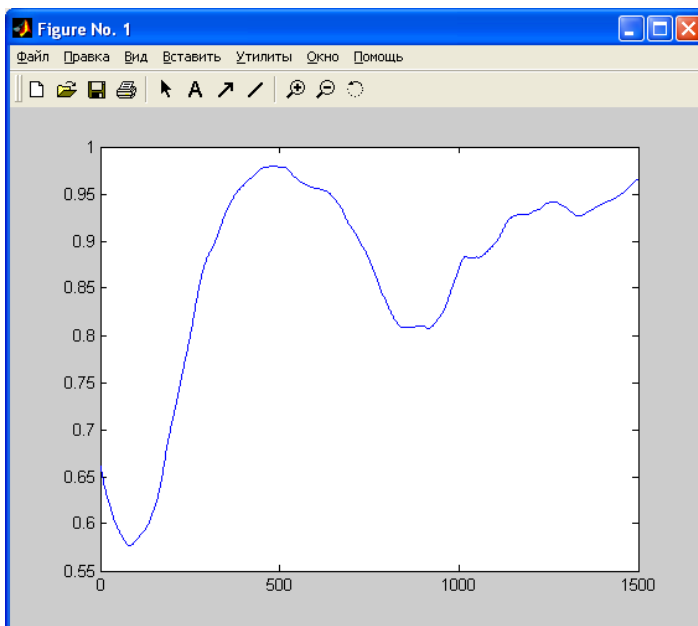


Рис. 4 Фазова синхронізація між кризами dj1929першим та dj 1987

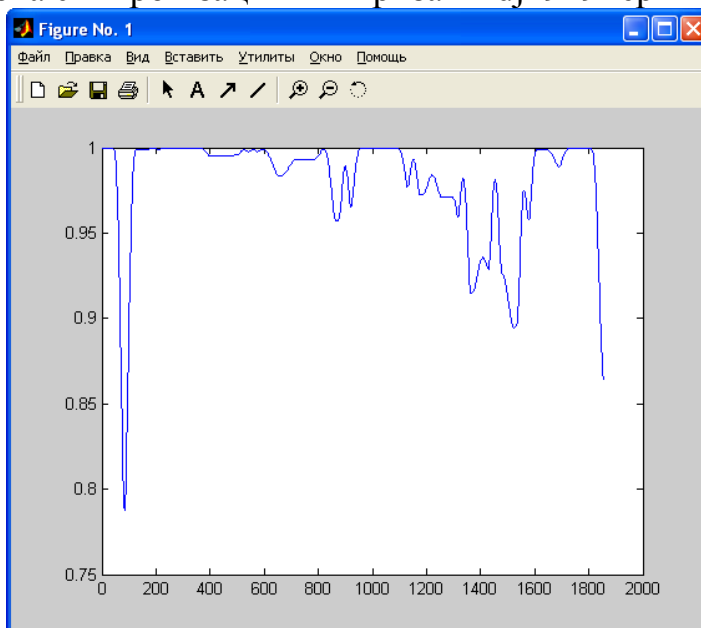


Рис. 5 Синхронізація максимумів вибраних рядів

При виконанні роботи необхідно досліджувати синхронізацію обома реалізованими методами. Як було зазначено вище, метод синхронізації максимумів вимагає налаштування розміру вікна, на якому вибирається максимум. При дослідженні здійснить перегляд сигналу та виберіть цей розмір в залежності від періоду найбільш інформативних коливань в сигналі. Розмір вікна має бути приблизно рівним півперіоду коливань.

Пакет **Synchro** використовує лінійні і нелінійні міри синхронізації. У якості лінійної міри використовується функція автокореляції. Нехай ми маємо

два незалежно знайдені дискретні часові ряди x_n і $y_n, n = 1, \dots, N$. Тоді функцію автокореляції можна визначити з виразу

$$c_{xy}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_{i+\tau} - \bar{y}}{\sigma_y} \right),$$

де \bar{x} і σ_x позначені середнє і варіація, а τ - часовий лаг. Автокореляція дає міру лінійної синхронізації між x і y . Її абсолютне значення знаходиться на проміжку від нуля (синхронізація відсутня) до одиниці (максимальна синхронізація). При цьому функція симетрична: $c_{xy}(\tau) = c_{yx}(\tau)$.

Щодо нелінійної взаємозалежності існують декілька мір. Нехай з часових рядів, які характеризують дві системи x і y , реконструйовані вектори затримки $x_n = (x_n, \dots, x_{n-(m-1)\tau})$ і $y_n = (y_n, \dots, y_{n-(m-1)\tau})$, де $n=1 \dots N$, m - розмірність вкладення, а τ визначає величину часового лагу. Позначимо далі $r_{n,j}$ і $s_{n,j}, j = 1, \dots, k$, часові індекси k найближчих сусідів x_n і y_n , відповідно.

Для кожного x_n , середнє квадратичне Евклідової відстані до його k сусідів визначене, як

$$R_n^{(k)}(X) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x_n - x_{r_{n,j}})^2,$$

а Y -обумовлена середня квадратична Евклідова відстань, є визначено шляхом заміни найближчих сусідів еквівалентними за часом найближчими сусідами y_n

$$R_n^{(k)}(XY) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x_n - x_{s_{nj}})^2.$$

Якщо скупчення точок $\{x_n\}$ має середній радіус $R(X) = (1/N) \sum_{n=1}^N R_n^{(N-1)}(X)$, то $R_n^{(k)}(XY) \approx R_n^{(k)}(X) \ll R(X)$, якщо системи сильно корельовані, і $R_n^{(k)}(XY) \approx R(X) \gg R_n^{(k)}(X)$, якщо вони незалежні. Відповідно ми можемо визначити міру взаємозалежності $S^{(k)}(XY)$ як

$$S^{(k)}(XY) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R_n^{(k)}(X)}{R_n^{(k)}(XY)}.$$

Оскільки $R_n^{(k)}(XY) \geq R_n^{(k)}(X)$ за побудовою, маємо

$$0 < S^{(k)}(XY) \leq 1.$$

Низькі значення $S^{(k)}(XY)$ указують на незалежність між X і Y , тоді як великі значення указують на синхронізацію (досягаючи максимуму при $S^{(k)}(XY) \rightarrow 1$).

Можна ввести і іншу міру нелінійної взаємозалежності

$$H^{(k)}(XY) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \frac{R_n^{(k)}(X)}{R_n^{(k)}(XY)}.$$

Ця міра є нульовою, якщо X і Y цілком незалежні, при цьому додатною, якщо близькість в Y має на увазі також близькість в X для рівних у часі партнерів.

Вона буде від'ємною, якщо близькі пари в Y будуть відповідати переважно віддаленим парам в X .

Ще однією нормалізованою (на відміну від S) мірою синхронізації є величина

$$N^{(k)}(XY) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R_n(X) - R_n^{(k)}(XY)}{R_n(X)}.$$

Вона (як і H) може бути слабо негативною і, як правило, більш стійка міра, ніж S .

Протилежні взаємозалежності $S(YX), H(YX)$ і $N(YX)$ визначені за аналогією і, взагалі кажучи, не дорівнюють до $S(XY), H(XY)$ і $N(XY)$, відповідно. Вказана асиметрія – їх головна перевага над іншими нелінійними мірами, зокрема і фазовою синхронізацією, описаною в першій частині роботи. Ця асиметрія може надати інформацію відносно різних аспектів динамічних властивостей кожного з об'єктів.

У вікні команд наберемо команду **synchro_gui2**. У відповідних вікнах інтерфейсу користувача (рис. 6) вибираємо часові ряди для аналізу і параметри розрахунку.

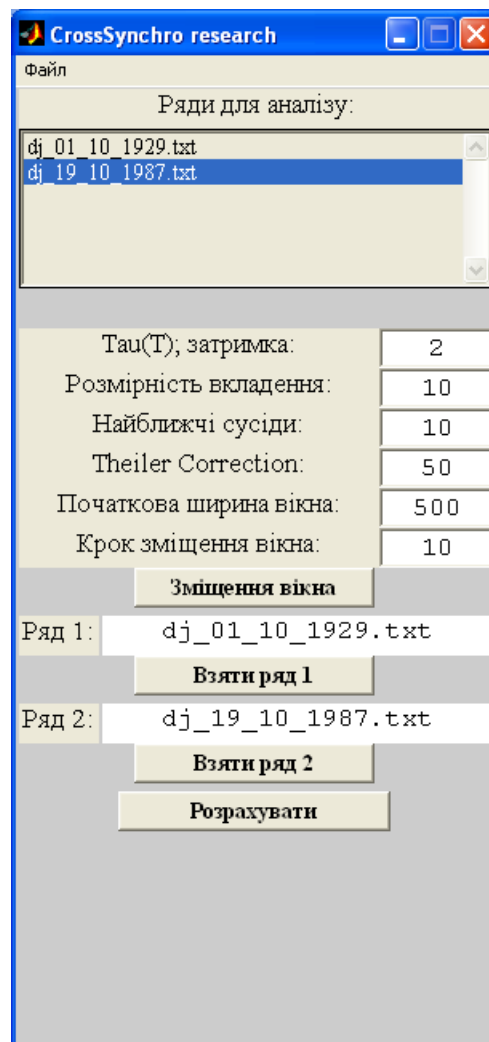


Рис. 6 Інтерфейс пакету **Synchro** для вибраних кризових рядів

Увага! Особливістю розрахунку вказаних мір є вимога до вхідних даних, які не повинні бути великими за модулем числами. Тому, якщо виникають проблеми, треба працювати не з оригінальними, а з нормалізованими даними. Нормалізацію легко реалізувати за допомогою відомого пакету **work2**.

Результати розрахунків для параметрів, які відповідають рис. 6 будуть сім графіків: $S(YX)$, $H(YX)$, $N(YX)$, $S(XY)$, $H(XY)$, $N(XY)$ і C (автокореляція), аналіз загальних і частинних залежностей яких для різних сигналів і входить до одного із завдань роботи.

Контрольні запитання

1. Поясніть природу явища синхронізації в складних системах різної природи
2. Які міри синхронізації Ви знаєте. На яких принципах вони побудовані
3. Дайте інтерпретацію одержаним результатам. Чи можна використовувати міри синхронізації для побудови передвісників кризових явищ? І якщо можна, то які з них?